CÁLCULO

DIFERENCIAL
E
INTEGRAL

DE UNA VARIABLE

M.C. Pedro Ferreira Herrejón

PREFACIO

En esta obra se presentan y desarrollan los temas fundamentales del cálculo diferencial e integral para funciones de una sola variable.

En el capítulo I se exponen los conceptos básicos del precálculo que se requieren para todos los demás capítulos por lo cual se recomienda analizar a fondo.

La noción de función matemática, las funciones elementales y las principales operaciones entre funciones se desarrollan en el capítulo II .

Un concepto de fundamental importancia para el desarrollo de todo el cálculo y que se expone en el capítulo III es el de límite de una función. Este concepto no solamente es indispensable en la definición de una función derivada de otra función dada sino que aparece también en muchos otros aspectos de la matemática.

La operación matemática de derivación, su interpretación geométrica como la pendiente de una recta tangente y su interpretación física como una razón de cambio de una variable respecto a otra, son conceptos que se explican en el capítulo IV.

En el capítulo V se exponen las aplicaciones mas relevantes de la derivación. De particular importancia es el cálculo de los valores extremos de una función matemática (valores máximos y mínimos relativos).

El teorema del valor medio (capítulo VI) no solamente es importante por sus propias aplicaciones sino que sirve a su vez para el desarrollo teórico del propio cálculo.

La operación matemática de integración, interpretada como la operación inversa de la derivación, es analizada en el capítulo VII. A diferencia de la derivación, donde existe una regla general bien definida para el cálculo de la derivada de una función matemática, en la integración no se tiene una regla similar. En éste sentido la integral indefinida es más parecida a un arte o habilidad que se puede adquirir solo con la práctica, de modo que aquí se exponen las principales técnicas o métodos elementales de integración para determinar una función cuya derivada se conoce.

La integral definida (capítulo VIII) se establece como el límite de una suma y se interpreta geométricamente. Se establece la fundamental relación entre integral definida e integral indefinida en el Teorema fundamental del cálculo.

Finalmente en el capítulo IX se presentan algunas de las aplicaciones más importantes de la integral definida como son el cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de arco o superficies.

Todos estos temas son de mucho interés matemático y a la vez herramientas básicas para la Ingeniería. El estudio de materias específicas en ingeniería se tornaría muy superficial sin el conocimiento y aplicación de los conceptos del Cálculo. Espero que este modesto trabajo ayude a que tal estudio no sea superficial.

El autor:

Pedro Ferreira Herrejón.

ÍNDICE

CAPÍTULO I CONCEPTOS FUNDAMENTALES

CAPÍTULO II FUNCIONES DE UNA VARIABLE

CAPÍTULO III LÍMITES Y CONTINUIDAD

CAPÍTULO IV LA DERIVACIÓN

CAPÍTULO V APLICACIONES DE LA DERIVADA

CAPÍTULO VI TEOREMA DEL VALOR MEDIO Y SUS APLICACIONES

CAPÍTULO VII INTEGRAL INDEFINIDA

CAPÍTULO VIII INTEGRAL DEFINIDA

CAPÍTULO IX APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Capítulo I
Conceptos Fundamentales

1.1 *El sistema de números reales* .

Los números reales describen cantidades numéricas que representamos mediante *diversos símbolos* tales como:

1	-7	$sen(\pi)$	π (*pi* = 3.1415926...)	$\sqrt{3}$
$(3 \div 2)$	$\sqrt[3]{3^2}$	2.735	e (= 2.718281...)	$log_3(2.43)$

Si partimos del conjunto básico de ***números naturales*** :

$$\{ \mathbf{N} \} = \{ \mathbf{1, 2, 3, 4,} \ ...\}$$

y las *cuatro operaciones fundamentales entre dos números* a y b de ese conjunto:

I . *Suma o adición* , *representada por* : $a + b$

II. *Resta o substracción* , *representada por* : $a - b$

III. *Multiplicación o producto* , *representada por* : $a \cdot b$, $a \times b$, $(a)\ (b)$ *o simplemente* $a\ b$.

IV. *División o cociente* , *representada por* : $a \div b$, $\dfrac{a}{b}$, o por $a\,/\,b$.

de inmediato observamos que *al sumar o multiplicar dos números naturales siempre se obtiene como resultado otro número que también es natural* .
Sin embargo, esto no siempre sucede con la resta y solo se cumple en un caso muy especial en la división, (*cuando el divisor es el número* 1) .
Así que para cualquier par de números α y β que están en el conjunto **{ N }** , los números $\alpha + \beta$ y $\alpha \cdot \beta$ *también son naturales* (es decir, están en el conjunto **{ N }**) . Por ejemplo: $24 + 18 = 42$ ó $(14) \times (39) = 546$ etc.
Pero en cambio no todas las operaciones de resta o división de números naturales generan como resultado números que también sean naturales, por ejemplo $(5 - 8)$ ó $(5 \div 8)$ no son números naturales (*no están contenidos en* **{ N }**)
De modo que el conjunto de números naturales **{ N }** *es cerrado* únicamente bajo las operaciones de suma y producto ; pero no bajo la resta o la división .

Definición de Cerradura : *Se dice que un conjunto es cerrado bajo cierta operación binaria, si al aplicar tal operación a un par de elementos del conjunto se obtiene como resultado otro elemento que también está contenido en el conjunto* .

Si al conjunto de números naturales **{ N } se agregan los *enteros negativos y el cero*** , se obtiene el conjunto de ***número enteros:***

$$\{ \mathbf{Z} \} = \{ ....\mathbf{-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 ,} ...\ \}$$

Éste nuevo conjunto si es cerrado bajo las operaciones de la suma, la resta y el producto, puesto que con cualquiera de ésas operaciones aplicadas a un par de enteros se obtiene como resultado otro número entero.

Sin embargo, éste conjunto tampoco es cerrado bajo la división (por ejemplo $(-3) \div 7$ no es entero).
Para lograr también la cerradura para la división, es necesario aumentar el conjunto **{ Z }** anterior, añadiéndole todos aquellos números que resultan de la división de dos enteros y cuyo divisor no es 0 ni 1 , es decir, las fracciones.

El conjunto así formado se llama conjunto de ***números racionales*** **{ Q }** . Este conjunto *es cerrado bajo las cuatro operaciones fundamentales* porque de la suma , resta , producto o división de dos números racionales se obtendrá siempre otro número que es racional .

$$\{ \mathbf{Q} \} = \left\{ \text{Números que son el cociente de } \underline{\textit{dos enteros}} \;\; p \text{ y } q \text{ (con } q \neq 0 \text{) ; } \left(\frac{p}{q}\right) \right\}$$

Por ejemplo : $\frac{-3}{2}$, $\frac{16273}{-3876}$, 4 , $-\left(\frac{1}{7}\right)$ son todos números racionales.
Sin embargo, *no todos los números son racionales*, es decir no todos se pueden escribir como la razón de dos enteros . Algunos de ellos se obtienen mediante la 5ª operación matemática : *las raíces* .
Son números irracionales la mayoría de las raíces de los números enteros primos , por ejemplo :

$$\sqrt{2} = 1.4142135623731... \quad ; \quad \sqrt{7} = 2.64575131106459\,... \quad ; \quad \sqrt[3]{3} = 1.44224957030741\,...$$

A los números que no son racionales se les llama por contraposición ***irracionales*** y se representan por el conjunto **{ I_r }.**
Se puede demostrar analíticamente que éstos números *no son el cociente de dos enteros*; pero baste decir por ahora que *todo número racional tiene una representación decimal que* :

i) *termina* (es finita)

o bien

ii) *es infinita pero presenta un patrón de repetición.*

observemos por ejemplo la forma decimal de algunos números racionales :

$$\frac{8}{5} = 1.6 \quad , \quad \frac{1}{4} = 0.25 \quad , \quad \frac{1}{7} = 0.1428571428571428... \quad , \quad \frac{25}{11} = 2.272727272727272...$$

En los dos primeros la parte decimal termina (*es finita*) mientras que en los dos últimos la parte decimal es infinita *(lo cual se indica por los puntos suspensivos*) ; pero hay cierto conjunto de cifras que se repite una y otra vez (*es una sucesión periódica*)

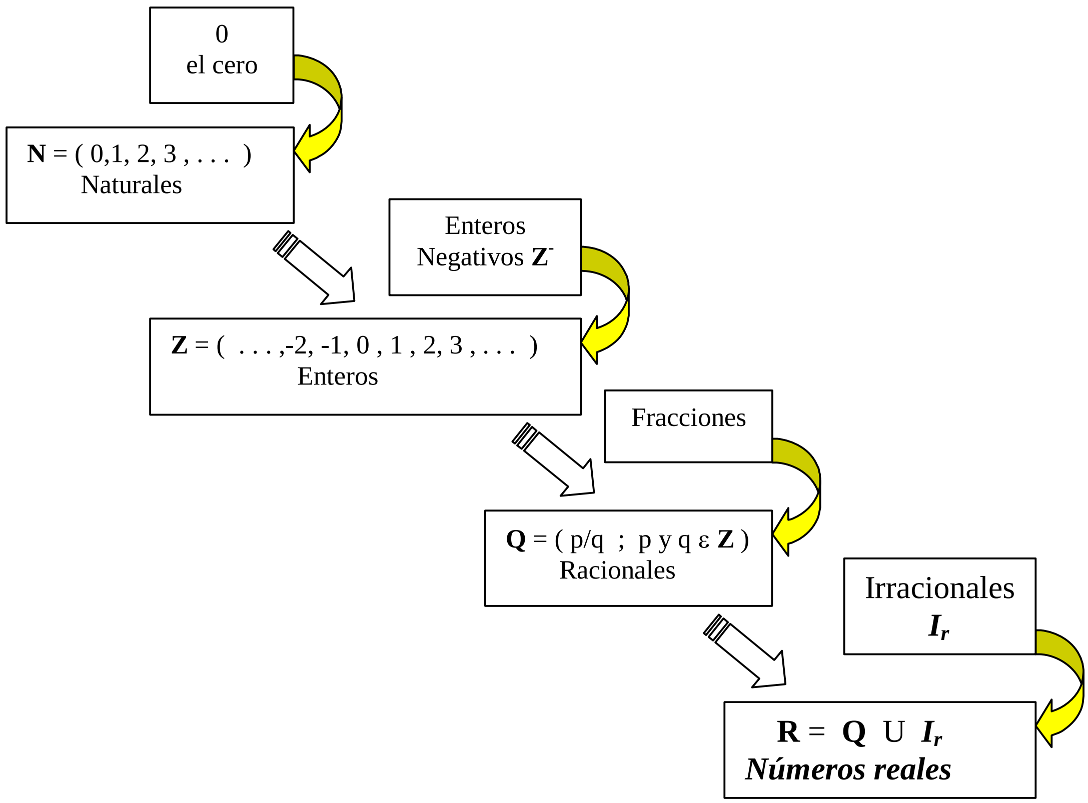
En los números irracionales en cambio se cumple todo lo opuesto : *la parte decimal nunca termina y no es periódica.*
Como puede verse en los ejemplos de las raíces anteriores o en los famosos números :

$$\pi = 3.14159265358979.\,.\,.\,.\,. \qquad , \qquad e = 2.718281828459.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

El primero π (*pi*) es *la razón de la circunferencia al diámetro de un círculo* y el segundo es el número *e* , que aparece por ejemplo al considerar problemas de crecimiento o decrecimiento de poblaciones, cultivos o materiales radiactivos.

De ésta manera, el conjunto de los ***números reales*** **{ R }** es un gran conjunto que se obtiene al unir el conjunto de números racionales con el conjunto de números irracionales, **{ R } = { Q } + { I_r }**

Éste conjunto es cerrado bajo las cuatro operaciones elementales .
En resumen: *los números reales se forman con la* *unión* *de otros conjuntos de números* de acuerdo al esquema siguiente:



Sin embargo ***¡ no todos los números que aparecen en las matemáticas son números reales !*** .

Todo elemento del conjunto **{ R }** anterior tiene la interesante propiedad de que si se eleva al cuadrado resulta una cantidad positiva. Pues bien, si ahora agregamos al conjunto **{ R }** los números que tengan *la propiedad opuesta* es decir, que *elevados al cuadrado sean negativos* (los así llamados *números imaginarios*) , entonces se obtiene el conjunto de los ***números complejos*** **{ C }** cuyos elementos tienen la forma:

$$z = x + j \cdot y$$

donde x e y representan números reales y el símbolo j representa al número $\sqrt{-1}$, que es la base de los números imaginarios.

Como podemos ver, *los nuevos conjuntos de números se forman al agregar al conjunto numérico anterior otros elementos que tienen nuevas propiedades y que el conjunto inicial no poseía* .

Además de la cerradura, los números reales poseen las siguientes importantes propiedades:

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Si a, b, c representan números reales, entonces . . .

	PROPIEDAD	EN LA SUMA	EN LA MULTIPLICACION
I	***Cerradura***	La suma de dos números reales : *(a + b) es otro número real*	El producto de dos números reales : *(a)(b) es otro número real*
II	***Conmutativa***	*El orden de los sumandos no altera la suma* $(a+b)=(b+a)$	*El orden de los factores no altera el producto* $ab = ba$
III	***Asociativa***	*El resultado de una suma no depende del orden en que se realice* $(a+b)+c = a+(b+c)$	*El resultado de un producto no depende del orden en que se realice* $(ab)\,c = a\,(bc)$
IV	***Identidad***	*0* (*el cero*) es el elemento identidad para la suma porque $(0+a) = (a+0) = a$ para *cualquier número a*	1 (*el uno*) es el elemento identidad para la multiplicación porque $(1)\,a = a\,(1) = a$ para *cualquier número a*
V	***Inverso***	Todo número real *a* tiene un inverso aditivo denotado por : $-a$ tal que sumado con *a* : $a+(-a) = 0$ genera el elemento identidad para la suma .	Todo número real *a* (***distinto de cero***) tiene un inverso multiplicativo denotado por : $\frac{1}{a}$ ó por a^{-1} tal que multiplicado por *a* : $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right) = \left(a\cdot a^{-1}\right) = 1$ genera el elemento identidad para el producto
VI	***Distributiva***	La suma se distribuye en el producto : $(a+b)c = ac + bc$	El producto se distribuye en la suma : $a(b+c) = ab + ac$

De la propiedad de inverso se sigue que , *la resta y la división de números reales son solo casos especiales de la suma y el producto* dado que *:*

$$(a-b) = a+(-b)$$ *(restar el número b equivale a sumar su inverso aditivo)*

$$\left(\frac{a}{b}\right) = a\times\left(\frac{1}{b}\right)$$ *(dividir por el número b equivale a multiplicar por su inverso multiplicativo)*

Debemos notar también que :

" ***la división por cero no está definida*** "

puesto que el 0 es *el único número real que no tiene inverso multiplicativo*.

Ignorar esta regla, puede dar a cualquier persona distraído una desagradable sorpresa, como se ilustra en la siguiente comedia donde se *"demuestra"* que $1 = 2$, como sigue . . .

1° *Partimos del supuesto de que dos números reales diferentes de cero ,* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$ *, son iguales .* $$a = b$$

2° *Pero una igualdad no se altera si sus dos miembros se multiplican o se dividen por la misma cantidad , así que multiplicamos la igualdad anterior por el número* b : $\quad a \cdot b = b \cdot b$

3° *Una igualdad tampoco se altera sumando a ambos miembros la misma cantidad , así que sumamos* $-a^2$ $\quad a \cdot b - a^2 = b^2 - a^2$

4° *y factorizando ambos miembros se pueden escribir como:* $\quad a \cdot (b - a) = (b - a) \cdot (b + a)$

5° *Una igualdad tampoco se altera cuando sus miembros se dividen por la misma cantidad .*
Dividamos entonces entre $(b - a)$:

$$\frac{a(b-a)}{(b-a)} = \frac{(b+a)\cdot(b-a)}{(b-a)}$$

6° *El factor* $(b - a)$ *se anula y la igualdad se simplifica a :* $\quad a = b + a$

7° *Por la hipótesis inicial* $a = b$ *, y entonces se sigue que :* $\quad a = (a + a) = 2 \cdot a$

8° *Dividiendo la igualdad resultante entre* a *(que es distinto de cero), se obtiene . . .*

$$\frac{a}{a} = \frac{2 \cdot a}{a} \longrightarrow \boxed{1 = 2}$$

¡ Pero todos sabemos que $1 \neq 2$ *!! . ¿En donde está el error en el procedimiento anterior?*

Un lector atento habrá notado que la división por $(b - a)$ *está prohibida* porque $(b - a) = 0$ dado que $a = b$.

Con una comedia tan trágica como la anterior, se puede *"demostrar"* que $2 \times 2 = 5$, veamos . . .

1° *La primera escena comienza con una igualdad indiscutible :* $\quad (16 - 36) = (25 - 45)$

2° *Continuando el drama, se suma la misma cantidad a los dos miembros de la igualdad anterior (lo cual es perfectamente válido):*

$$16 - 36 + \left(\frac{81}{4}\right) = 25 - 45 + \left(\frac{81}{4}\right)$$

3° *La igualdad se transforma entonces en :*

$$4^2 - (2)\cdot(4)\cdot\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - (2)\cdot(5)\cdot\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

4° *Y como ambos miembros de la igualdad son trinomios cuadrados perfectos, se factorizan en el cuadrado de un binomio :*

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

5° *Tomando ahora la raíz cuadrada en ambos lados se obtiene :*

$$\left(4 - \frac{9}{2}\right) = \left(5 - \frac{9}{2}\right)$$

6° *Sumando* $\frac{9}{2}$ *en ambos miembros de la igualdad anterior se llega al absurdo resultado :*

$$4 = 5$$

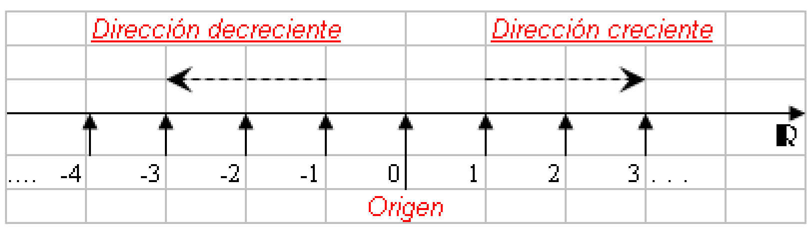
$$2 \times 2 = 5$$

Estos ejemplos ilustran el hecho de que una actitud descuidada hacia las ecuaciones o el desconocimiento de las propiedades de los números reales, puede conducirnos a resultados ilógicos y por supuesto, incorrectos.

¿ Dónde está el error en el ejemplo anterior ? . Consiste en *no utilizar la regla* : $\sqrt{x^2} = |x|$, que da siempre un número positivo.

1.2 ***La recta numérica* , *Desigualdades* , *Intervalos* y *Valor Absoluto* .**

Los números reales se representan geométricamente por medio de un modelo llamado *recta numérica* , el cual consiste en una línea recta con un punto escogido arbitrariamente como el origen, el cual representa al número 0 (*el cero*) .
Los números positivos se ubican entonces a la derecha del cero y los negativos a su izquierda, *a una distancia proporcional a su valor numérico* (*creciente* para los positivos , *decreciente* para los negativos) .



La gran utilidad del modelo radica en que :

Los números reales quedan ordenados. y además, a cada punto sobre la recta corresponde un único número real y a cada número real corresponde uno y solamente un punto sobre la recta.

Un número x es positivo ***si está a la derecha del origen***, lo cual se denota por el símbolo : $x > 0$
y si x es negativo, entonces ***está a la izquierda del origen*** , lo cual se denota por el símbolo : $x < 0$.

Se puede afirmar entonces de manera general que *si un número* x *está a la izquierda respecto a otro número* y sobre la recta numérica real, entonces " x *es menor que* y " , lo cual se denota por el símbolo :

$$x < y$$

Similarmente , *si un número* z *está a la derecha respecto a otro número* w sobre la recta numérica real, entonces " z *es mayor que* w " , lo cual se denota por el símbolo :

$$z > w$$

Para decidir cuando un número real a es mayor o menor que otro número b se establece entonces el siguiente criterio :

El número a *es menor que el número* b *si y sólo si su diferencia* $(a-b)$ *es negativa .*

$$a < b \quad \longleftrightarrow \quad (a-b) < 0$$

El número a *es mayor que el número* b *si y sólo si su diferencia* $(a-b)$ *es positiva .*

$$a > b \quad \longleftrightarrow \quad (a-b) > 0$$

(1.1)

Ejemplo 1 . De $\frac{11}{12}$ y $\frac{10}{11}$ ¿ qué número es mayor ?

Solución : Sean $a = \frac{11}{12}$ y $b = \frac{10}{11}$ y calculemos su diferencia :

$$a-b = \left(\frac{10}{11}\right) - \left(\frac{11}{12}\right)$$

$$= \left[\frac{(10)\cdot(12) - (11)^2}{(11)\cdot(12)}\right] \qquad \textit{(Sumando las fracciones)}$$

$$= \left(\frac{120-121}{132}\right) = \frac{-1}{132}$$

dado que se ha obtenido un número negativo, del criterio anterior se concluye que $\frac{10}{11} < \frac{11}{12}$

Frecuentemente los ***símbolos de desigualdad*** : $<$ *"menor que"* y $>$ *"mayor que"* se combinan con el símbolo de igualdad : $=$ y se leen como sigue. . .

$x \le y$: *" x es menor o igual que y "* *o* también : *" x es a lo más igual a y "*

$x \ge y$: *" x es mayor o igual que y "* o también : *" x es por lo menos igual a y "*

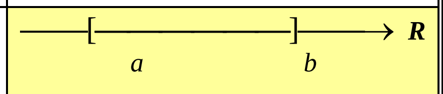
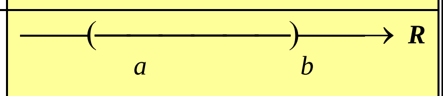
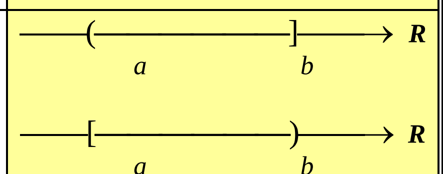
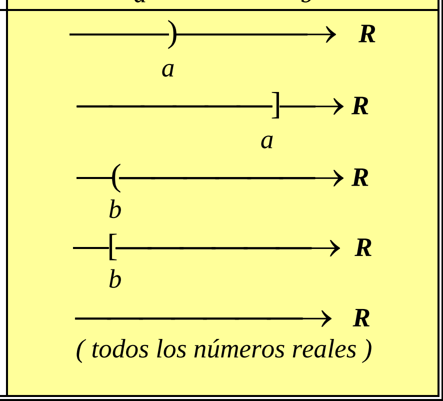
Las desigualdades numéricas *sirven para representar subconjuntos de números reales* , es decir "partes" de la recta numérica, llamados *intervalos* .

Por ejemplo . . .

$x \le 2$ Son todos los puntos x que están a la izquierda del punto que representa al número 2 sobre la recta numérica (*incluyendo al* 2) .
O podríamos leer también ésta desigualdad como: *" x es a lo más igual a 2 "* .

$-4 \leq x < 2$	Representa los puntos x de la recta numérica que están comprendidos entre el punto -4 y el punto 2 (*incluyéndo al* -4 pero no al 2). Ésta desigualdad se puede leer también diciendo: *" x es por lo menos -4 pero siempre menor que 2 " .*
$x \leq 2,\ \ 5 \leq x$	Equivale a todos los puntos de la recta numérica que no están entre 2 y 5 (incluyéndo al 2 y al 5) . También se puede leer ésta desigualdad diciendo: *" x es a lo más igual a 2 ó por lo menos 5 " .*
$x > -6$	Son los números x de la recta numérica que están a la derecha del número -6
$-5 < y < x < -3$	Representa a los números x que son mayores que los números y, con ambos x e y comprendidos entre -5 y -3
$c \leq 2$; $2 < b < 3$	Se traduce como los números c que a lo más son iguales a 2 y los números b comprendidos entre 2 y 3 .

La siguiente es la ***equivalencia entre desigualdades e intervalos***

TIPO DE INTERVALO	*NOTACIÓN*	*DESIGUALDAD EQUIVALENTE*	*REPRESENTACIÓN GRÁFICA*
CERRADO : *(**se incluyen** los extremos)*	$[\,a\ ,\ b\,]$	$a \leq x \leq b$	
ABIERTO : *(**No se incluyen** los extremos)*	$(\,a\ ,\ b\,)$	$a < x < b$	
***SEMIABIERTO* (o *SEMICERRADO*)** : *(**sólo** se incluye uno de los extremos)*	$(\,a\ ,\ b\,]$ $[\,a\ ,\ b\,)$	$a < x \leq b$ $a \leq x < b$	
INFINITOS : *(El intervalo **no está limitado** en uno ó en ambos extremos)*	$(-\infty\,,\ a\ )$ $(-\infty\,,\,a\,]$ $(\,b\,,\,\infty)$ $[\,b\,,\,\infty)$ $(\,-\infty\,,\,\infty)$	$-\infty < x < a$ ó $x < a$ $-\infty < x \leq a$ ó $x \leq a$ $b < x < \infty$ ó $x > b$ $b \leq x < \infty$ ó $x \geq b$ $-\infty < x < \infty$	

Ejemplo 2. Equivalencia entre intervalos y desigualdades

el intervalo $(-2\,,\ 5\,]$ corresponde a la desigualdad : $-2 < x \le 5$

el intervalo $[3\,,\ 8]$ corresponde a la desigualdad : $3 \le x \le 8$

el intervalo $(-\infty,\ -4)$ corresponde a la desigualdad : $x < 4$

el intervalo $(-1\,,\ \infty)$ corresponde a la desigualdad : $-1 < x < \infty$

a no es negativo corresponde a la desigualdad : $0 \le a$ o $a \ge 0$

x es positivo pero no más de 6 corresponde a : $0 < x \le 6$

ψ es negativo y por lo menos igual a -3 se traduce: $-3 \le \psi < 0$

ω es negativo y a lo más igual a -3 es la desigualdad: $-\infty < \omega \le -3$

1.2 a) ***Propiedades de las desigualdades***

Las propiedades que cumple toda desigualdad son las siguientes :

PROPIEDAD		*Ejemplo*
I ***Transitiva***	***Si*** $a < b$ ***y*** $b < c$ ***entonces*** $a < c$ " Si a está a la izquierda de b y b está a la izquierda de c , entonces a está también a la izquierda de c "	$-4 < -2$ y $-2 < -1$ Así que $-4 < -1$
II ***Aditiva***	***Si*** $a < b$ ***y*** $c < d$ ***entonces*** $(a + c) < (b + d)$ " Se pueden sumar miembro a miembro dos desigualdades *siempre y cuando tengan el mismo sentido* "	$-5 < 3$ y $-2 < -1$ Así que $(-5 - 2) < (3 - 1)$ $(-7) < (2)$
III ***Suma***	***Si*** $a < b$ ***entonces*** $(a + c) < (b + c)$ "Una desigualdad no se altera si se suma a ambos miembros cualquier cantidad real c, positiva ó no "	$-5 < 3$ Así que sumado -2 en ambos miembros se obtiene : $(-5 - 2) < (3 - 2)$ $-7 < 1$
IV ***Multiplicación***	***Si*** $a < b$ ***entonces :*** $ac < bc$ ***si*** $c > 0$ $ac > bc$ ***si*** $c < 0$ " Si una desigualdad se multiplica por una cantidad negativa *INVIERTE* su sentido ; si se multiplica por una cantidad es positiva *CONSERVA* su sentido "	$-3 < -2$ Entonces multiplicando ambos miembros por 2 queda : $-6 < -4$ En cambio multiplicándola por -2 se obtiene : $6 > 4$
V Inverso	***Si*** $0 < a < b$ ***entonces*** $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ***Si*** $a < b < 0$ ***entonces*** " Para dos números, ambos positivos o ambos negativos el recíproco de su desigualdad *INVIERTE* su sentido "	$-3 < -2$ Entonces $-\left(\frac{1}{3}\right) > -\left(\frac{1}{2}\right)$ y $3 > 2$ entonces $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Observe que estas propiedades son igualmente válidas si en todas ellas se cambia el símbolo : " < " por el símbolo: " > "
Es muy fácil demostrarlas. Como ejemplo demostremos las propiedades IV y V (se deja como ejercicio la prueba de las otras propiedades).

<u>DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD</u> IV .

Supongamos que $a < b$, entonces $(a - b)$ es por definición un número negativo, es decir

$$(a - b) < 0 \quad .$$

Si éste número se multiplica por otro número negativo, digamos $c < 0$, entonces el producto será positivo . En otras palabras :

$$c \cdot (a - b) > 0$$

es decir

$$c \cdot a - c \cdot b > 0$$

De ésta desigualdad se deduce que el número $(c \cdot a)$ *es mayor que* el número $(c \cdot b)$ puesto que su diferencia es positiva, esto es

$$c \cdot a > c \cdot b .$$

De éste modo la desigualdad original $a < b$, *ha invertido su sentido* y ha quedado como $c \cdot a > c \cdot b$.

En el otro caso, si el número c es positivo : $c > 0$ entonces el producto $c \cdot (a - b)$ será negativo, es decir $c \cdot (a - b) < 0$ de donde se sigue que $c \cdot a < c \cdot b$ (*la desigualdad original no cambió su sentido*) .

<u>DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD</u> V .

Supongamos que $0 < a < b$, entonces el producto $(a \cdot b)$ es un número positivo puesto que ambos a y b son positivos y por lo tanto su inverso también lo es :

$$0 < \frac{1}{a \cdot b}$$

Como se domostró en la propiedad anterior, la desigualdad $a < b$ no cambiará su sentido si se multiplica por un número positivo, digamos $\frac{1}{a \cdot b} > 0$, así que . . .

$$a \cdot \left(\frac{1}{a \cdot b} \right) < b \cdot \left(\frac{1}{a \cdot b} \right) \qquad \textit{es decir} \qquad \left(\frac{a}{a} \right) \cdot \frac{1}{b} < \left(\frac{b}{b} \right) \cdot \frac{1}{a}$$

Simplificando ésta expresión resulta finalmente : $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Cuando $a < b < 0$, el producto $(a \cdot b)$ de dos números negativos también es un número positivo así que su inverso también lo es: $0 < \frac{1}{a \cdot b}$. Por lo tanto la prueba se desarrolla igual que en el caso anterior.

1.2 b) ***<u>Solución de desigualdades</u>*.**

Resolver una desigualdad significa determinar el intervalo (o intervalos) de números reales para los cuales la desigualdad es cierta.

A diferencia de una igualdad o *ecuación*, cuya solución normalmente es un número *finito* de números reales, la solución de una desigualdad por lo general es un *un conjunto infinito* de números.

Para determinar la solución de una desigualdad, se pueden emplear las mismas reglas y técnicas algebráicas usadas para resolver una ecuación; y usando además las propiedades I , II , III , IV y V para las desigualdades.
Podemos clasificar a las desigualdades de acuerdo a las expresiones que involucren, como desigualdades entre :

1 . <u>Polinomios</u>,
2 . <u>Funciones Racionales</u>
3 . <u>Valores absolutos</u>
4 . <u>Diversas funciones matemáticas</u>

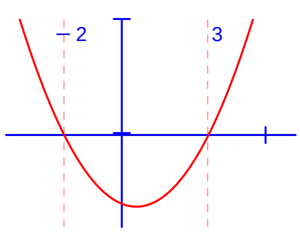
1.2 c) ***Desigualdades con polinomios*.**

Para resolver una desigualdad que solamente tiene polinomios, se utiliza el siguiente principio:

***Un polinomio no cambia de signo entre dos raíces consecutivas*.** (1.2)

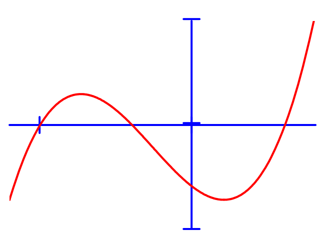
Las raíces de un polinomio $P(x)$ son los valores x para los cuales el polinomio vale cero, esto es $P(x) = 0$ y se interpretan geométricamente como los puntos donde la gráfica del polinomio cruza por la recta numérica real X . Por ejemplo . . .

$P(x) := x^2 - x - 6$



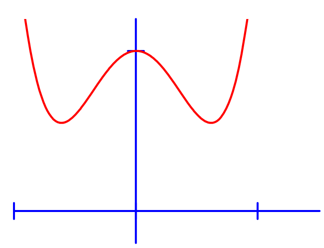
De 2° grado con 2 raices

$p(x) := \left(x^2 - x - 6\right)\cdot(x + 5)$



De 3er grado con 3 raices

$Q(x) := x^4 - 3\cdot x^2 + 5$



De 4° grado sin raices reales

Un polinomio de grado n cruza n veces como máximo al eje horizontal X ; pero como podemos observar en la gráfica del último ejemplo, puede ser que no lo cruce ni una sola vez.
Si la gráfica del polinomio cruza el eje X entonces cambia de signo, asi que para volver a cambiar de signo debe cruzar necesariamente una vez más el eje horizontal.

Por lo anterior, se concluye que para resolver una desigualdad de la forma $P(x) < 0$ ó $P(x) < 0$ donde $P(x)$ es un polinomio, se debe seguir el siguiente procedimiento . . .

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CON POLINOMIOS

1. *Escribir todos los términos de la desigualdad en un solo miembro para que tome la forma :*
$$P(x) < 0 \quad ó \quad P(x) > 0$$
2. *Factorizar para determinar las raices reales del polinomio* $P(x)$.
3. *Localizar las raices sobre la recta numérica real y determinar los intervalos (en los cuales el polinomio será positivo o negativo)* (1.3)
4. *Hacer una "prueba de signos" , esto es,* ***averiguar cual es el signo de cada uno de los factores determinados en el paso 2 anterior, en cada uno de los intervalos en los que quedó dividida la recta numérica real*** *por las raices del polinomio.*
5. *Verificar si la desigualdad (escrita en la forma factorizada) se cumple o no en cada intervalo.*

OBSERVACIÓN # 1 :
Cuando un polinomio sólo tiene raices complejas y ninguna raíz real, significa que no corta al eje X en ningún punto y por lo tanto su gráfica está totalmente por encima (si $P(x) > 0$) o totalmente por debajo (si $P(x) < 0$) del eje X. En éstos casos . . .

una de las dos desigualdades : $P(x) < 0$ ***ó*** $P(x) > 0$ ***se cumplirá siempre y la otra no***

Esto significa que una desigualdad es verdadera para cualquier número real x y la otra no tiene solución.

Por ejemplo, no existe algún número real que satisfaga a la desigualdad : $x^2 + 1 < 0$ puesto que todo número real elevado al cuadrado es positivo, de modo que es imposible que la suma $x^2 + 1$ sea negativa.

En cambio la desigualdad : $x^2 + 1 \geq 0$ se cumple para cualquier valor numérico de x .

OBSERVACIÓN # 2 :
En consecuencia :

los factores de un polinomio que no generen raíces reales,
no cambian la solución determinada por las raíces reales del polinomio
y pueden ser ignorados en el procedimiento de solución

Por ejemplo, la desigualdad : $\left(x^2 + 4\right)\cdot(x - 3) < 0$ se cumple igual si sólo se considera la solución de $(x - 3) < 0$

Ejemplo 3. Resolver la desigualdad : $(5\cdot x - 7) < (-3\cdot x + 1)$

Solución : Primero procedemos a escribir todos los términos de la desigualdad en un solo miembro. Para ello usemos la propiedad de ***suma*** de las desigualdades y sumemos la cantidad $-(-3\cdot x + 1)$ que es el inverso aditivo del número $(-3\cdot x + 1)$.

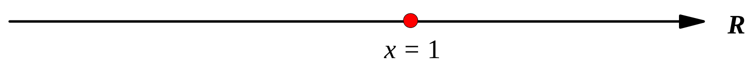
Como ya se sabe, con ésta operación no se cambia el sentido de la desigualdad (*sólo se transforma en otra desigualdad equivalente*) y se obtiene :

$$[(5\cdot x - 7) - (-3\cdot x + 1)] < [(-3\cdot x + 1) - (-3\cdot x + 1)]$$

$$(5\cdot x - 7) + 3\cdot x - 1 < 0$$

$$8\cdot(x - 1) < 0 \qquad \textit{(simplificando y factorizando)}$$

En éste momento el polinomio queda factorizado. Por ser de 1er grado, su única raíz se obtiene al resolver la ecuación : $8\cdot(x-1) = 0$ y es $x = 1$, con lo cual la recta numérica queda dividida en dos intervalos: $(-\infty, 1)$ y $(1, \infty)$.
Procediendo a averiguar el signo de éste único factor, se tiene que . . .



	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$(x-1)$	$(-)$	$(+)$
$(8x-1)$	$(-)$	$(+)$

Entonces la desigualdad : $8\cdot(x-1) < 0$ se satisface solo en el intervalo $(-\infty, 1)$, es decir la solución es el conjunto de números reales x que están a la izquierda del número 1: $x < 1$.
De ésta manera , hemos transformado la desigualdad inicial en otra equivalente pero más simple : $x < 1$, la cual representa la solución de la desigualdad inicial y equivale al intervalo infinito $(-\infty, 1)$.

En las desigualdades que solo tienen polinomios de primer grado, la solución también se puede determinar rápidamente al "*despejar* " la variable x una vez que se han simplificado todos los términos en un solo miembro de la desigualdad.
Asi por ejemplo en el ejercicio anterior, a partir de $8\cdot(x-1) < 0$ se tiene . . .

$$8\cdot x - 8 < 0$$

$$8\cdot x - 8 + (8) < 0 + (8) \qquad \textit{(Sumado + 8 en ambos miembros)}$$

$$8\cdot x < 8 \qquad \textit{(simplificando)}$$

$\left(\frac{1}{8}\right)\cdot(8\cdot x) < \left(\frac{1}{8}\right)\cdot(8)$ *(Multiplicando por la cantidad positiva* $\left(\frac{1}{8}\right)$ *,*

la desigualdad no se altera ni cambia de sentido)

$x < 1$ *(simplificando)*

$$\text{=======)}\!\longrightarrow \mathbf{R}$$
$$1$$

la solución gráfica es el intervalo infinito abierto $(-\infty\ ,\ 1)$

Substituyendo valores para la variable x que estén a la derecha del número 1 se puede comprobar que la desigualdad inicial no se cumple, mientras que para *cualquier valor* a la izquierda del 1 , la desigualdad es verdadera . *(hágalo !)*

Ejemplo 4. Hallar los intervalos solución de : $\left(1-\frac{3}{2}\cdot x\right) \geq (x-4)$

Solución : Sumando el inverso aditivo de $(x-4)$ en ambos miembros se obtiene :

$$\left[\left(1-\frac{3}{2}\cdot x\right)-(x-4)\right] \geq [(x-4)-(x-4)]$$

$$\left(5-\frac{5}{2}\cdot x\right) \geq 0 \qquad \textit{(simplificando)}$$

$$\left[\left(5-\frac{5}{2}\cdot x\right)-5\right] \geq (0-5) \qquad \textit{(Sumando } -5 \textit{ en ambos miembros)}$$

$$\left(\frac{-5}{2}\cdot x\right) \geq (-5)$$

$$\left[-\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\cdot x\right)\right] \leq (-5)\cdot\left[-\left(\frac{2}{5}\right)\right]$$

(Multiplicando por el inverso del coeficiente de x , que es un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad que cambia de "≥" a "≤")

$x \leq 2$ *(La solución buscada)*

Entonces, cualquier número real que esté a la izquierda de 2 (incluso éste), satisface la desigualdad. En otras palabras la solución es el intervalo infinito semicerrado $(-\infty\ ,\ 2]$, ó gráficamente :

$$\text{=============]}\!\longrightarrow \mathbf{R}$$
$$2$$

Ejemplo 5. Hallar los números x que satisfacen : $(-3\cdot x + 4) \le \left(-\frac{3}{4}\cdot x + 1\right) < (-3\cdot x + 5)$

Solución : En éste caso debemos resolver *simultáneamente* dos desigualdades :

$$(-3\cdot x + 4) \le \left(-\frac{3}{4}\cdot x + 1\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{3}{4}\cdot x + 1\right) < (-3\cdot x + 5)$$

En la primera desigualdad sumamos el inverso aditivo de $(-3\cdot x + 4)$:

$$(-3\cdot x + 4) - (-3\cdot x + 4) \le \left(-\frac{3}{4}\cdot x + 1\right) - (-3\cdot x + 4)$$

$$0 \le \frac{9}{4}\cdot x - 3 \qquad \textit{(simplificando)}$$

$$3 \le \frac{9}{4}\cdot x \qquad \textit{(sumado el inverso de } -3 \textit{)}$$

Multiplicando ahora ambos miembros por el inverso de $\frac{9}{4}$, que es $\left(\frac{4}{9}\right) > 0$ una cantidad positiva, la desigualdad no cambiará su sentido :

$$\left(\frac{4}{9}\right)\cdot 3 \le \left(\frac{4}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}\cdot x\right)$$

$$\boxed{\left(\frac{4}{3}\right) \le x}$$

Esta la solución de la primera desigualdad .

Para la segunda desigualdad sumemos el inverso aditivo de $\left(-\frac{3}{4}\cdot x + 1\right)$:

$$\left[\left(-\frac{3}{4}\cdot x + 1\right) - \left(-\frac{3}{4}\cdot x + 1\right)\right] < \left[(-3\cdot x + 5) - \left(-\frac{3}{4}\cdot x + 1\right)\right]$$

$$0 < \frac{-9}{4}\cdot x + 4 \qquad \textit{(simplificando)}$$

$$-4 < \left(-\frac{9}{4}\right)\cdot x \qquad \textit{(Se ha sumado el inverso de } 4 \textit{)}$$

Multiplicando ahora ambos miembros por el inverso de $\frac{-9}{4}$ que es $\frac{-4}{9}$ una cantidad negativa, la desigualdad *invierte su sentido* **:**

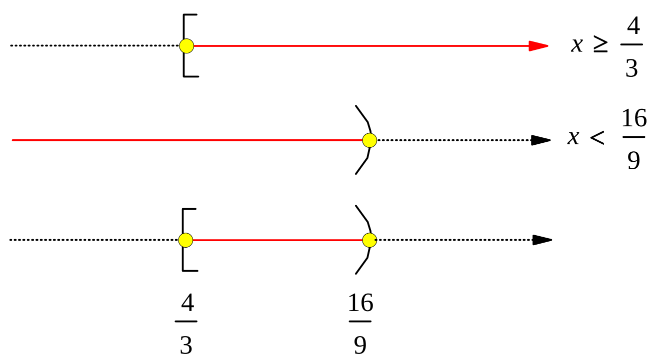
$$\left(\frac{-4}{9}\right)\cdot(-4) > \left(\frac{-4}{9}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}\cdot x\right)$$

$$\left(\frac{16}{9}\right) > x$$

Esta es la solución de la 2ª desigualdad.

La solución final es el conjunto de valores comunes a ambas soluciones parciales, esto es, la intersección de los dos intervalos solución, porque sólo cuando x tome un valor numérico en esa intersección común , podrá satisfacer simultáneamente las dos desigualdades iniciales .

Gráficamente vemos que la parte común de los intervalos :



es el intervalo semiabierto: $\left(\frac{4}{3}\right) \leq x < \left(\frac{16}{9}\right)$ o también : $\left[\frac{4}{3}, \frac{16}{9}\right)$

Ejemplo 6. Resolver la desigualdad : $2\cdot x^3 + 5\cdot x^2 \geq 12\cdot x$

Solución : Aquí ***sería un error dividir ambos lados de la desigualdad por*** x con el fin de simplificarla como sigue . . .

$$\frac{\left(2\cdot x^3 + 5\cdot x^2\right)}{x} \geq \frac{(12\cdot x)}{x}$$

$$2\cdot x^2 + 5\cdot x \geq 12 \qquad \textit{(Eliminando asi el factor } x \textit{)}$$

porque *no se conoce aún que valores toma* x *y tampoco se sabe todavía si es un número positivo o negativo. Por lo tanto, al dividir la desigualdad entre* x*, su sentido queda indeterminado.*

El camino correcto es *transformar la desigualdad inicial en una más simple ; pero equivalente , usando las propiedades de las desigualdades y aplicando el procedimiento* (1. 3) .

1° *Sumar* $-12 \cdot x$ *en ambos miembros de la desigualdad para tener todos los términos en un solo miembro.*

$$2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - (12 \cdot x) \geq 12 \cdot x - (12 \cdot x)$$

$$2 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 12 \cdot x \geq 0$$

2° *Factorizar el polinomio obtenido*

$$x \cdot \left(2 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 12\right) \geq 0$$

$$x \cdot (x + 4) \cdot (2 \cdot x - 3) \geq 0$$

3° *Las raices del polinomio se obtienen al resolver la igualdad correspondiente* $x \cdot (x + 4) \cdot (2 \cdot x - 3) = 0$. *Los números que satisfacen esta condición son:*

$x = -4$, $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$

Asi que la recta numérica real queda dividida en 4 subintervalos :

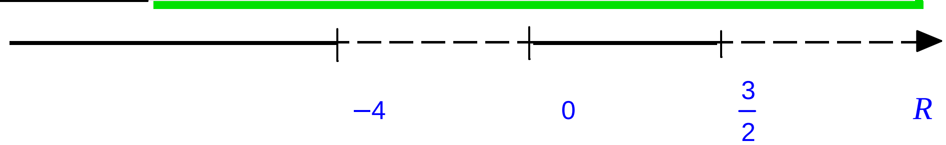
(−∞ , −4) , (−4 , 0) , (0 , 3/2) , (3/2 , ∞)

La desigualdad se cumplirá dependiendo del signo que tenga cada uno de sus factores en cada uno de los subintervalos anteriores.

Cada factor lineal de la forma $(a \cdot x - b)$ es un polinomio de grado 1, que no cambia de signo en cada uno de los dos intervalos en que su raiz $x = \frac{b}{a}$ divide a la recta numérica.

Por lo tanto, los signos de los factores se determinan asignando *arbitrariamente* un valor numérico a la variable x en cada uno de los intervalos y substituyendo en cada factor para obtener un número positivo ó negativo, según se muestra en la siguiente tabla de *"prueba de signos"* .

	(−∞ , − 4)	(− 4 , 0)	(0 , 3/2)	(3/2 , ∞)
(x + 4)	(−)	(+)	(+)	(+)
x	(−)	(−)	(+)	(+)
(2 x − 3)	(−)	(−)	(−)	(+)
(x − 4)(x)(2 x − 3)	**(−)**	**(+)**	**(−)**	**(+)**



Otra forma de calcular el signo de cada factor consiste en verificar si el valor arbitrario escogido para x se localiza a la izquierda o a la derecha de la raiz correspondiente a tal factor y usar el siguiente criterio :

Si x queda a la izquierda de una raiz entonces el factor $(x-a)$ será negativo

$$(x-a) < 0 \longrightarrow x < a$$

Si x queda a la derecha de una raiz entonces el factor $(x-a)$ será positivo

$$x-a > 0 \longrightarrow x > a$$

Como se puede observar en la tabla anterior, el producto de los tres factores : x, $(x-4)$ y $(2\cdot x-3)$ será positivo, sólo cuando la variable x asuma un valor numérico dentro de los intervalos:

$$[-4\,,0\,] \quad \text{y} \quad [\,3/2\,,\ \infty\,)$$

y éstos son por lo tanto la solución de la desigualdad. *Compruébelo !*

(Nótese que se incluyen los extremos en los intervalos solución debido al signo $\geq$)

1.2 d) ***Desigualdades con fracciones***.

Una fracción es el cociente de dos polinomios. Consideraremos la solución de desigualdades que tienen la forma general :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \qquad (1.4)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x .

Dado que se involucran polinomios, para determinar la solución de (1.4) se sigue aplicando el principio (1.2) y por lo tanto el procedimiento (1.3) , excepto que primero se deben sumar en un solo miembro todas la fracciones involucradas en la desigualdad para poder escribirla en la forma "normal" (1.4), es decir :

PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN PARA DESIGUALDADES CON FRACCIONES

1. ***Sumar las fracciones en un solo miembro de la desigualdad.***
2. ***Factorizar el numerador y el denominador , con el fin de obtener todas sus raices reales y dividir la recta numérica en intervalos con las raices obtenidas.***
3. ***Evaluar cada factor de la desigualdad en cada intervalo para determinar su signo.***
4. ***Comprobar si la desigualdad factorizada en el paso 2 se cumple o no, siguiendo la regla de los signos para la multiplicación .***

(1.5)

Ejemplo 7. Resolver la desigualdad : $\left(\dfrac{2\cdot x-7}{x-5}\right) \le 3$

Solución : Aquí ***sería un error multiplicar ambos lados de la desigualdad por el factor*** $(x-5)$ con el fin de simplificarla como sigue. . .

$$\left(\frac{2\cdot x-7}{x-5}\right)\cdot(x-5) \le (3)\cdot(x-5)$$

$$(2\cdot x-7) \le (3\cdot x-15) \qquad \textit{(Eliminando asi el factor } (x-5)\textit{)}$$

Esto es debido a que, como ya se dijo antes, no se conoce aún el signo de la cantidad variable $(x-5)$, la cual podría ser positiva o negativa , de manera que al multiplicar la desigualdad por esa cantidad, no sabríamos que sentido adquirió finalmente .

No se debe multiplicar una desigualdad por una cantidad variable de la cual se desconoce el signo

La forma correcta de resolver cualquier desigualdad con fracciones es *transformarla en una más simple, equivalente a uno o varios intervalos , usando las propiedades de las desigualdades* , y siguiendo el método (1.5) indicado antes .

$$\left(\frac{2\cdot x-7}{x-5}-3\right) \le (3-3) \qquad \textit{(se ha sumado } -3 \textit{ en ambos miembros)}$$

$$\frac{-(x-8)}{(x-5)} \le 0 \qquad \textit{(sumando la fracción)}$$

$$\frac{(x-8)}{(x-5)} \ge 0 \qquad \textit{(al multiplicar por } -1\textit{, se cambió de sentido)}$$

Quedan solo dos factores lineales y sus raices se obtienen al resolver las ecuaciones :

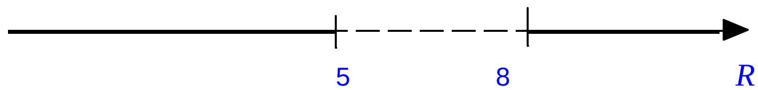
$$(x-8) = 0 \qquad \text{y} \qquad (x-5) = 0$$

de las que resulta: $x = 8$ y $x = 5$.
Estos números dividen entonces a la recta numérica en tres intervalos:

$$(-\infty\,,\ 5)\ ,\quad (5\,,\ 8)\ ,\quad (8\,,\ \infty)$$

Los signos de los factores en cada uno de éstos intervalos se indican en la siguiente tabla :

	$(-\infty\ ,\ 5)$	$(5\ ,\ 8)$	$(8\ ,\ \infty)$
$(x-5)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x-8)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\dfrac{(x-8)}{(x-5)}$	$\dfrac{(-)}{(-)} = (+)$	$\dfrac{(+)}{(-)} = (-)$	$\dfrac{(+)}{(+)} = (+)$



Asi que la fracción $\left(\dfrac{x-8}{x-5}\right)$ será positivo sólo si x toma un valor numérico comprendido en los intervalos : $(-\infty\ ,\ 5)$ y $(8\ ,\ \infty)$

Además, como la desigualdad no es estricta, se puede incluir el extremo $x = 8$ de modo que la solución final es : $(-\infty\ ,\ 5)$ y $[8\ ,\ \infty)$ ó en forma equivalente :

$$x < 5 \quad ; \quad 8 \le x$$

(¿Por qué no se incluye también el extremo $x = 5$ como parte de la solución? , pues sencillamente porque implicaría una división por cero en la desigualdad inicial)

<u>Ejemplo</u> 8. Resolver la desigualdad : $\left(\dfrac{7}{x-1}\right) \le \left(5 + \dfrac{6}{x^2-1}\right)$

<u>Solución</u> *:* Como ya hicimos notar antes, *no se debe multiplicar una desigualdad por un factor variable cuyo signo se desconoce , pues el sentido de la desigualdad quedaría indeterminado.*
Asi que evitemos la tentación de multiplicar la desigualdad por $\left(x^2-1\right)$.
Sumando el inverso aditivo del miembro derecho, se obtiene . . .

$$\frac{7}{x-1} - \left(5 + \frac{6}{x^2-1}\right) \le \left[\left(5 + \frac{6}{x^2-1}\right) - \left(5 + \frac{6}{x^2-1}\right)\right]$$

$$\frac{7}{x-1} - 5 - \frac{6}{x^2-1} \le 0$$

$$\frac{-\left(5\cdot x^2 - 7\cdot x - 6\right)}{\left(x^2-1\right)} \le 0 \qquad \textit{(sumando la fracción)}$$

$$\frac{5\cdot x^2 - 7\cdot x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \qquad \textit{(se ha multiplicado por } -1 \textit{)}$$

Notemos que <u>se ha invertido el sentido</u> de la desigualdad. Factoricemos ahora el numerador y el denominador de ésta fracción.

$$\frac{(5\cdot x + 3)\cdot(x - 2)}{(x - 1)\cdot(x + 1)} \geq 0$$

Las raices de los polinomios en el numerador y en el denominador se obtienen al resolver $(5\cdot x + 3)\cdot(x - 2) = 0$ *y* $(x - 1)\cdot(x + 1) = 0$ y resulta:

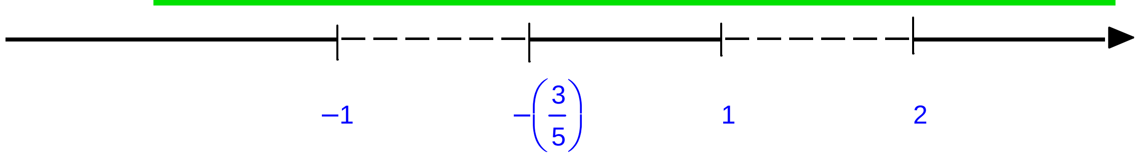
$$x = \frac{-3}{5}\ , \quad x = 2\ , \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = -1$$

La recta numérica queda asi dividida en 5 partes o subintervalos:

$$(-\infty\ , -1\ )\ , \quad (\ -1\ ,\ -\frac{3}{5}\ )\ , \quad (-\ \frac{3}{5}\ , 1\ )\ , \quad (\ 1,\ 2\ )\ ,\ (\ 2\ ,\ \infty\ )$$

Determinemos el signo de cada factor en cada intervalo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -3/5)$	$(-3/5, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$(x + 1)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$(5x + 3)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$(x - 1)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x - 2)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\frac{(5\cdot x + 3)\cdot(x - 2)}{(x - 1)\cdot(x + 1)}$	$\frac{(-)(-)}{(-)(-)} = (+)$	$\frac{(-)(-)}{(-)(+)} = (-)$	$\frac{(+)(-)}{(-)(+)} = (+)$	$\frac{(+)(-)}{(+)(+)} = (-)$	$\frac{(+)(+)}{(+)(+)} = (+)$



***<u>Sugerencia</u>**: Si se escriben los factores en la primera columna en <u>el mismo orden en que aparecen sus raices sobre la recta numérica</u>, entonces sus signos quedarán ordenados en un arreglo triangular resultando así mucho más fácil determinarlos.*

Entonces la desigualdad inicial $\left(\frac{7}{x - 1}\right) < \left(5 + \frac{6}{x^2 - 1}\right)$ o $\frac{(5\cdot x + 3)\cdot(x - 2)}{(x - 1)\cdot(x + 1)} > 0$ se cumple solamente en los intervalos :

$$(-\infty\ , -1\ )\ , \quad [\ -3/5\ , 1\ ) \quad \text{y} \quad [\ 2\ ,\ \infty\ )$$

Otra manera de escribir ésta solución es : $x < -1$, $\frac{-3}{5} \leq x < 1$, $2 \leq x$

Obsérvese que se incluyen los extremos $\frac{-3}{5}$ y 2 como parte de la solución; pero no los extremos -1 y 1 ¿ por qué ?

1.2 e) *Desigualdades con valores absolutos*.

El valor absoluto de un número real x se denota por $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x\ es\ positivo \\ -x & si\ x\ es\ negativo \end{cases} \qquad (1.6)$$

El valor absoluto de un número real x nunca es negativo. Cuando x es negativo entonces $-x$ es positivo. Por ejemplo: $|-4| = -(-4) = 4$

Geométricamente, $|x|$ *representa la distancia que hay desde el origen (el cero) de la recta numérica hasta el punto que representa al número* x.

Similarmente, la ***distancia*** que hay sobre la recta numérica entre dos números reales a y b se define como :

$$|a - b| \quad \text{o también} \quad |b - a|$$

Por ejemplo la separación entre los números -3 y -7 es 4 unidades porque :

$$|(-3) - (-7)| = |-3 + 7| = |4| = 4 \qquad \text{ó bien :} \qquad |(-7) - (-3)| = |-7 + 3| = |-4| = 4$$

Dado que el cuadrado de todo número real x es positivo y la raiz cuadrada de todo número positivo es un número positivo, entonces una *definición alternativa* para el valor absoluto es :

$$|x| = \sqrt{(x)^2} \qquad (1.7)$$

Por lo anterior se tiene que . . .

$$|a - b| = \sqrt{(a - b)^2} = \sqrt{(b - a)^2} = |b - a|$$

Ejemplo 9. Hallar los valores de y que satisfacen la ecuación : $|3 \cdot y + 2| = 5$

Solución : $(3\cdot y+2)$ representa un número real, asi que aplicando la definición de valor absoluto se tiene . . .

Si $(3\cdot y+2) > 0$ entonces $|3\cdot y+2| = 3\cdot y+2$ y por lo tanto $|3\cdot y+2| = 5$ equivale a la ecuación $3\cdot y+2 = 5$ cuya solución es

$$y = \frac{(5-2)}{3} = 1$$

Si $(3\cdot y+2) < 0$ entonces $|3\cdot y+2| = -(3\cdot y+2)$ y por lo tanto $|3\cdot y+2| = 5$ equivale a la ecuación $-(3\cdot y+2) = 5$ cuya solución es :

$$y = \frac{(5+2)}{-3} = -\left(\frac{7}{3}\right)$$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Si a y b son dos números reales cualesquiera entonces . . .

I	$-a \le \lvert a \rvert$ y $a \le \lvert a \rvert$	
II	$\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert$	
III	Si $\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$ entonces $a = b$ ó $a = -b$	
IV	$\lvert a\, b \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	
V	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	
VI	$\lvert a+b \rvert \le \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ $\lvert a-b \rvert \ge \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$	*Las desigualdades " del triángulo"*

(1.8)

Éstas propiedades se pueden demostrar a partir de la definición (1.6) del valor absoluto. Demostremos las propiedades IV y VI. *(queda como ejercicio para el lector la demostración de las demás propiedades.)*

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD IV

CASO I : Sean dos números reales positivos: $a > 0$ y $b > 0$, entonces sus valores absolutos son:

$$|a| = a \qquad |b| = b$$

Además su producto es positivo $a\cdot b > 0$ *(el producto de dos números positivos es positivo)* asi que su valor absoluto es :

$$|a \cdot b| = ab$$

substituyendo $|a| = a$ y $|b| = b$ resulta $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

CASO II : Supongamos ahora que se dan dos números reales de diferente signo $a > 0$ y $b < 0$, entonces sus valores absolutos son:

$$|a| = a \qquad |b| = -b$$

Además su producto es negativo $a \cdot b < 0$ *(el producto de dos números de distinto signo es negativo)* , asi que su valor absoluto es por definición:

$$|a \cdot b| = -(ab) = a \cdot (-b)$$

substituyendo $|a| = a$ y $|b| = -b$ resulta $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

CASO III : Sean ahora dos números reales negativos $a < 0$ y $b < 0$, entonces sus valores absolutos son por definición:

$$|a| = -a \qquad |b| = -b$$

Su producto es positivo $a \cdot b > 0$ *(el producto de dos números de igual signo es positivo)* , asi que su valor absoluto es :

$$|a \cdot b| = ab = (-a) \cdot (-b)$$

substituyendo $|a| = -a$ y $|b| = -b$ resulta nuevamente $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD VI.

CASO I . Si $(a+b)$ *es* un número negativo $(a+b) < 0$ entonces, de la definición de valor absoluto :

$$(*) \qquad |a+b| = -(a+b) = -a-b$$

Además, por la propiedad I , se tiene que :

$$-a \leq |a| \quad ; \quad -b \leq |b|$$

Si se suman éstas dos desigualdades miembro a miembro, se obtiene:

$$-a-b \leq |a| + |b|$$

Pero $-a-b = |a+b|$ de acuerdo a (*) asi que substituyendo se obtiene. . .

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

CASO II . Si $(a+b)$ es un número positivo, $(a+b) > 0$, por la definición de valor absoluto :

$$(*) \qquad |a+b| = (a+b)$$

Además, por la propiedad I , se tiene que :

$$a \leq |a| \quad ; \quad b \leq |b|$$

Si se suman éstas dos desigualdades miembro a miembro, se obtiene:

$$a + b \le |a| + |b|$$

Pero $a + b = |a + b|$ de acuerdo a (*) asi que substituyendo se obtiene. . .

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

y se ha demostrado asi la *"desigualdad del triángulo"* :

> *"el valor absoluto de la suma de dos números reales, es menor que la suma de sus valores absolutos "*

Para probar la 2ª parte de ésta propiedad, basta substituir al número a por una diferencia cualquiera de dos números reales: $(x - y)$ y al número b por un número y en la desigualdad anterior :

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

quedando :

$$|(x - y) + y| \le |x - y| + |y|$$

$$|x| \le |x - y| + |y|$$

$$|x| - |y| \le |x - y| \qquad \textit{(Sumando } -|y| \textit{ en ambos miembros)}$$

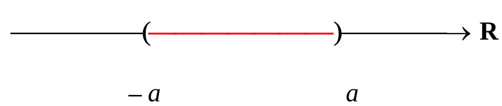
Para resolver desigualdades que involucren valores absolutos, se usará el siguiente importante teorema. . .

<u>TEOREMA</u> I. *Si* a *es un número positivo* $(a > 0)$ *entonces para todo número real* z *se cumple que :*

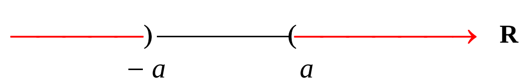
$$|z| < a \quad \textit{si y sólo si} \quad -a < z < a$$

$$|z| > a \quad \textit{si y sólo si} \quad z > -a \quad \textit{ó} \quad z > a \qquad (1.9)$$

En otras palabras, si $|z| < a$ entonces z es un número real que necesariamente está dentro del intervalo abierto $(-a, a)$



y si $|z| > a$, entonces z es un número real que necesariamente está comprendido en alguno de los intervalos abiertos $(-\infty, -a)$ o (a, ∞)



<u>*DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA*</u> I .

CASO I : $|z| < a$:

Si $z > 0$ su valor absoluto es $|z| = z$ y por lo tanto la desigualdad $|z| < a$ equivale a $z < a$

Si $z < 0$ su valor absoluto es $|z| = -z$ y por lo tanto $|z| < a$ equivale a $-z < a$ ó $z > -a$

Reuniendo éstos dos resultados queda demostrado que : $-a < z < a$.

CASO II : $|z| > a$:

Si $z > 0$ su valor absoluto es $|z| = z$ y por lo tanto la desigualdad $|z| > a$ equivale a $z > a$.

Si $z < 0$ su valor absoluto es $|z| = -z$ y la desigualdad $|z| > a$ equivale a $-z > a$ ó $z < -a$

Reuniendo éstos dos resultados queda demostrado que : $z < -a$ ó $a < z$

Es obvio que éste teorema vale también para las formas: $|z| \leq a$ ó $|z| \geq a$

Algunas desigualdades cuadráticas que no se pueden factorizar rápidamente se resuelven fácilmente *completando su trinomio cuadrado perfecto*, basándose en el siguiente corolario derivado del teorema I :

<u>*TEOREMA*</u> *II* *Si* z *es un número real y* $a > 0$ *entonces:*

$$z^2 < a \quad \textit{si y solo si} \quad -\sqrt{a} < z < \sqrt{a}$$
$$z^2 > a \quad \textit{si y solo si} \quad z < -\sqrt{a} \;\; ó \;\; \sqrt{a} < z$$

<u>*DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA*</u> II .

CASO I : $z^2 < a$:

Tomando la raiz cuadrada a ambos lados de ésta desigualdad y aplicando la definición alternativa del valor absoluto se obtiene :

$$\sqrt{z^2} < \sqrt{a} \quad \text{es decir :} \quad |z| < \sqrt{a}$$

desigualdad que tiene la solución dada por el teorema I : $-\sqrt{a} < z < \sqrt{a}$

CASO II : $z^2 > a$:

Tomando la raiz cuadrada a ambos lados de ésta desigualdad y aplicando la definición alternativa del valor absoluto se obtiene :

$$\sqrt{z^2} > \sqrt{a} \quad \text{es decir :} \quad |z| > \sqrt{a}$$

y por el teorema I , la solución es : $z < -\sqrt{a}$ ó $\sqrt{a} > z$

Ejemplo 10. Hallar la solución de $\left(4\cdot x^2 + 3\cdot x - 1\right) < 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto

Solución : Del álgebra elemental se tiene el siguiente ***procedimiento para completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP)*** de todo trinomio $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$:

1°. *Factorizar* el coeficiente de x^2 : $a\cdot\left(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x\right) + c$

2° *Sumar y restar el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x y escribirlo inmediatamente después del término que contiene a x:

$$a\cdot\left[x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right] + c$$

3° Los tres primeros términos del paréntesis recto forman un trinomio cuadrado perfecto porque *provienen del cuadrado de un binomio:*

$$a\cdot\left[\left(x + \frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right] + c$$

4° Desarrollando el producto, finalmente se obtiene:

$$a\cdot\left(x + \frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \frac{b^2}{4\cdot a} + c$$

Aplicando éste procedimiento al problema resulta :

$$4\cdot\left(x^2 + \frac{3}{4}\cdot x - \frac{1}{4}\right) < 0 \text{ (\textit{factorizando el coeficiente de} } x^2 \text{)}$$

Sumando y restando ahora el cuadrado de la mitad del coeficiente de x queda:

$$4\cdot\left[x^2 + \frac{3}{4}\cdot x + \left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{2}\right]^2 - \left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}\right] < 0$$

Multiplicando la desigualdad por el inverso de 4 y simplificando resulta:

$$\left(x^2 + \frac{3}{4}\cdot x + \frac{9}{64}\right) - \left(\frac{9}{64} + \frac{1}{4}\right) < 0$$

Los tres primeros términos en el lado izquierdo son ahora los de un trinomio cuadrado perfecto es decir, provienen del resultado de elevar al cuadrado un binomio:

$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{25}{64}\right) < 0$$

$$\left(x - \frac{3}{8}\right)^2 < \left(\frac{25}{64}\right) \qquad \textit{(Se ha sumado el inverso de } \frac{25}{64} \textit{)}$$

Tomado ahora la raiz cuadrada en ambos miembros: $\left|x - \frac{3}{8}\right| < \sqrt{\frac{25}{64}}$ y aplicando el teorema II resulta . . .

$$-\left(\frac{5}{8}\right) < \left(x + \frac{3}{8}\right) < \left(\frac{5}{8}\right)$$

Sumando el inverso de $\frac{3}{8}$ a cada desigualdad, se obtiene la solución . . .

$$\left(-\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\right) < x < \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\right)$$

$$\boxed{-1 < x < \frac{1}{4}}$$

Ejemplo 11. Resolver $3 \cdot x^2 - 6 \cdot x \le 8$ completando el trinomio cuadrado perfecto.

Solución : Apliquemos el procedimiento TCP :

1°. *Factorizando* el coeficiente de x^2 : $3 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot x\right) \le 8$

2° *Sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x *:*

$$3 \cdot \left[x^2 - 2 \cdot x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right] \le 8$$

3° Los tres primeros términos del paréntesis recto *provienen del cuadrado de un binomio:*

$$3 \cdot \left[(x - 1)^2 - 1\right] \le 8$$

Multiplicando por el inverso de 3 y sumando el inverso de -1 queda:

$$(x - 1)^2 \le 1 + \left(\frac{8}{3}\right)$$

Tomando la raiz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad y aplicando la definición alternativa del valor absoluto queda:

$$|x-1| \le \sqrt{\frac{11}{3}}$$

Aplicando ahora el teorema II se obtiene :

$$-\sqrt{\frac{11}{3}} \le (x-1) \le \sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$\boxed{\left(1-\sqrt{\frac{11}{3}}\right) \le x \le \left(\sqrt{\frac{11}{3}}+1\right)}$$ *(sumando el inverso de* -1 *)*

Este intervalo es la solución buscada .

Mediante la aplicación del Teorema I , es posible también resolver ***desigualdades con valores absolutos de fracciones racionales*** de la forma . . .

$$\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| < a \qquad \text{ó} \qquad \left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| > a$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

La aplicación directa del teorema I con $z = \frac{P(x)}{Q(x)}$ transforma éstas desigualdades en:

$$-a < \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) < a \qquad \text{ó} \qquad \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) < -a \quad ; \quad a < \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$$

que se resuelven aplicando el método para desigualdades con fracciones

Ejemplo 12. Resolver la desigualdad : $|x-2| \le |4\cdot x-1|$

Solución : La cantidad $4\cdot x-1$ es variable y de signo desconocido por ahora, sin embargo sabemos que el número $|4\cdot x+1|$ *es siempre positivo por ser un valor absoluto*.
El hecho de que conozcamos el signo de ésta cantidad, nos permite usarla para multiplicar la desigualdad *sin que cambie el sentido de la desigualdad* .

Entonces, dado que $\frac{1}{|4\cdot x+1|}$ es positivo, queda . . .

$$\left(\frac{1}{|4\cdot x+1|}\right)\cdot|x-2| \le |4\cdot x+1|\cdot\left(\frac{1}{|4\cdot x+1|}\right)$$

Usando ahora las propiedades del valor absoluto resulta . . . $\left|\dfrac{x-2}{4\cdot x+1}\right| \le 1$

Aplicando el teorema I con $z = \left(\dfrac{x-2}{4\cdot x+1}\right)$ y $a = 1$, se obtiene la solución :

$$-1 \le \left(\frac{x-2}{4\cdot x+1}\right) \le 1$$

Lo cual equivale a dos desigualdades con fracciones :

$$-1 \le \frac{x-2}{4\cdot x+1} \quad \text{y} \quad \frac{x-2}{4\cdot x+1} \le 1$$

Resolviéndolas por el método usual queda . . .

$$0 \le \left(1 + \frac{x-2}{4\cdot x+1}\right) \quad ; \quad \left(\frac{x-2}{4\cdot x+1} - 1\right) \le 0$$

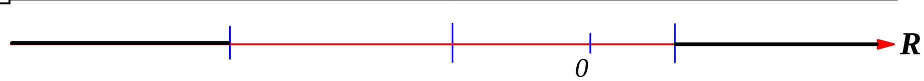
$$0 \le \frac{(5\cdot x-1)}{(4\cdot x+1)} \quad ; \quad -3\cdot\frac{(x+1)}{(4\cdot x+1)} \le 0$$

Las raices de ambas desigualdades son entonces : $x = -1$, $x = \dfrac{-1}{4}$ y $x = \dfrac{1}{5}$.

La recta numérica queda asi dividida en 4 intervalos.

Para encontrar la solución, *se debe verificar la desigualdad inicial en cada intervalo, escogiendo valores arbitrarios para* x *en cada uno de ellos y* *<u>substituyéndolos en la desigualdad inicial</u>* como se muestra en la siguiente ***tabla de prueba*** :

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < -(1/4)$	$-(1/4) < x < 1/5$	$1/5 < x < \infty$
Valor para x	$x = -2$	$x = -1/2$	$x = 0$	$x = 1$
$\lvert x - 2 \rvert$	$\lvert -2-2 \rvert = 4$	$\lvert -1/2-2 \rvert = 5/2$	$\lvert 0-2 \rvert = 2$	$\lvert 1-2 \rvert = 1$
$\lvert 4\cdot x + 1 \rvert$	$\lvert 4\cdot(-2)+1 \rvert = 7$	$\lvert 4\cdot(-1/2)+1 \rvert = 1$	$\lvert 4\cdot(0)+1 \rvert = 1$	$\lvert 4\cdot(1)+1 \rvert = 5$
$\lvert x-2 \rvert \le \lvert 4x+1 \rvert$?	$4 \le 7$ *Cierto*	$5/2 \le 1$ *Falso*	$2 \le 1$ *Falso*	$1 \le 5$ *Cierto*



Entonces la desigualdad se cumple solamente para los valores de x que estén dentro de alguno de los intervalos $-\infty < x \le -1$ y $\frac{1}{5} \le x < \infty$.

(*Nótese que se incluyen los extremos* $x = -1$ *y* $x = 1/5$ *porque ambos valores satisfacen también la desigualdad inicial*)

Otra forma de resolver desigualdades con valores absolutos que tengan la forma general :

$$|A| > |B| \qquad \text{ó} \qquad |A| < |B|$$

donde y son expresiones algebráicas, consiste en ***elevar al cuadrado ambos miembros para eliminar los valores absolutos*** , pues de la definición alternativa de valor absoluto : $|x| = \sqrt{x^2}$ se sigue que. . .

$$(|x|)^2 = \left(\sqrt{x^2}\right)^2 \qquad \text{esto es} \qquad (|x|)^2 = x^2$$

de manera que el cuadrado del valor absoluto de un número es igual al cuadrado de ese número.

Al final, se tendrá que resolver una desigualdad que contiene polinomios o fracciones.
La dificultad principal de éste método es que *se eleva el grado de los polinomios* involucrados en la desigualdad y por cada vez que se eleva al cuadrado, será más laborioso determinar sus raices.

Ejemplo 13 . Resolver la desigualdad : $\dfrac{|2 \cdot x - 1|}{|3 \cdot x - 2|} \le 1$

Solución : Multiplicando primero por $|3 \cdot x - 2|$ (*que es un número positivo*) para transformar la desigualdad a la forma general $|A| \le |B|$, queda:

$$\left(\frac{|2 \cdot x - 1|}{|3 \cdot x - 2|} \cdot |3 \cdot x - 2|\right) \le 1 \cdot (|3 \cdot x - 2|)$$

$$|2 \cdot x - 1| \le |3 \cdot x - 2|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros para cancelar el valor absoluto se obtiene:

$$(2 \cdot x - 1)^2 \le (3 \cdot x - 2)^2$$

$$\left(4 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1\right) - \left(9 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 4\right) \le 0 \qquad \textit{(desarrollando los binomios)}$$

$$-5 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 3 \le 0 \qquad \textit{(simplificando)}$$

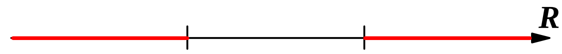
$$-(5\cdot x-3)\cdot(x-1)\le 0 \qquad \textit{(factorizando)}$$

$$(5\cdot x-3)\cdot(x-1)\ge 0 \qquad \textit{(multiplicando por } -1 \textit{)}$$

Las raices se obtienen de $-(5\cdot x-3)=0$ y $(x-1)=0$ y son : $x=\dfrac{3}{5}$, $x=1$.

Hacemos ahora la tabla de prueba de signos :

	$(-\infty, 3/5)$	$(3/5, 1)$	$(1, \infty)$
$(5x-3)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x-1)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$(5x-3)(x-1)\ge 0$	$(+)$	$(-)$	$(+)$



Asi que la solución consiste en los intervalos : $-\infty < x \le \dfrac{3}{5}$ y $1\le x<\infty$

Nótese que se incluyen los extremos 3/5 y 1 como parte de la solución.

La solución de ésta misma desigualdad por el método del teorema I

" *Si* $|z| < a$ *entonces* $-a < z < a$ "

Haciendo $z=\dfrac{|2\cdot x-1|}{|3\cdot x-2|}=\left|\dfrac{2\cdot x-1}{3\cdot x-2}\right|$ y $a=1$ es . . .

$$\textit{Si} \quad \left|\frac{2\cdot x-1}{3\cdot x-2}\right|\le 1 \quad \textit{entonces} \quad -1\le\frac{2\cdot x-1}{3\cdot x-2}\le 1$$

Separando ésta última expresión en dos desigualdades con fracciones resulta . . .

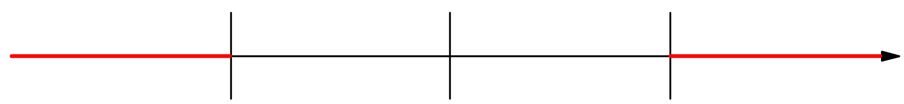
$$-1\le\frac{2\cdot x-1}{3\cdot x-2} \qquad ; \qquad \frac{2\cdot x-1}{3\cdot x-2}\le 1$$

$$0\le 1+\frac{2\cdot x-1}{3\cdot x-2} \qquad ; \qquad \frac{2\cdot x-1}{3\cdot x-2}-1\le 0$$

$$0\le\frac{(5\cdot x-3)}{(3\cdot x-2)} \qquad ; \qquad \frac{-(x-1)}{(3\cdot x-2)}\le 0$$

Las raices obtenidas de los factores: $(5\cdot x-3)=0$, $(3\cdot x-2)=0$ y $-(x-1)=0$ son $x=\frac{3}{5}$, $x=\frac{2}{3}$ y $x=1$ y la tabla de prueba de signos es . . .

	$(-\infty, 3/5)$	$(3/5, 2/3)$	$(2/3, 1)$	$(1, \infty)$
Valor de x	0	$\frac{19}{30}$	$\frac{5}{6}$	2
$\lvert 2x-1\rvert$	$\lvert 0-1\rvert=1$	$\left\lvert 2\cdot\frac{19}{30}-1\right\rvert=\frac{4}{15}$	$\left\lvert 2\cdot\frac{5}{6}-1\right\rvert=\frac{2}{3}$	$\lvert 2(2)-1\rvert=3$
$\lvert 3x-2\rvert$	$\lvert 0-2\rvert=2$	$\left\lvert 3\cdot\frac{19}{30}-2\right\rvert=\frac{1}{10}$	$\left\lvert 3\cdot\frac{5}{6}-2\right\rvert=\frac{1}{2}$	$\lvert 3(2)-1\rvert=4$
$\lvert 2x-1\rvert\le\lvert 3x-2\rvert$	$1\le 2$ *Cierto*	$\frac{4}{15}\le\frac{1}{10}$ *Falso*	$\frac{3}{2}\le\frac{1}{2}$ *Falso*	$3\le 4$ *Cierto*



Obteniéndose la misma solución : $x\le\frac{3}{5}$ y $1\le x$ como era de esperarse.

Desigualdades con valores absolutos de la forma general :

$$|P(x)|+|Q(x)|+|R(x)| \,..\, T(x)>a$$

ó

$$|P(x)|+|Q(x)|+|R(x)| \,..\, T(x)<a$$

donde $|P(x)|$, $|Q(x)|$, $|R(x)|$ . . . $T(x)$ son polinomios y a es una constante, se pueden resolver aplicando el principio de *establecer casos* y el siguiente procedimiento :

1° En cada término de la forma $|P(x)|$, usar la definición de valor absoluto:

$$|P(x)|=\begin{pmatrix} P(x) & si & P(x\ge 0) \\ -P(x) & si & P(x)<0 \end{pmatrix}$$

para determinar las condiciones en las que se cumple cada uno de esos valores absolutos

2° Combinar todas las condiciones determinadas en el paso anterior para establecer un conjunto final de intervalos de prueba .

3° Hacer una tabla de prueba en la desigualdad inicial para verificar en qué intervalos del conjunto final se satisface la desigualdad

Como se ilustra en los siguientes ejemplos sencillos que sólo implican polinomios de primer grado.

Ejemplo 14 . Resolver la desigualdad : $|3\cdot x-1| - |2\cdot x+5| > 3$

Solución : De la definición de valor absoluto: $|x| = \begin{pmatrix} x & si & x \ge 0 \\ -x & si & x < 0 \end{pmatrix}$

Se concluye que : $|3\cdot x-1| = \begin{bmatrix} (3\cdot x-1) & si & 3\cdot x-1 \ge 0 \\ -(3\cdot x-1) & si & 3\cdot x-1 < 0 \end{bmatrix}$

es decir. . . $|3\cdot x-1| = \begin{pmatrix} 3\cdot x-1 & si & x \ge \frac{1}{3} \\ -3\cdot x+1 & si & x < \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (*)

y también : $|2\cdot x+5| = \begin{bmatrix} (2\cdot x+5) & si & 2\cdot x+5 \ge 0 \\ -(2\cdot x+5) & si & 2\cdot x+5 < 0 \end{bmatrix}$

es decir. . . $|2\cdot x+5| = \begin{pmatrix} 2\cdot x+5 & si & x \ge \frac{-5}{2} \\ -2\cdot x-5 & si & x < \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$ (**)

Estas condiciones indican que debemos considerar tres intervalos :

$$x < \frac{-5}{2} \qquad \frac{-5}{2} \le x < \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} \le x$$

CASO I Si $x < \frac{-5}{2}$, entonces $|3\cdot x-1| = -(3\cdot x-1)$; $|2\cdot x+5| = -(2\cdot x+5)$ son negativos debido a las condiciones (*) y (**) , y la desigualdad inicial queda :

$$|3\cdot x-1| - |2\cdot x+5| > 3$$

$$(-3\cdot x+1) - (-2\cdot x-5) > 3$$

$$-x+6 > 3 \qquad \text{con solución} \qquad \boxed{x < 3}$$

CASO II Si $\frac{-5}{2} \le x < \frac{1}{3}$, por las condiciones (*) y (**) , los términos con valor absoluto tienen los signos : $|3\cdot x-1| = -(3\cdot x-1)$ y $|2\cdot x+5| = 2\cdot x+5$ y la desigualdad queda :

$$|3\cdot x - 1| - |2\cdot x + 5| > 3$$

$$-(3\cdot x - 1) - (2\cdot x + 5) > 3$$

$$-5\cdot x - 4 > 3$$ con solución: $x < \dfrac{-7}{5}$

CASO III Si $\dfrac{1}{3} \le x$, entonces $|3\cdot x - 1| = 3\cdot x - 1$; $|2\cdot x + 5| = 2\cdot x + 5$ y la desigualdad inicial queda :

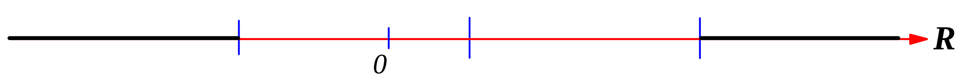
$$|3\cdot x - 1| - |2\cdot x + 5| > 3$$

$$(3\cdot x - 1) - (2\cdot x + 5) > 3$$

$$x - 6 > 3$$ cuya solución es : $x > 9$

Para determinar finalmente en cuales de éstos intervalos se satisface la desigualdad inicial, debemos hacer una ***tabla de prueba***, asignando valores a x en cada uno de los intervalos y verificando si la desigualdad se satisface.

	$(-\infty, -7/5)$	$(-7/5, 3)$	$(3, 9)$	$(9, \infty)$
Valor para x	$x = -2$	$x = 0$	$x = 4$	$x = 10$
$\lvert 3x - 1 \rvert$	$\lvert 3(-2) - 1 \rvert = 7$	$\lvert 3(0) - 1 \rvert = 1$	$\lvert 3(4) - 1 \rvert = 11$	$\lvert 3(10) - 1 \rvert = 29$
$\lvert 2x + 5 \rvert$	$\lvert 2(-2) + 5 \rvert = 1$	$\lvert 2(0) + 5 \rvert = 5$	$\lvert 2(4) + 5 \rvert = 13$	$\lvert 2(10) + 5 \rvert = 25$
$\lvert 3x - 1 \rvert - \lvert 2x + 5 \rvert > 3$?	$7 - 1 > 3$ *Cierto*	$1 - 5 > 3$ *Falso*	$11 - 13 > 3$ *Falso*	$29 - 25 > 3$ *Cierto*



Por lo tanto, la desigualdad se cumple solo si x está en alguno de los intervalos : $x < \dfrac{-7}{5}$ o $9 < x$

Ejemplo 15 . ***No toda desigualdad que involucra valores absolutos tiene una solución*** .

Resolver la desigualdad $|x-1| - |x-3| \geq 5$

*S*De la definición de valor absoluto se concluye que :

$$|x-1| = \begin{bmatrix} x-1 & si \quad x-1 \geq 0 \quad es \quad decir \quad si \quad x \geq 1 \\ -(x-1) & si \quad x-1 < 0 \quad es \quad decir \quad si \quad x < 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$|x-3| = \begin{bmatrix} (x-3) & si \quad x-3 \geq 0 \quad es \quad decir \quad si \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & si \quad x-3 < 0 \quad es \quad decir \quad si \quad x < 3 \end{bmatrix} \quad (**)$$

Estas condiciones implican que se deben considerar tres intervalos:

$$x < 1 \quad , \quad 1 \leq x < 3 \quad , \quad 3 \leq x$$

CASO I Cuando x toma un valor numérico dentro del intervalo: $x < 1$, entonces, las condiciones (*) y (**) implican que : $|x-1| = -(x-1)$ y $|x-3| = -(x-3)$ y la desigualdad inicial $|x-1| - |x-3| \geq 5$ queda . . .

$$-(x-1) - [-(x-3)] \geq 5$$

$$-2 \geq 5$$

que es una contradicción. Esto significa que x no puede tomar valores en el intervalo $(-\infty , 1)$

CASO II Si consideramos los valores reales en el intervalo $1 \leq x < 3$, entonces las condiciones (*) y (**) hacen que . . . $|x-1| = x-1$ y $|x-3| = -(x-3)$ y la desigualdad inicial $|x-1| - |x-3| \geq 5$ queda . . .

$$(x-1) - [-(x-3)] \geq 5$$

$$2 \cdot x - 4 \geq 5 \quad \text{es decir} \quad \boxed{x \geq \frac{9}{2}}$$

CASO III Cuando se consideran los valores de x en el intervalo $3 \leq x$, entonces $|x-1| = x-1$ y $|x-3| = x-3$ y queda . . .

$$(x-1) - (x-3) \geq 5$$

$$2 \geq 5$$

otra contradicción, lo cual significa que x no está en el intervalo $[3 , \infty)$ y por lo tanto tampoco es verdad el caso II puesto que $x \geq \frac{9}{2}$ queda comprendido en el intervalo $[3 , \infty)$

En resumen, no existe ningún numero real que pueda satisfacer a ésta desigualdad.

Ejemplo 16 . Resolver la desigualdad : $\left|x^2+3\cdot x-2\right| - \left|2\cdot x+3\right| \ge 3$

Solución :

Aplicando la definición de valor absoluto se tiene que :

$$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = \begin{bmatrix} x^2+3\cdot x-2 & \textit{cuando} & x^2+3\cdot x-2 \ge 0 \\ . & . & . \\ -\left(x^2+3\cdot x-2\right) & \textit{cuando} & x^2+3\cdot x-2 < 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo las desigualdades cuadráticas. . .

$$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = \begin{bmatrix} x^2+3\cdot x-2 & \textit{si} & x \le \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} & o & \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \le x \\ . & . & . & . & . \\ -\left(x^2+3\cdot x-2\right) & \textit{si} & \left(\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2} < x < \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}\right) & . & . \end{bmatrix} \quad (*)$$

De manera similar . . .

$$\left|2\cdot x+3\right| = \begin{bmatrix} (2\cdot x+3) & \textit{cuando} & 2\cdot x+3 \ge 0 & \textit{es decir si} & \dfrac{-3}{2} \le x \\ -(2\cdot x+3) & \textit{cuando} & 2\cdot x+3 < 0 & \textit{es decir si} & x < \dfrac{-3}{2} \end{bmatrix} \quad (**)$$

Las condiciones (*) y (**) indican que debemos considerar los intervalos particulares:

$$x \le \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \;;\quad \frac{-3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-3}{2} \;;\quad \frac{-3}{2} \le x < \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \;;\quad \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \le x$$

CASO I Si $x \le \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$, entonces $\left|x^2+3\cdot x-2\right| = x^2+3\cdot x-2$; $\left|2\cdot x+3\right| = -(2\cdot x+3)$

y la desigualdad $\left|x^2+3\cdot x-2\right| - \left|2\cdot x+3\right| \ge 3$ se escribe en éste caso como :

$$\left(x^2+3\cdot x-2\right) - (-2\cdot x-3) \ge 3$$

$$x^2+5\cdot x+1 \ge 3$$

cuya solución es: $x \le \dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}$ ó $\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2} \le x$

CASO II Si $\frac{-3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-3}{2}$, de las condiciones (*) y (**) se tiene que :

$$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = -\left(x^2+3\cdot x-2\right) \quad ; \quad \left|2\cdot x+3\right| = -(2\cdot x+3)$$

y la desigualdad queda:

$$-x^2-3\cdot x+2+(2\cdot x+3) \geq 3$$

$$-x^2-x+5 \geq 3$$

cuya solución es : $\boxed{-2 \leq x \leq 1}$

CASO III Si $\frac{-3}{2} \leq x < \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, de las condiciones (*) y (**) se tiene que :

$$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = -\left(x^2+3\cdot x-2\right) \quad ; \quad \left|2\cdot x+3\right| = 2\cdot x+3$$

y la desigualdad queda :

$$-x^2-3\cdot x+2-(2\cdot x+3) \geq 3$$

$$-x^2-5\cdot x-1 \geq 3$$

cuya solución es : $\boxed{-4 \leq x \leq -1}$

CASO IV Si $\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \leq x$, entonces . . .

$$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = x^2+3\cdot x-2 \quad \text{y} \quad \left|2\cdot x+3\right| = 2\cdot x+3$$

de modo que en éste caso, la desigualdad inicial queda :

$$x^2+3\cdot x-2-(2\cdot x+3) \geq 3$$

$$x^2+x-5 \geq 3$$

cuya solución es : $\boxed{x \leq \frac{-1-\sqrt{33}}{2}}$ ó $\boxed{\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \leq x}$

Denotando ahora las raices

$$r_1 = \frac{-5-\sqrt{33}}{2} = -5.372 \, , \qquad r_3 = \frac{-5+\sqrt{33}}{2} = 0.372$$

$$r_2 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2} = -3.372 \qquad r_4 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} = 2.372$$

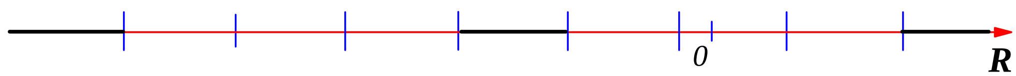
y dado que :

$$r_1 < (-4) < r_3 < (-2) < (-1) < r_2 < (1) < r_4$$

la recta numérica queda dividida en los 9 intervalos de prueba siguientes . . .
$(-\infty, r_4)$, $(r_1, -4)$, $(-4, r_3)$, $(r_3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, r_2)$, $(r_2, 1)$, $(1, r_4)$ y (r_4, ∞)

Para determinar finalmente en cuales de éstos intervalos se satisface la desigualdad inicial, debemos hacer una ***tabla de prueba***, considerando valores para x escogidos arbitrariamente en cada uno de esos intervalos y *verificando si la desigualdad inicial* se cumple . . .

