Curso de Probabilidad y Estadística

Temas: (1) Introducción, (2) Probabilidad y (3) Distribuciones y Densidades de Probabilidad

Dr. José Antonio Camarena Ibarrola

camarena@umich.mx

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Un poco de Historia

- Anteriormente denominada *Teoría de la Casualidad*
- Pascal y Fermat estudiaron Problemas de Juegos en 1654
- Jacob Bernoulli desarrolló una Teoría Sistemática en 1713
- Abraham de Moivre escribió *The Doctrine of Chances* en 1718
- Pierre Simon de Laplace escribió *Théorie analytique des probabilités* en 1812
- Gauss y Laplace hicieron contribuciones en relación con la teoría de errores en mediciones en Astronomía y Geodesia.

Técnicas de Conteo

- Regla de la multiplicación
- Permutaciones de n objetos tomados r a la vez
- Combinaciones de n objetos tomados r a la vez
- Repartiendo objetos distinguibles en cajas
- Repartiendo Objetos indistingibles en cajas

Regla de la multiplicación

Si un proceso consiste de k pasos, el primer paso se puede hacer de n_1 maneras, el segundo de n_2 maneras y así sucesívamente hasta el paso k que se puede hacer de n_k maneras, entonces el proceso completo se puede hacer de $n_1 n_2 \ldots n_k$ maneras diferentes.

Regla de la multiplicación

Si un proceso consiste de k pasos, el primer paso se puede hacer de n_1 maneras, el segundo de n_2 maneras y así sucesívamente hasta el paso k que se puede hacer de n_k maneras, entonces el proceso completo se puede hacer de $n_1 n_2 ... n_k$ maneras diferentes.

Ejemplo: Se lanza un dado, luego se saca una pelota de una caja donde hay rojas, verdes y azules, finalmente se lanza una moneda. Cuantos resultados posibles tendremos?

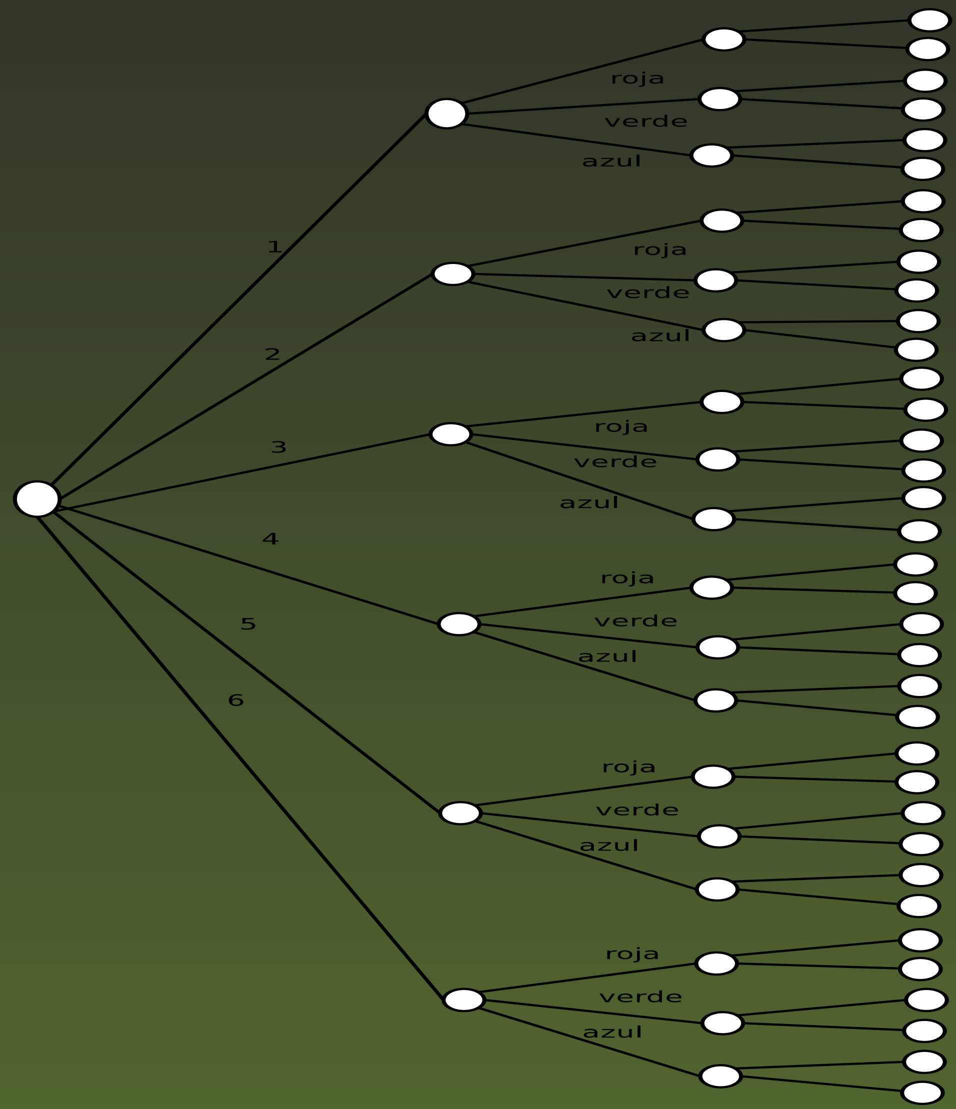
Regla de la multiplicación

Si un proceso consiste de k pasos, el primer paso se puede hacer de n_1 maneras, el segundo de n_2 maneras y así sucesívamente hasta el paso k que se puede hacer de n_k maneras, entonces el proceso completo se puede hacer de $n_1 n_2 ... n_k$ maneras diferentes.

