Curso de Probabilidad y Estadística

Distribuciones de Probabilidad

Dr. José Antonio Camarena Ibarrola

camarena@umich.mx

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

División de Estudios de Postgrado

Distribución Uniforme discreta

Si una variable discreta puede asumir k valores diferentes con igual probabilidad

$$f(k) = \frac{1}{k} \;\; \forall x = x_1, x_2, ..., x_k$$

Donde $x_i \neq x_j \;\; \forall i \neq j$

Ej: X: Resultado obtenido en un lanzamiento de un dado legal

Distribución de Bernoulli

Un experimento o *ensayo de Bernoulli* tiene dos resultados posibles, *éxito o fracaso* los cuales tienen probabilidad p y q respectívamente. Es evidente que

$$q = 1 - p$$

Una variable aleatoria X que nos indica el éxito (X=1) o el fracaso (X=0) de un solo ensayo de Bernoulli tiene una distribución dada por

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

Ej: X: Ganar un juego de tenis

Distribución Binomial

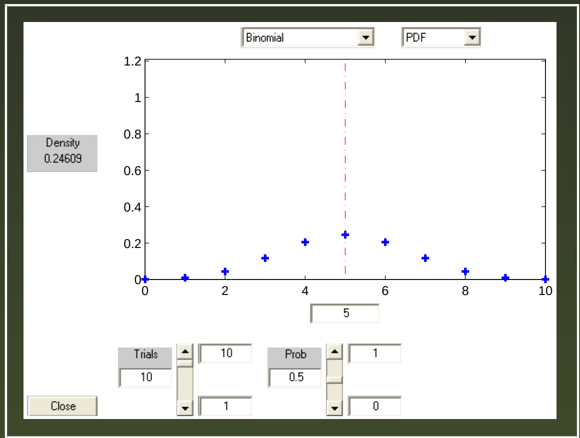
Cuando se efectúan n ensayos de Bernoulli puede haber x exitos y por ende n-x fracasos, en cada ensayo la probabilidad de éxito es igual a p. Una variable aleatoria discreta X que indique el número de éxitos tiene distribución:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

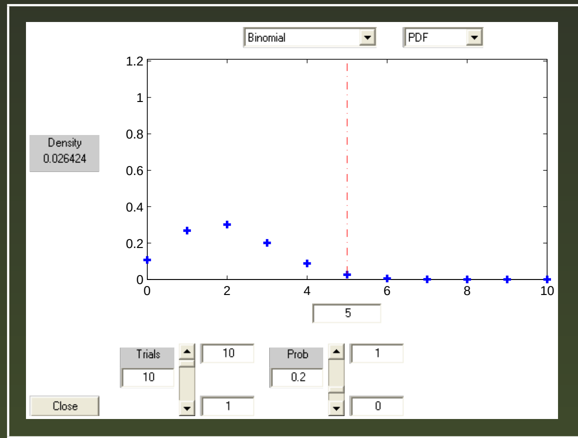
El número de maneras en que pueden obtenerse x éxitos en n ensayos es $\binom{n}{x}$ dado que no importa el orden en que se obtengan dichos éxitos.

Nota: La distribución de Bernoulli es un caso especial de la distribución binomial en la que n=1