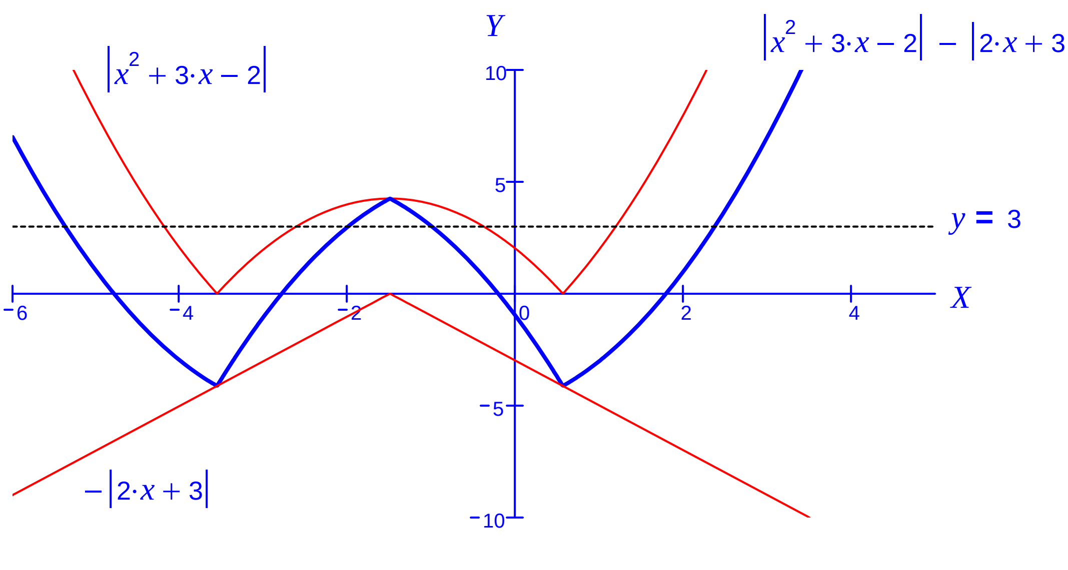
	$(-\infty, r_1)$	$(r_1, -4)$	$(-4, r_2)$	$(r_2, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, r_3)$	$(r_3, 1)$	$(1, r\ )$	(r_4, ∞)
valor escogido para x	$x = -6$	$x = -5$	$x = \frac{-7}{2}$	$x = -3$	$x = \frac{-3}{2}$	$x = 0$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$	$x = 3$
$\lvert x^2 + 3x - 2 \rvert$	16	8	1 / 4	2	17 / 4	2	1 / 4	8	16
$\lvert 2x + 3 \rvert$	9	7	4	3	0	3	4	7	9
¿ se cumple ? $\lvert x^2 + 3x - 2\rvert - \lvert 2x + 3\rvert \geq 3$	$16-9 \geq 3$ *Cierto*	$8-7 \geq 3$ *Falso*	$1/4-4 \geq 3$ *Falso*	$2-3 \geq 3$ *Falso*	$4.25 \geq 3$ *Cierto*	$2-3 \geq 3$ *Falso*	$1/4-4 \geq 3$ *Falso*	$8-7 \geq 3$ *Falso*	$16-9 \geq 3$ *Cierto*



Vemos asi que la desigualdad se cumple solo si x toma un valor en alguno de los intervalos :

$$x \leq \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} \quad ; \quad -2 \leq x \leq -1 \quad ; \quad \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \leq x$$

como se ilustra en la siguiente gráfica . . .



EJERCICIOS 1.1

1. Si m y n representan dos números enteros, entonces $2 \cdot m$ y $2 \cdot n$ son *enteros pares* (*es decir, que son divisibles entre* 2) , mientras que $(2 \cdot m + 1)$ y $(2 \cdot n + 1)$ son *enteros impares* (*que no son divisibles por* 2 , *es decir que si se dividen por* 2 *el residuo no es cero*) .
Mostrar que :
- *La suma de dos números enteros pares es par*
- *La suma de dos números enteros impares es par*
- *El producto de un número entero par con cualquier otro entero es par.*

2. Si $x = -x$ para un número real x demostrar entonces que $x = 0$. (*Sugerencia: usar las propiedades de los números reales).*

3. Si un trabajador puede realizar su labor en 7 días y otro trabajador puede hacer la misma faena en 5 días, entonces ¿ qué fracción de la labor realizarán si trabajan juntos por 2 días ?

4. Si un metro de alambre de Cobre pesa 35 *g* ¿qué longitud tiene un rollo de 1540 *kg* ? *(1 kg = 1000 g)*

5. Encontrar la forma decimal de los siguientes números racionales.

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{41}{333}$ d) $\frac{6}{11}$ e) $\frac{85}{750}$

6. Convertir los siguientes números decimales periódicos en números racionales

a) $0.454545454...$ b) $0.151515151....$ c) $0.1428571428....$
d) $12.234343434....$ e) $1.327272727.....$ f) $3.49686868686....$

Ejemplo :
Sea el número $x = 1.851851851...$. Notemos que el patrón de repetición tiene *tres* cifras: 851 , asi que multipliquemos ambos lados de ésta igualdad por la potencia de 10^n donde n es el número de cifras del patrón de repetición, es decir $10^3 = 1000$

$$1000 \cdot x = 1851.851851....$$

restemos x :

$$-x = -1.851851851...$$

resulta . . .

$$999 \cdot x = 1850$$

resolviendo para x queda $x = \frac{1850}{999}$. Simplificando ésta fracción se obtiene : $x = \frac{50}{27}$

7. El número $\left(\frac{5}{n^2}\right)$ no está definido para $n = 0$ pues implica una división por cero. Completar la siguiente tabla para ver como éste número aumenta sin límite (*se dice que tiende a infinito y se denota por:* ∞) cuando n se aproxima a cero:

n	10	1	0.5	0.01	0.000 01	0.000 005	0.000 000 1
$\frac{5}{n^2}$	0.05	5	20				

8. Cuando $h = 0$, la expresión : $\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$ no está definida . Completar la siguiente tabla para determinar a que valor se aproxima éste número cuando h se aproxima a cero:

h	12	1	0.5	0.01	0.000 1	0.000 01
$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$	0.16667	0.23607				

9. *Sumar* las dos desigualdades dadas para combinarlas en una sola :
   a) $-3 < 4$, $5 > 3$ b) $-1 > -2$, $-1 < 2$ c) $-2 < x$, $6 < y$

10. *Multiplicar* cada desigualdad por la constante de la derecha :
   a) $-6 < 3$, 2 b) $-6 > -10$, -3 c) $x > -5$, -6

11. *Traducir* las siguientes expresiones en español al lenguaje algebraico de las desigualdades
   a) x es negativa
   b) y es menor que 5 **ó** mayor o igual que 12
   c) la edad x de Juan es por lo menos 30 años
   d) la ganancia G será de no menos de 45 por ciento
   e) la razón de inflación ζ será al menos del 1% y a lo más del 5% mensual
   f) el aumento esperado no está entre -4 y 2

12. *Calcular la distancia* entre el par de de números dado .
   a) -1 , 3 b) -4 , $\frac{-3}{2}$ c) $\frac{-5}{2}$, $\frac{13}{4}$ d) $\frac{16}{5}$, $\frac{112}{75}$

13. Usar la notación del valor absoluto para *representar* las siguientes expresiones:
   a) La separación entre x y 5 no es más de 3
   b) La distancia entre z y -10 es por lo menos de 6
   c) ψ está más cerca de 0 que de 8
   d) λ queda a lo más a dos unidades del número a

Hallar la solución de las siguientes desigualdades: (*Comprobar la solución*)

Desigualdades lineales :

14. $5 - x > 7$

15. $4 \cdot x + 1 < 2 \cdot x$

16. $3 \cdot x + 1 > 2 \cdot x + 7$

17. $-4 \le \dfrac{3 - 2 \cdot x}{3} < 4$

18. $\left(-\dfrac{2}{3} \cdot x - \dfrac{5}{3}\right) \le \left(\dfrac{3}{2} \cdot x + \dfrac{1}{4}\right)$

19. $\dfrac{3}{4} \cdot x - \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{5} \cdot x + \dfrac{1}{4}$

Resolver completando el trinomio cuadrado perfecto .

20. $(x - 3)^2 \ge 1$

21. $x^2 + 2 \cdot x - 3 > 0$

22. $6 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 18 \le 0$

23. $12 \cdot x^2 + 34 \cdot x + 10 \ge 0$

24. $20 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18 > 0$

25. $12 \cdot x^2 - 19 \cdot x + 4 < 0$

Desigualdades con polinomios .

26. $5 \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - 3) > 0$

27. $3 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) > 0$

28. $-5 \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot (x + 4) \cdot x < 0$

29. $-3 \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 - 3 \cdot x \ge \dfrac{1}{3} \cdot x^3 - \dfrac{1}{3} \cdot x^2 + x$

30. $\left(12 \cdot x^2 + 34 \cdot x + 10\right) \cdot \left(20 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18\right) \ge 0$

31. $12 \cdot x^2 - 19 \cdot x + 4 < 0$

32. $x^4 - 5 \cdot x^2 + 6 \ge 0$

33. $-3 \cdot (x - 1)^4 \le 0$

34. $\left(6 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 18\right) \cdot \left(12 \cdot x^2 - 19 \cdot x + 4\right) \ge 0.$

35. $\dfrac{3 \cdot x - 5}{x - 5} > 4$

36. $\dfrac{4}{x + 2} > \dfrac{1}{x - 1}$

37. $\dfrac{4}{x + 5} > \dfrac{1}{2 \cdot x + 3}$

38. $\dfrac{-4}{x - 1} \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{15}{2 \cdot (2 \cdot x - 3)}$

39. $\dfrac{-60}{3 \cdot x - 4} \le 11 + \dfrac{15}{(2 \cdot x + 1)}$

40. $\left(\dfrac{4 \cdot x^2 - 9}{9 \cdot x^2 - 1}\right) > 0$

41. $\dfrac{6}{x + 3} > 2 - \dfrac{1}{x - 2}$

42. $\dfrac{3}{x + 4} < -1 - \dfrac{x + 1}{x - 5}$

43. $\left(\dfrac{8}{29} \cdot \dfrac{x}{5 \cdot x - 6}\right) < \left(\dfrac{\dfrac{17}{29} \cdot x + 1}{7 \cdot x + 9}\right)$

Desigualdades con valores absolutos .

44. $\left|\dfrac{x}{2}\right| \le 3$

45. $|2\cdot x+5| \le 1$

46. $\left|\dfrac{x-3}{2}\right| \ge 5$

47. $|1-x| \le |x+2|$

48. $|2\cdot x+3| > \dfrac{2}{3}\cdot|3\cdot x+4|$

49. $\left|3\cdot x+\dfrac{1}{2}\right| < \left|2\cdot x-\dfrac{1}{3}\right|$

50. $\left|3\cdot x-\dfrac{4}{3}\right| \ge \left|5\cdot x-\dfrac{1}{3}\right|$

51. $\left|3\cdot x-\dfrac{1}{2}\right| \ge \left|\dfrac{2}{3}\cdot x+1\right|$

52. $|x+6| > |2\cdot x-5|$

53. $|x-2| + |x-1| > 4$

54. $|x+6| - |2\cdot x-5| < 2$

55. $|(3\cdot x+6)\cdot(x-2)| - |2\cdot x-5| < 2$

Hallar los números que están . . .

56. *al menos a* 3 *unidades del* -1

57. *cuando mucho a* 2 *unidades del* -3

58. *más cerca de* -2 *que de* 4

59. *más cerca de* $\dfrac{2}{3}$ *que de* -3 .

60 *más lejos de* 2 *que de* -3

61. *más lejos de* $\dfrac{-1}{4}$ *que de* $\dfrac{3}{5}$.

Respuestas . Ejercicio 1.1

1. i) *La suma de dos números enteros pares es par*.

Sean n y m enteros, entonces $2 \cdot n$ y $2 \cdot m$ son números pares porque se pueden dividir entre 2 exactamente y además:

$$2 \cdot n + 2 \cdot m = 2 \cdot (m + n)$$

Por la propiedad de cerradura, $(m + n)$ es otro entero y por lo tanto, $2 \cdot (m + n)$ es un entero par porque tiene a 2 como factor ..

ii) *La suma de dos números enteros impares es par*

Sean n y m números enteros, entonces $2 \cdot n + 1$ y $2 \cdot m + 1$ son números impares porque no se pueden dividir exactamente entre 2 . Por otra parte, su suma es . . .

$$\begin{aligned} (2 \cdot n + 1) + (2 \cdot m + 1) &= 2 \cdot (n + m) + 2 \\ &= 2 \cdot (m + n + 1) \end{aligned}$$

Pero $(m + n + 1)$ es otro número entero y $2 \cdot (m + n + 1)$ es par porque tiene un 2 como factor .

iii) *El producto de un número entero par con cualquier otro entero es par*

Sean n y x dos números enteros, entonces $2 \cdot n$ es un número par y su producto es ...

$$(2 \cdot n) \cdot x = 2 \cdot (n \cdot x) \qquad (\textit{ factorizando })$$

Pero por la propiedad de cerradura en los enteros, $n \cdot x$ es otro número entero y $2 \cdot (n \cdot x)$ es par porque tiene un 2 como factor.

2. Supóngase que $x = -x$ para un número real cualquiera x entonces :

$$\begin{aligned} & x + (-x) = 0 && (\textit{ por la propiedad de inverso aditivo }) \\ & x + (x) = 0 && (\textit{ por la hipótesis } x = -x \text{ }) \\ & 2 \cdot x = 0 && \\ & x = 0 && (\textit{ Si el producto de dos números es cero, uno de los dos es cero }) \end{aligned}$$

3. En un día de labor, uno de los trabajadores hace $\frac{1}{7}$ de la faena puesto que termina su trabajo en 7 dias (*Suponiendo que trabaja al mismo ritmo todos los días*) . Similarmente el otro trabajador hace $\frac{1}{5}$ del trabajo en un día. Por lo tanto en dos dias habrán hecho juntos la cantidad de trabajo:

$$(2 \cdot dias) \cdot \left(\frac{1}{7} \cdot \frac{trabajo}{dias} + \frac{1}{5} \cdot \frac{trabajo}{dias} \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5} \right) \cdot trabajo$$

$$= \left(\frac{24}{35} \right) \cdot trabajo = 68.57\% \cdot trabajo$$

4. Del problema se deduce que la *densidad lineal (es decir, la masa por unidad de longitud)* de éste alambre es:

$\delta = \dfrac{0.035 \cdot kg}{1 \cdot metro}$. Por lo tanto, si se pide que la longitud buscada x debe pesar $1540 \cdot kg$, se tiene

$x \cdot \delta = 1540 \cdot kg$ de donde se deduce que : $x = \dfrac{1540 \cdot kg}{\left(\dfrac{0.035 \cdot kg}{1 \cdot metro}\right)} = 44000 \cdot metros = 44 \cdot km$

5. a) $\dfrac{5}{8} = 0.625$ *finito*

b) $\dfrac{8}{3} = 2.666\,666\,6 \ldots$ *infinito. Patrón de repetición : 6*

c) $\dfrac{41}{333} = 0.123\,123\,123$ *infinito. Patrón de repetición : 123*

d) $\dfrac{6}{11} = 0.545\,454\,545\ldots$ *infinito. Patrón de repetición: 54*

e) $\dfrac{85}{750} = 0.113\,333\,333 \ldots$ *infinito. Patrón de repetición: 3*

6. a) $\dfrac{5}{11}$ b) $\dfrac{5}{33}$ c) $\dfrac{1}{7}$ d) $\dfrac{6056}{495}$ e) $\dfrac{73}{55}$ f) $\dfrac{34619}{9900}$

7.

n	10	1	0.5	0.01	0.000 01	0.000 005	0.000 000 1
$\dfrac{5}{n^2}$	0.05	5	20	50 000	5×10^{10}	2×10^{11}	5×10^{14}

8.

h	12	1	0.5	0.01	0.000 1	0.000 01
$\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$	0.16667	0.23607	0.242 641	0.249 844	0.249 998 4	0.249 999 8

tiende a 0.25 , es decir a $\dfrac{1}{4}$

9. Dos desigualdades se pueden sumar miembro a miembro solo si tienen el mismo sentido.

a) $(-3<4) + (3<5) \longrightarrow (-3+3)<(4+5) \longrightarrow 0 < 9$

b) $(-1>-2) + (2>-1) \longrightarrow (-1+2)<(-2-1) \longrightarrow 1 > -3$

c) $(-2<x) + (y<6) \longrightarrow (-2+y)<(x+6)$

10. Una desigualdad *invierte* su sentido si se multiplica por un número negativo

a) $-6 < 3 \longrightarrow -(6)(2) < 3(2) \longrightarrow -12 < 6$

b) $-6 > -10 \longrightarrow -(6)(-3) < (-10)(-3) \longrightarrow 18 < 30$

c) $x > -5 \longrightarrow -(6)(x) < (-6)(-5) \longrightarrow -6x < 30$

11. Las traducciones son . . .

a) $x < 0$

b) $y < 5$, $12 < y$

c) $x \geq 30$

d) $0.45 \leq G$

e) $0.01 \leq \zeta \leq 0.05$

f) $x < -4$; $2 < x$

12. a) $|-1-3| = 4$ b) $\left|-4-\left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{5}{2}$

c) $\left|-\frac{5}{2}-\frac{13}{4}\right| = \frac{23}{4}$ d) $\left|\frac{16}{5}-\frac{112}{75}\right| = \frac{128}{75}$

13. a) $|x-5| \leq 3$ b) $|z+10| \geq 6$

c) $|\psi| < |\psi-8|$ d) $|\lambda-a| \leq 2$

14. $x < -2$

15. $x < \frac{-1}{2}$

16. $6 < x$

17. $\frac{-9}{2} < x \leq \frac{15}{2}$

18. $\frac{-23}{26} \leq x$

19. $x < \frac{5}{3}$

20. $x \leq 2$ o $4 \leq x$

21. $x < -3$ ó $1 < x$

22. $-2 \leq x \leq \frac{3}{2}$

23. $x \leq \frac{-5}{2}$ o $\frac{-1}{3} \leq x$

24. $x < \frac{-3}{2}$ ó $\frac{3}{5} < x$

25. $\frac{1}{4} < x < \frac{4}{3}$

26. $3 < x$

27. $-2 < x < -1$; $3 < x$

28. $-4 < x < 0$; $\frac{1}{2} < x$

29. $x \leq 0$ o $\frac{2}{5} \leq x \leq 3$

30. $x \leq \frac{-5}{2}$, $\left(\frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{-1}{3}\right)$, $\frac{3}{5} \leq x$

31. $\frac{1}{4} < x < \frac{4}{3}$

32. $x \le -\sqrt{3}$, $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$, $\sqrt{3} \le x$

33. *Ningún número real*

34. $x \le -2$, $\frac{1}{4} \le x \le \frac{4}{3}$, $\frac{3}{2} \le x$.

35. $5 < x < 15$

36. $-2 < x < 1$, $2 < x$

37. $-5 < x < \frac{-3}{2}$, $-1 < x$

38. $x \le -1$, $1 < x < \frac{3}{2}$, $3 \le x$

39. $x \le -2$, $\frac{-1}{2} < x \le \frac{1}{3}$, $\frac{4}{3} < x$

40. $x < \frac{-3}{2}$, $\frac{-1}{3} < x < \frac{1}{3}$, $\frac{3}{2} < x$

41. $-3 < x < \frac{-1}{2}$, $2 < x < 3$

42. $\frac{-7 - 3\cdot\sqrt{33}}{4} < x < -4$, $\frac{-7 + 3\cdot\sqrt{33}}{4} < x < 5$

43. $x < -2$, $\frac{-9}{7} < x < \frac{6}{5}$, $3 < x$

44. $-6 \le x \le 6$

45. $-3 \le x \le -2$

46. $x \le -7$, $13 \le x$

47. $\frac{-1}{2} \le x$

48. $\frac{-17}{12} < x$

49. $\frac{-5}{6} < x < \frac{-1}{30}$

50. $\frac{-1}{2} \le x \le \frac{5}{24}$

51. $x \le \frac{-3}{22}$, $\frac{9}{14} \le x$

52. $\frac{-1}{3} < x < 11$

53. $x < \frac{-1}{2}$ ó $\frac{7}{2} < x$

54. $x < \frac{1}{3}$ ó $9 < x$

55. $\frac{-1 - \sqrt{58}}{3} < x < -1$; $\frac{5}{3} < x < \frac{-1 + \sqrt{58}}{3}$

56. $|x - (-1)| \ge 3$ y son $2 \le x$ ó $x \le -4$

57. $|x - (-3)| \le 2$ y son $-5 \le x \le -1$

58. $|x - (-2)| < |x - 4|$ y son $x < 1$

59. $\left|x - \frac{2}{3}\right| < |x + 3|$ y son $\frac{-7}{6} < x$

60 $|x - 2| > |x + 3|$ y son $x < \frac{-1}{2}$

61. $\left|x + \frac{1}{4}\right| > \left|x - \frac{3}{5}\right|$ y son $\frac{7}{40} < x$

Capítulo II
Funciones de una variable

2.1 ***Variables y constantes*** .

Se dice que una cantidad es ***variable*** , *si puede tomar distintos valores numéricos* durante el transcurso o desarrollo de un proceso matemático .
Por contraposición, una cantidad es una ***constante*** *si no cambia su valor numérico* durante un proceso.

Si una cantidad es constante *únicamente para un proceso particular*, entonces se llama ***constante relativa*** (*o parámetro*) ; pero si permanece constante en cualquier proceso, entonces es una ***constante absoluta*** (*o valor universal*) .

Se acostumbra usar las primeras letras del alfabeto (a , b , c , . . .) para denotar constantes y las últimas letras (. . ., v , w , x , y , z) para denotar las cantidades variables.

De manera general, se puede considerar que *una constante es un caso especial de una variable que tiene siempre todos sus valores iguales* .

Ejemplo 1. La fuerza F entre dos cargas eléctricas puntuales q_1 y q_2 separadas una distancia r se calcula con la expresión matemática :

$$F = K\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2}$$

En éste expresión :

- la fuerza eléctrica F y la separación r son magnitudes *variables* que dependen una de la otra.
- q_1 y q_2 representan valores particulares de dos cargas eléctricas y por lo tanto son *parámetros.*
- K representa una constante que es independiente de la fuerza F entre las cargas, de la distancia r que las separa y del valor de las cargas q_1 y q_2. Es una *constante absoluta* .

Algunos otros ejemplos de constantes absolutas son :

- $\pi = 3.14159265.....$

Representa la razón del perímetro al diámetro de una circunferencia . Tiene siempre el mismo valor para cualquier circunferencia independientemente del tamaño de ésta.

- $e = 2.71828183.....$

Es la base de los logaritmos naturales. Se relaciona con procesos de crecimiento y decrecimiento de cantidades variables como corrientes eléctricas , poblaciones , probabilidades etc.

- $R = 8.314510 \cdot \frac{joule}{mole \cdot °K}$

La constante universal de los gases ideales. Es independiente de la composición molecular del gas, su temperatura, la presión o el volumen

- $c = 2.99792458 \cdot 10^{8} \cdot \frac{m}{seg}$

La velocidad de la luz en el vacío. No depende de la frecuencia, de la intensidad de la luz y tampoco de la dirección en la que se propaga.

- $q = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot Coul$

La carga eléctrica fundamental . Los electrones o protones de diferentes materiales son iguales,tienen la misma carga eléctrica.

mientras que las siguientes son algunas constantes relativas o parámetros:

- $g = 9.80665 \cdot \frac{m}{seg^{2}}$

La aceleración debida a la gravedad terrestre. Se considera prácticamente constante; para describir el movimiento de objetos en caída libre cerca de la superficie terrestre

- $T_c = 100°C$

La temperatura de ebullición del agua al nivel del mar. No es una constante absoluta puesto que cualquier líquido hierve a una temperatura que depende de la presión atmosférica y la altura sobre el nivel del mar.

- $v = 333 \cdot \frac{m}{seg}$

La velocidad del sonido en el aire. Es una constante que varía con la temperatura del aire y la presión atmosférica.

A menudo, los valores que puede tomar una variable se limitan a un intervalo de números reales; sin embargo, esto no significa que deba tomar todos los valores del intervalo y podría tomar sólo algunos de ellos (*hablaremos en tal caso de una* ***variable discreta***) .
Una ***variable es continua*** cuando adquiere todos y cada uno de los valores de un intervalo de números reales sin excepción de alguno de ellos.

Por ejemplo, si T representa la temperatura del agua en condiciones normales, (*la cual puede cambiar desde la temperatura ambiente* T_0 *hasta unos* $100°$ *grados centígrados*) entonces T es una variable *continua* en el intervalo $[T_0, 100°]$.

En cambio si T representa el número de hijos de una sola madre humana, entonces esta variable sólo puede tomar los *valores discretos* 0 , 1 , 2 , 3 , . . . hasta un máximo M , en el intervalo $[0, M]$, donde M representa el máximo número de hijos.

Por otra parte, si todos los valores propios de una variable x están dentro de un intervalo que no es infinito, decimos que tal variable es ***acotada*** , esto es, si x está dentro del intervalo $(-M, M)$ es decir $-M < x < M$, donde M es una constante real positiva .
La variable T en los ejemplos anteriores es acotada .

Definición **:**

La variable x *se llama* *acotada* *si* $|x| < M$ (siendo M una constante positiva $M > 0$)

2.2 ***Función*** .

Usualmente *los valores que pueda tomar una variable están determinados por los valores que tomaron antes otras variables* , es decir dependen de ésas otras variables.

Hay muchos ejemplos :

- El perímetro P de una circunferencia depende de su radio r .
- La corriente eléctrica i que circula en un circuito depende del potencial eléctrico V y de la resistencia o impedancia Z de tal circuito.
- La velocidad v de propagación del sonido en un medio material como el aire, depende de la temperatura T del medio ambiente y de su densidad δ.
- El número N de foto-electrones desprendidos de un metal depende de la frecuencia f y de la intensidad I de la radiación incidente.
- La fuerza F con la cual se atraen entre si dos objetos con masa cambia con el valor de las masas y de la distancia que las separe
- etc

En el caso más simple, de solo dos variables x e y que se relacionan de modo que *los valores de* y *están determinados por los valores de* x, se dice que "y *es una función de* x ".

Por ejemplo, el volumen V de una esfera se calcula con la relación :

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

donde el valor de V depende exclusivamente del valor del radio r de la esfera (dado que π y $\frac{4}{3}$ son *constantes universales*). De manera que con distintos valores para la variable r , se obtienen también diferentes valores para el volumen V calculados a partir de la ecuación anterior.
Se dice entonces que V *es una función de* r

Notación :

Si una variable y es una función de la variable x, se denota por :

$$\boxed{y = f(x)} \qquad (2.1)$$

Que se lee : *" y es función de x "* o *" y es igual a f de x "* .

No se debe confundir ésta notación con una multiplicación de f por x. El ***símbolo*** $f(x)$ *es solamente una notación* que representa una función de x.

La letra entre paréntesis (x) se llama ***variable independiente*** y *es la variable a la que se pueden asignar a voluntad valores numéricos.*

La letra y del lado izquierdo de la expresión 2.1 se llama ***variable dependiente o función*** y *es la variable cuyos valores quedan determinados por los valores asignados antes a la variable independiente.*

La letra f (o letras) que antecede (n) a la variable independiente, es el ***nombre de la función*** y *representa el conjunto de operaciones matemáticas que se deben realizar con el valor de* x *para calcular el valor* y , es decir, representa la *regla o procedimiento* con que se obtendrá el valor y a partir del valor x .

Así por ejemplo si:

- $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

La dependencia entre las variables V y r se puede indicar por $V = f(r)$, donde el símbolo f representa la regla o procedimiento : " *elevar r al cubo, multiplicar el resultado por $4 \cdot \pi$ y dividir después entre 3* "

- $z = x^2 - \sqrt{x}$

La dependencia funcional entre éstas variables podría representarse por : $z = \phi(x)$, donde ϕ significa elevar x al cuadrado y restarle el valor de su raíz cuadrada .

- $x = sen \cdot (ln(w))$

La relación entre las variables x y w expresada en ésta ecuación, en notación funcional podría quedar indicada como : $x = F(w)$, donde F representa las operaciones combinadas de obtener el seno del logaritmo natural del número w .

- $y = 2^x - x^2$

La relación funcional entre las variables x e y se puede expresar como: $y = \rho(x)$, donde el símbolo ρ representa la regla : " *elevar el número* 2 *a la potencia* x *y restar al resultado el cuadrado de* x " .

Ejemplo 2. Si $f(x) = x^2 + 4 \cdot x + 7$ calcular lo valores funcionales: $f(3)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(s-1)$ y $f\left(u^2 - 3 \cdot u\right)$.

Solución : Los valores funcionales se obtienen substituyendo el valor de la variable independiente (el que está indicado entre paréntesis) en la definición de la función y realizando con ese valor, las operaciones simbolizadas por f .

Si $x = 3$ entonces $f(3) = (3)^2 + 4 \cdot (3) + 7 = 28$

Si $x = -2$ entonces $f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 7 = 3$

Si $x = \frac{3}{2}$ entonces $f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + 7 = \frac{61}{4}$

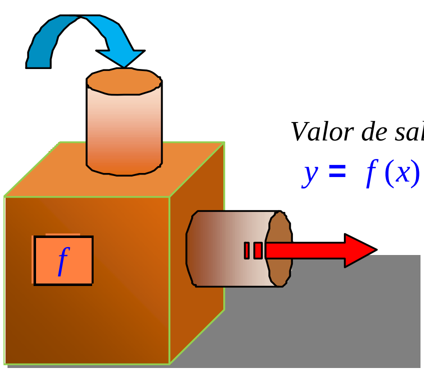
Si $x = s - 1$ entonces $f(s-1) = (s-1)^2 + 4 \cdot (s-1) + 7 = s^2 + 2 \cdot s + 4$

Si $x = u^2 - 3 \cdot u$ queda $f\left(u^2 - 3 \cdot u\right) = \left(u^2 - 3 \cdot u\right)^2 + 4 \cdot \left(u^2 - 3 \cdot u\right) + 7$

$$= u^4 - 6 \cdot u^3 + 13 \cdot u^2 - 12 \cdot u + 7$$

Se puede interpretar a una función como una *caja negra* , en la que "se vacía" un valor particular de entrada para x y a través del mecanismo interior $f(x)$ de la caja, se obtiene un valor y en la salida como resultado.
Como se ilustra en la figura de la derecha.

Valor de entrada x



Valor de salida
$y = f(x)$

El mecanismo $f(x)$ consiste en todas las operaciones matemáticas que se deben realizar con el valor x de entrada, el cual *puede ser un valor numérico particular o una expresión algebraica completa*, tal como se mostró en el ejemplo anterior .

La *condición fundamental* que distingue a una función de una ecuación algebráica cualquiera se dá en la siguiente definición :

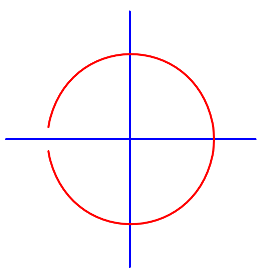
DEFINICIÓN DE FUNCIÓN .

" Una función es una relación entre dos variables, tal que a cada valor de la variable independiente, corresponde un sólo valor de la variable dependiente "

El conjunto de valores posibles para la variable independiente se llama ***dominio*** .
El conjunto de valores correspondiente que toma la función se llama ***rango*** o ***codominio.***

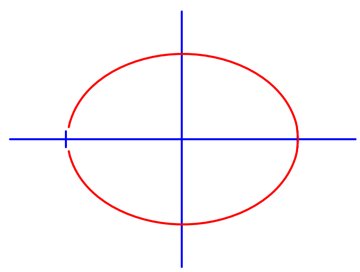
Es muy fácil determinar si una relación matemática entre dos variables es o no una función. Basta con graficar tal relación en el plano cartesiano y notar *si cualquier línea recta vertical corta a la gráfica en un solo punto* , pues en tal caso significa que a cada valor de la variable independiente x sobre el eje X , le corresponde *un único valor de la variable dependiente* y sobre el eje Y y por lo tanto se trata de una verdadera función de la forma $y = f(x)$.
En caso contrario, es decir, si cualquier recta vertical corta a la gráfica de la relación en más de un punto, significa que tal relación no representa una función.

Por ejemplo, las siguientes gráficas no representan funciones matemáticas :



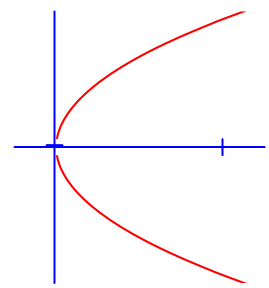
Círcunferencia de radio R *con centro en el origen:*

$$x^2 + y^2 = R^2$$



Elipse de semiejes a y b con centro en el origen de coordenadas:

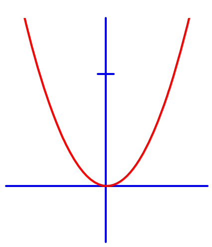
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



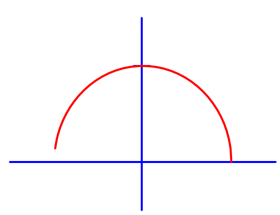
Parábola horizontal con vértice en el origen de coordenadas:

$$y^2 = A \cdot x$$

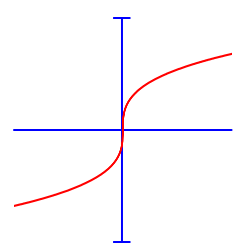
En cambio, las siguientes gráficas si representan a la variable y *como función de la variable* x :



Parábola vertical : $y = A \cdot x^2$



Semicírculo $y = \sqrt{R^2 - x^2}$



Parábola cúbica horizontal:

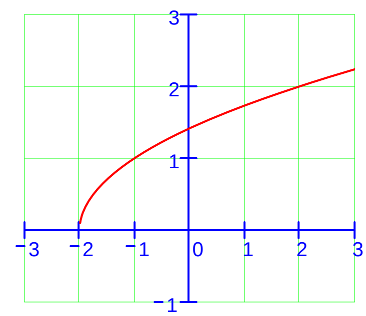
$$y = A \cdot \sqrt[3]{x}$$

Cuando el valor calculado para una función no sea un número real, entonces el valor correspondiente de su variable independiente *debe excluirse del dominio natural de la función* , es decir, todos aquellos valores de x para los cuales la función $y = f(x)$ no sea un número real, no son parte del dominio de la función.

Algunas de las condiciones que limitan el dominio de una función son :

I) ***Las raíces pares de números negativos no son números reales*** .
II) ***La división por cero no está definida*** .

Consideremos por ejemplo la función : $f(x) = \sqrt{x+2}$



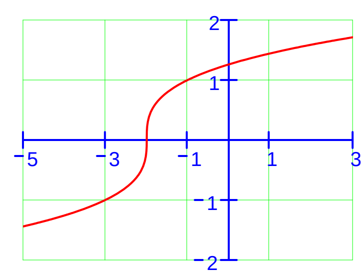
La condición I) indicada arriba , implica que si el número $\sqrt{x+2}$ ha de ser real , entonces el radicando $(x+2)$ debe ser positivo:

$$(x+2) \geq 0 \qquad \text{es decir} \qquad x \geq -2$$

Así que el dominio de ésta función no es cualquier número real sino que está limitado al conjunto de números comprendidos en el intervalo: $[-2, \infty)$.

Además, como se puede apreciar en la gráfica de la función indicada a la derecha, el rango de $f(x)$ es el conjunto de números reales positivos, $y \geq 0$, es decir el intervalo $[0, \infty)$

Consideremos ahora la función : $g(x) = \sqrt[3]{x+2}$.

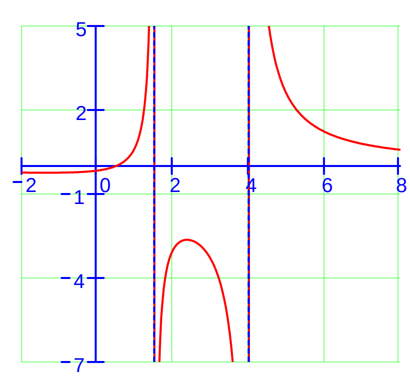


En la definición de ésta función, no existe ninguna restricción sobre los posibles valores que se le puedan asignar a su variable independiente x puesto que *las raíces impares de números positivos o negativos siempre son números reales* .
En este caso, tanto el dominio como el rango de la función $g(x)$, consisten en el intervalo $(-\infty, \infty)$, todos los números reales.

También se deben excluir del dominio de una función todos los valores reales de su variable independiente x que impliquen una división por cero o que hagan cero algún denominador, como se establece en la condición II .

Así por ejemplo la función racional :

$$f(x) = \frac{4 \cdot x - 2}{2 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 12}$$



graficada a la derecha, tiene un denominador que se factoriza como:

$$2 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 12 = (2 \cdot x - 3) \cdot (x - 4)$$

y por lo tanto se obtendrá una división por cero si $x = 4$ o $x = \frac{3}{2}$

Estos valores se deben excluir del dominio de la función, el cual consiste entonces en todos los números reales excepto 4 y $\frac{3}{2}$, es decir, $x \neq 4, \frac{3}{2}$ o escrito de otra manera, en los intervalos abiertos :

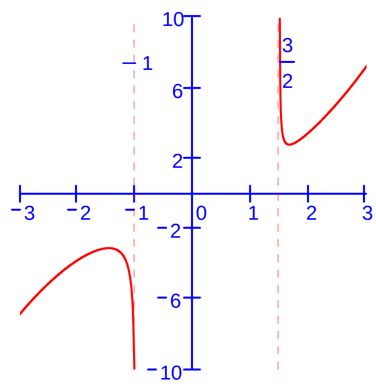
$$\left(-\infty, \frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{2}, 4\right) \quad \text{y} \quad (4, \infty)$$

El rango de la función es en cambio todo el conjunto de números reales (el intervalo $(-\infty, \infty)$) , puesto que la fracción $\left[\frac{4 \cdot x - 2}{(2 \cdot x - 3) \cdot (x - 4)}\right]$ puede ser positiva o negativa y muy grande o muy pequeña .

El rango y el dominio de una función también se pueden visualizar ***si se proyecta la gráfica de la función sobre los ejes*** X ***e*** Y .

En éste último ejemplo es claro que la proyección de la gráfica de $f(x)$ sobre el eje Y cubre todo el eje numérico vertical, por eso su rango es todo el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$.

Veamos otro ejemplo. En la función: $f(x) = \frac{x^3 - 2}{\sqrt{2 \cdot x^2 - x - 3}}$



la condición I) restringe los valores del radicando $(2 \cdot x^2 - x - 3)$ a números positivos , puesto que *las raíces cuadradas de números negativos no son números reales* :

$$2 \cdot x^2 - x - 3 \geq 0 \quad \text{o} \quad (x + 1) \cdot (2 \cdot x - 3) \geq 0$$

lo cual limita el conjunto de valores reales que puede asumir la variable x de esta función a los intervalos: $x \leq (-1)$ y $\frac{3}{2} \leq x$

Por otra parte, la condición II) establece que el denominador $(2 \cdot x^2 - x - 3)$ no debe ser cero, puesto que *no está definida la división por cero*, esto es . . .

$$(2 \cdot x^2 - x - 3) = (x + 1) \cdot (2 \cdot x - 3) \neq 0$$

lo cual conduce a las restricciones : $x \neq -1$ y $x \neq \frac{3}{2}$.

De la combinación de éstos resultados se obtiene que el dominio de $f(x)$ consiste en los intervalos abiertos

$$(-\infty, -1) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

Es decir, la variable independiente x de ésta función *no puede tomar valores en el intervalo cerrado* $\left[-1, \frac{3}{2}\right]$ *porque en éste subconjunto de números reales la función* $f(x)$ *no es un número real*.

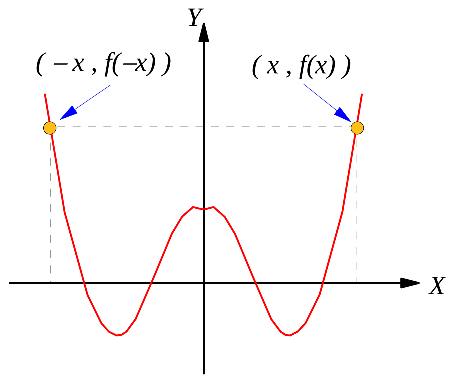
Más adelante encontraremos <u>*otras condiciones*</u> que determinan el dominio de las funciones matemáticas.

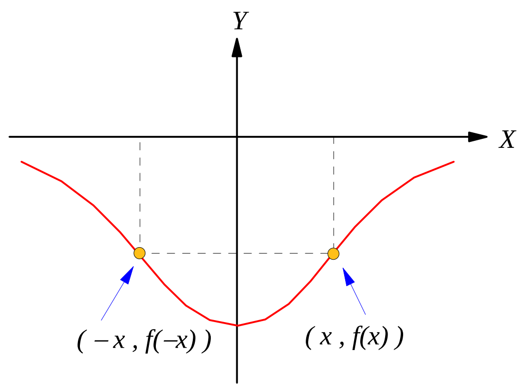
2.3 ***Clasificación geométrica de funciones***

Algunas características geométricas de las gráficas de las funciones matemáticas nos permiten clasificarlas en . . .

FUNCIONES PARES .

Su gráfica es ***simétrica respecto al eje*** Y *y por lo tanto todo punto* $(x, f(x))$ *de la gráfica de la función tiene un punto imagen :* $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ *, el cual queda a la misma distancia del eje* Y *que el punto* $(x, f(x))$ *, como se muestra por ejemplo en las siguientes figuras:*



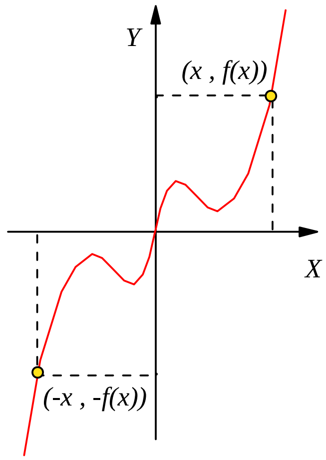


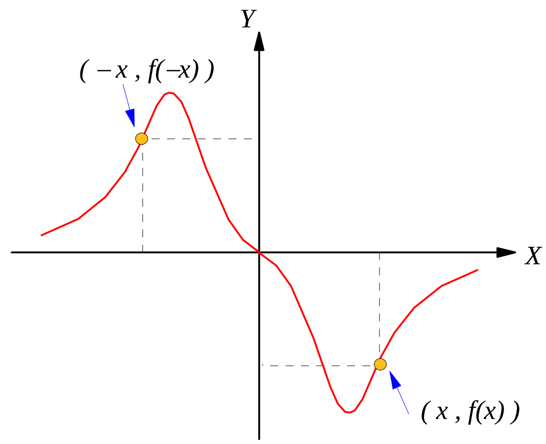
Para todo valor x *del dominio de una función par se cumple que :*

$$\boxed{f(-x) = f(x)} \qquad (2.2)$$

FUNCIONES IMPARES .

Su gráfica es ***simétrica respecto al origen de coordenadas*** *y por eso, todo punto* $(x, f(x))$ *de la gráfica de la función tiene un punto imagen :* $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ *, el cual queda a la misma distancia del origen que el punto* $(x, f(x))$ *, como se ilustra por ejemplo en las siguientes gráficas :*



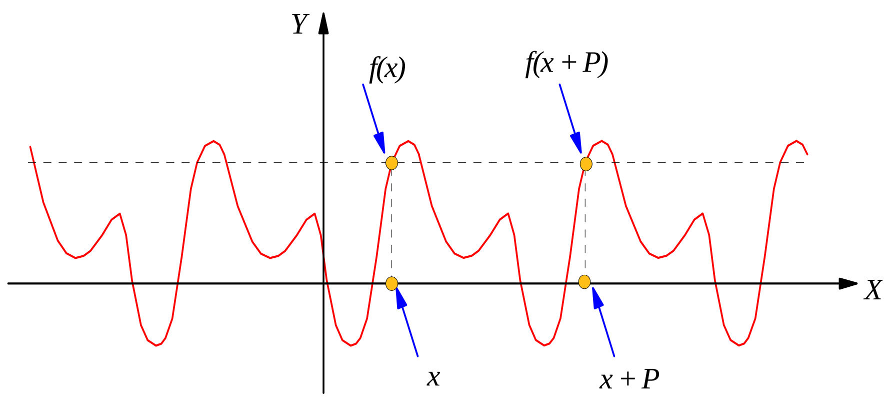


Para todo valor x *del dominio de una función impar se cumple que:*

$$\boxed{f(-x) = -f(x)} \qquad (2.3)$$

FUNCIONES PERIÓDICAS .

Su gráfica ***se repite cada cierto intervalo de longitud*** P ***(llamado periodo)*** *, como se ilustra por ejemplo en la gráfica siguiente:*

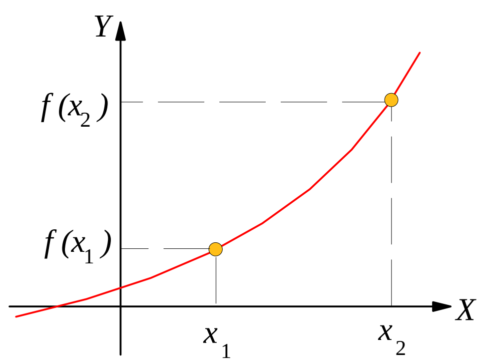


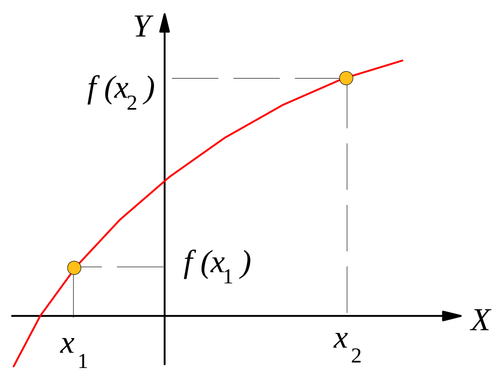
Para todo valor x *del dominio de una función periódica se cumple que:*

$$\boxed{f(x) = f(x+P)} \qquad (2.4)$$

FUNCIONES CRECIENTES .

Vista de izquierda a derecha, su gráfica ***"aumenta" o "sube" al considerar valores crecientes de su variable independiente*** *,es decir, la gráfica de una función creciente tiene una pendiente positiva que aumenta o una pendiente negativa que disminuye, como se ilustra en las gráficas siguientes:*



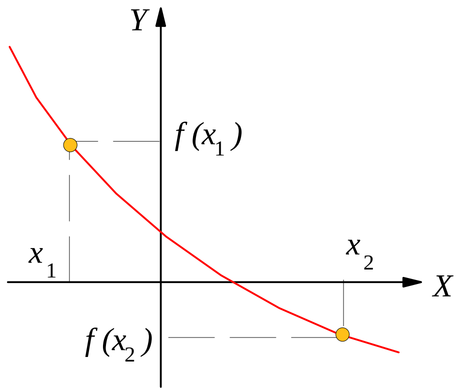


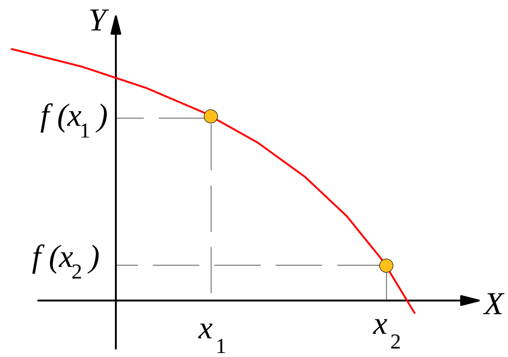
Se dice que una función $f(x)$ *es creciente en un cierto intervalo* (a,b) *si para cualquier par de valores* x_1 *y* x_2 *en ese intervalo tales que* $x_1 < x_2$ *se cumple que . . .*

$$\boxed{f(x_1) < f(x_2)} \qquad (2.5)$$

FUNCIONES DECRECIENTES .

Vista de izquierda a derecha, su gráfica ***"disminuye" o "baja" al considerar valores crecientes de su variable independiente*** *,es decir, la gráfica tiene una pendiente negativa ,como se ilustra por ejemplo en las gráficas siguientes:*





Se dice que una función $f(x)$ *es decreciente en un cierto intervalo* (a,b) *si para cualquier par de valores* x_1 *y* x_2 *en ese intervalo tales que* $x_1 < x_2$ *se cumple . . .*

$$f(x_1) > f(x_2) \tag{2.6}$$

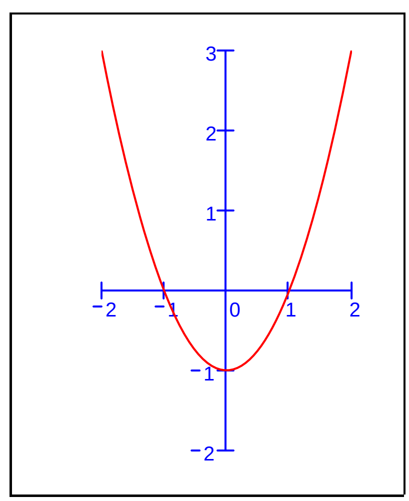
Ejemplo 3. Determinar las características geométricas de las siguientes funciones :

a) $f(x) = x^2 - 1$ b) $g(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x$ c) $h(x) = \cos(2 \cdot x)$

d) $F(x) = 4 \cdot x^2 - x^3$ e) $G(x) = \dfrac{1}{x^2}$ f) $H(x) = \dfrac{1}{x^3}$

g) $I(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ h) $J(x) = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ i) $K(x) = e^x$

Solución : a) $f(x) = x^2 - 1$



Esta es una función *par* puesto que :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 - 1 \\ &= x^2 - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Como se puede apreciar en la gráfica de la función, ilustrada a la derecha, ésta es *simétrica respecto al eje* Y
Notemos además que el vértice de éste parábola se localiza en $(0,-1)$ y por lo tanto, la función es . . .

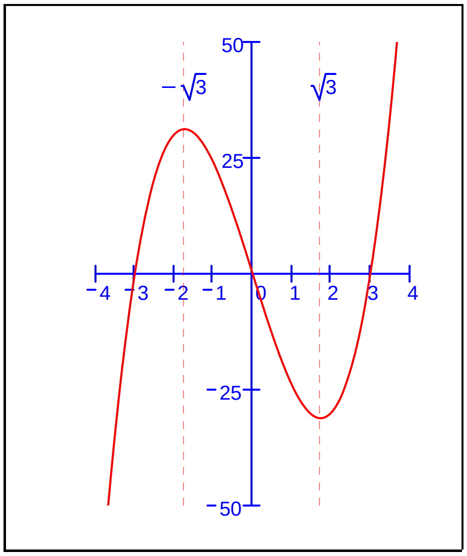
decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$

creciente en el intervalo $(0, \infty)$

b) $g(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x$

Esta es una función *impar* puesto que :

$$f(-x) = 3 \cdot (-x)^3 - 27 \cdot (-x)$$
$$= -\left(3 \cdot x^3 - 27 \cdot x\right)$$
$$= -f(x)$$



Como se puede apreciar a la derecha, la gráfica de ésta función es *simétrica respecto al origen* de coordenadas. Además la función se factoriza como:

$$g(x) = 3 \cdot x \cdot \left(x^2 - 9\right) = 3 \cdot x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$$

y por lo tanto, *los valores de x para los cuales la función vale cero (sus raíces reales)* son :

$$x = 0 \;, \quad x = 3 \;, \quad x = -3$$

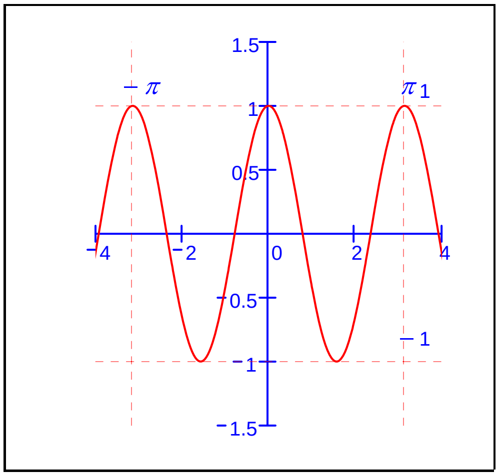
Así que en los puntos $(-3, 0)$, $(0, 0)$ y $(-3, 0)$ la gráfica de $f(x)$ cruza por el eje X . Ésta función es además :

creciente	desde $-\infty$ hasta $x = -\sqrt{3}$	
decreciente	desde $x = -\sqrt{3}$ hasta $x = 0$	
creciente	desde $x = 0$ hasta ∞	

c) $h(x) = \cos(2 \cdot x)$

Esta es una función *par* puesto que :

$$f(-x) = \cos[2 \cdot (-x)] = \cos(2 \cdot x) = f(x)$$



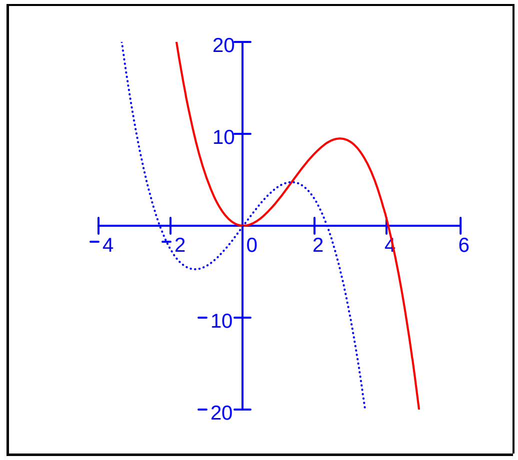
Como se puede apreciar a la derecha, la gráfica de ésta función es *simétrica respecto al eje Y* .
Además la función también es periódica porque :

$$\cos\left[2 \cdot \left(x + \pi\right)\right] = \cos\left(2 \cdot x + 2 \cdot \pi\right) = \cos(2 \cdot x)$$

es decir, $h\left(x + \pi\right) = h(x)$ y por lo tanto, *el periodo de ésta función es π .*

Los valores de la función se repiten en cada intervalo de longitud π sobre el eje X .
Notemos también que la función *crece y decrece alternadamente* ; pero su rango no sobrepasa el intervalo $[-1, 1]$, es decir es una función *acotada* .

d) $F(x) = 4\cdot x^2 - x^3$



Esta es una función que *no es par ni impar* porque:

$$F(-x) = 4\cdot(-x)^2 - (-x)^3$$
$$= 4\cdot x^2 + x^3$$

pero ésta ultima expresión no es igual ni a $F(x)$ ni a $-F(x)$ por lo tanto la función *no tiene paridad*.
Como se puede apreciar , la gráfica de ésta función *no es simétrica respecto al origen ni respecto al eje* Y .

$F(x)$ se factoriza como: $F(x) = 4\cdot x^2 - x^3 = x^2\cdot(4-x)$ y por lo tanto, su gráfica corta al eje X en $x = 0$ y en $x = 4$.

Además es: *decreciente* desde $-\infty$ hasta $x = 0$

creciente desde el origen hasta un punto entre $x = 0$ y $x = 4$.

decreciente desde ese punto hasta el infinito (∞) .

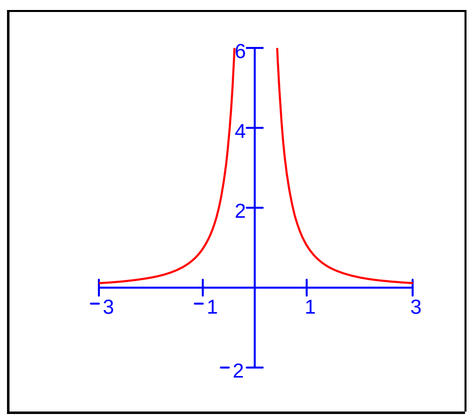
Pero, si ésta misma función se translada una distancia de $\frac{4}{3}$ hacia la izquierda y $\frac{128}{27}$ unidades hacia abajo queda :

$$f(x) = 4\cdot\left[x - \left(-\frac{4}{3}\right)\right]^2 - \left[x - \left(-\frac{4}{3}\right)\right]^3 - \frac{128}{27} = \frac{16}{3}\cdot x - x^3$$

y *se convierte en una función impar*, pues adquiere simetría respecto al origen.
Ésta función trasladada se representa con la línea de puntos en la gráfica anterior.

No se concluya de éste ejemplo que toda función matemática sin paridad se puede hacer par o impar mediante una simple translación. Existen otras funciones que no tienen paridad aunque se trasladen, giren o se deformen .

e) $G(x) = \frac{1}{x^2}$



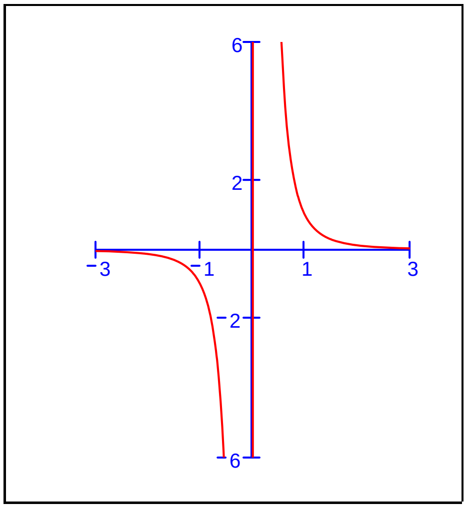
Esta es una función que *par* porque :

$$G(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = G(x)$$

y por lo tanto *tiene simetría respecto al eje* Y .
Nótese que la función no está definida en $x = 0$ *(tiende al infinito positivo* (∞) *cuando* x *se acerca al cero)* pero siempre es positiva, por lo cual su rango es el intervalo $(0, \infty)$ sobre el eje Y .

Sobre el eje X , es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$

f) $H(x) = \dfrac{1}{x^3}$



Esta es una función que *impar* porque :

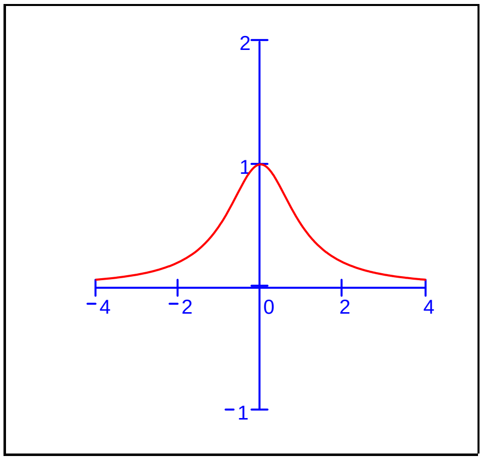
$$H(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{-x^3} = -H(x)$$

y por lo tanto *tiene simetría respecto al origen* .

Nótese que la función no está definida en $x = 0$ *(tiende a infinito* (∞) *cuando* x *se acerca al cero por la derecha :* $x < 0$ *y tiende al infinito negativo* $(-\infty)$ *cuando* x *se acerca al cero por la izquierda :* $x > 0$ *) .*

Esta función *es siempre decreciente* y puede ser positiva o negativa , por lo cual su rango sobre el eje Y consiste en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. (nótese que se excluye el 0)

g) $I(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$



Esta es una función que *par* porque :

$$I(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = I(x)$$

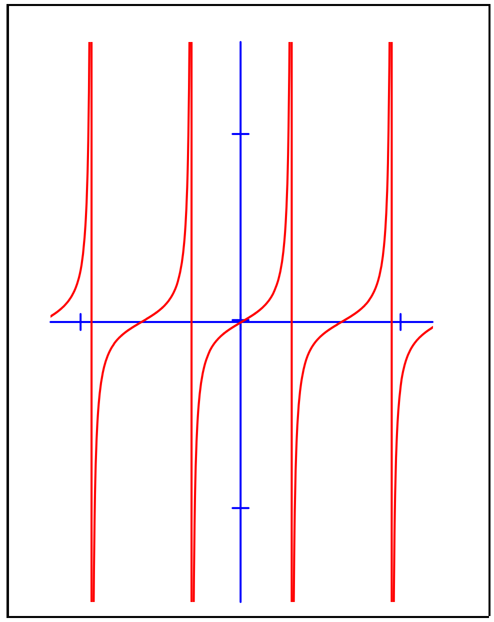
y por lo tanto *tiene simetria respecto al eje* Y .

$I(x)$ *tiende al valor* 0 *cuando* x *aumenta sin límite tendiendo al infinito positivo* (∞) *hacia la derecha, o al infinito negativo* $(-\infty)$ *hacia la izquierda* .

Sobre el eje X , es una función creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y decreciente en el intervalo $(0, \infty)$.

El rango está limitado al intervalo semiabierto $(0, 1]$ dado que el mínimo valor de su denominador $(x^2 + 1)$ es 1 y el máximo es ∞ .

h) $J(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$



Esta es una función *periódica* porque :

$$J(x+2\cdot\pi) = \tan\left(\frac{x+2\cdot\pi}{2}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right) = J(x)$$

y por lo tanto *su periodo es* $2\cdot\pi$

$J(x)$ *no está definida (tiende al infinito positivo* (∞) *o al infinito negativo* $(-\infty)$ *) cuando* x *es*

$$x = \ldots.,-5\cdot\pi,-3\cdot\pi,-\pi,\pi,3\cdot\pi,\ldots\ldots$$

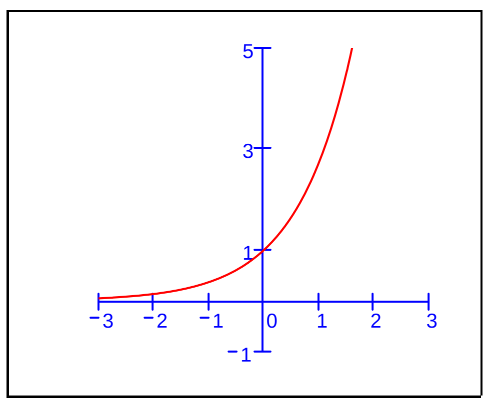
un múltiplo impar de π .

Es una función *siempre creciente* y además *impar* porque :

$$J(-x) = \tan\left(\frac{-x}{2}\right) = -\tan\left(\frac{x}{2}\right) = -J(x)$$

y por lo tanto *tiene simetría respecto al origen*

i) $K(x) = e^x$



(*la constante* $e = 2.71828183\ldots$ *es la base de los logaritmos naturales*)

Esta es una función *no tiene paridad* porque :

$$K(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

pero $\frac{1}{e^x} \neq K(x)$ y $\frac{1}{e^x} \neq -K(x)$. Además es siempre *creciente y positiva* .

2.4 ***Álgebra de funciones*** .

Podemos también sumar , multiplicar o dividir algebraicamente dos funciones matemáticas tomando en cuenta que *el dominio de las nuevas funciones resultantes será la intersección común de los dominios de las funciones iniciales*.

Por ejemplo con :

$f(x) := \sqrt{x+2}$ *Dominio* : $x \geq -2$

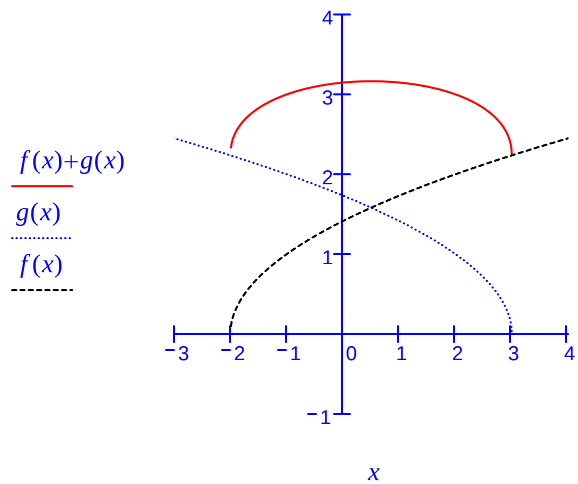
$g(x) := \sqrt{3-x}$ *Dominio* : $x \leq 3$

el dominio natural para la función suma :

$$S(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$$

es $-2 \leq x \leq 3$

(*el intervalo intersección de los dominios iniciales*)



En la gráfica de la izquierda, se representa la función suma $S(x)$ con una línea continua .

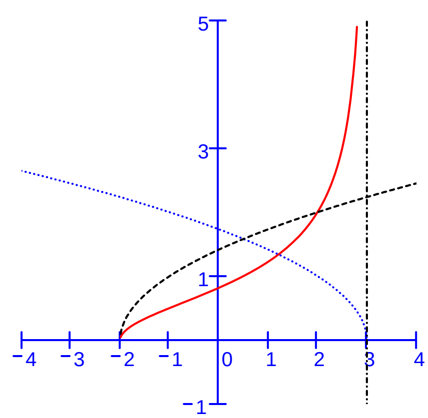
El rango de $S(x)$ es un intervalo finito .

El dominio de la función cociente :

$$h(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$$

es el intervalo común de los dominios iniciales es decir : $-2 \leq x < 3$. (*Obsérvese que se excluye el extremo* $x = 3$ *para evitar la división por cero*)

En la gráfica de la izquierda , se representa la función cociente $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ como una línea continua, y las funciones $f(x)$ y $g(x)$ como líneas discontinuas .



El rango de $h(x)$ es el intervalo $[0, \infty)$, dado que la gráfica tiende al infinito cuando el denominador $g(x)$ se aproxima a cero.

Así mismo la función producto :

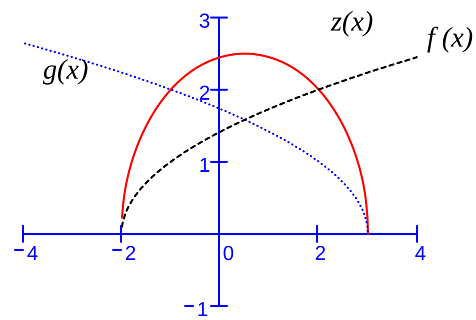
$$z(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{(x+2)\cdot(3-x)} = \sqrt{6+x-x^2}$$

tiene como dominio la intersección de los dominios iniciales : $x \geq -2$ y $x \leq 3$ que es el intervalo

$$-2 \leq x \leq 3.$$

(*Obsérvese que ésta vez se excluye el extremo* $x = 3$ *pues no hay que evitar ninguna división por cero*) .

Como se puede apreciar en la gráfica de la derecha, el rango de ésta función es un intervalo finito sobre el eje Y positivo.



2.5 ***<u>Composición de funciones</u>*** .

Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que *<u>el rango de g esté contenido totalmente en el dominio de f</u>* .

Se define entonces la *<u>función compuesta</u>* $f \circ g$ *(léase : " f punto g ")* como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \qquad (2.7)$$

de modo que $f \circ g$ es una nueva función cuyos valores del dominio se calculan a partir de los valores del rango de la función g. en otras palabras , todo valor del dominio de $f \circ g$ es un valor correspondiente al rango de g .

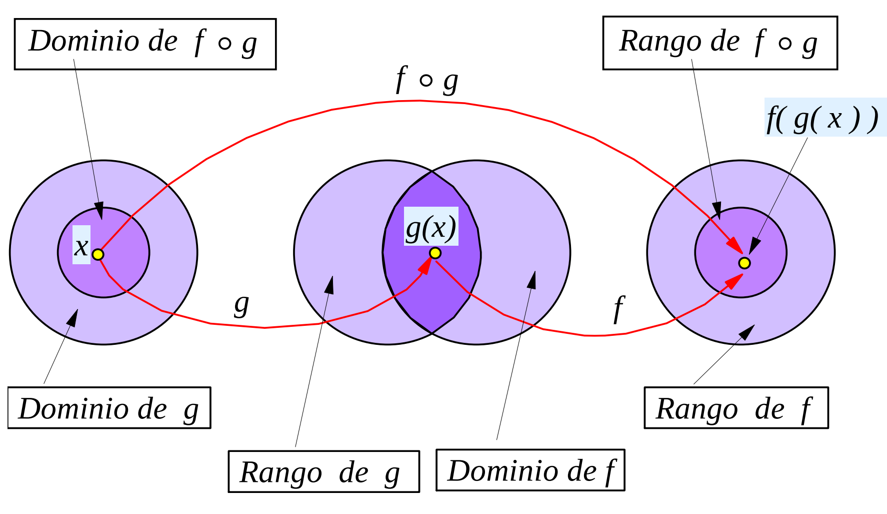
También se puede formar la función compuesta :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (2.8)$$

siempre y cuando el rango de f *esté totalmente contendido en el dominio de* g.

En éste caso, los valores del rango de f sirven como valores del dominio de g para así calcular los correspondientes valores de la funcion compuesta $g \circ f$ ∨

En consecuencia, *el dominio de* $f \circ g$ *es siempre un subconjunto del dominio de* g *y el rango de* $f \circ g$ *es siempre un subconjunto del rango de* f



Como norma general, la composición de f con g no es igual a la composición de g con f , es decir, *la composición de funciones por lo regular* *no es conmutativa.*

$$(f\circ g)(x) \neq (g\circ f)(x)$$

Por ejemplo si $f(x) = 2\cdot x - 3$ y $g(x) = x^2 - 1$ entonces :

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = 2\cdot(g(x)) - 3 = 2\cdot\left(x^2 - 1\right) - 3 = \boxed{2\cdot x^2 - 5}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (2\cdot x - 3)^2 - 1 = \boxed{4\cdot x^2 - 12\cdot x + 8}$$

de manera que $f(g(x))$ y $g(f(x))$ son funciones diferentes

PRECAUCIÓN :
Antes de componer dos ó más funciones, es necesario verificar primero que los dominios y rangos *se ajusten a la definición* de una función compuesta .

Ejemplo 4. Si $g(x) = -x^2$ y $f(x) = \sqrt{x+1}$ determinar, si es que existen, las funciones compuestas $(f\circ g)$ y $(g\circ f)$

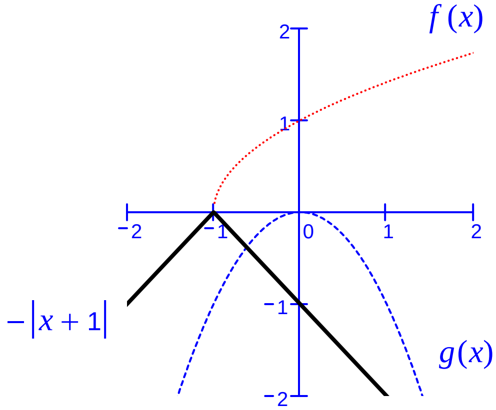
Solución : Determinemos primero los dominios y rangos de las funciones iniciales :

$$f(x) = \sqrt{x+1} : \begin{pmatrix} Dominio & -1 \le x \\ Rango & 0 \le y \end{pmatrix} \quad ; \quad g(x) = -x^2 : \begin{pmatrix} Dominio & -\infty < x < \infty \\ Rango & -\infty < y \le 0 \end{pmatrix}$$

Si se quiere formar la función compuesta $g\circ f$, el rango de f debe estar *totalmente contenido* en el dominio de g y como se puede comprobar en los intervalos anteriores, éste es el caso ya que el intervalo $[0, \infty)$, está por completo dentro del intervalo $(-\infty, \infty)$.

Asi que ésta función compuesta existe y es . . .

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = -(f(x))^2 = -\left(\sqrt{x+1}\right)^2 = -|x+1|$$



La función $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ tiene el mismo dominio que $f(x)$ es decir $[-1, \infty)$ y el mismo rango que la función $g(x)$: $(-\infty, 0]$.

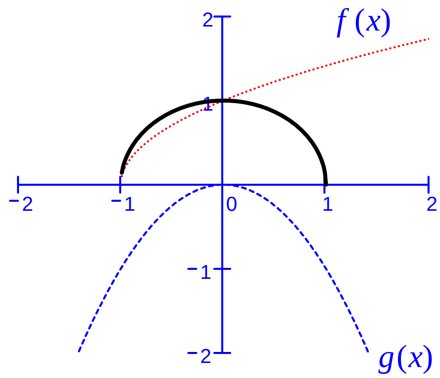
Notemos que aunque la función $-|x+1|$ y la función $(g \circ f)$ *tengan la misma forma matemática , se trata de funciones diferentes debido a sus distintos dominios de definición* .

Por otra parte, la función compuesta $(f \circ g)$ *no se puede formar* puesto que el rango de la función g que es $(-\infty, 0]$, *no está contenido totalmente en el dominio de la función* $f(x)$ que es el intervalo $[-1, \infty)$.

Sin embargo, si *se limite* el rango de g al intervalo $[-1, 0]$ que es la intersección común de los intervalos $(-\infty, 0]$ y $[-1, \infty)$, lo cual equivale a limitar el dominio de la función g al intervalo $[-1, 1]$, entonces. bajo esa restricción , la función compuesta $(f \circ g)$ queda definida y es:

$$f(g(x)) = \sqrt{g(x)+1} = \sqrt{-x^2+1}$$

Que tiene el intervalo $[-1, 1]$ como dominio y por lo tanto su rango está limitado a $0 \leq f(g(x)) \leq 1$, como se indica en la gráfica de la derecha .



Ejemplo 5. Si $h(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)}$ y $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, determinar si es que existen, las funciones compuestas $(h \circ p)$ y $(p \circ h)$

Solución : Determinemos primero los dominios y rangos de las funciones iniciales :

$$h(x) = \frac{1}{(x^2-1)} : \quad \begin{pmatrix} \textit{Dominio} & x \neq 1, x \neq -1 \\ \textit{Rango} & -\infty < y < \infty \end{pmatrix}$$

$$p(x) = \sqrt{1-x^2} : \quad \begin{pmatrix} \textit{Dominio} & -1 \leq x \leq 1 \\ \textit{Rango} & 0 \leq y \leq 1 \end{pmatrix}$$

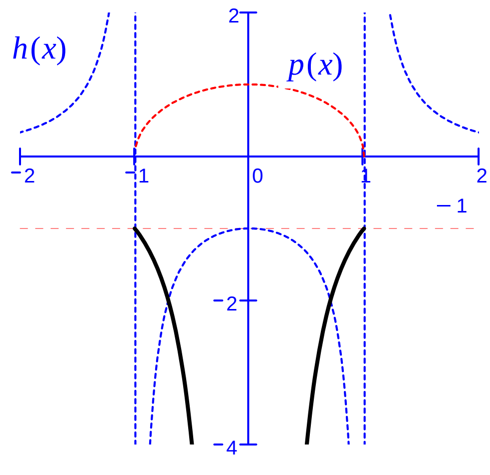
La función compuesta $(h \circ p)$ no existe puesto que *un solo valor* $(x = 1)$ del rango de $p(x)$ no está en el dominio de $h(x)$. Sin embargo se puede formar ésta función, *excluyendo por definición éste punto del rango de* $p(x)$, (lo cual equivale a excluir $x = 0$ de su dominio .

La función compuesta es entonces:

$$h(p(x)) = \frac{1}{(p(x))^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{-x^2}$$



$h(p(x))$

Función que tiene el mismo dominio que $p(x)$, excepto el valor $x = 0$, es decir consiste en los intervalos: $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ y por lo tanto su rango queda limitado a $(-\infty, -1]$.

En la gráfica anterior, la función $h(p(x))$ es solamente la parte de la curva $\frac{-1}{x^2}$ que *queda por debajo de la recta horizontal* $y = -1$.

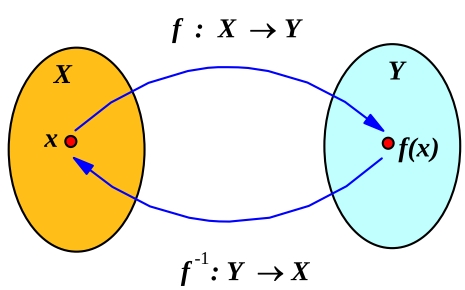
Nótese por otra parte que el rango $(-\infty, \infty)$ de $h(x)$ *no está contenido en el dominio* $[-1, 1]$ *de* $p(x)$, así que $(p \circ h)$ *no se puede definir a menos que se redefina el dominio de* $h(x)$.

2.6 ***La función inversa***

La inversa de una función matemática $f(x)$ se denota por $f^{-1}(x)$ y es una función que "deshace" el efecto hecho por la función $f(x)$ sobre cada uno de los valores x de su dominio, de manera que las composiciones $(f \circ f^{-1})(x)$ y $(f^{-1} \circ f)(x)$ son la función identidad:

$$\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = x \qquad ; \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x}$$

En otras palabras, la función inversa $f^{-1}(x)$ nos "devuelve" al valor de entrada inicial x que asignamos a la variable independiente de la función f.



Por lo tanto, de un modo informal, es posible determinar la función inversa de una función $f(x)$ dada . . .

haciendo las operaciones inversas a las operaciones que contenga la función $f(x)$ y aplicándolas en el orden inverso en que aparecen en $f(x)$.

Asi por ejemplo $f(x) = \dfrac{3 \cdot x^3 - 4}{2}$ es una función que implica las siguientes operaciones en el siguiente orden:

1°	elévese el valor de entrada x al cubo.	: x^3
2°	multiplíquese por 3	: $3 \cdot x^3$
3°	réstese 4 al resultado anterior.	: $3 \cdot x^3 - 4$
4°	divídase el resultado anterior por 2	: $\dfrac{3 \cdot x^3 - 4}{2}$

de modo que la función inversa debe hacer *las correspondientes operaciones opuestas precisamente en el orden inverso* , esto es . . .

1°	multiplíquese el valor de entrada x por 2	: $2 \cdot x$
2°	súmese 4 al resultado anterior.	: $2 \cdot x + 4$
3°	divídase por 3	: $\left(\dfrac{2 \cdot x + 4}{3}\right)$
4°	extráigase la raíz cúbica.	: $\sqrt[3]{\dfrac{2 \cdot x + 4}{3}}$

La expresión $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2 \cdot x + 4}{3}}$ debes ser la función inversa buscada. En efecto, es fácil comprobar que cualquiera de las composiciones $(f \circ f^{-1})$ o $(f^{-1} \circ f)$, nos "devuelve" el valor inicial de entrada x . . .

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{3 \cdot \left[f^{-1}(x)\right]^3 - 4}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot \left(\sqrt[3]{\dfrac{2 \cdot x + 4}{3}}\right)^3 - 4}{2} = \frac{3 \cdot \left(\dfrac{2 \cdot x + 4}{3}\right) - 4}{2} = \frac{(2 \cdot x + 4) - 4}{2} = x$$

y similarmente . . .

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot f(x) + 4}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \left(\frac{3 \cdot x^3 - 4}{2}\right) + 4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{(3 \cdot x^3 - 4) + 4}{3}} = \sqrt[3]{\frac{(3 \cdot x^3)}{3}} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Ejemplo 6. Hallar de manera informal la función inversa de la función $f(x) = \frac{3 \cdot x - 4}{x + 2}$.

Solución : En la forma en que aparece escrita esta función, no es evidente el orden de operaciones que se deben hacer con el valor de entrada x . Por lo tanto, expresémosla de manera más simple efectuando la división algebraica:

$$f(x) = \frac{3 \cdot x - 4}{x + 2} = 3 - \frac{10}{(x + 2)}$$

En ésta expresión, ya es más clara la secuencia de operaciones :

1°	sumar 2 el valor de entrada x	: $x + 2$
2°	el recíproco del resultado anterior	: $\frac{1}{x + 2}$
3°	multiplicar por -10	: $-10 \cdot \left(\frac{1}{x + 2}\right)$
4°	sumar 3 al resultado anterior	: $3 - \frac{10}{(x + 2)}$

de modo que *la función inversa debe hacer precisamente las correspondientes operaciones opuestas en el orden inverso*, es decir , es la siguiente secuencia . . .

1°	restar 3 al valor de entrada x	: $x - 3$
2°	dividir por -10 al resultado anterior.	: $\frac{x - 3}{-10}$
3°	el recíproco del resultado anterior	: $\left(\frac{-10}{x - 3}\right)$
4°	restar 2.	: $\left(\frac{-10}{x - 3}\right) - 2$

expresión que una vez simplificada debe queda: $f^{-1}(x) = \frac{2 \cdot (x + 2)}{3 - x}$ y debe ser la función inversa buscada

En efecto, es fácil comprobar que las composiciones generan la función identidad . . .

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{3\cdot\left[f^{-1}(x)\right]-4}{\left[f^{-1}(x)\right]+2}$$

$$= \frac{3\cdot\left[\dfrac{2\cdot(x+2)}{3-x}\right]-4}{\dfrac{2\cdot(x+2)}{3-x}+2} = \frac{6\cdot(x+2)-4\cdot(3-x)}{2\cdot(x+2)+2\cdot(3-x)}$$

$$= \frac{6\cdot x+12-12+4\cdot x}{2\cdot x+4+6-2\cdot x} = \frac{10\cdot x}{10} = x$$

verifique Usted ahora que $f^{-1}(f(x)) = x$

Problema para practicar

Determine de manera informal la función inversa de las siguientes funciones :

a) $f(x) = 4\cdot x - 3$ *b)* $f(x) = \sqrt[3]{x+3} - 2$ *c)* $f(x) = \dfrac{2\cdot x+3}{x-1}$

Definición : Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ ***son inversas entre si*** cuando para cualquier valor de x en el dominio de f ó en el dominio de g se cumple que . . .

$$(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = x \qquad (2.9)$$

o en forma equivalente . . .

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x \qquad (2.8_a)$$

De acuerdo con ésta definición y la composición de funciones, se concluye que :

el dominio de f *debe ser igual al rango de* g *y*
el dominio de g *debe ser igual al rango de* f

sólo de ésta manera se cumplirá simultáneamente la condición anterior (2.8_a).

PRECAUCIÓN :

El símbolo $f^{-1}(x)$ de la función inversa de $f(x)$ ***no significa*** que $f(x)$ esté elevada a la potencia -1 , es decir . . . $f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$

Ejemplo 7. Comprobar que las siguientes funciones son inversas una de la otra :

$$f(x) = 2\cdot x^3 - 1 : \begin{bmatrix} \textit{Dominio} & (-\infty,\infty) \\ \textit{Rango} & (-\infty,\infty) \end{bmatrix} \quad ; \quad g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}} : \begin{bmatrix} \textit{Dominio} & (-\infty,\infty) \\ \textit{Rango} & (-\infty,\infty) \end{bmatrix}$$

Solución : Formando ambas composiciones se obtiene :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2\cdot(g(x))^3 - 1 = 2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 = 2\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{\frac{f(x)+1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{(2\cdot x^3 - 1)+1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2\cdot x^3}{2}} = x$$

por lo tanto, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas una de la otra y se puede escribir que:

$$g(x) = f^{-1}(x) \qquad \text{ó} \qquad f(x) = g^{-1}(x)$$

Por otra parte, si (x, y) es un punto de la gráfica de una función $f(x)$ que es inversible, entonces el punto (y, x) pertenece a la gráfica de la función inversa $f^{-1}(x)$ puesto que el dominio de $f(x)$ es igual al rango de $f^{-1}(x)$ y viceversa, en otras palabras . . .

la función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto a la línea recta $x = y$

Debido a ésta propiedad geométrica es posible determinar fácilmente de manera analítica la expresión de la función inversa de una función inversible $f(x)$, mediante la siguiente regla . . .

1° ***Intercambiar x con y en la ecuación $y = f(x)$***

2° ***Despejar la variable y de la ecuación resultante . Esta será la función inversa***

Esta regla equivale a *intercambiar los ejes de coordenadas* X *e* Y del plano cartesiano

Ejemplo 8. Hallar la inversa de las funciones siguientes . . .

a) $f(x) = \sqrt{2\cdot x - 3}$; b) $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$

Solución : Haciendo $y = f(x)$:

$$y = \sqrt{2\cdot x - 3} \; ; \; \begin{pmatrix} Dominio & x \geq \dfrac{3}{2} \\ Rango & 0 \leq y \end{pmatrix} \quad ; \quad y = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}} \; ; \; \begin{bmatrix} Dominio & (-\infty, \infty) \\ Rango & (-\infty, \infty) \end{bmatrix}$$

Intercambiando x con y . . .

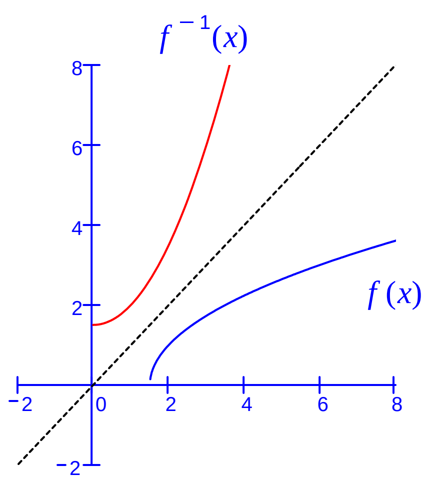
$$x = \sqrt{2\cdot y - 3} \quad ; \quad x = \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{2}}$$

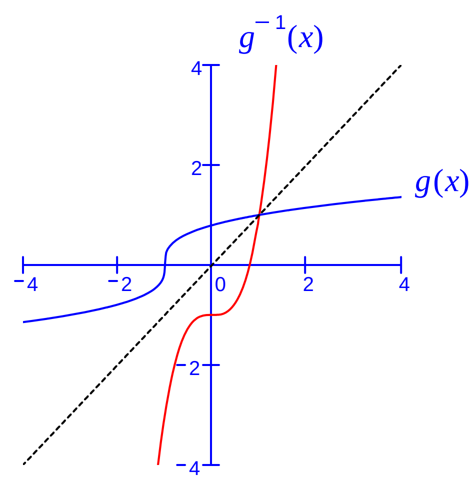
despejando la variable y . . .

$$y = \frac{x^2 + 3}{2} \quad ; \quad y = 2\cdot x^3 - 1$$

Estas deben ser las expresiones buscadas para las funciones inversas :

$$\boxed{f^{-1} = \frac{x^2+3}{2}} \; ; \; \begin{pmatrix} Dominio & 0 \leq x \\ Rango & y \geq \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} \; ; \; \boxed{g^{-1} = 2\cdot x^3 - 1} \; ; \; \begin{bmatrix} Dominio & (-\infty, \infty) \\ Rango & (-\infty, \infty) \end{bmatrix}$$





Como se puede apreciar en éste ejemplo , *la gráfica de una función inversible* $f(x)$ *es* ***simétrica*** *respecto a la línea recta* $y = x$ *, con la gráfica de su función inversa* $f^{-1}(x)$ *. Además sus dominios y rangos* ***se intercambian***.

PRECAUCIÓN :

- ***No todas la funciones matemáticas tienen inversa*** . Una función $f(x)$ tiene inversa *si y sólo si es biyectiva* , es decir sólo si cualquier línea recta horizontal o vertical corta a la gráfica de la función $f(x)$ ***solamente*** en un punto.

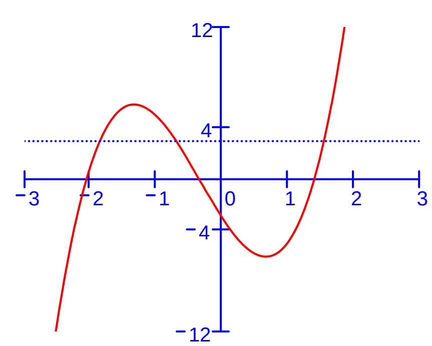
Esto significa que *por cada valor* x *del dominio, existe un sólo valor* $f(x)$ *del rango y por cada valor del rango* $f(x)$ *existe un sólo valor* x *del dominio* .

Ésta condición es necesaria ya que al formar la función inversa f^{-1} de $y = f(x)$ intercambiando x con y , el dominio de f que es un intervalo en el eje X , pasa a ser el rango de f^{-1} y el rango de f que es un intervalo sobre el eje Y , pasa a ser el dominio de f^{-1}.

De modo que si a dos o mas valores de x : $(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots)$ en el dominio de f , corresponde el mismo valor y_o del rango , al invertir el dominio con el rango , a un solo valor del dominio (y_o) corresponderán dos o mas valores $(x_1 , x_2 , x_3 , \ldots)$ en el rango, de modo que la expresión que se obtenga para f^{-1} no será en realidad una función puesto que no satisface la condición fundamental que define a las funciones matemáticas.

Ejemplo 9. ¿ Tiene el polinomio $f(x) = 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x - 3$ una función inversa ?

Solución : Al representar gráficamente ésta función, se ve claramente que no es una función biyectiva , pues aunque es verdad que cualquier recta vertical corta a su gráfica en un solo punto (*razón por la cual es precisamente una función de x*), no sucede lo mismo con cualquier recta horizontal .



Como puede verse en la figura, existe un rango sobre el eje Y en el que cualquier recta horizontal intersecta a la gráfica de la función en 3 puntos distintos.

En éste rango la variable x no es función de la variable y y en consecuencia la función $f(x)$ no es biyectiva y por lo tanto *no tiene inversa* .

2.7 ***Transformación gráfica de una función***.

Dada la gráfica de una función $y = f(x)$, es posible transformarla al . . .

- *desplazarla sobre el eje X* hacia la derecha o hacia la izquierda
- *desplazarla sobre el eje Y* hacia arriba o hacia abajo
- *reflejarla respecto al eje X o respecto al eje Y*

En todos estos casos, la gráfica sigue siendo la misma y conserva su forma inicial , sólo cambia su posición en el plano cartesiano, por eso a éstos procedimientos se les llama *transformaciones rígidas* . Por el contrario cuando. . .