Ejemplo: Se lanza un dado, luego se saca una pelota de una caja donde hay rojas, verdes y azules, finalmente se lanza una moneda. Cuantos resultados posibles tendremos?

Resp: $S = (6)(3)(2) = 36$

Diagrama de Arbol



Permutaciones

Las diferentes formas en que se pueden arreglar u ordenar un conjunto de objetos de cardinalidad n se conoce como las *permutaciones de* n *objetos tomados TODOS a la vez*

Permutaciones

Las diferentes formas en que se pueden arreglar u ordenar un conjunto de objetos de cardinalidad n se conoce como las *permutaciones de* n *objetos tomados TODOS a la vez*

$$ {}_nP_n = (n)(n-1)(n-2)...(2)(1) = n! $$

Permutaciones

Las diferentes formas en que se pueden arreglar u ordenar un conjunto de objetos de cardinalidad n se conoce como las *permutaciones de n objetos tomados TODOS a la vez*

$$_{n}P_{n} = (n)(n-1)(n-2)...(2)(1) = n!$$

Problema: Cuantas permutaciones tiene la cadena "hola"?

Permutaciones

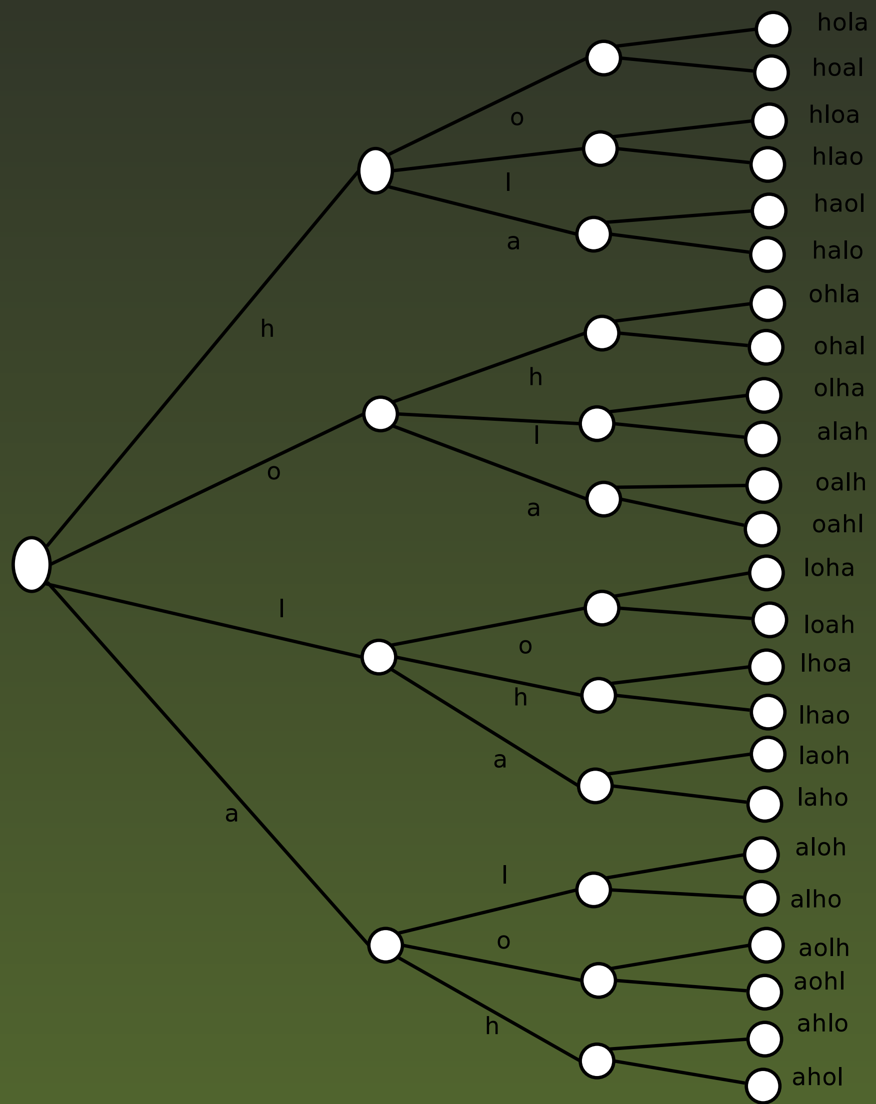
Las diferentes formas en que se pueden arreglar u ordenar un conjunto de objetos de cardinalidad n se conoce como las *permutaciones de* n *objetos tomados TODOS a la vez*

$${}_nP_n = (n)(n-1)(n-2)...(2)(1) = n!$$

Problema: Cuantas permutaciones tiene la cadena "hola"?

Respuesta: 4!=24

Permutaciones de la cadena hola



Permutaciones de n objetos tomando r a la vez

$$_nP_r = (n)(n-1)(n-2)...(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Permutaciones de n objetos tomando r a la vez

$$ {}_nP_r = (n)(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Ejemplo: De cuantas formas se puede elegir un consejo de administración formado por un Presidente, un Vicepresidente, un Secretario y un Tesorero de un grupo de socios formado por 20 personas?

Permutaciones de n objetos tomando r a la vez

$$ {}_nP_r = (n)(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Ejemplo: De cuantas formas se puede elegir un consejo de administración formado por un Presidente, un Vicepresidente, un Secretario y un Tesorero de un grupo de socios formado por 20 personas?