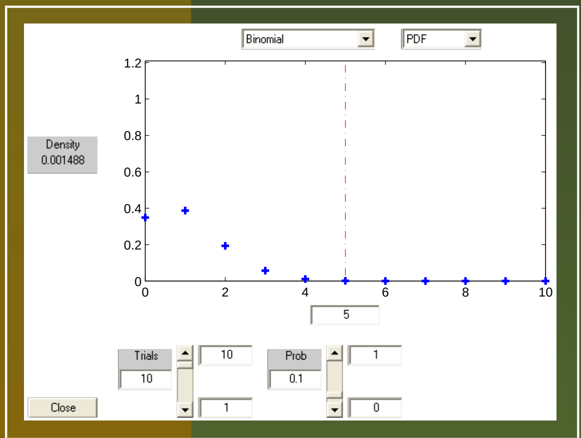
Gráficas Distribución binomial



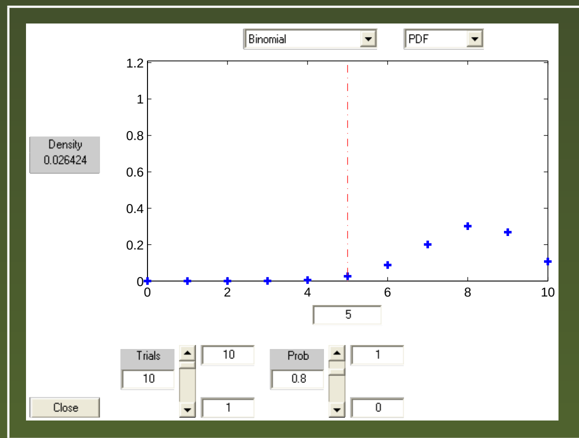
p=0.5



p=0.2



P=0.1



p=0.8

Ejemplo (Distribución Binomial)

Encuentre la probabilidad de acertar correctamente al menos en 6 de 10 respuestas en un examen de opción múltiple donde cada pregunta tiene 3 posibles respuestas y estas se eligen al azar.

Ejemplo (Distribución Binomial)

Encuentre la probabilidad de acertar correctamente al menos en 6 de 10 respuestas en un examen de opción múltiple donde cada pregunta tiene 3 posibles respuestas y estas se eligen al azar.

En cada pregunta (ensayo) la probabilidad de acertar es de $\frac{1}{3}$ y de fallar es de $\frac{2}{3}$

$$P(X=6)=f(6)=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=0.057$$

$$P(X=7)=f(7)=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{7}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=0.01626$$

$$P(X=8)=f(8)=\binom{10}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}=0.003048$$

$$P(X=9)=f(9)=\binom{10}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{9}\left(\frac{2}{3}\right)=0.0003387$$

$$P(X=10)=f(10)=\binom{10}{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}=0.00001693$$

$$P(X\geq 6)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

$$P(X\geq 6)=0.057+0.01626+0.003048+0.0003387+0.00001693=0.07666$$

Media en la Dist. Binomial

$G(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$G(t) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x q^{n-x}$

Pero sabemos que $(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^{n-x} b^x$, entonces:

$G(t) = (q + pe^t)^n$

$G'(t) = n(q + pe^t)^{n-1} pe^t$

$G'(0) = n(q+p)^{n-1} p$, pero $q + p = 1$ por lo que:

$$\mu = E[X] = G'(0) = np$$

Varianza en la Dist. Binomial

$G(t) = (q + pe^t)^n$

$G'(t) = n(q + pe^t)^{n-1}pe^t$

$G''(t) = n(n-1)(q + pe^t)^{n-2}pe^tpe^t + n(q + pe^t)^{n-1}pe^t$

$G''(0) = n(n-1)(q + p)^{n-2}p^2 + n(q + p)^{n-1}p$

Pero $q + p = 1$ por lo que:

$E[X^2] = G''(0) = n(n-1)p^2 + np$,

$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - (np)^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$

$\sigma^2 = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np - np^2 = np(1-p) = npq$