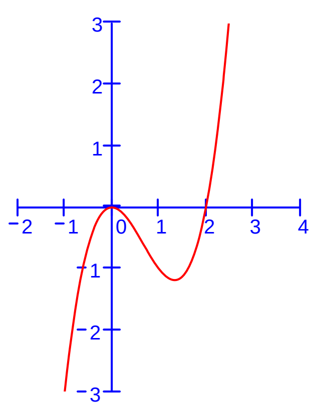
- *Se aumenta o disminuye la escala sobre el eje X o sobre el eje Y*

cambiará la forma inicial de la gráfica de $f(x)$. A éste tipo de transformaciones se les llama *no rígidas*

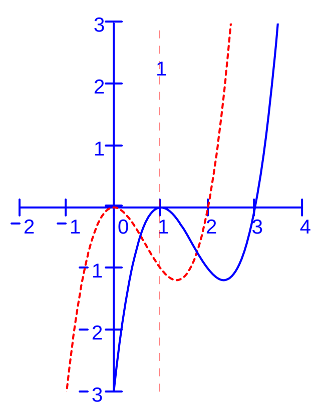
De ésta manera, dada la gráfica de una función $y = f(x)$, y una constante c positiva se tienen las siguientes posibles transformaciones para la función $f(x)$:

I. ***Desplazamiento horizontal hacia la derecha*** : $g(x) = f(x-c)$

La curva $y = g(x)$ representa la misma curva que $y = f(x)$ pero *desplazada horizontalmente* c *unidades hacia la derecha* .
Por ejemplo el punto $(0, f(0))$ sobre la gráfica de $f(x)$ corresponde ahora al punto obtenido haciendo $x = c$ en la gráfica de $g(x)$, esto es : $(c, g(c)) = (c, f(c-c)) = (c, f(0))$.
Al igual que este punto en particular, *todos los valores de la función* $g(x)$ *están desplazados hacia la derecha en la misma cantidad* ($x = c$) *respecto a los valores similares de la función* $f(x)$.
Por ejemplo las gráficas de las funciones :



$f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2$



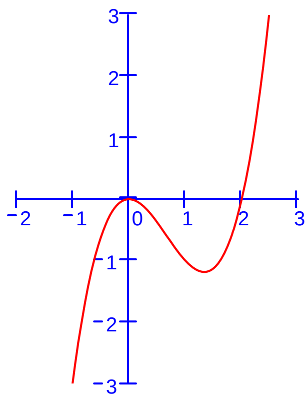
$f(x-1) = (x-1)^3 - 2 \cdot (x-1)^2$

$= x^3 - 5 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 3$

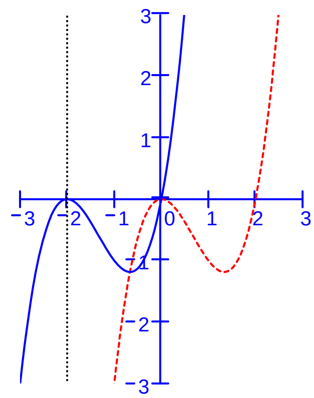
Es la misma función $f(x)$ *pero con un desplazamiento horizontal de una unidad hacia la derecha* :

II. ***Desplazamiento horizontal hacia la izquierda*** *:* $g(x) = f(x+c)$

Se puede escribir esta transformación como : $g(x) = f(x+c) = f[x-(-c)]$
que de acuerdo al caso anterior, representa un desplazamiento horizontal de $-c$ unidades hacia la derecha, o equivalentemente de c unidades hacia la izquierda. Por lo tanto la curva $y = g(x)$ representa la misma curva que $y = f(x)$ pero *desplazada horizontalmente* c *unidades hacia la izquierda*
Por ejemplo el punto $(0, f(0))$ sobre la gráfica de $f(x)$ corresponde ahora al punto obtenido haciendo $x = -c$ en la gráfica de $g(x)$ que es: $(-c, g(-c)) = (-c, f(-c+c)) = (-c, f(0))$.
Al igual que este punto en particular, *todos los valores de la función* $g(x)$ *están desplazados hacia la izquierda en la misma cantidad* ($x = -c$) *respecto a los valores similares de la función* $f(x)$.
Por ejemplo las gráficas de las funciones :



$$f(x) = x^3 - 2\cdot x^2$$



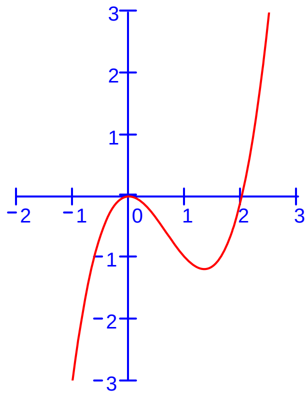
$$f(x+2) = (x+2)^3 - 2\cdot(x+2)^2$$
$$= x^3 + 4\cdot x^2 + 4\cdot x$$

Es la misma función $f(x)$ *pero con un desplazamiento horizontal de dos unidades hacia la izquierda :*

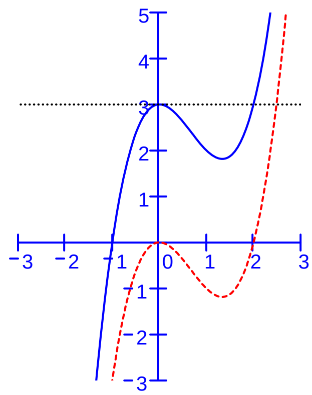
III. ***Desplazamiento vertical hacia arriba*** *:* $g(x) = f(x) + c$

Cualquier punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica de $f(x)$ corresponde al punto $(a, g(a)) = (a, f(a)+c)$ en la gráfica de $g(x)$. De modo que *los valores de la función* $g(x)$ *son los mismos valores que tiene la función* $f(x)$ *pero aumentados en la cantidad* $y = c$ *, esto es, están desplazados "hacia la arriba" sobre el eje Y en la cantidad* c *.*

Comparemos por ejemplo las gráficas de las siguientes funciones :



$f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2$



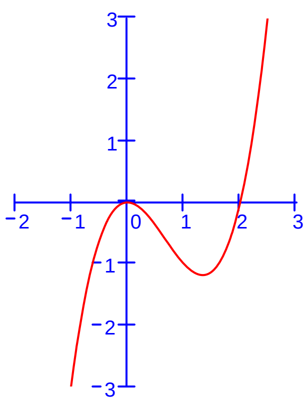
$f(x) + 3 = \left(x^3 - 2 \cdot x^2\right) + 3$

Es la misma función $f(x)$ *pero con un* *desplazamiento vertical de tres unidades hacia la arriba*

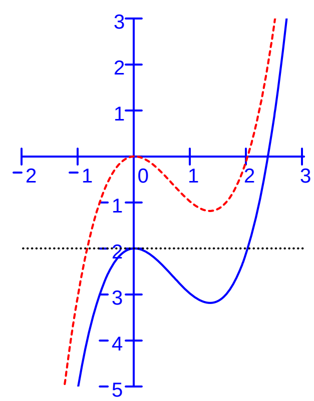
IV. ***Desplazamiento vertical hacia abajo*** *:* $g(x) = f(x) - c$

Cualquier punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica de $f(x)$ corresponde al punto $(a, g(a)) = (a, f(a) - c)$ en la gráfica de $g(x)$ .De modo que *los valores de la función* $g(x)$ *son iguales a los valores que tiene la función* $f(x)$ *disminuidos en la cantidad* $y = c$ *, esto es, están desplazados "hacia la abajo" sobre el eje Y en la cantidad* c .

Consideremos por ejemplo las gráficas de las siguientes funciones :



$f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2$

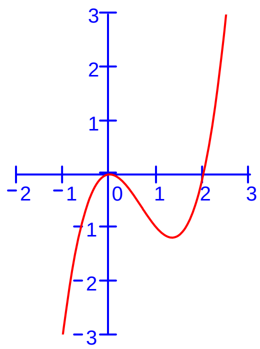


$f(x) - 2 = \left(x^3 - 2 \cdot x^2\right) - 2$

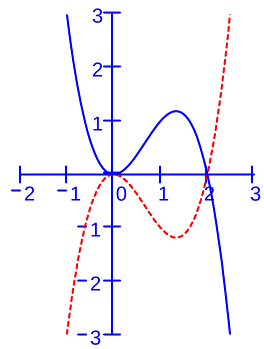
Es la misma función $f(x)$ *pero con un* *desplazamiento vertical de dos unidades hacia la abajo*

V. ***Reflexión respecto al eje X horizontal*** : $g(x) = -f(x)$

Cualquier punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica de $f(x)$ corresponde al punto $(a, g(a)) = (a, -f(a))$ en la gráfica de $g(x)$ .De modo que *todos los valores de la función* $f(x)$ *son iguales a los de* $g(x)$ *; pero están invertidos en signo , los que eran positivos ahora serán negativos y viceversa* . Considérese por ejemplo las gráficas de :



$f(x) = x^3 - 2\cdot x^2$



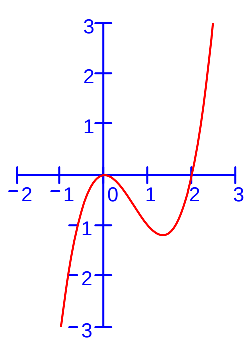
$-f(x) = -\left(x^3 - 2\cdot x^2\right) = -x^3 + 2\cdot x^2$

Es la función $f(x)$ *pero reflejada en el eje X* .

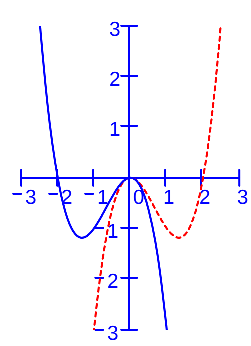
Las gráficas de $f(x)$ *y de* $-f(x)$ *son simétricas respecto al eje X* .

VI. ***Reflexión respecto al eje Y vertical*** : $g(x) = f(-x)$

El punto $(-a, f(-a))$ en la gráfica de $f(x)$ corresponde al punto $(a, g(a)) = (a, f(-a))$ en la gráfica de $g(x)$ .De modo que *todos los valores de la función* $f(x)$ *son iguales a los de la función* $g(x)$ *, pero los puntos* $(a, f(-a))$ *y* $(-a, f(-a))$ *están localizados simétricamente respecto al eje Y vertical.* Por ejemplo las gráficas de las funciones :



$f(x) = x^3 - 2\cdot x^2$



$f(-x) = \left[(-x)^3 - 2\cdot(-x)^2\right] = -x^3 - 2\cdot x^2$

Es la función $f(x)$ *pero reflejada en el eje Y* .

Las gráficas de $f(x)$ *y de* $f(-x)$ *son simétricas respecto al eje Y* .

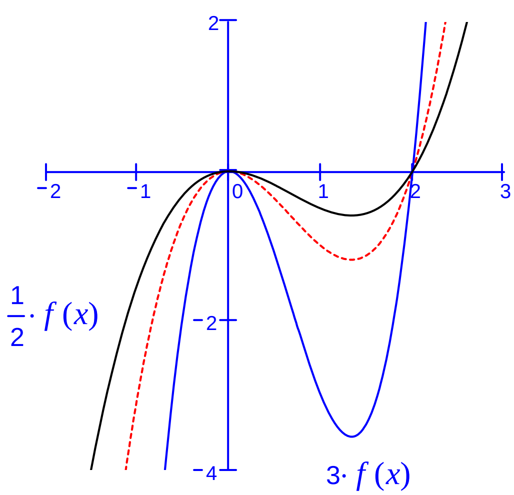
VII. ***Distorsión vertical*** : $g(x) = c\cdot f(x)$

Esta es una transformación que ***cambia la forma*** de la función inicial. El punto $(a, f(a))$ sobre la gráfica de $f(x)$ corresponde ahora al punto $(a, g(a)) = (a, c\,f(a))$ en la gráfica de $g(x)$.
Los valores de la función $g(x)$ *son los valores de la función* $f(x)$ *multiplicados por la constante* c.
de modo que *si la constante positiva* c *es mayor que la unidad (* $c > 1$ *), ésta transformación representa un* ***alargamiento vertical*** *y si* $0 < c < 1$ *es* ***una contracción vertical*** .

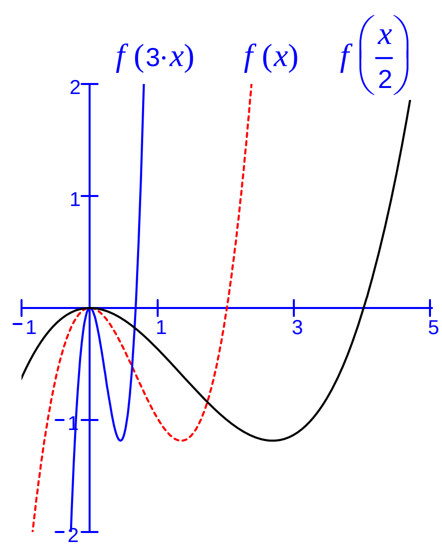
VIII. ***Distorsión horizontal*** : $g(x) = f(c\cdot x)$

Esta transformación *cambia la forma* de la función inicial. El valor $f(a)$ obtenido con $x = a$ en la función $f(x)$, se obtiene ahora con $x = \dfrac{a}{c}$ en la función $g(x)$, dado que $g\left(\dfrac{a}{c}\right) = f\left(c\cdot\dfrac{a}{c}\right) = f(a)$.
De ésta manera, *los valores de la función* $f(x)$ *son iguales a los valores de la función transformada* $g(x)$*, excepto que están desplazados horizontalmente a lo largo del eje* X .
Si la constante positiva c *es mayor que la unidad (* $c > 1$ *), ésta transformación representa una* ***contracción horizontal*** *y si* $0 < c < 1$ *es una* ***dilatación horizontal*** .

En las siguientes gráficas se muestran los efectos de las constantes $c_1 = 3$ y $c_2 = \dfrac{1}{2}$ sobre la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2\cdot x^2$, mostrada en línea de trazos



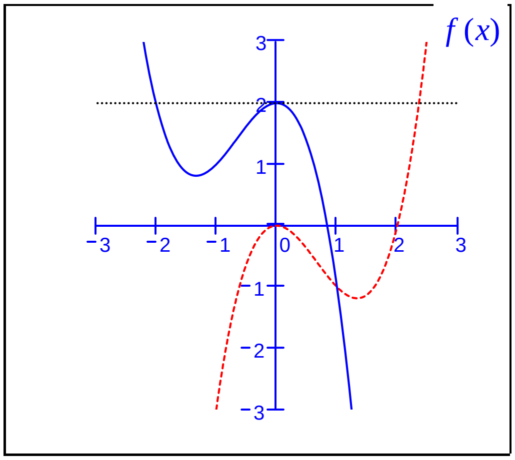
Distorsiones verticales :



Distorsiones horizontales :

También es posible combinar dos o más transformaciones, por ejemplo en las siguientes gráficas se muestran los efectos combinados de translaciones, reflexiones y distorsiones sobre la gráfica de la función

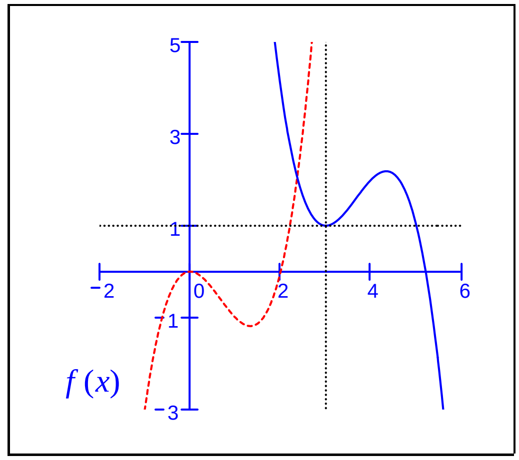
$f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 \; ...$



$f(-x) + 2 = \left(-x^3 - 2 \cdot x^2\right) + 2$

Es la misma función $f(x)$ *pero :*

- *desplazada verticalmente dos unidades hacia arriba*
- *reflejada respecto al eje Y*

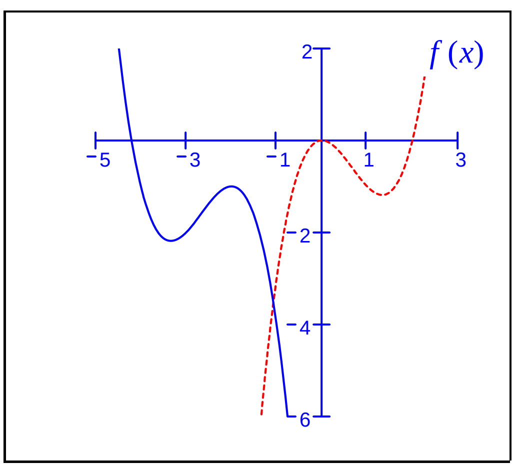


$-f(x-3) + 1 = -\left[(x-3)^3 - 2 \cdot (x-3)^2\right] + 1$

$= -x^3 + 11 \cdot x^2 - 39 \cdot x + 46$

Es la misma función $f(x)$ *pero :*

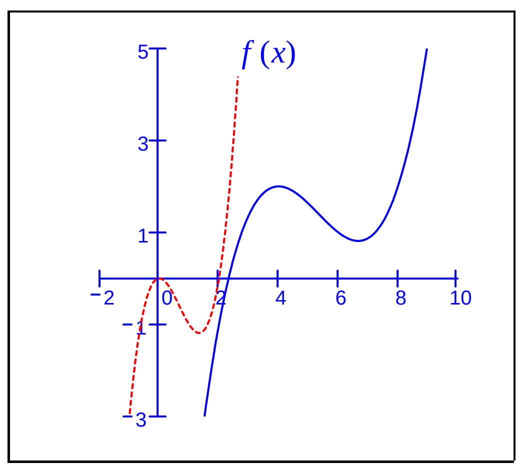
- *desplazada verticalmente una unidad hacia arriba*
- *desplazada horizontalmente 3 unidades hacia la derecha*
- *reflejada respecto al eje X* :



$f(-x-2) - 1 = f[-(x+2)] - 1$

Es la misma función $f(x)$ *pero con :*

- *un desplazamiento vertical de una unidad hacia abajo*
- *una reflexión respecto al eje Y*
- *un desplazamiento horizontal de dos unidades hacia la izquierda*



$f\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 2$

Es la función $f(x)$ *pero:*

- *desplazada dos unidades verticales arriba*
- *desplazada dos unidades horizontales a la derecha*
- *dilatada horizontalmente por un factor de 2.*

EJERCICIO 2.1

Dada la función $f(x) = 2\cdot x^3 - 3\cdot x + 4$ calcular los valores funcionales :

1. $f(1)$
2. $f(2\cdot a)$
3. $f(3)$
4. $(f(a))^2$
5. $f\left(a^2\right)$
6. $f(a) + 1$
7. $f(a+1)$
8. $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$

Dada la función $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{3\cdot x + 5}$ calcular :

9. $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$
10. $\dfrac{1}{\varphi(x)} + 1$
11. $\varphi\left(\dfrac{3}{5\cdot x}\right)$
12. $\varphi\left[\dfrac{1}{(1+x)}\right]$

13. Si $\phi(x) = log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ probar, por propiedades de logaritmos que: $\phi(a) + \phi(b) = \phi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$

14. Si $f(x) = 2^x$ calcular $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)}$

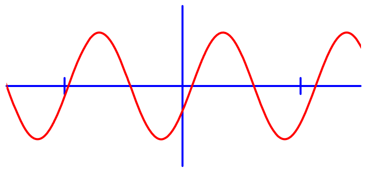
15. Si $\varphi(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ y $\psi(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$ encontrar las expresiones de :

i) $\varphi(x)\cdot\varphi(y) + \psi(x)\cdot\psi(y)$ ii) $\varphi(x)\cdot\psi(y) + \psi(x)\cdot\varphi(y)$

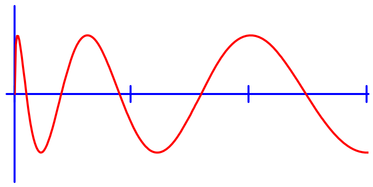
Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o no tienen paridad.

16. $f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(a^x + a^{-x}\right)$
17. $f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\left(a^x - a^{-x}\right)$
18. $f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}$
19. $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

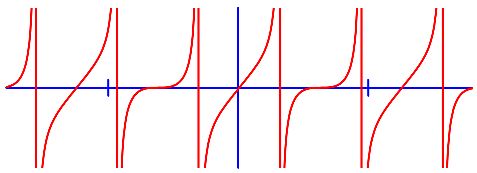
Determinar si las siguientes funciones, cuyas gráficas se ilustran , son periódicas o no.



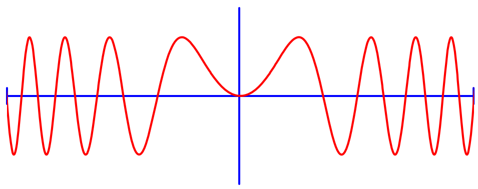
20. $f(x) = 10\cdot cos(3\cdot x - 2)$



21. $f(x) = sen\left(\sqrt{x}\right)$



22. $f(x) = tan(x) + sen(x)$



23. $f(x) = sen\left(x^2\right)$

Demostrar que . . .

24. *El producto de dos funciones pares o de dos impares es una función par*
25. *Cualquier función* $f(x)$ *definida en un intervalo* $[a, b]$ *es la suma de una función par y una función impar*
26. *El producto de una función par por otra impar es una función impar*

Calcular el dominio de las siguientes funciones :

27. $f(x) = \sqrt{4 - 2\cdot x^2}$

28. $f(x) = \sqrt[3]{3\cdot x^2 - 21} - \sqrt[5]{2\cdot x + 4}$

29. $f(x) = \sqrt{5 - x} + \sqrt{\sqrt{2 + x}}$

30. $g(x) = \dfrac{4\cdot x - 3}{10\cdot x^2 - 17\cdot x - 20}$

31. $h(x) = \dfrac{7\cdot x - 2}{\sqrt{30\cdot x^2 - 2\cdot x - 12}}$

32. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3\cdot x^2 + 2\cdot x - 8}{8\cdot x^2 - 14\cdot x + 3}}$

Hallar las funciones compuestas $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$ y $(g \circ g)$ siempre que sea posible para los siguientes pares de funciones :

33. $f(x) = \dfrac{3}{x}$; $g(x) = 3 + \dfrac{2}{x^2}$

34. $f(x) = 3\cdot x^2 + 2$; $g(x) = 2\cdot x - 1$

35. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

36. $f(x) = 4\cdot x^2 - 1$; $g(x) = \dfrac{2}{x}$

37. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $g(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$

38. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3\cdot x - 4}$; $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

39. Hallar $f(x+1)$ si $f(x-1) = x^2$

40. Hallar $(f \circ f \circ f)$ si $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$

Encontrar la función inversa de la función $f(x)$ si es que existe .

41. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{x}}$

42. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

43. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

44. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

45. $f(x) = |x - 2|$

46. $f(x) = x^2 - 1$

Usar la gráfica de $f(x) = x^2$ para graficar las funciones siguientes :

47. $y = x^2 + 1$

48. $y = x^2 + 1$

49. $y = -(x - 2)^2$

50. $y = (x - 3)^2$

51. $y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$

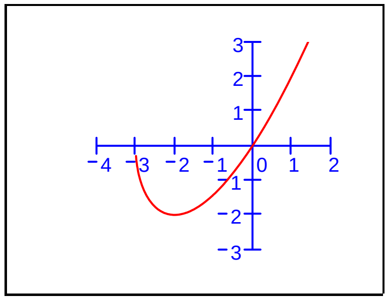
52. $y = (x + 2)^2 + 1$

53. $y = (-x - 3)^2$

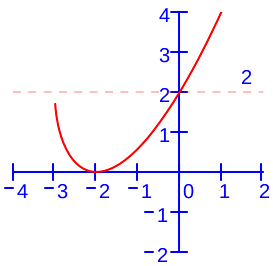
54. $y = (3\cdot x)^2$

Encontrar una expresión algebraica de las funciones mostradas en cada una de las siguientes gráficas, las cuales fueron obtenidas a partir de una trasformación rígida de la gráfica de la función :

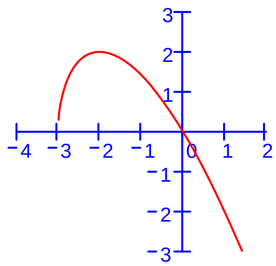
$$f(x) = x\cdot\sqrt{x+3}$$



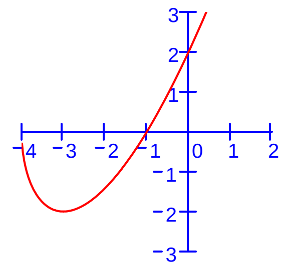
55.



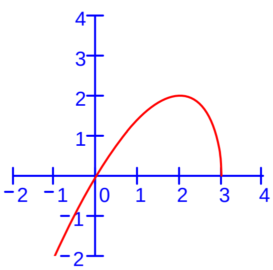
56.



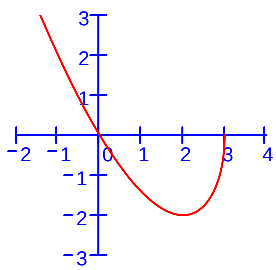
57.



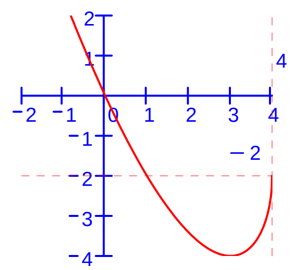
58.



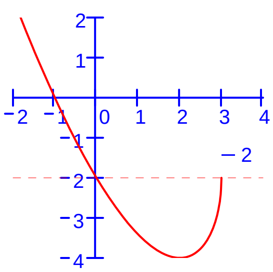
59.



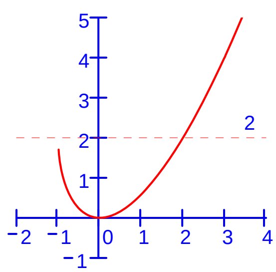
60.



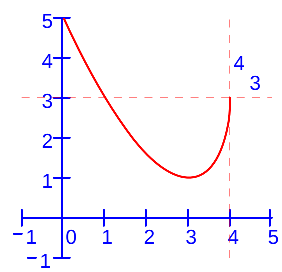
61.



62.



63.



Respuestas Ejercicio 2.1

(Problemas impares)

1. $f(1) = 3$

3. $f(3) = 49$

5. $f\left(a^2\right) = 2\cdot\left(a^2\right)^3 - 3\cdot\left(a^2\right) + 4$

7. $f(a+1) = 2\cdot a^3 + 6\cdot a^2 + 3\cdot a + 3$

9. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1-x}{3+5\cdot x}\right)$

11. $\varphi\left(\frac{3}{5\cdot x}\right) = \frac{3-5\cdot x}{9+25\cdot x}$

13. $\phi(a) + \phi(b) = log\left(\frac{1+a}{1-b}\right) + log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = log\left[\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\cdot\left(\frac{1+b}{1-b}\right)\right]$

$$= log\left(\frac{1+a\cdot b+a+b}{1+a\cdot b-a-b}\right) = log\left[\frac{\left(\frac{1+a\cdot b+a+b}{1+ab}\right)}{\left(\frac{1+a\cdot b-a-b}{1+ab}\right)}\right]$$

$$= log\left[\frac{1+\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)}{1-\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)}\right] = \phi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

15. i) $\varphi(x)\cdot\varphi(y) + \psi(x)\cdot\psi(y) = \left(\frac{a^x+a^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{a^y+a^{-y}}{2}\right) + \left(\frac{a^x-a^{-x}}{2}\right)\cdot\left(\frac{a^y-a^{-y}}{2}\right)$

$$= \left[\frac{a^{(x+y)}+a^{(x-y)}+a^{(-x+y)}+a^{(-x-y)}}{4}\right] + \left[\frac{a^{(x+y)}-a^{(x-y)}-a^{(-x+y)}+a^{(-x-y)}}{4}\right]$$

$$= \frac{a^{x+y}+a^{-(x+y)}}{2}$$

$$= \varphi(x+y)$$

ii) *se resuelve de manera similar y el resultado es* $\psi(x+y)$

17. *impar* : $\boxed{f(-x)} = \frac{1}{2}\cdot\left(a^{-x}-a^{x}\right) = -\left[\frac{1}{2}\cdot\left(a^{x}-a^{-x}\right)\right] = \boxed{-f(x)}$

19. *impar* : $\boxed{f(-x)} = \sqrt{1+(-x)+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)+(-x)^2} = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}$

$$= -\left(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}\right) = \boxed{-f(x)}$$

25. Si $f(x)$ una función cualquiera, siempre es posible escribir : $f(x) = \dfrac{f(x)}{2} + \dfrac{f(x)}{2}$

y si se suma y resta $\dfrac{f(-x)}{2}$ queda : $f(x) = \left(\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}\right) + \left(\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}\right)$

La parte $P(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ es una función par pues: $P(-x) = \dfrac{f(-x)+f[-(-x)]}{2} = P(x)$

La parte $I(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ es una función impar pues: $I(-x) = \dfrac{f(-x)-f[-(-x)]}{2} = -I(x)$

27. El número dentro del radical no debe ser negativo :

$$4 - 2\cdot x^2 \geq 0 \longrightarrow x^2 \leq 2 \longrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \longrightarrow \boxed{-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}}$$

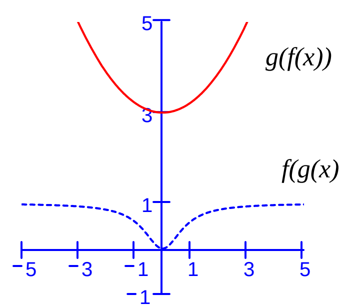
29. El denominador no debe ser cero :

$$\left(10\cdot x^2 - 17\cdot x - 20\right) \neq 0 \longrightarrow (5\cdot x + 4)\cdot(2\cdot x - 5) \neq 0 \longrightarrow \boxed{x \neq \left(-\frac{4}{3}\right)} \; ; \; \boxed{x \neq \left(\frac{5}{2}\right)}$$

31. El radicando del denominador debe ser positivo y diferente de cero :

$$\left(30\cdot x^2 - 2\cdot x - 12\right) > 0 \longrightarrow 2\cdot(5\cdot x + 3)\cdot(3\cdot x - 2) > 0 \longrightarrow \boxed{x < \frac{-3}{5}} \; ; \; \boxed{\frac{2}{3} < x}$$

33. $f(x) := \dfrac{3}{x}$; $g(x) := 3 + \dfrac{2}{x^2}$



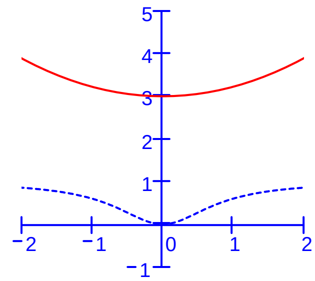
	Dominio	Rango
f(x)	$(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$
g(x)	$(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$	$(3, \infty)$

Por lo tanto están bien definidas $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$ y $(g \circ g)$ y son:

$$f(g(x)) = \frac{3\cdot x^2}{3\cdot x^2 + 2} \; ; \; g(f(x)) = \left(3 + \frac{2}{9}\cdot x^2\right) \; ; \; g(g(x)) = \frac{11\cdot x^2 + 6}{3\cdot x^2 + 2} \; ; \; f(f(x)) = x$$

35. $f(x) := x^2 + 1$; $g(x) := \sqrt{x^2 - 1}$

	Dominio	*Rango*
f(x)	$(-\infty, \infty)$	$[1, \infty)$
g(x)	$(-\infty, -1], [1, \infty)$	$[0, \infty)$

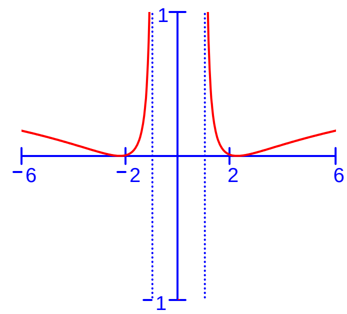


Por lo tanto solo existen $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y $(f \circ f)$ y son:

$f(g(x)) = x^2$; $g(f(x)) = \sqrt{x^4 + 2 \cdot x}$; $f(f(x)) = \left(x^2 + 1\right)^2 + 1$

37. $f(x) := \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $g(x) := \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$

	Dominio	*Rango*
f(x)	$(-\infty, -1], [1, \infty)$	$[0, \infty)$
g(x)	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

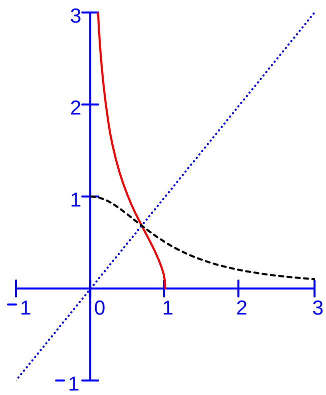


Por lo tanto solo existe $(g \circ f)$ y es : $g(f(x)) = \left(\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 1}}} - 1\right)^2$

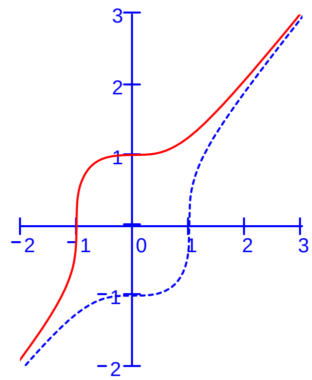
39. Si $f(x - 1) = x^2$, haciendo $w = x - 1$ se obtiene : $f(w) = (w + 1)^2$ o bien $f(x) = (x + 1)^2$ ya que a la variable independiente de una función se le puede llamar con cualquier nombre. Por lo tanto :

$$f(x + 1) = [(x + 1) + 1]^2 = x^2 + 4 \cdot x + 4$$

41



43



$$f\cdot(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}} \; ; \quad \begin{bmatrix} Dom & 0 < x \le 1 \\ Rango & (0,\infty) \end{bmatrix}$$

$$f\cdot(x) = \sqrt[3]{x^3+1} \; ; \quad \begin{bmatrix} Dom & (0,\infty) \\ Rango & (0,\infty) \end{bmatrix}$$

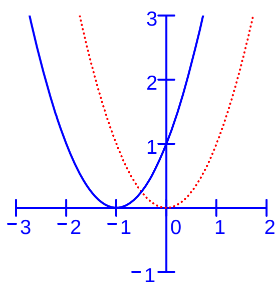
$$f^{-1}\cdot(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right) ; \quad \begin{bmatrix} Dom & (0,\infty) \\ Rango & 0 < x \le 1 \end{bmatrix}$$

$$f^{-1}\cdot(x) = \sqrt[3]{x^3-1} \; ; \quad \begin{bmatrix} Dom & (0,\infty) \\ Rango & (0,\infty) \end{bmatrix}$$

45. *No tiene inversa porque no es biyectiva .*

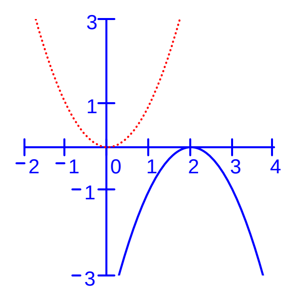
47. $f(x) = (x+1)^2$

Desplazamiento horizontal de -1 :

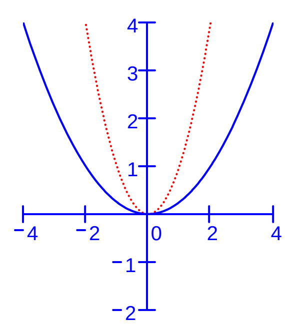


49. $f(x) = -(x-2)^2$

Desplazamiento horizontal de $+2$
y reflexión respecto al eje X .



51. $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$ Contracción en la escala vertical .



55. Desplazamiento vertical de $+2$: $f(x)+2 = x\cdot\sqrt{x+3}+2$

57. Desplazamiento horizontal de -1 : $f(x+1) = (x+1)\cdot\sqrt{x+4}$.

59. Reflexión respecto al eje Y : $f(-x) = -x\cdot\sqrt{-x+3}$

61. Reflexión en el eje Y junto con un desplazamiento vertical de -2: $f(-x)-2 = -x\cdot\sqrt{-x+3}-2$

63. Reflexión respecto al eje Y , desplazamiento horizontal de $+1$, desplazamiento vertical de $+3$:

$$f(-x+1)+3 = (-x+1)\cdot\sqrt{-x+4}+3$$

2.8 ***Funciones algebráicas*** . Se les llama así a :
i) *los polinomios*
ii) *las funciones racionales*
iii) *las funciones irracionales*

2.8 a) *POLINOMIOS* . La forma general de un polinomio es :

$$P(x) = a_o + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots\ldots + a_n \cdot x^n \qquad (2.10)$$

donde : a_0 , a_1, a_2 , . . ., a_n son números constantes llamados *coeficientes*

a_n se llama *coeficiente líder*

a_0 se llama *término constante*

n es el *grado* del polinomio y debe ser ***un número entero positivo*** .

Ejemplo 10. Las siguientes funcione son polinomios :

$$P(x) = 4 \cdot x^5 + 3 \cdot x^3 - x^2 - \sqrt{6} \cdot x$$

grado : 5

coeficientes: $a_0 = 0$, $a_1 = -\sqrt{6}$, $a_2 = -1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 0$ y $a_5 = 4$

(*nótese que los términos nulos del polinomio tienen coeficiente cero*)

coeficiente líder : 4

término constante: 0

$$P(x) = -3 + 2^{-1} \cdot x - 3 \cdot x^2 - x^3$$

grado : 3

coeficientes: $a_0 = -3$, $a_1 = 2^{-1}$, $a_2 = -3$, $a_3 = -1$

coeficiente líder : -1

término constante: -3

$$P(x) = \sqrt[3]{2} + (3 \cdot \pi) \cdot x^4$$

grado : 4

coeficientes: $a_0 = \sqrt[3]{2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 3 \cdot \pi$

(*nótese que las potencias de los coeficientes no tienen que ser enteros positivos*)

coeficiente líder : $3 \cdot \pi$

término constante: $\sqrt[3]{2}$

En cambio las siguientes funciones no son polinomios :

$P(x) = 2 + 4 \cdot x^{-2} + 5 \cdot x^3$; [*porque tiene una potencia negativa en el* 2^o *término*]

$P(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot x - 3\sqrt[3]{x} + x^4$; [*tiene una potencia fraccionaria en el* 3^{er} *término*]

$P(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + 4 \cdot x^2 - \dfrac{3}{8} \cdot \sqrt{x^3}$; [*tiene una potencia fraccionaria y una entera negativa*]

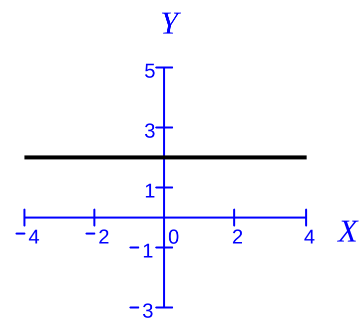
Para que una expresión multinomial sea en realidad un polinomio, *debe contener sólo potencias enteras y positivas de su(s) variable(s)*.

De la expresión general (2.10) para un polinomio $P(x)$, es evidente que no hay restricciones en los posibles valores de su variable independiente x, que limiten su dominio natural , dado que para calcular los valores de la función $P(x)$ sólo se involucran sumas , productos y potencias de números reales, es decir *el dominio de cualquier polinomio es todo el conjunto de los números reales* : el intervalo $(-\infty, \infty)$. Se deduce que su rango también es el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Consideremos ahora algunos de los primeros polinomios.

Polinomio de grado cero o ***función constante*** .

$$P_0(x) = a_0 \qquad (2.11)$$

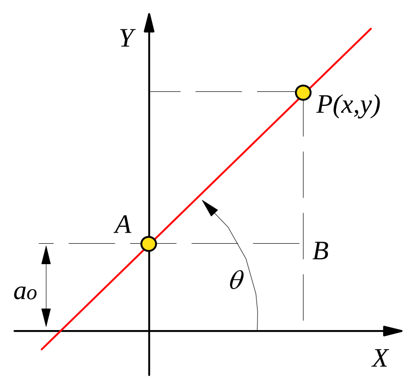


Puesto que para cualquier valor de x ésta función siempre tiene el mismo valor a_0 , se concluye que representa una *línea recta horizontal* en el plano XY .

Por ejemplo en la gráfica de la derecha se muestra el polinomio $f(x) = 2$

Polinomio de grado uno o ***función lineal*** .

$$P_1(x) = a_0 + a_1 \cdot x \qquad (2.12)$$



Representa una línea recta en el plano XY .

La constante a_0 se llama *intercepto al origen* .

Es el punto donde la recta corta al eje Y , es decir es el valor del polinomio en $x = 0$: $f(0) = a_0 + a_1 \cdot (0) = a_0$.

La constante a_1 se llama *pendiente de la línea recta* y representa una medida de la inclinación de la recta respecto al eje horizontal X puesto que . . .

$$a_1 = \frac{P(x) - a_0}{x} = \frac{BP}{AB} = tan(\theta) \qquad (2.13)$$

Dado que la función tangente $tan(\theta)$ es positiva si $0 < \theta < 90°$ y negativa si $90° < \theta < 180°$, se concluye que :

las líneas rectas con pendiente positiva están inclinadas hacia la derecha y las de pendiente negativa están inclinadas hacia la izquierda

CASOS ESPECIALES

- ***recta vertical*** . Tiene siempre el mismo valor para la abscisa x y una pendiente infinita porque $tan(90°) = \infty$. En consecuencia su ecuación tiene la forma general:

$$x = constante \qquad (2.14)$$

- Cuando el intercepto al origen vale cero : $a_0 = 0$, la ecuación de la recta queda $P(x) = a_1 \cdot x$ ó $y = a_1 \cdot x$. La recta pasa por el origen de coordenadas (puesto que que $P(0) = 0$) . Se dice entonces que las variables x e y *son directamente proporcionales entre si* .

- Dos ***rectas paralelas*** tienen la misma pendiente, es decir, si $y_1 = m_1 \cdot x + b_1$; $y_2 = m_2 \cdot x + b_2$ son las ecuaciones de dos rectas que son paralelas, entonces . . .

$$m_1 = m_2 \qquad (2.15)$$

- Dos ***rectas perpendiculares*** se cortan en ángulo recto (a 90°), es decir, si $y_1 = m_1 \cdot x + b_1$; $y_2 = m_2 \cdot x + b_2$ son las ecuaciones de dos rectas que son perpendiculares, entonces sus pendientes se relacionan por :

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \qquad (2.16)$$

Una demostración :

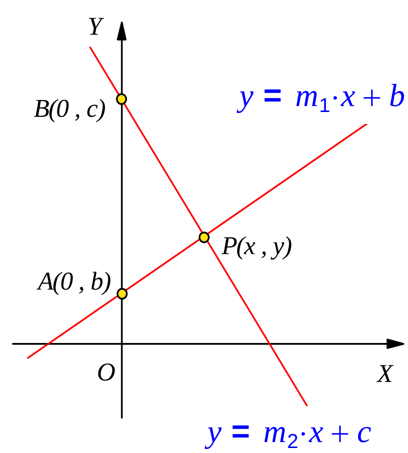
Consideremos las dos rectas representadas en la figura, con interceptos al origen b y c , de las cuales podemos escribir:

$$m_1 = \frac{y-b}{x} \qquad ; \qquad m_2 = \frac{y-c}{x}$$

Además, si las rectas son perpendiculares entre si, el triángulo APB es rectángulo y se debe cumplir el teorema de Pitágoras, esto es . . .

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (PB)^2$$

Calculando esas distancias . . .



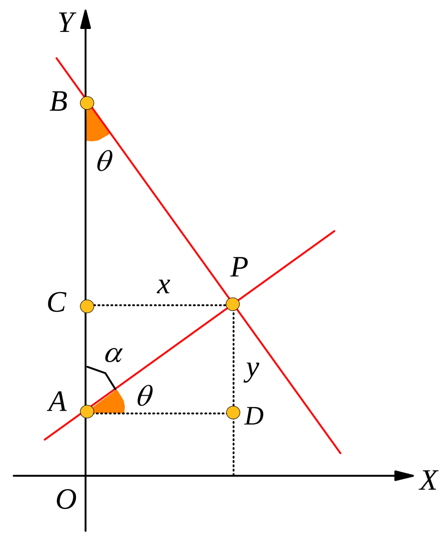
$$(c-b)^2 = \left[(x-0)^2 + (y-b)^2 \right] + \left[(x-0)^2 + (y-c)^2 \right]$$

Dividiendo esta ecuación por x^2 , resulta

$$\left(\frac{c-b}{x}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{y-b}{x}\right)^2 \right] + \left[1 + \left(\frac{y-c}{x}\right)^2 \right]$$

es decir : $(m_1 - m_2)^2 = \left[1 + (m_1)^2 \right] + \left[1 + (m_2)^2 \right]$. Desarrollando esta igualdad y eliminando términos semejantes, finalmente se obtiene : $m_1 \cdot m_2 = -1$

Otra demostración :



En la figura de la derecha se considera dos rectas perpendiculares entre si que se intersectan en el punto $P(x, y)$ y tienen interceptos al origen en los puntos $B(0, b_1)$ y $A(0, b_2)$

Por ser los triángulos APB y PDA rectos y semejantes, se deduce que los ángulos $\angle PAD$ y $\angle PBC$ son iguales y por lo tanto . . .

$$\tan(\theta) = \frac{CP}{BC} = \frac{x}{b_1 - y} \qquad \text{para el triángulo } BCP$$

$$\tan(\theta) = \frac{DP}{AD} = \frac{y - b_2}{x} \qquad \text{para el triángulo } ADP$$

Igualando éstas dos expresiones para la tangente se obtiene . . . $\dfrac{x}{b_1 - y} = \dfrac{y - b_2}{x}$ (*)

De la ecuación para la recta que pasa por BP : $y = m_1 \cdot x + b_1$ se obtiene que . . . $b_1 - y = -m_1 \cdot x$

De la ecuación para la recta que pasa por AP : $y = m_2 \cdot x + b_2$ se obtiene que . . . $y - b_2 = m_2 \cdot x$

Por lo tanto, substituyendo éstas expresiones en la ecuación (*) resulta :

$$\frac{x}{-m_1 \cdot x} = \frac{m_2 \cdot x}{x} \qquad \text{es decir . . . } \frac{-1}{m_1} = m_2$$

que es lo que se quería demostrar.

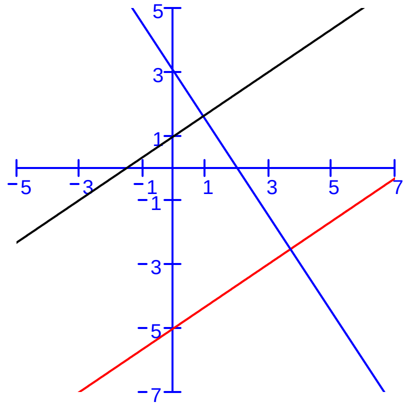
Ejemplo 11. Por comparación con la expresión general $y = m \cdot x + b$, se deduce que las pendientes e interceptos al origen de las siguientes rectas son:

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot x - 5 \quad ; \quad (\text{ pendiente } m_1 = \frac{2}{3} \text{ , intercepto: } b_1 = -5 \text{ })$$

$$y_2 = -\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x + 3 \quad ; \quad (\text{ pendiente } m_2 = -\left(\frac{3}{2}\right) \text{ , intercepto: } b_2 = 3 \text{ })$$

$$y_3 = \frac{2}{3} \cdot x + 1 \quad ; \quad (\text{ pendiente } m_3 = \frac{2}{3} \text{ , intercepto: } b_3 = 1 \text{ })$$

Como se puede apreciar en la figura de la derecha, la pendiente de la primera recta $y_1 = \frac{2}{3} \cdot x - 5$ es positiva (*la recta se inclina hacia la izquierda*) y es también *el inverso negativo* de la pendiente de la segunda recta $y_2 = -\left(\frac{3}{2}\right) \cdot x + 3$, por lo cual éstas dos rectas son en efecto perpendiculares entre si.



En cambio la tercera recta $y_3 = \frac{2}{3} \cdot x + 1$ tiene *la misma pendiente* que la primera, por lo cual estas dos rectas son paralelas.

Ejemplo 12. Si $f(x)$ es una función lineal y además $f(1) = 3$ y $f(-2) = 1$, hallar su ecuación.

Solución : A partir de la forma general para un polinomio de primer grado : $f(x) = a \cdot x + b$, se deben determinar los coeficientes a y b que cumplan con las condiciones del problema, es decir :

$f(1) = 3$ *significa que . . .* $3 = a \cdot (1) + b$

$f(-2) = 1$ *significa que . . .* $1 = a \cdot (-2) + b$

se obtiene asi un sistema de ecuaciones simultáneas:

$$a + b = 3$$
$$-2 \cdot a + b = 1$$

Resolviendo este sistema, resulta $a = \frac{2}{3}$ y $b = \frac{7}{3}$, por lo cual la función lineal buscada es:

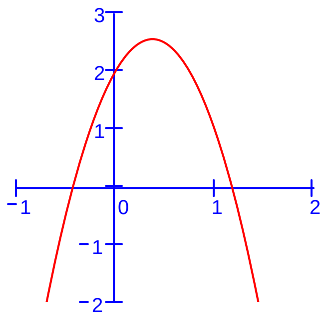
$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{7}{3}$$

que representa una línea recta de pendiente $\frac{2}{3}$ e intercepto al origen $\frac{7}{3}$

Polinomio de grado dos ó ***función cuadrática*** .

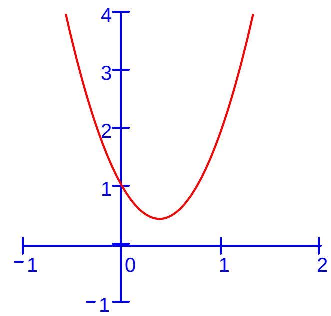
$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \qquad (2.17)$$

Representa una *parábola vertical*.
Éste es un polinomio de grado par y por lo tanto, sus gráficas se extienden "hacia arriba" si el coeficiente líder es positivo: ($a_2 > 0$) ó "hacia abajo" si $a_2 > 0$ como se muestra en los siguientes ejemplos :



$f(x) = 2 + 3 \cdot x - 4 \cdot x^2$

El coeficiente líder es negativo , la curva se extiende desde $-\infty$ a la izquierda hasta $-\infty$ a la derecha



$g(x) = 1 - 3 \cdot x + 4 \cdot x^2$

El coeficiente líder es positivo , la curva se extiende desde ∞ a la izquierda hasta ∞ a la derecha

Los puntos donde una parábola corta al eje X son las soluciones de la ecuación cuadrática $P(x) = 0$, es decir $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$.

Los valores de x que satisfacen una ecuación como ésta se llaman *raíces del polinomio*.

Puede suceder que la curva nunca corte al eje X , en tal caso las raices no serán números reales sino complejos, como ocurre en la gráfica anterior de arriba a la derecha.

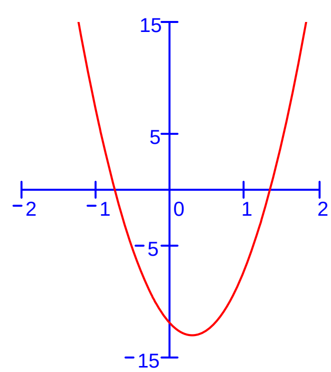
Ejemplo 13. ¿ En qué puntos cruza el eje X la parábola $P(x) = 12 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 12$?

Solución : Igualando a cero la función resulta la ecuación cuadrática:

$$12 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 12 = 0$$

ó

$$(4 \cdot x + 3) \cdot (3 \cdot x - 4) = 0$$



cuando el producto de dos números es cero, al menos uno de ellos debe ser cero, de modo que. . .

$(4 \cdot x + 3) = 0$ implica que $x = \dfrac{-3}{4}$

$(3 \cdot x - 4) = 0$ implica que $x = \dfrac{4}{3}$

que son las raices buscadas.

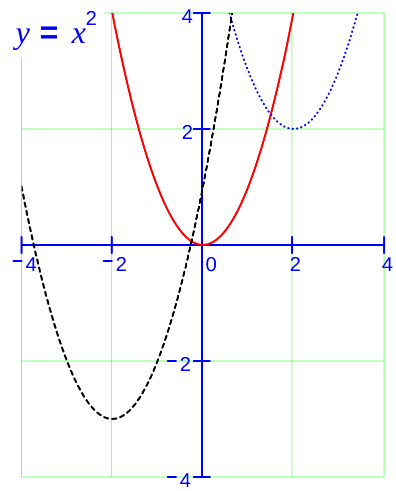
La sencilla ecuación cuadrática $P(x) = a\cdot x^2$ representa la gráfica de una parábola vertical que pasa por el origen de coordenadas .

Esta curva es ***par*** y simétrica respecto al eje Y porque $P(-x) = a\cdot(-x)^2 = a\cdot x^2 = P(x)$

Su ***vértice***, *es decir el punto donde la parábola pasa de decreciente a creciente o viceversa*, se encuentra en el punto $(0,0)$.

La ecuación $y = a\cdot x^2$ se puede transformar mediante una *translación del vértice de la parábola* a otro punto arbitrario (x_0, y_0) del plano XY , con lo cual se obtiene :

$$(y - y_0) = a\cdot(x - x_0)^2$$



Esto representa un *desplazamiento* de la curva sobre el plano XY hacia :

- ***la derecha*** si la constante x_0 es positiva .
- ***la izquierda*** si la constante x_0 es negativa .
- ***arriba*** si la constante y_0 es positiva.
- ***abajo*** si la constante y_0 es negativa .

Ejemplo 14. Graficar el polinomio de 2º grado $P(x) = 3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32$

Solución : Para escribir la función como : $y = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0$ hay que completar el trinomio cuadrado perfecto :

1° *Factorizando el coeficiente de* x^2 *:*

$$3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32 = 3\cdot(x^2 - 6\cdot x) + 32$$

2° *Sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x (3) *:*

$$3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32 = 3\cdot\left[x^2 - 6\cdot x + (3)^2 - (3)^2\right] + 32$$

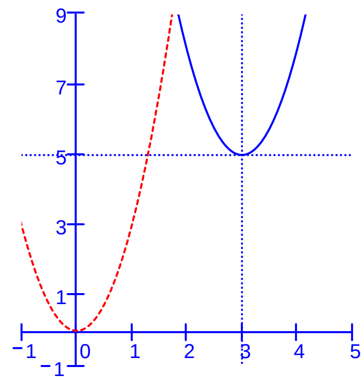
3° *Los tres primeros términos dentro del paréntesis rectangular forman un trinomio cuadrado perfecto (que proviene de desarrollar el cuadrado de un binomio) , asi que factorizando resulta . . .*

$$3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32 = 3\cdot(x - 3)^2 - 3\cdot(3)^2 + 32$$

$$= 3\cdot(x - 3)^2 + 5$$

Por lo tanto, comparando con la forma general $P(x) = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0$, la gráfica de éste polinomio es una parábola vertical que :

- *se extiende hacia arriba* porque su coeficiente líder ($a_2 = 3$) es positivo
- *está desplazada hacia la derecha* porque $x_0 = 3$, es decir, su eje de simetría es la recta vertical $x = 3$
- *está desplazada hacia arriba* porque $y_0 = 5$, es decir tiene su vértice en el punto $(3,5)$.
- *La parábola desplazada no corta al eje X en ningún punto es decir, no tiene raices reales* .



Ejemplo 15. Graficar el polinomio de 2º grado $P(x) = -3\cdot x^2 - 12\cdot x - 9$

Solución : Para escribir la función como : $y = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0$, hay que completar el trinomio cuadrado perfecto :

1° *Factorizando el coeficiente de* x^2 :

$$-3\cdot x^2 - 12\cdot x - 9 = -3\cdot(x^2 + 4\cdot x) - 9$$

2° *Sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x (2) :

$$-3\cdot x^2 - 12\cdot x - 9 = -3\cdot\left[x^2 + 4\cdot x + (2)^2 - (2)^2\right] - 9$$

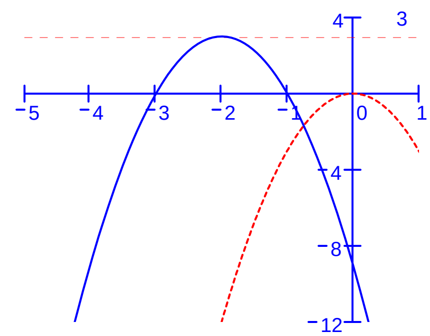
3° *Los primeros tres términos dentro del paréntesis rectangular provienen del desarrollo del cuadrado de un binomio) , asi que factorizando resulta . . .*

$$-3\cdot x^2 - 12\cdot x - 9 = -3\cdot(x + 2)^2 + 3\cdot(2)^2 - 9$$

$$= \boxed{-3\cdot(x + 2)^2 + 3}$$

Comparando éste resultado con la forma general $P(x) = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0$, la gráfica de éste polinomio es una parábola vertical que :

- *se extiende hacia abajo* ($a_2 = -3$)
- *está desplazada hacia la izquierda dos unidades* ($x_0 = -2$)
- *está desplazada hacia arriba tres unidades* ($y_0 = 3$)
- *tiene dos raices reales* porque corta al eje X en dos puntos



Ejemplo 16. Hallar la ecuación de la función cuadrática $f(x)$ si $f(0) = -1$, $f(-1) = 0$, $f(1) = 4$

Solución : Substituyendo los valores de $f(x)$ y de x en la ecuación cuadrática general $P(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, se obtiene:

$f(0) = -1$ implica que : $-1 = a\cdot(0)^2 + b\cdot(0) + c$ ó $c = -1$

$f(-1) = 0$ implica que : $0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c$ ó $a - b + c = 0$

$f(1) = 4$ implica que : $4 = a\cdot(1)^2 + b\cdot(1) + c$ ó $a + b + c = 4$

Resolviendo este sistema de ecuaciones simultáneas, se obtiene como solución :

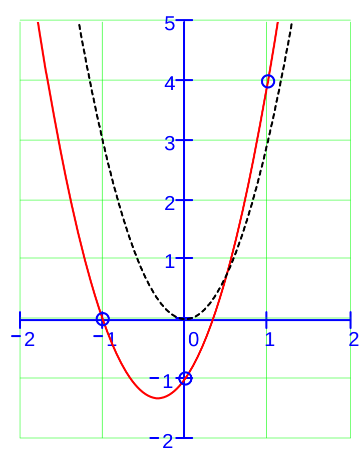
$a = 3$, $b = 2$ y $c = -1$

y la función cuadrática buscada es entonces

$$f(x) = 3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1$$

que se puede rescribir completando el cuadrado perfecto como :

$$f(x) = 3\cdot\left[x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2 - \frac{4}{3}$$



cuya gráfica es idéntica a la de la parábola $y = 3\cdot x^2$ excepto que está desplazada horizontalmente en $\frac{1}{3}$ hacia la izquierda y verticalmente hacia abajo en $\frac{4}{3}$.

Polinomio de grado tres ó ***función cúbica*** . $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$ (2.19)

por ser de grado impar, las gráficas de éste polinomio se extienden desde. . .

− ∞ a la izquierda hasta ∞ a la derecha si el coeficiente líder es positivo ($a_3 > 0$)

∞ a la izquierda hasta −∞ a la derecha si el coeficiente líder es negativo ($a_3 < 0$)

Esto significa que *la gráfica de* $P(x)$ *cruza al eje* X *por lo menos una vez*, y en consecuencia la ecuación $P(x) = 0$ tiene necesariamente por lo menos una raíz real.

Como regla general . . .

Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raiz real.

Ejemplo 17. Graficar los polinomios: $P(x) = \left(3 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6\right) = (x-3) \cdot (3 \cdot x - 2) \cdot (x+1)$

$Q(x) = \left(-6 \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 5\right) = -(2 \cdot x - 5) \cdot \left(3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1\right)$

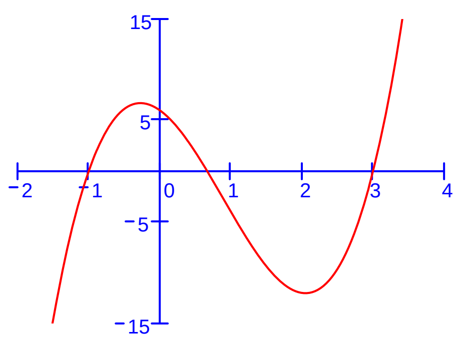
Solución : Las raices de un polinomio se obtienen igualando a cero cada uno de sus factores.
Para $P(x)$ existen tres raices reales :

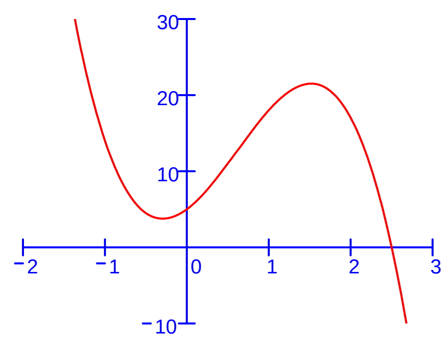
$$(x-3) = 0 \longrightarrow x = 3$$

$$(3 \cdot x - 2) = 0 \longrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$(x+1) = 0 \longrightarrow x = -1$$

Dado que el factor cuadrático $3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1 = 0$ no tiene raices reales, $Q(x)$ existe sólo una raiz real : $2 \cdot x - 5 = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{2}$.





La gráfica de $P(x)$ *se extiende desde* $-\infty$ *a la izquierda hasta* $+\infty$ *a la derecha porque el coeficiente líder es positivo.*

La gráfica de $Q(x)$ *se extiende desde* $+\infty$ *a la izquierda hasta* $-\infty$ *a la derecha porque el coeficiente líder es negativo .*

2.8 b) *FUNCIONES RACIONALES* .

Asi como un número racional es el cociente de dos números enteros, *una función racional es el cociente de dos funciones enteras o polinomios* y tienen la forma general :

$$f(x) = \frac{a_o + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots\dots\dots + a_n \cdot x^n}{b_o + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \dots\dots\dots + b_m \cdot x^m} = \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) \qquad (2.20)$$

donde n y m son los grados de los polinomios. Si $n < m$, la función racional se llama *propia* y si $n \geq m$ es una función racional *impropia* .

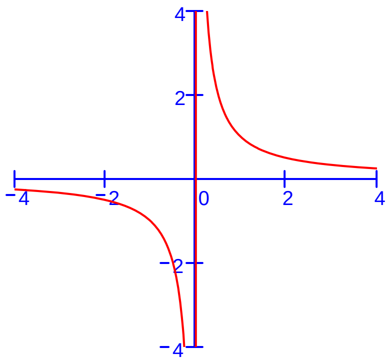
En toda función racional impropia se puede realizar la división de polinomios y expresarla como la suma de un polinomio cociente $C(x)$ de grado $(n - m)$ y un polinomio residuo $R(x)$ que necesariamente es una función racional propia, pues su grado es menor que el del polinomio divisor $Q(x)$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

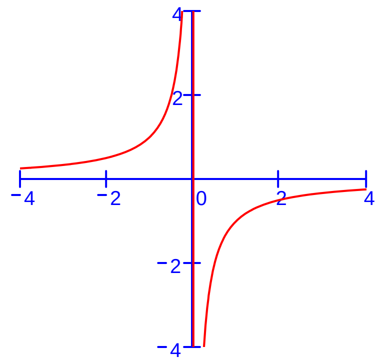
El dominio de una función racional es todo el conjunto de los números reales con excepción de aquellos para los cuales se anula el polinomio del denominador , que son las raíces de la ecuación $Q(x) = 0$.

La función racional $f(x) = \frac{a_0}{b_1 \cdot x}$, o bién $y = \frac{c}{x}$, *expresa una dependencia inversamente proporcional entre* x *e* y .

Como se puede apreciar en las siguientes gráficas, la función no está definida en $x = 0$ (la raiz del polinomio denominador) .



$f(x) = \frac{c}{x}$; $c > 0$



$f(x) = \frac{c}{x}$; $c < 0$

La gráfica de una función racional está determinada por las raices del polinomio numerador y del polinomio denominador, como se ilustra en el siguiente ejemplo .

Ejemplo 18. Graficar la función racional : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\cdot x - 3}{x^3 - x^2 - 6\cdot x}$

Solución : Factorizando los polinomios en el numerador y el denominador, se obtiene . . .

$$f(x) = \frac{(x+3)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-3)}$$

por lo que las raices del denominador son :

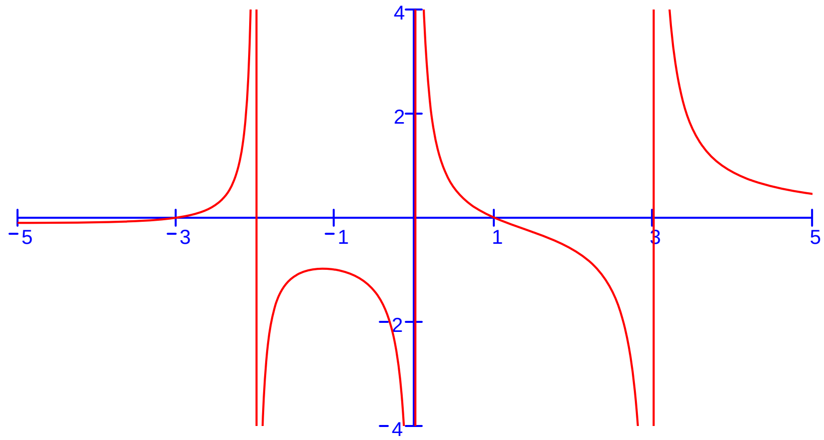
$$(x-3) = 0 \longrightarrow x = 3$$
$$(x+2) = 0 \longrightarrow x = -2$$
$$(x-0) = 0 \longrightarrow x = 0$$

la función racional no está definida entonces para éstos valores de x dado que implican una división por cero.
Las raices del numerador : $x = -3$ y $x = 1$ y las del denominador , determinan los intervalos sobre la recta numérica real (el eje X) en los cuales la función racional es positiva ó negativa *dependiendo del signo que tenga cada factor en de cada uno de esos intervalos*, como se indica en la siguiente tabla :

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$(x+3)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$(x+2)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
x	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$(x-1)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x-3)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\dfrac{(x+3)\cdot(x-1)}{x\cdot(x+2)\cdot(x-3)}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(-)(-)} = -$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(-)(-)} = +$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)(-)} = -$	$\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)(-)} = +$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)(+)(-)} = -$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)(+)(+)} = +$

Cuando x se aproxima a las raices del denominador ya sea por la derecha o por la izquierda, la función ***crece sin límite*** *(se dice que tiende al infinito)* y toma valores muy grandes positivos (ó negativos) . Este comportamiento se denota por el símbolo: $f(x) \longrightarrow \pm\infty$

Del signo de la función en cada intervalo, de sus raices y su comportamiento cerca de las raices del denominador, se deduce que la gráfica de ésta función racional es entonces como sigue :



2.8 c) *FUNCIONES IRRACIONALES*.

Estas funciones tienen la forma general de un polinomio o de una función racional; sin embargo, contienen uno ó más términos donde *la variable independiente aparece elevada a una potencia fraccionaria.*.

Dado que toda potencia fraccionaria equivale a un radical, una de las condiciones que limitan el dominio de una función irracional es que las expresiones radicales de orden par deben contener radicandos que representen cantidades positivas, con el fin de que se obtengan números reales.

Ejemplo 19. Sean las funciones $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $g(x) = \dfrac{3\cdot x^2 + 1}{\sqrt{3 - 2\cdot x}}$, $h(x) = \dfrac{2\cdot\sqrt{x+4} - x^2}{\sqrt{(x+3)^3}}$

Determinar sus dominios.

Solución : La función $f(x)$ posee un radical de orden par : $\sqrt{x}$ y por lo tanto, para que $f(x)$ sea un número real, el radicando debe ser positivo, esto es $x \geq 0$, es decir, el dominio de ésta función es el intervalo de números reales positivos $[0, \infty)$.

- La función $g(x)$ tiene un radical de orden par : $\sqrt{3 - 2\cdot x}$ y por lo tanto, para que $g(x)$ sea un número real, el radicando debe ser positivo: $3 - 2\cdot x > 0$, es decir, el dominio de ésta función es el intervalo $x < \frac{3}{2}$ (Nótese que no se incluye el valor $\frac{3}{2}$ pues implica dividir por cero).
- La función $h(x)$ tiene dos radicales de orden par : $\sqrt{x+4}$ y $\sqrt{(x+3)^3}$, por lo tanto, para que $h(x)$ sea un número real, ambos radicandos debe ser positivos, es decir se deben cumplir las dos condiciones :

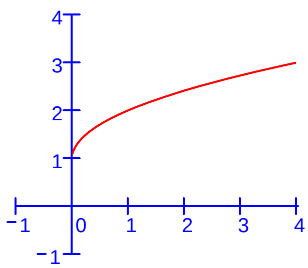
$$x + 4 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad (x+3)^3 > 0 \;.$$

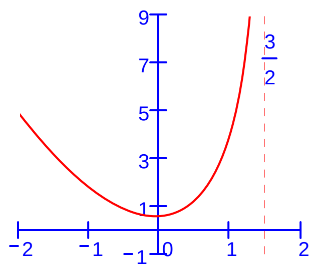
es decir . .

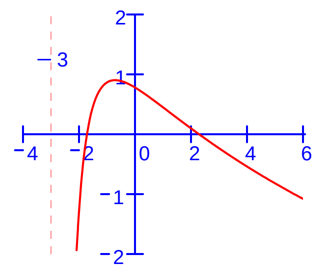
$$-4 \leq x \qquad \text{y} \qquad -3 < x$$

de modo que ambas se cumplen solo si $-3 < x$. Este es el dominio de $h(x)$.

En las siguientes gráficas se ilustran éstas funciones . . .







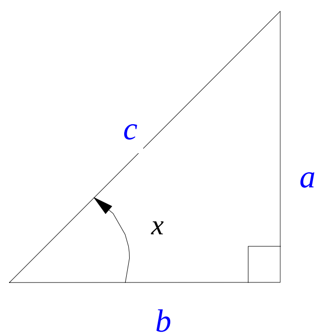
2.9 ***Funciones trascendentes elementales*** .

Por la naturaleza de su definición las funciones matemáticas básicas se clasifican como sigue :

NOMBRE		NOTACIÓN	COMENTARIO
Función Potencia		$f(x) = x^n$	n es una constante real de cualquier valor
Función exponencial		$f(x) = a^x$	b es un constante positiva pero no uno $(b \neq 1)$
Función logaritmo		$f(x) = log_a(x)$	a es un constante positiva pero no uno $(a \neq 1)$
Funciones Trigonométricas	***seno***	$f(x) = sen(x)$	Razón del cateto opuesto a la hipotenusa en un triángulo rectángulo
	coseno	$f(x) = cos(x)$	Razón del cateto adyacente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo
	tangente	$f(x) = tan(x)$	Razón del cateto opuesto al cateto adyacente en un triángulo rectángulo
Funciones Trigonométricas Inversas	***arco seno***	$f(x) = arcsen(x)$	Función inversa del seno : *arcsen (sen(x)) = x*
	arco coseno	$f(x) = arccos(x)$	Función inversa del coseno: *arccos (cos(x)) = x*
	arco tangente	$f(x) = arctan(x)$	Función inversa de la tangente: *arctan (tan(x)) = x*

Sólo las funciones trigonométricas ***seno*** *y* ***coseno*** *son en realidad fundamentales, puesto que en términos de ellas se definen todas las demás* como son la función tangente y las *funciones trigonométricas recíprocas* respectivas. Como se ilustra en el siguiente esquema . . .

.

	FUNCIONES TRIGONOMETRICAS FUNDAMENTALES	FUNCIONES TRIGONOMETRICAS RECIPROCAS
	*Seno:* $sen(x) = \left(\frac{a}{c}\right)$	*Cosecante:* $csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$
	Coseno: $cos(x) = \left(\frac{b}{c}\right)$	*Secante:* $sec(x) = \frac{1}{cos(x)}$
	Tangente: $tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$	*Cotangente:* $cot(x) = \frac{1}{tan(x)}$

De ésta manera , en términos de las funciones trigonométricas recíprocas, quedan definidas también las funciones:

arco cosecante $\qquad arccsc(x) = arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad$ *Función inversa de la cosecante*

arco secante $\qquad arcsec(x) = arccos\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad$ *Función inversa de la secante*

arco cotangente $\qquad arccot(x) = arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad$ *Función inversa de la cotangente*

Ejemplo 20. Demostrar que $arccsc(x) = arcsen\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución : Sea $y = arccsc(x)$, entonces por la definición de la función inversa se sigue que . . .

$$csc(y) = csc(arccsc(x)) = x$$

tomando el recíproco de cada término queda :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{csc(y)}$$

y por ser el seno la función trigonométrica recíproca de la cosecante, resulta :

$$\frac{1}{x} = sen(y)$$

tomando ahora la función inversa del seno en ambos miembros se obtiene . . .

$$arcsen\left(\frac{1}{x}\right) = arcsen(sen(y))$$

$$arcsen\left(\frac{1}{x}\right) = y$$

Como se había supuesto que $y = arccsc(x)$, entonces ambas expresiones para y son iguales y queda demostrada la identidad : $\boxed{arcsen\left(\frac{1}{x}\right) = arccsc(x)}$.

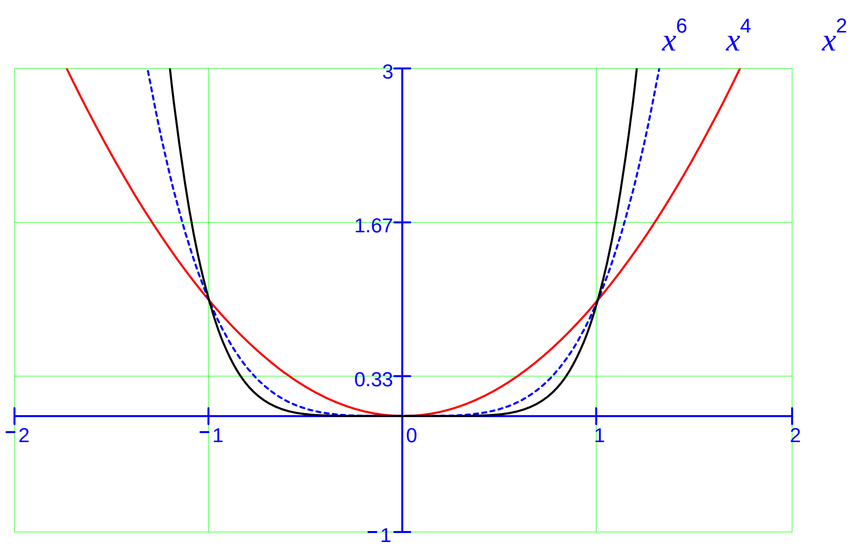
Las otras identidades se demuestran de una manera similar a ésta.

2.10 *FUNCIÓN POTENCIA* $\boxed{f(x) = x^n}$ (2.21)

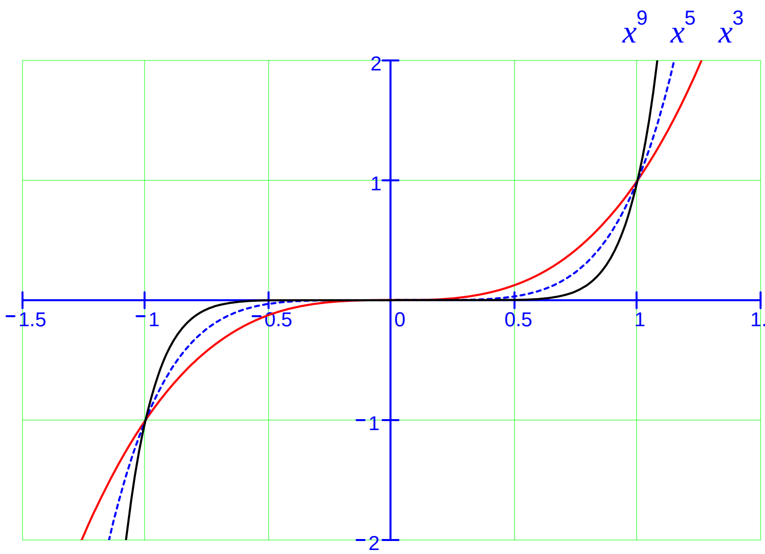
caso I : $n > 0$

Si el exponente n *es un número entero positivo*, toda potencia entera positiva de un número real es un número real. entonces $f(x)$ no tiene restricciones en su dominio, el cual es por lo tanto todo el conjunto de números reales : $(-\infty, \infty)$.

Cuando además n *es **par**,* estas funciones *siempre son positivas, es decir su rango es* $[0, \infty)$ *y **todas** ellas pasan por los puntos* $(-1, 1)$ *y* $(1, 1)$.

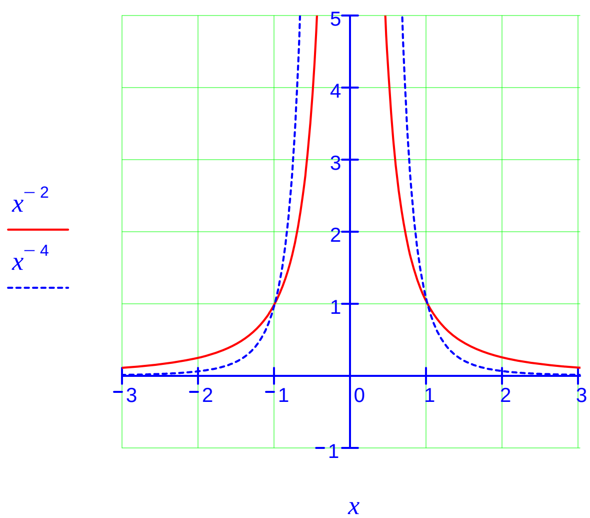


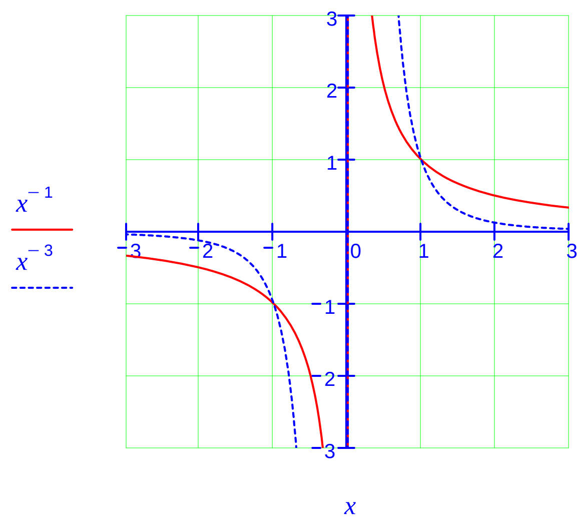
Cuando además n *es* ***impar,*** estas funciones por ser potencias impares de números reales, son negativas para valores x negativos y positivas para valores positivos de x . Su rango es $(-\infty, \infty)$
Todas las gráficas pasan por los puntos $(-1,-1)$ y $(1,1)$.



caso II : $n < 0$: $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x^n}}$

Estas funciones están bien definidas para cualquier valor de x excepto $x = 0$, porque en ése valor se implica una división por cero. Se ilustran algunas de ellas en las siguientes gráficas :





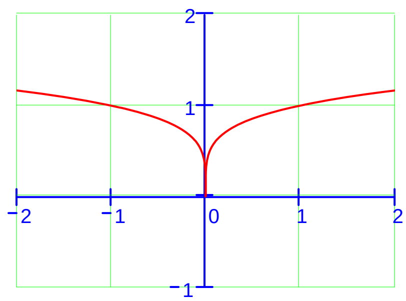
Para n par negativo las funciones potencia tienen el rango $(0, \infty)$ *. Todas las gráficas pasan por los puntos* $(-1,1)$ *y* $(1,1)$

Para n impar negativo las funciones potencia tienen el rango $(-\infty, \infty)$ *. Todas las gráficas pasan por los puntos* $(-1,-1)$ *y* $(1,1)$

caso III:* n *es racional . Cuando el exponente n es el cociente de dos números enteros , la función potencia es .

$$f(x) = x^n = x^{\frac{p}{q}} = \boxed{\sqrt[q]{x^p}}$$

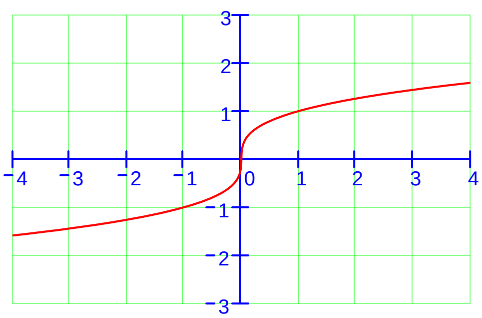
Por lo tanto, el dominio de $f(x)$ queda determinado por la condición de que *el radicando* x^p *debe ser un número positivo cuando el índice* q *del radical es un número par*, como se ilustra en los siguientes ejemplos



$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

Es la raíz impar de un número positivo, la cual siempre es real, por lo tanto su dominio es $(-\infty, \infty)$ *y su rango es el intervalo* $[0, \infty)$ *puesto que la función nunca toma valores negativos .*

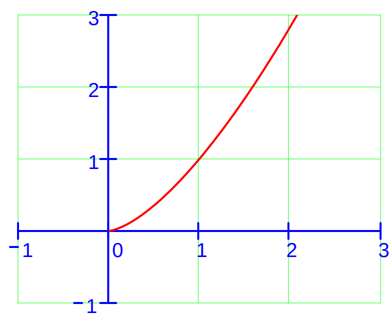
En general, siempre que $n < 1$ *, la función* <u>*crece más lentamente*</u> *que su variable independiente .*



$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

Es una raíz impar de un número real, la cual siempre es real, y puede ser positiva o negativa .
Tanto el dominio como el rango de esta función es el intervalo $(-\infty, \infty)$.

En éste ejemplo $n < 1$ *por lo cual , la función* <u>*crece más lentamente*</u> *que su variable independiente , excepto si* x *es muy cercana a cero .*



$$f(x) = \sqrt{x^3}$$

Es una raíz par,por lo tanto el dominio de esta función solamente puede ser el intervalo $[0, \infty)$ *. El rango es un número real y sólo puede ser positivo..*
En éste ejemplo $n > 1$ *por lo cual , la función* <u>*crece más rápidamente*</u> *que su variable independiente , excepto si* x *es muy cercana a cero .*

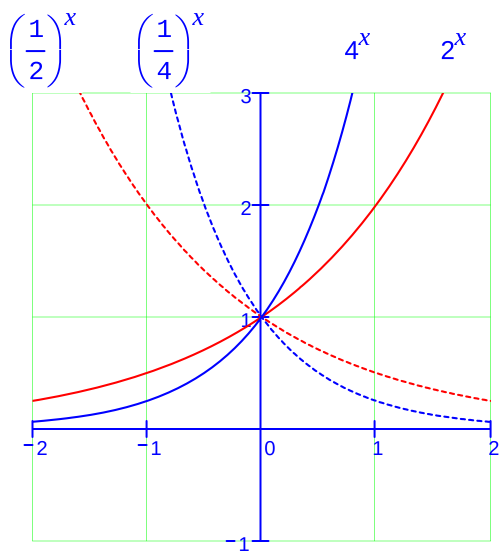
2.11 FUNCION EXPONENCIAL . $f(x) = a^x$ (2.22)

Esta función queda definida solamente para una *base* positiva ($a > 0$) y distinta de la unidad ($a \neq 1$) .
El *exponente* x puede ser cualquier número real

La función exponencial ***siempre es positiva*** puesto que $a > 0$, esto significa que su rango es el intervalo $(0, \infty)$.
Su dominio es el conjunto todos de números reales.
Además si . . .

- $a > 1$ entonces a^x *es siempre creciente* .
  Crece más rápidamente si a es grande y tiende a cero si x tiende al infinito negativo.

- $0 < a < 1$ entonces a^x *es siempre decreciente* . Disminuye cada vez más rápido si a es más pequeña y tiende a cero si x tiende al infinito positivo .



Como se ilustra en la figura de la derecha , *todas las curvas de ésta función pasan por el punto* $(0,1)$ dado que $a^0 = 1$, sea cual sea el valor del número real a .

La función exponencial frecuentemente se utiliza para describir fenómenos de crecimiento de poblaciones de bacterias o de personas, corrientes eléctricas , dispersión de enfermedades, rumores etc.

2.12 FUNCION LOGARITMO . $f(x) = log_a(x)$ (2.23)

Esta función queda definida solamente para una constante base que sea positiva $(a > 0)$ y distinta de la unidad $(a \neq 1)$. El número x puede ser cualquier número real .
En particular cuando la base a es . . .

- el número 10 , la función $log_{10}(x)$ se llama *logaritmo común o de Briggs* y se puede escribir simplemente como $log(x)$.
- el número irracional $e = 2.71828183...$, la función $log_e(x)$ se llama *logaritmo natural o de Napier* y se escribe como convencionalmente como : $ln(x)$.

Esta es la *función inversa* de la función exponencial , es decir :

$$f\left[f^{-1}(x)\right] = a^{log_a(x)} = x \quad \text{y} \quad f^{-1}(f(x)) = log_a\left(a^x\right) = x$$

porque hace la operación opuesta a tal función . En otras palabras :

$$a^x = y \quad \text{si y solo si} \quad x = \log_a(y)$$

Asi que su dominio es el rango de a^x : el intervalo $(0, \infty)$ y su rango es el dominio de a^x : el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Los logaritmos simplifican las operaciones algebraicas, dado que mediante ellos un producto queda transformado en una suma , un cociente se transforma en una diferencia y una potencia se transforma en un simple producto .

De esta manera, si alguna expresión algebráica resulta difícil de evaluar directamente , se puede calcular su logaritmo , realizar las operaciones y transformar de nuevo el resultado obtenido mediante la función inversa (la exponencial) .

2.12 a) PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

I. *" El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores "*

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

II. *" El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del numerador y del denominador "*

$$\log_a \cdot \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a \cdot (x) - \log_a \cdot (y)$$

III. *" El logaritmo de una potencia es el producto de la potencia por el logaritmo de la base "*

$$\log_a\left(x^n\right) = n \cdot \log_a(x)$$

IV *" El logaritmo de la unidad en cualquier base siempre es cero porque todo número elevado a la potencia cero vale uno:* $a^0 = 1$ *"*

$$\log_a(1) = 0$$

V. *" El logaritmo de la base en la base misma siempre es uno,porque todo número elevado a la uno es igual a si mismo:* $a^1 = a$ *."*

$$\log_a(a) = 1$$

VI. *" Los logaritmos de un número* x *en dos bases* a *y* b *distintas, sólo difieren por un factor constante, que es el logaritmo de la base anterior* (b) *en la nueva base* (a) *"*

$$\log_a \cdot (x) = \left[\log_a \cdot (b)\right] \cdot \log_b \cdot (x)$$

Estas propiedades se fundamentan en la función exponencial y las leyes de los exponentes. Por ejemplo :

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD I

Sean : $u = log_a \cdot (x) \longrightarrow x = a^u$ (*por ser funciones inversas*)

$w = log_a \cdot (y) \longrightarrow y = a^w$

Entonces . . .

$$x \cdot y = \left(a^u\right) \cdot \left(a^w\right) = a^{u+w}$$ (*por las leyes de los exponentes*)

Tomando ahora logaritmos de base a en ambos miembros de ésta última igualdad queda :

$$log_a \cdot (x \cdot y) = log_a \cdot \left(a^{u+w}\right) = u + w$$ (*por ser la funciones inversas*)

Substituyendo ahora las expresiones iniciales para u y w se obtiene la propiedad buscada :

$$log_a \cdot (x \cdot y) = log_a \cdot (x) + log_a \cdot (y)$$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD VI

Sea $z = log_b \cdot (x) \longrightarrow x = b^z$ (*por ser la funciónes inversas*)

Tomando ahora logaritmos de base a en ambos miembros de ésta última igualdad resulta :

$$log_a(x) = log_a\left(b^z\right)$$

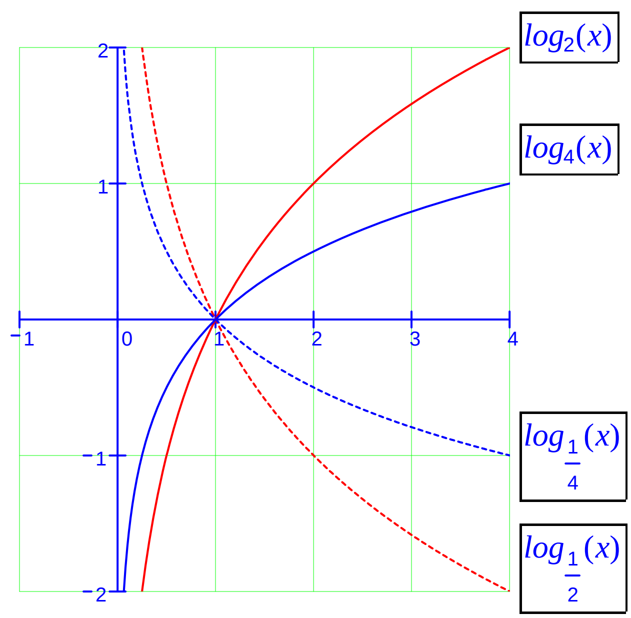
$$= z \cdot log_a(b)$$ (*por la la propiedad III*)

Substituyendo z de la expresión inicial , finalmente se obtiene que . . .

$$log_a(x) = \left[log_b \cdot (x)\right] \cdot \left[log_a \cdot (b)\right] .$$

Se deja como ejercicio demostrar las demás propiedades.
La curva de una función logaritmo depende del valor de su base .

Cuando $a > 1$:
la función logaritmo es siempre creciente, lo opuesto a la función exponencial. La curva logarítmica crece más rápidamente para valores menores de la base, y además tiende $-\infty$ si x se aproxima al cero por la derecha pero tiende a $+\infty$ si x tiende a infinito.



Cuando $0 < a < 1$:
entonces la función logaritmo *es siempre decreciente* .
La curva logarítmica disminuye más rápidamente para valores *mayores* de la base y además tiende a $+\infty$ si x se aproxima al cero por la derecha pero tiende a $-\infty$ si x aumenta sin límite .

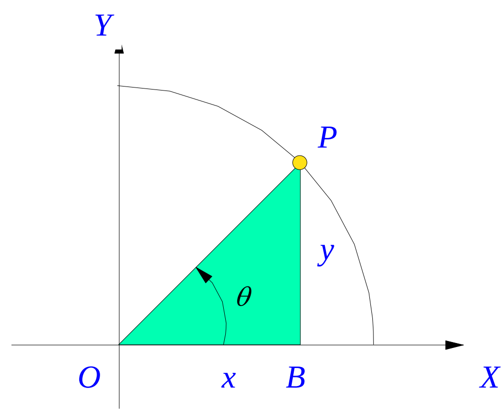
Sin embargo, *para cualquier valor de la base* a *, siempre se cumple que* $\log_a(1) = 0$ puesto que $a^0 = 1$ para cualquier valor $a > 0$, así que *todas las curvas logaritmo pasan por el punto* $(1,0)$

2.13 *FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS* .

Se definen a partir de un triángulo rectángulo inscrito en un círculo de radio 1. Es por ésta razón que a veces, se les llama también ***funciones circulares*** para distinguirlas de las *funciones hiperbólicas*, las cuales se definen en un contexto similar a las trigonométricas pero a partir de un triángulo obtuso dibujado sobre una hipérbola .

En la siguiente figura se representa un *círculo unitario* (es decir, de radio la unidad) , que tiene el triángulo recto OPB inscrito en el cual se definen las cantidades siguientes . . .

θ : *el ángulo positivo* entre el eje X y el radio OP . Medido en el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, en *radianes* .



BP : *el cateto opuesto* al ángulo θ , es la *ordenada* y del punto P .

OB : *el cateto adyacente* al ángulo θ , es la *abscisa* x del punto P .

OP : *la hipotenusa* , es el radio del círculo unitario .

Es claro que las distancias x e y dependen de la localización del punto P sobre la circunferencia unitaria, es decir x *e* y *son funciones del ángulo* θ .

