Curso de Probabilidad y Estadística

Conceptos Fundamentales Parte 2

Dr. José Antonio Camarena Ibarrola

camarena@umich.mx

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

División de Estudios de Postgrado

Esperanza Matemática

El valor esperado de una variable aleatoria discreta X con distribución de probabilidad $f(x)$ es

$$E[X] = \sum_x x f(x)$$

El valor esperado de una variable aleatoria continua X con densidad $f(x)$ es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Ejemplo

Juan arroja un dado y gana \$1 si obtiene 1 o 2, \$2 si obtiene un 3 o un 4, \$4 si sale 5 y \$8 si sale 6. Cuanto dinero debería pagar antes de arrojar el dado para que el juego sea justo?

Ejemplo

Juan arroja un dado y gana \$1 si obtiene 1 o 2, \$2 si obtiene un 3 o un 4, \$4 si sale 5 y \$8 si sale 6. Cuanto dinero debería pagar antes de arrojar el dado para que el juego sea justo?

$$E[X] = \sum_x x f(x) = (1)\frac{1}{3} + (2)\frac{1}{3} + (4)\frac{1}{6} + (8)\frac{1}{6} = 3$$

Juan debería pagar \$3 antes de arrojar el dado

Esperanza de una función

El valor esperado de una función $g(X)$ de una variable aleatoria X con distribución/densidad $f(x)$ es:

$$E[g(X)] = \sum_x g(x)f(x)$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

En el ejemplo anterior, se asoció cada elemento del espacio muestral con una cantidad:

x	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	\$1	\$1	\$2	\$2	\$4	\$8

Si a y b son constantes, entonces: $E[aX+b] = aE[X]+b$

Esperanza de una función bivariable

$$E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$$

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy$$

Momentos de una distribución

El k-ésimo momento de la variable aleatoria X es:

$$E[X^k] = \sum_x x^k f(x)$$

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

El primer momento es la *media*:

$$\mu = E[X]$$

Momentos centrales

$$E[(X-\mu)^k] = \sum_x (x-\mu)^k f(x)$$

$$E[(X-\mu)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x) dx$$

El primer momento central es cero

$$E[(X-\mu)] = E[X] - \mu = \mu - \mu = 0$$

El segundo momento central es la *varianza*

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$$

La varianza σ^2

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = E[X^2 - 2X\mu + \mu^2]$$

$$\sigma^2 = E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2$$

Pero $E[X] = \mu$, entonces

$$\sigma^2 = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Ejemplo

X: Número obtenido al lanzar un dado legal

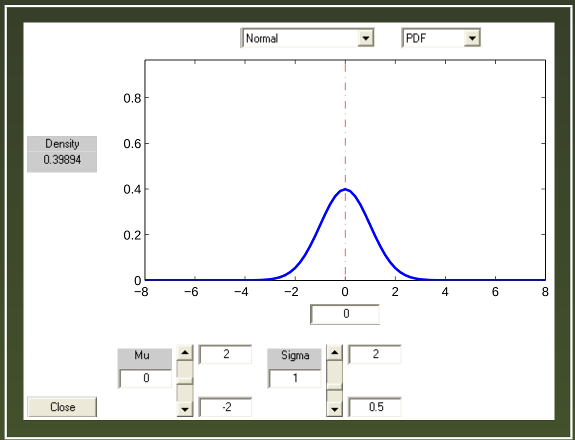
$$\mu = E[X] = (1)\frac{1}{6}+(2)\frac{1}{6}+(3)\frac{1}{6}+(4)\frac{1}{6}+(5)\frac{1}{6}+(6)\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E[X^2] = (1^2)\frac{1}{6}+(2^2)\frac{1}{6}+(3^2)\frac{1}{6}+(4^2)\frac{1}{6}+(5^2)\frac{1}{6}+(6^2)\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

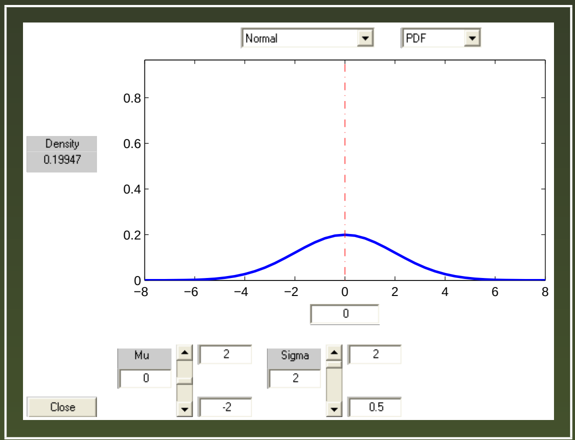
$$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{182-147}{12} = \frac{35}{12}$$