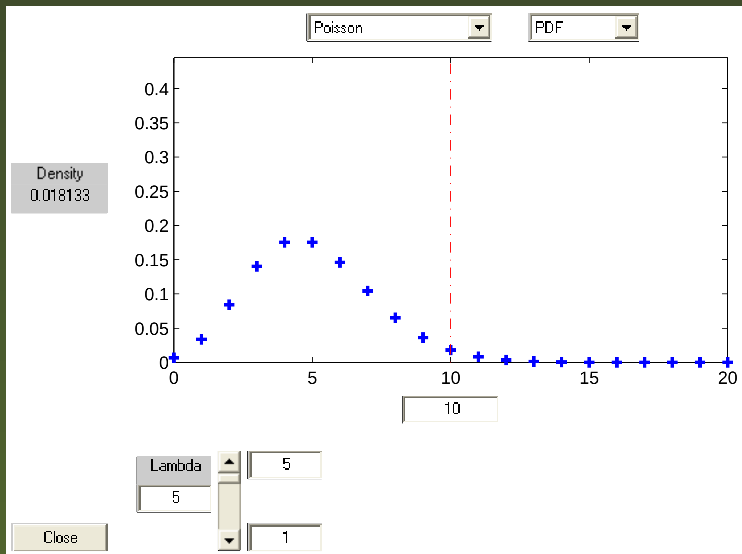
En conclusión

$$\sigma^2 = npq$$

Distribución de Poisson

S.D. Poisson introdujo esta distribución en 1837, es una conveniente aproximación a la distribución binomial cuando el número de ensayos es muy grande y la probabilidad de éxito de cada ensayo es muy pequeña.

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$



Ejemplo

Si 2% de los motores que fabrica una empresa sale defectuoso, encuentre la probabilidad de que en un lote de 400 motores, cinco esten defectuosos

Ejemplo

Si 2% de los motores que fabrica una empresa sale defectuoso, encuentre la probabilidad de que en un lote de 400 motores, cinco esten defectuosos

$$\mu = np = (400)(0.02) = 8$$

$$f(5) = \frac{8^5}{5!} e^{-8} = 0.092$$

Distribución Hipergeométrica

La distribución binomial es útil en muestreo con reemplazo. En muestreos sin reemplazo donde los ensayos no son independientes, podemos usar la distribución Hipergeométrica.

De un Conjunto de N elementos, M se consideran éxitos y N-M se consideran fracasos. La probabilidad de obtener x éxitos es:

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Donde: $\binom{M}{x}$ es el numero de maneras en que se pueden obtener x elementos exitosos de los M que hay, $\binom{N-M}{n-x}$ es el número de maneras en que se puede escoger n-x no exitosos de los N-M que hay y $\binom{N}{n}$ es el número de maneras de escoger n elementos del total de N.

Ejemplo

De un lote con 20 lámparas, 5 de las cuales están defectuosas se toman al azar 10. Encuentre la probabilidad de que 2 estén defectuosas.

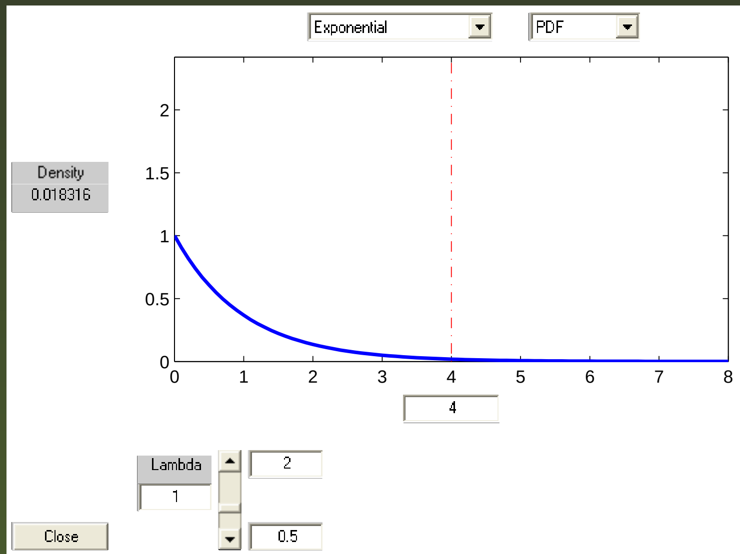
Ejemplo

De un lote con 20 lámparas, 5 de las cuales están defectuosas se toman al azar 10. Encuentre la probabilidad de que 2 estén defectuosas.

$$f(2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{15}{8}}{\binom{20}{10}} = \frac{(10)(6435)}{184756} = 0.3483$$

Distribución exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Media y Varianza (Dist exponencial)

$$\mu = E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = -[xe^{-\lambda x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

En forma similar

$$\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ejemplo

Ej. Se sabe que un componente electrónico tiene una vida útil representada por una densidad exponencial con una razón de fallas de 10^{-5} fallas por hora. La media del tiempo de falla es por tanto 10^5 horas. Determine el número de componentes que pueden fallar antes de la vida media o esperada.