Las funciones trigonométricas se definen considerando *todas las posibles razones o cocientes de las longitudes de dos lados del triángulo recto*, como sigue :

función seno : $$\operatorname{sen}(\theta) = \left(\frac{BP}{OP}\right) = \left(\frac{y}{1}\right) = y$$

asi que la ordenada y es numéricamente igual al seno del ángulo θ : $\boxed{y = \operatorname{sen}(\theta)}$

función coseno : $$\cos(\theta) = \left(\frac{OB}{OP}\right) = \left(\frac{x}{1}\right) = x$$

asi que la abscisa x es numéricamente igual al coseno del ángulo θ. $\boxed{x = \cos(\theta)}$

En términos de las funciones seno y coseno, quedan definidas todas las demás funciones trigonométricas, las cuales también representan la razón de las longitudes de dos lados del triángulo recto y son las siguientes :

función tangente : $\tan(\theta) = \left(\frac{BP}{OB}\right) = \left(\frac{y}{x}\right) \longrightarrow \boxed{\tan(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}}$

función cotangente : $\cot(\theta) = \left(\frac{OB}{BP}\right) = \left(\frac{x}{y}\right) \longrightarrow \boxed{\cot(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}}$

o también $\boxed{\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}}$

función secante : $\sec(\theta) = \left(\frac{OP}{OB}\right) = \left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow \boxed{\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}}$

función cosecante : $\csc(\theta) = \left(\frac{OP}{BP}\right) = \left(\frac{1}{y}\right) \longrightarrow \boxed{\csc(\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}}$

Debe notarse que . . .

- *Todas las funciones trigonométicas representan sencillamente el cociente de las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo.*

- *Para efectos de cálculo, el argumento θ en éstas funciones debe darse siempre en* ***radianes*** *, no en grados sexagesimales , pues éstos últimos son simplemente una división arbitraria de la circunferencia en 360 partes iguales pero no son en realidad números reales.*

- *Al girar el punto P sobre la circunferencia unitaria , ambos catetos , el opuesto y el adyacente varían entre 0 y ± 1 (a lo más el valor de la hipotenusa) . Por lo tanto el seno y el coseno son funciones acotadas cuyo valor cambia entre -1 y 1 , mientras que las demás funciones pueden tender a infinito si su denominador es cercano a cero.*

- *La tangente y la secante* ***no existen cuando*** $\cos(\theta) = 0$ *, es decir si* $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, $\pm 3\cdot\frac{\pi}{2}$, $\pm 5\cdot\frac{\pi}{2}$ *, etc (múltiples impares de* $\frac{\pi}{2}$ *).*

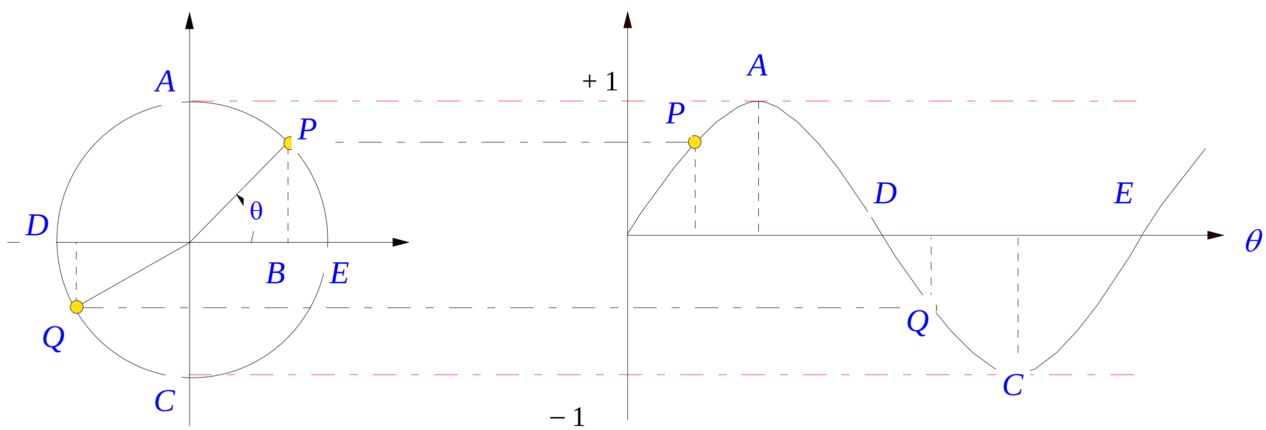
- *La cotangente y la cosecante* ***no existen cuando*** $\operatorname{sen}(\theta) = 0$ *, es decir si* $\theta = 0$, $\pm\pi$, $\pm 2\cdot\pi$ *, etc (múltiplos de* π *).*

- *Después de una vuelta completa sobre el círculo unitario (un giro de $2\cdot\pi$ radianes) , el punto P regresa a su posición inicial y por lo tanto, los valores de las funciones trigonométricas* ***se repiten*** *, En otras palabras ,* ***todas estas funciones son periódicas*** *.*

En particular, las funciones *seno* y *coseno* , asi como sus funciones recíprocas, la *secante* y la *cosecante* respectivamente, ***se repiten si su argumento*** θ ***aumenta o disminuye en múltiplos enteros de*** $2\cdot\pi$ radianes, mientras que la *tangente* y su función recíproca la *cotangente*, ***se repiten si su argumento cambia en un múltiplo entero de*** π radianes (cada media vuelta del punto P , porque el cociente de los catetos vale lo mismo en el 1º ó en el 3er cuadrante) .

2.14 *Gráficas de las funciones trigonométricas* .

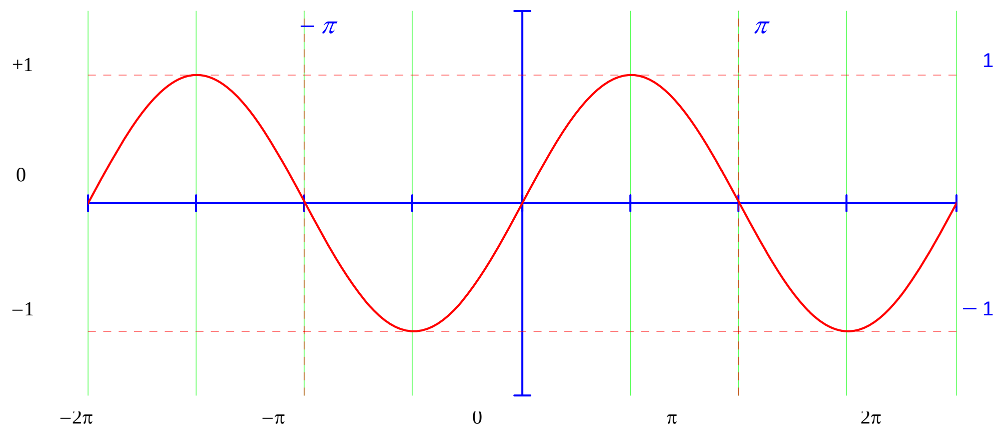
En la siguiente figura, de acuerdo con su definición , la función seno corresponde a la distancia BP sobre el círculo unitario , de modo que al girar el punto P sobre la circunferencia unitaria , ésta distancia cambia desde -1 hasta 1 .
Si trasladamos ésta distancia horizontalmente , para cada uno de los puntos correspondientes a un valor particular del ángulo θ , se obtiene la ***curva senoidal ó senoide*** mostrada en la siguiente figura , en la cual se indican como ejemplo las proyecciones horizontales de las ordenadas de los puntos P , A , D, Q , C y E de la circunferencia .



Cuando el punto P se desplaza una vuelta completa en sentido positivo sobre el círculo unitario , la curva senoidal se extiende desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\cdot\pi$ radianes y se repite en cada intervalo de $2\cdot\pi$, es decir, en cada vuelta de P .

Cuando el punto P se deplaza una vuelta completa en sentido negativo sobre el círculo unitario , la curva senoidal se extiende desde $\theta = 0$ hasta $\theta = -2\cdot\pi$ radianes y se repite en cada intervalo de $-2\cdot\pi$
Esta es una curva que se extiende de izquierda a derecha sin límite como se muestra en la siguiente gráfica :

2.14 a) La función seno ***f(x) = sen(x)*** .



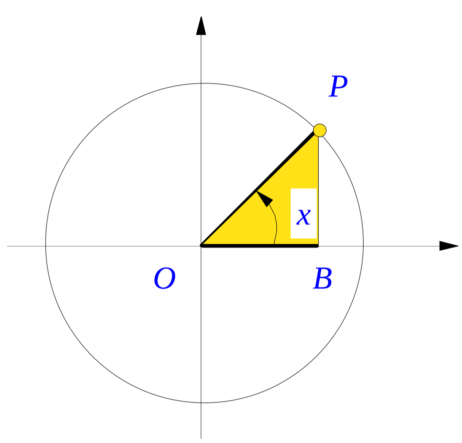
Dominio : $(-\infty, \infty)$

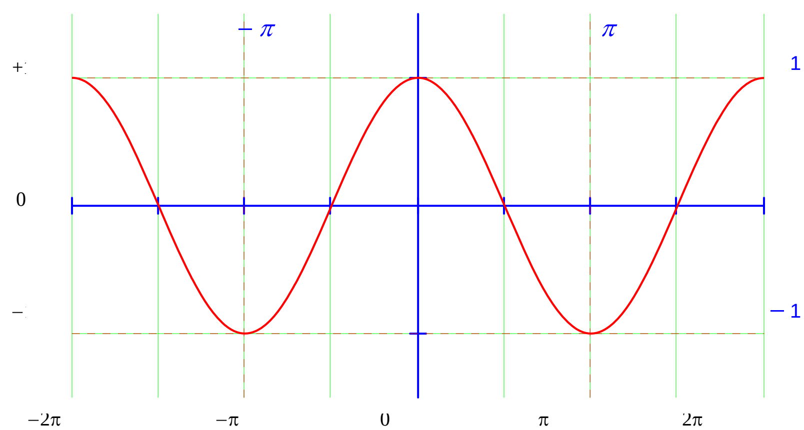
Rango : $[-1, 1]$

Periodo : $2 \cdot \pi$.

2.14 b) La función coseno ***f(x)* = cos*(x)*** .

Procediendo del mismo modo y recurriendo a su definición, se pueden obtener las gráficas de las otras funciones trigonométricas, por ejemplo , si se representa ahora el cateto adyacente (la distancia *OB*) , en la dirección vertical sobre el eje *Y* , se forma otra curva trigonométrica llamada ***cosenoide*** :





$$\cos(x) = \left(\frac{OB}{OP}\right)$$

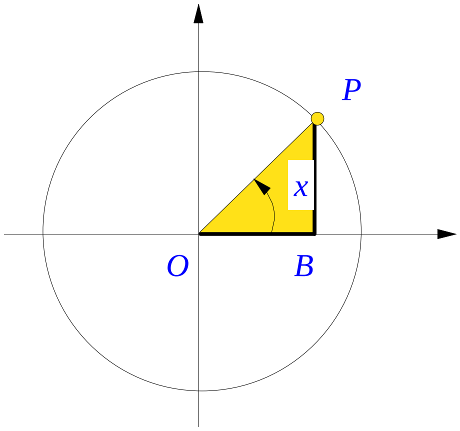
Dominio : $(-\infty, \infty)$

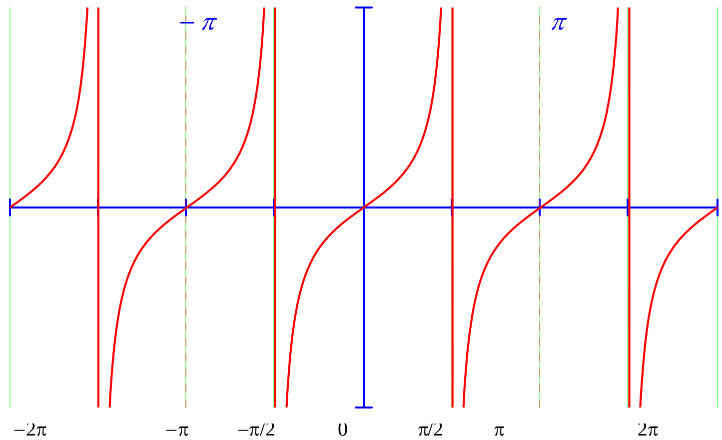
Rango : $[-1, 1]$

Periodo : $2 \cdot \pi$.

Nótese que ésta curva es idéntica a la senoide ; pero desplazada hacia la izquierda una distancia $\frac{\pi}{2}$

2.14 c) La función tangente ***f(x) = tan(x)***





$$tan(x) = \left(\frac{BP}{OB}\right)$$

Dominio : $x \neq n \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)$ *para* n *un entero impar.*

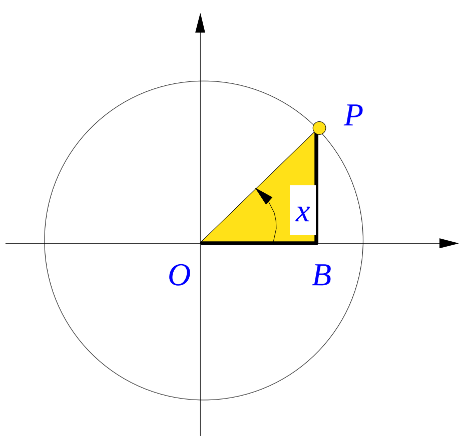
Rango : $(-\infty, \infty)$

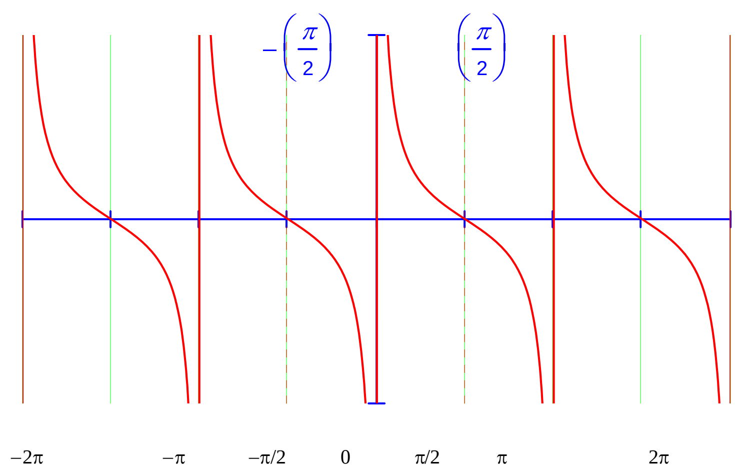
Periodo : π

La curva de la función tangente . . .

- Pasa abruptamente de un valor infinito negativo $-\infty$ a un valor infinito positivo $+\infty$ cuando el ángulo x se aproxima a un múltiplo impar de 90º por la izquierda ó por la derecha, debido a que el denominador OB toma valores positivos ó negativos pero cada vez más cercanos a cero.
- Vale cero cuando x es un múltiplo de π debido a que el cateto opuesto BP vale cero en esos casos
- Es siempre creciente

2.14 d) La función cotangente ***f(x) = cot(x)***





$$cot(x) = \left(\frac{OB}{BP}\right)$$

Dominio : $x \neq n \cdot \pi$ *para* n *un entero.*

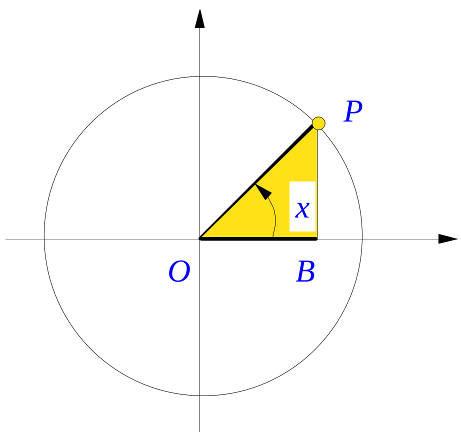
Rango : $(-\infty, \infty)$

Periodo : π

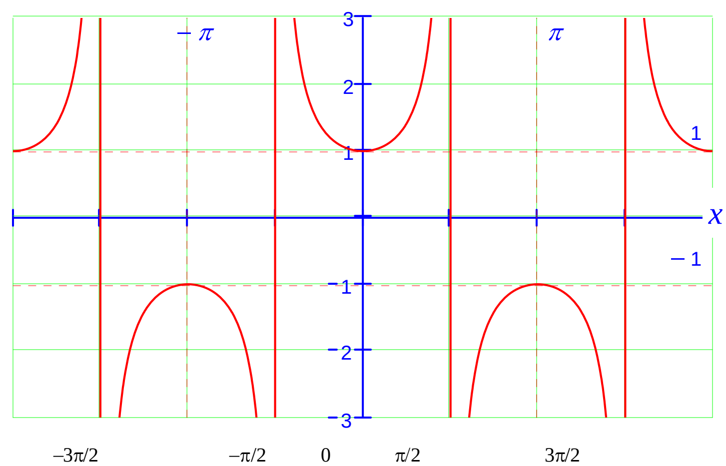
La curva de la función cotangente . . .

- es idéntica a la curva de la tangente salvo que está desplazada en $\frac{\pi}{2}$ hacia la izquierda y también está invertida respecto al eje Y .
- pasa abruptamente de un valor infinito negativo $-\infty$ a un valor infinito positivo $+\infty$ cuando el ángulo x se aproxima a un múltiplo de π por la izquierda ó por la derecha , debido a que el denominador BP toma valores positivos ó negativos cada vez más cercanos a cero.
- vale cero cuando x es un múltiplo de 90° o de 270° debido a que OB vale cero en esos ángulos.
- es siempre decreciente

2.14 e) La función secante ***f(x) = sec(x)***



$$sec(x) = \left(\frac{OP}{OB}\right)$$



Dominio : $x \neq n \cdot \frac{\pi}{2}$ *para* n *un entero.*

Rango : $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$

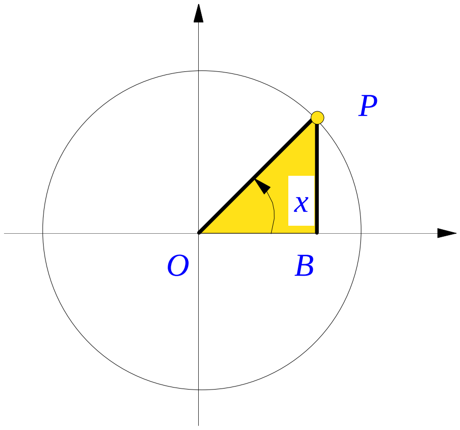
Periodo : $2 \cdot \pi$

Notemos que la curva de la función secante :

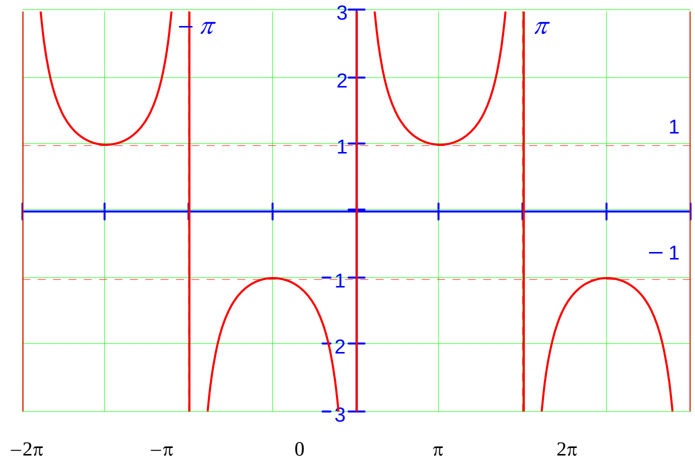
- pasa abruptamente de un valor infinito negativo $(-\infty)$ a un valor infinito positivo (∞) cuando el ángulo x se aproxima a 90º ó a 270º por la izquierda ó por la derecha . Esto se debe a que el denominador OB del cociente $\frac{OP}{OB}$ toma valores positivos ó negativos pero cada vez más cercanos a cero cuando x se acerca a esos ángulos .

- su rango no está definido en el intervalo $(-1, 1)$ porque el máximo valor para la longitud del cateto adyacente OB es la hipotenusa OP .

2.14 f) La función cosecante ***f(x) = csc(x)***



$$csc(x) = \left(\frac{OP}{BP}\right)$$



Dominio : $x \neq n \cdot \pi$ *para* n *un entero.*

Rango : $(-\infty, -1]$ y $[1, \infty)$

Periodo : $2 \cdot \pi$

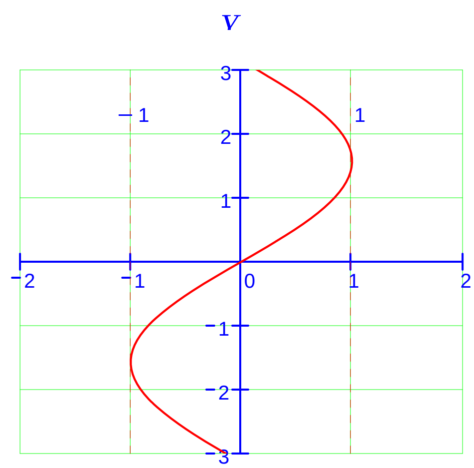
Notemos que la curva de la función cosecante :

- es idéntica a la función secante excepto que está desplazada una distancia de $\frac{\pi}{2}$ hacia la derecha sobre el eje *X* .
- no puede tomar valores comprendidos en el intervalo $(-1, 1)$ porque el máximo valor para la longitud del cateto opuesto *BP* es la hipotenusa *OP* .

2.15 *FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.*

Como ya se sabe, la gráfica de una función inversa se obtiene *intercambiando los ejes de coordenadas X e Y*, sin embargo, *las funciones trigonométricas no son biyectivas*, como se puede apreciar claramente en sus gráficas , dado que una recta horizontal las corta en más de un punto.
Para poder definir las inversas de las funciones trigonométricas, es necesario *limitar su rango* de modo que cualquier recta horizontal corte a sus gráficas en un solo punto y se conviertan asi en funciones biyectivas.

Por ejemplo, la gráfica de *la función invertida de la función seno: sen(x)* sería idéntica a la gráfica de la función *sen(x)* pero con los ejes *X* e *Y* intercambiados , como se ilustra en la figura de la derecha . . .



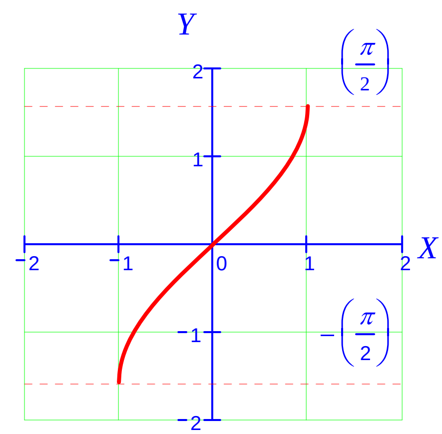
Gráfica invertida de la función seno

$$x = sen(y)$$

Sin embargo, *ésa no sería la gráfica de una verdadera función* , porque cualquier línea recta vertical en el intervalo $[-1, 1]$ intersecta a dicha gráfica en un número infinito de puntos .

Pero si se limita el rango de ésta función solamente al intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, como se muestra en la figura de la derecha, entonces la parte correspondiente de la curva invertida del seno si representa realmente una función puesto que cualquier recta vertical la intersecta sólo en un punto.

Además es una función biyectiva porque también cualquier recta horizontal le corta en un solo punto.

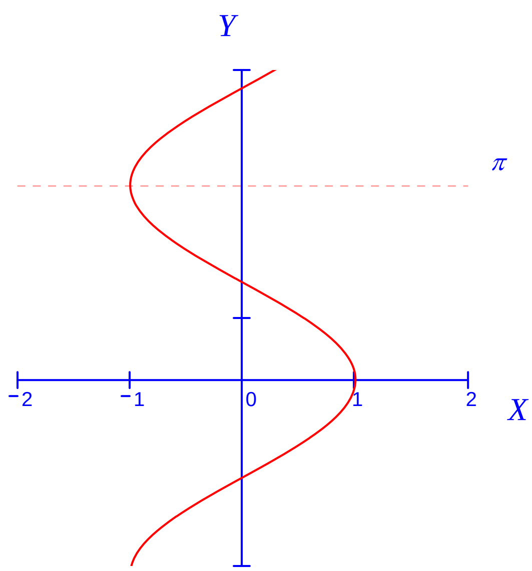


Función arco seno : $f(x) = arcsen(x)$

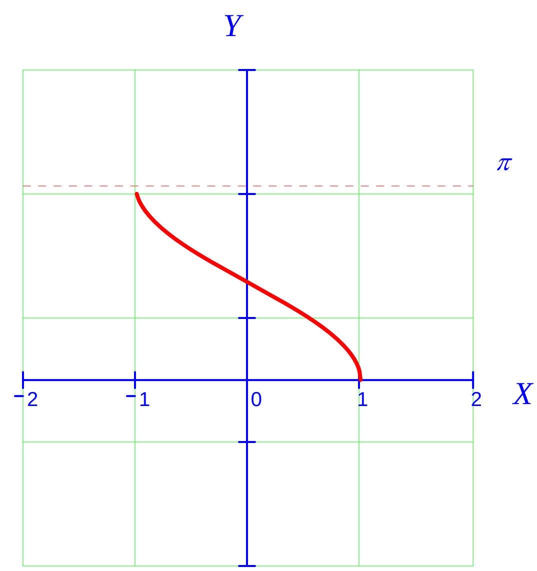
Dominio : $[-1, 1]$,
Rango : $[-\pi/2 \ , \ \pi/2]$

Las demás funciones trigonométricas inversas se definen de modo similar, *tomando solamente una parte de la gráfica invertida de la función trigonométrica correspondiente de tal manera que la gráfica represente realmente una función* .

Como se ilustra en las siguientes figuras . . .



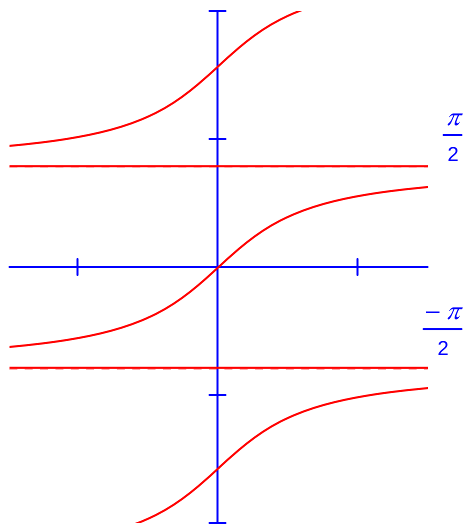
$\longrightarrow$

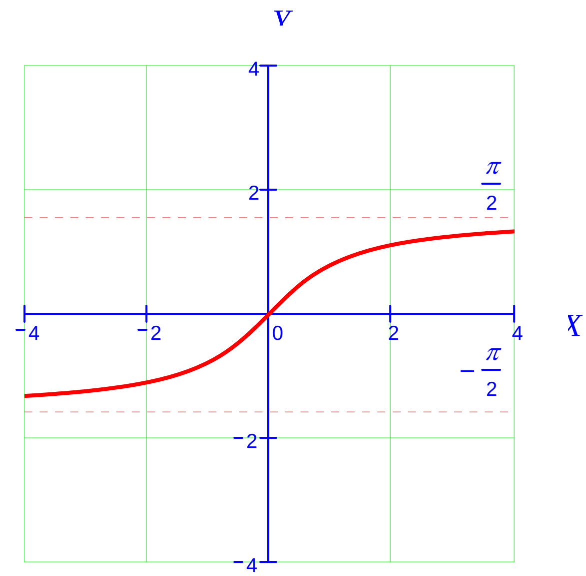


Gráfica invertida de la función coseno
$x = cos(y)$

Función arco coseno: $f(x) = arccos(x)$

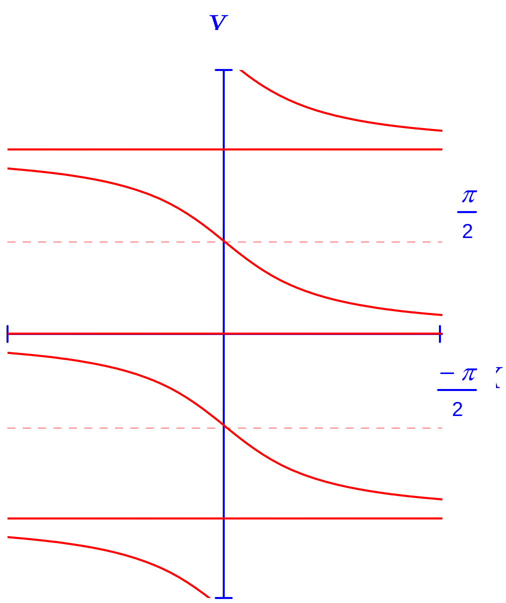
Dominio : $[-1, 1]$,
Rango : $[0 \ , \ \pi]$

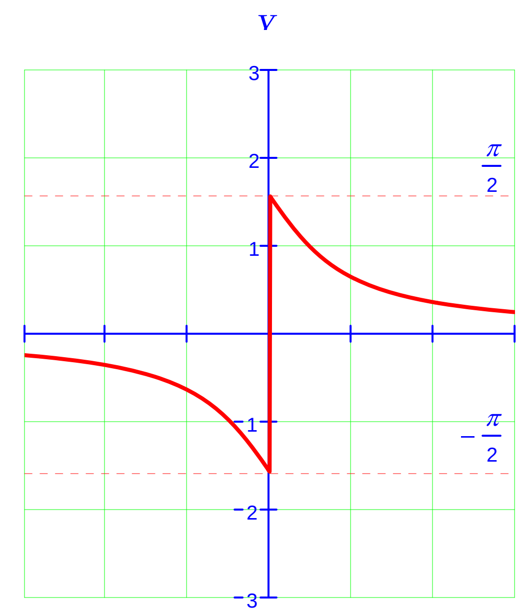




Gráfica invertida de la función tangente
$x = \tan(y)$

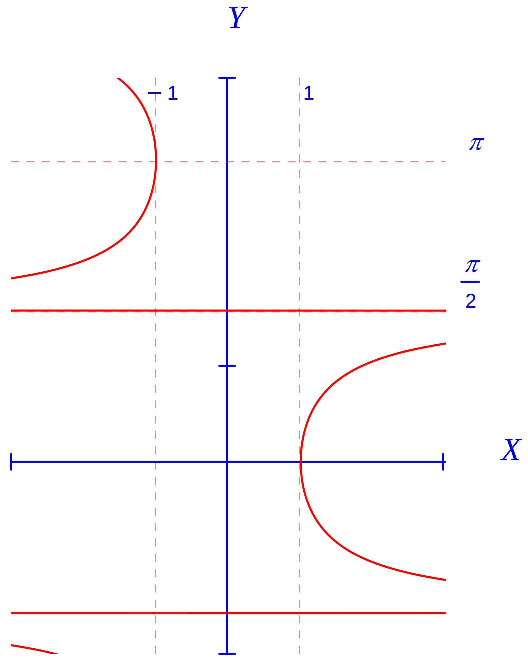
Función arco tangente : $f(x) = \arctan(x)$
Dominio : $(-\infty, \infty)$
Rango : $(-\pi/2\ ,\ \pi/2)$

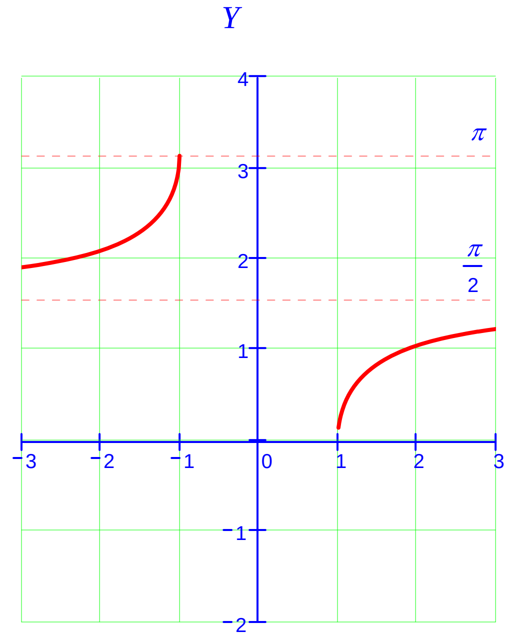




Gráfica invertida de la función cotangente
$x = \cot(y)$

Función arco cotangente : $f(x) = \text{arccot}(x)$
Dominio : $(-\infty, 0)$, $[0, \infty)$
Rango : $(-\pi/2\ , 0)$, $(0,\ \pi/2]$





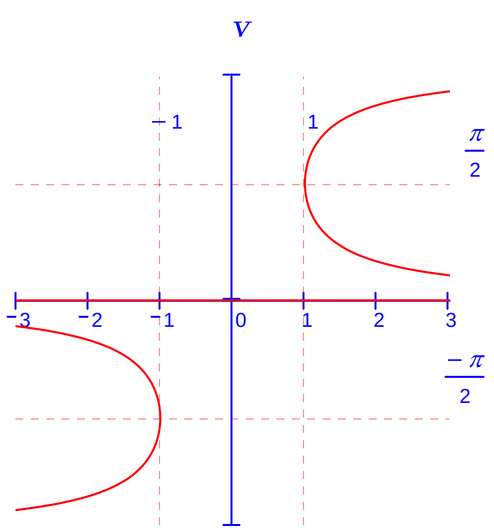
Gráfica invertida de la función secante

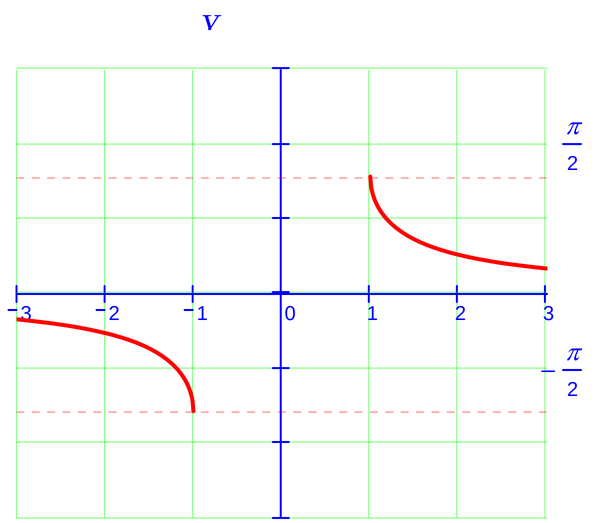
$x = sec(y)$

Función arco secante : $f(x) = arcsec(x)$

Dominio : $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$

Rango : $[0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi]$





Gráfica invertida de la función cosecante

$x = csc(y)$

Función arco cosecante : $f(x) = arccsc(x)$

Dominio : $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$

Rango : $[-\pi/2, 0)$, $(0, \pi/2]$

EJERCICIOS 2.2

1. La función $f(x)$ es lineal, hallar dicha función si se sabe que $f(-1) = 2$ y $f(2) = -3$

2. La función $f(x)$ es cuadrática, hallar dicha función si $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ y $f(3) = 5$

3. Si $f(x) = \arccos(\ln(x))$, calcular: $f\left(\frac{1}{e}\right)$, $f(1)$ y $f(e)$

4. Si $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(x))$, calcular: $f\left(\frac{1}{e^{\pi}}\right)$, $f(1)$ y $f\left(e^{\pi}\right)$

5. Si $f(x) = \tan\left(e^{x}\right)$, calcular: $f(\ln(\pi))$, $f\left(\ln\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$, $f\left(\ln\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)\right)$

6. Si $f(x) = \arctan\left(e^{x}\right)$, calcular: $f\left(-\ln(\sqrt{3})\right)$, $f\left(\ln(\sqrt{3})\right)$, $f(0)$, $f(\ln(1))$

Calcular el dominio y el rango de las siguientes funciones:

7. $f(x) = 2\cdot x^{3} - 3\cdot x^{2} + 2\cdot x - 4$

8. $f(x) = \dfrac{x^{2} + x - 6}{x^{3} + 2\cdot x^{2} - x - 2}$

9. $f(x) = \dfrac{6\cdot x - 3 - 6\cdot x^{3} + 2\cdot x^{2}}{3\cdot x^{2} - x - 2}$

10. $f(x) = \sqrt{3\cdot x^{2} + 1}$

11. $f(x) = \sqrt{10\cdot x^{2} + 13\cdot x - 3}$

12. $f(x) = \sqrt{4 - x^{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5 - 9\cdot x^{2} + 12\cdot x}}$

13. $f(x) = \ln\left(\sqrt{3\cdot x - x^{2}}\right)$

14. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2\cdot x^{2} - 5\cdot x - 3}{x + 1}\right)$

15. $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\ln\left(\dfrac{x}{5}\right)\right)$

16. $f(x) = \arctan\left[\dfrac{\pi}{2}\cdot\left(2\cdot x^{2} - 1\right)\right]$

17. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^{2} - x - 6}} + \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{x - 3}\right)$

18. $f(x) = \ln(\operatorname{arccot}(3\cdot x + 1))$

19. $f(x) = \sqrt{\cos(2\cdot x - 1)}$

20. $f(x) = \arccos(2\cdot x - 1) + \dfrac{3\cdot x}{\sqrt{6\cdot x^{2} - 7\cdot x + 2}}$

Hallar la función inversa de las siguientes funciones :

21. $f(x) = 2^{(3\cdot x+1)}$

22. $f(x) = 10^{\sqrt{3\cdot x-1}}$

23. $f(x) = ln(sen(x))$

24. $f(x) = sen\left(\dfrac{2\cdot x}{1+x}\right)$

25. $f(x) = arcsen\left(ln\left(\dfrac{x}{10}\right)\right)$

26. $f(x) = arctan\left[e^{(2\cdot x+1)}\right]$

Graficar las funciones

27. $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

28. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$

Respuestas . *(Ejercicios impares)*

1. $f(x) := -\left(\frac{5}{3}\right)\cdot x + \frac{1}{3}$

3. $f\left(\frac{1}{e}\right) = \pi$, $f(1) = \frac{1}{2}\cdot\pi$, $f(e) = 0$

5. $f(\ln(\pi)) = 0$, $f\left(\ln\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1$, $f\left(\ln\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)\right) = -1$

7. *Dominio* : (-∞ , ∞) ; *Rango* : (-∞ , ∞)

9. *Dominio* : $x \neq \left(-\frac{2}{3}\right)$, $x \neq 1$ *Rango* : (-∞ , ∞)

11. *Dominio* : $x \leq \frac{-3}{2}$; $\frac{1}{5} \leq x$ *Rango* : [0 , ∞)

13. *Dominio* : (0 , 3) *Rango* : $\left(-\infty, \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

15. *Dom.* $\left(\frac{5}{e}\right) \leq x \leq (5\cdot e)$ *Rango* : [−π/2 . π/2]

17. *Dominio* : (-∞ , − 2) , [4 , ∞) *Rango* : (−1 , 1)

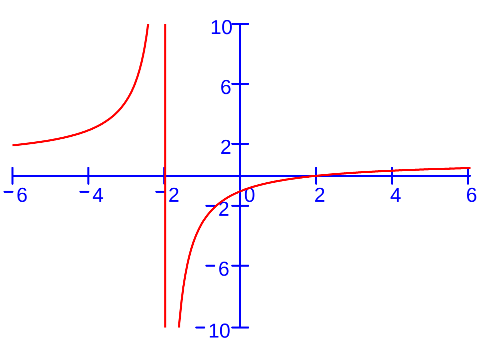
19. *Dom.* $\left[\frac{2+(2\cdot n-3)\cdot\pi}{4}, \frac{2+(2\cdot n-1)\cdot\pi}{4}\right]$, *Rango* : [0 , 1]

21. $g(x) := \frac{1}{\ln(8)}\cdot\ln\left(\frac{x}{2}\right)$; *Dominio* (0 , ∞)

23. *No es biyectiva , no tiene inversa .*

25. *No es biyectiva , no tiene inversa .*

27.



EJERCICIO 2.1 problemas pares

2 $16\cdot a^3 - 6\cdot a + 4$

4. $4\cdot a^6 - 12\cdot a^4 + 16\cdot a^3 + 9\cdot a^2 - 24\cdot a + 16$

6. $2\cdot a^3 - 3\cdot a + 5$

8. $8 - 3\cdot\sqrt[3]{2}$

10. $4\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

12. $\frac{-x}{5\cdot x + 8}$

14. 16

16. $\frac{a^x + a^{-x}}{2} = \frac{a^{-x} + a^x}{2}$ *función par*

18. $\sqrt[3]{(-x+1)^2} + \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$ *función par*

20. *periódica : periodo* = $\frac{2\cdot\pi}{3}$

22. *periódica : periodo* = $2\cdot\pi$

24. $f(x) = f(-x)$, $g(x) = g(-x)$ y $\left(\begin{array}{c} h(x) = f(x)\cdot g(x) \\ h(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot g(x) = h(x) \end{array}\right)$

y por lo tanto $h(x)$ es par.

26. $f(x) = f(-x)$, $g(x) = -g(-x)$ y $\left[\begin{array}{c} h(x) = f(x)\cdot g(x) \\ h(-x) = f(-x)\cdot g(-x) = f(x)\cdot(-g(x)) = -h(x) \end{array}\right]$

asi que $h(x)$ *es impar* .

28. $(-\infty , \infty)$

30. $(-\infty , -2]$, $[1/4 , 4/3]$, $[3/2 , \infty)$

32. $f\cdot g = 12\cdot x^2 - 12\cdot x + 5$: $g\cdot f = 6\cdot x^2 + 3$; $f\cdot f = 27\cdot x^4 + 36\cdot x^2 + 14$: $g\cdot g = 4\cdot x - 3$

34. $f\cdot g = \frac{16}{x^2} - 1$: $g\cdot f$ *no existe* ; $f\cdot f = 64\cdot x^4 - 32\cdot x^2 + 3$: $g\cdot g = x$

36. $f\cdot g$ *no existe* : $g\cdot f$ *no existe* ; $f\cdot f$ *no existe* : $g\cdot g$ *no existe*

38. *(f•f•f) = x*

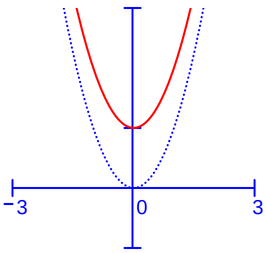
40. *No tiene inversa*

42. *No tiene inversa*

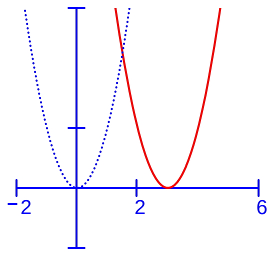
44. *No tiene inversa*

46. *No tiene inversa*

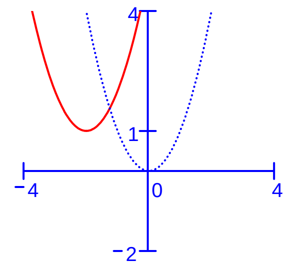
48.



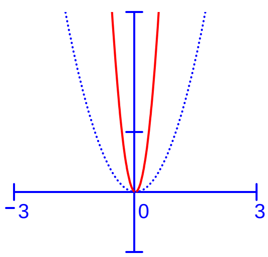
50.



52.



54



56. $-f(x) = -x\cdot\sqrt{x+3}$

58. $-f(-x) = x\cdot\sqrt{-x+3}$

60. $f(-x+1)-2 = (-x+1)\cdot\sqrt{-x+4}-2$

62. $f(x-2)+2$

EJERCICIO 2.2 <u>*problemas pares*</u>

2. $f(x) = \dfrac{7}{6}\cdot x^2 - \dfrac{13}{6}\cdot x + 1$

4. $f\left(\dfrac{1}{e^{\pi}}\right) = 0$; $f(1) = 0$; $f\left(e^{\pi}\right) = 0$

6. $f\left(-ln(\sqrt{3})\right) = \dfrac{1}{6}\cdot\pi$; $f\left(ln(\sqrt{3})\right) = \dfrac{1}{3}\cdot\pi$; $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$; $f(ln(1)) = \dfrac{1}{4}\cdot\pi$

8. *Dominio*: $x \neq 1$, $x \neq -2$, $x \neq -1$. *Rango* : $(-\infty\ ,\ \infty)$

10. *Dominio* : $(-\infty\ ,\ \infty)$; *Rango* : $[\,1\ ,\infty\,)$

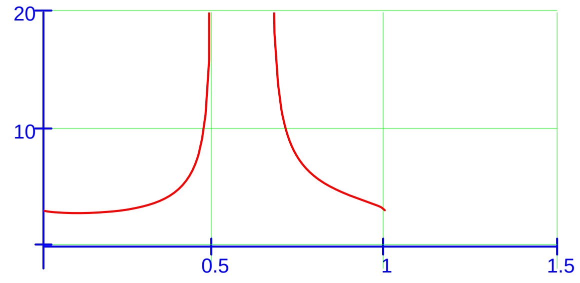
12. *Dominio* : $\dfrac{-1}{3} < x < \dfrac{5}{3}$; *Rango*: $(\,a\ ,\ \infty\,)$

14. *Dominio* : $-1 < x < -\dfrac{1}{2}$; $3 < x$ *Rango* : $(-\infty\ ,\infty)$

16. *Dominio* : $(-\infty\ ,\infty)$ *Rango* : $(\ arctan(-\pi/2)\ ,\ \pi/2\ )$

18. *Dominio* : $[\,-1/3\ ,\infty\,)$ *Rango* : $\left(-\infty, ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

20. *Dominio* : $[\,0\,,\,1/2\,)\,,\,(\,2/3\,,\,1\,]\,)$ *Rango* : *de cierto número positivo* x_o *hasta* ∞

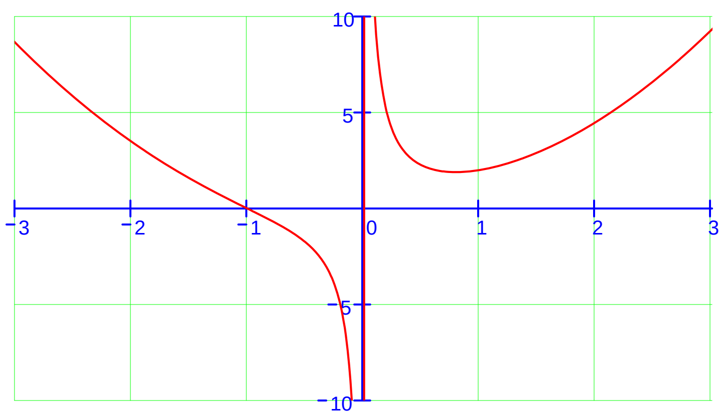


22. $$f^{-1}\cdot(x) = \frac{1+log(x)^2}{3}$$

24. *No tiene inversa*

26. *No tiene inversa*

28.



Capítulo III
Límites y Continuidad

3.1 ***Sucesiones infinitas*** .

Una sucesión es una función definida en los números enteros positivos { 1 , 2 , 3 , 4 , ... } .
Por ejemplo, la sucesión definida como :

$$f(n) = n^3 - n^2$$

para $n = 1, 2, 3, 4, ...,$ genera los valores :

$$f(1) = 1^3 - 1^2 = 0$$
$$f(2) = 2^3 - 2^2 = 4$$
$$f(3) = 3^3 - 3^2 = 18$$
$$f(4) = 4^3 - 4^2 = 48$$

etc. . .

y se denota por { 0 , 4 , 18, 48, 100, . . . } .

La sucesión se llama ***infinita*** porque no tiene un último término (lo cual se indica por la elipsis: . . .)

El ***término n-ésimo*** **:** s_n de una sucesión es, por lo general , una fórmula con la cual se calcula el valor de cada término en la sucesión . Frecuentemente ésta fórmula se determina por simple inspección de la sucesión o bien estableciendo un sistema de ecuaciones.
La ***sucesión*** se denota encerrando entre llaves al término *n*-ésimo : **{** s_n **}**

Ejemplo 1. Escribir una fórmula para el término n-ésimo de las siguientes sucesiones :

a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, . . .$ b) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{6}, \frac{1}{8}, . . .$

Solución : Por simple inspección, observemos que en la sucesión del inciso a), cada término es una fracción en la que *sólo el denominador cambia y además es un número entero impar.*
Por lo tanto, es claro que *el término n-ésimo* o general de la sucesión debe ser de la forma :

$$s_n = \frac{1}{(2 \cdot n - 1)} \quad : \quad para\ n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ . . .$$

En la otra sucesión, notemos en primer lugar que los términos además de ser fracciones, son alternativamente positivos y negativos. Esto significa que su signo algebraico es una potencia del número -1.
Por otra parte, sólo el denominador de cada fracción cambia de un término a otro y es un número entero par.

Entonces no hay duda que el término *n*-ésimo de ésta sucesión está dado por la fórmula :

$$s_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot n} \quad ; \qquad para \;\; n = 1 \;,\; 2 \,,\;\; 3 \,,\;\; 4 \;.\;.\;.$$

3.2 ***El límite de una sucesión***.

Si sucede que a medida que el entero n se hace más y más grande, los términos de una sucesión $\{ \; s_n \; \}$ se aproximan más y más a un número constante L , entonces se dice que la constante L es el ***límite de la sucesión*** y se escribe :

$$s_n \longrightarrow L$$ que se lee como: " s_n *tiende a* L "

o también :

$$\lim_{n \to \infty} \left(s_n \right) = L$$ que se lee : " *el límite de* s_n *cuando* n *tiende al infinito es* L "

Ejemplo 2. Determinar si tiene un límite la sucesión con término general dado por : $s_n = 3 - \dfrac{1}{n^2}$

Solución : Los primeros términos que genera ésta sucesión son :

Para . . . $n = 1$; $\quad s_1 = \left(3 - \dfrac{1}{1^2} \right) = 2$

$n = 2$; $\quad s_2 = \left(3 - \dfrac{1}{2^2} \right) = \dfrac{11}{4} = 2.75$

$n = 3$; $\quad s_3 = \left(3 - \dfrac{1}{3^2} \right) = \dfrac{26}{9} = 2.8889$

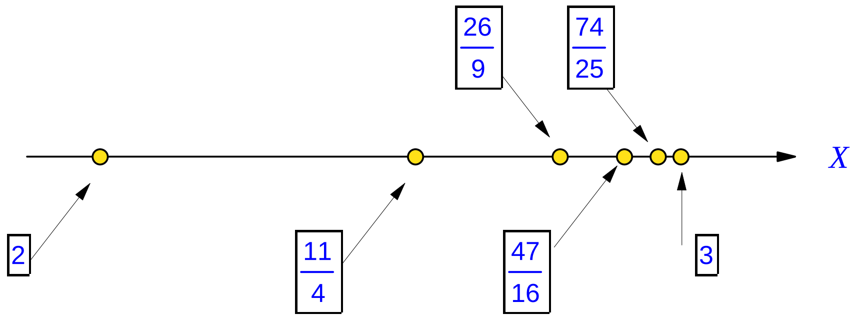
$n = 4$; $\quad s_4 = \left(3 - \dfrac{1}{3^2} \right) = \dfrac{47}{16} = 2.9375$

$n = 5$; $\quad s_5 = \left(3 - \dfrac{1}{3^2} \right) = \dfrac{74}{25} = 2.96$

etc.

Es claro que a medida que el entero n aumenta, los valores de ésta sucesión se acercan cada vez más al número 3. . . .

Esto significa que al representar ésta sucesión de números sobre la recta numérica real, la distancia entre el término *n*-ésimo s_n y el número 3 tiende a ser menor que cualquier cantidad positiva ε, por pequeña que ésta sea y que se haya prefijado de antemano como medida de la cercanía al valor 3 , como se ilustra en la siguiente figura . . .



Así por ejemplo para $n = 10$, el décimo término de la sucesión es $\left(3 - \frac{1}{10^2}\right) = \frac{299}{100}$

que está a la distancia del número 3 dada por el valor absoluto:

$$\left|3 - \left(3 - \frac{1}{10^2}\right)\right| = \frac{1}{100}$$

y todos los términos que siguen después de él, están a una distancia menor que $\frac{1}{100}$ del número 3 .

De modo similar, cuando $n = 100$, el centésimo término de la sucesión : $\left(3 - \frac{1}{100^2}\right)$ está a la distancia $\left|3 - \left(3 - \frac{1}{100^2}\right)\right| = \frac{1}{10000}$ del número 3 . Todos los términos que siguen después de él, están a menor distancia que ésta del 3 y así sucesivamente .

Entonces se escribe :

$$\left(3 - \frac{1}{n^2}\right) \longrightarrow 3 \qquad \text{o también :} \quad \lim_{n \to \infty} \left(3 - \frac{1}{n^2}\right) = 3$$

Aunque *el límite de ésta sucesión en particular no es parte de la sucesión misma* , en general *el límite puede ser también uno de los términos de la propia sucesión* .

No toda sucesión tiene un límite, por ejemplo la secuencia: $\{(-1)^n\}$ es : -1 , 1, -1, 1, -1 , 1, -1, 1 . . . que alterna entre los valores -1 y 1 pero no se aproxima a ningún límite.

Otro ejemplo es la sucesión : $\{n^2\}$ cuyos términos son : { 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , . . . } que crecen sin límite alguno.

Definición :

El número L se llama límite de la sucesión : s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , s_5 ,. . . si para cualquier número infinitamente pequeño y positivo $\varepsilon > 0$, existe un número $N(\varepsilon)$ tal que :

$$|s_n - L| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \quad n > N(\varepsilon)$$

es decir, que la distancia entre el límite L *y el término n-ésimo* s_n *de la sucesión, se hace infinitamente pequeña cuando n aumenta .*

Tal límite se denota como :

$$\lim_{n\to\infty} (s_n) = L$$

Ejemplo 3. Demostrar que el límite de la sucesión cuyos primeros términos son :

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \frac{11}{6}, \ldots$$

es el número 2 .

Solución : Antes que nada, se debe determinar la expresión general del término n-ésimo s_n de la sucesión . Cada término de ésta sucesión es una fracción y de un término a otro, el denominador es un entero consecutivo mientras que el numerador es siempre un número entero impar positivo. En conclusión, el término n-ésimo de la sucesión debe ser de la forma:

$$s_n = \frac{2 \cdot n + 1}{n + 1} \quad ; \text{ para } n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Entonces, se debe demostrar que: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot n + 1}{n + 1}\right) = 2$ aplicando la definición anterior para el límite de una sucesión.

Para tal fin, calculemos primero la distancia entre el número 2 y s_n :

$$|s_n - 2| = \left|\left(\frac{2 \cdot n + 1}{n + 1}\right) - 2\right| = \left|-\left(\frac{1}{n + 1}\right)\right| = \left(\frac{1}{n + 1}\right) \quad \textit{(puesto que } n > 0\textit{)}$$

Así que $|s_n - 2| < \varepsilon$ implica que : $\dfrac{1}{n + 1} < \varepsilon$

Resolviendo ésta desigualdad pero tomando en cuenta que $\varepsilon > 0$ y $n > 0$ resulta :

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$$

De ésta manera, para cada número ε siempre es posible determinar otro número dado por $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$ tal que la desigualdad $|s_n - 2| < \varepsilon$ se cumple siempre que $n > N(\varepsilon)$.

En otras palabras, si n es un número entero suficientemente grande entonces $\varepsilon \to 0$ y s_n difiere del número 2 en una cantidad infinitamente pequeña .

Ejemplo 4. Demostrar que la siguiente sucesión no tiene límite un finito :

$$\{\ s_n\ \} = \{n^2\} = \{\ 1\ ,\ \ 4\ \ ,\ 9\ \ ,\ 16\ \ ,\ 25\ ,\ \ldots\}$$

Solución : De la definición del límite para una sucesión, se deduce que si existe un límite finito L entonces la distancia entre el término *n*-ésimo y tal límite debe ser inferior a una cantidad ε positiva infinitamente pequeña , es decir . . .

$$\left|n^2 - L\right| < \varepsilon$$

la solución de ésta desigualdad es: $(L - \varepsilon) < n^2 < (L + \varepsilon)$

Sin embargo, ésta condición *no se pueden cumplir para todo valor del número entero* n , por grande que sea el número L . (*Hágase por ejemplo* $n = L + 1$) , así que no se reduce la distancia entre L y n^2 a medida que n aumenta, por lo tanto ésta sucesión no tiene límite.

Se dice entonces que una sucesión $\{\ s_n\ \}$ como la del ejemplo anterior tiende al infinito positivo (∞) porque al aumentar el número entero n, sus valores llegan a hacerse mayores que cualquier número positivo , por grande que éste sea .

Este comportamiento se denota como :

$s_n \longrightarrow \infty$ o también como: $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty}$

Del mismo modo, se dice que una sucesión $\{s_n\}$ tiende al infinito negativo $(-\infty)$ si al crecer el número entero n , sus valores se hacen menores que cualquier número negativo por grande que éste sea y se denota por :

$s_n \longrightarrow .-\infty$ o bien como : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = -\infty}$

Así por ejemplo, la sucesión : $\{\ 10 - n\ \}$ tiende a $-\infty$, mientras que la sucesión ; $\{\sqrt{n}\ \}$ tiende a ∞ .

3.3 Límite de una función

Consideremos como ejemplo, algunos de los valores que asume la función $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ a medida que su variable independiente x se acerca al valor 1 . . .

- ***"por la derecha"*** , es decir, para valores de x cada vez más cercanos al número 1 pero mayores que 1 $(x > 1)$ y
- ***"por la izquierda"*** , es decir, para valores de x cada vez más cercanos al número 1 pero menores que 1 $(x < 1)$.

x	0	0.5	0.9	0.99	0.999		1.001	1.01	1.1	1.5	2
$\dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$	1	0.7043	0.6725	0.6672	0.6667		0.6666	0.6661	0.6613	0.6439	0.6275

Es fácil notar en estas secuencias de valores para $f(x)$, que a medida que la variable independiente x está cada vez más cerca del valor 1, la función está cada vez más y más cerca del valor $\dfrac{2}{3} = 0.66666...$, ***a pesar de que la función no está definida en*** $x = 1$, puesto que $f(1) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{1} - 1}{\sqrt{1} - 1}\right) = \left(\dfrac{1-1}{1-1}\right) = \dfrac{0}{0}$ es una expresión indeterminada .

Como un segundo ejemplo, consideremos la función $f(x) = \dfrac{sen(x)}{x}$ y calculemos algunos de sus valores a medida que la variable independiente x se acerca al valor 0, "por la derecha" (para $x > 0$) y "por la izquierda" (para $x < 0$)

x	−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001		0.001	0.01	0.1	0.5	1
$\dfrac{sen(x)}{x}$	0.8414	0.9588	0.9983	0.9999	0.9999		0.9999	0.9999	0.9983	0.9588	0.8414

En estas secuencias de valores para $f(x)$, fácilmente puede observarse que a medida que x se acerca al valor 0 , la función está a su vez más y más cerca del valor 1 , ***a pesar de que la función no está definida en*** $x = 0$, dado que $f(0) = \dfrac{sen(0)}{0} = \dfrac{0}{0}$ es una expresión indeterminada .

Éstos ejemplos ilustran que ***una función*** $f(x)$ ***tiende al número*** A ***como límite cuando su variable independiente*** x ***tiende al valor*** a ***, si el valor de*** $f(x)$ ***se acerca infinitamente al valor*** A ***a medida que*** x ***se aproxima más y más al valor*** a .

Éste comportamiento de una función matemática se denota como :

$f(x) \longrightarrow A$ cuando $x \longrightarrow a$ ó también por: $\displaystyle \lim_{x \to a} f(x) = A$

<u>Definición formal del límite de una función</u>

El límite de una función existe si para cualquier número positivo $\varepsilon > 0$ *infinitamente pequeño* existe también un número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que *la distancia* $|f(x) - A|$ *entre el límite* A *y* $f(x)$ *es más pequeña que* ε *cuando la distancia* $|x - a|$ *entre* x *y* a *es menor que* δ .

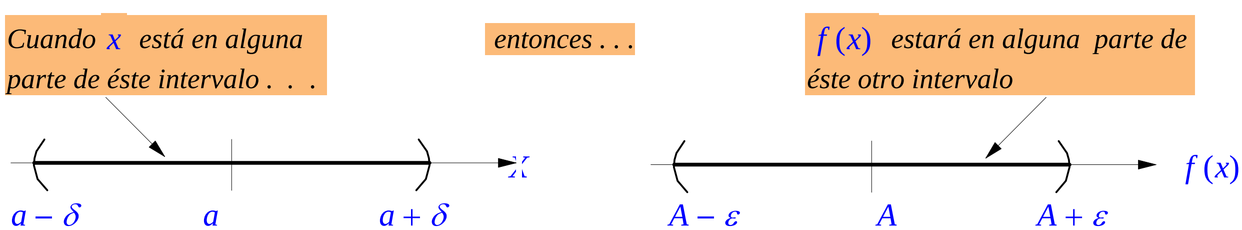
En símbolos :

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |x - a| < \delta \qquad (3.2)$$

La definición anterior resulta más clara si se resuelven las desigualdades (3.2) y se representa su solución gráficamente. Notemos primero que :

- la solución de $|f(x) - A| < \varepsilon$ es el intervalo abierto $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$
- la solución de $|x - a| < \delta$ es el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$

Por lo tanto, dibujando éstos intervalos sobre la recta numérica real se tiene . . .



Ejemplo 5. Calcular $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f(x) = \begin{pmatrix} 4\cdot x - 5 & si & x \neq 2 \\ 6 & si & x = 2 \end{pmatrix}$

Solución : Es muy claro que cuando x está cerca de 2 (pero no es igual a 2), entonces $f(x)$ está cerca de 3 y por lo tanto escribimos . . .

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

Para observar más detalladamente como varía $f(x)$ cuando x se aproxima al valor 2, preguntemos por ejemplo :

¿Qué tan cerca de 2 debe estar x para que $f(x)$ diste de 3 una distancia menor que 0.1 ?

La distancia de x a 2 está dada por el valor absoluto $|x-2|$ y la distancia entre $f(x)$ y 3 es $|f(x)-3|$, de manera que nuestro problema es encontrar un número δ tal que :

$$|f(x)-3| < 0.1 \quad \text{cuando} \quad 0 < |x-2| < \delta$$

Notemos que. . .

$$|f(x)-3| = |(4\cdot x-5)-3| = |4\cdot(x-2)| = 4\cdot|x-2| < 4\cdot\delta$$

de modo que la respuesta para nuestro problema se obtiene si se toma $0.1 = 4\cdot\delta$, es decir :

$$\delta = \frac{0.1}{4} = 0.025$$

y así, cuando $|x-2| < 0.025$ entonces $|f(x)-3| < 0.1$.

Si cambiamos el número 0.1 al número más pequeño 0.001 , con el mismo procedimiento encontraremos que $f(x)$ estará a una distancia no mayor que 0.001 del número 3 cuando x no esté a una distancia del 2 de más de $\frac{0.001}{4} = 0.00025$.

O en general, si cambiamos a un número ε positivo arbitrariamente pequeño , encontraremos que . . .

$$|f(x)-3| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |x-2| < \delta \quad \text{donde} \quad \delta = \frac{\varepsilon}{4}$$

esta es una forma precisa de decir que $f(x)$ estará "cerca de" 3 cuando x esté "cerca de" 2.

Ejemplo 6. Demostrar que $\lim\limits_{x \to -1} \left(3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1\right) = 8$

Solución : La aplicación de la definición formal de límite de una función implica que

$$\left|\left(3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 1\right) - 8\right| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |x - (-1)| < \delta$$

es decir :

$$\left|3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 7\right| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \quad |x + 1| < \delta$$

Es necesario rescribir $\left|3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 7\right|$ en términos de $|x + 1|$, con el fin de comparar entre si ambas expresiones. Algebraicamente se puede proponer que

$$3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 7 = A \cdot (x + 1)^2 + B \cdot (x + 1)$$

de donde resulta:

$$\left|3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 7\right| = \left|3 \cdot (x + 1)^2 - 10 \cdot (x + 1)\right|$$

(Mediante un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, compruebe Usted mismo que es imposible obtener una solución para A y B si el valor del límite es distinto de 8.)

Usando ahora la desigualdad "del triángulo" para valores absolutos se tiene:

$$\left|3 \cdot (x + 1)^2 - 10 \cdot (x + 1)\right| \le \left|3 \cdot (x + 1)^2\right| + \left|-10 \cdot (x + 1)\right|$$

es decir . . .

$$\left|3 \cdot (x + 1)^2 - 10 \cdot (x + 1)\right| \le 3 \cdot \left|(x + 1)^2\right| + 10 \cdot \left|(x + 1)\right|$$

$$\left|3 \cdot (x + 1)^2 - 10 \cdot (x + 1)\right| < 3 \cdot \delta^2 + 10 \cdot \delta \quad \textit{(Puesto que } |x + 1| < \delta \textit{)}$$

$$\left|3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 7\right| < 3 \cdot \delta + 10 \cdot \delta \qquad \textit{(Dado que } \delta^2 < \delta \textit{ por ser } \delta > 0 \textit{)}$$

En resumen . . .

$$|f(x) - 8| < 13 \cdot \delta \quad \textit{cuando} \quad |x + 1| < \delta$$

Por lo tanto, la desigualdad $|f(x) - 8| < \varepsilon$ se cumplirá siempre si se escoge $\varepsilon = 13 \cdot \delta$.

Además, cuando $\delta \to 0$ entonces $\varepsilon \to 0$ también

3.3 a) ***Observaciones***

I. Para que exista el límite $\lim_{x \to a} f(x)$ ***, no es necesario que la función*** $f(x)$ ***esté definida en*** $x = a$

Como se mostró en los ejemplos anteriores, cuando se calcula un límite, *sólo importan los valores de la función en las cercanías de* $x = a$ y el valor $x = a$ no necesariamente debe ser parte del dominio de $f(x)$.

Ejemplo 7. Calcular el límite : $\lim_{x \to (-2)} \left(\dfrac{x^2 - 4}{x + 2} \right)$

Solución : La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ no está definida en $x = -2$, puesto que :

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 2}{(-2) + 2} = \frac{0}{0} \quad \text{no existe.}$$

sin embargo, podemos comprobar que al asignar a x valores numéricos cercanos a -2 , la función se acerca cada vez más al número -4 .

Comprobemos que cuando x difiera de -2 en una cantidad positiva $\delta > 0$ infinitamente pequeña , entonces la función $f(x)$ será distinta del valor -4 en otra cantidad infinitesimal $\varepsilon > 0$, es decir. . .

$$\left| \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2} \right) - (-4) \right| < \varepsilon \qquad \textit{cuando} \qquad |x - (-2)| < \delta$$

Simplificando queda : $\left| \dfrac{x^2 + 4 \cdot x + 4}{(x + 2)} \right| < \varepsilon$ *cuando* $|x + 2| < \delta$

Pero $\dfrac{x^2 + 4 \cdot x + 4}{(x + 2)} = \dfrac{(x + 2)^2}{(x + 2)} = (x + 2)$ asi que las desigualdades anteriores se reducen a

$$|x + 2| < \varepsilon \qquad \textit{cuando} \qquad |x + 2| < \delta$$

Escogiendo $\varepsilon = \delta$, la desigualdad $|f(x) - (-4)| < \varepsilon$ se cumplirá siempre y además si $\delta \to 0$ se sigue que $\varepsilon \to 0$ también

II. ***El límite de una constante*** C ***es la constante misma .*** $\lim\limits_{x\to a} C = C$

Una constante C se puede considerar como una función $f(x) = C$ cuyos valores son siempre iguales. Entonces es obvio que la desigualdad $|f(x) - C| < \varepsilon$, es decir $|C - C| < \varepsilon$ se satisface siempre no importa que tan pequeño sea el número positivo ε .

Asi por ejemplo:

$$\lim_{x\to -3} (8) = 8 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \left(a^2\right) = a^2 \quad , \quad \lim_{x\to 0} (\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad \text{etc.}$$

III. ***Una función*** $f(x)$ ***no puede tener dos límites diferentes para el mismo valor de*** x

DEMOSTRACIÓN :

Si A es un límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ entonces $|f(x) - A| < \varepsilon$ cuando $|x - a| < \delta$

Si B es otro límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ entonces $|f(x) - B| < \varepsilon$ cuando $|x - a| < \delta$

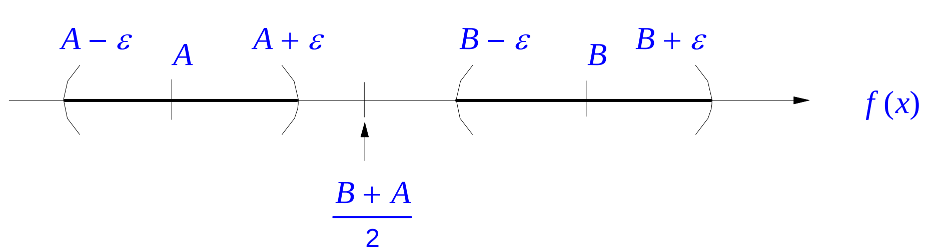
Supongamos que $A < B$, entonces tomando un valor ε comprendido entre :

$$0 < \varepsilon < \left(\frac{B - A}{2}\right)$$

será imposible satisfacer las dos desigualdades $|f(x) - A| < \varepsilon$ y $|f(x) - B| < \varepsilon$ al mismo tiempo, puesto que el valor de la función $f(x)$ no puede estar dentro de los dos intervalos disjuntos :

$$(A - \varepsilon, A + \varepsilon) \quad \text{y} \quad (B - \varepsilon, B + \varepsilon)$$

simultáneamente , como se ilustra en la siguiente figura



3.3 b) ***Límites laterales.***

El *límite por la izquierda* de una función $f(x)$ en $x = b$, se obtiene cuando la variable x se aproxima al valor b *tomando valores siempre menores que* b . Se dice entonces que " x *tiende a* b *por la izquierda* " y tal límite se denota por :

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = A \qquad (3.4)$$

El *límite por la derecha* de una función $f(x)$ en $x = b$, se obtiene cuando la variable x se aproxima al valor b *tomando valores siempre mayores que* b . Se dice entonces que " x *tiende a* b *por la derecha* " y tal límite de la función se denota por :

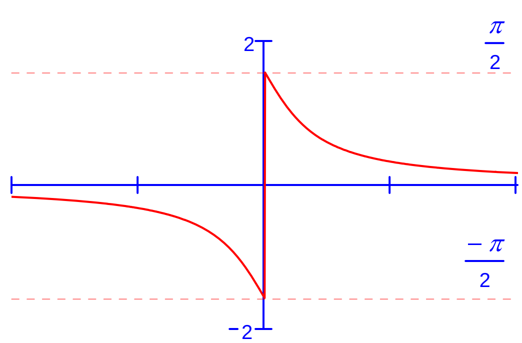
$$\lim_{x \to b^+} f(x) = B \qquad (3.4\ a)$$

Para que una función $f(x)$ tenga un límite en $x = b$, es necesario y suficiente que los límites "por la izquierda" y "por la derecha" sean iguales .

$$\lim_{x \to b} f(x) = A \quad \textit{si y solo si} \quad \lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = A$$

Ejemplo 8. Calcular el límite :

$$\lim_{x \to 0} (arccot(x))$$



Solución : Cuando x se aproxima al 0 por la izquierda :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{-\pi}{2}$$

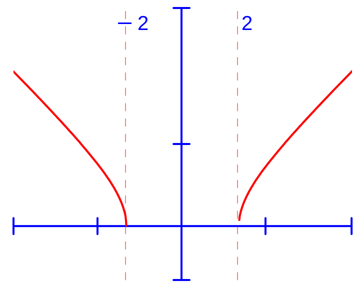
y cuando x se aproxima al cero por la derecha , el límite vale :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Asi que ésta función no tiene un límite en $x = 0$, porque los límites laterales en ese punto no son iguales .

Ejemplo 9. Determinar si existen los límites de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ cuando $x \longrightarrow 2$ y cuando $x \longrightarrow -2$

Solución : El límite por la izquierda cuando x tiende a -2 es :



$$\lim_{x\to(-2)^-} \sqrt{x^2 - 4} = 0$$

Sin embargo, el límite por la derecha en éste mismo punto *no existe*

$$\lim_{x\to(-2)^+} \sqrt{x^2 - 4}$$

porque que el número $x^2 - 4$ es negativo si $x > -2$ y la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

Por otra parte, el límite cuando x tiende a 2 por la derecha es :

$$\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2 - 4} = 0$$

pero el límite por la izquierda : $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{x^2 - 4}$ *tampoco existe* , dado que el número $x^2 - 4$ es negativo si $x < 2$.

Entonces, aunque la función está definida (existe) en $x = -2$ y en $x = 2$ puesto que $f(-2) = 0$ y $f(2) = 0$, no tiene un límite definido en esos puntos.

3.3 c) *Definición de otros límites* :

- Se dice que una función $f(x)$ tiende al *infinito positivo* (∞) ó al *infinito negativo* $(-\infty)$ en $x = a$, si el número $|f(x)|$ se hace mayor que cualquier número positivo M por grande que éste sea , cuando x se aproxima infinitamente al valor a. Es decir

$$|f(x)| > M \quad \text{si} \quad |x - a| < \delta \quad (\text{ con } \delta \text{ tendiendo a cero })$$

y se denota como :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

- Se dice que una función $f(x)$ tiende al límite finito A cuando x tiende al infinito (*positivo ó negativo*) , si $f(x)$ difiere en una cantidad infinitamente pequeña del valor A , cuando $|x|$ se hace mayor que cualquier número positivo M por grande que éste sea . Es decir :

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |x| > M \quad (\text{ con } \varepsilon \text{ tendiendo a cero })$$

y se denota como :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$$

Como consecuencia de éstas definiciones, se deduce que si c es una constante positiva entonces se tienen los siguientes casos especiales . . .

LÍMITES ELEMENTALES

I. $\displaystyle\lim_{x\to 0^{+}} \left(\frac{c}{x}\right) = \infty$ II. $\displaystyle\lim_{x\to 0^{-}} \left(\frac{c}{x}\right) = -\infty$

III. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{c}\right) = \infty$ IV. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{c}{x}\right) = 0$ (3.5)

V. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (c\cdot x) = \infty$

Ejemplo 10. Como ilustración de los límites elementales, consideremos algunas funciones racionales y sus límites correspondientes cuando la variable x tiende a alguna de sus raíces.

a) $\boxed{f(x) = \dfrac{2}{x}}$

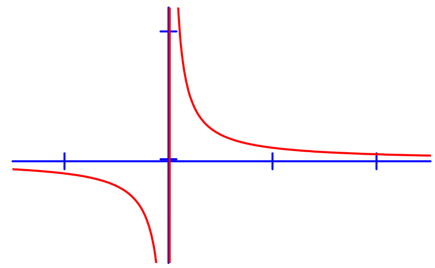
Si $x \to 0^-$, la función es negativa y de acuerdo con el límite elemental II $f(x) \to -\infty$.

Si $x \to 0^+$, la función es positiva y de acuerdo con el límite elemental I $f(x) \to \infty$

Si $x \to \infty$, la función es positiva y de acuerdo con el límite elemental IV $f(x) \to 0$

Si $x \to -\infty$, la función es negativa y de acuerdo con el límite elemental IV $f(x) \to 0$

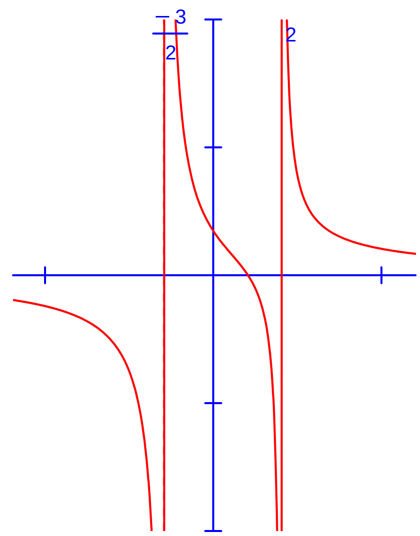
De éste modo, la gráfica de la función presenta el comportamiento que se ilustra en la figura de la derecha.



La función se aproxima infinitamente al eje X cuando $x \to \infty$, $x \to -\infty$

y se aproxima infinitamente al eje Y a medida que $x \to 0^-$, $x \to 0^+$

b) $\boxed{f(x) = \dfrac{x-1}{(x-2)\cdot(2\cdot x+3)}}$



El denominador es cero si $x = 2$ ó $x = \dfrac{-3}{2}$ asi que la función no está definida para esos valores.

Si $x \to 2^-$ entonces $(x-2) < 0$, $(x-1) > 0$ y $(2\cdot x-3) > 0$ por lo tanto la función es negativa.

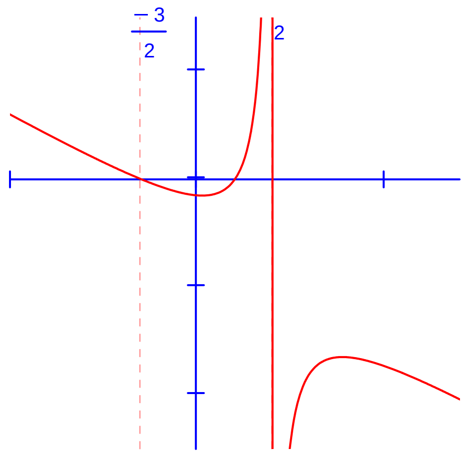
Además, decir que $x \to 2^-$, es equivalente a decir que $(x-2) \to 0^-$ y por al límite elemental II se deduce que $f(x) \to -\infty$.

Si $x \to 2^+$ entonces $(x-2) < 0$, $(x-1) < 0$, $(2\cdot x-3) > 0$ y la función es positiva.
Además como $x \to 2^+$ es equivalente a $(x-2) \to 0^+$, de acuerdo al límite elemental I se concluye que $f(x) \to \infty$.

Si $x \to \left(\dfrac{-3}{2}\right)^+$ entonces $(x-2) < 0$, $(x-1) < 0$, $(2\cdot x-3) > 0$ por lo tanto la función es positiva y dado que $x \to \left(\dfrac{-3}{2}\right)^+$ es equivalente a $(2\cdot x-3) \to 0^+$, de acuerdo con el límite elemental I se obtiene que $f(x) \to \infty$.

Si $x \to \left(\dfrac{-3}{2}\right)^-$ se tiene que $(x-2) < 0$, $(x-1) < 0$ y $(2\cdot x-3) < 0$ y la función es negativa.
Además, dado que $x \to \left(\dfrac{-3}{2}\right)^-$ es equivalente a $(2\cdot x-3) \to 0^-$ de acuerdo al límite elemental II se obtiene que $f(x) \to -\infty$

c) $\boxed{f(x) = \dfrac{(1-x)\cdot(2\cdot x+3)}{(x-2)}}$



Ésta función vale cero cuando el numerador es cero, es decir si

$$x = 1 \quad \text{ó} \quad x = \frac{-3}{2}$$

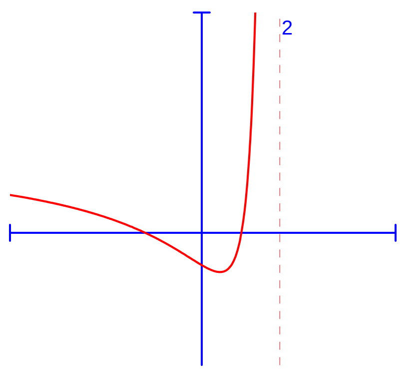
y no está definida cuando el denominador es cero, es decir si

$$x = 2.$$

Por lo tanto, si $x \to 2^+$ entonces $(x-2) > 0$, $(1-x) < 0$, $(2\cdot x+3) > 0$ y la función es negativa. Además como $x \to 2^+$ es equivalente a $(x-2) \to 0^+$, se concluye, de acuerdo al límite elemental I que $f(x) \to -\infty$.

Si $x \to 2^-$ entonces $(x-2) < 0$, $(1-x) < 0$, $(2\cdot x+3) > 0$ y la función es positiva. Además $x \to 2^-$ es equivalente a $(x-2) \to 0^-$ y se deduce, de acuerdo al límite elemental II que $f(x) \to \infty$.

d) $\boxed{f(x) = \dfrac{(2\cdot x+3)\cdot(x-1)}{(x-2)^2}}$



Ésta función vale cero cuando el numerador es cero, es decir si

$$x = 1 \quad \text{ó} \quad x = \frac{-3}{2}$$

y no está definida cuando el denominador es cero, es decir si

$$x = 2.$$

Si $x \to 2^+$ entonces $(x-2)^2 > 0$, $(x-1) > 0$, $(2\cdot x+3) > 0$ y la función es positiva. Además como $x \to 2^+$ es equivalente a $(x-2)^2 \to 0^+$, se concluye, de acuerdo al límite elemental I que $f(x) \to \infty$.

Si $x \to 2^-$ entonces $(x-2)^2 > 0$, $(x-1) > 0$, $(2\cdot x+3) > 0$ y la función es positiva. Además $x \to 2^-$ es equivalente a $(x-2)^2 \to 0^+$ y se deduce, de acuerdo al límite elemental I que $f(x) \to \infty$.

Observemos que las funciones de éstos tres últimos ejemplos contienen los mismos factores ; sin embargo sus gráficas son completamente diferentes debido a las raíces del numerador o del denominador.

Ejemplo 11. Evaluar el límite : $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sqrt[x]{2}}{3-\sqrt[x]{2}}\right)$

Solución : El límite existe, solo si existen los límites cuando $x\to 0^-$ y cuando $x\to 0^+$

Dado el límite elemental $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ se sigue que. . .

$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt[x]{2} = \lim_{x\to 0^-} 2^{\left(\frac{1}{x}\right)} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

y entonces. . . $\lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1+\sqrt[x]{2}}{3-\sqrt[x]{2}}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left[\dfrac{1+2^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{3-2^{\left(\frac{1}{x}\right)}}\right] = \left(\dfrac{1+0}{3-0}\right) = \dfrac{1}{3}$

Dado el límite elemental $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \infty$ se sigue que. . .

$$\lim_{x\to 0^+} 2^{-\left(\frac{1}{x}\right)} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$$

entonces . . .

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1+\sqrt[x]{2}}{3-\sqrt[x]{2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1+2^{\left(\frac{1}{x}\right)}}{3-2^{\left(\frac{1}{x}\right)}}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{2^{\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\left[2^{-\left(\frac{1}{x}\right)}+2\right]}{2^{\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\left[(3)\cdot 2^{-\left(\frac{1}{x}\right)}-2\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2^{-\left(\frac{1}{x}\right)}+2}{(3)\cdot 2^{-\left(\frac{1}{x}\right)}-2}\right] = \frac{(0)+2}{3\cdot(0)-2} = -1$$

Por lo tanto, el límite buscado *no existe* puesto que los límites laterales son distintos

Ejemplo 12. Demostrar que : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

Solución : Basta con probar que cuando $x > M$ (x es mayor que un número M por grande que éste sea) , la distancia entre $f(x)$ y 1 :

$$\left|f(x)-1\right| = \left|\left(\frac{x+1}{x}\right)-1\right| = \left|\frac{1}{x}\right|$$

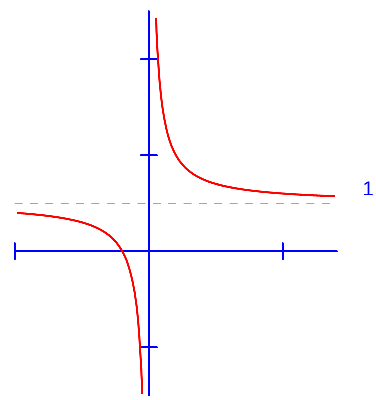
es menor que un pequeño valor positivo ε.

Resolviendo la desigualdad $\left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ resulta . . .

$$|x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Por lo tanto, escogiendo M como $\frac{1}{\varepsilon}$,

y la desigualdad $\left|f(x)-1\right| < \varepsilon$ se cumplirá siempre .



En éste ejemplo se puede notar también que si $x \to 0^-$ entonces $f(x) \to -\infty$

y si $x \to 0^+$ entonces $f(x) \to \infty$

Puede ocurrir también que : $\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty}$ en tal caso, se dice que la función tiende al infinito .

Por ejemplo en : $\lim_{x\to\infty}\left(x^2\right) = \infty$ ó en $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\right) = -\infty$

3.4 ***Teoremas sobre límites*** :

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones de x *tales que existen los límites* :

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B$$

entonces valen los siguientes teoremas :

Teorema I .
El límite de una suma de funciones es la suma de los límites de las funciones correspondientes .

$$\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = A+B$$

Teorema II .
El límite de un producto de funciones es el producto de los límites de las funciones correspondientes

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A\cdot B$$

En particular, si una de las funciones es constante, entonces el teorema anterior establece que :

el límite de una constante por una función es igual al producto de la constante por el límite de la función .

$$\lim_{x\to a} c\cdot g(x) = c\cdot \lim_{x\to a} g(x) = c\cdot B$$

puesto que el límite de una constante c es la misma constante .

Teorema III .
El límite de un cociente de funciones es el cociente de los límites de las funciones correspondientes

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)}{\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)} = \frac{A}{B}$$

Teorema IV .
El límite de una función elevada a la n-ésima potencia es la potencia n-ésima del límite de la funcion

$$\lim_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n = A^n$$

$$\lim_{x\to a} (f(x))^{\frac{1}{n}} = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{A}$$

Ejemplo 13. Calcular el límite: $\lim_{x \to -1} \left(\dfrac{3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1}{5 \cdot x - 2} \right)$

Solución : Haciendo $f(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$; $g(x) = 5 \cdot x - 2$ y aplicando el teorema III anterior se tiene . . .

$$\lim_{x \to (-1)} \left(\frac{3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1}{5 \cdot x - 2} \right) = \frac{\lim_{x \to (-1)} \left(3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1 \right)}{\lim_{x \to (-1)} (5 \cdot x - 2)}$$

Aplicando ahora los teoremas I , II y IV se obtiene:

$$\lim_{x \to (-1)} \left(\frac{3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1}{5 \cdot x - 2} \right) = \frac{3 \cdot \left[\lim_{x \to (-1)} x^2 \right] + \left[2 \cdot \lim_{x \to (-1)} x \right] - \left[\lim_{x \to (-1)} 1 \right]}{5 \cdot \left[\lim_{x \to (-1)} x \right] - \left[\lim_{x \to (-1)} 2 \right]}$$

$$= \frac{3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1}{5 \cdot (-1) - 2}$$

$$= \frac{0}{-7} = 0$$

DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS

Dado que $\lim_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim_{x \to a} g(x) = B$, entonces de la definición de límite se sigue que existen los números $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ infinitamente pequeños tales que:

$$|f(x) - A| < \varepsilon_1 \quad \text{cuando} \quad |x - a| < \delta_1 \qquad (1)$$

$$|g(x) - B| < \varepsilon_2 \quad \text{cuando} \quad |x - a| < \delta_2 \qquad (2)$$

Si λ es el mayor de los números δ_1 y δ_2 , entonces las desigualdades (1) y (2) se cumplirán simultáneamente siempre que $|x - a| < \lambda$

Demostración del Teorema I

Al tomar $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ y $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ se tiene que . . .

$$|f(x) - A| + |g(x) - B| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{cuando} \qquad |x - a| < \lambda$$

pero usado la "desigualdad del triángulo" $|z + w| \le |z| + |w|$ para desigualdades, se sigue que . . .

$$|(f(x) - A) + (g(x) - B)| \le \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad |x - a| < \lambda$$

es decir :

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad |x - a| < \lambda$$

Entonces de la definición de límite se sigue que :

$$\boxed{\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B} = \boxed{\lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)}$$

y queda demostrado.

Demostración del Teorema II

Consideremos la suma:

$$|f(x) - A| \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A| + |A| \cdot |g(x) - B|$$

y tomando en consideración que :

$$|f(x) - A| < \varepsilon_1 \ , \qquad |g(x) - B| < \varepsilon_2 \qquad \text{cuando} \qquad |x - a| < \lambda$$

se puede establecer la siguiente desigualdad

$$|f(x) - A| \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A| + |A| \cdot |g(x) - B| < \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + |B| \cdot \varepsilon_1 + |A| \cdot \varepsilon_2$$

Usado la "desigualdad del triángulo" para desigualdades y las propiedades del valor absoluto se obtiene:

$$|(f - A)\cdot(g - B)| + |B| \cdot |f - A| + |A| \cdot |g - B| \ge |(f - A)\cdot(g - B) + B\cdot(f - A) + A\cdot(g - B)|$$

$$. \ge |f(x)\cdot g(x) - A\cdot B|$$

asi que la desigualdad anterior queda:

$$|f(x)\cdot g(x) - A\cdot B| < \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + |B| \cdot \varepsilon_1 + |A| \cdot \varepsilon_2 \qquad \text{cuando} \quad |x - a| < \lambda$$

Entonces tomado , $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 < \dfrac{1}{3} \cdot \varepsilon$, $\varepsilon_1 < \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\varepsilon}{|B|}$ y $\varepsilon_2 < \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\varepsilon}{|A|}$ de la definición de límite

$$\left| f(x)\cdot g(x) - A\cdot B \right| < \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \right) = \varepsilon \qquad \text{cuando} \quad |x-a| < \lambda$$

se concluye que :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B} = \boxed{\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)}$$

y queda demostrado.

Demostración del Teorema III

Dado que el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ puede verse como el producto $f(x)\cdot\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)$, este teorema se sigue del anterior si se logra demostrar que: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$, es decir, que dada una $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que . . .

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad |x-a| < \delta \qquad (*)$$

Por otra parte, puesto que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, existe un número λ_1 tal que :

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2} \qquad \text{cuando} \qquad |x-a| < \lambda_1$$

Además . . .

$$|B| = |B - g(x) + g(x)| \leq |B - g(x)| + |g(x)| < \frac{|B|}{2} + |g(x)|$$

lo cual demuestra que . . .

$$|g(x)| > \frac{|B|}{2} \qquad \text{cuando} \qquad |x-a| < \lambda_1$$

Bajo la condición $|x-a| < \lambda_1$ se cumple entonces que . . .

$$\frac{1}{|B\cdot g(x)|} = \frac{1}{|B|\cdot|g(x)|} < \frac{1}{|B|}\cdot\frac{2}{|B|} . \qquad \text{ó} \qquad |B\cdot g(x)| > \frac{(|B|)^2}{2}$$

Sea λ el menor de los números δ y λ_1 , entonces la desigualdad (*) queda

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|B - g(x)|}{|B\cdot g(x)|} < \frac{|B - g(x)|}{\left[\dfrac{(|B|)^2}{2}\right]} \qquad \text{cuando} \qquad |x-a| < \lambda$$

basta con tomar $\varepsilon = \dfrac{2\cdot|B - g(x)|}{|B^2|}$ y $\delta = \lambda$ para que la desigualdad (*) se cumpla siempre.

OBSERVACIÓN . Los teoremas anteriores ***no pueden utilizarse*** en las expresiones algebráicas que en el límite conduzcan a alguna de las siguientes formas indeterminadas :

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right), \quad \left(\frac{0}{0}\right), \quad [\infty\cdot(0)], \quad (\infty-\infty), \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}$$

las cuales pueden presentarse cuando :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad ; \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty \quad ; \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Antes de aplicar los teoremas sobre límites a tales expresiones, es necesario transformarlas algebraicamente como veremos más adelante.