Resp: $\frac{20!}{(20-4)!} = \frac{20!}{16!} = (20)(19)(18)(17)$=116,280 posibles consejos de Administración

Combinaciones de n objetos tomando r a la vez

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

Combinaciones de n objetos tomando r a la vez

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

Ejemplo: De cuantas formas se puede elegir una comisión de 4 personas elegidas de un grupo de 20?

Combinaciones de n objetos tomando r a la vez

$$ {}_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} $$

Ejemplo: De cuantas formas se puede elegir una comisión de 4 personas elegidas de un grupo de 20?

Resp: $\frac{20!}{(20-4)!4!} = \frac{116{,}280}{24} = 4845$ posibles comisiones

Contando particiones

n objetos se van a repartir en k cajas de manera que en la primera caja se guarden n_1 objetos, en la segunda se almacenen n_2 objetos y así sucesívamente hasta la caja k en la que se ponen n_k objetos. Evidentemente $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, el número de maneras en que se puede hacer esto es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Contando particiones

n objetos se van a repartir en k cajas de manera que en la primera caja se guarden n_1 objetos, en la segunda se almacenen n_2 objetos y así sucesívamente hasta la caja k en la que se ponen n_k objetos. Evidentemente $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, el número de maneras en que se puede hacer esto es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Ejemplo: De cuantas formas se pueden dividir 5 objetos distinguibles en 2 grupos, uno con 3 y otro con 2 objetos

Contando particiones

n objetos se van a repartir en k cajas de manera que en la primera caja se guarden n_1 objetos, en la segunda se almacenen n_2 objetos y así sucesívamente hasta la caja k en la que se ponen n_k objetos. Evidentemente $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, el número de maneras en que se puede hacer esto es:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Ejemplo: De cuantas formas se pueden dividir 5 objetos distinguibles en 2 grupos, uno con 3 y otro con 2 objetos

Resp: 5!/[3!2!] = 120/12 = 10 (abc|de abd|ce abe|cd acd|be ace|bd ade|bc bcd|ae bce|ad bde|ac cde|ab)

Mas Permutaciones

Contar particiones es equivalente a contar el número de permutaciones de n objetos tomados todos a la vez cuando n_1 objetos son indistiguibles entre ellos, n_2 objetos son tambien indistinguibles entre ellos y así sucesívamente.

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Mas Permutaciones

Contar particiones es equivalente a contar el número de permutaciones de n objetos tomados todos a la vez cuando n_1 objetos son indistiguibles entre ellos, n_2 objetos son tambien indistinguibles entre ellos y así sucesívamente.

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Ejemplo: Cuantas permutaciones de la cadena "pozo" existen?

Mas Permutaciones

Contar particiones es equivalente a contar el número de permutaciones de n objetos tomados todos a la vez cuando n_1 objetos son indistiguibles entre ellos, n_2 objetos son tambien indistinguibles entre ellos y así sucesívamente.

$$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

Ejemplo: Cuantas permutaciones de la cadena "pozo" existen?

Resp: 4!/2! = 12

pozo, pooz, pzoo, zpoo, zopo, zoop, opzo, ozpo, opoz, ozop, oopz, oozp

Repartir objetos distinguibles

Para contar el número de maneras en que se pueden repartir n objetos distinguibles en k cajas podemos pensar que hay que elegir caja n veces y hacerlo CON REEMPLAZO (de caja), es decir:

$$k^n$$

Repartir objetos distinguibles

Para contar el número de maneras en que se pueden repartir n objetos distinguibles en k cajas podemos pensar que hay que elegir caja n veces y hacerlo CON REEMPLAZO (de caja), es decir:

$$k^n$$

Ejemplo: De cuantas maneras se pueden repartir 3 libros distinguibles (Ej Uno de Matemáticas, uno de Electrónica y uno de programación) entre 9 estudiantes?

Repartir objetos distinguibles

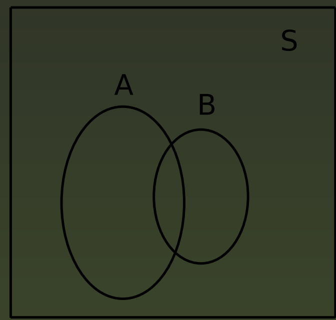
Para contar el número de maneras en que se pueden repartir n objetos distinguibles en k cajas podemos pensar que hay que elegir caja n veces y hacerlo CON REEMPLAZO (de caja), es decir:

$$k^n$$

Ejemplo: De cuantas maneras se pueden repartir 3 libros distinguibles (Ej Uno de Matemáticas, uno de Electrónica y uno de programación) entre 9 estudiantes?

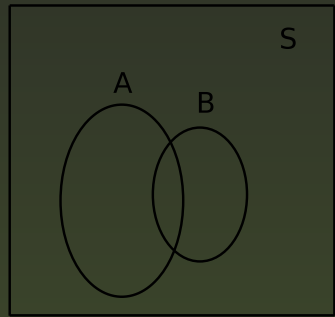
Resp: 9^3=729

Principio de Inclusión-Exclusión



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

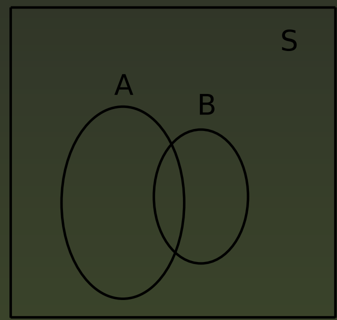
Principio de Inclusión-Exclusión



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ejemplo: Cuantos números del 1 al 100 son múltiplos de 4 o de 5?