Ejemplo

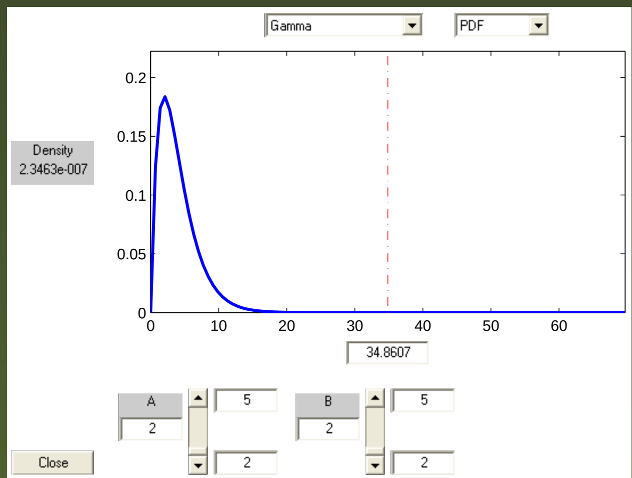
Ej. Se sabe que un componente electrónico tiene una vida útil representada por una densidad exponencial con una razón de fallas de 10^{-5} fallas por hora. La media del tiempo de falla es por tanto 10^{5} horas. Determine el número de componentes que pueden fallar antes de la vida media o esperada.

$$P(T \leq \frac{1}{\lambda}) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{\frac{1}{\lambda}} = 1 - e^{-1} = 0.63212$$

Distribución Gamma

Una variable aleatoria X tiene una distibución Gamma si su densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Cuando α es igual a 1, esta distribución se convierte en la distribución exponencial

Función Gamma de Euler

En 1814 Adrian Legendre propuso nombrar Gamma a una Función definida por Euler.

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt$$

$\Gamma(\lambda+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda} dt$
Integrando por partes se obtiene la relación básica:

$$\Gamma(\lambda+1) = \lambda\Gamma(\lambda)$$

$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$
$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!$,..., $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$

La distribución chi-cuadrada requiere calcular $\Gamma(\frac{n}{2})$ para valores enteros de n. Si n es par, podemos calcular $\Gamma(\frac{n}{2}) = \left(\frac{n}{2} - 1\right)!$, si n es impar, podemos usar el hecho de que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Por ejemplo, si n=5, $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

$\Gamma(x)$ se puede calcular para valores flotantes, incluso hay tablas de valores de Gamma para el rango de 1 a 2, para valores fuera de ese rango se puede hacer como en el siguiente ejemplo:
$\Gamma(3.4) = 2.4\Gamma(2.4) = (2.4)(1.4)\Gamma(1.4) = (2.4)(1.4)(0.8873) = 2.98$

Dist. exponencial y Dist. Gamma

Si la variable aleatoria X es la suma de α variables aleatorias independientes distribuidas exponencialmente, cada una con $\lambda = 1/\beta$, entonces X tiene densidad gamma con parámetros α y β.

Ejemplo

Un sistema redundante cuenta con tres unidades. Al principio, la unidad 1 está funcionando, mientras que las unidades 2 y 3 están en espera. Cuando la unidad 1 falla, el sistema pone a trabajar la unidad 2, la cual opera hasta que falla y se active la unidad 3. La vida del sistema puede representarse como la suma de las vidas de las 3 unidades, es decir:

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

Si las vidas de las unidades son independientes entre sí, y cada unidad tiene una vida X_j con densidad $g(x) = (1/100)e^{-x/100}$, entonces X tendrá una densidad gamma con $\alpha = 3$ y $\beta = 100$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100^3\Gamma(3)}x^{3-1}e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100^3(2!)}x^{2}e^{-x/100} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