3.5 *Dos límites fundamentales*

Demostraremos ahora dos límites que son esenciales para el desarrollo del cálculo diferencial :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = 1 \qquad (3.6)$$

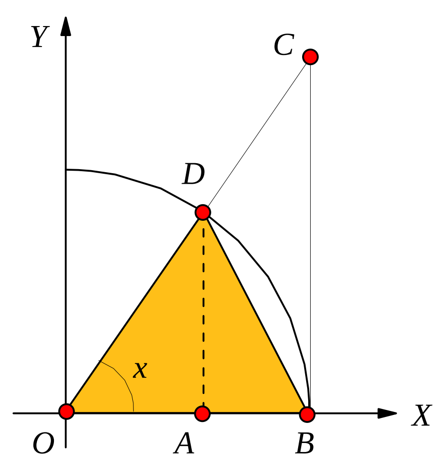
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (3.7)$$

Donde $e = 2.71828182845....$ es el número irracional. (*la base de los logaritmos naturales*)

Consideremos primero un arco de circunferencia de radio R como se indica en la siguiente figura y sean . . .

x : el ángulo entre OC y OB ; $0 < x < \frac{\pi}{2}$

A_1 : el área del triángulo *ODB*



$$A_1 = \frac{(base)\cdot(altura)}{2} = \frac{1}{2}\cdot(R)\cdot(R\cdot sen(x)) = \frac{R^2}{2}\cdot sen(x)$$

A_2 : el área del sector circular *DOB :*

$$A_2 = \frac{(radio)^2\cdot(ángulo)}{2} = \frac{R^2\cdot x}{2}$$

A_3 : el área del triángulo *OCB :*

$$A_3 = \frac{(base)\cdot(altura)}{2} = \frac{(R)\cdot(R\cdot tan(x))}{2} = \frac{R^2}{2}\cdot tan(x)$$

Es evidente que éstas tres áreas se relacionan como $A_1 < A_2 < A_3$, es decir . . .

$$\frac{R^2}{2}\cdot sen(x) < \frac{R^2}{2}\cdot x < \frac{R^2}{2}\cdot\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)$$

Dado que $R^2 > 0$ y $0 < x < \frac{\pi}{2}$, la cantidad $\frac{2}{R^2\cdot sen(x)}$ es positiva, usándola para multiplicar éstas desigualdades, se obtiene . . .

$$\left(\frac{2}{R^2\cdot sen(x)}\right)\cdot\frac{R^2}{2}\cdot sen(x) < \left(\frac{2}{R^2\cdot sen(x)}\right)\cdot\frac{R^2}{2}\cdot x < \left(\frac{2}{R^2\cdot sen(x)}\right)\cdot\frac{R^2}{2}\cdot\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)$$

$$1 < \left(\frac{x}{sen(x)}\right) < \left(\frac{1}{cos(x)}\right)$$

Pero en una desigualdad si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$ entonces $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ y por lo tanto . . .

$$1 \geq \left(\frac{sen(x)}{x}\right) \geq cos(x)$$

Asi que en el límite cuando $x \to 0$ se obtiene :

$$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) \geq \lim_{x\to 0}(cos(x))$$

$$1 \geq \left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\right] \geq 1$$

y ambas desigualdades se cumplen solamente si :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = 1$$

Resultado que vale lo mismo tanto para $x > 0$ como para $x < 0$ puesto que $cos(-x) = cos(x)$ y

$$\left(\frac{sen(-x)}{-x}\right) = \left[\frac{-(sen(x))}{-x}\right] = \left(\frac{sen(x)}{x}\right)$$

y la prueba anterior no se altera si se cambia x por $-x$

Nótese que al tratar de calcular el límite anterior usando directamente los teoremas sobre límites, se obtendría la forma *indeterminada* $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = \frac{\lim_{x\to 0}(sen(x))}{\lim_{x\to 0}(x)} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Ejemplo 14. Evaluar el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)$

Solución : Éste límite ***no se puede calcular directamente*** usando los teoremas sobre límites , ya que se obtiene una forma indeterminada . . .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) = \frac{\lim_{x\to 0}(1-\cos(x))}{\lim_{x\to 0}(x)} = \frac{\lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0}\cos(x)}{\lim_{x\to 0}(x)}$$

$$= \frac{1-1}{0} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Así pues, primero *se debe transformar la expresión algebraica inicial* ***en otra equivalente****, de tal manera que la aplicación de los teoremas sobre límites no conduzca a una forma indefinida*.

Racionalizando la fracción (multiplicándolo por el binomio conjugado $1+\cos(x)$) resulta . . .

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right)\cdot\left(\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) = \frac{1-\cos^2(x)}{x\cdot(1+\cos(x))} = \frac{sen^2(x)}{x\cdot(1+\cos(x))}$$

pues $\cos^2(x) + sen^2(x) = 1$.

Multiplicando ahora la fracción por x con el fin de obtener la fracción $\frac{sen(x)}{x}$ queda:

$$\frac{1-\cos(x)}{x} = \left(\frac{x}{x}\right)\cdot\frac{sen^2(x)}{x\cdot(1+\cos(x))} = \left(\frac{sen(x)}{x}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{1+\cos(x)}\right)$$

Ahora ya es posible aplicar los teoremas sobre límites, obteniéndose . . .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos(x)}{x}\right) = \left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)\right]^2\cdot\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{1+\cos(x)}\right)\right]$$

Pero $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = 1$ así que resulta:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-cos(x)}{x}\right) = (1)^2\cdot\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0$$

Ejemplo 15. Evaluar el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(k\cdot x)}{x}\right)$

Solución : La aplicación directa de los teoremas sobre límites conduce también en este caso a una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Por lo tanto, primero se debe transformar algebraicamente la expresión inicial. Multiplicando y dividiendo la fracción por la constante k resulta . . .

$$\frac{sen(k\cdot x)}{x} = \left(\frac{k}{k}\right)\cdot\left(\frac{sen(k\cdot x)}{x}\right) = k\cdot\left(\frac{sen(k\cdot x)}{k\cdot x}\right)$$

Haciendo ahora el cambio de variable $u = k\cdot x$, si $x\to 0$, entonces $u\to 0$ y los teoremas sobre límites conducen a :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(k\cdot x)}{x}\right) = \lim_{u\to 0}\left[k\cdot\left(\frac{sen(u)}{u}\right)\right] = k\cdot\lim_{u\to 0}\left(\frac{sen(u)}{u}\right) = k\cdot(1) = k$$

Ejemplo 16. Calcular el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tan(x)}{x}\right)$

Solución : La aplicación directa de los teoremas sobre límites genera la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Transformando la fracción usando la identidad trigonométrica $tan(x) = \left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right)$

$$\frac{tan(x)}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)\cdot tan(x) = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{sen(x)}{cos(x)}\right) = \frac{1}{cos(x)}\cdot\left(\frac{sen(x)}{x}\right)$$

Aplicando ahora los teoremas sobre límites y $\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = 1$, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tan(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{cos(x)}\cdot\frac{sen(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{cos(x)}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{(1)}\cdot(1) = 1$$

o

Demostremos ahora un límite de importancia fundamental para el cálculo diferencial :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (3.7)$$

Primero veamos que éste límite es un valor comprendido entre el número 2 y el número 3 , para tal fin consideremos el desarrollo del binomio $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ donde n es un entero positivo.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1+n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)+\left[\frac{n\cdot(n-1)}{(2)!}\right]\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{2}+\left[\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{(3)!}\right]\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^{3}+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Simplificando el lado derecho queda . . .

$$1+\frac{n}{n}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{n(n-1)}{n^{2}}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left[\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^{3}}\right]+\ldots\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left[\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\ldots\cdot[n-(n-1)]}{n^{n}}\right]$$

$$= 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots\ldots+\left[\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

Todos éstos términos son positivos para $n \geq 2$, puesto que para cualquier entero positivo k menor que n se cumple que . . .

$$0 < \left(1-\frac{k}{n}\right) < 1 \qquad (*)$$

Obviamente, la suma de los dos primeros términos del desarrollo anterior, es un número menor que la suma de todos ellos , es decir :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > 1+1 \qquad (**)$$

lo cual demuestra que $2 < \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Si se reemplaza ahora cada factor $\left(1-\frac{k}{n}\right)$ por un número 1 , es claro por el resultado (*) que . . .

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\,........+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ......\cdot n}$$

También es cierto que : $\frac{1}{(k)!} < \frac{1}{2^{k-1}}$, es decir $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ......\cdot k} < \frac{1}{2^{k-1}}$ para cualquier entero $k \geq 3$.

Por lo tanto, podemos escribir el desarrollo anterior como :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\,........+\frac{1}{2^{n-1}} \quad = \quad 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\,........+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Los términos del paréntesis forman una *serie geométrica de razón* $\frac{1}{2}$ *y su suma es* $\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$, esto es :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}$$

Simplificando se obtiene . . . $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3-\frac{1}{2^{n-1}}$ (***) .

De los resultados (**) y (***) , se obtiene como conclusión que : $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$

En resumen : la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ***es creciente y tiene un valor comprendido entre*** 2 ***y*** 3 ***cuando*** $n \to \infty$ ***, el cual se denota con el símbolo*** e .

Además, como cualquier número real x está comprendido entre dos enteros consecutivos n y $n+1$, asi que :

$$n < x \leq (n+1)$$

Tomado el recíproco de las desigualdades resulta : $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$

Sumado un número 1 en las dos desigualdades queda : $1+\frac{1}{n} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right) > 1+\frac{1}{n+1}$

y por lo tanto, dado que $(n+1) \geq x > n$ se tiene . . .

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \qquad (\,!\,)$$

Si $x \to \infty$, entonces $n \to \infty$ y resulta :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot(1+0) = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)} = \frac{e}{(1+0)} = e$$

Por lo tanto la expresión (!) queda :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

$$e \geq \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right] > e$$

de donde se deduce <u>*necesariamente*</u> que : $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Por otra parte, cuando $x \to -\infty$, se puede hacer el cambio de variable : $u = -(x+1)$, es decir $x = -(u+1)$ asi que si $x \to -\infty$ entonces $u \to \infty$ y

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{u\to\infty}\left(1-\frac{1}{u+1}\right)^{-u-1}$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left(\frac{u+1}{u}\right)^{u+1}$$

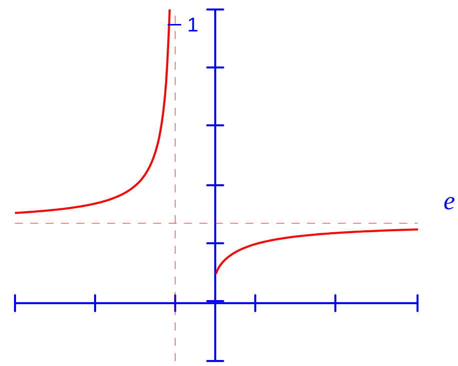
$$= \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\cdot\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right) = e\cdot(1+0) = e$$

Quedando asi demostrado que el límite (3.7) vale e tanto si $x \to \infty$ como si $x \to -\infty$

Además, el dominio de la función $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ está determinado por la condición: $1+\dfrac{1}{x} > 0$ cuya solución son los intervalos :

$x < -1$ y $0 \le x$

y en su gráfica se puede apreciar claramente que si $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ ésta función tiende al número e como límite .



Una ***forma equivalente*** para el límite del número e resulta al cambiar la variable x en la función $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$,

haciendo $x = \dfrac{1}{u}$ de modo que si $x \to \infty$ entonces $u \to 0$ y el límite anterior se transforma en:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{u\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{u}}\right)^{\frac{1}{u}} = \boxed{\lim_{u\to 0}(1+u)^{\left(\frac{1}{u}\right)} = e} \qquad (3.7a)$$

Ejemplo 17. Calcular el límite: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$

Solución : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3}$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3} = e\cdot(1+0)^{3} = e$$

Ejemplo 18. Calcular el límite: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3\cdot x}$

Solución : Haciendo el cambio de variable $u = \dfrac{2}{x}$ para lograr la forma (3.7a) resulta :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2\cdot\left(\frac{3\cdot x}{2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^6 = \lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^6$$

$$= \left[\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^6 = e^6$$

Ejemplo 19. Calcular el límite: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x-4}$

Solución : Se debe transformar primero la expresión bajo el exponente a la forma $\left(1+\frac{1}{u}\right)$ pidiendo que :

$$\left(\frac{x+2}{x-3}\right) = \left(1+\frac{1}{u}\right)$$

de donde se deduce que $u = \frac{x-3}{5}$ y por lo tanto $x = 5\cdot u+3$. Además si $x\to\infty$, entonces $u\to\infty$ y el límite se transforma en . . .

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x-4} = \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{(5\cdot u+3)-4} = \lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^5\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-1}$$

La aplicación de los teoremas elementales sobre límites y el límite (3.7a) generan el resultado :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x-4} = \lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right]^5\cdot\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-1}$$

$$= e^5\cdot(1+0)^{-1} = e^5$$

3.6 *Clasificación de límites algebráicos* .

En general, los límites de funciones algebráicas que por la aplicación directa de los teoremas sobre límites generan una de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $(\infty - \infty)$, $(\infty)\cdot(0)$ ó $(1)^{\infty}$, se pueden clasificar en los siguientes 4 casos :

CASO I ***. Función racional cuya variable independiente tiende al infinito***

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$$

con $P(x)$ ***y*** $Q(x)$ ***polinomios en*** x ***, tales que*** $\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$ ***y*** $\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty$

Éste caso genera una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Antes de aplicar los teoremas sobre límites, es necesario transformar la función racional ***dividiendo el numerador y el denominador entre la máxima potencia de x*** .
Algunas veces, éste procedimiento funciona también para funciones irracionales.

Ejemplo 20. Calcular el límite: $\lim_{x\to\infty} \frac{(3\cdot x-2)^2\cdot(2\cdot x+3)^3}{\left(x^5+3\cdot x^3-2\right)}$

Solución : La mayor potencia de x en ésta función racional es 5 , asi que dividiendo su numerador y su denominador por x^5 , se obtiene . . .

$$\frac{(3\cdot x-2)^2\cdot(2\cdot x+3)^3}{\left(x^5+3\cdot x^3-2\right)} = \frac{\left[\frac{(3\cdot x-2)^2\cdot(2\cdot x+3)^3}{x^5}\right]}{\left(\frac{x^5+3\cdot x^3-2}{x^5}\right)} = \frac{\frac{(3\cdot x-2)^2}{x^2}\cdot\frac{(2\cdot x+3)^3}{x^3}}{\frac{x^5}{x^5}+\frac{3\cdot x^3}{x^5}-\frac{2}{x^5}}$$

$$= \frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)^2\cdot\left(2+\frac{3}{x}\right)^3}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^5}}$$

Aplicando ahora los *teoremas sobre límites* asi como los *límites elementales* se obtiene :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3\cdot x-2)^2\cdot(2\cdot x+3)^3}{\left(x^5+3\cdot x^3-2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)^2\cdot\left(2+\frac{3}{x}\right)^3}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^5}}$$

$$= \frac{\left[\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)\right]^2\cdot\left[\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)\right]^3}{\lim_{x\to\infty}(1)+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^5}} = \frac{\left[(3-0)^2\right]\cdot\left[(2+0)^3\right]}{1+0-0}$$

$$= \left(3^2\right)\cdot\left(2^3\right)$$

$$= \boxed{72}$$

Ejemplo 21. Hallar el límite: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right)$

Solución : Se tiene aquí una función irracional ; sin embargo si dividiendo la función por la máxima potencia de x , que en este caso es $\sqrt{x}$ resulta . . .

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x^2}}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}}$$

Usado los teoremas sobre límites asi como el límite elemental : $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{c}{x}\right) = 0$ se obtiene :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}(1)}{\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}} = \boxed{1}$$

<u>CASO II</u>. Función racional cuya variable independiente tiende a <u>una raíz común</u> del numerador y del denominador

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$$

donde $\lim_{x \to a} P(x) = 0$ ***y*** $\lim_{x \to a} Q(x) = 0$

Éste caso genera una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{0}{0} \right)$

Antes de aplicar los teoremas sobre límites, es necesario transformar la función racional ***dividiendo su numerador y su denominador entre el factor*** $(x - a)$ ***que genera la raíz común, tantas veces como sea necesario hasta que desaparezca la indeterminación.***

<u>Ejemplo</u> 22. Hallar el límite: $\lim_{x \to 5} \left(\frac{x^2 - 7 \cdot x + 10}{x^2 - 25} \right)$

<u>Solución</u> : Nótese que si: $P(x) = x^2 - 7 \cdot x + 10$ y $Q(x) = x^2 - 25$ entonces

$$P(5) = (5)^2 - 7 \cdot (5) + 10 = 0$$

$$Q(5) = (5)^2 - 25 = 0$$

entonces $(x - 5)$ es un factor común de los polinomios P y Q y es posible escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{x^2 - 7 \cdot x + 10}{x^2 - 25} \right) = \frac{(x - 2) \cdot (x - 5)}{(x + 5) \cdot (x - 5)} = \left(\frac{x - 2}{x + 5} \right)$$

cancelándose tal factor y por lo tanto

$$\lim_{x \to 5} \left(\frac{x^2 - 7 \cdot x + 10}{x^2 - 25} \right) = \lim_{x \to 5} \left(\frac{x - 2}{x + 5} \right) = \frac{(5) - 2}{(5) + 5} = \frac{3}{10}$$

Ejemplo 23. Hallar el límite: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-3\cdot x+2}{x^4-4\cdot x+3}\right)$

Solución : Nótese que si: $P(x) = x^3-3\cdot x+2$ y $Q(x) = x^4-4\cdot x+3$ entonces

$$P(1) = (1)^3-3\cdot(1)+2 = 0$$
$$Q(1) = (1)^4-4\cdot(1)+3 = 0$$

entonces $(x-1)$ es un factor común de los polinomios P y Q y es posible escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{x^3-3\cdot x+2}{x^4-4\cdot x+3}\right) = \frac{\left(x^2+x-2\right)\cdot(x-1)}{\left(x^3+x^2+x-3\right)\cdot(x-1)} = \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3}$$

cancelándose tal factor.

Esta nueva fracción genera también una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$ en $x = 1$, y es necesario factorizar nuevamente $(x-1)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+x-2}{x^3+x^2+x-3} = \frac{(x+2)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot\left(x^2+2\cdot x+3\right)} = \frac{x+2}{x^2+2\cdot x+3}$$

cancelándose tal factor. Esta nueva fracción ya no genera una forma indeterminada en $x = 1$, por lo cual es posible aplicar los teoremas sobre límites y obtener . . .

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2+2\cdot x+3}\right) = \frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}\left(x^2+2\cdot x+3\right)} = \frac{(1)+2}{(1)^2+2\cdot(1)+3} = \frac{1}{2}$$

CASO III . Función irracional que se puede transformar en racional bajo un apropiado cambio de variable.

Algunas funciones irracionales se pueden convertir en racionales mediante ***un cambio a una nueva variable que esté elevada a una potencia que sea el mínimo común denominador de las potencias fraccionarias*** **.**

Ejemplo 24. Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)$

Solución : Las potencias fraccionarias de la variable independiente en ésta expresión irracional son $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, asi que *el mínimo común denominador es* 12 .

Por lo tanto, haciendo el cambio de variable $x = u^{12}$, cuando $x \to 1$ entonces $u \to 1$ y el límite se transforma a . . .

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right) = \lim_{u\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{u^{12}}-1}{\sqrt[4]{u^{12}}-1}\right) = \lim_{u\to 1}\left(\frac{u^4-1}{u^3-1}\right)$$

y se tiene ahora el límite de una función racional.

Procediendo como en el caso II resulta . . .

$$\lim_{u\to 1}\left(\frac{u^4-1}{u^3-1}\right) = \lim_{u\to 1}\frac{\left(u^2+1\right)\cdot(u+1)\cdot(u-1)}{(u-1)\cdot\left(u^2+u+1\right)} = \frac{\left[(1)^2+1\right]\cdot[(1)+1]}{(1)^2+(1)+1} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Ejemplo 25. Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-1}\right]$

Solución : En ésta función irracional aparecen las potencias fraccionarias $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ del factor $(x-1)$, *el mínimo común denominador* de ellas es 6 .

Por lo tanto, haciendo el cambio de variable $x-1 = u^6$, cuando $x \to 2$ entonces $u \to 1$ y el límite se transforma a . . .

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}-1}\right] = \lim_{u\to 1}\left[\frac{\sqrt{u^6}-1}{\left(u^6\right)^{\frac{2}{3}}-1}\right] = \lim_{u\to 1}\left(\frac{u^3-1}{u^4-1}\right)$$

Procediendo ahora como en el caso II resulta :

$$\lim_{u\to 1}\left(\frac{u^3-1}{u^4-1}\right) = \lim_{u\to 1}\left[\frac{(u-1)\cdot\left(u^2+u+1\right)}{\left(u^2+1\right)\cdot(u+1)\cdot(u-1)}\right] = \lim_{u\to 1}\frac{\left(u^2+u+1\right)}{\left(u^2+1\right)\cdot(u+1)}$$

$$= \frac{(1)^2+(1)+1}{\left(1^2+1\right)\cdot(1+1)} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

________________ o ________________

Otra forma para determinar el límite de una función irracional consiste en ***racionalizar .***
La racionalización del binomio $(a-b)$ se realiza multiplicándolo por su binomio conjugado : $(a+b)$.
Frecuentemente también es necesario usar algunas identidades algebráicas elementales como las siguientes:

$$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)$$

$$a^3+b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2-a\cdot b+b^2\right)$$

Ejemplo 26. Calcular el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right)$

Solución : Antes que nada, notemos que el límite no se puede calcular directamente aplicando los teoremas sobre límites porque tal procedimiento conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right) = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{\lim_{x\to 0}(x)} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0}$$

Asi que racionalizando el numerador se obtiene :

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)$$

$$= \frac{(1+x)-(1-x)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

Ahora si es posible aplicar los teoremas sobre límites y resulta . . .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \boxed{1}$$

Ejemplo 27. Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\right)$

Solución : Si se evalúa directamente, éste límite es de la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to 4}\left(3-\sqrt{5+x}\right)}{\lim\limits_{x\to 4}\left(1-\sqrt{5-x}\right)} = \left(\frac{3-\sqrt{5+4}}{1-\sqrt{5-4}}\right) = \frac{3-3}{1-1} = \frac{0}{0}$$

asi que racionalizando la fracción multiplicándola por los binomios conjugados *del numerador y del denominador* resulta:

$$\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}\right)\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}}\right)$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{5+x}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5+x}\right)}{\left(1-\sqrt{5-x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{5-x}\right)}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}\right) = \frac{3^2-(5+x)}{1^2-(5-x)}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}\right)$$

$$= \frac{(4-x)}{(-4+x)}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}\right) = (-1)\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

Aplicando ahora si los teoremas sobre límites queda:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\right) = \lim_{x\to 4}\left[-\left(\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}\right)\right] = -\left[\frac{\lim\limits_{x\to 4}\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\lim\limits_{x\to 4}\left(3+\sqrt{5+x}\right)}\right]$$

$$= -\left(\frac{1+\sqrt{5-4}}{3+\sqrt{5+4}}\right) = -\left(\frac{1+\sqrt{1}}{3+\sqrt{9}}\right) = \boxed{-\left(\frac{1}{3}\right)}$$

CASO IV. ***El límite de una expresión exponencial*** $f(x)^{g(x)}$

Cuando existan los límites : $\lim_{x\to a} f(x)$ *y* $\lim_{x\to a} g(x)$ *entonces el límite :* $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}}$ *puede calcularse en los siguientes casos:*

I) Si $\lim_{x\to a} f(x) = A$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = B$ *son números finitos.*

El límite anterior se evalúa directamente:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B}$$

II) Si $\lim_{x\to a} f(x) \neq 1$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

El límite anterior se evalúa directamente también :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^{\infty}} \quad (\text{ o } A^{-\infty})$$

III) Si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

El límite se evalúa haciendo el cambio de variable: $f(x) = 1 + h(x)$ *tal que*

$\lim_{x\to a} h(x) = 0$ *puesto que* $\lim_{x\to a} f(x) = 1$.

Por consiguiente:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} (1+h(x))^{g(x)} = \lim_{x\to a} (1+h(x))^{g(x)\cdot\left(\frac{h(x)}{h(x)}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{g(x)\cdot h(x)} = \boxed{e^{\lim_{x\to a} (g(x)\cdot h(x))}}$$

Ejemplo 28. Calcular el límite: $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{(x+1)}$

Solución : Considerando $\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{(x+1)} = f(x)^{g(x)}$ entonces : $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ y $g(x) = x+1$,

por lo tanto

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$$

Como éstos dos límites son finitos, se está en el caso I) y el límite exponencial se calcula directamente :

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{(x+1)} = \left[\lim_{x\to 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to 1} (x+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ejemplo 29. Calcular el límite: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{2\cdot x^2+1}\right)^{x^2}$

Solución : Considerando $\left(\frac{x^2+2}{2\cdot x^2+1}\right)^{x^2} = f(x)^{g(x)}$ entonces : $f(x) = \frac{x^2+2}{2\cdot x^2+1}$ y $g(x) = x^2$,

por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2}{2\cdot x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \left(x^2\right) = \infty$$

se está en el caso II) y el límite exponencial se calcula directamente :

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2}{2\cdot x^2+1}\right)^{x^2} = \left[\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+2}{2\cdot x^2+1}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to 1} x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$$

Ejemplo 30. Calcular el límite: $\lim_{x\to 0}\left[(1+sen(x))^{\frac{1}{x}}\right]$

Solución : Considerando $(1+sen(x))^{\frac{1}{x}} = f(x)^{g(x)}$ entonces : $f(x) = 1+sen(x)$ y $g(x) = x^{-1}$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (1+sen(x)) = 1+0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right) = \infty$$

Por lo tanto el límite exponencial se calcula haciendo la substitución : $f(x) = 1+h(x)$ es decir : $1+sen(x) = 1+h(x)$ de donde se deduce que $h(x) = sen(x)$

Además, si $x \to 0$ entonces $h(x)\to 0$ y se tiene :

$$(1+sen(x))^{\frac{1}{x}} = (1+sen(x))^{\left(\frac{sen(x)}{x\cdot sen(x)}\right)} = \left[(1+sen(x))^{\frac{1}{sen(x)}}\right]^{\frac{sen(x)}{x}}$$

Se obtiene asi que:

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+sen(x))^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[(1+sen(x))^{\frac{1}{sen(x)}}\right]^{\frac{sen(x)}{x}}$$

$$= \left[\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}} = e^{1} = e$$

donde se han aplicado los límites fundamentales :

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\left(\frac{1}{h}\right)} = e \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x} = 1$$

Ejemplo 31. Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

Solución : Considerando $f(x)^{g(x)} = \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$ entonces : $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ y $g(x) = x+2$,

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to\infty}(x+2) = \infty$$

Por lo tanto, se está en el caso III y para calcular el límite de la función exponencial, se debe hacer la substitución : $f(x) = 1+h(x)$ es decir : $\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right) = 1+h(x)$ de donde se deduce que . . . $h(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right) - 1 = -\left(\dfrac{4}{x+3}\right)$

Además, si $x\to\infty$, entonces $h(x)\to 0$. Bajo éste cambio de variable, la función se transforma en:

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{x+2} = \left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{(x+2)\cdot\left[\frac{-4\cdot(x+3)}{-4\cdot(x+3)}\right]}$$

$$= \left[\left(1-\frac{4}{x+3}\right)^{\left(\frac{x+3}{-4}\right)}\right]^{\frac{-4\cdot(x+2)}{x+3}} = \left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{\frac{-4\cdot(x+2)}{x+3}}$$

Por lo tanto . . .

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{-4\cdot(x+2)}{x+3}\right]}$$

$$= e^{-4} = \boxed{\frac{1}{e^4}}$$

donde se han usado los resultados de . . .

$$\lim_{h\to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{4\cdot x+8}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty} -\left(\frac{4+\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x}}\right) = -4$$

3.7 *Continuidad de las funciones* .

Definición 1 :

El ***incremento*** Δx de una variable x que pasa de un valor inicial x_0 a un valor final x se define como :

$$\boxed{\Delta x = x - x_0} \tag{3.9}$$

y de ésta definición se deduce que el valor final de x se puede escribir como : $x = x_0 + \Delta x$

Definición 2:

Si $y = f(x)$ es una función de x, *el incremento* $\Delta f(x)$ *de la función* correspondiente al incremento Δx de su variable independiente es la diferencia entre el valor final $f(x)$ y el inicial $f(x_0)$:

$$\boxed{\Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} \tag{3.10}$$

Es claro que el incremento de una función ó el de de su variable independiente pueden ser cualquier numero real positivo ó negativo.

Como se hizo notar anteriormente al calcular límites, el valor del límite de una función $\lim_{x\to a} f(x)$ no necesariamente es igual al valor $f(a)$ de la función cuando ésta se evalúa en $x = a$

Las funciones para las cuales éstos dos valores, $f(a)$ y $\lim_{x\to a} f(x)$, son iguales se llaman ***continuas*** **,** o más precisamente, continuas en el valor $x = a$

Definición 3 . Una función *f(x)* es ***continua en*** $x = a$, si $\boxed{f(a) = \lim_{x\to a} f(x)}$

y ésta condición requiere que se cumplen tres cosas . . .

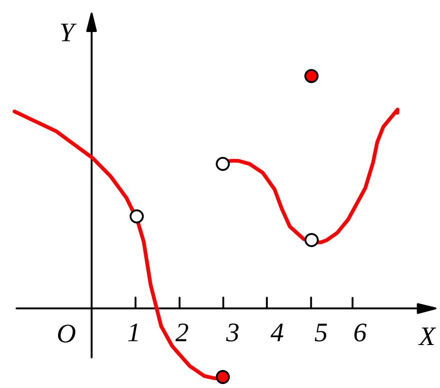
I. ***Que*** $f(a)$ ***exista*** *, es decir, que* $f(x)$ *está definida en* $x = a$*, de manera que el número* a *sea parte del dominio de* f.

II. ***Que*** $\lim_{x\to a} f(x)$ ***exista y sea finito*** *, de modo que* $f(x)$ *esté definida en un intervalo abierto que contenga al número* a .

III. ***Que las dos cantidades anteriores sean iguales*** , es decir $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Cuando una función $f(x)$ no es continua en $x = a$, se dice que es ***discontinua*** para tal valor de x.

Ejemplo 32. En la siguiente figura se muestra la gráfica de una función que "se rompe" o tiene "saltos", es decir es discontinua en 3 puntos :



- En $x = 1$ porque la función no está definida ahí, es decir, $f(1)$ ***no existe*** (*lo cual se indica por un punto hueco*)

- En $x = 3$ pero la razón de la discontinuidad es diferente. en este caso, $f(3)$ está definida y es negativa (*lo cual se indica con un punto lleno*) pero $\lim_{x\to 3} f(x)$ ***no existe*** porque en ese punto los límites por la izquierda y por la derecha no son iguales .

- En $x = 5$. Aunque existen tanto $f(5)$ como, $\lim_{x\to 5} f(x)$,

  éstas dos cantidades no son iguales : $f(5) \neq \lim_{x\to 5} f(x)$

Si $x \to a$ entonces su incremento tiende a cero $\Delta x = (x - a) \to 0$ y por lo tanto, la condición sobre la continuidad de una función también se puede escribir en la siguiente forma . . .

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\Delta x\to 0} f\left(a + \Delta x\right) = f(a) \qquad (3.11)$$

pero dado que $f(a)$ es una constante y el límite de una constante es la propia constante, se tiene que. . .

$$\lim_{\Delta x\to 0} f\left(a + \Delta x\right) = \lim_{x\to a} f(a) \quad \text{ó} \quad \lim_{\Delta x\to 0} \left(f\left(a + \Delta x\right) - f(a)\right) = 0$$ 2)

y como $f(a+\Delta x) - f(a) = \Delta f(x)$ es el incremento de la función, finalmente la condición que define a una función continua en un punto $x = a$ se puede escribir como:

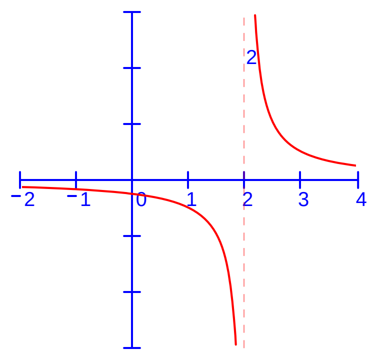
$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \left(\Delta f(x)\right) = 0} \qquad (3.12)$$

Se dice además que una función es ***continua en todo un intervalo*** (a, b), si *tal función es continua en todos los puntos del intervalo*.
Y por el contrario, basta que la condición de continuidad no se cumpla en ***al menos un punto*** de un intervalo para que tal función *no sea continua en ese intervalo*.

Ejemplo 33. Determinar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Solución : Ésta función es discontinua en $x = 2$ porque en éste valor fallan dos de las condiciones de continuidad , a saber . . .

- $f(2) = \dfrac{1}{(2)-2}$ *no existe* ya que implica una división por cero. La función no está definida en $x = 2$



- $\lim_{x \to 2} f(x)$ *no existe* porque. . .

$$\lim_{x \to (2)^+} \left(\frac{1}{x-2}\right) = \infty \quad ;$$

$$\lim_{x \to (2)^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty$$

Se dice que una función como ésta tiene una ***discontinuidad infinita*** en $x = 2$

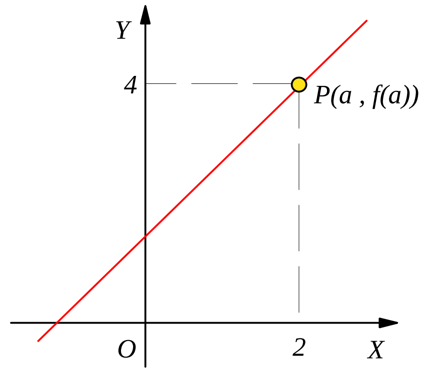
Ejemplo 34. Determinar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Solución : Ésta función es discontinua en $x = 2$ porque aunque el límite $\lim_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2-4}{x-2}\right) = 4$

existe, la función sin embargo no está definida en $x = 2$, dado que :

$$f(2) = \frac{(2)^2 - 4}{(2) - 2}$$

conduce a una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.



Se dice que una función como la de éste ejemplo, tiene una ***discontinuidad evitable ó removible*** porque es posible definir $f(2) = 4$, de modo que se llene el *"hueco"* que la función tiene en $x = 2$ y de ésta manera se haga continua en ese punto.

En general, cuando existen y son finitos los límites por la izquierda y por la derecha de una función $f(x)$ en $x = a$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = A \quad ; \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = B$$

pero los tres números $f(a)$, A y B no son iguales entre si, se dice que la función tiene una ***discontinuidad de primera especie***.
En particular si $A = B$, entonces $x = a$ se llama *punto de discontinuidad evitable* pues para hacer que la función sea continua en tal punto, basta con definirla como el valor de su límite en ese punto, es decir:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

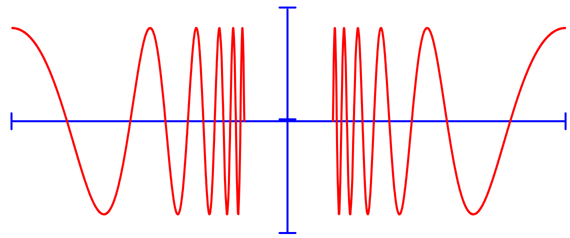
Todos los puntos de discontinuidad que no son de primera especie se llaman ***discontinuidades de 2ª especie***, como son por ejemplo las discontinuidades donde la función se hace infinita, ó aquéllas en las que los límites A o B no existen .

Ejemplo 35. Determinar la continuidad de la función $f(x) = cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Solución : Ésta función tiene en $x = 0$ una discontinuidad de 2ª especie pues no existen ninguno de los límites laterales :

$$\lim_{x \to 0^-} cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x \to 0^+} cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

y además oscila cada vez más rápido cuando x tiende a cero ; de modo que no está definida en ese punto, es decir tampoco existe $f(0)$.



En éste caso, no es posible definir la función en $x = 0$ para hacerla continua en tal punto

<u>*TEOREMA*</u> 1 .

Si $f(x)$ *y* $g(x)$ *son dos funciones continuas en* $x = a$ *y* c *es una constante ,*
entonces las funciones

I) $f + g$ *II)* $f - g$ *III)* $c \cdot f$

IV) $f \cdot g$ *V)* $\dfrac{f}{g}$ *si* $g(a) \neq 0$ *VI)* $f \bullet g = f(g(x))$

también son continuas *en* $x = a$.

Las primeras cinco partes de éste teorema se infieren de los correspondientes teoremas sobre los límites. Por ejemplo, dado que f y g son continuas en $x = a$, se tiene :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad ; \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

por lo cual . . .

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) \quad \textit{(por ser el límite de un producto)}$$

$$= f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$$

Lo cual demuestra que el producto $f \cdot g$ de funciones continuas en $x = a$ es también una función continua en ese punto *porque se cumple la condición de continuidad :* $\lim_{x \to a} (f \cdot g) = (f \cdot g)(a)$

TEOREMA 2 .

Las funciones . . .

Polinomiales *Racionales* *Irracionales*
Trigonométricas *Trigonométricas inversas*
Exponenciales
Logarítmicas

son ***continuas*** *en todo valor de su dominio.*

DEMOSTRACIÓN :

Un polinomio es una función de la forma:

$$P(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + ... + c_n \cdot x^n$$

donde los coeficientes c_0 , c_1 , c_2 , c_3 , . . . c_n *son constantes; pero se sabe que*

$$\lim_{x \to a} c = c \qquad y \qquad \lim_{x \to a} x^k = a^k$$

(***El último límite es precisamente la proposición de continuidad para una función potencia***).

Por lo tanto, se deduce que la función $g(x) = c \cdot x^k$ *es continua porque*

$$\lim_{x \to a} \left(c \cdot x^k \right) = \left(\lim_{x \to a} c \right) \cdot \left(\lim_{x \to a} x^k \right) = c \cdot a^k$$

Dado que un polinomio es una suma de términos del tipo $c \cdot x^k$ *, se concluye que todo polinomio es una función continua.*

Una función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *es el cociente de dos polinomios y por lo tanto, del teorema 1 se deduce que también es una función continua para todos los puntos donde* $Q(x) \neq 0$.

De las definiciones : $sen(0) = 0$, $cos(0) = 1$ *junto con* $\lim_{x \to 0} sen(x) = 0$, $\lim_{x \to 0} cos(x) = 1$

se deduce que las funciones seno y coseno son continuas en $x = 0$ *y por lo tanto, aplicando las fórmulas de la suma de ángulos para coseno y seno se puede deducir que éstas funciones son continuas en todas partes.*

Por ejemplo de la condición (3.11) : $\lim_{h \to 0} (f(a+h)) = f(a)$ *que establece la continuidad de una función en* $x = a$ *, aplicada a la función seno queda:*

$$\lim_{h \to 0} (sen(a+h)) = \lim_{h \to 0} (sen(a) \cdot cos(h) + sen(h) \cdot cos(a))$$

$$= sen(a) \cdot \left(\lim_{h \to 0} cos(h) \right) + \left(\lim_{h \to 0} sen(h) \right) \cdot cos(a)$$

$$= sen(a) \cdot (1) + (0) \cdot cos(a) = sen(a)$$

lo cual prueba que $sen(x)$ *es continua para cualquier valor* a .
Dado que todas las demás funciones trigonométricas se definen en términos del seno y del coseno, se infiere que todas ellas son continuas en todos los puntos donde estén definidas.

La inversa f^{-1} *de cualquier función invertible* f *que sea continua, también es una función continua, puesto que se obtiene reflejando la gráfica de* $f(x)$ *respecto a la recta* $y = x$ *. Por lo tanto, las funciones trigonométricas inversas también son continuas.*

La simple definición de la función exponencial $f(x) = a^x$ *la hace continua en los reales, por lo tanto, su función inversa,* $f^{-1}(x) = log_a(x)$ *, el logaritmo, también es continua.*

Ejemplo 36. ¿ En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{ln(x) - arctan(x)}{x^2 - 1}$?

Solución : Sabemos que $ln(x)$ es continua en su dominio $(x > 0)$ y que $arctan(x)$ es continua en su dominio $(-\infty, \infty)$, por lo tanto, por el teorema 1, $ln(x) + arctan(x)$ es continua en $x > 0$.

El denominador es un polinomio, de modo que es continuo en todas partes, por lo tanto la fracción $\dfrac{ln(x) - arctan(x)}{x^2 - 1}$ existe siempre que el denominador no sea cero: $x^2 - 1 \neq 0$, es decir $x \neq 1, -1$.

En resumen . . . la función $f(x)$ es continua en los intervalos abiertos: $(0, 1)$ y $(1, \infty)$.

3.8 Propiedades de las funciones continuas.

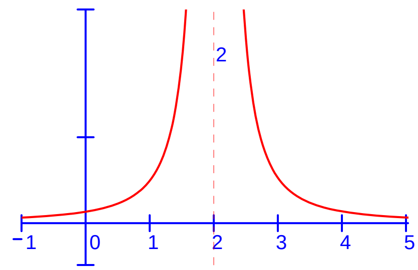
Toda función continua en un intervalo $[a, b]$ tiene las siguientes propiedades :

I. ***Si*** f ***es una función continua en*** $[a, b]$ ***entonces está acotada .***

es decir que para todo valor de x en el intervalo $[a, b]$, el valor absoluto $|f(x)|$ *es siempre menor que una constante positiva* M *:*

$$|f(x)| \leq M$$

La función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ es un contraejemplo de la propiedad anterior.
Ésta función no es continua en $x = 2$ y por lo tanto no está acotada en un intervalo que contenga al valor 2 , por ejemplo el intervalo $[-4, 4]$, o *cualquier otro intervalo que contenga a éste punto de discontinuidad*.

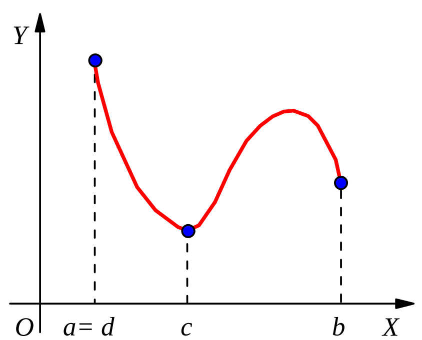


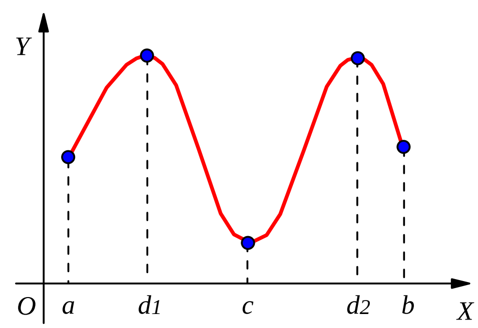
II. ***Teorema del Valor Extremo*** .

Si $f(x)$ es una función ***continua*** *en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces* ***tiene al menos un valor mínimo absoluto*** $m = f(c)$ ***y un valor máximo absoluto*** $M = f(d)$ *en algunos valores $x = c$ y $x = d$ dentro de $[a, b]$*

Es claro que $f(c)$ es un mínimo absoluto de $f(x)$ si $f(c) \le f(x)$ para todo valor x en $[a, b]$ y que $f(d)$ es un máximo absoluto si $f(d) \ge f(x)$ para todo valor x en $[a, b]$.

Consideremos por ejemplo las gráficas de las siguientes funciones continuas :



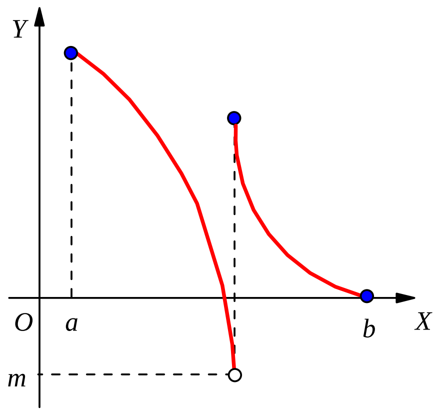


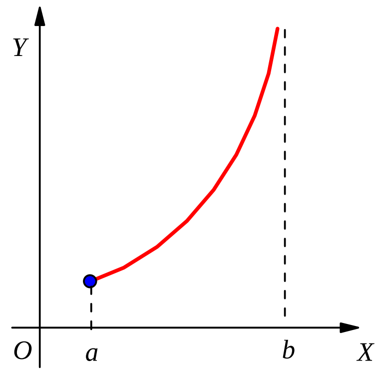
donde se aprecia claramente que :

- *una función continua puede tener un valor extremo (un máximo o un mínimo), más de una vez en el intervalo $[a, b]$, como se ilustra en la gráfica de la derecha.*

- *el valor extremo de una función continua puede ocurrir en uno de los extremos del intervalo como se puede apreciar en la gráfica de la izquierda.*

Además, si se omite cualquiera de las dos condiciones que establece el teorema del valor extremo (continuidad e intervalo cerrado), una función puede no poseer valores extremos como se ilustra en las gráficas de las siguientes funciones:





En la gráfica de la izquierda, la función está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$; sin embargo, no tiene un mínimo absoluto porque tiene una discontinuidad dentro del intervalo. Toma valores arbitrariamente cercanos a m, pero nunca alcanza el valor m (lo cual se indica por un punto hueco)
Por otra parte, la función representada a la derecha es continua en el intervalo $[a, b)$, sin embargo, éste no es cerrado y la función no tiene un máximo absoluto (tiende al infinito) .

Aunque este teorema es intuitivamente muy claro y casi evidente, es difícil de probar y aquí no se dará su demostración

III. ***Teorema del Valor Intermedio***

Si $f(x)$ es una función ***continua*** *en un intervalo cerrado $[a, b]$ y N es cualquier número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que*

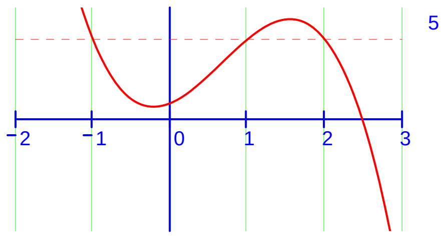
$$N = f(c) \qquad \text{es decir :} \qquad f(a) \le f(c) \le f(b)$$

El teorema del valor intermedio afirma que si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces ***toma al menos una vez*** todos los valores numéricos intermedios comprendidos entre los extremos $f(a)$ y $f(b)$.

Si se piensa en una función continua como una función cuya gráfica no tiene agujeros o rupturas, el teorema del valor intermedio afirma que cualquier recta horizontal $y = N$ tal que $f(a) < y < f(b)$ cortará a la gráfica de la función en un punto por lo menos.

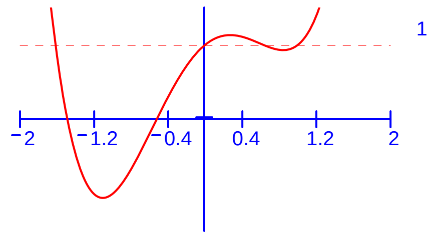
Ejemplo 37 . Consideremos las funciones:

$$f(x) := -2\cdot x^3 + 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) := x^4 - 2\cdot x^2 + x + 1$$



$f(-2) = 29$; $f(3) = -11$

Esta función toma 3 veces el valor 5 *en el intervalo* $[-2, 3]$ *, en los puntos* $x = -1$, $x = 1$ *y* $x = 2$.



$g(-2) = 7$; $g(1) = 1$

Ésta función toma 4 veces el valor 1 *en el intervalo* $[-2, 1]$ *, en* $x = -1.618$, $x = 0$, $x = 1$ *y* $x = 0.618$ *)*

Un uso del teorema del valor intermedio consiste en localizar las raices de algunas ecuaciones dado que, para toda función $f(x)$ continua en $[a, b]$, si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces la curva correspondiente $y = f(x)$ cruza por lo menos una vez al eje X. Ésto significa que la función debe tomar por lo menos una vez el valor cero dado que en un extremo es negativa y en el otro es positiva, es decir . . .

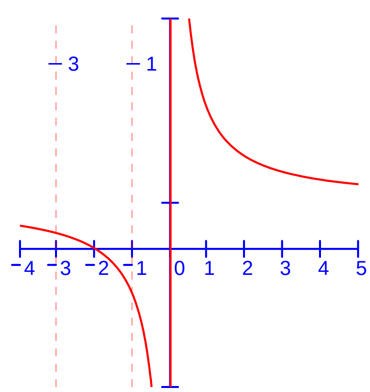
la ecuación $f(x) = 0$ ***tiene por lo menos una solución real comprendida entre*** $x = a$ ***y*** $x = b$ **.**

Nótese que el inverso de éste resultado no es verdad , es decir si $f(x_0) = 0$ en algún punto x_0 del intervalo $[a, b]$, no necesariamente $f(x)$ es continua en ese intervalo ni tampoco se deduce que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos .

Ejemplo 38 . Consideremos la función: $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ en el intervalo $-3 \le x \le -1$

Ésta función no tiene puntos de discontinuidad en el intervalo $[-3, -1]$ y además

$$f(-3) = \frac{1}{3} > 0 \quad \text{y} \quad f(-1) = -1 < 0 \ .$$



por lo cual necesariamente existe al menos un valor x_0 comprendido entre -3 y -1 para el cual $f(x)$ se anula .

En efecto, en $x = 2$ se puede comprobar que $f(-2) = 0$

Por otra parte, aunque $f(-1) < 0$ y $f(1) > 0$, en el intervalo $[-1, 1]$ la función jamás se anula porque tiene un punto de discontinuidad $(x = 0)$ y el teorema del valor intermedio no se puede aplicar .

EJERCICIO 3.1

I. *Escribir los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones* ($n = 1$ *es el valor inicial*) :

1. $\left\{ 1 + \dfrac{1}{n} \right\}$ 2. $\left\{ \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} \right\}$ 3. $\left\{ (-1)^{n+1}\cdot a\cdot r^{n-1} \right\}$

4. $\left\{ \dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}} \right\}$ 5. $\left\{ \dfrac{2\cdot n!}{3^n\cdot 5^{n-1}} \right\}$ 6. $\left\{ (-1)^{n+1}\cdot\dfrac{(n)!}{n^n} \right\}$

II. *Determinar el término general de las sucesiones cuyos primeros términos se enlistan*

7. $\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{2}{3}\right),\left(\frac{3}{4}\right),\left(\frac{4}{5}\right),\left(\frac{5}{6}\right),\ldots\ldots$ 8. $\left(\frac{1}{2}\right),-\left(\frac{1}{6}\right),\left(\frac{1}{12}\right),-\left(\frac{1}{20}\right),\left(\frac{1}{30}\right),\ldots\ldots$

9. $\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{12}\right),\left(\frac{1}{30}\right),\left(\frac{1}{56}\right),\left(\frac{1}{90}\right)$ 10. $\left(\frac{1}{5^3}\right),\left(\frac{3}{5^5}\right),\left(\frac{5}{5^7}\right),\left(\frac{7}{5^9}\right),\left(\frac{9}{5^{11}}\right),\ldots\ldots$

11. $\left(\frac{1}{2}\right),-\left(\frac{1}{24}\right),\left(\frac{1}{720}\right),-\left(\frac{1}{40320}\right),\left(\frac{1}{3628800}\right),\ldots\ldots$

III. *Hallar los límites de las sucesiones encontrando primero el término general:*

12. $1,-\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3}\right),-\left(\frac{1}{4}\right),\ldots\ldots$ 13. $\left(\frac{2}{1}\right),\left(\frac{4}{3}\right),\left(\frac{6}{5}\right),\ldots\ldots$

14. $(\sqrt{2}),\left(\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}\right),\left(\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}\right),\ldots\ldots$

IV. *Calcular los siguientes límites:*

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\ldots\ldots\right)$ 16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{n^3}\right]$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\ldots\ldots+(2\cdot n-1)}{n+1}-\frac{2\cdot n+1}{2}\right]$ 18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots\ldots+\frac{1}{3^n}\right)$ 20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots\ldots}{n^3}\right)$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2\cdot x+3)^3\cdot\frac{(3\cdot x-2)^2}{\left(x^5+5\right)}\right]$ 22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5\cdot x+1}{3\cdot x^2+7}\right)$

23. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{10+x\cdot\sqrt{x}}\right)$

24. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot x^2-3\cdot x-4}{\sqrt{x^4+1}}\right)$

25. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot x+3}{x+\sqrt[3]{x}}\right)$

26. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

27. $\lim_{x\to(-1)}\left(\frac{x^3+1}{x^2-1}\right)$

28. $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{6\cdot x^2-7\cdot x+2}{2\cdot x^2-11\cdot x+5}\right)$

29. $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3-3\cdot x+2}{x^4-4\cdot x+3}\right)$

30. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$

31. $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt[3]{1-x}-1}\right)$

32. $\lim_{x\to64}\left(\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}\right)$

33. $\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)$

34. $\lim_{x\to1}\left[\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}\right]$

35. $\lim_{x\to4}\left(\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\right)$

36. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5\cdot x+6}-x\right)$

37. $\lim_{x\to0}\left(\frac{sen(2\cdot x)}{sen(5\cdot x)}\right)$

38. $\lim_{x\to1}\left(\frac{sen(\pi\cdot x)}{sen(3\cdot\pi\cdot x)}\right)$

39. $\lim_{x\to0}\left(\frac{1-cos(x)}{x^2}\right)$

40. $\lim_{x\to a}\left(\frac{cos(x)-cos(a)}{x-a}\right)$

41. $\lim_{x\to-2}\left[\frac{tan(\pi\cdot x)}{(x+2)}\right]$

42. $\lim_{x\to1}\left[(1-x)\cdot tan\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)\right]$

43. $\lim_{x\to0}\left(\frac{tan(x)-sen(x)}{x^3}\right)$

44. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1-2\cdot cos(x)}{\pi-3\cdot x}\right)$

45. $\lim_{x\to0}\left(\frac{arctan(2\cdot x)}{sen(3\cdot x)}\right)$

46. $\lim_{x\to1}\left(\frac{1-x^2}{sen(\pi\cdot x)}\right)$

47. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)}{1 - \sqrt{x}} \right)$

48. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + sen(x)} - \sqrt{1 - sen(x)}}{x}$

49. $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - 1}{x + 3} \right)^{x+2}$

50. $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{x - 1}{x + 1} \right)^{x}$

51. $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2 - 2 \cdot x + 3}{x^2 - 3 \cdot x + 2} \right)^{\frac{sen(x)}{x}}$

52. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + \cos(x))^{3 \cdot sec(x)}$

53. $\lim_{x \to \infty} \left(\dfrac{2 \cdot x + 3}{2 \cdot x + 1} \right)^{x+1}$

54. $\lim_{x \to \infty} \ln\left(\dfrac{2 \cdot x + 1}{x + 2} \right)$

55. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \cdot \ln\left(\dfrac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}} \right)$

56. $\lim_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$

57. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln\left(1 + e^x\right)}{x}$

58. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{a \cdot x} - e^{b \cdot x}}{x}$

59. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{a \cdot x} - e^{b \cdot x}}{sen(a \cdot x) - sen(b \cdot x)}$

V. *Continuidad de funciones*:

60. Demostrar que la función $f(x) = x^2$ es continua para cualquier valor de x

61. Demostrar que la función $f(x) = \cos(x)$ es continua para cualquier valor de x

VI . *Definir las siguientes funciones en* $x = 0$ *, de modo que se hagan continuas en ese punto*

62. $f(x) = 1 - x \cdot sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

63. $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

64. $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x) - \ln(1 - x)}{x}$

65. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

66. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3 \cdot x + 1 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo [1 , 2]

67. Demostrar que cualquier polinomio *P(x)* de grado impar tiene por lo menos una raiz real.

Respuestas Ejercicio 3.1 (problemas impares)

1. $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5}$

3. $a,\ -a\cdot r,\ a\cdot r^2,\ -a\cdot r^3,\ a\cdot r^4$

5. $\frac{2}{3},\ \frac{8}{15},\ \frac{16}{15},\ \frac{896}{225},\ \frac{1792}{75}$

7. $\frac{n}{n+1}$

9. $\frac{1}{(2\cdot n-1)\cdot(2\cdot n)}$

11. $\frac{(-1)^{n+1}}{2\cdot n!}$

13. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\cdot n}{2\cdot n-1}\right) = 1$

15. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2\cdot n^2}\right] = \frac{1}{2}$

17. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{2\cdot n+1}{2}\right) = \frac{-3}{2}$

19. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right] = \frac{3}{4}$

21. 72

23 ∞

25. 2

27. $\lim_{x\to(-1)}\left[\frac{(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)}{(x-1)\cdot(x+1)}\right] = \frac{-3}{2}$

29. $\frac{1}{2}$

31. $\lim_{u\to1}\left(\frac{u^3-1}{u^2-1}\right) = \frac{3}{2}$

33. $\lim_{u\to1}\left(\frac{u^4-1}{u^3-1}\right) = \frac{4}{3}$

35. $\lim_{x\to4}\left[\frac{(4-x)}{(-4+x)}\cdot\frac{\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(3+\sqrt{5+x}\right)}\right] = \frac{-1}{3}$

37. $\lim_{x\to0}\left[\frac{2\cdot x}{5\cdot x}\cdot\frac{\left(\frac{sen(2\cdot x)}{2\cdot x}\right)}{\left(\frac{sen(5\cdot x)}{5\cdot x}\right)}\right] = \frac{2}{5}$

39. $\lim_{x\to0}\frac{1-cos^2\cdot(x)}{x^2\cdot(1+cos(x))} = \frac{1}{2}$

41. $\lim_{u\to0}\frac{sen\left[\pi\cdot(u-2)\right]}{u\cdot cos\left[\pi\cdot(u-2)\right]} = \pi$

43. $$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\cdot\left(\frac{\frac{1}{cos(x)}-1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\cdot\left(\frac{1-cos(x)}{x^2\cdot cos(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}\cdot\left[\frac{1-cos^2\cdot(x)}{x^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{1+cos(x)}\right) = \frac{1}{2}$$

45. Hágase el cambio de variable : $u = arctan(2\cdot x)$, de donde $x = \frac{tan(u)}{2}$ y si $x \to 0$ entonces $u \to 0$. Además . . .

$$\frac{arctan(2\cdot x)}{sen(3\cdot x)} = \frac{\left(\frac{arctan(2\cdot x)}{3\cdot x}\right)}{\left(\frac{sen(3\cdot x)}{3\cdot x}\right)} = \frac{\left(\frac{u}{3\cdot\frac{tan(u)}{2}}\right)}{\left(\frac{sen(3\cdot x)}{3\cdot x}\right)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{sen(u)}{u}\cdot\frac{1}{cos(u)}}}{\left(\frac{sen(3\cdot x)}{3\cdot x}\right)}$$

así que : $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{arctan(2\cdot x)}{sen(3\cdot x)}\right) = \frac{\lim_{u\to 0}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{sen(u)}{u}\cdot\frac{1}{cos(u)}}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(3\cdot x)}{3\cdot x}\right)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left[\frac{1}{(1)\cdot\frac{1}{(1)}}\right]}{1} = \frac{2}{3}$$

47. Nótese que . . .

$$\frac{cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right) = \frac{cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}{1-x}\cdot\left(1+\sqrt{x}\right) = \frac{cos\left[\frac{\pi\cdot(1-u)}{2}\right]}{u}\cdot\left(1+\sqrt{1-u}\right)$$

$$= \frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\right)cos\left(\pi\cdot\frac{u}{2}\right)+sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot sen\left(\pi\cdot\frac{u}{2}\right)}{u}\cdot\left(1+\sqrt{1-u}\right) = \frac{sen\left(\frac{\pi\cdot u}{2}\right)}{u}\cdot\left(1+\sqrt{1-u}\right)$$

donde se hizo el cambio de variable $u = 1-x$ y por lo tanto, si $x \to 1$ entonces $u \to 0$ y el límite se transforma en:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{cos\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}\right) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{sen\left(\frac{\pi\cdot u}{2}\right)}{\left(\frac{\pi\cdot u}{2}\right)}\cdot\left(1+\sqrt{1-u}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot(1)\cdot\left(1+\sqrt{1-0}\right) = \pi$$

49. Hagamos $\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right) = \left(1+\dfrac{1}{u}\right)$, entonces se deduce de aquí que $u = \dfrac{-(x+3)}{4}$ y también que $x = -4\cdot u - 3$. Por lo tanto si $x \to \infty$ entonces $u \to -\infty$ y el límite se transforma en :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{u\to(-\infty)}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{(-4\cdot u-3)+2}$$

$$\text{x} = \lim_{u\to(-\infty)}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{(-4)}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{-1} = e^{-4}$$

51. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2\cdot x+3}{x^2-3\cdot x+2}\right)^{\frac{sen(x)}{x}} = \left(\frac{0-0+3}{0-0+2}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1} = \frac{3}{2}$$

53. Haciendo : $\left(\dfrac{2\cdot x+3}{2\cdot x+1}\right) = \left(1+\dfrac{1}{u}\right)$, entonces se deduce que $u = x+\dfrac{1}{2}$ y $x = u-\dfrac{1}{2}$.

Por lo tanto si $x \to \infty$ entonces $u \to \infty$ y el límite se transforma en :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2\cdot x+3}{2\cdot x+1}\right)^{x+1} = \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\left(u-\frac{1}{2}\right)+1}$$

$$= \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}} = e\cdot\sqrt{1+0} = e$$

55. Por las propiedades de los logaritmos : $\dfrac{1}{x}\cdot ln\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right) = ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^{\frac{1}{x}} = ln\left[\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2\cdot x}}\right]$

Haciendo entonces . . . $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \left(1+\dfrac{1}{u}\right)$, se deduce que $u = \dfrac{1-x}{2\cdot x}$ y que $x = \dfrac{1}{2\cdot u+1}$.

Por lo tanto si $x \to 0$ entonces $u \to \infty$ y el límite se transforma en . . .

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot ln\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\right) = \lim_{u\to\infty} ln\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{2\cdot u+1}\right)}}\right]$$

$$= \lim_{u\to\infty} ln\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = ln\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= ln\left(e\cdot\sqrt{1+0}\right) = \boxed{1}$$

57. Notemos que :

$$\frac{ln\left(1+e^x\right)}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)\cdot ln\left[e^x\cdot\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right] = \frac{1}{x}\cdot\left(ln\left(e^x\right)+ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)$$

$$= 1+ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

y el límite se evalúa como sigue :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ln\left(1+e^x\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}}\right) = 1+ln\left[(1+0)^0\right] = \boxed{1}$$

59. Nótese que dividiendo la fracción por x queda :

$$\frac{e^{a\cdot x}-e^{b\cdot x}}{sen(a\cdot x)-sen(b\cdot x)} = \frac{\left(\dfrac{e^{a\cdot x}-e^{b\cdot x}}{x}\right)}{\left(\dfrac{sen(a\cdot x)-sen(b\cdot x)}{x}\right)} = \frac{\left(\dfrac{e^{a\cdot x}-e^{b\cdot x}}{x}\right)}{a\cdot\dfrac{sen(a\cdot x)}{(a\cdot x)}-b\cdot\dfrac{sen(b\cdot x)}{(b\cdot x)}}$$

por lo tanto :

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{a\cdot x}-e^{b\cdot x}}{sen(a\cdot x)-sen(b\cdot x)} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{a\cdot x}-e^{b\cdot x}}{x}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to0}\left[a\cdot\frac{sen(a\cdot x)}{(a\cdot x)}-b\cdot\frac{sen(b\cdot x)}{(b\cdot x)}\right]} = \frac{\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{a\cdot x}-e^{b\cdot x}}{x}\right)}{a-b}$$

Por otra parte, haciendo el cambio de variable $u = e^{a\cdot x}-1$, si $x\to0$, entonces $u\to 0$ y :

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{a\cdot x}-1}{x}\right) = \lim_{u\to0}\frac{u}{\left(\dfrac{ln(u+1)}{a}\right)} = \lim_{u\to0}\frac{a}{ln\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]}$$

$$= \frac{a}{ln\left[\lim_{u\to 0}\left[(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]\right]} = \frac{a}{ln(e)}$$

por consiguiente . . .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{a\cdot x}-e^{b\cdot x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{a\cdot x}-1}{x}-\frac{e^{b\cdot x}-1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{a\cdot x}-1}{x}\right) - \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{b\cdot x}-1}{x}\right) = a-b$$

de modo que, finalmente. . . $\lim_{x\to 0}\frac{e^{a\cdot x}-e^{b\cdot x}}{sen(a\cdot x)-sen(b\cdot x)} = \frac{a-b}{a-b} = 1$

61 El incremento de la función es :

$$\Delta f(x) = cos(x+\Delta x) - cos(x) = cos(x)\cdot cos(\Delta x) - sen(x)\cdot sen(\Delta x) - cos(x)$$

por consiguiente:

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta f(x)) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(cos(x)\cdot cos(\Delta x) - sen(x)\cdot sen(\Delta x) - cos(x)\right)$$

$$= cos(x) - 0 - cos(x) = 0$$

63. Haciendo $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, donde

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{sen^2\cdot(x)}{x^2}\cdot\frac{1}{1+cos(x)} = \frac{1}{2}$$

65. Haciendo $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$, donde $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x} = 2$

Respuestas Ejercicio 3.1 *(problemas pares)*

2. $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}$

4. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{5}{\sqrt{26}}$

6. $1, \frac{-1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{3}{32}, \frac{24}{625}$

8. $\frac{(-1)^{(n+1)}}{n\cdot(n+1)}$

10. $\frac{2\cdot n - 1}{(5)^{2\cdot n+1}}$

12. $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right] = 0$

14. $\lim_{n\to\infty}\left[2^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}\right] = 2$

16. 1

18. 0

20. $\frac{1}{3}$

22. $\frac{1}{3}$

24 2

26. 1

28. $\frac{1}{9}$

30. -1

32. $\frac{3}{2}$

34. $\frac{1}{9}$

36. $\frac{-5}{2}$

38. $\frac{1}{3}$

40. $-sen(a)$

42. $\frac{2}{\pi}$

44. $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

46. $\frac{2}{\pi}$

48. 1

50. $\frac{1}{e^2}$

52. e^3

54. $ln(2)$

56. $ln(a)$

58. $a - b$

62. 1

64. 2

66. $f(x) := x^3 - 3\cdot x + 1$, $f(1) = -1$ y $f(2) = 3$ (aplicar el teorema del valor intermedio)

Capítulo IV
La Derivación

4.1 ***Introducción :*** El objetivo fundamental del cálculo diferencial es:

" medir la razón de cambio de una función respecto a su variable independiente "

en otras palabras, es determinar qué tan rápido cambia una función matemática cuando se cambia arbitrariamente su variable independiente.

Si $y = f(x)$ es una función de x , el incremento $\Delta f(x)$ o cambio de la función que corresponde al incremento $\Delta x = (x - a)$ de su variable independiente se define por :

$$\Delta f(x) = f(x) - f(a) = f\left(a + \Delta x\right) - f(a)$$

donde x representa el *valor final* y a es el *valor inicial* de la variable x.

Consideremos por ejemplo los cambios de la función $f(x) = 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 4$, cuando se toma $a = 3$ como *valor inicial para* x y x se aproxima a ese valor por la izquierda y por la derecha:

.

a	x	$\Delta x = x - a$	$f(a)$	$f(x)$	$\Delta f = f(x) - f(a)$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
3	2	−1	8	−2	−10	$\frac{-10}{-1} = 10$
3	2.5	−0.5	8	2.25	−5.75	$\frac{-5.75}{-0.5} = 11.5$
3	2.9	−0.1	8	6.73	−1.27	$\frac{-1.27}{-0.1} = 12.7$
3	2.99	−0.01	8	7.8703	−0.1297	$\frac{-0.1297}{-0.01} = 12.97$
3	2.999	−0.001	8	7.987003	−0.012997	$\frac{-0.012997}{-0.001} = 12.997$
3	3.001	0.001	8	8.013003	0.013003	$\frac{0.013003}{0.001} = 13.003$
3	3.01	0.01	8	8.1303	0.1303	$\frac{0.1303}{0.01} = 13.03$
3	3.1	0.1	8	9.33	1.33	$\frac{1.33}{0.1} = 13.3$
3	3.5	0.5	8	15.25	7.25	$\frac{7.25}{0.5} = 14.5$
3	4	1	8	24	16	$\frac{16}{1} = 16$

Observando éstas secuencias de números, es claro que cuando $x \to 3$ por la izquierda o por la derecha, la razón de incrementos $\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\right) \to 13$, *aunque los incrementos* Δx *y* $\Delta f(x)$ *tiendan ambos a cero !* .

Se dice entonces que *en* $x = 3$*, la función* $f(x)$ *cambia* 13 *veces más rápido que* x.

Para un valor inicial arbitrario a de la variable x, el incremento de la función $f(x)$ es por definición :

$$\Delta f(x) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

$$= \left[3\cdot(a + \Delta x)^2 - 5\cdot(a + \Delta x) - 4\right] - \left(3\cdot a^2 - 5\cdot a - 4\right)$$

$$= 6\cdot a\cdot\Delta x + 3\cdot\Delta x^2 - 5\cdot\Delta x$$

La razón de incrementos es : $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{6\cdot a\cdot\Delta x + 3\cdot\Delta x^2 - 5\cdot\Delta x}{\Delta x} = 6\cdot a + 3\cdot\Delta x - 5$

y la razón de cambio de la función respecto a su variable independiente es entonces . . .

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}(6\cdot a + 3\cdot\Delta x - 5) = 6\cdot a - 5$$

En particular, para $a = 3$ se obtiene: $6\cdot(3) - 5 = 13$, el valor límite que se infiere en la tabla numérica anterior.

La expresión $(6\cdot a - 5)$ representa la razón de cambio de la función $f(x) = \left(3\cdot x^2 - 5\cdot x - 4\right)$ para un valor arbitrario $x = a$ de su variable independiente y se llama *el valor de la derivada de la función* $f(x)$.
Con esa expresión se puede calcular qué tan rápido cambia esta función particular *en cada uno de los valores de su variable independiente*. El valor numérico de ese cambio puede ser grande o pequeño, positivo o negativo.

4.2 ***Una definición fundamental***

La derivada de una función $f(x)$ ***es el límite de la razón formada con el incremento*** $\Delta f(x)$ ***de la función, y el incremento*** Δx ***de su variable independiente cuando éste último se hace tender hacia el cero .***

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}\right)$$

Si ese límite existe, se llama ***la función derivada de la función f(x)*** y se dice entonces que la función $f(x)$ ***es derivable*** .

La función derivada de una función $f(x)$ se representa usualmente por cualquiera de los siguientes símbolos :

$$\frac{d}{dx} f(x) \;,\quad \frac{df}{dx} \;,\quad f'(x) \;,\quad D\cdot f(x) \quad \text{o} \quad f_x$$

y evaluada en un punto dado x, *es un número real .*

Si $y = f(x)$ representa la curva correspondiente a la función $f(x)$, también se acostumbra denotar su derivada como:

$$\frac{d}{dx}\cdot y(x) \;,\quad \frac{d\cdot y(x)}{dx} \;,\quad \frac{dy}{dx} \;,\quad \text{o simplemente} \quad y'$$

se usan más comúnmente las dos primeras notaciones. Así por ejemplo :

$\frac{d}{dz}\cdot g(z)$ *denota la derivada de una función* $g(z)$ *respecto de su variable independiente* z

$\frac{d}{dw}\cdot H(w)$ *es la derivada de una función* $H(w)$ *respecto de su variable independiente* w

$F'(\xi)$ *es la derivada de la función* $F(\xi)$ *respecto de su variable independiente* ξ .

De acuerdo con la definición, la derivada de una función puede hallarse por el siguiente procedimiento general conocido como ***" la regla de los cuatro pasos "*** *:*

REGLA GENERAL DE DERIVACIÓN

- *Dada la función* $f(x)$, *incrementar su variable independiente en la cantidad* Δx *y calcular el correspondiente valor incrementado* $f(x+\Delta x)$ *de la función.*
- *Calcular el incremento de la función :* $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$.
- *Formar la razón de incrementos :* $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
- *Calcular el límite de ésta razón cuando* $\Delta x \to 0$ *, que es por definición, la función derivada*

$$\boxed{\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}} \qquad (4.1)$$

Ejemplo 1. Hallar la derivada de la función $f(x) = x^2 + 3 \cdot x$ y evaluarla en $x = 2$ y en $x = -4$

Solución :
- Si Δx es el incremento de la variable independiente x, es decir $x_{final} = x + \Delta x$, entonces *el valor incrementado* $f(x + \Delta x)$ de la función $f(x)$ es :

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 3 \cdot x + 3 \cdot \Delta x = x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x^2 + 3 \cdot x + 3 \cdot \Delta x$$

- El *incremento de la función* es la diferencia entre su valor inicial $f(x)$ y su valor incrementado $f(x + \Delta x)$:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \Delta x + \Delta x^2 + 3 \cdot x + 3 \cdot \Delta x\right) - \left(x^2 + 3 \cdot x\right)$$

$$= \Delta x \cdot (2 \cdot x + \Delta x + 3)$$

- El *cociente o razón de incrementos* (el de la función y el de su variable independiente) es entonces :

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \left[\frac{\Delta x \cdot (2 \cdot x + \Delta x + 3)}{\Delta x}\right] = (2 \cdot x + \Delta x + 3)$$

- La derivada de $f(x)$ es por definición *el límite de éste cociente* cuando $\Delta x \to 0$:

$$\frac{d}{dx} \cdot f(x) = \lim_{x \to 0} (2 \cdot x + \Delta x + 3) = 2 \cdot x + 3$$

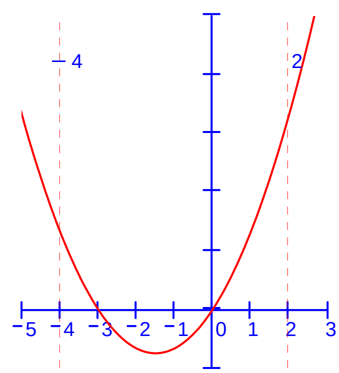
por lo tanto, en $x = 2$ y en $x = -4$ el valor de la derivada de ésta función es :

$$\frac{d}{dx} \cdot f(2) = 2 \cdot (2) + 3 = 7$$

$$\frac{d}{dx} \cdot f(-4) = 2 \cdot (-4) + 3 = -5$$

Esto significa que en $x = 2$ la función *aumenta 7 veces más rápido que su variable independiente*, mientras que en $x = -4$, *la función disminuye 5 veces más rápido que el aumento su variable independiente* x .

En efecto, en la gráfica de la función mostrada a al derecha, se puede apreciar que $f(x)$ es decreciente en $x = -4$ y creciente en $x = 2$



Ejemplo 2. Hallar el valor de la derivada de la función $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ en $x = 1$ y en $x = -3$

Solución :

- El *valor incrementado* de la función es $g(x+\Delta x) = \dfrac{1}{(x+\Delta x - 2)}$

- Por lo tanto *el incremento de la función* es :

$$g(x+\Delta x) - g(x) = \frac{1}{(x+\Delta x-2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)\cdot(x-2)}$$

- El *cociente de los incrementos* tiene entonces la forma :

$$\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = \frac{\left[\dfrac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)\cdot(x-2)}\right]}{\Delta x} = \frac{-1}{(x+\Delta x-2)\cdot(x-2)}$$

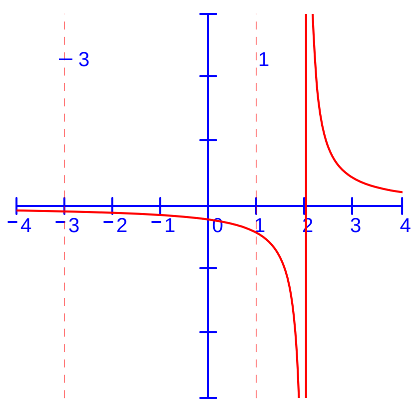
- El *límite de éste cociente* cuando Δx tiende a cero es por definición, la derivada de la función $g(x)$

$$\frac{d}{dx}\cdot g(x) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{(x+\Delta x-2)\cdot(x-2)}\right] = \boxed{\frac{-1}{(x-2)^2}}$$

En $x = 1$ y en $x = 3$ ésta derivada vale. . .

$$\frac{d}{dx}\cdot g(1) = \frac{-1}{[(1)-2]^2} = -1$$

$$\frac{d}{dx}\cdot g(-3) = \frac{-1}{[(-3)-2]^2} = \frac{-1}{25}$$



Estos números significan que *en* $x = 1$, *la función está disminuyendo al mismo ritmo que su variable x aumenta* mientras que *en* $x = 3$, *la función disminuye muy lentamente en relación al aumento de* x

Estos comportamientos se aprecian claramente en la gráfica de la función .

Ejemplo 3. Hallar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{2 \cdot x + 1}$ para cualquier valor de x

Solución :

- El *valor incrementado* de la función es:

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{2 \cdot (x + \Delta x) + 1}$$

- entonces *el incremento de la función* es:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{2 \cdot x + 2 \cdot \Delta x + 1} - \sqrt{2 \cdot x + 1} \; .$$

Esta expresión se simplifica si se racionaliza y queda . . .

$$\Delta f(x) = \left(\sqrt{2 \cdot x + 2 \cdot \Delta x + 1} - \sqrt{2 \cdot x + 1}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2 \cdot x + 2 \cdot \Delta x + 1} + \sqrt{2 \cdot x + 1}}{\sqrt{2 \cdot x + 2 \cdot \Delta x + 1} + \sqrt{2 \cdot x + 1}}\right)$$

$$= \frac{(2 \cdot \Delta x)}{\sqrt{2 \cdot x + 2 \cdot \Delta x + 1} + \sqrt{2 \cdot x + 1}}$$

- Formando *el cociente de los incrementos* (el de la función y el de su variable), queda . . .

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(\dfrac{2 \cdot \Delta x}{\sqrt{2 \cdot x + 2 \cdot \Delta x + 1} + \sqrt{2 \cdot x + 1}}\right)}{\Delta x} = \frac{2}{\sqrt{2 \cdot x + 2 \cdot \Delta x + 1} + \sqrt{2 \cdot x + 1}}$$

- *El límite* de éste cociente cuando Δx tiende a cero es la derivada de la función:

$$\frac{d}{dx} \cdot f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{2}{\sqrt{2 \cdot x + 2 \cdot \Delta x + 1} + \sqrt{2 \cdot x + 1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot x + 1}}$$

Ésta derivada está definida para cualquier valor de la variable x, excepto para $x = \dfrac{-1}{2}$

Ejemplo 4. Hallar la derivada de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ para cualquier valor de x .

Solución :

- El *valor incrementado* de la función es :

$$f(x + \Delta x) = \sqrt[3]{x + \Delta x} = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}}$$

- Luego *el incremento de la función* es :

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}$$

Esta expresión se simplifica utilizando la *identidad algebraica para una diferencia de cubos* :

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)\cdot\left(a^2 + a\cdot b + b^2\right)}$$

haciendo : $a = \sqrt[3]{x+\Delta x}$ y $b = \sqrt[3]{x}$ de donde se obtiene. . .

$$\left(\sqrt[3]{x+\Delta x}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}\right)\cdot\left[\left(\sqrt[3]{x+\Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x+\Delta x}\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right) + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]$$

es decir . . .

$$(x+\Delta x) - x = \Delta f(x)\cdot\left[(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right]$$

de donde se obtiene que el cociente de incrementos es . . .

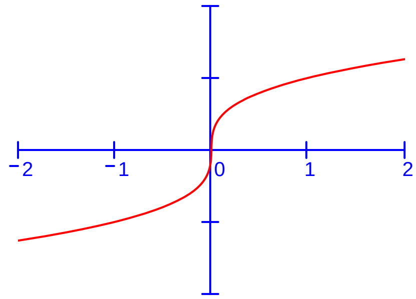
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\left[(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right]}$$

La derivada de $f(x)$ es el límite de éste cociente cuando Δx tiende a cero, esto es :

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{(x+\Delta x)}\cdot\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}$$

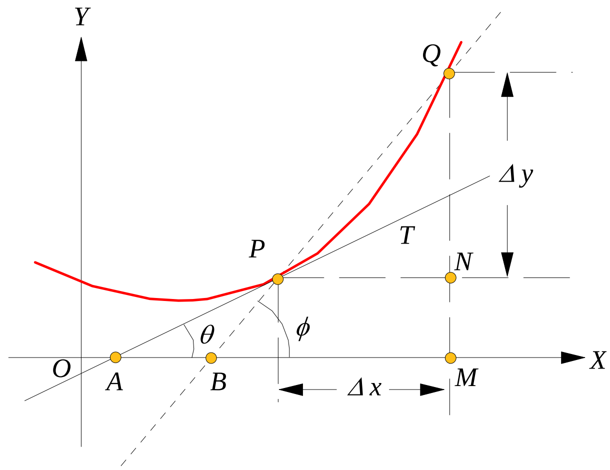
$$= \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

Nótese que la derivada de ésta función no está definida en $x = 0$. En ése punto, la función aumenta con una rapidez infinita respecto a su variable independiente .



4.3 ***Interpretación geométrica de la derivada*** .

Consideremos los dos puntos $P(x,y)$ y $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ de la gráfica correspondiente $y = f(x)$ de la función $f(x)$ en el plano cartesiano.



La línea recta que pasa por P y Q forma con el eje OX un ángulo ϕ .

Manteniendo fijo el punto P, imaginemos que el punto Q se mueva hacia el punto P *pero siempre sobre la curva* $y = f(x)$

Ocurrirán entonces las siguientes cosas :

- ***los incrementos*** Δx ***y*** $\Delta y = \Delta f(x)$ ***tienden ambos a cero :*** $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$
- la recta secante PQ gira sobre P y se aproxima en la posición límite hacia la recta tangente AT, es decir, ***la recta tangente a la curva en el punto*** P ***es el límite de la recta secante*** PQ ***cuando el punto*** Q ***tiende hacia el punto P*** .
- ***el ángulo*** ϕ ***tiende a ser igual al ángulo*** θ en el límite cuando $\Delta x \to 0$

El significado geométrico de cada uno de éstos procesos, de acuerdo a la figura anterior es . . .

DESCRIPCIÓN	*NOTACIÓN*	*SIGNIFICADO GEOMÉTRICO*
Valor incrementado de la función	$f(x+\Delta x)$	Es la ordenada y del punto Q . *Representa la* distancia MQ .
Incremento de la función	$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$	Separación vertical entre los puntos P y Q. Es la distancia $NQ = MQ - MN$
Cociente de los incrementos	$\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$	Es la pendiente de la recta secante PQ . $\dfrac{NQ}{PN} = \tan(\phi)$.
Límite de la razón de los incrementos cuando $\Delta x \to 0$	$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \dfrac{dy}{dx}$	*Es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto* P . $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\tan(\phi) \right) = \tan(\theta)$

En conclusión :

La derivada de una función $f(x)$ evaluada en un valor x de su variable independiente, es numéricamente igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en ese punto

$$\frac{d \cdot f(x)}{dx} = \tan(\theta) \qquad (4.2)$$

De éste modo, *la pendiente de una curva en un punto dado, se define como la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto y es numéricamente igual al valor de su derivada*

Esta interpretación geométrica de la derivada es fundamental en todas las aplicaciones del cálculo. Es recomendable comprenderla desde éste momento y para siempre .

Ejemplo 5. Hallar la pendiente de las rectas tangentes a la curva: $y(x) = \dfrac{4}{(2 \cdot x - 3)}$ en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = \dfrac{3}{2}$.

Solución : La derivada de una función $f(x)$ evaluada en cualquier valor $x = a$, de su variable independiente, es numéricamente igual a la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ que representa a tal función calculada en $x = a$.

Como la pendiente de una recta que forma el ángulo positivo θ con el eje X positivo se define como $\tan(\theta)$, entonces . . .

$$\tan(\theta) = \left(\frac{d}{dx} \cdot y(x)\right)$$

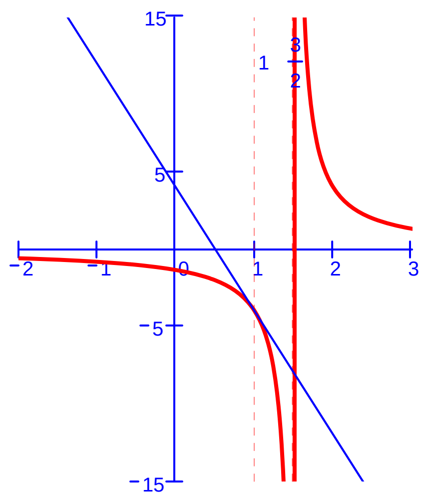
la derivada de la función es:

$$\frac{d}{dx} \cdot y(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{2 \cdot x - 3}\right) = \frac{-8}{(2 \cdot x - 3)^2}$$

así que en $x = 1$ y en x = 3/2 vale :

$$\frac{d}{dx} \cdot y(1) = \frac{-8}{[2 \cdot (1) - 3]^2} = -8$$

$$\frac{d}{dx} \cdot y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-8}{\left[2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 3\right]^2} = \frac{-8}{0} = \infty$$



Se obtiene de ésta manera que en $x = 1$ la recta tangente a la curva forma con el eje X un ángulo θ dado por ...

$$tan(\theta) = -8 \quad \text{es decir :} \quad \theta = arctan(-8) = 97^o\ 7'\ 30''$$

mientras que en $x = \frac{3}{2}$ resulta $\theta = arctan(\infty) = 90°$, lo cual significa que en éste punto la derivada de la función *no está definida (tiende a infinito)* y la tangente se convierte en una *recta vertical* (llamada *asíntota*) .

Ejemplo 6. Dada la curva $y = 5\cdot x - x^2$, hallar los puntos donde sus rectas tangentes tengan una inclinación de 45^o o de -60^o respecto al eje X positivo .

Solución : La derivada de la función $f(x) = 5\cdot x - x^2$ es ...

$$\frac{d\cdot f}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\left(5\cdot x - x^2\right) = 5 - 2\cdot x$$

de donde se deduce que la pendiente $m = tan(\theta)$ de *cualquier* recta tangente a ésta curva se calcula como:

$$tan(\theta) = 5 - 2\cdot x$$

de esta manera, si $\theta = 45°$ o $\theta = -60°$, se obtiene que ...

$$tan(45°) = 5 - 2\cdot x \quad \text{o} \quad tan(-60°) = 5 - 2\cdot x$$

$$1 = 5 - 2\cdot x \quad \text{o} \quad -\sqrt{3} = 5 - 2\cdot x$$

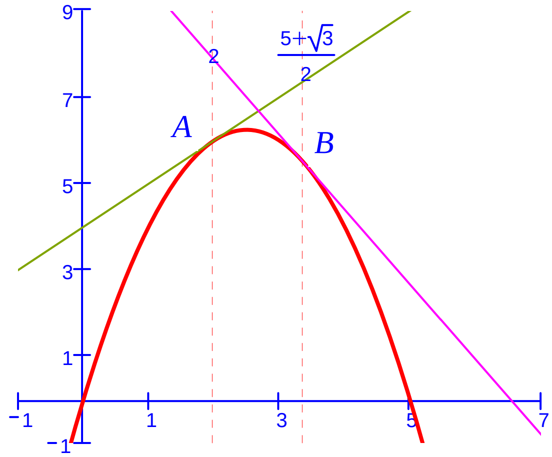
es decir :

$$x = 2 \quad \text{ó} \quad x = \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)$$

Los valores de la función correspondientes a éstos valores de x son ...

$$f(2) = 5\cdot(2) - (2)^2 = 6 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right) = 5\cdot\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{11}{2}$$

Así que en el punto $A(2,6)$ la tangente a la curva está inclinada a $45°$ respecto al eje X positivo , mientras que en el punto : $B\cdot\left[\left(\frac{5+\sqrt{3}}{2}\right), \frac{11}{2}\right]$, otra recta tangente a la curva forma un ángulo de $-60°$ con el eje X positivo, tal como se puede apreciar en la gráfica de la función que se ilustra enseguida . . .

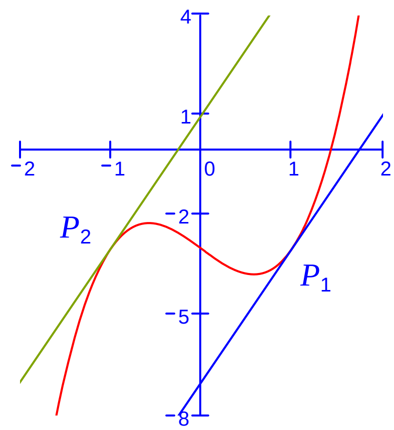


Ejemplo 7. Dada la función $f(x) = 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x - 3$, ¿en qué punto tiene una recta tangente que sea paralela a la recta $y = 4 \cdot x + 1$?

Solución : La pendiente $m = tan(\theta)$ de la recta tangente *en cualquier punto de la curva* $y = f(x)$, *está dada por la derivada de la función*, es decir . . .

$$tan(\theta) = \frac{d}{dx} \cdot f(x)$$

$$= \frac{d}{dx} \cdot \left(2 \cdot x^3 - 2 \cdot x - 3\right) = 6 \cdot x^2 - 2$$



Por otra parte, la pendiente de la recta $y(x) = 4 \cdot x + 1$ se puede obtener también calculando su derivada . . .

$$\frac{d}{dx} \cdot y(x) = \frac{d}{dx} \cdot (4 \cdot x + 1) = 4$$

y cualquier recta paralela a ésta, *debe tener la misma pendiente* , es decir . . .

$$\left(6 \cdot x^2 - 2\right) = 4$$

De ésta condición se deduce que $x = \pm 1$.

Además, dado que $f(1) = -3$ y $f(-1) = -3$, se concluye que en los puntos $P_1(1, -3)$ y $P_2(-1, -3)$, la curva tiene *dos* tangentes paralelas a la recta dada .

4.4 *Fórmulas inmediatas de derivación* .

La regla general de cuatro pasos es la forma directa para calcular la derivada de una función, sin embargo, algunas expresiones funcionales básicas aparecen frecuentemente al calcular derivadas.
Por esto es conveniente ***memorizar*** el resultado obtenido para esas formas básicas, en lugar de aplicar la regla general cada vez que se derive la misma forma funcional.