Principio de Inclusión-Exclusión

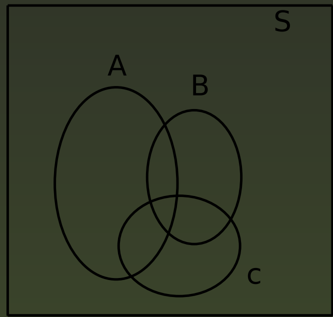


$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Ejemplo: Cuantos números del 1 al 100 son múltiplos de 4 o de 5?

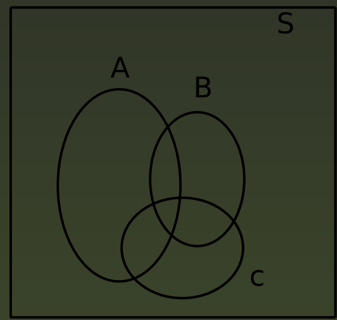
Resp: Hay 100/5=20 múltiplos de 5
Hay 100/4=25 múltiplos de 4
Hay 100/20=5 múltiplos del mcm(4,5)
Por tanto hay 20+25-5=40 múltiplos de 4 o de 5

Inclusión-Exclusión (3 Cjtos)



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

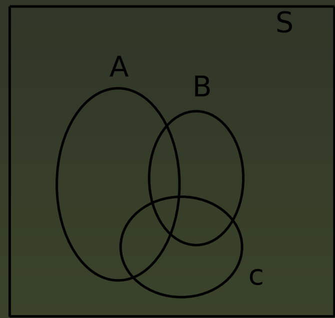
Inclusión-Exclusión (3 Cjtos)



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ejemplo: Cuantos números del 1 al 100 son múltiplos de 2, 3 o 5?

Inclusión-Exclusión (3 Cjtos)



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Ejemplo: Cuantos números del 1 al 100 son múltiplos de 2, 3 o 5?

Resp: Hay 100/2=50 múltiplos de 2
Hay 100/3=33 múltiplos de 3
Hay 100/5=20 múltiplos de 5
Hay 100/6=16 múltiplos del mcm(2,3)
Hay 100/15=6 múltiplos del mcm(3,5)
Hay 100/10=10 múltiplos del mcm(2,5)
Hay 100/30=3 múltiplos del mcm(2,3,5)

Por tanto hay 50+33+20-16-6-10+3=74 multiplos de 2, 3 o 5

Definiciones Elementales

Experimento (Observación).- Proceso con las siguientes propiedades

1. Se lleva a cabo de acuerdo a un conjunto de reglas bién definido
2. Se puede repetir
3. Su resultado depende de la casualidad

Definiciones Elementales

Espacio Muestral.- Conjunto de resultados posibles de un experimento. Ej:

- Al lanzar un dado $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Al extraer un tornillo de una caja $S = \{Bueno, Defectuoso\}$
- Al lanzar dos monedas $S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

Evento

Subconjunto del espacio muestral, queremos saber si el resultado de un experimento pertenece a él o no.

- Al lanzar dos dados la suma es igual a 5
  $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$
- Suponiendo que en una caja hay 5 empaques, solo los marcados 1,2 y 3 están defectuosos. Podemos considerar los siguientes eventos:
  1. evento A, ningún empaque defectuoso
     $A = \{(4,5)\}$
  2. evento B, un empaque defectuoso
     $B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$
  3. evento C, dos empaques defectuosos
     $C = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

Postulados de Probabilidad

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- P(S)=1
- Si $|A| \leq |B|$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ Regla de la complementación

Postulados de Probabilidad

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- P(S)=1
- Si $|A| \leq |B|$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ Regla de la complementación

Cual es la probabilidad de no obtener un seis al lanzar un dado legal?

Postulados de Probabilidad

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- P(S)=1
- Si $|A| \leq |B|$ entonces $P(A) \leq P(B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ Regla de la complementación

Cual es la probabilidad de no obtener un seis al lanzar un dado legal?

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

La Probabilidad segun Laplace

Si todos los elementos del espacio muestral son IGUALMENTE PROBABLES, el espacio muestral es un conjunto de cardinalidad $|S|$ y el evento A es un subconjunto de S de cardinaldidad $|A|$, entonces la probabilidad de que el evento A ocurra esta dada por:

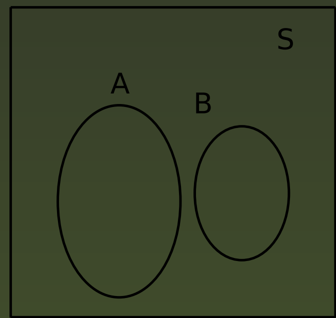
$$P(A) = |A|/|S|$$

Ejemplo: Al lanzar dos dados, el evento A de que la suma sea igual a 5 es $A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, mientras que el espacio muestral S es $\{(1,1),(1,2),..,(2,1),(2,2),..,(6,1),(6,2),..,(6,6)\}$.

Por lo tanto $P(A) = |A|/|S| = 4/36 = 1/9$

Eventos mutuamente exclusivos

Dos Eventos A y B son mutuamente exclusivos si $A \cap B = \{\}$.



Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo

Una caja tiene 20 tornillos, 5 de los cuales están defectuosos, se extraen 2 tornillos con reemplazo. Los siguiente eventos son mutuamente exclusivos:
A: No se extrajo ningún tornillo defectuoso
B: Un tornillo extraído está defectuoso
C: Ambos tornillos extraídos están defectuosos

$$A \cap B = \{\}, A \cap C = \{\}, B \cap C = \{\}$$

Cual será la probabilidad de que ambos o ningún tornillo extraido esté defectuoso?