Desviación Estandar σ

Una distibución *normal* tiene 6 sigma (6σ) de ancho aproximádamente



$\sigma = 1$



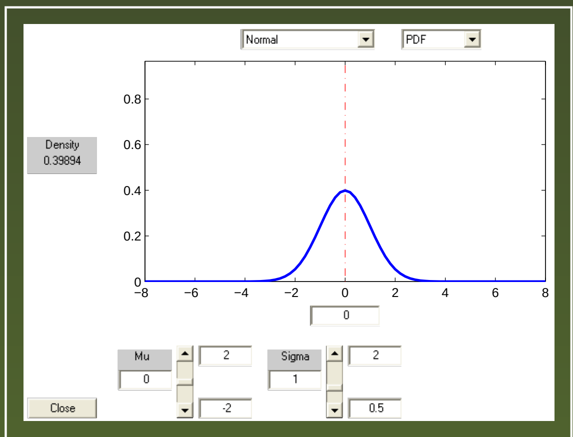
$\sigma = 2$

El sesgo γ

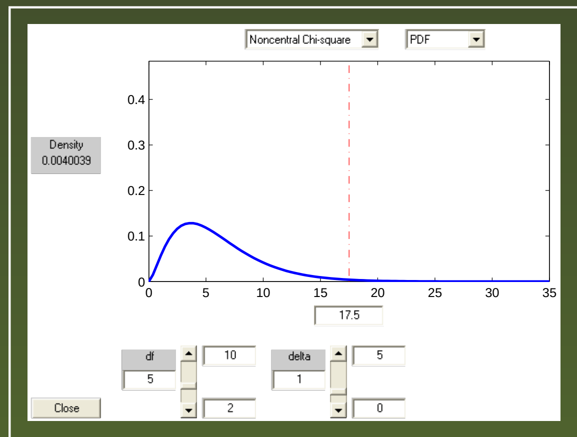
Si una distribución es simétrica respecto a la media (μ), entonces su tercer momento central es cero

El *sesgo* γ se define como:

$$\gamma = \frac{1}{\sigma^3} E[(X-\mu)^3]$$



$\gamma = 0$



$\gamma \neq 0$

La curtosis γ^*

La *curtosis* utiliza el cuarto momento central para dar una medida de la picudez de la distribución

$$\gamma^* = \frac{1}{\sigma^4} E[(X - \mu)^4]$$

La distribución normal (gaussiana) tiene una curtosis de 3, por lo cual, mientras mas cercana a 3 es la curtosis de una distribución, mas "normal" es.

La Función generadora de momentos

$$G(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{tx} f(x)dx$$

$$\frac{d^kG(t)}{dt^k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f(x)dx$$

$$E[X^k] = G^{(k)}(0)$$

$$\mu = E[X] = G'(0)$$

Ejemplo

Encuentre los primeros 4 momentos alrededor del origen de la variable aleatoria con densidad: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$G(t) = E[e^{tx}] = \int_0^\infty e^{tx}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{-x(1-t)}dx = \frac{1}{1-t}$

$G'(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$, entonces $\mu = E[X] = G'(0) = 1$

$G''(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$, entonces $E[X^2] = G''(0) = 2$

$G'''(t) = \frac{6}{(1-t)^4}$, entonces $E[X^3] = G'''(0) = 6$

$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = 2 - 1^2 = 1$

La desigualdad de Chebyshev

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor que esté a una distancia de la media menor a k desviaciones estandar es mayor o igual a $1 - \frac{1}{k^2}$

$$P(|X - \mu|^2 < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Ejemplo: La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor a una distancia menor que 2 desviaciones estandar de la media es mayor o igual a $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$.

La probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor a una distancia menor que 3 desviaciones estandar de la media es mayor o igual a $1 - \frac{1}{3^2} = \frac{8}{9}$.