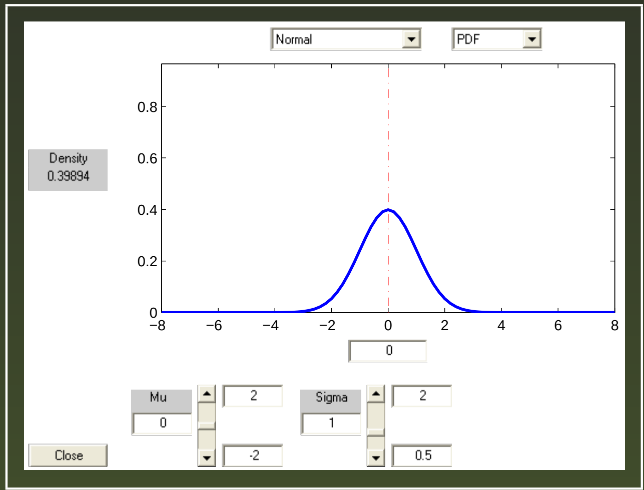
Distribución Gaussiana

También conocida como *Distribución Normal*, es la piedra angular de la teorá estadística moderna. En el siglo XIX, los científicos observaron una asombrosa regularidad en los errores de medición, se referian a las curvas de errores como "normales" y las atribuían a las leyes del azar. La distribución normal es la mas importante por varias razones:

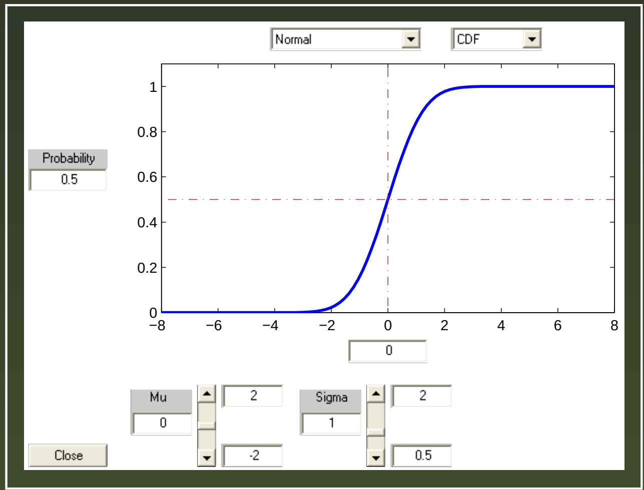
- Muchas variables aleatorias relacionadas con experimentos u observaciones prácticas están distribuidas normalmente
- Muchas otras variables aleatorias tienen una distribución aproximada a la normal
- Varias distribuciones mas complicadas se pueden aproximar a la normal (por ej la binommial
- Las variables que no siguen distribución gaussiana se pueden convertir en otras con distribución gaussiana mediante una transformación.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Distribución Gaussiana



f(x)



F(x)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\mu}{\sigma}\right)^2} dv$$

Distribución Gaussiana

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

Esta integral no es facil de calcular, sin embargo se puede expresar en términos de $\Phi(z)$, donde:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

$$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

Los valores de $\Phi(z)$ aparecen tabulados en los apéndices de todos los libros de Probabilidad y en muchos sitios web como

http://www.math.unb.ca/∼knight/utility/NormTble.htm

Distribución normal estandar

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.500	0.504	0.508	0.512	0.516	0.519	0.523	0.527	0.5319	0.5359
0.1	0.539	0.543	0.547	0.551	0.555	0.559	0.563	0.567	0.5714	0.5753
0.2	0.579	0.583	0.587	0.591	0.594	0.598	0.602	0.606	0.6103	0.6141
0.3	0.617	0.621	0.625	0.629	0.633	0.636	0.640	0.644	0.6480	0.6517
0.4	0.655	0.659	0.662	0.666	0.670	0.673	0.677	0.680	0.6844	0.6879
0.5	0.691	0.695	0.698	0.701	0.705	0.708	0.712	0.715	0.7190	0.7224
0.6	0.725	0.729	0.732	0.735	0.738	0.742	0.745	0.748	0.7517	0.7549
0.7	0.758	0.761	0.764	0.767	0.770	0.773	0.776	0.779	0.7823	0.7852
0.8	0.788	0.791	0.793	0.796	0.799	0.802	0.805	0.807	0.8106	0.8133
0.9	0.815	0.818	0.821	0.823	0.826	0.828	0.831	0.834	0.8365	0.8389
1.0	0.841	0.843	0.846	0.848	0.850	0.853	0.855	0.857	0.8599	0.8621
1.1	0.864	0.866	0.868	0.870	0.872	0.874	0.877	0.879	0.8810	0.8830
1.2	0.884	0.886	0.888	0.890	0.892	0.894	0.896	0.898	0.8997	0.9015

Ejemplo

X es una variable aleatoria que representa la resistencia al rompimiento de una cuerda. X tiene distribución normal con media de 800 Newtons y varianza 144. Determine la probabilidad de que una cuerda resista mas de 810 Newtons.