Ejemplo

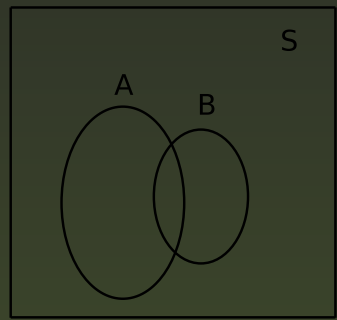
Una caja tiene 20 tornillos, 5 de los cuales están defectuosos, se extraen 2 tornillos con reemplazo. Los siguiente eventos son mutuamente exclusivos:
A: No se extrajo ningún tornillo defectuoso
B: Un tornillo extraído está defectuoso
C: Ambos tornillos extraídos están defectuosos

$$A \cap B = \{\}, A \cap C = \{\}, B \cap C = \{\}$$

Cual será la probabilidad de que ambos o ningún tornillo extraido esté defectuoso?

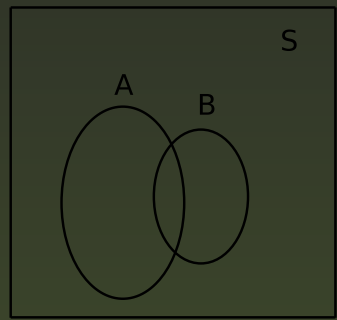
$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{(15)(15)}{(20)(20)} + \frac{(5)(5)}{(20)(20)} = \frac{5}{8}$$

Regla general de la Adición



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

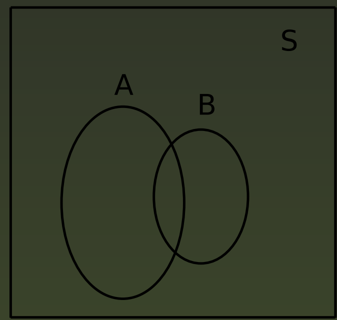
Regla general de la Adición



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Un dado legal se lanza dos veces. Cual es la probabilidad de obtener un seis en alguno de los dos lanzamientos?

Regla general de la Adición

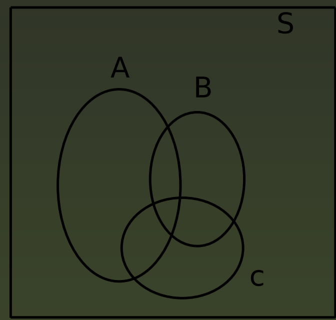


$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Un dado legal se lanza dos veces. Cual es la probabilidad de obtener un seis en alguno de los dos lanzamientos?

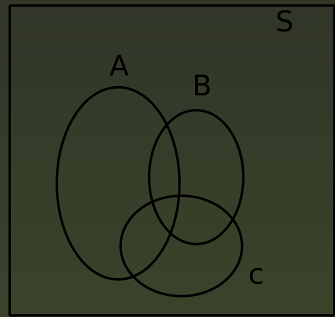
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

Regla de la Adición para 3 conjuntos



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

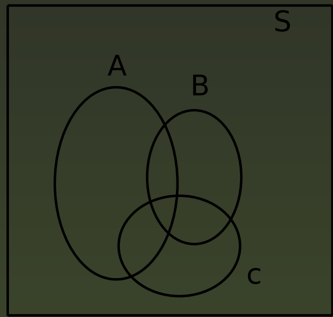
Regla de la Adición para 3 conjuntos



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo: De 3 urnas, cada una de las cuales tiene 5 fichas numeradas del 1 al 5 se extrae una ficha, determine la probabilidad de que la suma de los números de las fichas extraidas sea mayor a 3.

Regla de la Adición para 3 conjuntos



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ejemplo: De 3 urnas, cada una de las cuales tiene 5 fichas numeradas del 1 al 5 se extrae una ficha, determine la probabilidad de que la suma de los números de las fichas extraidas sea mayor a 3.

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} - \frac{16}{25} - \frac{16}{25} - \frac{16}{25} + \frac{64}{125} = \frac{124}{125}$$

Eventos Independientes

Dos eventos A y B son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Eventos Independientes

Dos eventos A y B son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo: De una caja con 20 empaques, 5 de los cuales están defectuosos se extraen dos CON REEMPLAZO, determine la probabilidad de que ambos empaques extraidos estén defectuosos.

Eventos Independientes

Dos eventos A y B son independientes si y solo si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo: De una caja con 20 empaques, 5 de los cuales están defectuosos se extraen dos CON REEMPLAZO, determine la probabilidad de que ambos empaques extraidos estén defectuosos.

$$\left(\frac{5}{20}\right)\left(\frac{5}{20}\right) = \frac{1}{16}$$

Probabilidad condicional

La Probabilidad de que ocurra el evento A dado que el evento B ocurre es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidad condicional

La Probabilidad de que ocurra el evento A dado que el evento B ocurre es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo: De una caja con 20 empaques, 5 de los cuales están defectuosos se extraen dos SIN REEMPLAZO, determine la probabilidad de que ambos empaques extraidos estén defectuosos.

Probabilidad condicional

La Probabilidad de que ocurra el evento A dado que el evento B ocurre es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo: De una caja con 20 empaques, 5 de los cuales están defectuosos se extraen dos SIN REEMPLAZO, determine la probabilidad de que ambos empaques extraidos estén defectuosos.

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \left(\frac{5}{20}\right)\left(\frac{4}{19}\right) = \frac{1}{19}$$

Eventos Independientes

Si A y B son eventos independientes, entonces:

$$P(A|B) = P(A)$$

y además

$$P(B|A) = P(B)$$

Probabilidad condicional

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Probabilidad condicional

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Ejemplo: De una caja con 20 empaques, 5 de los cuales están defectuosos se extraen tres SIN REEMPLAZO, determine la probabilidad de que los tres empaques extraidos estén defectuosos.