La misma función que tiene el alfabeto para el desarrollo de un lenguaje, lo tienen las siguientes ***fórmulas inmediatas de derivación*** para el cálculo de las derivadas y ***es recomendable que sean memorizadas.***
En todas ellas , c *y* n *representan constantes mientras que* $u(x)$, $v(x)$ *o* $w(x)$ *representan funciones derivables de la variable* x :

I	$\frac{d}{dx}\cdot(c) = 0$	***La derivada de una constante es cero***
II	$\frac{d}{dx}\cdot(x) = 1$	***La derivada de la función identidad vale uno***
III	$\frac{d}{dx}\cdot(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$	***La derivada de una suma*** *(algebráica)* ***de funciones es la suma de las derivadas respectivas de las funciones***
IV	$\frac{d}{dx}\cdot(u\cdot v) = u\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de un producto de funciones es la primera función por la derivada de la segunda, más la segunda función por la derivada de la primera.***
IVa	$\frac{d}{dx}\cdot(c\cdot u) = c\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función.***
V	$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{u\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right) - v\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}{u^2}$	***La derivada de un cociente de funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador. Todo dividido por el cuadrado del denominador.***
VI	$\frac{d\cdot f(u(x))}{dx} = \left(\frac{d\cdot f}{du}\right)\cdot\left(\frac{d\cdot u}{dx}\right)$	***La derivada de una función compuesta es el producto de la derivada de la función respecto a la variable intermedia (u) , por la derivada de la variable intermedia respecto a la variable x .***
VII	$\frac{d\cdot(f)^{-1}}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)}$	***La derivada de la función inversa*** $f^{-1}(x)$ ***es el inverso de la derivada de la función*** $f(x)$
VIII	$\frac{d}{dx}\cdot(\log_b\cdot u(x)) = \frac{1}{\ln(b)}\cdot\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}$	***La derivada de una función logaritmo, es la derivada de la función dividida por el producto de la función y el logaritmo natural de la base b.***

VIIIa	$\frac{d}{dx}\cdot ln(u) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}$	***La derivada del logaritmo natural de una función es la derivada de la función dividida por la función.***
IX	$\frac{d}{dx}\cdot(u)^n = n\cdot u^{n-1}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de una función potencia es igual al producto del exponente por la función potencia disminuida en 1 y por la derivada de la función.***
X	$\frac{d}{dx}\cdot a^u = a^u\cdot ln(a)\cdot\frac{du}{dx}$	***La derivada de una función exponencial es el producto de la función por el logaritmo natural de la base y por la derivada del exponente .***
Xa	$\frac{d}{dx}\cdot e^u = e^u\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de la función exponencial natural es igual al producto de la función por derivada del exponente.***
XI	$\frac{d\cdot u^v}{dx} = v\cdot u^{v-1}\cdot\frac{du}{dx} + u^v\cdot ln(u)\cdot\frac{dv}{dx}$	***La derivada de una función elevada a un exponente variable se obtiene derivando primero como si el exponente fuese constante y derivando después como si la base fuese constante.***
XII	$\frac{d}{dx}\cdot sen(u) = cos(u)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de una función seno es el producto del coseno de la función por la derivada de la función .***
XIII	$\frac{d}{dx}\cdot cos(u) = -sen(u)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de una función coseno es el producto del seno negativo de la función por la derivada de la función.***
XIV	$\frac{d}{dx}\cdot tan(u) = sec(u)^2\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de una función tangente es el producto de la secante cuadrada de la función por la derivada de la función***
XV	$\frac{d}{dx}\cdot cot(u) = -csc^2\cdot(u)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de una función cotangente es la cosecante cuadrada negativa de la función por la derivada de la función.***
XVI	$\frac{d}{dx}\cdot sec(u) = sec(u)\cdot tan(u)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de una función secante es el producto de la secante, la tangente y la derivada de la función.***
XVII	$\frac{d}{dx}\cdot csc(u) = -csc(u)\cdot cot(u)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$	***La derivada de una función cosecante es el producto negativo de la cosecante, la cotangente y la derivada de la función.***
XVIII	$\frac{d}{dx}\cdot arcsen(u) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\sqrt{1-u^2}}$	***La derivada del arco seno de una función es la derivada de la función dividida por la raiz cuadrada de 1 menos el cuadrado de la función.***

XIX	$\frac{d}{dx}\cdot arccos(u) = \frac{-\left(\frac{du}{dx}\right)}{\sqrt{1-u^2}}$	***La derivada de un arco coseno es igual que la derivada de un arco seno pero con signo negativo.***
XX	$\frac{d}{dx}\cdot arctan(u) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{1+u^2}$	***La derivada del arco tangente de una función es la derivada de la función dividida por 1 más el cuadrado de la función.***
XXI	$\frac{d}{dx}\cdot arccot(u) = \frac{-\left(\frac{du}{dx}\right)}{1+u^2}$	***La derivada de un arco cotangente es igual que la derivada de un arco seno pero con signo negativo.***
XXII	$\frac{d}{dx}\cdot arcsec(u) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$	***La derivada del arco secante de una función es la derivada de la función dividida por el producto de la función y la raiz cuadrada del cuadrado del función menos la unidad.***
XXIII	$\frac{d}{dx}\cdot arccsc(u) = \frac{-\left(\frac{du}{dx}\right)}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$	***La derivada de un arco cosecante es igual que la derivada de un arco secante pero con signo negativo.***

Veamos enseguida algunas demostraciones para estas fórmula inmediatas

I $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot(c) = 0}$ ***" La derivada de una constante es cero "***

Demostración : Sea $f(x) = c$, siendo c una constante (o también cualquier expresión algebraica que no dependa de la variable respecto a la cual se derive), entonces la aplicación de los cuatro pasos de la regla general de derivación conduce a . . .

- $f(x+\Delta x) = c$ puesto que $f(x)$ es constante
- $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = c - c = 0$

y de inmediato se deduce que. . .

- $\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{c-c}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}(0) = 0$

quedando así demostrado.

Ejemplos : $\frac{d}{dx}\cdot(4) = 0$, ó también . . . $\frac{d}{dx}\cdot\left(4\cdot a^2 - \frac{\sqrt{2}}{b^3}\right) = 0$

II $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot(x) = 1}$ ***" La derivada de la función identidad f(x) = x es uno "***

Demostración : Consideremos la función $f(x) = x$, entonces la aplicación directa de la regla general de derivación conduce a . . .

- $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$
- $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x$

y se deduce de inmediato que. . .

- $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}(1) = 1$

y queda demostrado.

Ejemplos : $\frac{d\cdot w}{dw} = 1$, $\frac{d}{dz}\cdot(z) = 1$, $\frac{d}{df}\cdot f = 1$ etc.

III $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot(u(x) + v(x) - w(x)) = \frac{d\cdot u}{dx} + \frac{d\cdot v}{dx} - \frac{d\cdot w}{dx}}$

" La derivada de una suma algebráica de funciones es la suma de las derivadas de las funciones correspondientes"

Demostración : Consideremos la función $f(x) = u(x) + v(x) - w(x)$ y apliquemos los cuatro pasos de la regla general de derivación :

- $f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - w(x + \Delta x)$
- $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) =$

$$= \left(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x) - w(x + \Delta x)\right) - (u(x) + v(x) - w(x))$$

y asociando términos . . .

$$\Delta f(x) = \left(u(x+\Delta x) - u(x)\right) + \left(v(x+\Delta x) - v(x)\right) - \left(w(x+\Delta x) - w(x)\right)$$

$$= \Delta u + \Delta v - \Delta w$$

- $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v - \Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

así que . . .

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) - \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta w}{\Delta x}\right)$$

puesto que el límite de una suma de funciones es la suma de los límites correspondientes.

Por la definición de derivada, ésta última expresión representa las derivadas correspondientes de las funciones u , v y w respecto a la variable x, asi que queda demostrado que . . .

$$\frac{d}{dx} \cdot f(x) = \frac{d}{dx} \cdot (u(x) + v(x) - w(x)) = \frac{d}{dx} \cdot u(x) + \frac{d}{dx} \cdot v(x) - \frac{d}{dx} \cdot w(x)$$

Ejemplos :

$$\frac{d}{dx}\left(3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + a^2\right) = \frac{d\left(3 \cdot x^2\right)}{dx} - \frac{d(5 \cdot x)}{dx} + \frac{d\left(a^2\right)}{dx}$$

ó también . . .

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{u}} + e^{sen(u)}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right) + \frac{d}{du}\left(e^{sen(u)}\right)$$

IV $$\boxed{\frac{d}{dx} \cdot (u(x) \cdot v(x)) = u \cdot \left(\frac{d \cdot v}{dx}\right) + v \cdot \left(\frac{d \cdot u}{dx}\right)}$$

" La derivada de un producto de funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda , más la segunda función por la derivada de la primera "

Demostración :Considérese la función $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ y aplíquese la regla general de derivación . . .

- valor incrementado: $f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)$
- incremento de la función:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)$$

- cociente de incrementos :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

se ha agregado al numerador la cantidad $u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)$ (que por ser cero, *no cambia* la fracción), con el fin de factorizar y obtener . . .

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \left(\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}\right)\cdot v(x+\Delta x) + \left(\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right)\cdot u(x)$$

$$= \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot v(x+\Delta x) + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot u(x)$$

y finalmente, tomando el limite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene la derivada de la función $f(x)$ respecto a x:

- $$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot v(x+\Delta x) + \left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot u(x)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot v(x+\Delta x)\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\cdot u(x)\right]$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\right) + u(x)\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\right]$$

donde se han aplicado los teoremas sobre límites para una suma y un producto de funciones.

De la definición de derivada, se obtiene asi que . . .

$$\frac{d}{dx}(u\cdot v) = \left(\frac{d}{dx}\cdot u(x)\right)\cdot v(x) + u(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot v(x)\right) = \frac{du}{dx}\cdot v(x) + u(x)\cdot\frac{dv}{dx}$$

IVa $\boxed{\dfrac{d}{dx}\cdot(c\cdot u(x)) = c\cdot\left(\dfrac{d\cdot u}{dx}\right)}$

" La derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función "

Demostración : Esta es simplemente la fórmula IV aplicada en el caso especial cuando una de las funciones del producto es constante, por ejemplo $v(x) = c$, y tomando en cuenta el resultado de la fórmula I : *la derivada de una constate es cero.*

V $\boxed{\dfrac{d}{dx}\cdot\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v\cdot\left(\dfrac{d\cdot u}{dx}\right) - u\cdot\left(\dfrac{d\cdot v}{dx}\right)}{v^2}}$

" La derivada de un cociente de funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador. Todo dividido por el cuadrado del denominador "

Demostración : Consideremos la función $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ y apliquemos la regla general de derivación :

- valor incrementado : $f(x+\Delta x) = \dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$
- incremento de la función : $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$:

$$\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

agregando ahora al numerador un cero : $u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)$, se obtiene . . .

$$\Delta f = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

- y el cociente de incrementos es :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\left(\dfrac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\right)}{\Delta x}$$

que se puede escribir también como . . .

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{v(x)\cdot\left(\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right) - u(x)\cdot\left(\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

- Tomando el limite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene por definición, la derivada de la función $f(x)$ respecto a su variable independiente x :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x)\cdot\left(\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\right) - u(x)\cdot\left(\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}\right]$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x)\cdot\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim\limits_{\Delta x\to 0} u(x)\cdot\left(\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\left(v(x+\Delta x)\cdot v(x)\right)\right)}$$

$$= \frac{v\cdot\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\right) - u\cdot\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{v(x)\cdot\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\right)}$$

donde se han aplicado los teoremas sobre límites para una suma, un producto y un cociente de funciones.

De la definición de derivada, en la expresión anterior queda demostrado que . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\left(v\cdot\dfrac{du}{dx} - u\cdot\dfrac{dv}{dx}\right)}{v^2}$$

VI $\boxed{\dfrac{d}{dx}\cdot f(u(x)) = \left(\dfrac{d}{du}\cdot f(u)\right)\cdot\left(\dfrac{d}{dx}\cdot u(x)\right)}$

" La derivada de una función compuesta $y = f(u(x))$ es la derivada de la función respecto a la variable intermedia u , por la derivada de la variable intermedia respecto a x "

Esta fórmula de derivación se conoce como *" la regla de la cadena "* porque en cierta forma la variable intermedia u es como un *"eslabón"* entre la función f y su variable independiente x .

Ésta regla se puede generalizar a más variables intermedias (*"eslabones de la cadena"*) . Por ejemplo $y(x) = f(u(v(w(x))))$ es una función triplemente compuesta que tiene, de acuerdo con la regla anterior, la derivada respecto a x dada por :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{df}{du}\right)\cdot\left(\frac{du}{dv}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dw}\right)\cdot\left(\frac{dw}{dx}\right)$$

Aquí las variables intermedias o eslabones de la cadena son las funciones: $u(v)$, $v(w)$ y $w(x)$

Demostración : Sea la función $y = f(u)$ que depende de la variable u, siendo $u = g(x)$ una función que depende de la variable x. Entonces, aplicando a éstas funciones la regla general de derivación resulta . . .

- valor incrementado :

$$y(u+\Delta u) = f(u+\Delta u) \qquad ; \qquad u(x+\Delta x) = g(x+\Delta x)$$

- incremento de la función:

$$\Delta y = f(u+\Delta u) - f(u) \qquad ; \qquad \Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$$

- cociente de incrementos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \qquad ; \qquad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

pero algebraicamente . . .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$ también $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x) \to 0$, tiende a cero, asi que aplicando los teoremas sobre límites y la definición de derivada se obtiene :

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = \left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= \left[\lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u}\right)\right]\cdot\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right)\right]$$

que por definición, son las derivadas de $y(u)$ respecto a u y de $u(x)$ respecto a x . . .

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$$

VII $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\cdot f(x)}}$

" La derivada de la función inversa $f^{-1}(x)$ de una función inversible $f(x)$ es el inverso de la derivada de la función $f(x)$ "

Demostración : Sea $f(x)$ una función inversible tal que $g(x)$ sea su función inversa, es decir . . .

$$f(g(x)) = x \qquad ; \qquad g(f(x)) = x$$

Derivando respecto a x éstas dos identidades por medio de la " *regla de la cadena* " recién demostrada en la fórmula VI anterior, se obtiene . . .

$$\left(\frac{df}{dg}\right)\cdot\left(\frac{dg}{dx}\right) = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad ; \qquad \left(\frac{dg}{df}\right)\cdot\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{dx}{dx} = 1$$

Multipliquemos miembro a miembro ambas igualdades. . .

$$\left[\left(\frac{df}{dg}\right)\cdot\left(\frac{dg}{dx}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{dg}{df}\right)\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)\right] = 1$$

$$\frac{dg}{dx}\cdot\left[\left(\frac{df}{dg}\right)\cdot\left(\frac{dg}{df}\right)\right]\cdot\frac{df}{dx} = 1 \quad \textit{(Intercambiando factores y asociando)}$$

$$\left(\frac{dg}{dx}\right)\cdot\left(\frac{df}{dx}\right) = 1 \qquad \left(\textit{puesto que } \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{df} = \frac{df}{df} = 1\right)$$

luego . . .

$$\frac{dg}{df} = \frac{1}{\left(\frac{df}{dg}\right)} \quad \text{es decir . . .} \quad \frac{d}{dx}\cdot f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dx}\cdot f(x)}$$

VIII $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot(\log_b\cdot u(x)) = \frac{1}{\ln(b)}\cdot\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}}$

" La derivada del logaritmo de una función es la derivada de la función entre el producto de la función y el logaritmo natural de la base "

Demostración : Consideremos la función que es el logaritmo de una función $u(x)$ en la base b :

$$f(x) = log_b(u(x))$$

Usando las propiedades de los logaritmos, el cambio a los logaritmos naturales resulta en:

$$f(x) = log_b \cdot (u(x)) = \frac{log_e \cdot (u(x))}{log_e \cdot (b)} = \frac{ln(u(x))}{ln(b)} = \left(\frac{1}{ln(b)}\right) \cdot ln(u(x))$$

De modo que la función $f(x)$ es igual al producto de la constante $\frac{1}{ln(b)}$ por la función compuesta $ln(u(x))$.

Aplicando ahora *la fórmula de derivación inmediata III* y la " *regla de la cadena* " , se obtiene . . .

$$\frac{d}{dx} \cdot f(x) = \frac{1}{ln(b)} \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot ln(u(x))\right) = \frac{1}{ln(b)} \cdot \left(\frac{d \cdot ln(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right) \quad (*)$$

donde

$$\frac{d \cdot ln(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{ln(u + \Delta u) - ln(u)}{\Delta u}\right)$$

Por las propiedades de los logaritmos, ésta expresión *se transforma* como sigue :

- *Una diferencia de logaritmos es el logaritmo de un cociente,* asi que queda :

$$\frac{ln(u + \Delta u) - ln(u)}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u} \cdot ln\left(\frac{u + \Delta u}{u}\right)$$

- *Multiplicando y dividiendo por* u resulta :

$$\frac{ln(u + \Delta u) - ln(u)}{\Delta u} = \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{\Delta u} \cdot ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

- *Un factor del logaritmo de un número se puede escribir como exponente del número*

$$\frac{ln(u + \Delta u) - ln(u)}{\Delta u} = \frac{1}{u} \cdot ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}$$

De éste modo queda que . . .

$$\frac{d \cdot ln(u)}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \left[\left(\frac{1}{u}\right) \cdot ln\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}\right] = \frac{1}{u} \cdot ln\left[\lim_{\Delta u \to 0} \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{\frac{u}{\Delta u}}\right]$$

pero bajo el cambio de variable $z = \dfrac{\Delta u}{u}$, este límite es precisamente el número e, por lo tanto . . .

$$\frac{d \cdot ln(u)}{du} = \frac{1}{u} \cdot ln(e) = \frac{1}{u}$$

Regresando a la expresión (*) , finalmente se obtiene que :

$$\frac{d}{dx}\left[log_b \cdot (u)\right] = \frac{1}{ln(b)} \cdot \frac{1}{u} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

y queda demostrado .

VIII a $\quad \boxed{\dfrac{d}{dx} \cdot (ln \cdot u(x)) = \dfrac{\left(\dfrac{du}{dx}\right)}{u}}$

" La derivada del logaritmo natural de una función es la derivada de la función entre la función "

Demostración : En la fórmula VIII anterior, tómese la base b como el número e , entonces $ln(e) = 1$

IX . $\quad \boxed{\dfrac{d}{dx} \cdot (u(x))^n = n \cdot u(x)^{n-1} \cdot \left(\dfrac{du}{dx}\right)}$

" La derivada de una función elevada a un exponente, es igual al producto del exponente por la función elevada al exponente disminuido en 1 y por la derivada de la función "

Demostración : Consideremos una función que está elevada a la potencia n : $f(x) = (u(x))^n$.
Tomando logaritmos naturales en ambos miembros de ésta igualdad y aplicando las propiedades de los logaritmos, se obtiene:

$$ln\left(f(x) = ln\left(u(x)^n\right) \right. = n \cdot ln(u(x))$$

Derivando ahora respecto a la variable x, por las reglas de derivación inmediata ya demostradas IV_a, VI y $VIII_a$ se obtiene :

$$\frac{d}{dx} \cdot ln(f(x)) = n \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot ln(u(x))\right)$$

$$\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{f} = n\cdot\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}$$

y despejando la derivada $\left(\frac{df}{dx}\right)$ se obtiene : $\left(\frac{d}{dx}\cdot f(x)\right) = n\cdot f(x)\cdot\left[\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}\right]$

Finalmente, substituyendo la expresión inicial de la función : $f(x) = (u(x))^n$, resulta:

$$\frac{du^n}{dx} = n\cdot u^n\cdot\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u} = n\cdot u^{n-1}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$$

y queda demostrado

X $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot\left(a^{u(x)}\right) = a^{u(x)}\cdot ln(a)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}$

" La derivada de una función potencia es igual al producto de la función por el logaritmo natural de la base y por la derivada de la función "

Demostración : Consideremos la función $f(x) = a^{u(x)}$ donde a representa una constante y el exponente $u(x)$ es una función variable que depende de x .

Tomemos logaritmos naturales en ambos miembros de $f(x) = a^{u(x)}$ y apliquemos las propiedades de los logaritmos para obtener . . .

$$ln(f(x)) = ln\left(a^{u(x)}\right) = u(x)\cdot ln(a)$$

Derivando ahora ambos miembros respecto a x y aplicando las reglas de derivación inmediata IV_a, VI y $VIII_a$ ya demostradas antes queda:

$$\frac{d}{dx}\cdot ln(f(x)) = \frac{d}{dx}\cdot(u\cdot ln(a))$$

$$\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{f} = ln(a)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$$

y despejando la derivada $\left(\frac{df}{dx}\right)$ y substituyendo $f(x) = a^{u(x)}$ resulta . . .

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = ln(a)\cdot a^{u(x)}\cdot\frac{du}{dx}$$

y queda demostrado.

Xa $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot\left(e^{u(x)}\right) = e^{u(x)}\cdot\frac{du}{dx}}$

" ***La derivada de una función exponencial es igual al producto de la función por la derivada del exponente*** "

Demostración En la fórmula de derivación inmediata anterior, tómese la constante a como el número e, con lo cual $ln(e) = 1$ y queda demostrado .

XI $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot\left(u(x)^{v(x)}\right) = \left[u^{v}\cdot ln(u)\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)\right] + v\cdot u^{v-1}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}$

" ***La derivada de una función elevada a otra función contiene dos términos : el primero se obtiene derivando como si el exponente fuese constante por la fórmula IX y el segundo se obtiene derivando como si la base fuese constante por la fórmula X*** "

Demostración Tomando logaritmos naturales en la definición de la función $f(x) = u(x)^{v(x)}$ y usando las propiedades de los logaritmos se obtiene . . .

$$ln(f(x)) = ln\left(u(x)^{v(x)}\right) = v(x)\cdot ln(u(x))$$

Derivando ahora ambos miembros respecto a la variable x resulta:

$$\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{f} = v(x)\cdot\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u(x)} + ln(u(x))\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

(Se ha aplicado fórmula inmediata IV para la derivada de un producto de funciones y la fórmula VIIIa para la derivada de una función logaritmo) .

Resolviendo para la derivada $\frac{df}{dx}$ resulta . . .

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = f\cdot\left[\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\frac{du}{dx} + ln(u)\cdot\frac{dv}{dx}\right]$$

$$= u^{v}\cdot\left[\left(\frac{v}{u}\right)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right) + ln(u)\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)\right]$$

$$= \boxed{v\cdot u^{v-1}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right) + ln(u)\cdot u^{v}\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)}$$

y queda asi demostrado .

XII $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot sen(u(x)) = cos(u(x))\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}$

"La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función"

Demostración : Sea la función $f(x) = sen(u(x))$ y obtengamos su función derivada aplicando la "*regla de la cadena* " :

$$\frac{d}{dx}\cdot sen(u(x)) = \frac{d\cdot(sen(u))}{du}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right) \qquad (*)$$

Ahora, por la regla general de derivación aplicada a la función : $g(u) = sen(u)$ resulta:

- *valor incrementado* :

  $g(u+\Delta u) = sen(u+\Delta u)$

- *incremento de la función:*

$$\Delta g = g(u+\Delta u) - g(u) = sen(u+\Delta u) - sen(u)$$

$$= \left(sen(u)\cdot cos(\Delta u) + sen(\Delta u)\cdot cos(u)\right) - sen(u)$$

$$= sen(u)\cdot\left(cos(\Delta u) - 1\right) + cos(u)\cdot sen(\Delta u)$$

$$= sen(u)\cdot\left[\left(cos(\Delta u) - 1\right)\cdot\left(\frac{cos(\Delta u)+1}{cos(\Delta u)+1}\right)\right] + cos(u)\cdot sen(\Delta u)$$

$$= sen(u)\cdot\left[\frac{cos^{2}\cdot(\Delta u) - 1}{cos(\Delta u)+1}\right] + cos(u)\cdot sen(\Delta u)$$

$$= \; sen(u)\cdot\left[\frac{-sen^2\cdot(\Delta u)}{cos(\Delta u)+1}\right] + cos(u)\cdot sen(\Delta u)$$

donde se ha usado la identidad trigonométrica $cos^2\cdot(\Delta u) + sen^2\cdot(\Delta u) = 1$.

- *el cociente de incrementos es* :

$$\frac{\Delta g}{\Delta u} = \frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u} = \frac{sen(u)\cdot\left[\frac{-sen^2\cdot(\Delta u)}{cos(\Delta u)+1}\right] + cos(u)\cdot sen(\Delta u)}{\Delta u}$$

$$= -\left(\frac{sen(\Delta u)}{\Delta u}\right)\cdot\frac{sen(\Delta u)\cdot sen(u)}{cos(\Delta u)+1} + cos(u)\cdot\left(\frac{sen(\Delta u)}{\Delta u}\right)$$

factorizando . . .

$$\frac{\Delta g}{\Delta u} = \left(\frac{sen(\Delta u)}{\Delta u}\right)\cdot\left(cos(u) - \frac{sen(\Delta u)\cdot sen(u)}{cos(\Delta u)+1}\right)$$

finalmente. . .

$$\frac{d}{du}\cdot sen(u) = \lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta g}{\Delta u}\right)$$

$$= \lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{sen(\Delta u)}{\Delta u}\right)\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\left(cos(u) - \frac{sen(\Delta u)\cdot sen(u)}{cos(\Delta u)+1}\right)$$

$$= (1)\cdot\left[cos(u) - \frac{(0)}{(1)+1}\cdot sen(u)\right] = cos(u)$$

Donde se ha aplicado el resultado del límite fundamental . . . $\lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{sen(\Delta u)}{\Delta u}\right) = 1$

Substituyendo éstos resultados en la ec. (*) se llega asi a la demostración buscada .

XIII $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot cos(u(x)) = -sen(u)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}$

" La derivada del coseno de una función es el negativo del seno de la función, multiplicado por la derivada de la función "

Demostración : Sea la función $f(x) = \cos(u(x))$ y obtengamos su función derivada aplicándole la " *regla de la cadena* " :

$$\frac{d}{dx}\cdot\cos(u(x)) = \frac{d\cdot\cos(u)}{du}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$$

pero $\cos(u) = \operatorname{sen}\left(u + \frac{\pi}{2}\right)$, de modo que haciendo la substitución $z = \left(u + \frac{\pi}{2}\right)$ y aplicando otra vez la " *regla de la cadena* " se obtiene . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\cos(u(x)) = \left(\frac{d\cdot\operatorname{sen}(z)}{dz}\right)\cdot\left(\frac{dz}{du}\right)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$= \cos(z)\cdot(1+0)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$$

donde se han usado los resultados de :

$$\frac{d}{du}\cdot\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{du}{du} + \frac{d}{du}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = (1+0)$$

$$\frac{d}{dz}\cdot\operatorname{sen}(z) = \cos(z)$$

pero también $\cos(z) = \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(u)$ de manera que queda demostrada la fórmula de derivación pedida.

XIV $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot\tan(u(x)) = \sec(u)^2\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}$

" La derivada de la tangente de una función es el cuadrado de la secante de la función, multiplicado por la derivada de la función "

Demostración : Sea la función : $f(x) = \tan(u(x))$ y derivemos aplicando la " *regla de la cadena* " :

$$\frac{d}{dx}\cdot\tan(u(x)) = \frac{d\cdot\tan(u)}{du}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Por la definición de la función tangente : $\tan(u) = \frac{\operatorname{sen}(u)}{\cos(u)}$ (*)

Asi que la derivada de la función tangente se puede obtener aplicando la fórmula inmediata para la derivación de un cociente de funciones :

$$\frac{d}{du}\cdot\left(\frac{sen(u)}{cos(u)}\right) = \frac{cos(u)\cdot\left(\frac{d}{du}\cdot sen(u)\right) - sen(u)\cdot\left(\frac{d}{du}\cdot cos(u)\right)}{(cos(u))^2}$$

$$= \frac{cos(u)\cdot cos(u) - sen(u)\cdot(-sen(u))}{cos^2\cdot(u)}$$

$$= \frac{cos^2\cdot(u) + sen^2\cdot(u)}{cos^2\cdot(u)} = \frac{1}{cos^2\cdot(u)}$$

Pero el recíproco del coseno es la secante, es decir :

$$\frac{1}{cos^2\cdot(u)} = \left(\frac{1}{cos(u)}\right)^2 = (sec(u))^2$$

substituyendo éste resultado en (*) , se obtiene la fórmula de derivación inmediata que se pedía demostrar.

XV $$\boxed{\frac{d}{dx}\cdot cot(u(x)) = -(csc(u))^2\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

" La derivada de la cotangente de una función es el producto negativo del cuadrado de la cosecante de la función por la derivada de la función "

Demostración : Muy similar a la demostración de la regla anterior. Se deja como ejercicio para el lector .

XVI $$\boxed{\frac{d}{dx}\cdot sec(u(x)) = sec(u(x))\cdot tan(u(x))\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

"La derivada de la secante de una función es el producto de la secante , la tangente y la derivada de la función "

Demostración : Es necesario recordar que $sec(u) = \frac{1}{cos(u)} = (cos(u))^{-1}$ de modo que por la " *regla de la cadena* " , se obtiene . . .

$$\frac{d}{dx} \cdot sec(u(x)) = \left(\frac{d \cdot sec(u)}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{du} \cdot \left[cos^{-1} \cdot (u)\right] \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$= (-1) \cdot \left[cos^{-2} \cdot (u)\right] \cdot \left(\frac{d \cdot cos(u)}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

Para obtener ésta última expresión se ha aplicado la fórmula de derivación inmediata IX para la derivada de una función elevada a un exponente.

Aplicando ahora la fórmula XII resulta. . .

$$\frac{d}{dx} \cdot sec(u(x)) = \left[\frac{-1}{cos^2 \cdot (u)}\right] \cdot (-sen(u)) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$= \left(\frac{sen(u)}{cos(u)}\right) \cdot \left(\frac{1}{cos(u)}\right) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$= tan(u) \cdot sec(u) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

y queda demostrado .

XVII

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cdot csc(u(x)) = -csc(u(x)) \cdot cot(u(x)) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)}$$

" La derivada de la cosecante de una función es el producto negativo de la cosecante , la tangente y la derivada de la función "

Demostración : Se demuestra en forma semejante a la regla XVI .Se deja como ejercicio.

XVIII

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cdot arcsen(u(x)) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\sqrt{1-u^2}}}$$

" La derivada del arco seno de una función es la derivada de la función dividida por la raíz cuadrada de 1 menos el cuadrado de la función "

Demostración : Sea la función $y(x) = arcsen(u(x))$. Derivemosla aplicando la *"regla de la cadena"* .
. .

$$\frac{d}{dx} \cdot arcsen(u(x)) = \left(\frac{d \cdot arcsen(u)}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) \qquad (*)$$

La función inversa de $y = arcsen(u)$ es $u = sen(y)$, asi que aplicando la fórmula para la derivada de una función inversa : $\frac{dy}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$ se obtiene . . .

$$\frac{d \cdot arcsen(u)}{du} = \frac{1}{\left(\frac{d \cdot sen(y)}{dy}\right)} = \frac{1}{cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 \cdot (y)}}$$

donde se ha usado la identidad trigonométrica : $cos^2 \cdot (y) + sen^2(y) = 1$.
Finalmente, puesto que $u = sen(y)$, substituyendo en (*), resulta la fórmula que se quería demostrar.

XIX

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cdot arccos(u) = -\left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}\right) \cdot \frac{du}{dx}}$$

" La derivada del arco coseno es igual que la derivada del arco seno pero con signo negativo "

Demostración : Se demuestra en forma semejante a la regla XVIII .Se deja como ejercicio.

XX

$$\boxed{\frac{d}{dx} \cdot arctan(u(x)) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{1 + u^2}}$$

" La derivada del arco tangente de una función es la derivada de la función dividida por 1 más el cuadrado de la función "

Demostración : Sea la función $y(x) = arctan(u(x))$. Al calcular su función derivada por medio de la *"regla de la cadena"* se obtiene :

$$\frac{d}{dx} \cdot arctan(u(x)) = \left(\frac{d \cdot arctan(u)}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) \qquad (*))$$

Puesto que $u(y) = tan(y)$ es la función inversa de la función $y(u) = arctan(u)$,

aplicando la fórmula para la derivada de una función inversa : $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{du}{dy}\right)}$ se obtiene :

$$\frac{d \cdot arctan(u)}{du} = \frac{1}{\left(\dfrac{d \cdot tan(y)}{dy}\right)} = \frac{1}{sec^2 \cdot (y)} = \frac{1}{1 + tan^2 \cdot (y)}$$

(donde se ha aplicado la identidad trigonométrica : $1 + tan^2 \cdot (y) = sec^2 \cdot (y)$)

Por lo tanto, substituyendo en (*) resulta finalmente . . .

$$\frac{d}{du} \cdot arctan(u(x)) = \frac{1}{1 + tan^2 \cdot (y)} \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)$$

y puesto que $tan(y) = u$, queda demostrada la fórmula inmediata de derivación .

XXI $\boxed{\dfrac{d}{dx} \cdot arccot(u) = -\dfrac{\left(\dfrac{du}{dx}\right)}{1 + u^2}}$

" La derivada del arco cotangente es el mismo resultado que la derivada de la función arco tangente pero negativo "

Demostración : Se demuestra en forma semejante a la regla XX. Se deja como ejercicio.

XXII $\boxed{\dfrac{d}{dx} \cdot arcsec(u(x)) = \dfrac{\left(\dfrac{du}{dx}\right)}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}}$

" La derivada del arco secante de una función es la derivada de la función dividida por el producto de la función y la raiz cuadrada del cuadrado del función menos la unidad "

Demostración : Sea la función $y(x) = arcsec(u(x))$. Derivémosla por la "*regla de la cadena*":

$$\frac{d}{dx}\cdot arcsec(u(x)) = \left(\frac{d\cdot arcsec(u(x))}{du}\right)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right) \qquad (*)$$

Dado que $u(y) = sec(y)$ es la función inversa de la función $y(u) = arcsec(u)$,

aplicando la fórmula para la derivada de una función inversa : $\frac{dy}{du} = \frac{1}{\left(\frac{du}{dy}\right)}$ queda:

$$\frac{d\cdot arcsec(u)}{du} = \frac{1}{\left(\frac{d\cdot sec(y)}{dy}\right)} = \frac{1}{sec(y)\cdot tan(y)} = \frac{1}{sec(y)\cdot\sqrt{sec^2\cdot(y) - 1}}$$

En éste último paso, se ha aplicado la *identidad trigonométrica* $1 + tan^2\cdot(y) = sec^2\cdot(y)$

Finalmente, puesto que $sec(y) = u$ resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot arcsec(u(x)) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u\cdot\sqrt{u^2 - 1}}$$

que es lo que se pedía demostrar .

XXIII $\boxed{\frac{d}{dx}\cdot arccsc(u) = -\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u\cdot\sqrt{u^2 - 1}}}$

" La derivada del arco cosecante es igual a la derivada del arco secante sólo que negativa "

Demostración : Se demuestra en forma semejante a la regla XXII. Se deja como ejercicio.

Es importante hacer notar que durante las demostraciones de las reglas anteriores, se aplicó la definición general de derivación ***esencialmente solo en las fórmulas*** I , II , III , IV , VI , VIII y XII . y que *todas las demás fórmulas de derivación inmediata se pueden demostrar a partir de estas " fórmulas básicas".*

Asi por ejemplo la fórmula V también se puede demostrar aplicando la regla IV para la derivada de un producto de funciones como sigue . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(u(x)\cdot v(x)^{-1}\right) = u\cdot\left(\frac{d}{dx}v^{-1}\right) + v^{-1}\cdot\left(\frac{d}{dx}u\right)$$

Aplicando ahora la regla IX para la derivada de una función elevada a una potencia constante queda . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \left(-u\cdot v^{-2}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right) + v^{-1}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$$

y simplificando . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{-u}{v^2}\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right) + \frac{1}{v}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{-u\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)}{v^2}$$

Que es precisamente la fórmula de derivación inmediata número V para el cociente de dos funciones.

Ejemplo 8. Dada la función $f(x) = x^5 - 4\cdot x^3 + 2\cdot x - 3$, calcular su función derivada

Solución : Se desea obtener :

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \frac{d}{dx}\cdot\left(x^5 - 4\cdot x^3 + 2\cdot x - 3\right)$$

Aplicando la *regla III para la derivada de una suma algebráica de funciones, que es la suma de las derivadas de las funciones correspondientes,* resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^5\right) - \frac{d}{dx}\left(4\cdot x^3\right) + \frac{d}{dx}(2\cdot x) - \frac{d}{dx}(3)$$

Aplicando ahora la *regla I: " la derivada de una constante es cero" , asi como la regla IVa para obtener la derivada del producto de una constante por una función como el producto de la constante por la derivada de la función*, resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \frac{d}{dx}\left(x^5\right) - 4\cdot\left[\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\right] + 2\cdot\left[\frac{d}{dx}(x)\right] - 0$$

Ahora se aplica la *regla IX para calcular la derivada de una función elevada a una potencia constante* y queda . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = 5\cdot x^{(5-1)}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right) - 4\cdot(3)\cdot x^{(3-1)}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right) + 2\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right)$$

Finalmente, se aplica la fórmula II : $\frac{dx}{dx} = 1$ de modo que la derivada buscada es . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(x^5 - 4\cdot x^3 + 2\cdot x - 3\right) = 5\cdot x^4 - 12\cdot x^2 + 2$$

Ejemplo 9. Calcular la función derivada de la función $f(x) = 3\cdot\sqrt[3]{x^2} - 2\cdot\sqrt{x^5} + \frac{1}{x^3}$

Solución : Se desea obtener :

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \frac{d}{dx}\cdot\left(3\cdot\sqrt[3]{x^2} - 2\cdot\sqrt{x^5} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Expresando *los radicales como potencias fraccionarias* y aplicando la regla III para calcular la derivada de una suma de funciones resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \left[\frac{d}{dx}\left(3\cdot x^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{d}{dx}\left(2\cdot x^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

Aplicando ahora la *la regla IVa para obtener la derivada del producto de una constante por una función como el producto de la constante por la derivada de la función*, resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = 3\cdot\left(\frac{d}{dx}x^{\frac{2}{3}}\right) - 2\cdot\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{-3}\right)$$

Enseguida se aplica la *regla IX para calcular la derivada de una función elevada a una potencia constante. . .*

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot x^{\left(\frac{2}{3}-1\right)}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right) - 2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)\cdot x^{\left(\frac{5}{2}-1\right)}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right) + (-3)\cdot x^{(-3-1)}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right)$$

Simplificando ahora y aplicando la regla II se obtiene la expresión de la derivada buscada :

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = 2\cdot x^{-\frac{1}{3}} - 5\cdot x^{\frac{3}{2}} - 3\cdot x^{-4}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 5\cdot\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^4}$$

Ejemplo 10. Calcular la derivada de la función $f(x) = \frac{a\cdot x^2}{\sqrt{x}} + \frac{b}{x\cdot\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

Solución : La derivada de ésta función se calcula más fácilmente si se *simplifican primero* los exponentes:

$$\frac{a\cdot x^2}{\sqrt{x}}+\frac{b}{x\cdot\sqrt{x}}-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = a\cdot x^{\left(2-\frac{1}{2}\right)}+b\cdot x^{-\left(1+\frac{1}{2}\right)}-x^{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= a\cdot x^{\frac{3}{2}}+b\cdot x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}$$

Asi que por la derivada de una suma de funciones (regla III) se obtiene :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(a\cdot x^{\frac{3}{2}}+b\cdot x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{1}{6}}\right) = \frac{d}{dx}\left(a\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)+\frac{d}{dx}\left[b\cdot x^{-\left(\frac{3}{2}\right)}\right]-\frac{d}{dx}\left[x^{-\left(\frac{1}{6}\right)}\right]$$

Se aplican a hora las reglas para obtener la derivada de una constante por una función y la derivada de una función potencia (IVa y X) obteniéndose :

$$= a\cdot\left[\frac{3}{2}\cdot x^{\left(\frac{3}{2}-1\right)}\right]+b\cdot\left[\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot x^{\left(-\frac{3}{2}-1\right)}\right]-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot x^{\left(-\frac{1}{6}-1\right)}$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\cdot a\cdot\sqrt{x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{x^5}}+\frac{1}{6\cdot\sqrt[6]{x^7}}} \qquad \textit{(simplificando los exponentes)}$$

Ejemplo 11. Obtener la función derivada de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}}$

Solución : Interpretando a la función $f(x)$ como el cociente de las funciones $u(x) = \sqrt{a^2+x^2}$ y $v(x) = \sqrt{a^2-x^2}$ y aplicado la regla correspondiente : $\dfrac{d}{dx}\cdot\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{\left(v\cdot\dfrac{du}{dx}-u\cdot\dfrac{dv}{dx}\right)}{v^2}$

se obtiene . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}\cdot\left(\dfrac{d}{dx}\cdot\sqrt{a^2+x^2}\right)-\sqrt{a^2+x^2}\cdot\left(\dfrac{d}{dx}\cdot\sqrt{a^2-x^2}\right)}{\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}$$

Usando ahora la regla para derivar una función potencia (*regla IX*) como sigue . . .

$$\frac{d}{dx}\sqrt{a^2+x^2} = \frac{d}{dx}\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(a^2+x^2\right)^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}\cdot\frac{d}{dx}\left(a^2+x^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(0+2\cdot x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

y con un procedimiento similar para : $\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ se obtiene que :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{a^2-x^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)-\sqrt{a^2+x^2}\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)}{\left(a^2-x^2\right)}$$

Simplificando ésta expresión con radicales, resulta finalmente :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = \frac{2\cdot a^2\cdot x}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}\cdot\sqrt{a^2+x^2}}$$

Ejemplo 12. Derivar la función $g(x) = x^5\cdot e^{\left(3\cdot x^2\right)}$

Solución : Interpretando a la función $g(x)$ como el producto de las funciones: $u(x) = x^5$ y $v(x) = e^{3\cdot x^2}$, apliquemos la regla para derivar un producto de funciones:

$$\frac{d}{dx}\cdot(u\cdot v) = u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

y resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left[\left(x^5\right)\cdot\left(e^{3\cdot x^2}\right)\right] = x^5\cdot\left[\frac{d}{dx}\cdot\left(e^{3\cdot x^2}\right)\right]+e^{3\cdot x^2}\cdot\left[\frac{d}{dx}\cdot\left(x^5\right)\right]$$

$$= x^5\cdot\left[e^{3\cdot x^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(3\cdot x^2\right)\right]+e^{3\cdot x^2}\cdot\left[5\cdot x^4\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right)\right]$$

Aquí se han aplicado las fórmulas inmediatas para obtener la derivada de una función potencia y de una función exponencial (reglas IX y Xa) .

Finalmente, simplificando algebraicamente la expresión, resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\left[\left(x^5\right)\cdot\left(e^{3\cdot x^2}\right)\right] = x^5\cdot\left[e^{3\cdot x^2}\cdot(6\cdot x)\right] + e^{3\cdot x^2}\cdot\left(5\cdot x^4\right)$$

$$= 6\cdot x^6\cdot e^{3\cdot x^2} + 5\cdot x^4\cdot e^{3\cdot x^2}$$

Ejemplo 13. Derivar la función $F(x) = ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

Solución : Interpretemos a la función $F(x)$ como la función compuesta :

$$F(x) = F(u(x)) = ln(u(x)) \quad \text{donde} \quad u(x) = x + \sqrt{a^2 + x^2}$$

y apliquemos la fórmula de derivación inmediata para obtener la derivada de una función logaritmo natural (regla VIIIa) : $\frac{d}{dx}\cdot ln(u) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}$ obteniéndose . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\frac{dx}{dx} + \frac{d}{dx}\cdot\sqrt{a^2 + x^2}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}$$

pero, por otra parte, por la regla para la derivada de una función potencia :

$$\frac{d}{dx}\cdot\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{d}{dx}\cdot\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\left(a^2 + x^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left(a^2 + x^2\right)$$

$$= \frac{0 + 2\cdot x}{2\cdot\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

de modo que . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

Ejemplo 14. Obtener la función derivada de $f(x) = \left(sen\left(x^3\right)\right)^4$

Solución : (Las potencias de las funciones trigonométricas se denotan también escribiendo el exponente encima del nombre de la función, asi por ejemplo $\left(sen\left(x^3\right)\right)^4$ es equivalente a $sen^4\left(x^3\right)$)

Interpretemos a la función $f(x)$ como la función compuesta :

$$f(x) = f(u(v(x))) = u^4 \text{ donde } u(v) = sen(v) \text{ y } v(x) = x^3$$

y apliquemos la " *regla de la cadena* " . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot f(u(v(x))) = \left(\frac{df}{du}\right)\cdot\left(\frac{du}{dv}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

pero $f(u) = u^4$ por lo cual $\dfrac{df}{du} = \dfrac{d}{du}\cdot u^4 = 4\cdot u^3$

$u(v) = sen(v)$ por lo cual $\dfrac{du}{dv} = \dfrac{d}{dv}\cdot sen(v) = cos(v)$

$v(x) = x^3$ por lo cual $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cdot x^3 = 3\cdot x^2$

obteniéndose . . .

$$\frac{df}{dx} = \left(4\cdot u^3\right)\cdot cos(v)\cdot\left(3\cdot x^2\right)$$

es decir . . .

$$\frac{df}{dx} = 4\cdot(sen(v))^3\cdot cos(v)\cdot\left(3\cdot x^2\right) = 4\cdot\left[sen^3\cdot\left(x^3\right)\right]\cdot cos\left(x^3\right)\cdot\left(3\cdot x^2\right)$$

$$= 12\cdot x^2\cdot\left[sen^3\cdot\left(x^3\right)\right]\cdot cos\left(x^3\right)$$

Ejemplo 15. Obtener la función derivada de $h(x) = arcsen\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^2}\right)$

Solución : Interpretemos a la función $h(x)$ como la función compuesta :

$$h(x) = h(v(x)) = arcsen(v(x)) \quad \text{donde} \quad v(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$$

y apliquemos la " *regla de la cadena* " . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot h(v(x)) = \left(\frac{dh}{dv}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

pero : $h(v) = arcsen(v)$ y por la regla *XVIII* : $\frac{dh}{dv} = \frac{\frac{dv}{dv}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$

$$v(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - x^{-2} \quad \text{y por lo regla } IX: \ \frac{dv}{dx} = 0 - \left(-2\cdot x^{-2-1}\right) = 2\cdot x^{-3}$$

de modo que de la regla de la cadena queda . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot arcsen(u(x)) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)\cdot\left(2\cdot x^{-3}\right) = \frac{2\cdot x^{-3}}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2\cdot x^{-3}}{\left[\frac{\sqrt{x^4-\left(x^4-2\cdot x^2+1\right)}}{x^2}\right]} = \boxed{\frac{2}{x\cdot\sqrt{2\cdot x^2-1}}}$$

Ejemplo 16. Obtener la función derivada de $h(x) = ln\left[\frac{(x-1)^3\cdot(x-2)}{x-3}\right]$

Solución : Si antes de aplicar las fórmulas inmediatas de derivación se usan las propiedades de los logaritmos, se obtiene una expresión mucho más simple para derivar, dado que el logaritmo de . . .

- *un cociente es la diferencia de logaritmos del numerador y del denominador.*
- *un producto es la suma de los logaritmos de los factores*
- *una potencia de una expresión es la potencia por el logaritmo de la expresión*

después de aplicar éstas propiedades, la función inicial queda entonces como :

$$ln\left[\frac{(x-1)^3\cdot(x-2)}{x-3}\right] = ln\left[(x-1)^3\cdot(x-2)\right] - ln(x-3)$$

$$= ln\left[(x-1)^3\right] + ln(x-2) - ln(x-3)$$

es decir . . .

$$ln\left[\frac{(x-1)^3\cdot(x-2)}{x-3}\right] = 3\cdot ln(x-1) + ln(x-2) - ln(x-3)$$

y la expresión de la derecha es mucho más sencilla de derivar que la expresión equivalente de la izquierda.

Aplicando la *regla III para la derivada de una suma algebráica de funciones, que es la suma de las derivadas de las funciones correspondientes,* resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot h(x) = \frac{d}{dx}(3\cdot ln(x-1)) + \frac{d}{dx}(ln(x-2)) - \frac{d}{dx}(ln(x-3))$$

y por la aplicación de la *regla VIIIa para la derivada del logaritmo natural de una función que es la derivada de la función dividida por la función.,* resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot h(x) = 3\cdot\frac{\left[\frac{d}{dx}(x-1)\right]}{x-1} + \frac{\left[\frac{d}{dx}(x-2)\right]}{x-2} - \frac{\left[\frac{d}{dx}(x-3)\right]}{x-3}$$

$$= 3\cdot\frac{\left(\frac{dx}{dx}-0\right)}{x-1} + \frac{\left(\frac{dx}{dx}-0\right)}{x-2} - \frac{\left(\frac{dx}{dx}-0\right)}{x-3}$$

pero $\frac{dx}{dx} = 1$ asi que finalmente . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot ln\left[\frac{(x-1)^3\cdot(x-2)}{x-3}\right] = \boxed{\frac{1}{x-2} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x-3}}$$

Si se intenta calcular ésta derivada directamente, el procedimiento resulta mucho más complicado y laborioso. Compruébelo usted mismo !.

La moraleja de éste ejercicio es que antes de empezar el cálculo de una derivada, es conveniente que *primero se trate de simplificar la expresión que se va a derivar*

En el siguiente ejemplo también se muestra la utilidad de usar las propiedades de los logaritmos para simplificar el cálculo de una derivada .

Ejemplo 17. Derivar la función : $f(x) = \frac{(x+1)^3\cdot\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

Solución : Es fácil darse cuenta de que el cálculo directo de la derivada de ésta función es un problema bastante complicado pues involucra la aplicación de varias fórmulas de derivación inmediata ; sin embargo, al tomar el logaritmo natural en ambos miembros de la ecuación que define a ésta función y aplicar las propiedades de los logaritmos, se obtiene una expresión mucho más simple para derivar, como se muestra enseguida .

Tomando logaritmos en ambos miembros . . .

$$ln(f(x)) = ln\left[\frac{(x+1)^3\cdot\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\right]$$

Aplicando al miembro derecho las propiedades de los logaritmos queda . . .

$$ln(f(x)) = ln\left[(x+1)^3\right] + ln\left[\sqrt{(x-2)^3}\right] - ln\left[\sqrt[5]{(x-3)^2}\right]$$

$$= ln\left[(x+1)^3\right] + ln\left[(x-2)^{\frac{3}{2}}\right] - ln\left[(x-3)^{\frac{2}{5}}\right]$$

es decir . . .

$$ln(f(x)) = 3\cdot ln(x+1) + \frac{3}{2}\cdot ln(x-2) - \frac{2}{5}\cdot ln(x-3)$$

Derivando ahora ambos miembros respecto a la variable x resulta . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot ln(f(x)) = \frac{d}{dx}\cdot\left(3\cdot ln(x+1) + \frac{3}{2}\cdot ln(x-2) - \frac{2}{5}\cdot ln(x-3)\right)$$

Aplicando la *regla III para la derivada de una suma algebráica de funciones,* asi como la *regla VIIIa para la derivada del logaritmo natural de una función ,* se obtiene . . .

$$\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{f(x)} = 3\cdot\frac{\left[\frac{d}{dx}\cdot(x+1)\right]}{x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\left[\frac{d}{dx}\cdot(x-2)\right]}{x-2} - \frac{2}{5}\cdot\frac{\left[\frac{d}{dx}\cdot(x-2)\right]}{x-3}$$

$$= 3\cdot\left(\frac{1}{x+1}\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{x-3}\right)$$

y finalmente, *despejando algebráicamente de ésta ecuación la derivada* $\frac{df}{dx}$ queda. . .

$$\frac{df}{dx} = f(x)\cdot\left[\frac{3}{x-1} + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{x-3}\right)\right]$$

Substituyendo la expresión para $f(x)$ y con un poco de álgebra se obtiene . . .

$$\frac{df}{dx} = \left[\frac{(x+1)^3\cdot\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\right]\cdot\left[\frac{1}{10}\cdot\frac{41\cdot x^2-176\cdot x+143}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left[\frac{(x+1)^2\cdot\sqrt{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^7}}\right]\cdot\left(41\cdot x^2-176\cdot x+143\right)$$

En problemas como éste que involucran el producto o cociente de varias expresiones algebráicas elevadas a potencias, éste método de derivación ahorra tiempo y esfuerzo y se conoce como ***derivación logarítmica*** .

Ejemplo 18. Derivar la función : $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{6}\cdot ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Solución : Definiendo las funciones: $u(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ y $v(x) = \frac{x-1}{x+1}$ y aplicando directamente las dos siguientes fórmulas inmediatas de derivación :

$$\frac{d}{dx}\cdot arctan(u(x)) = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{1+u^2} \quad ; \qquad \frac{d}{dx}\cdot ln(v(x)) = \frac{\left(\frac{dv}{dx}\right)}{v}$$

se obtiene . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\left[1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}+\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}+\frac{1}{6}\cdot\frac{\left[\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}\right]}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

simplificando algebráicamente éste resultado, queda . . .

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2+x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{x^2}{\left(2+x^2\right)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}$$

Ejemplo 19. Derivar la función : $f(x) = \frac{1}{2}\cdot ln\left(tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{cos(x)}{sen^2\cdot(x)}$

Solución : Escribamos ésta función como la suma algebráica de dos funciones

$$f(x) = h(x) - g(x)$$

Interpretemos a la función $h(x)$ como la función compuesta :

$$h(x) = h(u(v(x))) = \frac{1}{2}\cdot ln(u) \quad \text{donde} \quad u(v) = tan(v) \quad \text{y} \quad v(x) = \frac{x}{2}$$

y apliquémosle la " *regla de la cadena* " . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot h(u(v(x))) = \left(\frac{dh}{du}\right)\cdot\left(\frac{du}{dv}\right)\cdot\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

pero $h(u) = \frac{1}{2}\cdot ln(u)$ por lo cual $\frac{dh}{du} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{du}{du}\right)}{u} = \frac{1}{2\cdot u}$

$u(v) = tan(v)$ por lo cual $\frac{du}{dv} = \frac{d}{dv}\cdot tan(v) = sec^2\cdot(v)\cdot\frac{dv}{dv}$

$v(x) = \frac{x}{2}$ por lo cual $\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dx} = \frac{1}{2}$

por lo tanto, la derivada de éste primer término es . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot ln\left(tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = \left(\frac{1}{2\cdot u}\right)\cdot\left[sec^2\cdot(v)\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{tan\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot sec^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)$$

Aplicando las identidades trigonométricas: $tan(z) = \frac{sen(z)}{cos(z)}$ y $sec(z) = \frac{1}{cos(z)}$ queda . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot ln\left(tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{sen(x)}$$

donde se ha usado al final la *identidad trigonométrica* $2\cdot sen(\phi)\cdot cos(\phi) = sen(2\cdot\phi)$

Aplicando ahora al segundo término de $f(x)$ la derivada de un cociente de funciones se obtiene . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{cos(x)}{sen^2\cdot(x)}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{sen^2\cdot(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot cos(x)\right) - cos(x)\cdot\left[\frac{d}{dx}\cdot sen^2\cdot(x)\right]}{\left[sen^2\cdot(x)\right]^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{sen^2\cdot(x)\cdot(-sen(x)) - cos(x)\cdot(2\cdot sen(x)\cdot cos(x))}{sen^4\cdot(x)}$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{sen^3\cdot(x) + 2\cdot sen(x)\cdot cos^2\cdot(x)}{sen^4\cdot(x)}$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{\left[sen^2\cdot(x) + cos^2\cdot(x) + cos^2\cdot(x)\right]\cdot sen(x)}{sen^4\cdot(x)}$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1 + cos^2\cdot(x)}{sen^3\cdot(x)}$$

(en éste último paso, se ha usado la *identidad trigonométrica* $sen^2\cdot(x) + cos^2\cdot(x) = 1$.

Finalmente, agrupando las derivadas de las funciones $h(x)$ y $g(x)$ queda :

$$\frac{d}{dx}\cdot f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{sen(x)} - \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\frac{1 + cos^2\cdot(x)}{sen^3\cdot(x)}$$

$$= \frac{sen^2\cdot(x) + 1 + cos^2\cdot(x)}{2\cdot\left[sen^3\cdot(x)\right]}$$

$$= \frac{2}{2\cdot\left[sen^3\cdot(x)\right]}$$

$$= \boxed{csc^3\cdot(x)}$$

puesto que $\frac{1}{sen(\phi)} = csc(\phi)$.

EJERCICIO 4.1

Aplicando las fórmulas inmediatas de derivación, obtener la función derivada de las siguientes funciones :

1. $f(x) = -\dfrac{11}{2\cdot(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$

2. $f(x) = \dfrac{x^3}{3\cdot\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$

3. $f(x) = \dfrac{9}{5\cdot(x+2)^5} - \dfrac{3}{(x+2)^4} + \dfrac{2}{(x+2)^3} - \dfrac{1}{2\cdot(x+2)^2}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{3}\cdot ln\left(\dfrac{x^2-2\cdot x+1}{x^2+x+1}\right)$

5. $f(x) = arcsen\left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$

6. $f(x) = \sqrt{a^2-x^2} + a\cdot arcsen\left(\dfrac{x}{a}\right)$

7. $f(x) = x\cdot\sqrt{a^2-x^2} + a^2\cdot arcsen\left(\dfrac{x}{a}\right)$

8. $f(x) = \sqrt{e^{a\cdot x^2}}$

9. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot ln\left(\dfrac{tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+2-\sqrt{3}}{tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+2+\sqrt{3}}\right)$

10. $f(x) = ln\left(\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)$

11. $f(x) = ln\left(\dfrac{1+\sqrt{sen(x)}}{1-\sqrt{sen(x)}}\right) + 2\cdot arctan\left(\sqrt{sen(x)}\right)$

12. $f(x) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right)$

13. $f(x) = ln\left(ln\left(3-2\cdot x^3\right)\right)$

14. $f(x) = \dfrac{-cos(x)}{3\cdot sen^3\cdot(x)} + \dfrac{4}{3}\cdot cot(x)$

15. $f(x) = csc(x)^2 + sec(x)^2$

16. $f(x) = arccos\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

17. $f(x) = ln\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

18. $f(x) = x\cdot sen\left(2^x\right)$

19. $f(x) = log_{10}\cdot(sen(x))$

20. $f(x) = x^2\cdot 10^{x^3}$

<u>*Respuestas del ejercicio*</u> 4.1 *(problemas impares)*

1. $\dfrac{4\cdot x+3}{(x-2)^3}$ 3. $\dfrac{x^3-1}{(x+2)^6}$ 5. $\dfrac{a}{\left(a^2+x^2\right)}$

7. $2\cdot\sqrt{a^2-x^2}$ 9. $\dfrac{1}{1+2\cdot sen(x)}$ 11. $\dfrac{2}{cos(x)\cdot\sqrt{sen(x)}}$

13. $\dfrac{-6\cdot x^2}{\left(3-2\cdot x^3\right)\cdot ln\left(3-2\cdot x^3\right)}$ 15. $\dfrac{-16\cdot cos(2\cdot x)}{(sen(2\cdot x))^3}$ 17. $\dfrac{1}{(1-x)\cdot\sqrt{x}}$

19. $\dfrac{1}{ln(10)}\cdot cot(x)$

4.5 <u>*Funciones implícitas y su derivación*</u> .

<u>***Definición***</u> **:**

Cuando dos variables x e y , se encuentran relacionadas por medio de una ecuación de la forma :

$$F(x,y) = 0$$

pero <u>se sabe que la variable</u> y <u>es una función de la variable</u> x , entonces se dice que F representa a la variable y como una <u>función implícita</u> de la variable x .

Cuando una variable y es una función explícita de la variable x, se denota con $y = f(x)$ y se puede escribir siempre en forma implícita como $y - f(x) = 0$; sin embargo, no toda función implícita $F(x,y) = 0$ se puede escribir en forma explícita . Por ejemplo en las expresiones:

$$y^8 - 4\cdot y^2 + x^2 = 0 \qquad ; \qquad e^x + y^3 - sen(y) = 0$$

no es posible expresar a la variable y como función de x, es decir no es posible "despejar" de éstas ecuaciones a y en términos de funciones elementales de x .

Sin embargo, observemos que en éstos ejemplos la variable x ***si puede despejarse*** de la ecuación $F(x,y) = 0$ y *ser expresada como función explícita de* y *(bajo algunas restricciones de dominio y rango)* como sigue. . .

$$x = f(y) = \sqrt{4\cdot y^2 - y^8} \qquad ; \qquad x = f(y) = ln\left(sen(y) - y^3\right)$$

Al substituir x en $F(x,y) = 0$ se obtiene asi una identidad . En resumen . . .

- *" Siempre que sea posible resolver la ecuación* $F(x,y) = 0$ *para alguna de las dos variables* x *ó* y *se obtendrá una función explícita " .*

Transformar una función implícita $F(x,y) = 0$ en explícita $y = f(x)$ puede ser una tarea difícil, si no es que imposible, asi que para calcular la derivada de una función implícita sin transformarla previamente en explícita se procederá a . . .

1° ***Derivar ambos miembros de la ecuación*** $F(x,y) = 0$

considerando que la variable y es una función de x , es decir. . .

$$\frac{d}{dx}\cdot F(x,y(x)) = \frac{d}{dx}\cdot(0)$$

2° ***Resolver la ecuación :*** $\frac{d}{dx}\cdot F(x,y(x)) = 0$ para la derivada : $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Ejemplo 20. Sabiendo que la variable y es una función de x en : $\left(a\cdot x^7 + 2\cdot x^4\cdot y^2 - y^3\cdot x - 10\right) = 0$,

calcular su derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

Solución : Derivando término por término respecto a la variable x, se obtiene :

$$a\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot x^7\right) + 2\cdot\left[\frac{d}{dx}\cdot\left(x^4\cdot y^2\right)\right] - \frac{d}{dx}\cdot\left(y^3\cdot x\right) - 0 = 0$$

Aplicando ahora la derivada de un producto de funciones para los términos $\left(x^4\cdot y^2\right)$ y $\left(y^3\cdot x\right)$ resulta . . .

$$7\cdot a\cdot x^6 + 2\left[x^4\cdot\left(2\cdot y\cdot\frac{dy}{dx}\right) + y^2\cdot\left(4\cdot x^3\right)\right] - \left[y^3 + x\cdot\left(3\cdot y^2\cdot\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$$

resolviendo ésta ecuación para la derivada $\frac{dy}{dx}$ se obtiene :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7\cdot a\cdot x^6 + 8\cdot y^2\cdot x^3 - y^3}{x\cdot y\cdot\left(-4\cdot x^3 + 3\cdot y\right)}$$

Este ejemplo muestra que por lo general, una derivada implícita quedará expresada en términos mezclados de la variable independiente y de la función .

Ejemplo 21. Si se sabe que x es función de y, hallar en $(y - x) = \left(\frac{1}{2}\right)\cdot sen(x)$ la derivada de x respecto a y en

Solución : Derivando la expresión dada término por término, considerando que la variable x es una función implícita de la variable y se obtiene :

$$\frac{d}{dy}\cdot(y - x) = \frac{d}{dy}\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot sen(x)\right]$$

$$\left(\frac{dy}{dy} - \frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d}{dy}\cdot sen(x)\right)$$

es decir . . .

$$1 - \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\cdot cos(x)\cdot\left(\frac{dx}{dy}\right)$$

Resolviendo ahora esta ecuación para la derivada $\left(\frac{dx}{dy}\right)$ queda:

$$1 = \frac{1}{2}\cdot cos(x)\cdot\frac{dx}{dy} + \frac{dx}{dy}$$

$$1 = \left(\frac{1}{2}\cdot cos(x) + 1\right)\cdot\frac{dx}{dy}$$ y finalmente . . . $$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cdot cos(x)}$$

Ejemplo 22. Hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$ en $cos(x\cdot y) - x = 0$

Solución : Derivando término a término, considerando que y es una función implícita de x queda:

$$\frac{d}{dx}\cdot cos(x\cdot y) - \frac{d}{dx}\cdot(x) = 0$$

$$-sen(x\cdot y)\cdot\left[\frac{d}{dx}\cdot(x\cdot y)\right] - 1 = 0$$

$$-sen(x\cdot y)\cdot\left[x\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)+y\right]-1 = 0$$

Despejando de ésta ecuación la derivada $\frac{dy}{dx}$ queda :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y\cdot sen(x\cdot y)-1}{x\cdot sen(x\cdot y)}$$

4.6 ***Funciones paramétricas y su derivación*** .

Otra posible manera de calcular las coordenadas (x, y) para los puntos de una curva $y = f(x)$, es por medio de sus *ecuaciones paramétricas* :

$$x = \phi(t)$$
$$y = \psi(t) \qquad (4.3)$$

con las que tanto la variable independiente x, como la dependiente y , se consideran funciones de *una tercera variable común arbitraria* t, llamada ***parámetro*** .

Cada uno de los valores del parámetro t en cierto intervalo $[T_1 , T_2]$ determina a través de las ecuaciones (4.3) los valores (x, y), *es decir las coordenadas de un punto de la curva* $y = f(x)$.

Las ecuaciones paramétricas describen una función *explícita* de x siempre que sea posible resolver la ecuación $x = \phi(t)$ para t, digamos $t = \Phi(x)$, con lo cual se puede substituir en $y = \psi(t)$ resultando. . .

$$y = \psi(t) = \psi\left(\Phi(x)\right)$$

y de éste modo, la variable y es una *función compuesta* de x en la forma rectangular usual $y = f(x)$.

Ejemplo 23. Eliminar el parámetro θ en las ecuaciones paramétricas: $\begin{pmatrix} x(\theta) = R\cdot cos(\theta) \\ y(\theta) = R\cdot sen(\theta) \end{pmatrix}$;

$0 < \theta \leq 2\cdot\pi$ para determinar la curva rectangular que representan.

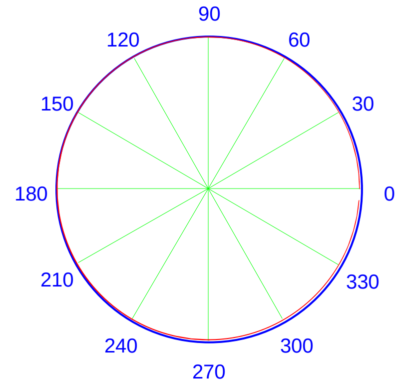
Solución : La identidad trigonométrica $sen^2\cdot(\theta) + cos^2\cdot(\theta) = 1$ sugiere que calculemos la expresión : $x^2 + y^2$ obteniéndose . . .

$$x^2 + y^2 = (R\cdot\cos(\theta))^2 + (R\cdot\operatorname{sen}(\theta))^2 = R^2\cdot\left[\operatorname{sen}^2\cdot(\theta) + \cos^2\cdot(\theta)\right]$$

esto es : $x^2 + y^2 = R^2$ que representa la ecuación rectangular para una *circunferencia de radio R con centro en el origen de coordenadas* .

Enseguida se indican las coordenadas correspondientes para algunos valores típicos del parámetro θ .

θ	$x = R\cdot\cos(\theta)$	$y = R\cdot\operatorname{sen}(\theta)$
0^o	R	0
$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R$	$\frac{1}{2}\cdot R$
$45^o = \frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot R$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot R$
$60^o = \frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}\cdot R$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R$
$120^\circ = \frac{2}{3}\cdot\pi$	$-\frac{1}{2}\cdot R$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R$
$150^\circ = \frac{5}{6}\cdot\pi$	$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot R\right)$	$\frac{1}{2}\cdot R$



Nótese la simetría de coordenadas entre algunos pares de puntos como los asociados con 30º y 150º , con 30º y 210º o con 30º y 330º .

(Es conveniente familiarizarse con los valores seno y coseno para algunos ángulos típicos del primer cuadrante como 30º , 60º , 45º , asi como su equivalente en radianes , con el fin de facilitar y aumentar la rapidez del cálculo de coordenadas en otros cuadrantes)

Si el parámetro θ varía en el intervalo $0 \le \theta \le 2\cdot\pi$, las ecuaciones paramétricas describen todos los puntos de la circunferencia .

Si deseamos representar a la variable y como una verdadera función explícita de la variable x ,entonces el parámetro θ debe variar solamente entre 0 y π *(lo cual genera una semicircunferencia).*

Ejemplo 24. Obtener las ecuaciones paramétricas para una elipse horizontal de semieje mayor de longitud a a lo largo del eje X y de semieje menor de longitud b a lo largo del eje Y , con centro en el origen de coordenadas

Solución : Consideremos dos círculos concéntricos de radios a y b , con centro en el origen de un sistema de coordenadas rectangular *OXY*, como se muestra en la siguiente figura y sean :

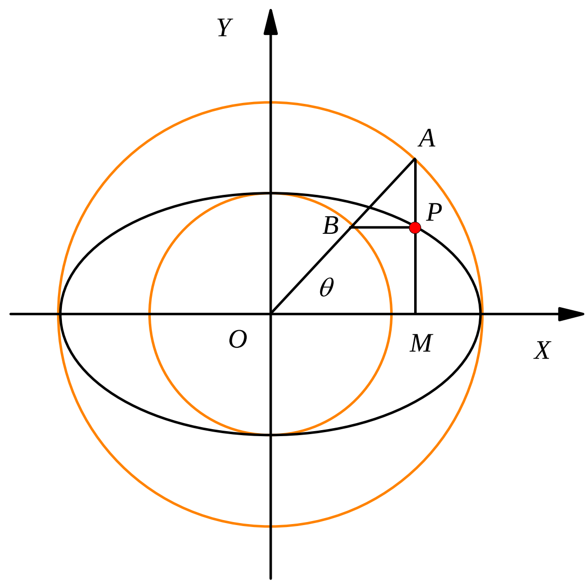
OB = radio b del círculo menor

OA = radio a del círculo mayor

OM = coordenada x de un punto P de la elipse

MP = coordenada y de un punto P de la elipse

θ = ángulo de la recta OA respecto al eje X



Entonces, por trigonometría se deduce que :

$$x = OA \cdot \cos(\theta)$$
$$y = OB \cdot sen(\theta)$$

De modo que las ecuaciones paramétricas de ésta curva son :

$$x(\theta) = a \cdot \cos(\theta)$$
$$y(\theta) = b \cdot sen(\theta)$$

De éste modo, cuando el parámetro θ varíe entre 0 y $2 \cdot \pi$, se determinarán todos los puntos sobre la elipse .

Para que la variable y sea una función de x, el parámetro θ debe variar solamente entre 0 y π *(con lo cual se describe el arco de la elipse en el semiplano superior)* o bien entre π y $2 \cdot \pi$ *(con lo cual se describe el arco de la elipse en el semiplano inferior)*

Al eliminar el parámetro θ de las ecuaciones paramétricas anteriores, se obtiene . . .

$$\left(\frac{x(\theta)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(\theta)}{b}\right)^2 = \cos^2 \cdot (\theta) + sen^2 \cdot (\theta)$$

es decir :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

que es la conocida ecuación rectangular o cartesiana para una elipse con éstas características :

Ejemplo 25. Determinar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la parábola: $4\cdot x^2 + y = 4$

Solución : ***La parametrización de una curva es arbitraria*** , esto significa que se puede escoger *cualquier expresión matemática bien definida* para escribir una de las variables de la ecuación en función de un parámetro adecuado. La otra variable quedará automáticamente parametrizada usando la ecuación inicial.

Asi por ejemplo, escribiendo a la variable x en función de un parámetro θ que varíe en el intervalo [$0, 2\cdot\pi$] como :

$$x(\theta) = sen(\theta)$$

entonces la coordenada y se obtiene despejándola de la ecuación inicial: $4\cdot x^2 + y = 4$ y queda . . .

$$y(\theta) = 4\cdot\left(1 - x^2\right) = 4\cdot\left[1 - sen^2\cdot(\theta)\right] = 4\cdot cos^2\cdot(\theta)$$

asi que una posible forma para las ecuaciones paramétricas de ésta parábola es :

$$\begin{bmatrix} x(\theta) = sen(\theta) \\ y(\theta) = 4\cdot cos^2\cdot(\theta) \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{con } 0 \le \theta \le 2\cdot\pi$$

Dentro de la infinidad de posibles parametrizaciones para la variable x, otra podría ser :

$$x(t) = \frac{t}{2} \quad , \text{ con } -\infty < t < \infty$$

con la cual se obtiene que la variable y es :

$$y(t) = 4 - 4\cdot x^2 = 4 - 4\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^2 = 4 - t^2$$

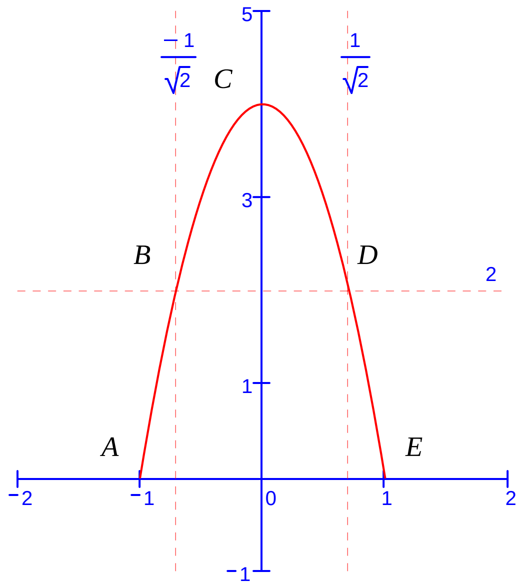
y las ecuaciones paramétricas para ésta parábola quedaría ahora expresadas como . . .

$$\begin{pmatrix} x(t) = \frac{t}{2} \\ y(t) = 4 - t^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad -\infty < t < \infty$$

Éstas dos parametrizaciones *(o cualquier otra)* son igualmente válidas para representar una curva o una función matemática, aunque pueden describir diferentes partes ella .

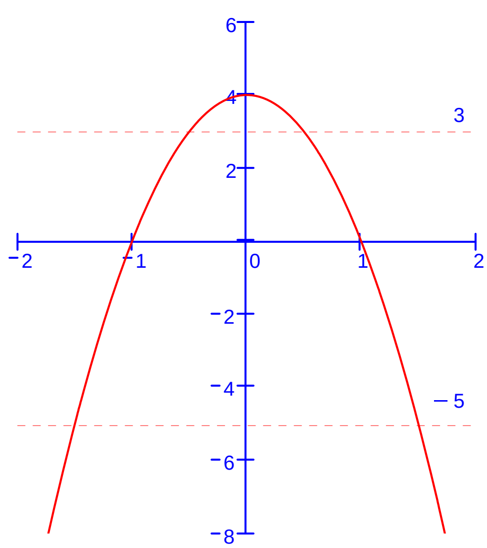
Por ejemplo, si en la primera parametrización θ varía entre $\frac{-\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, entonces *se describe solamente el arco de la parábola en el semiplano superior* (otros valores de θ , sólo repiten los mismos puntos de la curva) dado que $y(t) > 0$ siempre, como se ilustra en la siguiente figura . . .

$$\begin{bmatrix} x(\theta) = sen(\theta) \\ y(\theta) = 4\cdot cos^2\cdot(\theta) \end{bmatrix} \quad ; \quad \frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



Punto	θ	Punto(x,y)
A	$\frac{-\pi}{2}$	$(-1,0)$
B	$\frac{-\pi}{4}$	$\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},2\right)$
C	0	$(0,4)$
D	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},2\right)$
E	$\frac{\pi}{2}$	$(1,0)$

mientras que en la segunda parametrización, si el parámetro t varia desde $-\infty$ a ∞, *se describen todos los puntos de la parábola* , como se ilustra enseguida . . .



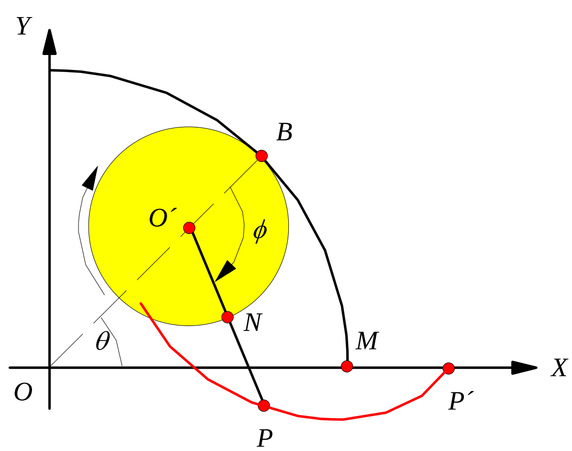
Punto	t	punto(x,y)
A	-3	$\left(-\frac{3}{2},-5\right)$
B	-2	$(-1,0)$
C	-1	$\left(-\frac{1}{2},3\right)$
D	0	$(0,4)$
E	1	$\left(\frac{1}{2},3\right)$
F	2	$(1,0)$
G	3	$\left(\frac{3}{2},-5\right)$

En resumen, los valores del parámetro usado para representar una curva en forma paramétrica dependen entre otras cosas, de si se desea describir una función, ó solamente una ecuación matemática, ó también si se quiere representar solamente una parte o la totalidad de una curva .

Ejemplo 26. Encontrar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la curva que describe un punto fijo P sobre una recta radial de un círculo de radio r , cuando el círculo rueda sin resbalar sobre el interior de otro círculo de radio mayor R.

Solución : Como se indica en la siguiente figura sean :

- radio del círculo mayor con centro en O : $OB = R$
- radio del círculo menor con centro en O' : $O'B = r$
- posición inicial del punto fijo : P'
- distancia de P al centro del círculo que gira : $O'P = a$
- el ángulo que ha girado O' respecto a O : θ
- el ángulo que ha girado $O'P$ respecto a $O'B$: ϕ



Puesto que el círculo menor rueda sin resbalar sobre el interior del círculo mayor, *las longitudes de los arcos circulares MB y NB son iguales.* Además cuando O' gira un ángulo θ alrededor de O, el punto P gira el ángulo ϕ alrededor de O' y genera el arco PP' .

De la figura anterior se deduce que las coordenadas rectangulares (x, y) del punto P son :

$$x = OO' \cdot \cos(\theta) + O'P \cdot \cos(\theta - \phi) = \boxed{(R-r) \cdot \cos(\theta) + a \cdot \cos(\phi - \theta)}$$

$$y = OO' \cdot \operatorname{sen}(\theta) + O'P \cdot \operatorname{sen}(\theta - \phi) = \boxed{(R-r) \cdot \operatorname{sen}(\theta) - a \cdot \operatorname{sen}(\phi - \theta)}$$

pero dado que los arcos circulares $MB = R \cdot \theta$ y $N \cdot B = r \cdot \phi$ son iguales se tiene que . . . $\boxed{R\cdot\theta = r\cdot\phi}$

Por otra parte, si k representa la razón de los radios de las circunferencias, esto es $k = \dfrac{R}{r}$,

entonces $R = k\cdot r$ y de la ec. anterior se puede escribir como : $\phi = k\cdot\theta$. Asi que las ecuaciones para las coordenadas x, y se pueden escribir en función de un solo parámetro (*el ángulo* θ) como :

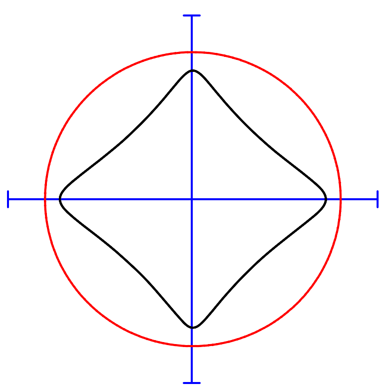
$$x(\theta) = r\cdot\left(\frac{R}{r}-1\right)\cdot cos(\theta) + a\cdot cos(k\cdot\theta-\theta) = \boxed{r\cdot(k-1)\cdot cos(\theta) + a\cdot cos[(k-1)\cdot\theta]}$$

$$y(\theta) = r\cdot\left(\frac{R}{r}-1\right)\cdot sen(\theta) - a\cdot sen(k\cdot\theta-\theta) = \boxed{r\cdot(k-1)\cdot sen(\theta) - a\cdot sen[(k-1)\cdot\theta]}$$

- *Se obtendrá una curva cerrada si después de una o varias vueltas completas alrededor del círculo mayor, el punto P regresa a su posición inicial P' . esto significa que el perímetro de la circunferencia interior cabe un número entero de veces en uno o varios perímetros de la circunferencia fija .*

la curva es cerrada si $(2\cdot\pi\cdot R)\cdot n = (2\cdot\pi\cdot r)\cdot m$ ***para*** n ***y*** m ***números enteros .***

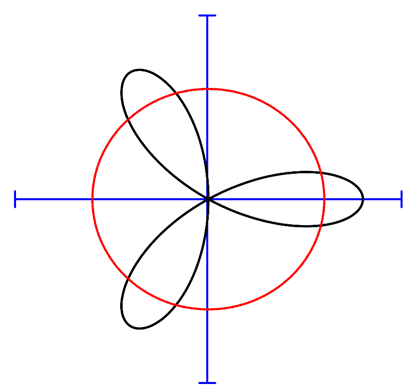
De ésta ecuación se deduce que la curva será cerrada sólo si la cantidad $k = \dfrac{R}{r} = \dfrac{m}{n}$ es un *número racional* . Se muestran enseguida algunos ejemplos. . .



Hipoastroide : $\dfrac{R}{r} = 4$; $a = 0.5\cdot r$

El punto P está dentro del círculo menor : $a < r$

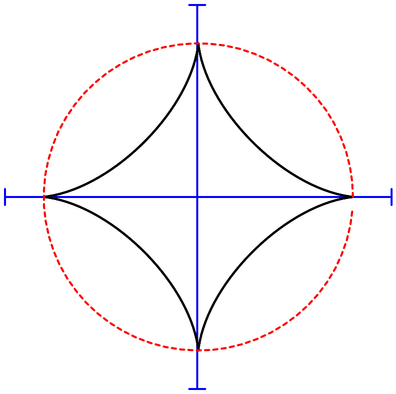
$$x(\theta) = 3\cdot r\cdot cos(\theta) + a\cdot cos(3\cdot\theta)$$
$$y(\theta) = 3\cdot r\cdot sen(\theta) - a\cdot sen(3\cdot\theta)$$



Hiperastroide : $\dfrac{R}{r} = 3$; $a = 2\cdot r$

El punto P está fuera del círculo menor $a > r$

$$x(\theta) = 3\cdot r\cdot cos(\theta) + a\cdot cos(3\cdot\theta)$$
$$y(\theta) = 3\cdot r\cdot sen(\theta) - a\cdot sen(3\cdot\theta)$$



Astroide : $\dfrac{R}{r} = 4$; $a = r$

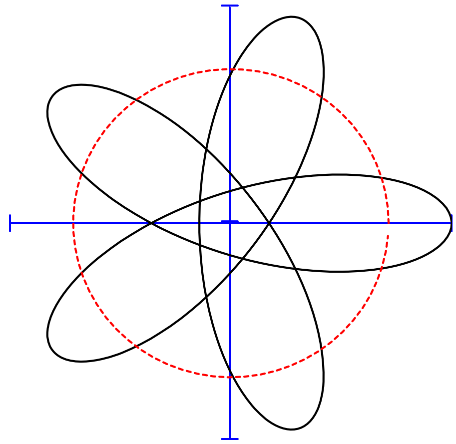
El punto P está sobre el círculo menor

$$x(\theta) = 4\cdot r\cdot cos^3\cdot(\theta)$$

$$y(\theta) = 4\cdot r\cdot sen^3\cdot(\theta)$$

En éste caso , elevando a la potencia $\dfrac{2}{3}$ *y al sumar x con y se obtiene la ecuación rectangular de la astroide :*

$$\boxed{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}}$$

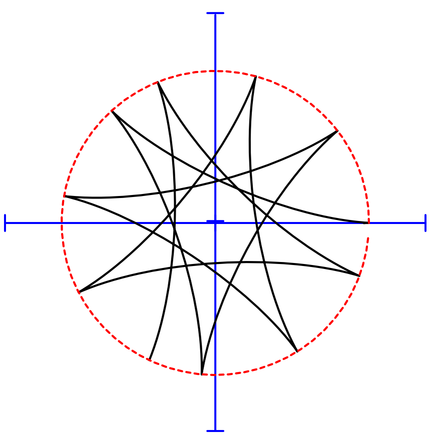


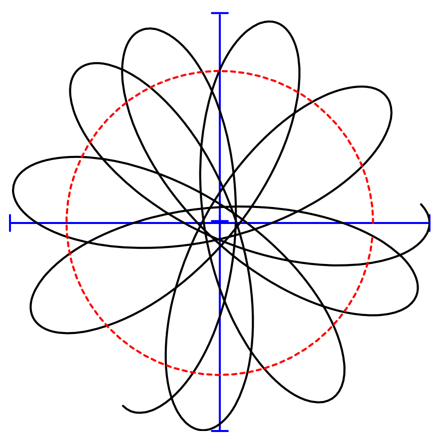
Hiperastroide . $\dfrac{R}{r} = \dfrac{5}{2}$. $a = 2$

El punto P está fuera del círculo menor $a > r$.
La curva es cerrada y sus ecuaciones paramétricas son :

$$x(\theta) = r\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot cos(\theta) + a\cdot cos\left(\frac{3}{2}\cdot\theta\right)$$

$$y(\theta) = r\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot sen(\theta) - a\cdot sen\left(\frac{3}{2}\cdot\theta\right)$$





El punto P está sobre el círculo menor $(a = r)$ *en la curva de la izquierda y fuera de él* $(a > r)$ *en la curva de la derecha : pero aquí las curvas no son cerradas , porque a la razón de los radios de las circunferencias se le dio el valor irracional* $k = e = 2.718\ldots$
De ésta manera, después de un número cualquiera de vueltas alrededor del círculo exterior, el punto P nunca regresará a su posición inicial . Las ecuaciones paramétricas (4.4) toman la forma :

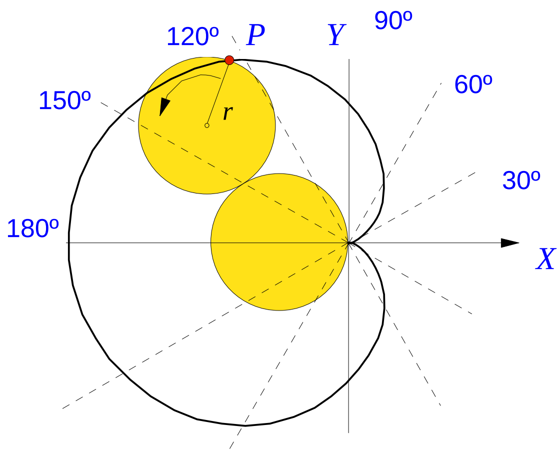
$$x(\theta) = r\cdot(e-1)\cdot cos(\theta) + a\cdot cos[(e-1)\cdot\theta]$$
$$y(\theta) = r\cdot(e-1)\cdot sen(\theta) - a\cdot sen[(e-1)\cdot\theta]$$

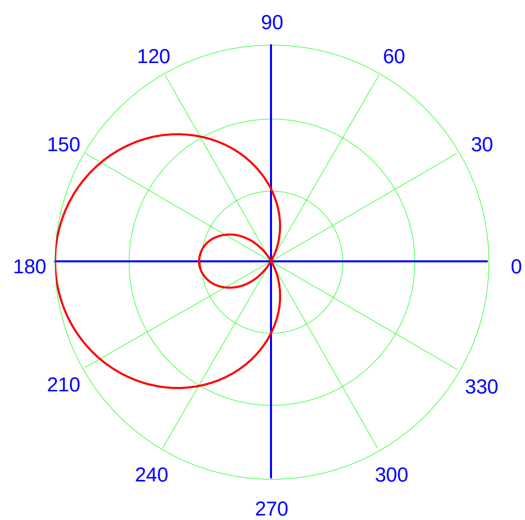
Una curva muy similar a la anterior se genera si el círculo menor *rueda sin resbalar* ***por el exterior*** *del círculo mayor* , entonces el punto P (que está siempre fijo sobre una línea radial del círculo menor a una distancia constante del centro de éste circulo), describe la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x(\theta) = r\cdot(k+1)\cdot cos(\theta) - a\cdot cos[(k+1)\cdot\theta]$$
$$y(\theta) = r\cdot(k+1)\cdot sen(\theta) - a\cdot sen[(k+1)\cdot\theta]$$

(Demuestre Usted esto siguiendo un procedimiento similar al caso anterior)

Enseguida se ilustran algunas curvas de éste caso para valores típicos de los parámetros r, R y a





$$x(\theta) = r\cdot(2\cdot cos(\theta) - cos(2\cdot\theta))$$
$$y(\theta) = r\cdot(2\cdot sen(\theta) - sen(2\cdot\theta))$$

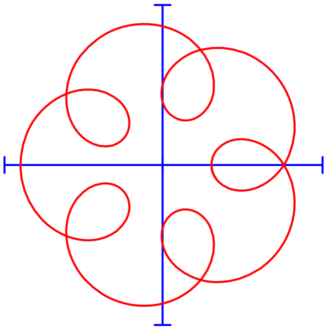
Cardioide . $a = r$; $\frac{R}{r} = 1$

Un círculo rueda sin resbalar sobre otro circulo igual fijo. El punto P está inicialmente el el origen de coordenadas y sobre la circunferencia del círculo móvil .

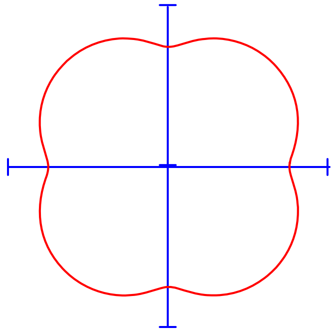
$$x(\theta) = 2\cdot r\cdot cos(\theta) - a\cdot cos(2\cdot\theta)$$
$$y(\theta) = 2\cdot r\cdot sen(\theta) - a\cdot sen(2\cdot\theta)$$

Caracol de Pascal . $a > r$; $\frac{R}{r} = 1$

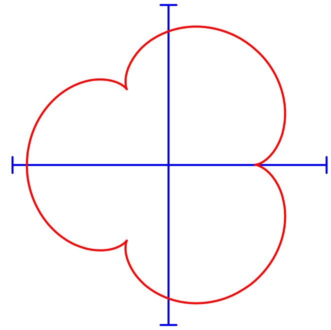
La misma situación que en la Cardioide ; pero el punto P está fijo en un radio a mayor que el radio del círculo móvil .



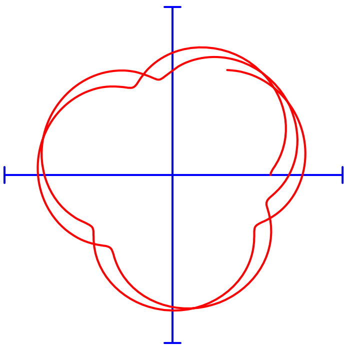
$a > r \;\; ; \;\; \dfrac{R}{r} = 5$



$a < r \;\; ; \;\; \dfrac{R}{r} = 4$

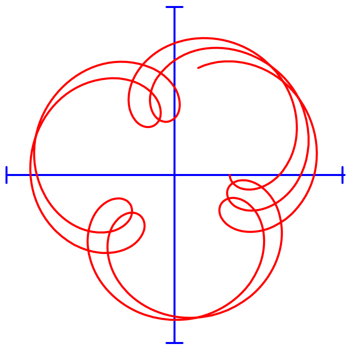


$a = r \;\; ; \;\; \dfrac{R}{r} = 3$



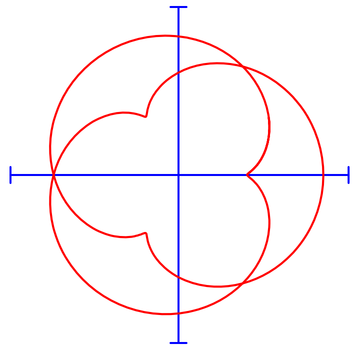
$a < r \;\; ; \;\; \dfrac{R}{r} = \pi$

la curva es abierta



$a > r \;\; ; \;\; \dfrac{R}{r} = \pi$

la curva no será cerrada



$a > r \;\; ; \;\; \dfrac{R}{r} = \dfrac{3}{2}$

ésta curva es cerrada

Ejemplo 27. Determinar la curva que genera un punto P fijo en una línea radial de una circunferencia de radio R cuando la circunferencia rueda sin resbalar sobre una línea recta.