Ejemplo

X es una variable aleatoria que representa la resistencia al rompimiento de una cuerda. X tiene distribución normal con media de 800 Newtons y varianza 144. Determine la probabilidad de que una cuerda resista mas de 810 Newtons.

$$z = \frac{810 - 800}{12} = 0.83$$

$$P(X > 810) = 1 - P(810 < X) = 1 - \Phi(0.83) = 1 - 0.7967 = 0.2033$$

Teorema límite de Moivre-Laplace

Para n grande, la distribución binomial se aproxima a la distribución normal, es decir:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^{b} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \sim \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

Donde: $\beta = \frac{b-np+0.5}{\sqrt{npq}}$ y $\alpha = \frac{a-np-0.5}{\sqrt{npq}}$

Como la distribución binomial es discreta y la normal es contínua, normalmente se emplea la *corrección de continuidad* o *corrección de medio intervalo* (restar 0.5 al límite inferior y sumar 0.5 al límite superior).

Ejemplo

Si n=100 y p=0.2, encuentre $P(21 \leq Z \leq 24)$

Ejemplo

Si n=100 y p=0.2, encuentre $P(21 \leq Z \leq 24)$

$$\mu = (100)(0.2) = 20$$
$$\sigma^2 = (100)(0.2)(0.8) = 16$$
$$\sigma = 4$$

Por la corrección de continuidad hay que encontrar

$$P(20.5 \leq X \leq 24.5) = \Phi(\frac{24.5 - 20}{4}) - \Phi(\frac{20.5 - 20}{4})$$

$$P(20.5 \leq X \leq 24.5) = \Phi(1.125) - \Phi(0.125) = 0.8686 - 0.5478$$

$$P(20.5 \leq X \leq 24.5) = 0.3208$$

Ley de los grandes números de Bernoulli

Sea X la variable aleatoria que indica el número de éxitos en n ensayos independientes. Entonces, dado un número positivo ϵ (no importa que tan pequeño sea, pero diferente de cero),

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\frac{X}{n}| \leq \epsilon\right) = 1$$

Es decir, la probabilidad de que el número promedio de éxitos difiera de p en mas de un ϵ dado, se aproxima a cero cuando n tiende a infinito.

Distribución Chi-cuadrada

Esta distribución muestral fue introducida por F.R. Helmert (1876) y constituye la base de una prueba de hipótesis (bondad de ajuste).

Sean X_1, X_2, ..., X_n, variables aleatorias independientes que tienen media cero y varianza 1. La suma de sus cuadrados se representa en general por χ^2

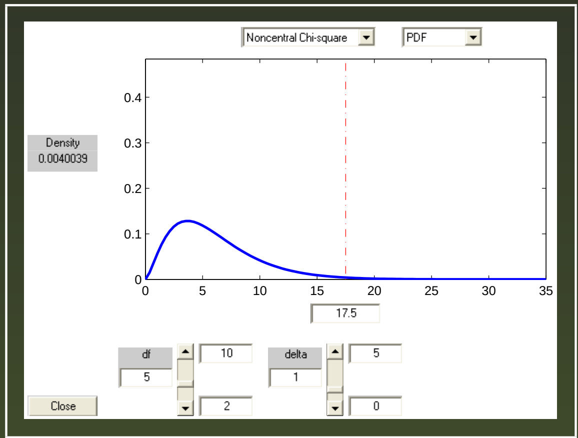
$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

A la distribución correspondiente a esta suma se le llama distribución chi-cuadrada, cuya densidad es