Probabilidad condicional

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

Ejemplo: De una caja con 20 empaques, 5 de los cuales están defectuosos se extraen tres SIN REEMPLAZO, determine la probabilidad de que los tres empaques extraidos estén defectuosos.

$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$

$P(A_3 \cap A_2 \cap A_1) = \left(\frac{5}{20}\right)\left(\frac{4}{19}\right)\left(\frac{3}{18}\right) = \frac{1}{114}$

Regla de la Probabilidad Total

Si los eventos B_1, B_1,.., B_n constituyen una partición del espacio muestral, entonces:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+...+P(B_n)P(A|B_n)$$

Regla de la Probabilidad Total

Si los eventos B_1, B_1,.., B_n constituyen una partición del espacio muestral, entonces:

P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+...+P(B_n)P(A|B_n)

Ejemplo: 50% de las lámparas son compradas a X, 40% a Y y el resto a Z. Según registros, 2% de las compradas a X resultan defectuosas, 5% de las compradas a Y resultan defectuosas y 4% de Z resultan defectuosas. Determine la probabilidad de que al comprar una lámpara resulte defectuosa.

Regla de la Probabilidad Total

Si los eventos B_1, B_1,.., B_n constituyen una partición del espacio muestral, entonces:

P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+...+P(B_n)P(A|B_n)

Ejemplo: 50% de las lámparas son compradas a X, 40% a Y y el resto a Z. Según registros, 2% de las compradas a X resultan defectuosas, 5% de las compradas a Y resultan defectuosas y 4% de Z resultan defectuosas. Determine la probabilidad de que al comprar una lámpara resulte defectuosa.

$$P(D) = P(D|X)P(X) + P(D|Y)P(Y) + P(D|Z)P(Z)$$
$$P(D) = (0.02)(0.5) + (0.05)(0.4) + (0.04)(0.1) = 0.034$$

Teorema de Bayes

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Teorema de Bayes

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Ejemplo: Respecto al ejemplo anterior, determine la probabilidad de que una lámpara defectuosa haya sido comprada al proveedor Y.

Teorema de Bayes

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{P(A)}$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)}$$

Ejemplo: Respecto al ejemplo anterior, determine la probabilidad de que una lámpara defectuosa haya sido comprada al proveedor Y.

$$P(Y|D) = \frac{P(D|Y)P(Y)}{P(D)}$$

$$P(Y|D) = \frac{(0.05)(0.4)}{0.034} = 0.588$$

Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada elemento del espacio muestral. Puede ser discreta o continua. Ejemplos:

Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada elemento del espacio muestral. Puede ser discreta o continua. Ejemplos:

X: Suma de los números obtenidos al lanzar dos dados. X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 2,3,4,..,12

Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada elemento del espacio muestral. Puede ser discreta o continua. Ejemplos:

X: Suma de los números obtenidos al lanzar dos dados. X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 2,3,4,..,12

X: Número de caras obtenidas al lanzar 2 monedas. X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 0,1 y 2

Variable aleatoria

Una variable aleatoria es una función que asigna un valor numérico a cada elemento del espacio muestral. Puede ser discreta o continua. Ejemplos:

X: Suma de los números obtenidos al lanzar dos dados. X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 2,3,4,..,12

X: Número de caras obtenidas al lanzar 2 monedas. X es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores 0,1 y 2

X: instante en que fallará una lámpara. X es una variable aleatoria continua

Función de probabilidad

La probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome el valor de 2 se denota $P(X = 2)$. La función de probabilidad de X se denota $f(x)$ y se define como:

$$f(x) = P(X = x)$$

$f(x)$ tambien se conoce como *distribución de probabilidad*

Función de probabilidad

La probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome el valor de 2 se denota $P(X = 2)$. La función de probabilidad de X se denota $f(x)$ y se define como:

$$f(x) = P(X = x)$$

$f(x)$ tambien se conoce como *distribución de probabilidad*

Se debe cumplir:

$$f(x) \geq 0$$

$$\sum_x f(x) = 1$$

Función de distribución acumulada

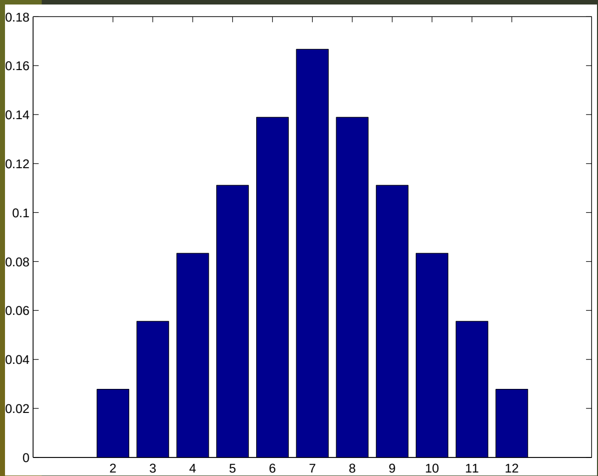
Esta función reporta la probabilidad de que la variable aleatoria discreta X tome un valor menor a x, se denota $F(x)$ y se define como:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$$

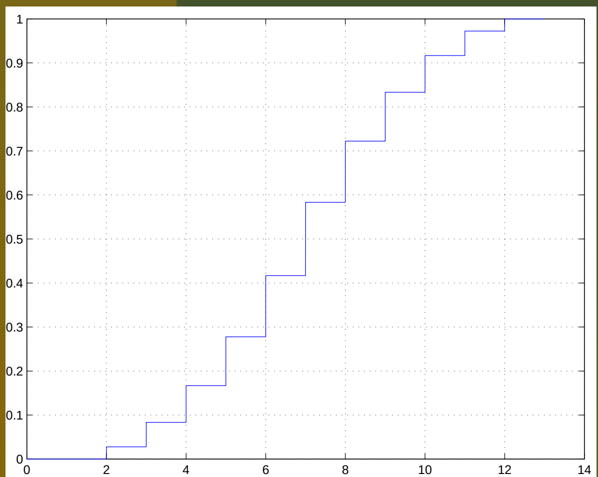
Si $a \leq b$ entonces $F(a) \leq F(b)$
$F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$
$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$
$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Ejemplo: 2 Dados

X: Suma de los números obtenidos al lanzar dos dados.