Solución :

En la figura de la derecha sean:

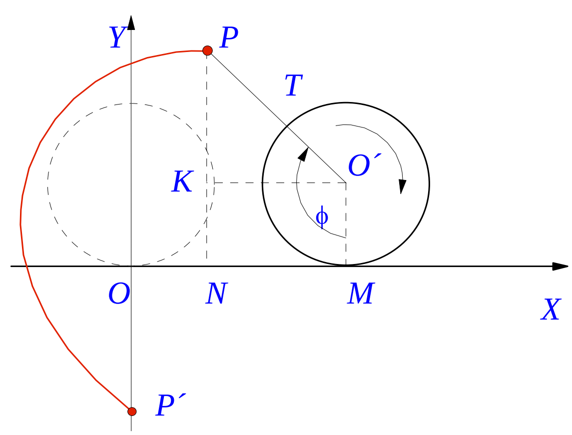
$O´M = R$: el radio de la circunferencia que rueda.

$O´P = a$: distancia del punto fijo P en la recta radial al centro del círculo que rueda.

$ON = x$: coordenada rectangular x del punto P.

$NP = y$: coordenada rectangular y del punto P.

$P´$: posición inicial del punto fijo P



puesto que el círculo rueda *sin resbalar* sobre la recta horizontal fija, es claro que :

(longitud del arco MT) = (longitud del segmento recto OM)

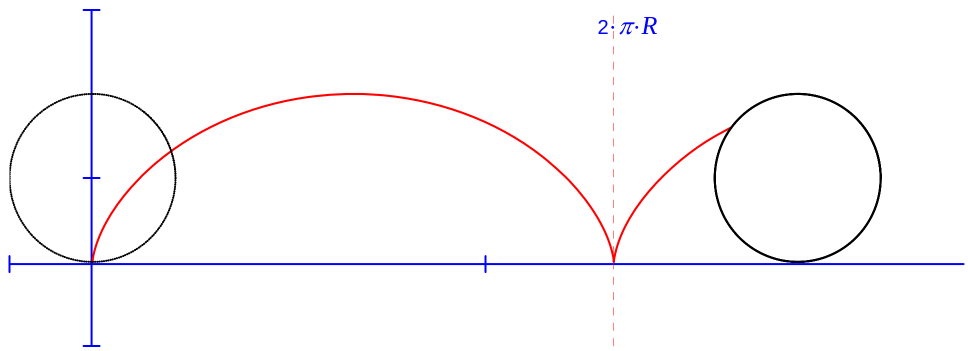
En consecuencia , las coordenadas (x, y) para un punto de la curva $P'P$ son :

$$x = ON = (OM - NM) = R\cdot\phi - O'P\cdot sen(\phi)$$
$$y = NP = (NK + PK) = R - O'P\cdot cos(\phi)$$

y sus ecuaciones paramétricas son:

$$x(\phi) = R\cdot\phi - a\cdot sen(\phi)$$
$$y(\phi) = R - a\cdot cos(\phi) \qquad (4.5)$$

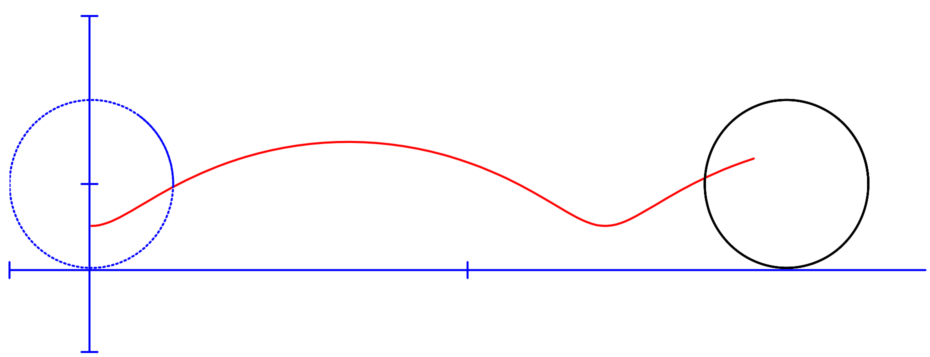
Enseguida se muestran algunas curvas para valores típicos de los parámetros R y a .



Cicloide : $(a = R)$

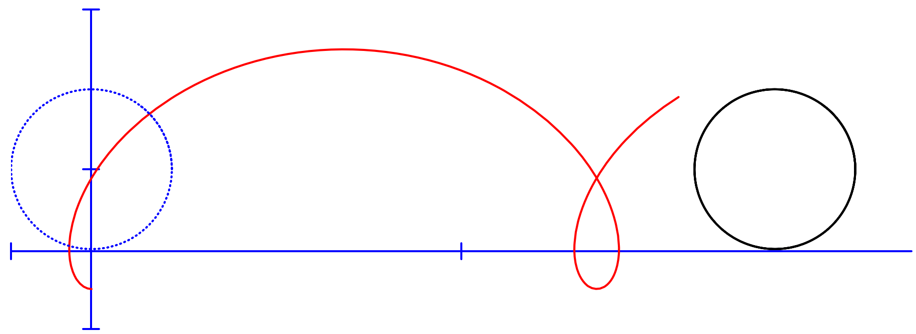
El punto P *se localiza sobre la circunferencia del círculo . Nótese que un arco de la cicloide tiene mayor longitud que el perímetro* $2\cdot\pi\cdot R$ *del círculo que la genera.*
Las ecuaciones paramétricas son :

$$x(\phi) = R\cdot\phi - a\cdot sen(\phi)$$
$$y(\phi) = R\cdot(1 - cos(\phi))$$



Hipocicloide : $(a < R)$

El punto P está en el *interior* del círculo que rueda. La curva jamás cruza el eje horizontal .



Hipercicloide : $(a > R)$

El punto P está fuera del círculo que rueda.pero está fijo a una recta radial .

Por debajo del eje X , el punto P se mueve en sentido contrario al movimiento de translación del círculo .

En las ecuaciones para la cicloide :

$$x(\phi) = R\cdot\phi - a\cdot sen(\phi)$$
$$y(\phi) = R\cdot(1 - cos(\phi))$$

notemos que *no es posible despejar a la variable x y expresarla en términos de funciones elementales* ; sin embargo al resolver para ϕ la ecuación de $y(\phi)$ se obtiene :

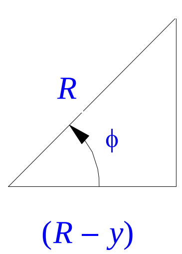
$$cos(\phi) = \frac{R-y}{R} \qquad \longrightarrow \qquad \phi = arccos\left(\frac{R-y}{R}\right)$$

y de la definición del coseno de un ángulo en un triángulo rectángulo se deduce que *:*

$$cos(\phi) = \frac{lado\_adyacente}{hipotenusa} = \frac{R-y}{R}$$

es decir: *lado adyacente* $= (R-y)$ *y* *hipotenusa* $= R$

y recurriendo ahora a la definición del seno de ϕ se obtiene :



$$\sqrt{R^2 - (R-y)^2} = \sqrt{2\cdot R\cdot y - y^2}$$

$$sen(\phi) = \frac{\sqrt{2\cdot R\cdot y - y^2}}{R}$$

Al substituir en la ecuación para x queda :

$$x = R\cdot arccos\left[\frac{(R-y)}{R}\right] - \sqrt{2\cdot R\cdot y - y^2}$$

Esta es la ecuación rectangular de una cicloide, la cual está definida en el dominio $-\pi\cdot R < x < \pi\cdot R$ y tiene como rango : $0 < y < 2\cdot R$.

Con éste ejemplo se ilustra que la forma paramétrica de algunas curvas o funciones, suele ser más sencilla y apropiada para el análisis que su forma rectangular .

4.6 a) ***La derivada de una función paramétrica*** **.**

Para determinar la derivada de una función cuyas ecuaciones paramétricas son : $\begin{pmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{pmatrix}$

en las cuales la función inversa de x : $t = \Phi(x)$ *exista* y también sea *derivable* , se puede considerar que y es la función compuesta : $y(x) = \psi(t) = \psi\left(\Phi(x)\right)$, en donde t es la variable intermedia.
Para derivar ésta función , simplemente se aplica la *"regla de la cadena"* :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{d\psi}{d\Phi}\right)\cdot\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) \quad \text{es decir :} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\left(\frac{dt}{dx}\right) = \left(\frac{dy}{dt}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

(en la última expresión, se usó la fórmula para la derivada para una función inversa)

Se obtiene de éste modo la *fórmula para calcular la derivada de una función en forma paramétrica* :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \qquad (4.6)$$

Ejemplo 28. Obtener la función derivada de la función dada por las ecuaciones paramétricas :

$$x(t) = a\cdot cos(t)$$
$$y(t) = b\cdot sen(t)$$

Solución : Hallemos las derivadas para x e y respecto a su parámetro común t y apliquemos la fórmula (4.6)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot(a\cdot cos(t)) = -a\cdot sen(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot(b\cdot sen(t)) = b\cdot cos(t)$$

por lo tanto :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{b\cdot cos(t)}{-a\cdot sen(t)} = \frac{-b}{a}\cdot cot(t)$$

Ejemplo 29. Obtener la función derivada de la función dada por las ecuaciones paramétricas :

$$x(t) = a\cdot(t - sen(t))$$
$$y(t) = a\cdot(1 - cos(t))$$

Solución : Calculando las derivadas para x e y respecto a su parámetro común t se obtiene. . .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot[a\cdot(t - sen(t))] = a\cdot\left(\frac{dt}{dt} - \frac{d}{dt}\cdot sen(t)\right) = a\cdot(1 - cos(t))$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot[a\cdot(1 - cos(t))] = a\cdot\left[\frac{d}{dt}\cdot(1) - \frac{d}{dt}\cdot cos(t)\right] = a\cdot(0 + sen(t))$$

aplicando entonces la fórmula (4.6) queda :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{a\cdot sen(t)}{a\cdot(1 - cos(t))} = \boxed{\frac{sen(t)}{1 - cos(t)}}$$

Al usar las siguientes identidades trigonométricas :

$$sen(2\cdot\theta) = 2\cdot sen(\theta) + cos(\theta)$$
$$cos(2\cdot\theta) = 1 - 2\cdot sen^2\cdot(\theta)$$

y hacer $t = 2\cdot\theta$ el resultado anterior también se puede expresar en la forma . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot sen\left(\frac{t}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2\cdot\left[sen^2\cdot\left(\frac{t}{2}\right)\right]} = \frac{cos\left(\frac{t}{2}\right)}{sen\left(\frac{t}{2}\right)} = \boxed{cot\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Ejemplo 30. Derivar la función paramétrica : $x(t) = \frac{3\cdot a\cdot t}{1 + t^2}$; $y(t) = \frac{a\cdot(1 - t^2)}{1 + t^2}$

Solución : Apliquemos las fórmulas inmediatas respectivas para obtener las derivadas de x e y respecto a la variable t :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{3\cdot a\cdot t}{1 + t^2}\right) = \frac{(1 + t^2)\cdot\left[\frac{d}{dt}\cdot(3\cdot a\cdot t)\right] - 3\cdot a\cdot t\cdot\left[\frac{d}{dt}\cdot(1 + t^2)\right]}{(1 + t^2)^2}$$

al simplificar algebraicamente resulta . . .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(1+t^2\right)\cdot(3\cdot a) - 3\cdot a\cdot t\cdot(2\cdot t)}{\left(1+t^2\right)^2} = 3\cdot a\cdot\frac{\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}$$

Además . . .

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\cdot\left[\frac{a\cdot\left(1-t^2\right)}{1+t^2}\right] = \frac{\left(1+t^2\right)\cdot\frac{d}{dt}\cdot\left[a\cdot\left(1-t^2\right)\right] - a\cdot\left(1-t^2\right)\cdot\frac{d}{dt}\cdot\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}$$

$$= a\cdot\left[\frac{\left(1+t^2\right)\cdot(-2\cdot t) - \left(1-t^2\right)\cdot(2\cdot t)}{\left(1+t^2\right)^2}\right] = 4\cdot a\cdot\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}$$

finalmente . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{-4\cdot a\cdot\frac{t}{\left(1+t^2\right)^2}}{3\cdot a\cdot\frac{\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)^2}} = \boxed{\frac{4}{3}\cdot\frac{t}{\left(t^2-1\right)}}$$

EJERCICIO **4.2**

Hallar las derivadas de las siguientes funciones implícitas de x :

1. $2\cdot x - 5\cdot y + 10 = 0$

2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4. $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$

5. $\left(x^3 + y^3\right) - 3\cdot a\cdot x\cdot y = 0$

6. $2\cdot y = 1 + x\cdot y^3$

Hallar la derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ de las siguientes funciones paramétricas :

7. $x(s) = 2\cdot ln(cot(s))$; $y(s) = tan(s) + cot(s)$

8. $x(t) = \sqrt{t}$; $y(t) = \sqrt[3]{t}$

9. $x(t) = 2\cdot t^2 - 1$; $y(t) = t^3$

10. $x(t) = \frac{1}{t+1}$; $y(s) = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$

11. $x = \sqrt{3\cdot\theta^2 + 1}$; $y = \frac{\theta - 1}{\sqrt{3\cdot\theta^2+1}}$

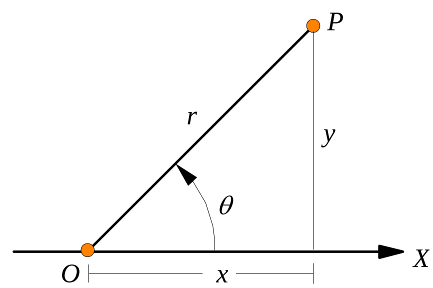
12. $x = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$; $y = arcsen\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

Respuestas (Ejercicio 4.2 , problemas impares) .

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{5}$ 3. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x \cdot b^2}{a^2 \cdot y}\right)$ 5. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x^2 - a \cdot y}{-y^2 + a \cdot x}\right)$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\left(2 \cdot cos(s)^2 - 1\right)}{cos(s) \cdot sen(s)}$ 9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3 \cdot t^2}{2}$ 11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(1 + 3 \cdot \theta)}{\left(3 \cdot \theta^2 + 1\right) \cdot \theta}$

4.7 ***Funciones polares y su derivación*** .



Cualquier punto P en el plano cartesiano se puede localizar indicando sus coordenadas rectangulares (x, y) o también sus coordenadas polares (r, θ) .

En la forma polar (r, θ) :

- la primera coordenada *(el radio r)* , indica la distancia en línea recta desde *el polo* O hasta el punto P .
- la segunda coordenada *(el ángulo θ)* , indica la orientación que tiene r respecto al *eje polar* OX .

El ángulo θ se mide *en grados sexagesimales* o bien *en radianes* y el sentido positivo se define como el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj .

Las coordenadas de cualquiera curva en el plano pueden ser expresadas en forma polar o en forma rectangular, en consecuencia la ecuación que describa a tal curva también puede expresarse en coordenadas polares o rectangulares . De la figura anterior se deduce que *la relación entre las coordenadas polares* (r, θ) *y las rectangulares* (x, y) *es . . .*

$$x = r \cdot cos(\theta) \qquad y = r \cdot sen(\theta) \qquad (4.7)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4.7a)$$

De manera que la ecuación rectangular de una curva $y = f(x)$ *se transformará en la curva polar* $r = F(\theta)$ al substituir las coordenadas (x, y) dadas por las ecuaciones (4.7).

PRECAUCIÓN : *Al transformar una curva polar $r = \psi(\theta)$ que representa una función, a la forma rectangular , puede ser que no se obtenga una función, sino simplemente una ecuación .*
Lo mismo se aplica si se transforma la curva $y = f(x)$ que representa una función en el sistema de coordenadas rectangular, al sistema de coordenadas polares planas .
La razón es que las coordenadas polares (r, θ) dependen a la vez de la variable independiente x así como de la variable independiente y como se indica en las ecuaciones 4.7a . (y viceversa, las coordenadas rectangulares son funciones de r y θ)

Ejemplo 31. Dada la ecuación : $x^2 + y^2 = a^2$ para la ecuación de un círculo de radio a con centro en el origen de coordenadas rectangulares, hallar la forma polar correspondiente.

Solución : La forma polar de ésta ecuación se obtiene substituyendo las ecuaciones (4.7) :

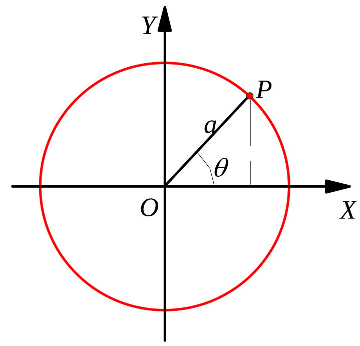
$$(r\cdot cos(\theta))^2 + (r\cdot sen(\theta))^2 = a^2$$

$$r^2\cdot\left[cos^2\cdot(\theta) + sen^2\cdot(\theta)\right] = a^2$$

pero $cos^2\cdot(\theta) + sen^2\cdot(\theta) = 1$, así que se obtiene :

$$\boxed{r^2 = a^2}$$

ó simplemente : $\boxed{r = constante}$



De éste modo, la forma polar para la ecuación de una circunferencia es mucho más simple que su forma rectangular.

Como puede verse en la figura anterior, aunque ésta es la gráfica de una función polar, *no representa una función rectangular*, puesto que una recta vertical la intersecta en más de un punto.

Ejemplo 32. Dada la ecuación rectangular : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ para una elipse de semieje mayor a, semieje menor b con centro en el origen de coordenadas, hallar la forma polar correspondiente.

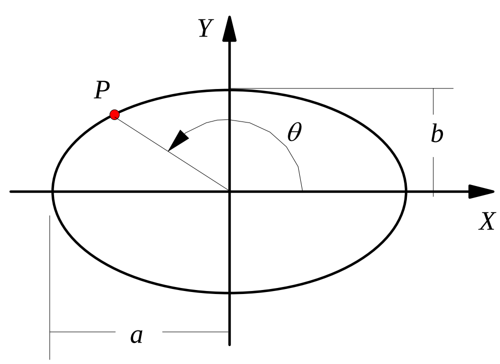
Solución : La forma polar de ésta ecuación se obtiene substituyendo las ecuaciones (4.7) :

$$\frac{(r\cdot cos(\theta))^2}{a^2} + \frac{(r\cdot sen(\theta))^2}{b^2} = 1$$

$$r^2\cdot b^2\cdot cos^2\cdot(\theta) + r^2\cdot a^2\cdot sen^2\cdot(\theta) = 1$$

es decir . . .

$$r^2 = \frac{a^2\cdot b^2}{b^2\cdot cos(\theta)^2 + a^2\cdot sen(\theta)^2}$$



y al usar la identidad trigonométrica $sen^2\cdot(\theta) = 1 - cos^2\cdot(\theta)$ se obtiene . . .

$$r(\theta) = \frac{a\cdot b}{\sqrt{b^2\cdot cos^2\cdot(\theta) + a^2\cdot\left[1 - cos^2\cdot(\theta)\right]}} = \boxed{\frac{a\cdot b}{\sqrt{\left(b^2 - a^2\right)\cdot cos^2\cdot(\theta) + a^2}}}$$

Ésta es la ecuación polar de una elipse con centro en el origen de coordenadas.
Aunque ésta curva no representa una función rectangular, sí es en cambio una función polar de θ ***porque cualquier recta radial*** $\theta = cte$ ***la cortará en un solo punto .***

Ejemplo 33. La ecuación general polar de una cónica que tiene un foco en el polo, tiene la forma general:

$$\boxed{r(\theta) = \frac{k\cdot(1+\varepsilon)}{1 - \varepsilon\cdot cos(\theta)}} \qquad (4.8)$$

donde ε es una constante que se llama ***excentricidad*** y determina el tipo de cónica, (círculo: $\varepsilon = 0$, elipse : $\varepsilon < 1$, una parábola : $\varepsilon = 1$, o una hipérbola: $\varepsilon > 1$) y k es otra constante que sólo define el tamaño de la cónica (es un factor de escala) .

Solución : De la propiedad geométrica general para una cónica :

" ***La razón de las distancias desde cualquier punto*** P ***de la curva hasta un punto fijo*** F ***llamado foco y hasta una recta fija OA llamada directriz , es una constante*** ε ***llamada <u>excentricidad</u>*** " *Esto es :*

$$\frac{FP}{AP} = \varepsilon$$

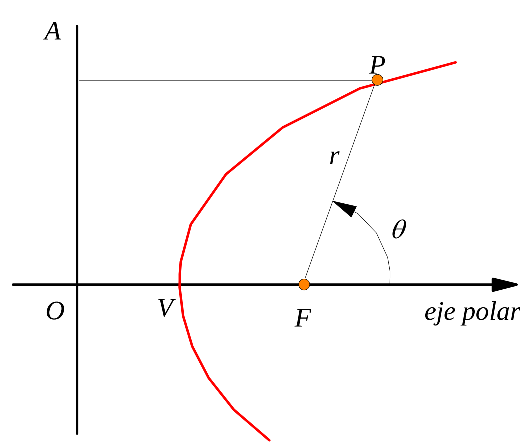
Si consideramos que el foco F está en el polo de un sistema de coordenadas polar plano y se define la distancia:

$$OF = k\cdot\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

entonces :

$$FP = r$$

$$AP = OF + r\cdot cos(\theta) = k\cdot\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) + r\cdot cos(\theta)$$



por lo tanto :

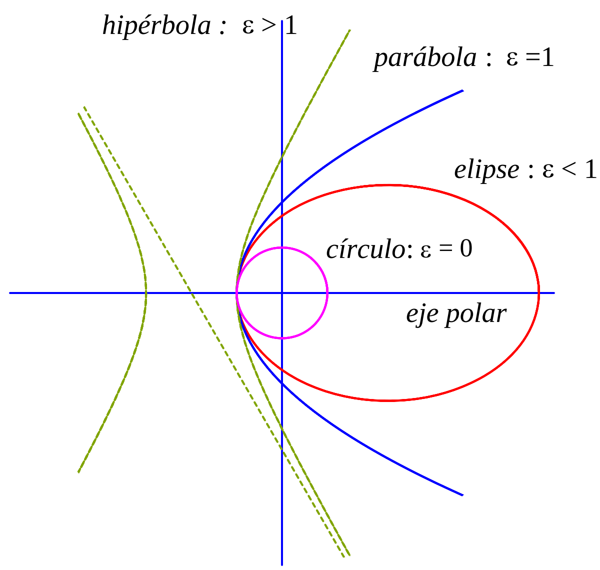
$$\frac{FP}{AP} = \frac{r}{k\cdot\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right) + r\cdot cos(\theta)} = \varepsilon$$

Resolviendo ésta ecuación para r se obtiene la ***forma polar general de una curva cónica*** . . .

$$r(\theta) = \frac{k\cdot(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon\cdot cos(\theta)}$$

y queda demostrado.

De éste modo. . .



si $\varepsilon = 0$ se genera un círculo.

si $0 < \varepsilon < 1$ se genera una elipse.

si $\varepsilon = 1$ se genera una parábola.

si $\varepsilon > 1$ se genera una hipérbola.

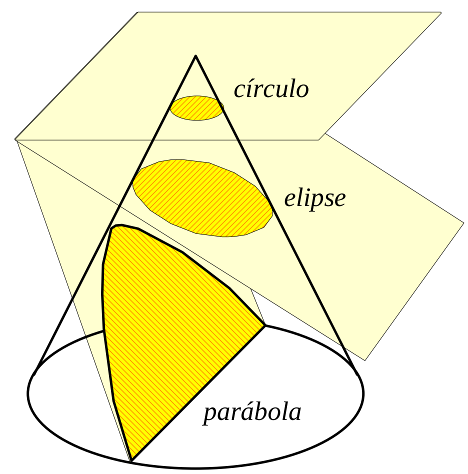
Estas curvas se llaman *cónicas* porque *son las secciones transversales que corta un plano de un cono circular recto* cuando el plano toma distintas inclinaciones, como se muestra en la siguiente figura :

Un círculo se obtiene cuando el plano de corte *es paralelo a la base del cono .*

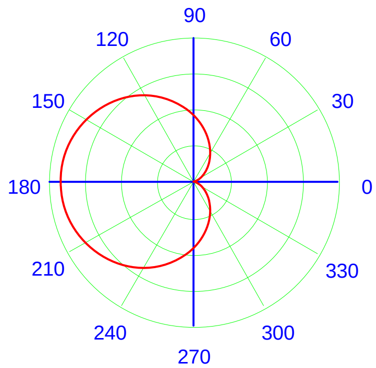
Una elipse se obtiene cuando la inclinación del plano de corte *es menor que la inclinación de la generatriz del cono .*

Una parábola se obtiene cuando la inclinación del plano de corte *es igual a la inclinación de la generatriz del cono .*

Una hipérbola se obtiene cuando el plano de corte *tiene una inclinación mayor que la línea generatriz del cono* .

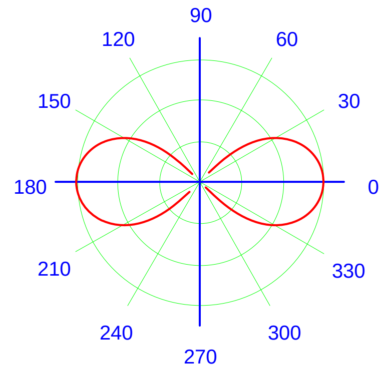


Ejemplo 34. Las coordenadas polares nos permiten encontrar otro tipo de curvas, todas ellas muy hermosas . . .



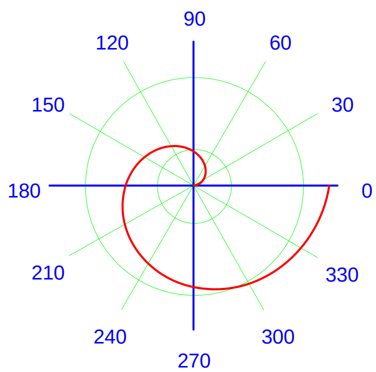
Cardioide .

$$r(\theta) = a\cdot(1 - cos(\theta))$$



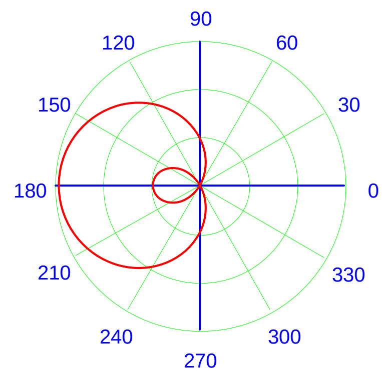
Lemniscata de Bernoulli.

$$r(\theta) = a\cdot\sqrt{cos(2\cdot\theta)}$$



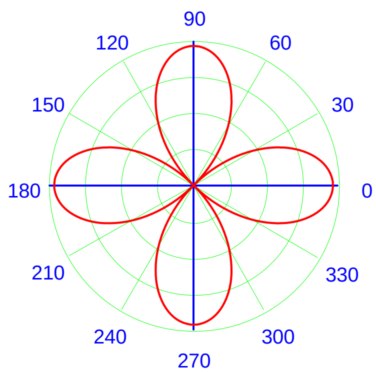
Espiral de Arquímedes.

$$r(\theta) = a\cdot\theta$$



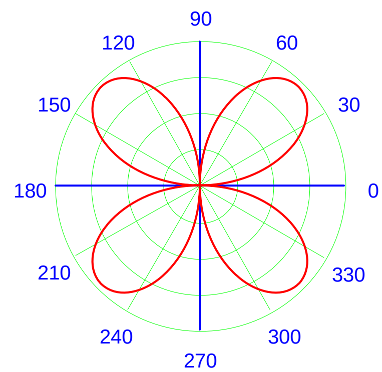
Caracol de Pascal .

$$r(\theta) = b - a\cdot cos(\theta)$$



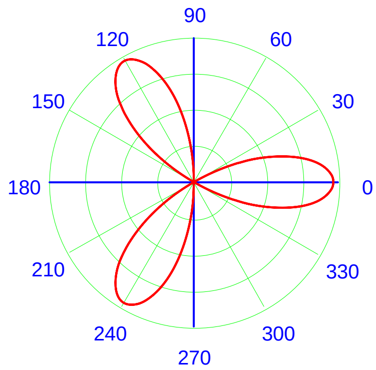
Rosa de 4 hojas.

$$r(\theta) = a\cdot cos(2\cdot\theta)$$



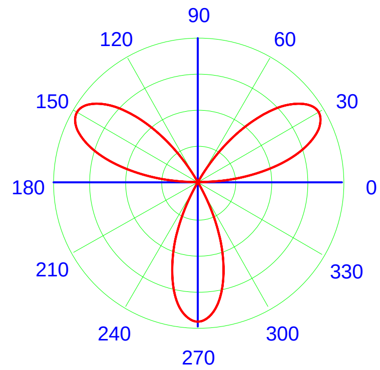
Rosa de 4 hojas.

$$r(\theta) = a\cdot sen(2\cdot\theta)$$



Rosa de 3 pétalos.

$$r(\theta) = a\cdot\cos(3\cdot\theta)$$



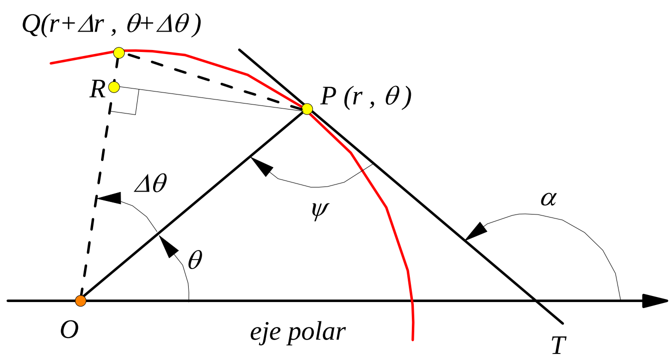
Rosa de 3 pétalos.

$$r(\theta) = a\cdot sen(3\cdot\theta)$$

4.7 Derivada del radio vector respecto al ángulo polar .

El ángulo ψ *entre el radio vector* $r(\theta)$ *y la tangente de una curva polar* $r = f(\theta)$ *está dado por :*

$$\tan(\psi) = \frac{r}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)} \qquad (4.9)$$



Demostración :

Sobre la curva polar $r = f(\theta)$ consideremos los puntos . . . $P(r,\theta)$ y $Q(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta)$ y tracemos la recta PR perpendicular a OQ . Entonces del triángulo OPR se deduce que . . .

$$PR = r\cdot sen(\Delta\theta) \qquad ; \qquad OR = r\cdot\cos(\Delta\theta)$$

y en consecuencia: $\tan(\angle PQR) = \dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{PR}{OR-OQ} = \dfrac{r\cdot sen(\Delta\theta)}{(r+\Delta r) - r\cdot\cos(\Delta\theta)}$

De éste modo, cuando $\Delta\theta \to 0$, suceden las siguientes cosas. . .

- *el punto Q se aproxima al punto P sobre la curva polar .*
- *la secante AQ gira alrededor del punto fijo P y en el límite se aproxima a la tangente PT*
- *el ángulo* $\angle PQR$ *tiende a ser igual al ángulo* ψ

y por lo tanto . . .

$$\tan(\psi) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left[\frac{r\cdot sen(\Delta\theta)}{r\cdot(1-\cos(\Delta\theta))+\Delta r}\right] = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left[\frac{r\cdot sen(\Delta\theta)}{2\cdot r\cdot\left[sen^2\cdot\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right]+\Delta r}\right]$$

Para obtener ésta última expresión, se ha usado la identidad trigonométrica: $\cos(2\cdot\alpha) = 1 - 2\cdot sen^2\cdot(\alpha)$

con $\alpha = \frac{\Delta\theta}{2}$. Al dividir la fracción anterior entre $\Delta\theta$ y calcular el límite, *(aplicando los teoremas fundamentales sobre límites)* se obtiene . . .

$$\tan(\psi) = \lim_{\Delta\theta\to 0}\left[\frac{r\cdot\frac{sen(\Delta\theta)}{\Delta\theta}}{r\cdot sen\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\cdot\frac{sen\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}+\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)}\right]$$

$$= \frac{r\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\left(\frac{sen(\Delta\theta)}{\Delta\theta}\right)}{r\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\left(sen\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\right)\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\left[\frac{sen\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}\right]+\lim_{\Delta\theta\to 0}\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)}$$

$$= \frac{r\cdot(1)}{r\cdot sen(0)\cdot(1)+\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta\theta}} = \boxed{\frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}}$$

y queda demostrado.

La pendiente , $m = \tan(\alpha)$ de la recta tangente a una curva polar en el punto (r,θ) , está dada por el valor de la derivada $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, por lo tanto se debe hacer la transformación de ésta derivada a la forma polar, de acuerdo con la fórmula para la derivada de una función paramétrica, considerando que el parámetro es el ángulo polar θ , como sigue :

$x(\theta) = r(\theta)\cdot\cos(\theta)$ de donde se obtiene : $\left(\frac{dx}{d\theta}\right) = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot\cos(\theta) - r\cdot sen(\theta)$

$y(\theta) = r(\theta)\cdot sen(\theta)$ de donde se obtiene: $\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot sen(\theta) + r\cdot\cos(\theta)$.

por lo tanto . . .

$$\tan(\alpha) = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)}{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot sen(\theta) + r\cdot\cos(\theta)}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot\cos(\theta) - r\cdot sen(\theta)} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot\tan(\theta) + r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right) - r\cdot\tan(\theta)} \qquad (4.10)$$

(Se ha dividido entre cos(θ))

Este resultado se puede verificar fácilmente, porque en la figura anterior, es claro que $\alpha = (\theta + \psi)$, asi que aplicando la fórmula para la tangente de la suma de dos ángulos :

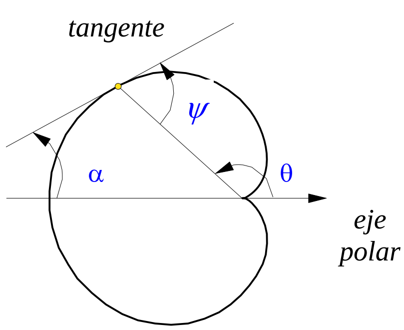
$$\tan(\theta + \psi) = \frac{\tan(\theta) + \tan(\psi)}{1 - \tan(\theta)\cdot\tan(\psi)}$$

y substituyendo 4.9 , se obtiene nuevamente la fórmula 4.10 .

Ejemplo 35. Hallar el ángulo entre el radio polar y una recta tangente, asi como la pendiente de tal recta tangente para la Cardioide : $r(\theta) = a\cdot(1 - \cos(\theta))$ en cualquier punto de esa curva..

Solución : De acuerdo con (4.9) , el ángulo ψ entre el radio polar y la recta tangente es :

$$\tan(\psi) = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} = \frac{a\cdot(1 - \cos(\theta))}{\left[\frac{d}{d\theta}\cdot[a\cdot(1 - \cos(\theta))]\right]} = \frac{1 - \cos(\theta)}{sen(\theta)}$$



Usando aquí las las identidades trigonométricas :

$$\cos(\theta) = 1 - 2\cdot sen^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$sen(\theta) = 2\cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

resulta . . .

$$\tan(\psi) = \frac{2\cdot sen^2\cdot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Entonces se puede decir que $\psi = \frac{\theta}{2}$ en cualquier punto de la curva .

Por otra parte, la inclinación α de la recta tangente se obtiene usando . . .

$$r(\theta) = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot tan(\psi) = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

y substituyendo en la ecuación (4.10) obteniéndose . . .

$$tan(\alpha) = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot tan(\theta) + r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right) - r\cdot tan(\theta)} = \frac{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot tan(\theta) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right) - \left(\frac{dr}{d\theta}\right)\cdot tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot tan(\theta)}$$

$$= \frac{tan(\theta) + tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 - tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot tan(\theta)} = tan\left(\theta + \frac{\theta}{2}\right)$$

donde se ha usado la *identidad trigonométrica para la tangente de una suma de dos ángulos* .

De éste resultado se concluye que $\alpha = \frac{3}{2}\cdot\theta$ para todo punto de la curva.

Ejemplo 36. Encontrar el ángulo de intersección entre las curvas polares :

$$r_1 = a\cdot sen(2\cdot\theta) \quad \text{y} \quad r_2 = a\cdot cos(2\cdot\theta)$$

Solución : Primero debemos verificar si existen o no puntos de intersección para éstas curvas. Sabiendo que *en un punto de intersección, ambas funciones tienen el mismo valor para el radio y para el ángulo polar* , asi que . . .

$$r_1 = r_2 \quad \text{implica que} \quad a\cdot sen(2\cdot\theta) = a\cdot cos(2\cdot\theta)$$

dividiendo ésta igualdad por $a\cdot cos(2\cdot\theta)$ se obtiene : $tan(2\cdot\theta) = 1$ ecuación que se cumple solamente si:

$$2\cdot\theta = \left(\frac{\pi}{4} + n\cdot\pi\right) \qquad (\, para \quad n = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\ ,\ldots)$$

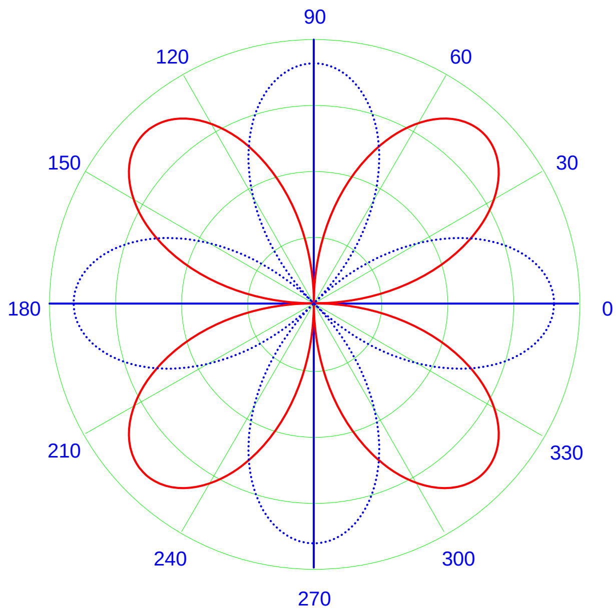
es decir :

$$\theta = \left(\frac{\pi}{8} + n\cdot\frac{\pi}{2}\right) \qquad (\, n = 0\,,\pm 1\,,\pm 2\ ,\ \ldots)$$

Nótese que para $n \geq 8$, los valores de θ se repiten porque sobrepasan $2\cdot\pi$. Estas curvas tienen por lo tanto solamente 8 intersecciones .

El ángulo bajo el cual se cortan las curvas *es el ángulo entre sus tangentes en el punto de intersección* .

Debido a la simetría de éstas curvas el ángulo de intersección es el mismo en cada punto de intersección como puede apreciarse en la figura siguiente. Por lo tanto, basta con calcular el ángulo de intersección en un solo punto.



Asi por ejemplo para $\theta = \frac{\pi}{8}$ se obtiene :

$$\tan(\psi_1) = \frac{r_1}{\left(\frac{dr_1}{d\theta}\right)} = \frac{a\cdot sen(2\cdot\theta)}{2\cdot a\cdot \cos(2\cdot\theta)}$$

$$= \frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}$$

y

$$\tan(\psi_2) = \frac{r_2}{\left(\frac{dr_2}{d\theta}\right)} = \frac{a\cdot\cos(2\cdot\theta)}{-2\cdot a\cdot sen(2\cdot\theta)}$$

$$= \frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{-2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{2}$$

de donde se obtiene que :

$\psi_1 = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ = 26º 34 ' y $\psi_2 = \arctan\left(\frac{-1}{2}\right)$ = 153º 26 ' .

Estos ángulos se miden respecto al radio vector, por lo tanto el ángulo bajo el cual se cortan las curvas en cada punto de intersección es :

$\psi_2 - \psi_1$ = 153º 26 ' – 26º 34 ' = 126º 52',

(*ó puede ser también su complemento*: $\pi - (\psi_2 - \psi_1) = 53.13°$)

4.8 ***Derivadas de orden superior***.

Por lo general, la derivada de una función $y = f(x)$, es también una función de la variable independiente x
y por lo tanto, puede a su vez ser derivable.

La derivada de la primera derivada se llama *segunda derivada* , la derivada de la segunda derivada se llama *tercera derivada* y así sucesivamente hasta la *n-ésima derivada*

Éstas derivadas sucesivas se denotan como sigue:

derivada cero: $\frac{d^0}{dx^0}(y) = f(x)$

primera derivada : $\frac{d^1}{dx^1}(y) = f'(x)$

segunda derivada: $\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(y)\right] = \frac{d^2}{dx^2}(y) = f''(x)$

tercera derivada: $\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}y\right)\right] = \frac{d^3}{dx^3}(y) = f'''(x)$

y en general *la derivada n-ésima o de orden* n es :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left[\frac{d}{dx}\cdot\left[\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\right)\cdot\frac{dy}{dx}\right]\right] = \frac{d^n\cdot y}{dx^n} = f^{(n)}\cdot(x) \qquad (4.11)$$

Éstas derivadas múltiples también se pueden denotar como y', y'' , y''' , y^{IV}, y^{V} , . . ., $y^{(n)}$ respectivamente , usando números romanos como superíndices o números arábigos entre paréntesis para indicar el orden de la derivada . Asi por ejemplo si $y = f(x) = x^4$, entonces :

$$y' = \frac{d}{dx}\left(x^4\right) = 4\cdot x^3$$

$$y'' = \frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}x^4\right) = \frac{d}{dx}\left(4\cdot x^3\right) = 12\cdot x^2$$

$$y''' = \frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}y\right) = \frac{d}{dx}\left(12\cdot x^2\right) = 24\cdot x$$

$$y^{IV} = \frac{d^4}{dx^4}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3}{dx^3}y\right) = \frac{d}{dx}(24\cdot x) = 24$$

y como ésta última derivada es una constante, todas las demás derivadas (las de orden mayor que 4), valen cero para ésta función particular

$$y^{IV},\ y^{V}\ ,\ldots,\ y^{(n)} = 0$$

Ejemplo 37. Hallar la derivada n-ésima de la función $f(x) = x^k$

Solución : Apliquemos repetidamente la regla para la derivada de una función potencia.
La primera derivada es . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^k\right) = k\cdot x^{k-1}$$

la segunda derivada es la derivada del resultado anterior . . .

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}\left(k\cdot x^{k-1}\right) = k\cdot(k-1)\cdot x^{k-2}$$

la tercera derivada es la derivada del resultado anterior . . .

$$\frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}\left[k\cdot(k-1)\cdot x^{k-2}\right] = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot x^{k-3}$$

y asi sucesivamente hasta llegar a . . .

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(x^k\right) = k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\ldots\cdot(3)\cdot(2)\cdot(1) = (k)!$$

Como el factorial $k!$ es una constante , todas las demás derivadas *(las de de orden mayor que k)* son nulas para ésta función.

Ejemplo 38. Hallar la derivada n-ésima de la función $f(x) = cos(x)$

Solución : Se calcula repetidamente la derivada de una función seno ó una función coseno.
La primera derivada es . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cos(x)) = -sen(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

la segunda derivada es la derivada del resultado anterior . . .

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}(-sen(x)) = -cos(x) = cos\left[x + 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

la tercera derivada es la derivada del resultado anterior . . .

$$\frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}(-cos(x)) = sen(x) = cos\left[x + 3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

observado ésta serie de resultados, se infiere que la derivada de orden n es . . .

$$\frac{d^n}{dx^n}(cos(x)) = \boxed{cos\left[x + n\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}$$

Ejemplo 39. Hallar la derivada n-ésima de la funcion $f(x) = ln(x)$

Solución : La primera derivada es . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ln(x)) = \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right) = \frac{1}{x}$$

la segunda derivada es la derivada del resultado anterior . . .

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right) = \frac{-1}{x^2}$$

la tercera derivada es la derivada del resultado anterior . . .

$$\frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{(-1)\cdot(-2)}{x^3}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right) = \frac{(2)!}{x^3}$$

la cuarta derivada es la derivada de la tercera derivada . . .

$$\frac{d^4}{dx^4}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{2!}{x^3}\right) = \frac{(2!)\cdot(3)}{x^4}\cdot\left(\frac{dx}{dx}\right) = \frac{-(3!)}{x^3}$$

Observando ésta secuencia de resultados, se infiere que *la derivada n-ésima* de ésta función es. . .

$$\frac{d^n}{dx^n}(ln(x)) = \boxed{(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}}$$

Ejemplo 40. Hallar la derivada n-ésima de la funcion $f(x) = sen^2\cdot(x)$

Solución : La primera derivada es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[sen^2\cdot(x)\right] = 2\cdot sen(x)\cdot cos(x) = sen(2\cdot x) = -cos\left(2\cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$$

la segunda derivada es la derivada de la primera derivada anterior . . .

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}(sen(2\cdot x)) = 2\cdot cos(2\cdot x) = -2\cdot cos\left(2\cdot x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

y asi sucesivamente . . .

$$\frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}(2\cdot cos(2\cdot x)) = -(2)^2\cdot sen(2\cdot x) = -(2)^2\cdot cos\left(2\cdot x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

Observando ésta secuencia de resultados para las derivadas sucesivas se infiere que . . .

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[sen^2\cdot(x)\right] = \boxed{-(2)^{n-1}\cdot cos\left(2\cdot x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)}$$

Ejemplo 41. Hallar la derivada n-ésima de la funcion $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

Solución :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{(x-1)^2}\right] = \frac{2\cdot(-2)}{(x-1)^3}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}\left[\frac{2\cdot(-2)}{(x-1)^3}\right] = \frac{2\cdot(-2)\cdot(-3)}{(x-1)^4}$$

$$\frac{d^4}{dx^4}y = \frac{d}{dx}\left[\frac{2\cdot(-2)\cdot(-3)}{(x-1)^4}\right] = \frac{2\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)}{(x-1)^5}$$

De ésta secuencia de derivadas se infiere que la derivada *n-ésima* tiene la forma general :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[sen^2\cdot(x)\right] = \boxed{2\cdot\left[\frac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(x-1)^{n+1}}\right]}$$

4.8a) ***La fórmula de Leibniz*** .

La *fórmula de Leibniz* es una manera muy práctica de calcular la *n-ésima derivada de un producto de funciones* y se deduce por inducción como sigue . . .

Sea $y(x)$ una función derivable que se puede escribir como el producto de dos funciones de la variable x, es decir . . .

$$y(x) = u(x)\cdot v(x)$$

entonces algunas de sus primeras derivadas *(representadas con superíndices)* son :

$$y' = u'v + uv'$$

$$y'' = (u''v + u'v') + (u'v' + uv'') = u''v + 2u'v' + uv' \qquad (*)$$

$$y''' = (u'''v + u''v') + 2(u''v' + u'v'') + (u'v'' + uv''') = u''' + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$

$$y^{IV} = u^{IV}v + 4u'''v' + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{IV}$$

Comparemos éstos resultados con los desarrollos de las correspondientes potencias enteras positivas del binomio $(u+v)$:

$$(u+v)^0 = 1 = u^0\cdot v^0$$

$$(u+v)^1 = (u+v) = u\cdot v^0 + u^0\cdot v$$

$$(u+v)^2 = \left(u^2 + 2\cdot u\cdot v + v^2\right) = u^2\cdot v^0 + 2\cdot u\cdot v + u^0\cdot v^2 \qquad (**)$$

$$(u+v)^3 = u^3\cdot v^0 + 3\cdot u^2\cdot v + 3\cdot u\cdot v^2 + u^0\cdot v^3$$

$$(u+v)^4 = u^4\cdot v^0 + 4\cdot u^3\cdot v + 6\cdot u^2\cdot v^2 + 4\cdot u\cdot v^3 + u^0\cdot v^4$$

y asi sucesivamente hasta . . .

$$(u+v)^n = u^n\cdot v^0 + n\cdot u^{n-1}\cdot v + \left[\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\right]\cdot u^{n-2}\cdot v^2 + \left[\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\right]\cdot u^{n-3}\cdot v^3 \ldots$$
$$+ \ldots\ldots + n\cdot u\cdot v^{n-1} + u^0\cdot v^n$$

Las expresiones (*) y (**) tienen términos *con los mismos coeficientes.*

Se concluye que si los exponentes de u y de v en (**) *se interpretan como el orden de la derivada correspondiente* en (*), siendo , $u^o = u$, $v^o = v$ las derivadas de orden cero , entonces *ambos desarrollos tienen los mismos términos semejantes*

Se puede demostrar *por inducción matemática* que la función $y(x) = u(x)\cdot v(x)$ tiene una derivada de orden n dada por la expresión :

$$\frac{d^n}{dx^n}y = \frac{d^n}{dx^n}(u(x)\cdot v(x)) = u^{(n)}\cdot v^{(0)} + n\cdot u^{(n-1)}\cdot v^{(I)} + \left[\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\right]\cdot u^{(n-2)}\cdot v^{(II)} \ldots$$
$$+ \ldots\ldots + (u)^{(0)}\cdot v^{(n)}$$

ó en forma abreviada :

$$y^n = (u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\right)\cdot u^{(n-k)}\cdot v^{(k)} \qquad (4.12)$$

Esta expresión se conoce como *la fórmula de Leibniz*

Ejemplo 42. Hallar la derivada n-ésima de la funcion $f(x) = x^2\cdot e^{a\cdot x}$

Solución : En la fórmula de Leibniz, tómese $v(x) = x^2$ y $u(x) = e^{a\cdot x}$, entonces . . .

$v = x^2$; $u = e^{a\cdot x}$

$v' = 2\cdot x$; $u' = a\cdot e^{a\cdot x}$

$v'' = 2$; $u'' = a^2\cdot e^{a\cdot x}$

$v''' = 0$; $u''' = a^3\cdot e^{a\cdot x}$

y asi sucesivamente . . .

$v^{(n)} = 0$; $u^{(n)} = a^n\cdot e^{a\cdot x}$

Dado que la derivada de $v(x)$ es distinta de cero sólo hasta el orden 2 , la fórmula de Leibniz aplicada a ésta función sólo contendrá 3 términos , a saber :

$$\left(x^2\cdot e^{a\cdot x}\right)^{(n)} = u^{(n)}\cdot v^{(0)} + n\cdot u^{(n-1)}\cdot v' + \left[\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\right]\cdot u^{(n-2)}\cdot v''$$

$$= \left(a^n\cdot e^{a\cdot x}\right)\cdot x^2 + n\cdot\left(a^{n-1}\cdot e^{a\cdot x}\right)\cdot 2\cdot x + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\left(a^{n-2}\cdot e^{a\cdot x}\right)\cdot(2)$$

$$= e^{a\cdot x}\cdot\left[a^n\cdot x^2 + 2\cdot n\cdot a^{(n-1)}\cdot x + n\cdot(n-1)\cdot a^{(n-2)}\right]$$

Ejemplo 43. Hallar la derivada n-ésima de la funcion $f(x) = x \cdot sen(x)$

Solución : Dividamos la función dada en las dos partes : $v(x) = sen(x)$ y $u(x) = x$, entonces . . .

$$v = sen(x) = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad u = x$$

$$v' = cos(x) \quad ; \quad u' = 1$$

$$v'' = -sen(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad u'' = 0$$

$$v''' = -cos(x) = cos\left[x + 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \quad ; \quad u''' = 0$$

Asi, se infiere que la derivada *n-ésima* de éstas funciones son . . .

$$u^{(n)} = cos\left[x + (n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right] \quad ; \quad u^{(n)} = 0$$

Dado que la derivada de $u(x)$ es distinta de cero sólo hasta el primer orden, la fórmula de Leibniz aplicada a ésta función sólo contendrá los 2 últimos términos, a saber . . .

$$(x\cdot sen(x))^{(n)} = 0 + 0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n\cdot u'\cdot v^{(n-1)} + u^{(0)}\cdot v^{(n)}$$

$$= n\cdot cos\left[x + (n-2)\cdot\frac{\pi}{2}\right] + x\cdot cos\left[x + (n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= -n\cdot cos\left[x + \left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right] + x\cdot sen\left[x + \left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Ejemplo 44. Hallar la derivada n-ésima de la funcion $f(x) = x^{n-1}\cdot ln(x)$

Solución : Dividamos la función dada en los factores : $v(x) = x^{n-1}$ y $u(x) = ln(x)$, entonces las derivadas sucesivas de éstas funciones son : . . .

$$u^{(0)} = ln(x) \quad ; \quad v^{(0)} = x^{n-1}$$

$$u' = x^{-1} \quad ; \quad v' = (n-1)\cdot x^{(n-2)}$$

$$u'' = -x^{-2} \quad ; \quad v'' = (n-1)\cdot(n-2)\cdot x^{(n-3)}$$

$$u''' = (-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3} \quad ; \quad v''' = (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot x^{(n-4)}$$

$$u^{IV} = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot x^{-4} \quad ; \quad v^{IV} = (n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot x^{(n-5)}$$

Observando éstas secuencias , podemos deducir que las derivadas *k-ésimas* son . . .

$$u^{(k)} = (-1)^{k-1}\cdot\left(\frac{(k-1)!}{x^k}\right) \quad ; \quad v^{(k)} = \left(\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}\right)\cdot x^{n-k-1}$$

y en consecuencia, la derivada de orden n es :

$$u^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{(n-1)!}{x^n}\right) \quad ; \quad v^{(n-1)} = (n-1)!\cdot x^0 = (n-1)!$$

Siendo $v^{(n)} = 0$, la fórmula de Leibniz sólo contiene n términos dado que el último es nulo. Esto implica que el índice k corre desde 0 hasta $n-1$ en :

$$y(x)^{(n)} = (u\cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\left[\frac{d^{(n-k)}\cdot u}{dx^{(n-k)}}\right]\cdot\left(\frac{d^k\cdot v}{dx^k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\left[(-1)^{n-k-1}\cdot\left(\frac{(n-k-1)!}{x^{n-k}}\right)\right]\cdot\left(\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\right)\cdot x^{n-k-1}$$

y simplificando queda :

$$(u\cdot v)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}\cdot\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\right)\cdot(-1)^{n-k-1}\right] = \boxed{\frac{(n-1)!}{x}}$$

En ésta última simplificación, se ha usado el desarrollo del binomio. . .

$$0 = (-1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\right)\cdot(-1)^{n-k}\cdot(1)^k$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot(-1)^{n-k-1}\cdot(-1)$$

de tal manera que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot(-1)^{n-k-1}\cdot(-1) = 1$$

Algunos ejemplos de ésta derivada son . . .

$$\frac{d^4}{dx^4}\left(x^3\cdot ln(x)\right) = \frac{(4-1)!}{x} = \frac{6}{x} \qquad ; \qquad \frac{d^6}{dx^6}\left(x^5\cdot ln(x)\right) = \frac{(6-1)!}{x} = \frac{120}{x}$$

etc.

4.8 b) *<u>Derivadas superiores de funciones implícitas</u>* .

Para calcular la n–*ésima* derivada de una función que está definida implícitamente por $F(x,y) = 0$, se procede a :

- Determinar la primera derivada por el procedimiento indicado antes en el subtema 4.5
- Se derivan ambos miembros de la igualdad obtenida , derivando la función implícita en dondequiera que aparezca. *Si es posible , se substituyen las expresiones de las derivadas anteriores (o la propia función) para simplificar la expresión de la derivada que se esté calculando .*

<u>*Ejemplo*</u> 45. Determinar la segunda y la tercera derivada de la funcion implícita de x :

$$b^2\cdot x^2 + a^2\cdot y^2 = a^2\cdot b^2$$

<u>*Solución*</u> : Calculemos la primera derivada :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(b^2\cdot x^2 + a^2\cdot y^2\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left(a^2\cdot b^2\right)$$

$$2\cdot b^2\cdot x + 2\cdot a^2\cdot y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

es decir . . . $\boxed{\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\left(\frac{b^2\cdot x}{a^2\cdot y}\right)}$ (*)

Derivemos otra vez tomando en cuenta que la variable y sigue siendo una función implícita de x :

$$\frac{d^2}{dx^2}(y) = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left[-\left(\frac{b^2\cdot x}{a^2\cdot y}\right)\right] = \frac{-b^2}{a^2}\cdot\left(\frac{y\cdot\frac{dx}{dx} - x\cdot\frac{d\cdot y}{dx}}{y^2}\right)$$

substituyendo aquí la expresión (*) para la primera derivada y simplificando resulta. . .

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{-b^2}{a^2}\cdot\left[\frac{y + x\cdot\left(\frac{b^2\cdot x}{a^2\cdot y}\right)}{y^2}\right] = -b^2\cdot\frac{\left(b^2\cdot x^2 + a^2\cdot y^2\right)}{\left(y^3\cdot a^4\right)}$$

Pero $b^2\cdot x^2 + a^2\cdot y^2 = a^2\cdot b^2$ es la función inicial, de modo que . . .

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = -b^2\cdot\left(\frac{a^2\cdot b^2}{y^3\cdot a^4}\right) = \boxed{\frac{-b^4}{a^2\cdot y^3}}$$

Calculando ahora la tercera derivada se obtiene . . .

$$\frac{d^3}{dx^3}y = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\cdot y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{-b^4}{a^2\cdot y^3}\right) = 3\cdot\frac{b^4}{a^2\cdot y^4}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

y al substituir la expresión (*) de la primera derivada queda :

$$\frac{d^3\cdot y}{dx^3} = 3\cdot\frac{b^4}{a^2\cdot y^4}\cdot\left(-\frac{b^2\cdot x}{a^2\cdot y}\right) = \boxed{-3\cdot\frac{b^6}{\left(a^4\cdot y^5\right)}\cdot x}$$

Ejemplo 46. Determinar la segunda y la tercera derivada de la funcion implícita de x :

$$y(x) = tan(y(x) + x)$$

Solución : La primera derivada es :

$$\frac{d}{dx}\cdot(y(x)) = \frac{d}{dx}\cdot(tan(y(x) + x))$$

$$\frac{dy}{dx} = sec^2\cdot(x + y)\cdot\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

y despejando $\frac{dy}{dx}$ resulta . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2\cdot(x+y)}{1-sec^2\cdot(x+y)} = \frac{1+tan^2\cdot(x+y)}{tan^2\cdot(x+y)}$$

(*se ha usando la identidad :* $tan^2\cdot(\alpha)+1 = sec^2(\alpha)$)

Si ahora se substituye la función inicial : $y = tan(y+x)$, queda. . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y^2} = \boxed{y^{-2}+1}$$

entonces la derivada de segundo orden es :

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\left(y^{-2}+1\right) = -\left(\frac{2}{y^3}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

y substituyendo ahora la expresión de la primera derivada queda . . .

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = -\left(\frac{2}{y^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{y^2}+1\right) = \boxed{-2\cdot\frac{\left(1+y^2\right)}{y^5}}$$

Calculando la derivada de tercer orden :

$$\frac{d^3\cdot y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2}y\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left[-2\cdot\frac{\left(1+y^2\right)}{y^5}\right]$$

$$= -2\cdot\frac{y^5\cdot\left[0+2\cdot y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]-\left(1+y^2\right)\cdot 5\cdot y^4\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\left(y^5\right)^2}$$

Al substituir la expresión de la primera derivada y simplificar resulta . . .

$$\frac{d^3\cdot y}{dx^3} = 2\cdot\frac{y^5\cdot\left[2\cdot y\cdot\left(\frac{1}{y^2}+1\right)\right]-\left(1+y^2\right)\cdot 5\cdot y^4\cdot\left(\frac{1}{y^2}+1\right)}{\left(y^5\right)^2}$$

$$= \boxed{2\cdot\frac{\left(8\cdot y^2+5+3\cdot y^4\right)}{y^8}}$$

4.8c) ***Derivadas de orden superior para una función dada en forma paramétrica*** **.**

De la función paramétrica : $\begin{pmatrix} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{pmatrix}$ se sabe que su primera derivada es $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$, así que la derivada de segundo orden se calcula derivando una vez más ésta última expresión :

$$\frac{d^2 \cdot y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot \left[\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \right] = \frac{d}{dt} \cdot \left[\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} \right] \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)$$

(aplicando la " regla de la cadena ")

Aplicado ahora la regla para la derivada para un cociente de funciones asi como la regla de la derivada de una función inversa. resulta . . .

$$\frac{d^2 \cdot y}{dx^2} = \left[\frac{\frac{dx}{dt} \cdot \left[\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)\right] - \frac{dy}{dt} \cdot \left[\frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)\right]}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \right] \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right) = \left[\frac{\frac{dx}{dt} \cdot \left(\frac{d^2 \cdot y}{dt^2}\right) - \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{d^2 \cdot x}{dt^2}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \right] \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}$$

Si se denota como subíndice la variable respecto a la cual se deriva , el resultado anterior queda expresado simplemente como . . .

$$y_{xx} = \frac{x_t \cdot y_{t \cdot t} - y_t \cdot x_{t \cdot t}}{\left(x_t\right)^3} \qquad (4.13)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se calculan las derivadas de orden mayor de una función paramétrica.

Ejemplo 47. Calcular la segunda derivada de la Cardioide : $\begin{bmatrix} x(\phi) = 2 \cdot a \cdot cos(\phi) \cdot (1 - cos(\phi)) \\ y(\phi) = 2 \cdot a \cdot sen(\phi) \cdot (1 - cos(\phi)) \end{bmatrix}$

Solución : Calculando la primera derivada . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\phi}\right)}{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)} = \frac{\frac{d}{d\phi} \cdot [2 \cdot a \cdot sen(\phi) \cdot (1 - cos(\phi))]}{\frac{d}{d\phi} \cdot [2 \cdot a \cdot cos(\phi) \cdot (1 - cos(\phi))]}$$

resulta :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot a\cdot cos(\phi)\cdot(1-cos(\phi)) + 2\cdot a\cdot sin(\phi)^2}{-2\cdot a\cdot sen(\phi) + 4\cdot a\cdot cos(\phi)\cdot sen(\phi)}$$

$$= \frac{2\cdot a\cdot\left[cos(\phi) - 2\cdot cos^2\cdot(\phi) + 1\right]}{2\cdot a\cdot sen(\phi)\cdot(-1+2\cdot cos(\phi))} = \frac{cos(\phi) - \left[2\cdot cos^2\cdot(\phi) - 1\right]}{-sen(\phi) + 2\cdot sen(\phi)\cdot cos(\phi)}$$

$$= -\left(\frac{cos(\phi) - cos(2\cdot\phi)}{sen(\phi) - sen(2\cdot\phi)}\right)$$

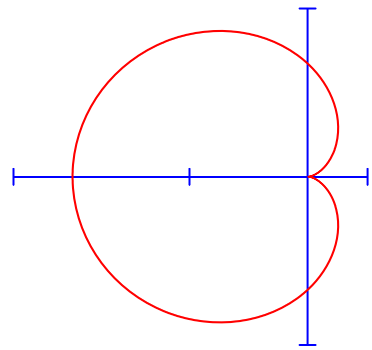
(se han usado las identidades :

$$cos(2\cdot\phi) = 2\cdot cos^2\cdot(\phi) - 1 \quad y \quad sen(2\cdot\phi) = 2\cdot sen(\phi)\cdot cos(\phi)$$

para simplificar el resultado)

Finalmente, racionalizando el denominador y el numerador se obtiene . . .

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{sen(\phi) + sen(2\cdot\phi)}{cos(\phi) + cos(2\cdot\phi)}}$$



Para calcular ahora la segunda derivada, usemos la *"regla de la cadena"* , y la derivada de una función inversa . . .

$$\frac{d^2\cdot y}{dx^2} = \left[\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{d\cdot y}{dx}\right)\right] = \left[\frac{d\cdot\left(\frac{d\cdot y}{dx}\right)}{d\phi}\right]\cdot\left(\frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{d\phi}\cdot\left(\frac{-cos(\phi) + cos(2\cdot\phi)}{sen(\phi) - sen(2\cdot\phi)}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)}$$

$$= \left[\frac{3\cdot(1-cos(\phi))}{(sen(\phi) - sen(2\cdot\phi))^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{-2\cdot a\cdot sen(\phi) + 2\cdot a\cdot sen(2\cdot\phi)}\right)$$

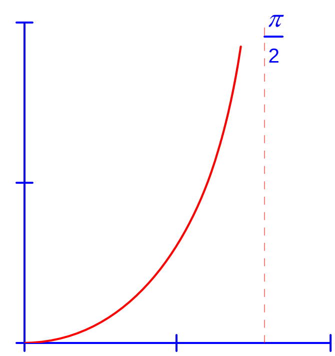
$$= \boxed{-\left[\frac{3\cdot(1-cos(\phi))}{2\cdot a\cdot(sen(\phi) - sen(2\cdot\phi))^3}\right]}$$

Ejemplo 48. Calcular la segunda derivada de la curva paramétrica : $\begin{pmatrix} x(\varphi) = arctan(\varphi) \\ y(\varphi) = ln(1+\varphi^2) \end{pmatrix}$

Solución : Calculando la primera derivada . . .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)} = \frac{\frac{d}{d\varphi} \cdot ln(1+\varphi^2)}{\frac{d}{d\varphi} \cdot arctan(\varphi)}$$

$$= \frac{\left[\frac{2\cdot\varphi}{(1+\varphi^2)}\right]}{\left[\frac{1}{(1+\varphi^2)}\right]} = 2\cdot\varphi$$



de manera que la primera derivada aumenta linealmente y por lo tanto, la segunda derivada *es constante.*

EJERCICIO 4.3 .

Hallar la derivada del orden indicado para cada función .

1. $y(x) = 2\sqrt{x}$; y^{IV}
2. $y(x) = \sqrt[5]{x^3}$; y'''
3. $y(x) = x^6$; y^{VI}
4. $y(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$; y''
5. $y(x) = \frac{x^3}{1-x}$; y^{IV}
6. $y(x) = tan(x)$; y'''
7. $y(x) = \frac{1-x}{1+x}$; $y^{(n)}$
8. $y(x) = x\cdot sen(x)$; $y^{(n)}$
9. $\rho(\phi) = tan(\phi+\rho)$; $\frac{d^3\cdot\rho}{d\phi^3}$
10. $e^x + x = e^{y(x)} + y(x)$; $\frac{d^2\cdot y}{dx^2}$
11. $y^3 + x^3 - 3\cdot a\cdot x\cdot y = 0$; $\frac{d^2\cdot y}{dx^2}$
12. $\begin{bmatrix} x(t) = a\cdot(t - sen(t)) \\ y(t) = a\cdot(1 - cos(t)) \end{bmatrix}$; $\frac{d^2\cdot y}{dx^2}$

13. $\begin{pmatrix} x(t) = a\cdot cos(t) \\ y(t) = a\cdot sen(t) \end{pmatrix}$; $\dfrac{d^3\cdot y}{dx^3}$

Respuestas Ejercicio 4.3 *(problemas impares)*

1. $\dfrac{d^4\cdot y}{dx^4} = \dfrac{-15}{8\cdot\sqrt{x^7}}$

3. $\dfrac{d^6\cdot y}{dx^6} = 720 = (6)!$

5. $\dfrac{d^4\cdot y}{dx^4} = \dfrac{4!}{(1-x)^5}$

7. $\left(\dfrac{d^n\cdot y}{dx^n}\right) = 2\cdot(-1)^n\cdot\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

9. $\dfrac{d^3\cdot \rho}{d\phi^3} = -\dfrac{2\cdot\left(5+8\cdot\rho^2+3\cdot\rho^4\right)}{\rho^8}$

11. $\dfrac{d^2\cdot y}{dx^2} = \dfrac{2\cdot a^3\cdot x\cdot y}{\left(a\cdot x - y^2\right)^3}$

13. $\dfrac{d^3\cdot y}{dx^3} = -3\cdot\dfrac{cos(t)}{a^2\cdot(sen(t))^5}$.

Respuestas *Ejercicio 4.1 (problemas pares)*

2. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^5}$

4. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{x+1}{x^3-1}$

6. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$

8. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = a\cdot x\cdot\sqrt{e^{a\cdot x^2}}$

10. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$

12. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

14. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{cos(2\cdot x)}{sen^4\cdot(x)}$

16. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = \dfrac{1}{(1+x)\cdot\sqrt{x}}$

18. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = sen\left(2^x\right) + 2^x\cdot x\cdot ln(2)\cdot cos\left(2^x\right)$

20. $\left(\dfrac{df}{dx}\right) = x\cdot 10^{\left(x^3\right)}\cdot\left(2+3\cdot x^3\cdot ln(10)\right)$

Respuestas Ejercicio 4.2 (problemas pares)

2. $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = -\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{y^3}{2-3\cdot x\cdot y^2}\right)$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{3\sqrt[6]{t}}$

10. $\dfrac{dy}{dx} = -2\cdot\dfrac{t}{(t+1)}$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-|t|}{t}$

Respuestas Ejercicio 4.3 (problemas pares)

2. $\dfrac{d^3\cdot y}{dx^3} = \dfrac{42}{125}\cdot x^{\left(-\frac{12}{5}\right)}$

4. $\dfrac{d^2\cdot y}{dx^2} = -\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$

6. $\dfrac{d^3\cdot y}{dx^3} = 2+8\cdot tan(x)^2+6\cdot tan(x)^4$

8. $y''' = x\cdot sen\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) - n\cdot cos\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$

10. $\dfrac{d^2\cdot y}{dx^2} = \dfrac{\left(e^{x+y}-1\right)\cdot\left(e^y-e^x\right)}{\left(e^y+1\right)^3}$

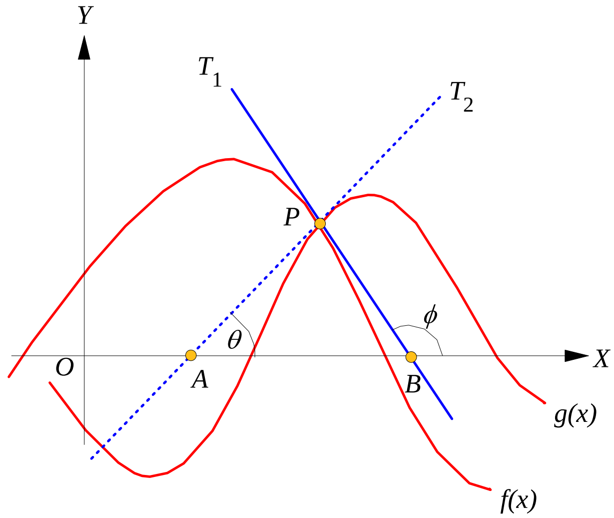
12. $\dfrac{d^2\cdot y}{dx^2} = \dfrac{-1}{a\cdot(1-cos(t))^2}$

Capítulo V
Aplicaciones de la Derivada

5.1 Ángulo entre curvas .

El ángulo entre las dos curvas dadas por las ecuaciones : $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$ que se cortan en el punto $P(x_0, y_0)$, es el ángulo positivo ψ entre sus tangentes en ese punto de intersección, es decir :

$$\psi = |\phi - \theta|$$



Las pendientes de las rectas tangentes T_1 y T_2 a las curvas en el punto $P(x_0, y_0)$ están dadas por :

$$m_1 = \tan(\theta) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_o}$$

$$m_2 = \tan(\phi) = \left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_o}$$

(el valor de sus derivadas evaluadas en tal punto de intersección)

Por lo tanto, el ángulo entre las curvas en ese punto es . . .

$$\phi = |\phi - \theta| = \left| \arctan\left[\left(\frac{dg}{dx}\right)_{x_o}\right] - \arctan\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_o}\right] \right| \qquad (5.1)$$

donde el subíndice en las derivadas significa que se deben evaluar en el valor $x = x_0$.

También es posible usar la identidad trigonométrica para la tangente de la diferencia de dos ángulos, junto con la interpretación geométrica de las derivadas de $f(x)$ y $g(x)$ para obtener :

$$\tan(\phi - \theta) = \frac{\tan(\phi) - \tan(\theta)}{1 + \tan(\phi)\cdot\tan(\theta)} = \left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right) = \left[\frac{\left(\frac{dg}{dx}\right) - \left(\frac{df}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)}\right]_{x=x_0}$$

es decir :

$$\psi = |\phi - \theta| = \arctan\left[\left[\frac{\left(\frac{dg}{dx}\right) - \left(\frac{df}{dx}\right)}{1 + \left(\frac{dg}{dx}\right)\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)}\right]_{x=x_0}\right] \qquad (5.2)$$

Con cualquiera de éstas dos formas se puede calcular el ángulo de intersección ψ entre las curvas dadas por $y_1 = f(x)$ y $y_2 = g(x)$

Ejemplo 1. Hallar el ángulo de intersección entre las curvas:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 6\cdot x + 10 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 + 5\cdot x - 2$$

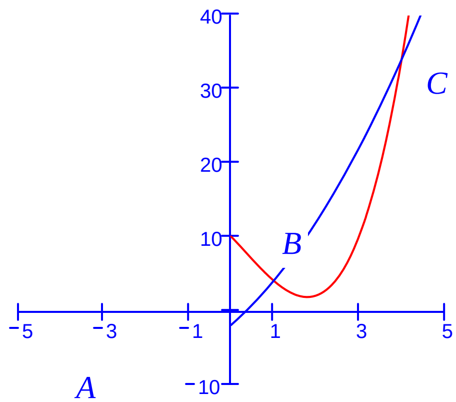
Solución : Lo primero que debemos saber es si las curvas se intersectan o no.
En un punto de intersección las coordenadas de ambas curvas valen lo mismo, así que para encontrar un punto tal, igualamos las ecuaciones de las curvas y resolvemos para la variable independiente, es decir : $f(x) = g(x)$ implica que . . .

$$x^3 - x^2 - 6\cdot x + 10 = x^2 + 5\cdot x - 2$$

y las soluciones de ésta ecuación, son : $x = -3$, $x = 1$ y $x = 4$, de modo que los valores correspondientes de las funciones en esos puntos son :

$$f(-3) = g(-3) = -8 \quad , \quad f(1) = g(1) = 4 \quad \text{y} \quad f(4) = g(4) = 34$$

Las curvas se intersectan entonces en los puntos : $A(-3,-8)$; $B(1,4)$ y $C(4,34)$, tal como se puede apreciar en la figura de la derecha



Por otra parte, las derivadas de las funciones son :

$$m_1 = tan(\theta) = \frac{d}{dx} f\cdot(x)$$

$$= 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 6$$

$$m_2 = tan(\phi) = \frac{d}{dx} g\cdot(x) = (2\cdot x + 5)$$

y evaluándolas en las intersecciones resulta:

(x,y)	m_1	$\theta = atan(m_1)$	m_2	$\phi = atan(m_2)$	$\psi = \lvert\phi - \theta\rvert$
$(-3,-8)$	$3(-3)^2 - 2(-3) - 6 = 27$	87º 52' 44 "	2(−3) + 5 = −1	135º	47º 7' 16"
$(1,4)$	$3(1)^2 - 2(1) - 6 = -5$	101º 18' 36"	2(1) + 5 = 7	81º 52' 12"	19º 26' 24"
$(4,34)$	$3(4)^2 - 2(4) - 6 = 34$	88º 18' 55"	2(4) + 5 = 13	85º 36' 5"	2º 42' 50"

Ejemplo 2. Hallar el ángulo de intersección entre las curvas : $f(x) := 1 - x^2$; $g(x) = x^2 - 1$

Solución : Los puntos de intersección se determinan resolviendo la ecuación : $f(x) = g(x)$, es decir . . .

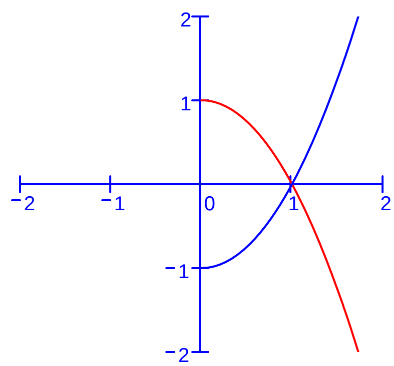
$$1 - x^2 = x^2 - 1$$

de donde se obtiene que $x = \pm 1$.

Los valores de las funciones para éstos valores de x son . . .

$$f(1) = g(1) = 0 \qquad \text{y} \qquad f(-1) = g(-1) = 0$$

Las curvas se intersectan entonces en los puntos : $A(1,0)$ y $B(-1,0)$



De las derivadas de las funciones y su interpretación geométrica se obtienen las pendientes de las rectas tangentes de las curvas en los puntos de intersección . . .

$$m_1 = tan(\theta_1) = \frac{df}{dx} = (-2 \cdot x)$$

y

$$m_2 = tan(\theta_2) = \frac{dg}{dx} = (2 \cdot x)$$

En el punto de intersección $(1,0)$ resulta : $m_1 = -2$; $m_2 = 2$, así que aplicando la ec. (5.2) se obtiene . . .

$$\psi = |\phi - \theta| = arctan\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right)$$

$$= |63^o \ 26' \ 6'' - 116^o \ 33' \ 54''| = 53^o \ 7' \ 48''$$

Por simetría, éste es el mismo ángulo de corte en el punto $(-1,0)$.

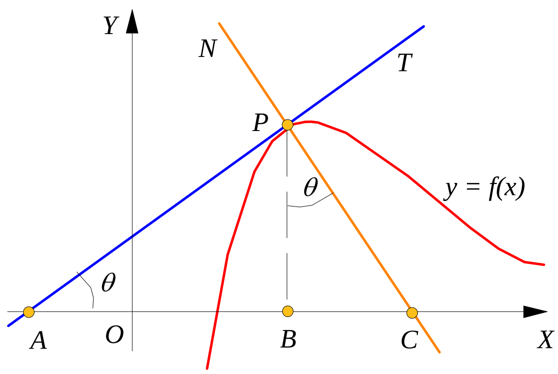
5.2 ***Ecuación de la tangente y la normal . Longitud de la subtangente y de la subnormal*** .

De la interpretación geométrica de la derivada, es posible encontrar fácilmente la ecuación de la recta tangente a una curva dada $y = f(x)$ en uno de sus puntos $P(x_0, y_0)$.

La pendiente m de tal recta tangente es igual a la derivada $\frac{df}{dx}$ de la función en ese punto, asi que substituyendo en la forma *"punto pendiente"* para la ecuación de una línea recta se obtiene :

$$\left(y - y_0\right) = m\cdot\left(x - x_0\right) = \left[\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}\right]\cdot\left(x - x_0\right) \qquad (5.3)$$

Es la *ecuación de la recta tangente AT* , donde $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$ significa evaluar la derivada de la función $f\,(x)$ con el valor $x = x_0$



La *recta normal CN* se define como la recta que es perpendicular a la línea tangente de la curva en el mismo punto *P* , y por lo tanto su pendiente se relaciona con la pendiente m de la tangente por . . .

$$m_n = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}}$$

De éste modo, la *ecuación de la recta normal* es entonces :

$$y - y_0 = \left[\frac{-1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}}\right]\cdot\left(x - x_0\right) \qquad (5.4)$$

la longitud del segmento *AP* de la recta tangente se llama *longitud de la tangente* y su proyección *AB* sobre el eje *X* se denomina *longitud de la subtangente* .

La longitud del segmento *PC* de la recta normal se llama *longitud de la normal* y su proyección *BC* sobre el eje *X* se llama *longitud de la subnormal* .

Para determinar éstas longitudes, nótese que los triángulos *APB* y *BPC* son rectos y semejantes. De ellos se deduce que. . .

- $BP = y_0$. Además, *la pendiente de la recta tangente a la curva* $y = f\,(x)$ *en* $x = x_0$ *es la derivada de la función* $f\,(x)$ *evaluada en* $x = x_0$ y se deduce que :

$$\tan(\theta) = \left(\frac{BP}{AB}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$$

En consecuencia, la *longitud de la subtangente:* S_T del segmento *AB* es . . .

$$\overline{AB} = S_T = \left|\frac{BP}{\tan(\theta)}\right| = \left|\frac{y_o}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}}\right| \qquad (5.5)$$

De manera semejante, en el triángulo *BPC* se tiene que . . .

$$tan(\theta) = \left(\frac{BC}{BP}\right) = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}$$

y en consecuencia, la *longitud de la subnormal* S_N del segmento *BC* es . . .

$$\overline{BC} = S_N = |BP \cdot tan(\theta)| = \boxed{\left| y_0 \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \right|} \qquad (5.6)$$

Además, del teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos rectos *APB* y *BPC* en la figura anterior se pueden calcular también las longitudes $T = \overline{AP}$ y $N = \overline{PC}$ de la tangente y de la normal respectivamente :

$$\overline{AP} = \sqrt{(AB)^2 + (BP)^2} = \sqrt{\left[\frac{y_0}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}}\right]^2 + (y_0)^2} \text{ , esto es: } \boxed{T = |y_0| \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}}\right]^2}} \qquad (5.7)$$

y también . . .

$$\overline{PC} = \sqrt{(BC)^2 + (BP)^2} = \sqrt{\left[y_0 \cdot \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}\right]^2 + (y_0)^2} \text{ , es decir } \boxed{N = |y_0| \cdot \sqrt{1 + \left[\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}\right]^2}} \qquad (5.8)$$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal, así como las longitudes de la tangente, la subtangente, la normal y la subnormal para las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $f(x) = x^3$; en $(1, 1)$

b) $x^2 - y^2 = 5$; en $(3, 2)$

c) $\begin{pmatrix} x(t) = a \cdot cos(t) \\ y(t) = b \cdot sen(t) \end{pmatrix}$; en $t = \frac{\pi}{4}$

Solución : a) La derivada de $f(x)$ evaluada en $x = 1$, determina la pendiente m de la recta tangente a la curva en ese punto, esto es :

$$\left(\frac{d \cdot f(x)}{dx}\right)_{x=1} = \left(\frac{d(x^3)}{dx}\right)_{x=1} = \left(3 \cdot x^2\right)_{x=1} = 3$$

y se obtiene: $m = tan(\theta) = 3$.

Como la recta tangente pasa por el punto $(1,1)$, la ecuación punto-pendiente para ésta recta es :

$$y-1 = 3\cdot(x-1) \qquad \text{es decir:} \qquad y = 3\cdot x - 2 .$$

La recta normal pasa por ese mismo punto pero es perpendicular a la recta tangente y tiene una pendiente igual a

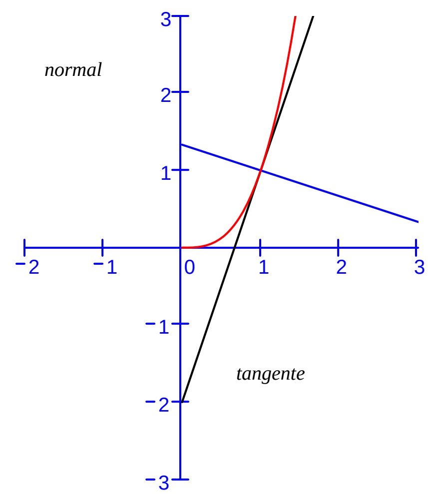
$$\frac{-1}{m} = \frac{-1}{3} .$$

por lo tanto, su ecuación es. . .

$$y-1 = \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(x-1)$$

es decir $3\cdot y + x - 4 = 0$.

y en el punto $(x_0 , y_0) = (1,1)$ las longitudes buscadas se calculan como sigue . . .



$$S_T = \left|\frac{y_0}{\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)}\right| = \left|\frac{1}{\left(\frac{df(1)}{dx}\right)}\right| = \frac{1}{3}$$

$$S_N = \left|y_0\cdot\frac{df(x_0)}{dx}\right| = \left|(1)\cdot\frac{df(1)}{dx}\right| = 3$$

$$T = |y_0|\cdot\sqrt{1+\left[\frac{1}{\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)}\right]^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$N = |y_0|\cdot\sqrt{1+\left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+(3)^2} = \sqrt{10}$$

b) $x^2 - y^2 = 5$; en $(3,2)$.

Esta es una función implícita . *(Representa una hipérbola horizontal con centro en el origen de coordenadas)* . Su primera derivada es :

$$2\cdot x - 2\cdot y\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{es decir} \qquad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right)$$

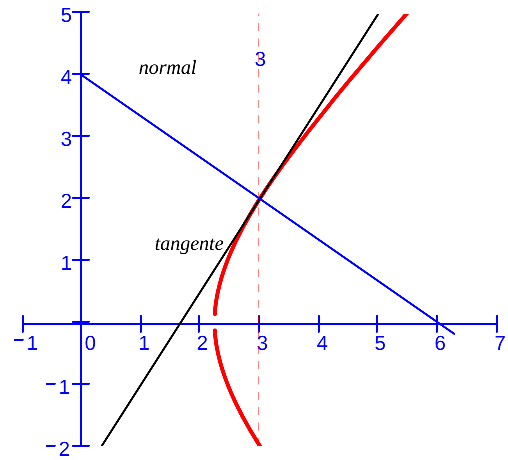
Asi que en el punto $P(3,2)$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\ .$$

Este es el valor de la pendiente de la recta tangente que pasa por P.
La ecuación punto-pendiente de ésa recta tangente es por lo tanto :

$$y-2 = \frac{3}{2}\cdot(x-3)$$

es decir : $2\cdot y - 3\cdot x + 5 = 0$.



En cambio, la recta normal, por ser perpendicular a la recta tangente, tiene una pendiente de $-\frac{2}{3}$ y su ecuación es $y-2 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot(x-3)$ es decir $3\cdot y + 2\cdot x - 4 = 0$.

En el punto $P(3,2)$, las longitudes de los segmentos buscados son entonces :

$$S_T = \left|\frac{y_0}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_P}\right| = \left|\frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)}\right| = \frac{4}{3}$$

$$S_N = \left|y_0\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_P\right| = \left|2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\right| = 3$$

$$T = |y_0|\cdot\sqrt{1+\left[\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_P}\right]^2} = 2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{13}$$

$$N = |y_0|\cdot\sqrt{1+\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_P\right]^2} = 2\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{13}$$

(Estos resultados se pueden comprobar fácilmente por trigonometría de los triángulos rectos que se forman con éstas longitudes..   ¡ Compruébelo !)

c) $x(t) = a\cdot cos(t)$, $y(t) = b\cdot sen(t)$; en $t = \frac{\pi}{4}$

Se trata ahora de una función paramétrica y las coordenadas rectangulares del punto de tangencia $P(x_0, y_0)$ se calculan evaluando la función cuando el parámetro vale $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x_0 = a\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad \text{es decir} \quad x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

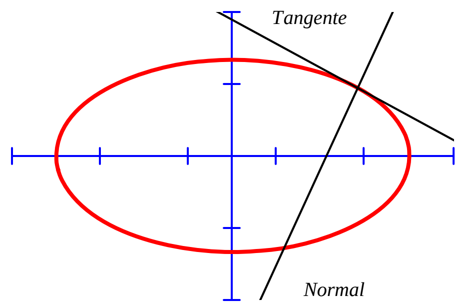
$$y_0 = b\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad \text{es decir} \quad y_0 = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Además, la derivada de ésta función paramétrica es :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{d}{dt}\cdot(b\cdot sen(t))}{\frac{d}{dt}\cdot(a\cdot cos(t))} = \left(\frac{b\cdot cos(t)}{-a\cdot sen(t)}\right) = \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot cot(t)$$

La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P, se obtiene evaluando ésta derivada en $t = \frac{\pi}{4}$, y se obtiene . . .

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_P = -\frac{b}{a}\cdot cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{b}{a}$$



Asi, la ecuación punto-pendiente de la recta tangente es :

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

esto es : $y = \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x + \sqrt{2}\cdot b$

La recta normal tiene una pendiente que es al inverso negativo de la pendiente de la recta tangente y su ecuación punto-pendiente es por lo tanto . . .

$$y - \frac{b}{\sqrt{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \qquad \text{esto es} \qquad y = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(b - \frac{a^2}{b}\right)$$

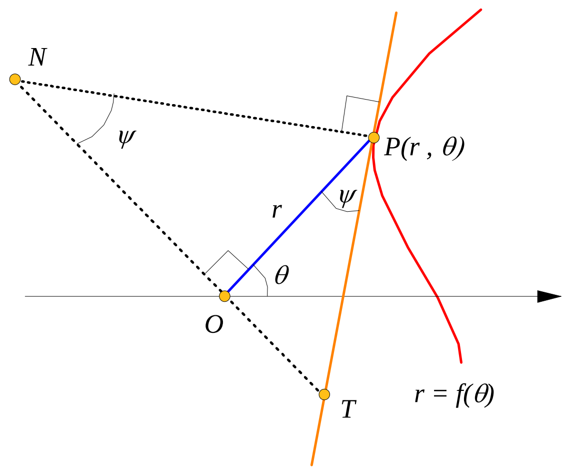
Las correspondientes longitudes de la subtangente S_T, tangente T, normal N y subnormal S_N son entonces . . .

$$S_T = \left|\frac{y_o}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_P}\right| = \left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot a} \quad ; \quad S_N = \left|y_o\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_P\right| = \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)\right| = \frac{b^2}{\sqrt{2}\cdot a}$$

$$T = \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{1}{-\left(\frac{b}{a}\right)}\right]^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad N = \frac{b}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2} \cdot a}$$

5.3 *Tangente y Normal , Subtangente y Subnormal en coordenadas polares* .

Dada una curva polar $r = f(\theta)$, la recta tangente PT en el punto $P(r, \theta)$, la recta normal NP perpendicular a la tangente y la recta NT perpendicular al radio polar OP *se usan para definir los siguientes segmentos* :



- PT : *longitud de la tangente .*
- OT : *longitud de la subtangente.*
- NP : *longitud de la normal.*
- ON : *longitud de la subnormal .*
- OP : *longitud del radio vector.*

cuyas longitudes se calculan sabiendo que el ángulo ψ entre la tangente a la curva en un punto dado y su radio polar respectivo se obtiene de:

$$\tan(\psi) = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$$

De la figura anterior, los triángulos TPO y PNT que forman la tangente, la normal y el radio polar, *son rectos y semejantes* y se deduce entonces que . . .