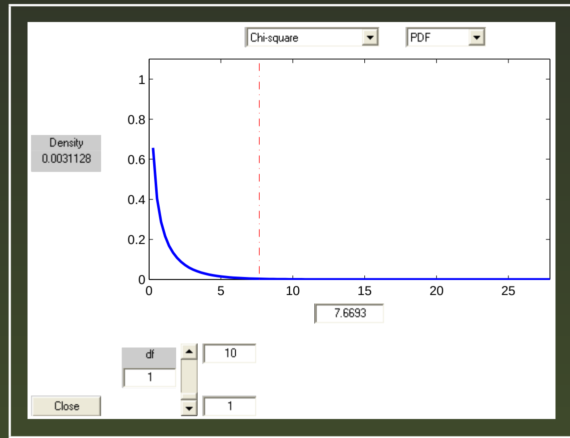
$$f(x) = K_n x^{(n-2)/2} e^{-x/2}$$

n es el número de grados de libertad y $K_n = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$

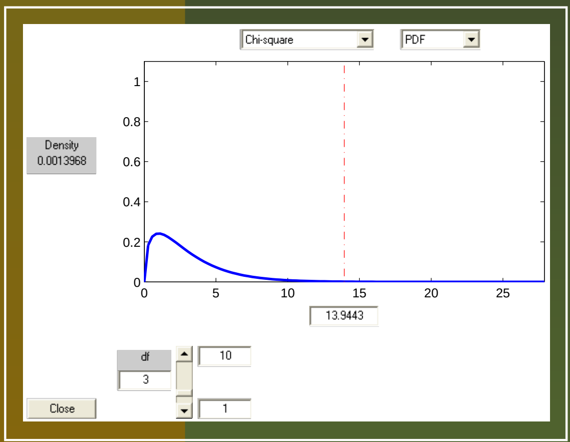
Distribuciones Chi-cuadrada



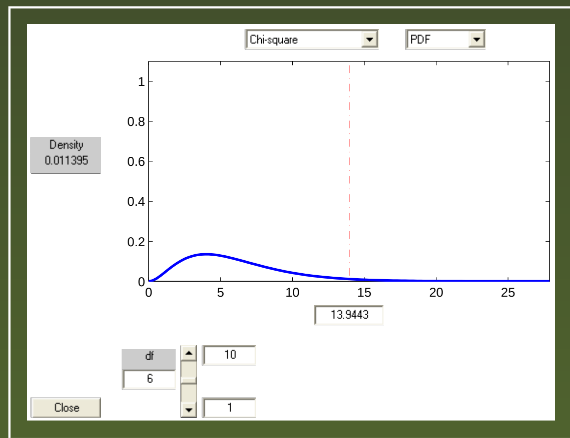
n=5



n=1



n=3



n=6

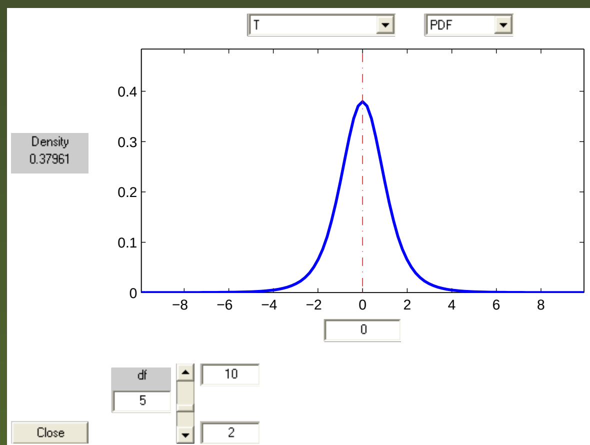
Distribución t de Student

Esta distribución muestral fue introducida por W. S. Gosset (1908) que utilizaba el seudónimo *Student* y es la base de importantes pruebas de hipótesis.

La distribución *t* es la distribución de la variable aleatoria $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$, donde X es una variable aleatoria normal con media cero y varianza 1 mientras que Y es una variable aleatoria con distribución Chi-cuadrada con n grados de libertad.

La distribución t tiene densidad:

$$f(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}$$



Para n=1, esta distribución se convierte en la distribución de Cauchy