Función de distribución de probabilidad

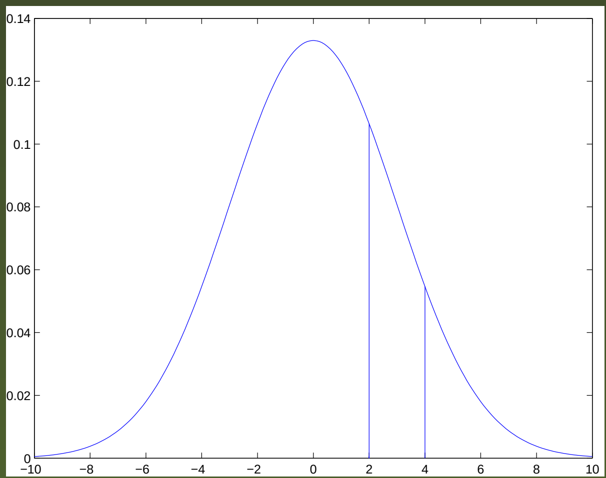


Función de distribución acumulada

Función de densidad de probabilidad

Para variables aleatorias contínuas, la función $f(x)$ conocida como *densidad*, es aquella para la que se cumple:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

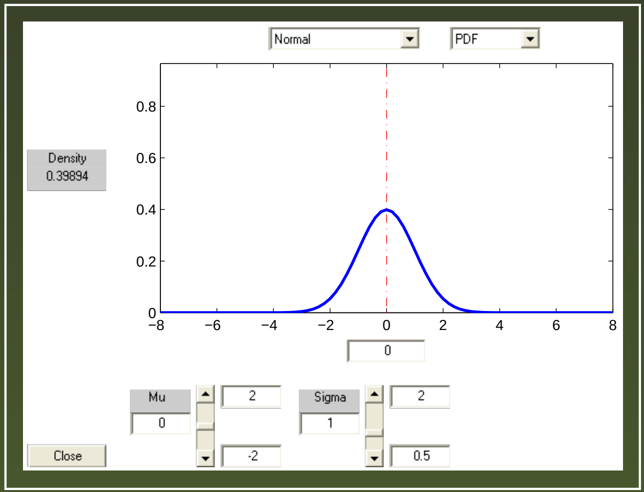


Nota: $f(x) \geq 0 \ \ \forall \ x > 0$

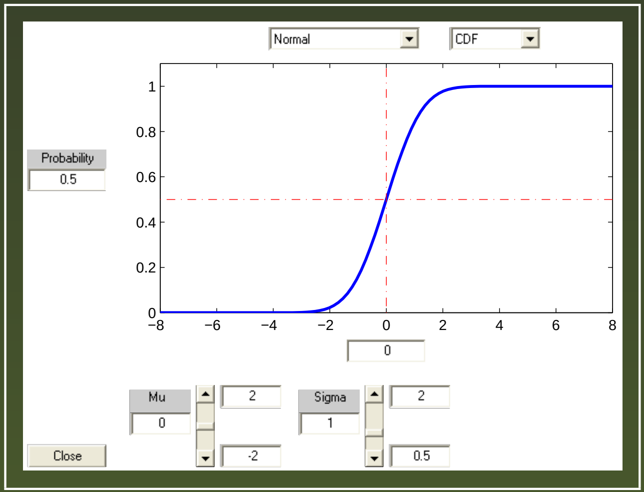
Importante: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Función de distribución acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)dv$$



PDF



CDF

Nota: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Nota: $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

En las distribuciones contínuas:

A diferencia de las distribuciones discretas, en las distribuciones continuas:

- $P(a < X < b) = P(a < X \leq b) =$
  $= P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$
- $P(X = a) = 0$

Ejemplo

El desgaste en miles de Km que experimenta cierto tipo de neumático es una variable aleatoria con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-\frac{x}{30}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Determine la probabilidad de que un neumático dure menos de 20,000 Km

Ejemplo

El desgaste en miles de Km que experimenta cierto tipo de neumático es una variable aleatoria con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

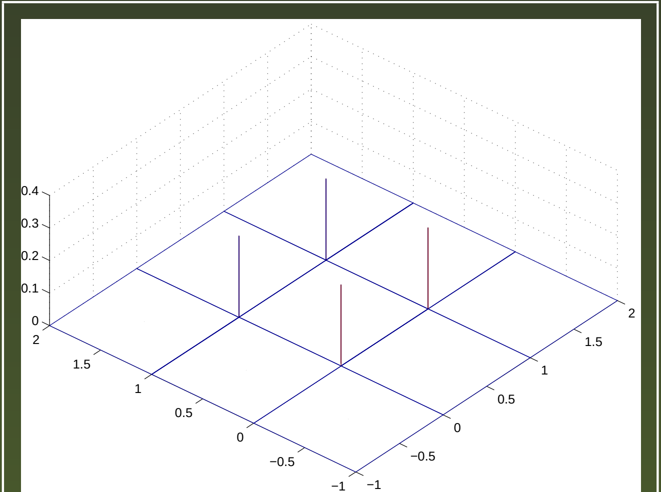
Determine la probabilidad de que un neumático dure menos de 20,000 Km

$$P(X > 20) = \int_0^{20} \frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}dx = \left[-e^{-\frac{x}{30}} \right]_0^{20}$$