La Covarianza σ_{XY}

La covarianza entre dos variables aleatorias X y Y es un indicador de la relación que hay entre ellas

$$\sigma_{XY} = E[XY] - \mu_x \mu_y$$

Nota: Esto es análogo a $\sigma_X^2 = \sigma_{XX} = E[X^2] - \mu_x^2$

Si X y Y son independientes, entonces

$E[XY] = E[X]E[Y]$ y por tanto $\sigma_{XY} = 0$

Ejemplo

La distribución cd probabilidad de X y Y se muestra en la siguiente tabla ($c = \frac{1}{42}$):

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	c	2c	3c
1	2c	3c	4c	5c
2	4c	5c	6c	7c

$E[X] = \sum_x \sum_y xf(x,y) = \sum_x x \sum_y f(x,y) = (0)(6c)+(1)(14c)+(2)(22c) = 58(\frac{1}{42}) = \frac{29}{21}$

$E[Y] = \sum_x \sum_y yf(x,y) = \sum_y y \sum_x f(x,y) = (0)(6c) + (1)(9c) + (2)(12c) + (3)(15c) = 78(\frac{1}{42}) = \frac{13}{7}$

$E[XY] = \sum_x \sum_y xyf(x,y) =$
$(0)(0)(0) + (0)(1)(c) + (0)(2)(2c) + (0)(3)(3c) + (1)(0)(2c) + (1)(1)(3c) + (1)(2)(4c) + (1)(3)(5c) + (2)(0)(4c) + (2)(1)(5c) + (2)(2)(6c) + (2)(3)(7c) = 162(\frac{1}{42}) = \frac{17}{7}$

$\sigma_{XY} = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{17}{7} - \frac{29}{21}\frac{13}{7} = -\frac{20}{147}$

Ejemplo (continuación)

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	c	2c	3c
1	2c	3c	4c	5c
2	4c	5c	6c	7c

$E[X^2] = \sum_x \sum_y x^2 f(x,y) = \sum_x x^2 \sum_y f(x,y) = (0)(6c) + (1)(14c) + (4)(22c) = 102(\frac{1}{42}) = \frac{17}{7}$

$E[Y^2] = \sum_x \sum_y y^2 f(x,y) = \sum_y y^2 \sum_x f(x,y) =$
$(0)(6c) + (1)(9c) + (4)(12c) + (9)(15c) = 192(\frac{1}{42}) = \frac{32}{7}$

$\sigma_X^2 = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{17}{7} - (\frac{29}{21})^2 = \frac{230}{441}$

$\sigma_Y^2 = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{32}{7} - (\frac{13}{7})^2 = \frac{55}{49}$

Matríz de covarianzas

$\sigma^2_{X_1}$	$\sigma_{X_1X_2}$	$\ldots$	$\sigma_{X_1X_n}$
$\sigma_{X_2X_1}$	$\sigma^2_{X_2}$	$\ldots$	$\sigma_{X_2X_n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
$\sigma_{X_nX_1}$	$\sigma_{X_nX_2}$	$\ldots$	$\sigma^2_{X_n}$

Donde: $\sigma_{X_iX_j} = \sigma_{X_jX_i} \;\; \forall\, i, j$

Si todas las variables $X_1, X_2, .., X_n$ son independientes, entonces la matríz de covarianzas es una matríz diagonal.

Si todas las variables $X_1, X_2, .., X_n$ son independientes, entonces $E[X_1X_2\cdots X_n] = E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$

Ejemplo

Para el ejemplo anterior la matríz de covarianzas es:

$\frac{230}{441}$	$-\frac{20}{147}$
$-\frac{20}{147}$	$\frac{55}{49}$

El coeficiente de correlación ρ

El coeficiente de correlación mide la asociación entre dos variables aleatorias

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Para el ejemplo anterior

$$\rho = \frac{-20/147}{\sqrt{230/241}\sqrt{55/49}} = -0.2103$$

Otras medidas de variable aleatoria

- La *moda* de una variable aleatoria es el valor que ocurre con mayor frecuencia si hay dos, tres o mas valores que ocurren con gran frecuencia, decimos que se trata de una distribución bimodal, trimodal o multimodal
- La *mediana* es el valor de x para el cual $P(X>x)=P(X<x)=1/2$. La mediana divide la curva de densidad en dos partes con la misma área.
- Percentiles. Si dividimos el área bajo la curva de la densidad en 10, a cada parte le denominamos *decil*, si la dividimos en 4, cada parte es un *cuartil* (primer cuartil, segundo cuartil, etc.).