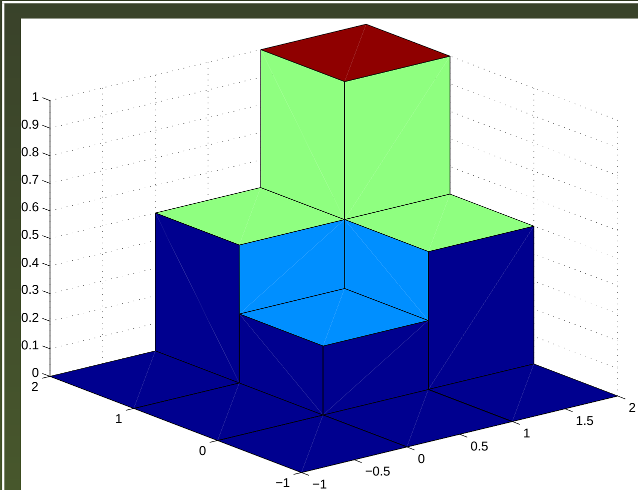
$$P(X > 20) = -[-e^{\frac{20}{30}} - 1] = 0.4866$$

Distribuciones Conjuntas

Suponga que se lanzan dos monedas
X: Número de caras obtenidas en el primer lanzamiento
Y: Número de caras obtenidas en el segundo lanzamiento



PDF



CDF

$$\sum_{x=0}^{x=1}\sum_{y=0}^{y=1} f(x,y) = 1$$

$$f(0,0)+f(0,1)+f(1,0)+f(1,1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$$

50 Refrigeradores

X: Número de defectos de acabado
Y: Número de defectos mecánicos

Y \ X	0	1	2	3	4	5	$f_2(y)$
0	11/50	4/50	2/50	1/50	1/50	1/50	20/50
1	8/50	3/50	2/50	1/50	1/50	0	15/50
2	4/50	3/50	2/50	1/50	0	0	10/50
3	3/50	1/50	0	0	0	0	4/50
4	1/50	0	0	0	0	0	1/50
$f_1(x)$	27/50	11/50	6/50	3/50	2/50	1/ 50	1

Densidad multivariable

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$$

$$f(x,y) \geq 0 \ \ \forall \ -\infty \leq x \leq \infty \ -\infty \leq y \leq \infty$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dydx$$

Densidad marginal

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

En general:

$$f_k(x_1, x_2, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, .., x_n)dx_k$$

Determine $P(0 < X < \frac{1}{2}, 1 < Y < 2)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(xy + x^2) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & en\ cualquier\ otra\ parte \end{cases}$$

Determine $P(0 < X < \frac{1}{2}, 1 < Y < 2)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(xy + x^2) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & en\ cualquier\ otra\ parte \end{cases}$$

$$P(0 < X < \frac{1}{2}, 1 < Y < 2) = \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{5}(xy + x^2)dxdy$$

$$\int_1^2 [\frac{3x^2y}{10} + \frac{3x^3}{15}]_0^{\frac{1}{2}} dy = \int_1^2 \frac{3y}{40} + \frac{1}{40} dy = [\frac{3y^2}{80} + \frac{y}{40}]_1^2 = \frac{11}{80}$$

Independencia

Dos Variables aleatorias X y Y son independientes si y solo si:

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$$

En general, las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ son independientes si y solo si:

$$f(x_1, x_2, .., x_n) = f_1(x_1)f_2(x_2)\ldots f_n(x_n)$$

Ejemplo

Son independientes las variables X y Y? dado:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(xy + x^2) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & en\ cualquier\ otra\ parte \end{cases}$$

Ejemplo

Son independientes las variables X y Y? dado:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{5}(xy + x^2) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0 & en\ cualquier\ otra\ parte \end{cases}$$

$$f_1(x) = \int_0^2 \frac{3}{5}(xy + x^2)dy = \left[\frac{3xy^2}{10} + \frac{3x^2y}{5}\right]_0^2 = \frac{12x}{10} + \frac{6x^2}{5}$$
$$f_2(y) = \int_0^1 \frac{3}{5}(xy + x^2)dx = \left[\frac{3x^2y}{10} + \frac{3x^3}{15}\right]_0^1 = \frac{3y}{10} + \frac{3}{15}$$

$$f_1(x)f_2(y) = \frac{6}{5}(x + x^2)\frac{1}{10}(3y + 2)$$
$$f_1(x)f_2(y) = \frac{3}{25}(3xy + 2x + 3x^2y + 2x^2) \neq \frac{3}{5}(xy + x^2)$$

Por tanto, X y Y no son variables independientes

Densidad condicional

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Densidad condicional

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Determinar $P(X < \frac{1}{2}|y = 1)$ Para el ejemplo

Densidad condicional

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Determinar $P(X < \frac{1}{2}|y = 1)$ Para el ejemplo

$$f(x|y) = \frac{\frac{3}{5}(xy+x^2)}{\frac{1}{10}(3y+2)} = \frac{6x(x+y)}{3y+2}$$

$$P(X < \frac{1}{2}|y = 1) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x|1)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6x(x+1)}{5}dx$$

$$P(X < \frac{1}{2}|y = 1) = \frac{6}{5}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{5}$$