$\tan(\psi) = \frac{OT}{OP}$ y por lo tanto, *la longitud* S_T *de la subtangente* OT es :

$$S_T = |OP \cdot \tan(\psi)| = |r \cdot \tan(\psi)|$$

$\tan(\psi) = \frac{OP}{ON}$ y por lo tanto, *la longitud* S_N *de la subnormal* ON es :

$$S_N = \left|\frac{OP}{\tan(\psi)}\right| = \left|\frac{r}{\tan(\psi)}\right|$$

Por otra parte, del teorema de Pitágoras aplicado a los triángulos rectos TPO y OPN se obtienen las correspondientes *longitudes de la tangente* (T) *y de la normal* (N) *:*

$$T = \overline{PT} = \sqrt{\left(OT^2\right) + (OP)^2} = \sqrt{(r \cdot tan(\psi))^2 + r^2} = |r| \cdot \sqrt{1 + tan^2 \cdot \psi}$$

$$N = \overline{NP} = \sqrt{(OP)^2 + (ON)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{tan(\psi)}\right)^2} = |r| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{tan^2 \cdot (\psi)}} \qquad (5.9)$$

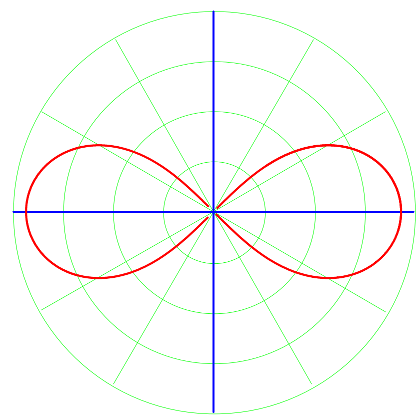
Ejemplo 4. Hallar las longitudes de la tangente, la subtangente, la normal y la subnormal , asi como el ángulo que forma el radio polar con la tangente para la curva polar $r^2 = a^2 \cdot cos(2 \cdot \theta)$ cuando $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Solución : Ésta función polar implícita se llama *Lemniscata de Bernoulli* y su derivada está dada por :

$$2 \cdot r \cdot \left(\frac{dr}{d\theta}\right) = a^2 \cdot (-2 \cdot sen(2 \cdot \theta))$$

de la cual se obtiene que :

$$tan(\psi) = \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)}$$



Lemniscata de Bernoulli

$$= \frac{r}{\left(\frac{-a^2 \cdot sen(2 \cdot \theta)}{r}\right)} = \frac{a^2 \cdot cos(2 \cdot \theta)}{-a^2 \cdot sen(2 \cdot \theta)} = -cot(2 \cdot \theta)$$

de modo que en $\theta = \frac{\pi}{6}$ queda :

$$tan(\psi) = -cot\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$r = a \cdot \sqrt{cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{6}\right)} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto las longitudes de los segmentos buscados se calculan aplicando las fórmulas (5.9) anteriores y son :

$$T = |r| \cdot \sqrt{1 + \tan^2(\psi)} \; = \; \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right| \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \; = \; \boxed{|a| \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

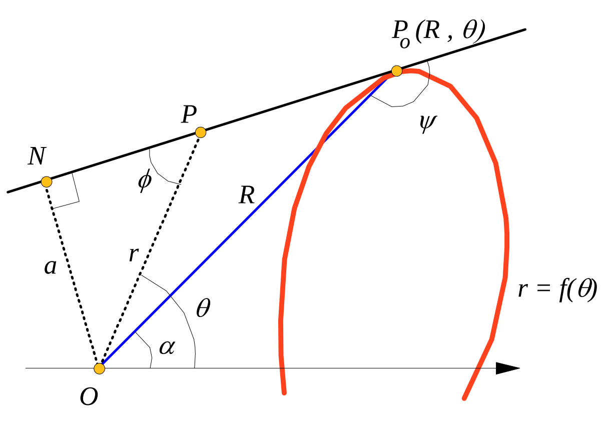
$$N = |r| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(\psi)}} \; = \; \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \; = \; \boxed{|a| \cdot \sqrt{2}}$$

$$S_T = |r \cdot \tan(\psi)| \; = \; \left|\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right| \; = \; \boxed{|a| \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$S_N = \left|r \cdot \frac{1}{\tan(\psi)}\right| \; = \; \left|\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)}\right| \; = \; \boxed{|a| \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

5.3 a) ***<u>Ecuación polar para la recta tangente y para la recta normal</u>*** .

Para determinar la ecuación polar de la recta tangente a la función polar $r = f(\theta)$ en el punto $P_0(R, \alpha)$, en el cual el ángulo entre el radio polar R y la tangente NP_0 es ψ , tracemos la recta ON perpendicular a la tangente desde el polo y cuya longitud es a , como se indica en la siguiente figura :



Un punto $P(r, \theta)$ sobre la recta tangente determina el triángulo recto NOP para el que:

$$sen(\phi) = \frac{ON}{OP} = \frac{a}{r(\theta)}$$

es decir . . .

$$r(\theta) = \frac{a}{sen(\phi)} \qquad (*)$$

y del triángulo OPP_o es claro que :

$$\phi = (\theta - \alpha) + (\pi - \psi)$$

por lo tanto:

$$sen(\phi) = sen[\pi - (\alpha + \psi - \theta)] \; = \; sen(\alpha + \psi - \theta)$$

Por otra parte, del triángulo recto ONP_o se deduce también que . . .

$$a = R\cdot sen(\pi - \psi) = R\cdot sen(\psi)$$

asi que substituyendo en la ec (*) obtenemos *la ecuación polar de la recta tangente:*

$$r(\theta) = \frac{R\cdot sen(\psi)}{sen(\alpha + \psi - \theta)} \qquad (5.10)$$

Para obtener la ecuación polar de la recta normal que pasa por el punto P_o , sólo es necesario sumar $90°$ al ángulo ψ que forma la recta tangente con el radio polar, y queda :

$$N(\theta) = \frac{R\cdot sen(\psi + 90^0)}{sen(\alpha + \psi + 90^0 - \theta)} = \frac{R\cdot cos(\psi)}{cos(\alpha + \psi - \theta)} \qquad (5.11)$$

Ejemplo 5. Hallar la ecuación de la tangente y la normal de la Cardioide $r(\theta) = a\cdot(1 - cos(\theta))$ en los puntos donde su radio polar forme un ángulo de 45º con la recta tangente .

Solución : Para encontrar los puntos de la Cardioide donde $\psi = 45° = \frac{\pi}{4}$, es necesario resolver para θ la ecuación : $tan(\psi) = \dfrac{r(\theta)}{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)}$ de la cual se obtiene que . . .

$$tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\cdot(1 - cos(\theta))}{a\cdot sen(\theta)} \quad \text{es decir} \quad 1 = \frac{1 - cos(\theta)}{sen(\theta)}$$

Resolviendo ésta ecuación trigonométrica resulta * : $\theta = 0$ o $\theta = \frac{\pi}{2}$

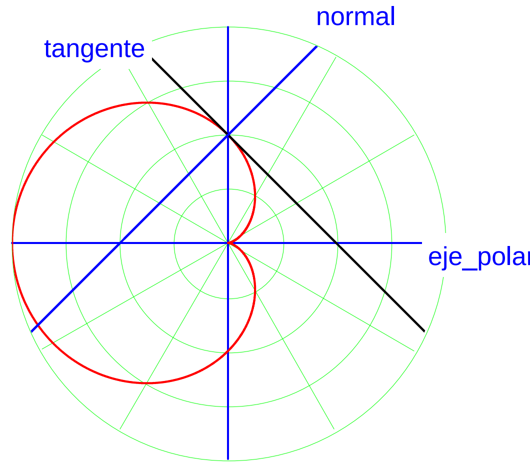
Los correspondientes valores del radio polar para éstos ángulos son :

$$r(0) = a\cdot(1 - cos(0)) = 0$$

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = a\cdot\left(1 - cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = a$$

* *hágase* $sen(\theta) = x$ *y úsese la identidad* $cos(\theta) = \sqrt{1 - sen^2(\theta)} = \sqrt{1 - x^2}$ *resultando la ecuación:* $x = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ *que equivale a la ecuación cuadrática:* $\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = (1 - x)^2$

Por lo tanto, los puntos buscados sobre la curva son $(0,0)$ y $\left(a,\frac{\pi}{2}\right)$.



Substituyendo $R = a$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$

y $\psi = \frac{\pi}{4}$ en las ecuaciones

(5.10) y (5.11) para la recta tangente y la recta normal se obtiene:

$$T(\theta) = \frac{R\cdot sen(\psi)}{sen(\alpha+\psi-\theta)} = \frac{a\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(cos(\theta)+sen(\theta))} = \boxed{\frac{a}{cos(\theta)+sen(\theta)}}$$

$$N(\theta) = \frac{R\cdot cos(\psi)}{cos(\alpha+\psi-\theta)} = \frac{a\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}-\theta\right)} = \boxed{\frac{a}{sen(\theta)-cos(\theta)}}$$

cuyas gráficas se muestran en la figura anterior .

Ejemplo 6. Hallar las ecuaciones para la tangente y la normal de la elipse $r(\theta) = \left(\frac{1}{1-\frac{3}{5}\cdot cos(\theta)}\right)$

en $\theta = 131°$

Solución : Dado que se conoce el ángulo α = 131° , sólo hace falta determinar R y el ángulo ψ :

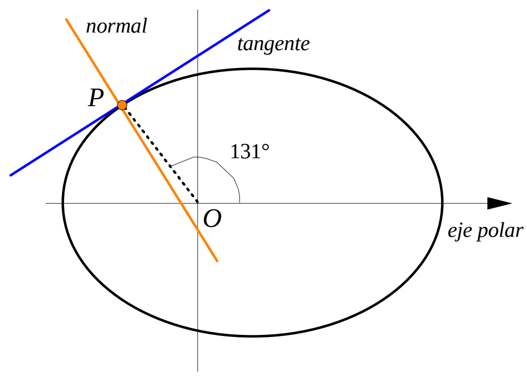
$$R = r(\alpha) = \left(\frac{1}{1-\frac{3}{5}\cdot cos\left(131°\right)}\right) = 0.7175$$

$$\psi = \arctan\left[\left(\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}\right)_{\theta=131°}\right] = \arctan\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(-5+3\cdot\cos\left(131^{o}\right)\right)}{sen\left(131^{o}\right)}\right] = -72°$$

la ecuación de la tangente es entonces. . .

$$T(\theta) = \frac{R\cdot sen(\psi)}{sen(\alpha+\psi-\theta)} = \frac{(0.7175)\cdot sen(-72°)}{sen(59°-\theta)}$$

$$= \frac{-0.682}{sen(59\cdot°-\theta)}$$



y la ecuación de la normal es :

$$N(\theta) = \frac{R\cdot cos(\psi)}{cos(\alpha+\psi-\theta)} = \frac{(0.7175)\cdot cos\left(-72^{°}\right)}{cos(59°-\theta)}$$

$$= \frac{0.222}{cos(59\cdot°-\theta)}$$

5.4 <u>*El diferencial de una función y su interpretación geométrica*</u> .

Si $\dfrac{df(x)}{dx}$ representa la derivada de la función $f(x)$ para un valor particular x y si Δx es el incremento de la variable independiente, entonces *el diferencial de la función*, el cual se suele representar con el símbolo $df(x)$ *se define como* :

$$df(x) = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot\Delta x \qquad (5.12)$$

En particular para la función identidad : $f(x) = x$, se tiene que :

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{dx}{dx}\right) = 1$$

y de la definición anterior puede expresarse como: $dx = (1)\cdot\Delta x$

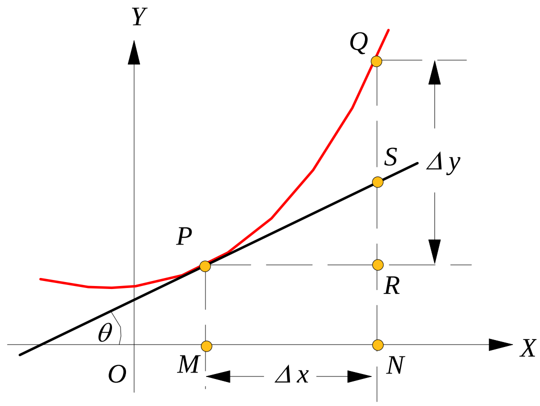
es decir , <u>*la diferencial de la variable independiente es idéntica a su incremento*</u> ($dx = \Delta x$) , por lo tanto, si $y = f(x)$ es una función de x , su diferencial se puede escribir también como . . .

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot dx \qquad (5.\ 13)$$

es decir, ***" la diferencial de una función es igual al producto de su derivada por la diferencial de su variable independiente "*** .

Si se considera el arco PQ de la curva $y = f(x)$, y se aplica *la interpretación geométrica de la derivada en el punto P . . .*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \tan(\theta)$$



se deduce que :

$$PR = MN = \Delta x = dx$$

y por la definición de la diferencial de una función :

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot dx = \tan(\theta)\cdot dx$$

que se traduce geométricamente como . . .

$$dy = \frac{\left(\overline{RS}\right)}{\left(\overline{PR}\right)}\cdot\left(\overline{MN}\right) = \left(\overline{RS}\right)$$

Por lo tanto, *el diferencial* dy *de la función* $y = f(x)$ *es el incremento de la ordenada de la recta tangente a la curva, correspondiente al incremento* Δx .

Nótese que el incremento de la función Δy representa una cantidad distinta al diferencial dy puesto que :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \left(\overline{NQ}\right) - \left(\overline{NR}\right) = \left(\overline{RQ}\right)$$

y es claro que $\left(\overline{RS}\right) \neq \left(\overline{RQ}\right)$; sin embargo, cuando $\Delta x \to 0$, éstos segmentos son aproximadamente iguales porque $\left(\overline{SQ}\right) \to 0$ porque . . .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\overline{RQ}\right)}{\left(\overline{MN}\right)} = \frac{\left(\overline{RS} + \overline{SQ}\right)}{\left(\overline{MN}\right)} = \frac{\left(\overline{RS}\right)}{\left(\overline{MN}\right)} + \frac{\left(\overline{SQ}\right)}{\left(\overline{MN}\right)} = \tan(\theta) + \frac{\left(\overline{SQ}\right)}{\left(\overline{MN}\right)}$$

y de la definición de derivada . . .

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \left[\tan(\theta) + \lim_{MN \to 0}\left(\frac{\overline{SQ}}{\overline{MN}}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{dy}{dx}\right) + \lim_{MN \to 0}\left(\frac{\overline{SQ}}{\overline{MN}}\right)$$

de donde se concluye que : $\displaystyle\lim_{MN \to 0}\left(\frac{\overline{SQ}}{\overline{MN}}\right) = 0$.

Este resultado significa que si el incremento Δx de la variable independiente es *" pequeño " (comparado con el valor de x)*, entonces . . .

" el incremento de una función es aproximadamente igual a su diferencial ".

$$\Delta y \approx dy$$

Esta característica permite obtener un valor aproximado del incremento real de una función cuando su cálculo directo resulte complicado o laborioso .

En conclusión , $\Delta y \approx dy$ equivale a . . .

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx$$

o bien:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot \Delta x \qquad (5.14)$$

Lo cual significa que la derivada de una función *f(x)* nos permite obtener un valor aproximado para la función en el punto $(x+\Delta x)$ si el incremento Δx y el valor de la función en x se conocen.
Nótese también que cuanto más pequeño sea Δx , más cercano será el valor aproximado dy al valor real Δy de la función

Ejemplo 7. Hallar los valores aproximados de $sen(60°\cdot 03')$ y de $sen(61°)$, sabiendo que :

$$sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866025 \qquad y \qquad cos(60°) = \frac{1}{2}$$

Solución : La función $f(x) = sen(x)$, tiene por derivada $\frac{df}{dx} = cos(x)$, asi que substituyendo en la fórmula (5.14) para el diferencial , se obtiene :

$$sen(x+\Delta x) \approx sen(x) + (cos(x))\cdot \Delta x$$

Para realizar éste cálculo, es necesario transformar a radianes el argumento de las funciones, dado en grados.

$$60° \; 03' = 60^0 + \left(\frac{3}{60}\right)^0 = \left(60 + \frac{3}{60}\right)^0 \cdot \left(\frac{2\cdot\pi}{360°}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3600}$$

Por lo tanto, tomando $x = \frac{\pi}{3}$ y $\Delta x = \frac{\pi}{3600}$ resulta :

$$sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3600}\right) \approx sen\left(\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3600}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{3600}\right)$$

$$= 0.8664617$$

El valor exacto calculado a 7 cifras decimales es : 0.86646141 que difiere muy poco del valor que hemos calculado de manera aproximada usando el diferencial. De manera similar :

$$61^{o} = 60^{o} + 1^{o} = (60+1)^{0}\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{360°}\right) = \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right)$$

y tomando ahora $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}\cdot rad$, se obtiene :

$$sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{180}\right) \approx sen\left(\frac{\pi}{3}\right)+cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$= 0.8747521$$

El valor exacto a 7 cifras decimales es 0.87461971, que difiere en forma más notable del valor aproximado, comprobándose asi que cuanto menor sea el incremento Δx, tanto mas precisa será la aproximación calculada por el diferencial, al valor real de la función .

Ejemplo 8. Calcular el diferencial dy y el incremento Δy de la función $y(x) = x^3$

Solución : El incremento de la función es . . .

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = (x+\Delta x)^3 - x^3$$

$$= 3\cdot x^2\cdot\Delta x + 3\cdot x\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

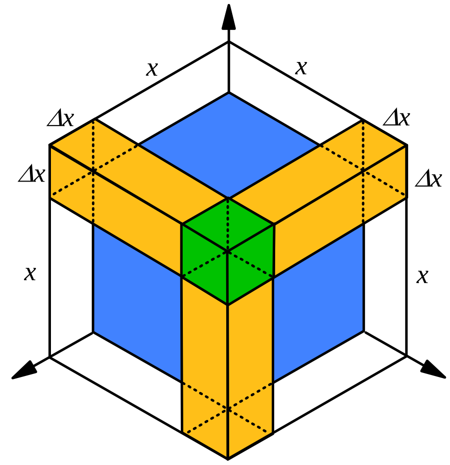
por otra parte . . .

$$dy = \left(\frac{d\left(x^3\right)}{dx}\right)\cdot dx = 3\cdot x^2\cdot dx = 3\cdot x^2\cdot\Delta x$$

y como se puede apreciar en la figura siguiente, el diferencial dy corresponde geométricamente al incremento de las caras laterales de un cubo de lado x; pero difiere del incremento Δy de la función , en:

- el volumen de las tres aristas rectangulares de volumen $x \cdot (\Delta x)^2$
- más el volumen $(\Delta x)^3$ de un pequeño cubo de lado Δx.

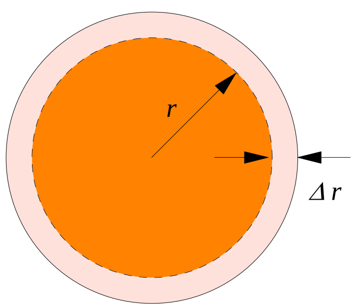
Estos son precisamente los términos $3 \cdot x \cdot \Delta x^2$ y $(\Delta x)^3$ del incremento Δy .



Ejemplo 9. Calcular el aumento aproximado de volumen de una esfera de radio $5 \cdot cm$ cuando su radio aumenta en $0.03 \cdot mm$

Solución : El volumen V de una esfera es una función de su radio r y está dado por :

$V(r) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$, de modo que si r cambia en Δr, la variación *exacta* del volumen de la esfera es :



$$\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r)$$

$$= \left[\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \right]$$

$$= (4 \cdot \pi \cdot r^2) \cdot \Delta r + (4 \cdot \pi \cdot r) \cdot \Delta r^2 + \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \right) \cdot \Delta r^3$$

Una aproximación de éste cambio se obtiene calculando la diferencial de la función $V(r)$:

$$dV = \left(\frac{dV(r)}{dr} \right) \cdot dr = \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \right) \right] \cdot dr = (4 \cdot \pi \cdot r^2) \cdot dr$$

Nótese que éste es solamente el primer término de ΔV .

Así por ejemplo, con $r = 5 \cdot cm$ y $\Delta r = 0.003 \cdot cm$, se obtiene :

$$dV \approx \left[4 \cdot (3.141592) \cdot 25 \cdot cm^2 \cdot (0.003 \cdot cm) \right] = 0.9424776 \cdot cm^3$$

Un cálculo exacto para el cambio de volumen es $\Delta V = 0.943043 \cdot cm^3$.

La diferencia entre dV y ΔV se debe a los términos de 2º y 3er orden en Δr, los cuales no aparecen en el diferencial dV .

Debido a que la diferencial de una función se define como el producto de su derivada por la diferencial de su variable independiente , se deduce que . . .

Las fórmulas inmediatas para las diferenciales se obtienen de las correspondientes fórmulas de derivación inmediata.

Basta multiplicar cada una de las reglas inmediatas de derivación por el diferencial de la variable independiente (dx) para obtener la correspondiente fórmula de diferenciación .

Por ejemplo para obtener la diferencial del producto de funciones $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ . . .

- se aplica la definición de diferencial :

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx$$

- se calcula la derivada del producto $u(x) \cdot v(x)$:

$$dy = \left(u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}\right) \cdot dx = u \cdot \left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot dx + v \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot dx$$

- pero por definición $\left(\frac{du}{dx}\right) \cdot dx$ y $\left(\frac{dv}{dx}\right) \cdot dx$ son los diferenciales du y dv de u y v respectivamente, así que se obtiene l*a fórmula para el diferencial del producto de dos funciones*:

$$d \cdot (u \cdot v) = (u \cdot dv + v \cdot du)$$

Obtengamos ahora por ejemplo *la expresión para el diferencial de una función compuesta :*

- Sean $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ esto es la función compuesta $y = f\big(\varphi(x)\big)$. Aplicando la regla para la derivada de una función compuesta se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{df}{du}\right) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) \quad \text{es decir} \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{df(u)}{du}\right) \cdot \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)$$

- y el diferencial queda . . .

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx = \left(\frac{df(u)}{du}\right) \cdot \left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) \cdot dx$$

- pero por definición, $\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right) \cdot dx$ es el diferencial $d\varphi(x) = du$ de la función $\varphi(x)$, por lo tanto:

$$dy = \left(\frac{df(u)}{du}\right) \cdot du$$

El diferencial de una función compuesta tiene la misma forma que tendría si la variable intermedia u fuese la variable independiente x. En otras palabras, *el diferencial de una función compuesta* *es independiente de la variable intermedia*

Las ***fórmulas para las diferenciales inmediatas*** se pueden calcular de manera similar y son las siguientes :

DIFERENCIALES INMEDIATAS

I. $d\cdot c = 0$ (*c es una constante*)

II. $d\cdot x = \Delta x$

III. $d\cdot(u\cdot v) = (u\cdot dv + v\cdot du)$

IIIa. $d\cdot(c\cdot v) = c\cdot dv$ (*c es constante*)

IV. $d\cdot\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2}$

V. $d\cdot\left(u^n\right) = n\cdot u^{(n-1)}\cdot du$

VI. $d\left(a^u\right) = a^u\cdot ln(a)\cdot du$

VIa. $d\left(e^u\right) = e^u\cdot du$

VII. $d\left[log_a\cdot(u)\right] = \frac{1}{ln(a)}\cdot\frac{du}{u} = log_a\cdot(e)\cdot\left(\frac{du}{u}\right)$

VIIa. $d(ln(u)) = \frac{du}{u}$

IX. $d(cos(u)) = \frac{1}{ln(a)}\cdot\frac{du}{u} = log_a\cdot(e)\cdot\left(\frac{du}{u}\right)$

XI $d(cot(u)) = \left[-csc^2\cdot(u)\right]\cdot du$

XII. $d(sec(u)) = sec(u)\cdot tan(u)\cdot du$

XIII. $d(csc(u)) = -csc(u)\cdot cot(u)\cdot du$

XIV $d(arcsen(u)) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$

XV. $d(arccos(u)) = -\left(\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right)$

XVI $d(arctan(u)) = \frac{du}{1+u^2}$

XVII. $d(arccot(u)) = -\left(\frac{du}{1+u^2}\right)$

XVIII. $d(arcsec(u)) = \frac{du}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$

XIX $d(arccsc(u)) = -\left(\frac{du}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}\right)$

VIII $d(sen(u)) = -sen(u)\cdot du$

XX. $d(tan(u)) = \left[sec^2\cdot(u)\right]\cdot du$

Ejemplo 10. Calcular la diferencial de las funciones $y(x)$ siguientes :

a) $y = \dfrac{x \cdot ln(x)}{1-x} + ln(1-x)$ b) $x^2 - 2 \cdot x \cdot y - y^2 = a^2$ c) $y = \dfrac{1}{3} \cdot tan^3(x) + tan(x)$

Solución : a) Apliquemos la definición de diferencial y las fórmulas de derivación inmediata . . .

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x \cdot ln(x)}{1-x} + ln(1-x)\right) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{(1-x) \cdot \left(\frac{d}{dx} x \cdot ln(x)\right) - x \cdot ln(x) \cdot \frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)^2} + \frac{\frac{d}{dx}(1-x)}{(1-x)}\right] \cdot dx$$

$$= \left[\frac{(1-x) \cdot (1 + ln(x)) + x \cdot ln(x)}{(1-x)^2} + \frac{-1}{(1-x)}\right] \cdot dx$$

$$= \boxed{\left[\frac{ln(x)}{(1-x)^2}\right] \cdot dx}$$

b) En este caso, primero se debe derivar en forma implícita :

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot y(x) - y(x)^2\right) = 0$$

$$2 \cdot x - 2 \cdot y(x) - 2 \cdot x \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) - 2 \cdot y(x) \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

resolviendo para la derivada . . . $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ y finalmente . . .

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot dx = \boxed{\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \cdot dx}$$

c) Definamos la función $u(x) = tan(x)$ y apliquemos la fórmula para obtener la diferencial de una función compuesta :

$$dy = d\left[\frac{1}{3}\cdot tan^3(x) + tan(x)\right] = \frac{d}{du}\cdot\left(\frac{u^3}{3} + u\right)\cdot du$$

$$= \left(u^2 + 1\right)\cdot sec^2\cdot(x)\cdot dx$$

$$= \left[tan^2\cdot(x) + 1\right]\cdot sec^2\cdot(x)\cdot dx = \boxed{sec^4\cdot(x)\cdot dx}$$

5.4 a) ***Diferenciales de orden superior*** .

La definición de diferencial puede ser aplicada repetidamente para obtener el diferencial de orden n-ésimo de una función, dado que el incremento dx de la variable independiente x no depende de x . Así, la diferencial segunda o diferencial de segundo orden : $d(dy)$ de la función $y = f(x)$ se denota por $d^2\cdot y$ y se calcula como sigue :

$$d^2\cdot y = d(dy) = \left[\frac{d}{dx}(dy)\right]\cdot dx \qquad \textit{(de acuerdo a la definición para el diferencial de } dy \textit{)}$$

aplicando ahora la definición para la diferencial de y resulta :

$$d^2\cdot y = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot dx\right]\cdot dx = \left(\frac{d^2\cdot y}{dx^2}\right)\cdot(dx)\cdot(dx)$$

El producto $(dx)\cdot(dx)$ se denota usualmente por dx^2 y la diferencial de 2º orden queda expresada por:

$$\boxed{d^2\cdot y = \left(\frac{d^2\cdot y}{dx^2}\right)\cdot dx^2}$$

Similarmente, la diferencial tercera o diferencial de tercer orden : $d(d(dy)) = d^3\cdot y$ se calcula como:

$$\boxed{d^3\cdot y = \left(\frac{d^3\cdot y}{dx^3}\right)\cdot dx^3}$$

y en general *la diferencial de n–ésimo orden es* : $\boxed{d^n\cdot y = \left(\frac{d^n\cdot y}{dx^n}\right)\cdot dx^n}$

INTERPRETACIÓN : la derivada de orden n es el cociente de las diferenciales correspondientes de orden n es decir . . .

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad ; \quad f''(x) = \frac{d^2\cdot y}{dx^2} \quad , \ldots\ldots , \quad f^{(n)}\cdot(x) = \frac{d^n\cdot y}{dx^n}$$

EJERCICIO 5.1

1. ¿ Qué ángulo forma con el eje X la tangente a la curva $y(x) = x - x^2$ en $x = 1$?

2. ¿ Qué ángulo forma la curva $y = e^x$ con la recta vertical $x = 1$ en sus puntos de intersección ?

3. ¿ En qué puntos la tangente a $y = x^2 - 7\cdot x + 3$ es paralela a la recta $3\cdot x + y - 8 = 0$?

4. Hallar la ecuación de la parábola $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ que es tangente a la recta $2\cdot x - 3\cdot y = -1$

5. Hallar los puntos de la curva $y = x^3 - x^2 - 3\cdot x + 1$ donde su tangente sea perpendicular a la recta $x + 2\cdot y - 1 = 0$

6. ¿ En qué puntos de la curva $y^2 = 2\cdot x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4\cdot x - 3\cdot y + 2 = 0$?

Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva dada en el punto indicado :

7. $y(x) = x^3 + 2\cdot x^2 - 4\cdot x - 3$ en x = −2

8. $y(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ en x = 1

9. $y(x) = tan(2\cdot x)$ en x = 0

10. $y(x) = arcsen(2\cdot x - 1)$ en el eje X

11. $y(x) = ln(x)$ en el eje X

12 $\rho(\theta) = \dfrac{a}{\theta}$ en cualquier punto

13. $y^4 = 4\cdot x^4 + 3\cdot x\cdot y$ en el punto (1 , 2)

14. $y(x) = e^{\left(1 - x^2\right)}$ (intersección con $y = 1$)

15. $\begin{pmatrix} x(z) = 2\cdot cos(z) \\ y(z) = 3\cdot sen(z) \end{pmatrix}$ para $z = \dfrac{\pi}{4}$

16. $\begin{pmatrix} x(z) = \dfrac{1 + z}{z^3} \\ y(z) = \dfrac{3 + z}{2\cdot z^2} \end{pmatrix}$ para $z = 1$

17. Demostrar que en la astroide $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ el segmento tangente comprendido entre los ejes de coordenadas es siempre una magnitud constante de valor a .

18. Hallar el ángulo de intersección entre las parábolas $y(x) = (x - 2)^2$; $y(x) = -4 + 6\cdot x - x^2$

19. ¿Existe un punto donde las curvas $y(x) = 4\cdot x^2 + 2\cdot x - 8$; $y(x) = x^3 - x + 10$ sean tangentes entre si ?

20 Demostrar que las hipérbolas : $x\cdot y = a^2$; $x^2 - y^2 = b^2$ se cortan siempre en un ángulos rectos.

Calcular las longitudes de los segmentos tangente , normal , subtangente y subnormal para las siguientes curvas en el punto indicado .

21. $y^2 = 4 \cdot x$ en (1 , 2)

22. $y = 2 \cdot x$ en cualquier punto

23. $\begin{bmatrix} x(\phi) = a \cdot (\phi - sen(\phi)) \\ y(\phi) = a \cdot (1 - cos(\phi)) \end{bmatrix}$ en $\phi = \pi$

23. $\begin{bmatrix} x(\phi) = 4 \cdot a \cdot (cos(\phi))^3 \\ y(\phi) = 4 \cdot a \cdot (sen(\phi))^3 \end{bmatrix}$ en cualquier punto

25. $\rho(\theta) = a \cdot \theta$ en $\theta = 2 \cdot \pi$

26. $\rho(\theta) = \dfrac{a}{\theta}$ en cualquier punto.

27. La Tractriz es una curva tal que en cada uno de sus puntos el segmento tangente es de longitud constante . Demostrar esa propiedad , dada la ecuación de la Tractriz :

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \cdot ln\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}\right)$$

ó su forma paramétrica : $x(t) = a \cdot cos(t) + a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot ln\left(\dfrac{1 - cos(t)}{1 + cos(t)}\right)$, $y(t) = a \cdot sen(t)$

Calcular las diferenciales dy **de las siguientes funciones de** x **:**

28. $y = \dfrac{x}{1 - x}$

29. $y = arcsen\left(\dfrac{x}{a}\right)$

30. $y = e^{-x^2}$

31. $y = ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

32. $y = cotan(x) + csc(x)$

33. $x^2 + 2 \cdot x \cdot y - y^2 = a^2$

34. $(x + y)^2 \cdot (2 \cdot x + y)^3 = 1$

35. $ln \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

36. $y = e^{-\left(\frac{x}{y}\right)}$

Usando diferenciales, calcular el valor aproximado de la expresión indicada

37. $cos(61°)$

38. tan (45º 3' 10")

39. $e^{0.2}$

40. $\sqrt{\sqrt{17}}$

41. $log_{10}(0.9)$

42. $arctan(1.05)$

43. $x^3 - 4 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3$ para $x = 1.03$

44. $\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ para $x = 0.1$

45. Basándose en la ley de Ohm : $i = \frac{V}{R}$, determinar la variación Δi en la intensidad de la corriente eléctrica i debida a una pequeña variación ΔR de la resistencia R .

46. El periodo T de oscilación de un péndulo simple de longitud L está determinado por $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}$ donde g es la aceleración gravitacional en un punto de la superficie terrestre.
Calcular en qué porcentaje se afecta el periodo debido a un error del 1% cometido al medir :

a) la longitud L

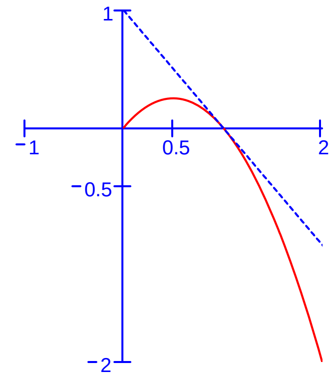
b) la aceleración g

Ejercicios 5.1 *(Soluciones de los problemas impares)*

1. De la interpretación geométrica para la derivada de una función . . .

$$\frac{dy}{dx} = \textit{pendiente de la recta tangente a la curva } y = f(x) = \tan(\theta)$$

donde θ es el ángulo que forma la recta tangente con el eje X, se deduce que en $x = 1$, tal pendiente vale . . .



$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = \left[\frac{d}{dx}\cdot\left(x - x^2\right)\right]_{x=1}$$

$$= (1 - 2\cdot x)_{x=1} = [\,1 - 2\cdot(1)\,] = -1$$

Asi que $\tan(\theta) = -1$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 1$. De aquí se obtiene que . . .

$$\theta = \arctan(-1) = \boxed{135°} .$$

3. *Pendiente de la curva :*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{d}{dx}\cdot\left(x^2 - 7\cdot x + 3\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 2\cdot x - 7$$

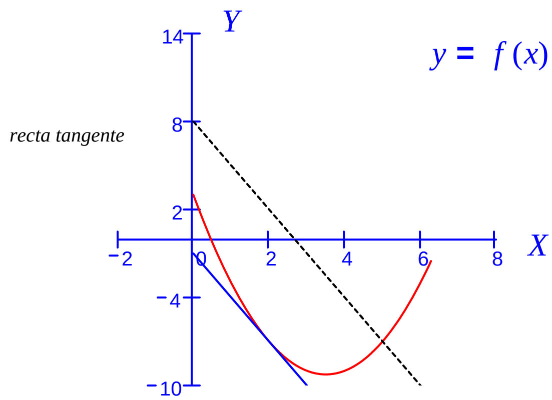
Pendiente de la recta :

$$\frac{d}{dx}\cdot(3\cdot x + y - 8) = 0$$

$$3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = 0 \quad \text{es decir . . .} \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = -3$$

Se pide que la tangente de la curva sea paralela a la recta dada, es decir que ambas rectas deben tener la misma pendiente $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_2$, lo cual nos conduce a . . .

$$2\cdot x - 7 = -3$$



ecuación que tiene por solución : $x = 2$, por lo tanto

$$y(2) = (2)^2 - 7\cdot(2) + 3 = -7$$

.

y la recta tangente toca a la curva en el punto $(2,-7)$

5. *Pendiente de la curva :*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{d}{dx}\cdot\left(x^3 - x^2 - 3\cdot x + 1\right)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 3$$

Pendiente de la recta :

$$\frac{d}{dx}\cdot(x + 2\cdot y - 1) = 0$$

$1 + 2\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = 0$ es decir : $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = \frac{-1}{2}$

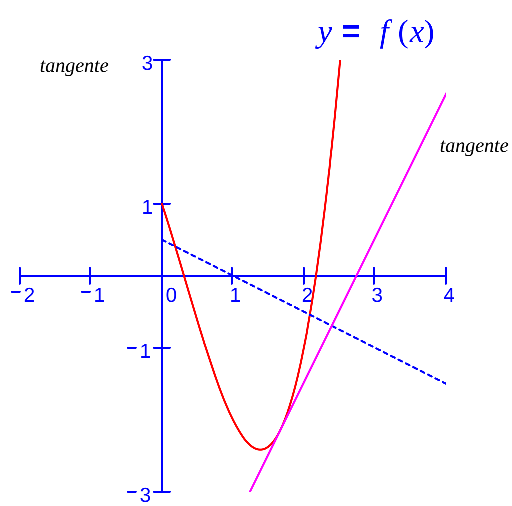
Si la recta tangente a la curva ha de ser perpendicular a la recta dada, sus pendientes se relacionan por . . .

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \dfrac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_2}$, lo cual conduce a la ecuación :

$$3\cdot x^2 - 2\cdot x - 3 = -\left(\frac{1}{\frac{-1}{2}}\right)$$

es decir : $(x + 1)\cdot(3\cdot x - 5) = 0$, de donde resultan las soluciones: $x = -1$ y $x = \frac{5}{3}$.

Las ordenadas correspondientes de la curva para éstos valores de x son . . .



$$y(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 3\cdot(-1) + 1 = 2$$

$$y\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{5}{3}\right) + 1 = \frac{-58}{27}$$

y los puntos buscados son: $(-1,2)$ y $\left(\frac{5}{3},\frac{-58}{27}\right)$ tal como se puede apreciar en la figura anterior.

7. Si $y(x) = x^3 + 2\cdot x^2 - 4\cdot x - 3$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = 3\cdot x^2 + 4\cdot x - 4$ así que en $x = 2$:

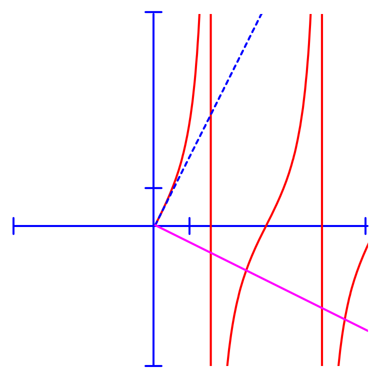
$$y(-2) = 5 \qquad ; \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-2} = 3\cdot(-2)^2 + 4\cdot(-2) - 4 = 0$$

y la recta tangente a la curva pasa por el punto $(-2, 5)$ y tiene una pendiente de valor cero, por lo cual su ecuación es . . .

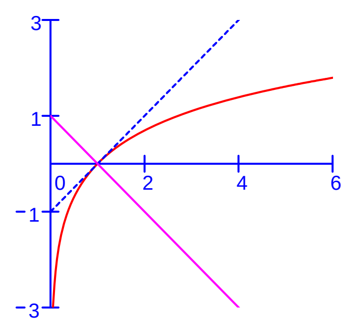
$$y - 5 = (0)\cdot[x - (-2)] \qquad \text{es decir, es la recta horizontal} \qquad y = 5$$

La recta normal que pasa por éste mismo punto, será perpendicular a ésta recta y su ecuación es : $x = -2$

9. *Tangente* : $y = 2\cdot x$ *Normal :* $y = \dfrac{-x}{2}$



11. *Punto* $(1, 0)$, *Tangente* : $y = x - 1$; *Normal :* $y = -x + 1$



13. Derivando implícitamente la función se obtiene que . . .

$$4\cdot y^3\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = 16\cdot x^3 + 6\cdot y + 6\cdot x\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{, es decir . . .} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-8\cdot x^3 - 3\cdot y}{-2\cdot y^3 + 3\cdot x}$$

Por tanto, en el punto $(1, 2)$ la pendiente de la curva vale : $\dfrac{-8\cdot(1)^3 - 3\cdot(2)}{-2\cdot(2)^3 + 3\cdot(1)} = \dfrac{14}{13}$

Las ecuaciones de las rectas son : <u>*Tangente*</u> *:* $y - 2 = \left(\dfrac{14}{13}\right)\cdot(x - 1)$ o $13\cdot y - 14\cdot x - 12 = 0$

<u>*Normal*</u> *:* $y - 2 = \left(-\dfrac{13}{14}\right)\cdot(x - 1)$ *o* $14\cdot y + 13\cdot x - 41 = 0$

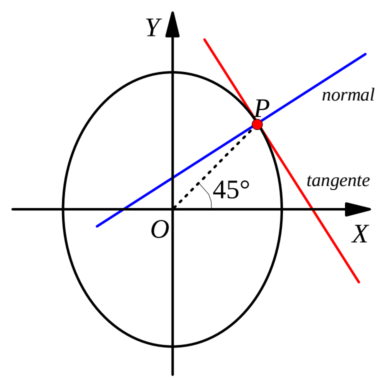
15. Las coordenadas del punto de tangencia se calculan evaluando x e y para $z = \frac{\pi}{4}$, obteniéndose :

$$x = 2\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \; ; \qquad y = 3\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

La pendiente de la curva en ese punto se obtiene evaluando su derivada paramétrica :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{dz}\right)}{\left(\frac{dx}{dz}\right)} = \left(\frac{3\cdot cos(z)}{-2\cdot sen(z)}\right)_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{-2}\cdot tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2}$$

Asi, las ecuaciones de las rectas buscadas son :



Tangente :

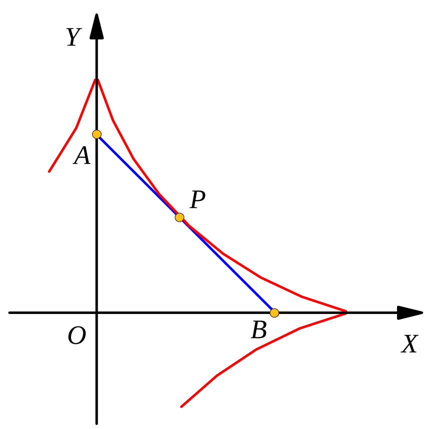
$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(x - \sqrt{2}\right) \quad ó \quad 2\cdot y + 3\cdot x - 6\cdot\sqrt{2} = 0$$

Normal :

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \quad ó \quad 6\cdot y - 5\cdot\sqrt{2} - 4\cdot x = 0$$

17. Sea $P(x_o, y_o)$ el punto de tangencia a la curva y sea AB la longitud del segmento tangente.

La derivada de la astroide es :



$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left(\sqrt[3]{a^2}\right)$$

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\right)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

es decir . . . $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

Evaluando ésta derivada en el punto P , se obtiene $-\sqrt[3]{\frac{y_o}{x_o}}$

y la ecuación de la recta tangente en $P(x_o, y_o)$ es:

$$\left(y - y_o\right) = \left(-\sqrt[3]{\frac{y_o}{x_o}}\right)\cdot\left(x - x_o\right)$$

La ordenada y del punto A, se obtiene haciendo $x = 0$ en esta ecuación y la abscisa x del punto B se obtiene haciendo $y = 0$, como sigue . . .

$$y = \left(-\sqrt[3]{\frac{y_o}{x_o}}\right)\cdot(0 - x_o) + y_o \;=\; (y_o)^{\frac{1}{3}}\cdot(x_o)^{\frac{2}{3}} + y_o$$

$$0 - y_o = \left(-\sqrt[3]{\frac{y_o}{x_o}}\right)\cdot(x - x_o) \quad \text{, esto es . . .} \quad x = (y_o)^{\frac{2}{3}}\cdot(x_o)^{\frac{1}{3}} + x_o$$

Por otra parte, de la ecuación de la Astroide se tiene que:

$$(x_o)^{\frac{2}{3}} = \left[a^{\frac{2}{3}} - (y_o)^{\frac{2}{3}}\right] \qquad \text{y} \qquad (y_o)^{\frac{2}{3}} = \left[a^{\frac{2}{3}} - (x_o)^{\frac{2}{3}}\right]$$

de modo que los interceptos x e y se simplifican a . . .

$$y = (y_o)^{\frac{1}{3}}\cdot\left[a^{\frac{2}{3}} - (y_o)^{\frac{2}{3}}\right] + y_o \;=\; (y_o)^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}} \;=\; \boxed{\sqrt[3]{a^2\cdot y_o}}$$

$$x = \left[a^{\frac{2}{3}} - (x_o)^{\frac{2}{3}}\right]\cdot(x_o)^{\frac{1}{3}} + x_o \;=\; (x_o)^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}} \;=\; \boxed{\sqrt[3]{a^2\cdot x_o}}$$

y por el teorema de Pitágoras , la longitud del segmento $\overline{AB}$ es entonces :

$$\overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2} \;=\; \sqrt{\left(a^2\cdot x_o\right)^{\frac{2}{3}} + \left(a^2\cdot y_o\right)^{\frac{2}{3}}} \;=\; \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\cdot\left[(x_o)^{\frac{2}{3}} + (y_o)^{\frac{2}{3}}\right]} \;=\; \sqrt{a^{\frac{4}{3}}\cdot a^{\frac{2}{3}}} \;=\; \boxed{a}$$

que es constante, tal como se pedía demostrar.

19. Para que dos curvas sean tangentes entre si son necesarias dos condiciones. . .

a) que se intersecten en un punto
b) que sus pendientes sean iguales en el punto de intersección.

Por lo tanto, se deben determinar primero los puntos de intersección de las curvas y después, se calculan sus pendientes evaluando sus derivadas en esos puntos de intersección :

a) $y_1(x) = y_2(x)$ es decir . . . $4\cdot x^2 + 2\cdot x - 8 = x^3 - x + 10$.

se pueden evaluar las raíces de éste polinomio por división sintética y resulta : $x = -2$ y $x = 3$.

Las derivadas de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son:

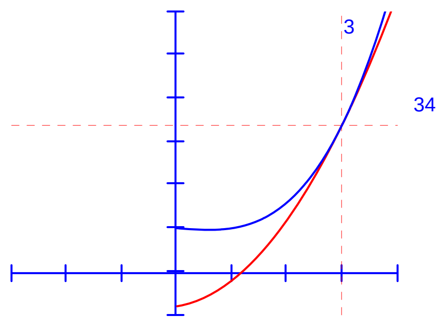
b) $\dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cdot\left(4\cdot x^2 + 2\cdot x - 8\right) = \boxed{8\cdot x + 2}$; $\dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cdot\left(x^3 - x + 10\right) = \boxed{3\cdot x^2 - 1}$

Evaluando éstas derivadas en las abscisas de los puntos de intersección resulta :

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=-2} = 8\cdot(-2)+2 = -14 \quad ; \quad \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=-2} = 3\cdot(-2)^2-1 = 11$$

$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=3} = 8\cdot(3)+2 = 26 \quad ; \quad \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=3} = 3\cdot(3)^2-1 = 26$$

Por lo tanto, aunque las curvas se intersectan en dos puntos : $(-2,4)$ y $(3,34)$, son tangentes entre si solo en éste último punto, porque tienen el mismo valor de su derivada, como se muestra en la figura de la derecha.



21. De la curva $y^2 = 4\cdot x$ podemos considerar la función explícita: $f(x) = \sqrt{4\cdot x}$ cuya derivada evaluada en el punto $(1,2)$ vale . . .

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=1} = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)_{x=1} = 1$$

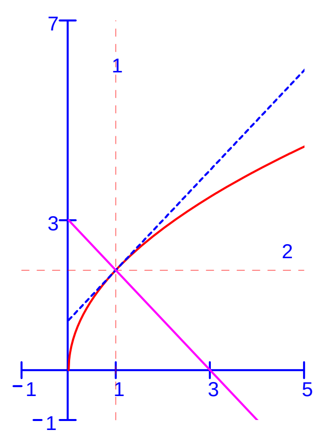
De manera que usando las expresiones generales para calcular las longitudes de los segmentos subtangente $|S_T|$, subnormal $|S_N|$ tangente $|T|$ y normal $|N|$, se obtiene :

$$|S_T| = \left|\frac{y_o}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}}\right| = \left|\frac{2}{1}\right| = 2$$

$$|S_N| = \left|y_0\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}\right| = |2\cdot(1)| = 2$$

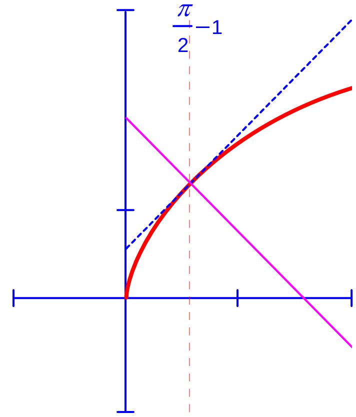
$$|T| = |y_0|\cdot\sqrt{1+\left[\frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}}\right]^2} = |2|\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{1}\right)^2} = 2\cdot\sqrt{2}$$

$$N = |y_0|\cdot\sqrt{1+\left[\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0}\right]^2} = |2|\cdot\sqrt{1+1^2} = 2\cdot\sqrt{2}$$



Comprobar las longitudes calculadas usando el teorema de Pitágoras

23. Ésta función paramétrica representa una cicloide y su derivada es . . .



$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{d\phi}\right)}{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)}$$

$$= \left[\frac{\frac{d}{d\phi}\cdot a\cdot(1-\cos(\phi))}{\frac{d}{d\phi}\cdot a\cdot(\phi-\sin(\phi))}\right] = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{1-\cos(\phi)}$$

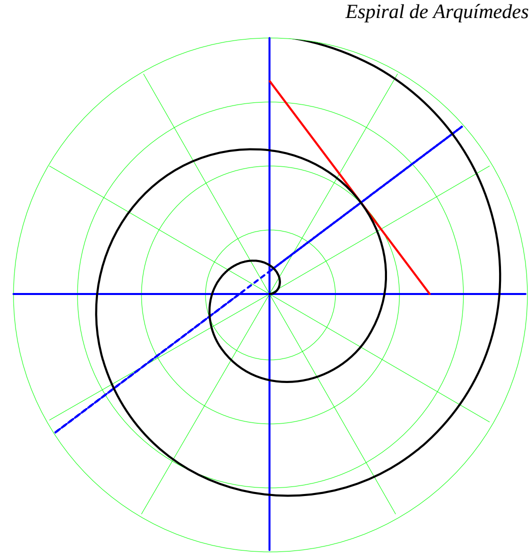
y evaluada en $\phi = \frac{\pi}{2}$ es: $\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{1-0} = 1$.

Por otra parte, $\phi = \frac{\pi}{2}$ corresponde al punto de coordenadas rectangulares $(x_o, y_o) = \left[a\cdot\left(\frac{\pi}{2}-1\right), a\right]$ sobre la cicloide, por lo cual las longitudes de los segmentos pedidos son . . .

$$S_T = \left|\frac{y_o}{\left(\frac{df}{dx}\right)}\right| = \left|\frac{a}{1}\right| = |a| \quad ; \quad T = |y_0|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2}} = |a|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{1}} = |a|\cdot\sqrt{2}$$

$$S_N = \left|y_0\cdot\frac{df}{dx}\right| = |a\cdot(1)| = |a| \quad ; \quad N = |y_0|\cdot\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2} = |a|\cdot\sqrt{1+1^2} = |a|\cdot\sqrt{2}$$

Espiral de Arquímedes .



25. En $\theta = \frac{9}{4}\cdot\pi$ la función polar $\rho(\theta) = a\cdot\theta$ vale $a\cdot\left(\frac{9}{4}\cdot\pi\right)$ y el ángulo que forma el radio polar con la recta tangente a la curva en el punto

$(\rho, \theta) = \left[a\cdot\left(\frac{9}{4}\cdot\pi\right), \left(\frac{9}{4}\cdot\pi\right)\right]$ está dado por:

$$\tan(\psi)_P = \frac{\rho}{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)_P} = \left(\frac{a\cdot\theta}{a}\right)_P = \frac{9\cdot\pi}{4}$$

Por lo cual, aplicando las fórmulas para las longitudes de los segmentos buscados, se tiene :

$$S_T = |r \cdot tan(\psi)| = \left| a \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi}{4}\right) \cdot \frac{9 \cdot \pi}{4} \right| = \frac{81}{16} \cdot a \cdot \pi^2$$

$$S_N = \left| \frac{r}{tan(\psi)} \right| = \left| \frac{a \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi}{4}\right)}{\left(\frac{9 \cdot \pi}{4}\right)} \right| = a$$

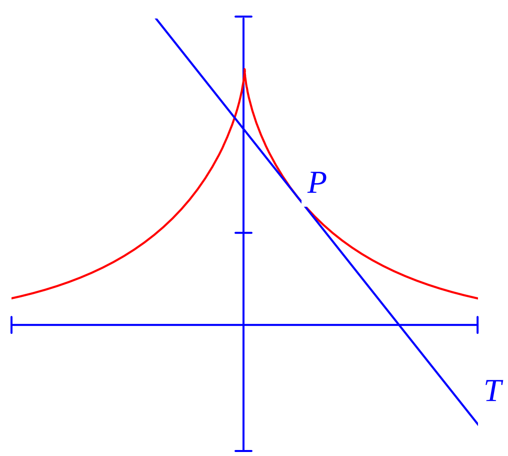
$$T = |r| \cdot \sqrt{1 + tan^2 \cdot \psi} = \left| a \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi}{4}\right) \right| \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{9 \cdot \pi}{4}\right)^2} = \frac{9}{16} \cdot \pi \cdot |a| \cdot \sqrt{16 + 81 \cdot \pi^2}$$

$$N = |r| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{tan^2 \cdot (\psi)}} = \left| a \cdot \left(\frac{9 \cdot \pi}{4}\right) \right| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{9 \cdot \pi}{4}\right)^2}} = \frac{1}{4} \cdot |a| \cdot \sqrt{16 + 81 \cdot \pi^2}$$

27. La forma paramétrica de la derivada de ésta función es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{d}{dt} \cdot (a \cdot sen(t))}{\frac{d}{dt} \cdot \left(a \cdot cos(t) + a \cdot \frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{1 - cos(t)}{1 + cos(t)}\right)\right)} = \frac{a \cdot cos(t)}{a \cdot \left[cos^2 \cdot (t) \cdot \frac{sen(t)}{1 - cos^2 \cdot (t)} \right]} = tan(t)$$

Por lo tanto, la longitud de su segmento tangente PT es . . .



$$T = |y_0| \cdot \sqrt{1 + \left[\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}} \right]^2}$$

$$= a \cdot sin(t) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{tan(t)}\right)^2}$$

$$= a \cdot sen(t) \cdot \sqrt{csc^2 \cdot (t)} = a$$

que es una constante siempre .

29. $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ 31. $dy = \dfrac{2}{x^2 - 1} \cdot dx$ 33. $dy = -\dfrac{x + y}{x - y} \cdot dx$ 35. $dy = \dfrac{x + y}{x - y} \cdot dx$

37. $\cos(x+\Delta x) \approx \cos(x) + \left(\frac{d}{dx}\cdot\cos(x)\right)\cdot\Delta x$ es decir . . .

$$\cos(60°+1°) \approx \cos(60\cdot°) - sen(60°)\cdot\left[(1°)\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{360°}\right)\right] = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{2\cdot\pi}{360}\right) = 0.484885$$

mientras que un valor más preciso es 0.4848096202

39. $e^{(x+\Delta x)} \approx e^x + \left(\frac{d}{dx}\cdot e^x\right)\cdot\Delta x$ es decir . . . $e^{0.2} \approx e^0 - e^0\cdot(0.2) = 1.2$

Mientras que un valor más preciso es : 1.2214028

41. $\log(x+\Delta x) \approx \log(x) + \left(\frac{d}{dx}\cdot\log(x)\right)\cdot\Delta x$ es decir . . .

$$\log(1-0.1) \approx \log(1) + \left(\frac{1}{\ln(10)}\right)\cdot(-0.1) = -0.04343 .$$

Mientras que un valor más preciso es $\log(0.9) = -0.045757$

43. Definiendo $f(x) = x^3 - 4\cdot x^2 + 5\cdot x + 3$, entonces $f(x+\Delta x) \approx f(x) + \left(\frac{d}{dx}\cdot f(x)\right)\cdot\Delta x$ conduce a:

$$f(1+0.03) \approx f(1) + \left(\frac{d}{dx}\cdot f(1)\right)\cdot(0.03)$$

$$\approx \left[(1)^3 - 4\cdot(1)^2 + 5\cdot(1) + 3\right] + \left[3\cdot(1)^2 - 8\cdot(1) + 5\right]\cdot(0.03) = 5$$

Un valor más preciso es : $f(1.03) = 4.999127$

45. *Considerando que en la ley de Ohm :* $i(R) = \frac{V}{R}$ *la corriente eléctrica* i *sea función de la resistencia* R *solamente*, resulta . . .

$$\Delta i = i(R+\Delta R) - i(R) \approx \left(\frac{d}{dR}i(R)\right)\cdot\Delta R = \left(\frac{-V}{R^2}\right)\cdot\Delta R$$

y como $\frac{V}{R} = i$, se tiene que : $\Delta i \approx \frac{-i}{R}\cdot\Delta R$

5.5 ***Máximos y mínimos*** .

Esta es una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial. Mediante la derivada se determina en forma precisa *donde una función matemática tiene su valor más grande ó su valor más pequeño* en un intervalo dado.

Recordando que una función $f(x)$ es . . .

- ***creciente*** en un intervalo $[a, b]$ si para dos valores cualesquiera x_1 y x_2 en de $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$, se obtiene que $f(x_1) < f(x_2)$.
- ***decreciente*** en un intervalo $[a, b]$ si para dos valores cualesquiera x_1 y x_2 en de $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$, se obtiene que $f(x_1) > f(x_2)$.

Teorema 1.

Si existe la derivada de la función $f(x)$ *cuando* $x = x_o$ *entonces en el punto* $P(x_o, f(x_o))$ *:*

si $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_P > 0$ *la función es creciente*

si $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_P < 0$ *la función es decreciente*

si $\left(\dfrac{df}{dx}\right)_P = 0$ *la función es estacionaria*

Es decir, ***el signo de la derivada*** *evaluada en un punto dado de la función determina si en tal punto la función crece o decrece.*

DEMOSTRACIÓN

Sean $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0 + \Delta x$. Si el incremento es positivo ($\Delta x > 0$) entonces necesariamente $x_1 < x_2$. Además, de la definición de derivada . . .

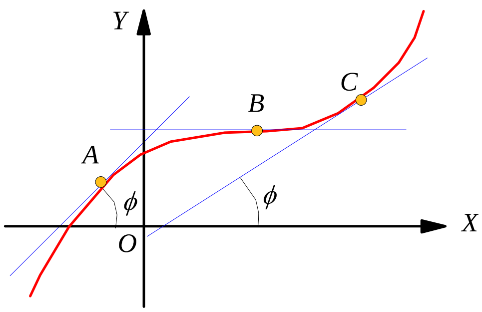
$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

dado que $\Delta x > 0$, entonces el cociente de incrementos $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ será positivo (y la derivada también), sólo si $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$ es decir, sólo si $f(x_1) < f(x_2)$, lo cual concuerda con la definición de una función *creciente* .

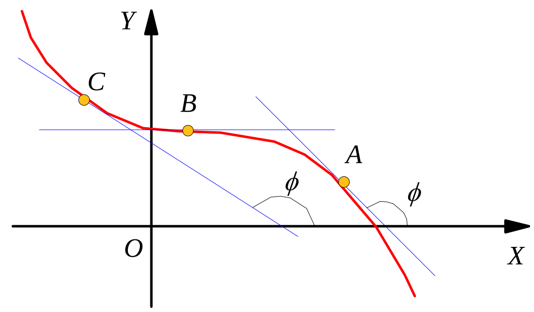
Similarmente, dado que $\Delta x > 0$, se deduce que el cociente de los incrementos : $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ será negativo (y por lo tanto la derivada también), sólo si $f\left(x_0 + \Delta x\right) < f\left(x_0\right)$ es decir, sólo si $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$ lo cual concuerda con la definición de una función *decreciente* .

La derivada de la función $f(x)$ en un punto P representa geométricamente la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en ese punto , asi que geométricamente, el teorema anterior significa que: *cuando una función es creciente , el ángulo de inclinación ϕ de la recta tangente a la curva es agudo y la tangente a la curva en ese punto está inclinada hacia la derecha, mientras que si una función es decreciente entonces el ángulo de inclinación ϕ de su recta tangente es obtuso y la tangente a la curva en ese punto está inclinada hacia la izquierda*

Cuando una función es estacionaria en un punto P, su tangente es horizontal porque su derivada vale cero y por consiguiente la pendiente de su recta tangente también. Esto se ilustra en las siguientes gráficas :



En una función <u>siempre creciente</u> , la recta tangente tiene una pendiente positiva en todo punto y es por eso que ϕ es siempre agudo .



En una función <u>siempre decreciente</u> , la recta tangente en todo punto tiene una pendiente negativa y es por eso que ϕ es obtuso .

Estas curvas podrían ser horizontales (*estacionarias*) en algunos puntos tales como el punto *B* .

Los valores de x para los cuales $f(x)$ es estacionaria se llaman <u>valores críticos</u> .

Los correspondientes puntos de la curva $y = f(x)$ se llaman <u>*puntos críticos*</u> y como veremos , tales puntos pueden representar un valor máximo relativo o un valor mínimo relativo de la función .

A los máximos ó mínimos relativos de una función se les llama <u>*valores extremos*</u>

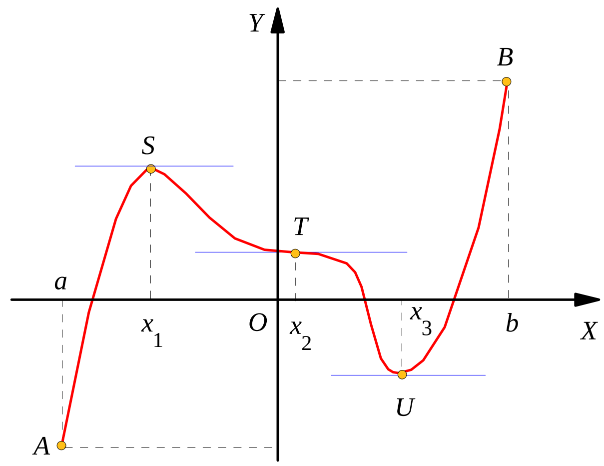
<u>*Definición*</u> .

Una función $f(x)$ tiene . . .

- *un **máximo relativo** en $x = x_0$ si $f\left(x_0\right) \geq f\left(x_0 + \Delta x\right)$ para todo Δx cercano a x_0.*
- *un **mínimo relativo** en $x = x_0$ si $f\left(x_0\right) \leq f\left(x_0 + \Delta x\right)$ para todo Δx cercano a x_0 .*

Entonces, si una función $f(x)$ tiene un ***máximo*** relativo en $x = x_0$, significa que $f(x_0)$ *es el mayor valor posible de la función en el intervalo* $(x_0 - \Delta x, x + \Delta x)$, y si tiene un ***mínimo*** relativo, significa que $f(x_0)$ *es el menor valor posible de la función en el intervalo* $(x_0 - \Delta x, x + \Delta x)$

Asi por ejemplo, en la gráfica de la función $y = f(x)$ representada a la derecha, los valores críticos de la variable x para los cuales $\dfrac{df}{dx} = 0$ son x_1 , x_2 y x_3 .



En consecuencia, los puntos críticos de $f(x)$ son : $S(x_1, f(x_1))$, $T(x_2, f(x_2))$ y $U(x_3, f(x_3))$.

Además, en $[\ a\ ,\ b\ ]$ la función es :

- *creciente* en el intervalo (a, x_1)
- *decreciente* en el intervalo (x_1, x_2)
- *estacionaria* en $x = x_2$; pero T no es un punto crítico .
- *decreciente* en el intervalo (x_2, x_3)
- *creciente* en el intervalo (x_3, b)

En consecuencia, esta función tiene un valor . . .

- *máximo relativo* en $x = x_1$ de valor $f(x_1)$ en el punto S
- *mínimo relativo* en $x = x_3$ de valor $f(x_3)$ en el punto U

Nótese que *el máximo relativo de una función en un intervalo no necesariamente es el mayor valor de la función en ese intervalo* (*máximo absoluto*) , tal como se puede apreciar en la figura anterior en el punto B donde $f(b) > f(x_1)$.

De la igual manera, *un mínimo relativo no necesariamente es el menor valor que puede tener una función en un intervalo dado*. Como se puede apreciar en el punto A de la figura anterior, donde el mínimo absoluto es menor que el mínimo relativo $f(a) < f(x_3)$

Obsérvese también que . . .

un máximo relativo une un arco creciente donde $\dfrac{df}{dx} > 0$ *con un arco decreciente donde* $\dfrac{df}{dx} < 0$.

un mínimo relativo une un arco decreciente donde $\dfrac{df}{dx} < 0$ *con un arco creciente donde* $\dfrac{df}{dx} > 0$.

Teorema 2.

Si una función $f(x)$ *tiene un valor crítico en un punto* x_0 *, entonces su derivada se anula en tal punto, es decir . . .* $\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x_0} = 0$

<u>*DEMOSTRACIÓN*</u>

Supongamos que la función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* $f(x_0)$ en $x = x_0$, entonces para un incremento Δx suficientemente pequeño , se cumple que :

$$f(x + \Delta x) < f(x_0)$$

puesto que $f(x_0)$ es el máximo relativo y cualquier otro valor de la función alrededor de x_0 es necesariamente menor . Entonces . . . $f(x + \Delta x) - f(x_0) < 0$, de tal manera que el cociente : $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ será *positivo* si $\Delta x < 0$ ó será *negativo* si $\Delta x > 0$.

En otras palabras . . .

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) \geq 0 \quad \text{es decir:} \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \geq 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) \leq 0 \quad \text{es decir:} \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \leq 0$$

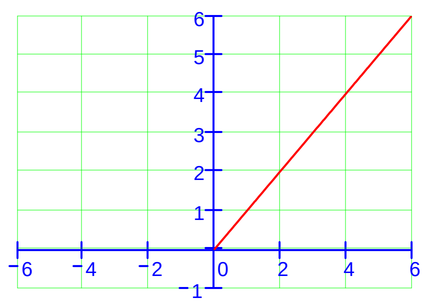
y de éstas dos condiciones se concluye necesariamente que en un punto crítico . . . $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} = 0$

(La demostración para el caso de un mínimo relativo es muy similar . Queda como ejercicio para el lector)

El significado geométrico de éste teorema es que *en un punto crítico, la recta tangente a la curva* $y = f(x)$ *es horizontal* , puesto que su pendiente, representada por la derivada $\frac{df}{dx}$ vale cero .

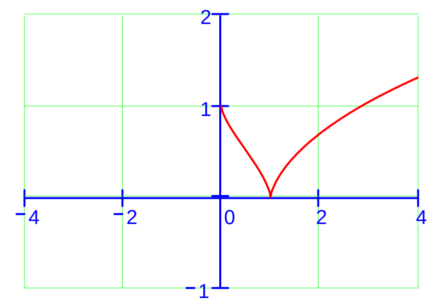
El recíproco de ésta afirmación no es verdad, es decir, *si la derivada de una función se anula en un punto, no necesariamente significa que la función tiene en ese punto un valor extremo*.

Hasta ahora se ha considerado que la derivada $\frac{df}{dx}$ de la función $f(x)$ existe en todos los puntos de un intervalo $[\,a\,,\,b\,]$; sin embargo, cabe la posibilidad de que una función no tenga una derivada definida en algunos puntos de tal intervalo y sin embargo todavía existir en esos puntos un valor extremo, como se ilustra por ejemplo en las siguientes funciones. . .



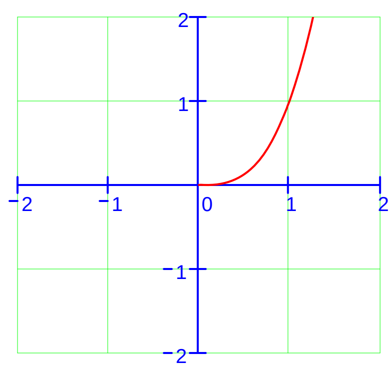
$f(x) = |x|$

La derivada no existe en $x = 0$; sin embargo, la función tiene en ese punto un valor mínimo dado por $f(0) = 0$



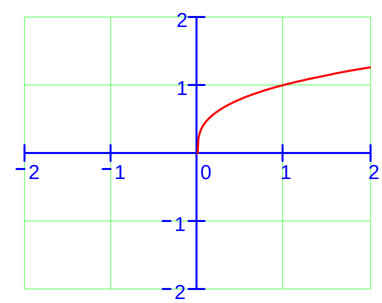
$f(x) = \sqrt[3]{\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2}$

La derivada no existe en $x = 0$, ni en $x = 1$. No obstante, en estos puntos la función tiene un valor máximo dado por $f(0) = 1$ y dos valores mínimos dados por $f(-1) = 0$ y $f(1) = 0$



$f(x) = x^3$

La derivada $f'(x) = 3 \cdot x^2$ vale 0 en $x = 0$ (la recta tangente a la curva es horizontal en ese punto) ; sin embargo la función no tiene un valor máximo ni un valor mínimo.
En $x = 0$ se unen dos arcos crecientes puesto que $f'(x)$ es siempre positiva tanto para $x \le 0$ como para $x > 0$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

La derivada $\frac{df}{dx} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ no existe en $x = 0$.
(la recta tangente a la curva es vertical en ese punto) .
Sin embargo, la función no tiene en $x = 0$ un valor máximo o un valor mínimo. En $x = 0$ se unen dos arcos crecientes dado que $f'(x)$ es siempre positiva para $x \le 0$ o para $x > 0$.

El análisis de los ejemplos anteriores nos conduce a la siguiente moraleja :

" Si la derivada de una función vale cero ó no está definida en un punto dado, ***no necesariamente*** *tiene la función un valor extremo en ese punto " .*

En resumen . . .

***Teorema* 3.**

Para una función $f(x)$ *que sea . . .*

- ***continua*** *en todos los puntos de un intervalo [a , b] que contiene al punto crítico* x_0
- ***derivable*** *en cada punto del intervalo (a , b) , excepto tal vez en* x_0 *en el cual . . .*

$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad ó \qquad \frac{1}{\left(\frac{df}{dx}\right)} = 0$$

- Si $f'(x) < 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) > 0$ para $x > x_0$ entonces la función tiene en x_0 un mínimo relativo que vale $f\left(x_0\right)$
- Si $f'(x) > 0$ para $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para $x > x_0$ entonces la función tiene en x_0 un máximo relativo que vale $f\left(x_0\right)$.

En otras palabras, éste teorema establece que :

" ***El cambio de signo de la derivada*** *de la función en un punto crítico determina si en tal punto la función tiene un valor máximo ó un mínimo relativo "*

Con los resultados anteriores, se puede ahora formular un procedimiento para determinar de una manera sistemática las valores extremos de una función matemática :

PRIMER CRITERIO PARA VALORES EXTREMOS

1° ***Resolver las ecuaciones*** $\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = 0 \qquad ó \qquad \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)} = 0$

con el fin de determinar los valores críticos de x *donde posiblemente existan máximos o mínimos relativos para* $f(x)$.

2° ***Ordenar los valores críticos sobre la recta numérica***
la cual queda asi dividida en intervalos

3° Determinar el signo de la derivada en cada intervalo.
Evaluando la derivada en un punto arbitrario de cada intervalo se sabrá si la función $f(x)$ es creciente o decreciente en cada intervalo.

4° Al recorrer la recta numérica de izquierda a derecha pasando por un valor crítico x_0

Si $\frac{df}{dx}$ ***cambia de + a – , entonces*** $f(x_0)$ ***es un máximo relativo de*** $f(x)$

Si $\frac{df}{dx}$ ***cambia de – a + , entonces*** $f(x_0)$ ***es un mínimo relativo de*** $f(x)$

Si $\frac{df}{dx}$ ***no cambia de signo, entonces*** $f(x_0)$ ***no es un valor extremo de*** $f(x)$

Ejemplo 11. Hallar los valores extremos de la función $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6 \cdot x + 8$

Solución : 1° La derivada de la función es

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6 \cdot x + 8\right) = x^2 + x - 6 = (x+3)\cdot(x-2)$$

de modo que los valores críticos se obtienen al resolver la ecuación $\frac{df}{dx} = 0$, es decir : $(x+3)\cdot(x-2) = 0$, obteniéndose $x = -3$ y $x = 2$.

2° Éstos valores críticos determinan sobre la recta numérica los siguientes intervalos :
$(-\infty, -3)$, $(-3, 2)$ y $(2, \infty)$.

3° Calculemos el signo de la derivada en cada uno de éstos intervalos . . .

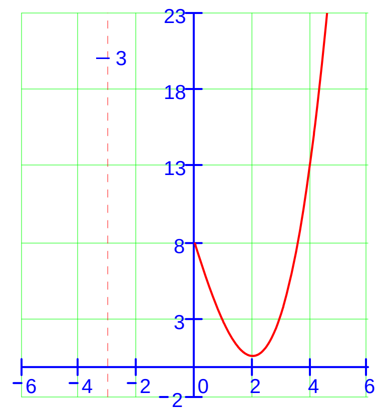
	$(-\infty, -3)$	$(-3, 2)$	$(2, \infty)$
$(x+3)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x-2)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$f' = (x+3)(x-2)$	$(-)(-) = (+)$	$(+)(-) = (-)$	$(+)(+) = (+)$
$f(x)$	*creciente*	*decreciente*	*creciente*

4° Al pasar por $x = -3$ la derivada cambia de signo de $+$ a $-$ por lo tanto se concluye que en éste punto la función tiene un *máximo relativo* que vale :

$$f(-3) = \frac{(-3)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6\cdot(-3) + 8 = \boxed{\frac{43}{2}}$$

Al pasar por $x = 2$, la derivada cambia de signo de $-$ a $+$, por lo tanto se concluye que en éste punto la función tiene un *mínimo relativo* que vale :

$$f(2) = \frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} - 6\cdot(2) + 8 = \boxed{\frac{2}{3}}$$



Ejemplo 12. Hallar los valores extremos de la función $f(x) = x^4 + 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 4$

Solución : La derivada de la función es :

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\left(x^4 + 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 4\right) = 4\cdot x^3 + 6\cdot x^2 - 6\cdot x - 4$$

$$= 2\cdot(x-1)\cdot(2\cdot x+1)\cdot(x+2)$$

de manera que los valores críticos se obtienen resolviendo la ecuación $\frac{df}{dx} = 0$

$$2\cdot(x-1)\cdot(2\cdot x+1)\cdot(x+2) = 0$$

obteniéndose : $x = -2$, $x = \frac{-1}{2}$ y $x = 1$

Localizando sobre la recta numérica éstos valores críticos resultan los intervalos :

$$(-\infty,-2) \quad , \quad \left(-2,\frac{-1}{2}\right) \quad , \quad \left(\frac{-1}{2},1\right) \quad \text{y} \quad (1,\infty)$$

Calculemos el signo de cada factor de la derivada y de la derivada misma en éstos intervalos, para determinar si la función crece, ó decrece en cada uno de ellos. . .

	$(-\infty,-2)$	$\left(-2,\frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2},1\right)$	$(1,\infty)$
$(x+2)$	(−)	(+)	(+)	(+)
$(2\cdot x+1)$	(−)	(−)	(+)	(+)
$(x-1)$	(−)	(−)	(−)	(+)
$\frac{df}{dx}$	(−)(−)(−) = −	(+)(−)(−) = +	(+)(+)(−) = −	(+)(+)(+) = +
$f(x)$	*decreciente*	*creciente*	*decreciente*	*creciente*

Al pasar por $x = -2$, la derivada cambia de signo de − a + , la función $f(x)$ cambia de decreciente a creciente y por lo tanto tiene en ese punto un *mínimo relativo* que vale :

$$f(-2) = (-2)^4 + 2\cdot(-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 - 4\cdot(-2) + 4 = 0$$

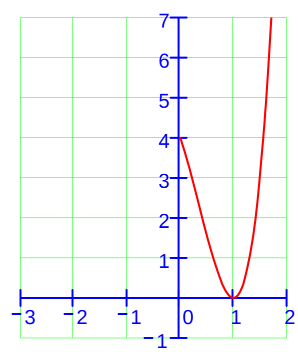
Al pasar por $x = \frac{-1}{2}$ la derivada cambia de signo de + a − , la función $f(x)$ cambia de creciente a decreciente. Por lo tanto tiene en ese punto un *máximo relativo* de valor :

$$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^4 + 2\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) + 4 = \frac{81}{16}$$

En $x = 1$, la derivada $\frac{df}{dx}$ tiene otro cambio de signo de − a + y por lo tanto en éste punto la función $f(x)$ tiene *otro mínimo relativo* de valor :

$$f(1) = (1)^4 + 2\cdot(1)^3 - 3\cdot(1)^2 - 4\cdot(1) + 4$$

$$= 0$$



En la gráfica de la derecha se muestra la gráfica de ésta función, la cual tiene tres puntos donde la recta tangente es horizontal y la función tiene tres valores extremos.

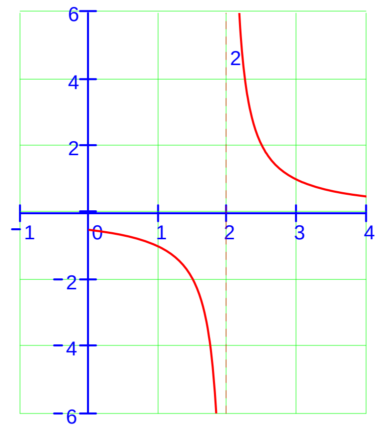
Ejemplo 13. Hallar los valores máximos y mínimos relativos de $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Solución : La derivada de ésta función es : $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cdot\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$

la cual no está definida en $x = 2$, asi que la única solución posible de la ecuación:

$$\frac{1}{\left(\dfrac{df}{dx}\right)} = 0$$

es $x = 2$ y como puede verse en la gráfica de la derecha , ésta función es siempre decreciente, por lo cual su derivada no presenta un cambio de signo. En consecuencia, no tiene valores extremos relativos.



Ejemplo 14. ¿ Cuáles son los valores extremos de la función $f(x) = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$?

Solución : La derivada de ésta función es $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}\cdot\left[(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}\right] = \dfrac{5\cdot x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$

asi que las ecuaciones : $\dfrac{df}{dx} = 0$ y $\dfrac{1}{\left(\dfrac{df}{dx}\right)} = 0$ conducen a :

$$\frac{5\cdot x-2}{3\cdot\sqrt[3]{x}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{3\cdot\sqrt[3]{x}}{5\cdot x-2} = 0$$

cuyas soluciones son los valores críticos : $x = \dfrac{2}{5}$ y $x = 0$.

Localizando sobre la recta numérica éstos valores críticos resultan los intervalos

$$(-\infty,0) \quad , \quad \left(0,\frac{2}{5}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{2}{5},\infty\right)$$

Analicemos el signo que tiene la derivada de ésta función en cada uno de ellos.

	$\left(-\infty, 0\right)$	$\left(0, \frac{2}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$
$(5 \cdot x - 2)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$\frac{df}{dx} = (5 \cdot x - 2) \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$	$(-)(-) = \mathbf{(+)}$	$(-)(+) = \mathbf{(-)}$	$(+)(+) = \mathbf{(+)}$
$f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$	*creciente*	*decreciente*	*creciente*

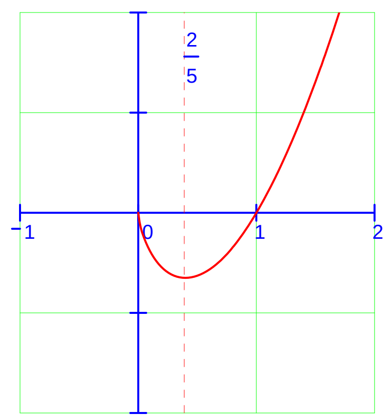
Al pasar por $x = 0$, la derivada cambia de signo de $+$ a $-$, la función $f(x)$ cambia de creciente a decreciente y por lo tanto tiene en ese punto un *máximo relativo* que vale :

$$f(0) = [(0) - 1] \cdot \sqrt[3]{(0)^2} = 0$$

Al pasar por $x = \frac{2}{5}$ la derivada cambia de signo de $-$ a $+$, la función $f(x)$ cambia de decreciente a creciente. Por lo tanto tiene en ese punto un *mínimo relativo* de valor :

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5} - 1\right) \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{-3}{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{4}{25}}$$

$$= -0.326$$



5.6 ***Problemas sobre máximos y mínimos*** .

La determinación de los valores extremos de las funciones matemáticas tiene una amplia aplicación en diversos campos tales como la Ingeniería , la Física o la Geometría .
Sin embargo, antes de hallar los valores máximos ó mínimos de una función, primero *es necesario hallar la expresión matemática de tal función* , la cual representa la cantidad física ó geométrica que se desea maximizar ó minimizar .
Esta labor se logra *traduciendo el problema del lenguaje español al lenguaje matemático* .

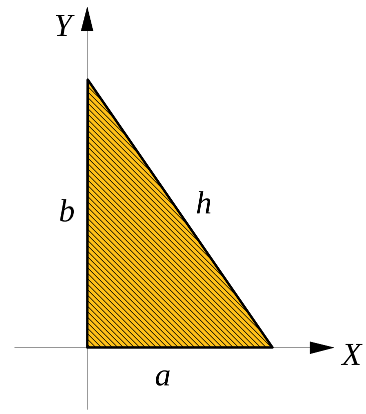
Cuando la expresión encontrada para tal función contenga más de una variable, usando las condiciones del problema debemos expresarla en una sola variable *relacionando todas las demás variables con una sola de ellas .*
Usualmente, una gráfica de la función que se involucra en el problema puede resultar de mucha utilidad .

Ejemplo 15. Determinar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo que tiene una hipotenusa de longitud constante h, de manera que el área del triángulo sea máxima .

Solución : El área A de un triángulo rectángulo de lados a , b e hipotenusa h se calcula como :

$$A(a,b) = \frac{a \cdot b}{2}$$

Ésta expresión es una función de las dos variables a y b, sin embargo, dado que el triángulo es rectángulo, el teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = h^2$ resulta útil para expresarla como función de una sola variable al substituir por ejemplo $b = \sqrt{h^2 - a^2}$ y queda . . .



$$A(a) = \frac{a \cdot \sqrt{h^2 - a^2}}{2} \qquad \text{(donde } 0 \le a \le h \text{)}$$

La derivada de ésta función respecto a la variable a es :

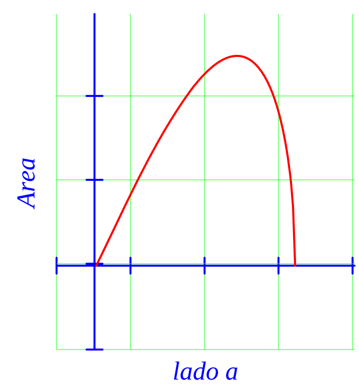
$$\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{x \cdot \sqrt{h^2 - x^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(h^2 - 2 \cdot x^2\right)}{\sqrt{h^2 - x^2}}$$

esta derivada vale cero cuando $h^2 - 2 \cdot x^2 = 0$ es decir cuando $x = \frac{-h}{\sqrt{2}}$ ó $x = \frac{h}{\sqrt{2}}$

En éste problema resulta evidente que es el segundo valor crítico para x el que genera el área máxima, puesto que el área *A(x)* en la práctica no puede ser negativa.

Por lo tanto el valor máximo del área es:

$$A_{max} = \frac{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{2}}}{2} = \boxed{\frac{h^2}{4}}$$



y los lados del triángulo serán en tal caso:

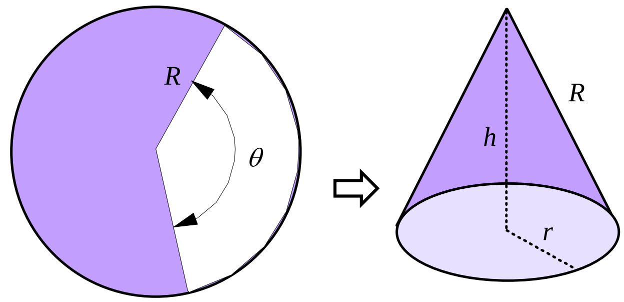
$$a = \frac{h}{\sqrt{2}} \quad ; \quad b = \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}}$$

se trata pues de un triángulo *isósceles*

Ejemplo 16. De una hoja circular de radio R , cortar un sector tal que al ser enrollado, se obtenga un embudo cónico de volumen máximo :

Solución : La cantidad que se desea maximizar es el volumen de un cono circular recto de radio r y altura h , el cual se calcula como:

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$$



donde h es la altura perpendicular a la base circular de radio r .

Esta expresión para el volumen depende de dos variables: r y h , sin embargo otra vez gracias al teorema de Pitágoras: $R^2 = h^2 + r^2$ es posible relacionarlas para transformar la expresión par el volumen en una función de una sola variable.

Dado que $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, substituyendo en $V(r,h)$ se obtiene . . .

$$V(r) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot\sqrt{R^2 - r^2}$$

Además, puesto que la longitud del arco circular es el perímetro de la base del cono, es decir $R\cdot\theta = 2\cdot\pi\cdot r$, o bien : $r = \left(\frac{R}{2\cdot\pi}\right)\cdot\theta$ se obtiene finalmente el volumen V como una función del ángulo central θ del sector circular . . .

$$V(\theta) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{R}{2\cdot\pi}\cdot\theta\right)^2\cdot\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\cdot\theta}{2\cdot\pi}\right)^2} = \left(\frac{R^3\cdot\theta^2}{24\cdot\pi^2}\right)\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2 - \theta^2}$$

La derivada de ésta función de θ es :

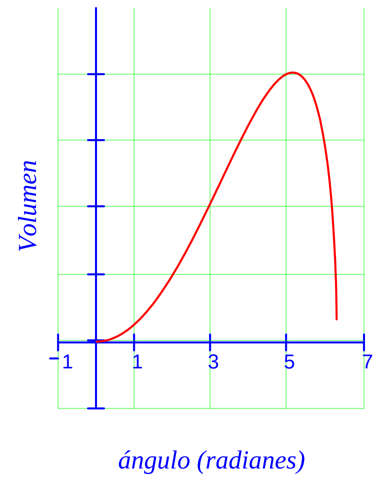
$$\frac{d}{d\theta}\cdot V(\theta) = \frac{d}{d\theta}\cdot\left[\left(\frac{R^3\cdot\theta^2}{24\cdot\pi^2}\right)\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2 - \theta^2}\right] = \left(\frac{R^3\cdot\theta}{24\cdot\pi^2}\right)\cdot\left(\frac{8\cdot\pi^2 - 3\cdot\theta^2}{\sqrt{4\cdot\pi^2 - \theta^2}}\right)$$

Igualando a cero ésta derivada : $\frac{dV}{d\theta} = 0$, se obtiene la condición :

$$8\cdot\pi^2 - 3\cdot\theta^2 = 0$$

es decir . . .

$$\theta = -\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\pi\right) \quad ; \quad \theta = \sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\pi$$



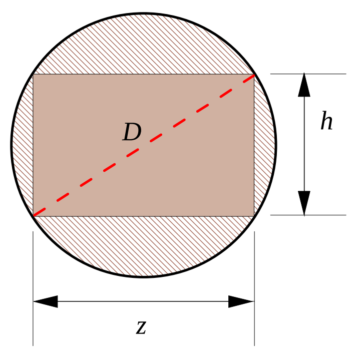
Del criterio de máximos y mínimos resulta que el volumen máximo se obtiene en $\theta = \sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\pi$ y vale :

$$V_{max} = \frac{R^3}{24\cdot\pi^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\pi\right)^2\cdot\sqrt{4\cdot\pi^2 - \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot\pi\right)^2}$$

$$= \boxed{\frac{2}{9\cdot\sqrt{3}}\cdot R^3\cdot\pi}$$

Ejemplo 17. La resistencia de una viga a la compresión es proporcional al área de su sección transversal y que su resistencia a la flexión es proporcional al ancho z y al cuadrado de la altura h de su sección transversal . De un tronco recto de diámetro D, hay que cortar una viga rectangular. ¿ Qué ancho z y altura h deberá tener la sección transversal de la viga para que tenga una resistencia máxima a : a) la compresion ? b) la flexión?

Solución : Dado que el área de la sección rectangular es $z\cdot h$, la resistencia de la viga a la compresión es una función de las dos variables, el ancho z y la altura h de la sección rectangular y está dada por . . .



$$R_c(z,h) = k\cdot z\cdot h$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Si D es el diámetro del tronco circular, h la altura de la viga que se desea cortar y z su ancho,entonces, del teorema de Pitágoras es claro que: $D^2 = h^2 + z^2$, de lo cual, substituyendo z se puede convertir R_c en una función de una sola variable . . .

$$R_c\cdot(h) = k\cdot\left(\sqrt{D^2 - h^2}\right)\cdot h$$

Igualando a cero la derivada de ésta función resulta :

$$\frac{d}{dh}\cdot R_c(h) = \frac{d}{dh}\cdot\left[k\cdot\left(\sqrt{D^2 - h^2}\right)\cdot h\right] = k\cdot\frac{\left(D^2 - 2\cdot h^2\right)}{\sqrt{D^2 - h^2}} = 0$$

y se obtienen los valores críticos para la altura de la viga : $h = -\left(\frac{D}{\sqrt{2}}\right)$ y $h = \left(\frac{D}{\sqrt{2}}\right)$

Dado que en la práctica h no puede ser un número negativo, se concluye que sólo el valor positivo de h dará un valor extremo para la resistencia a la compresión de la viga. Además ese valor extremo debe ser un máximo puesto que evidentemente la resistencia mínima de una viga sería cero.

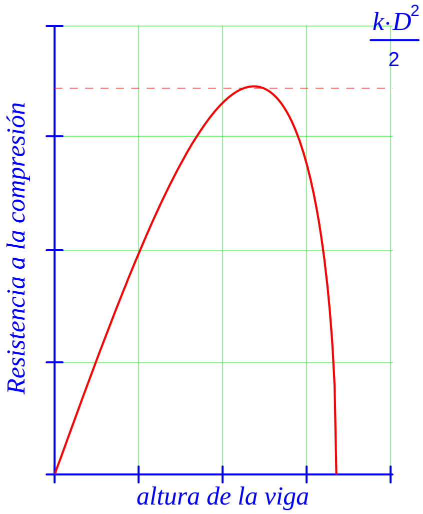
De éste modo, las dimensiones de la viga que tiene la máxima resistencia a al compresión deben ser . . .

$$h = \boxed{\frac{D}{\sqrt{2}}}$$

$$z = \sqrt{D^2 - h^2} = \sqrt{D^2 - \left(\frac{D}{\sqrt{2}}\right)^2} = \boxed{\frac{D}{\sqrt{2}}}$$

y resulta asi que una viga con una sección transversal cuadrada tendrá la máxima resistencia a la compresión, la cual valdrá:

$$\left(R_c\right)_{max} = k\cdot\left(\frac{D}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{D}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{k\cdot D^2}{2}}$$



Por otra parte, la resistencia R_f de la viga a la flexión es una función de las dos variables z y h y está dada por . . .

$$R_f(z,h) = K\cdot z\cdot h^2$$

donde K es una constante de proporcionalidad.

Usando la misma relación anterior del teorema de Pitágoras entre z , h y D es posible rescribir a ésta función para que dependa de una sola variable:

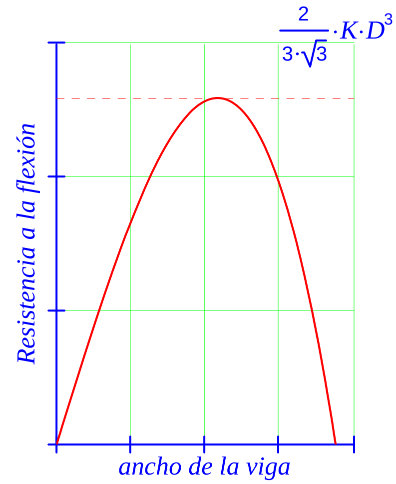
$$R_f(z) = K\cdot z\cdot\left(\sqrt{D^2 - z^2}\right)^2 = K\cdot\left(D^2\cdot z - z^3\right)$$

Igualando a cero la derivada de ésta función. . .

$$\frac{d}{dh}\cdot R_f(z) = \frac{d}{dh}\cdot\left[K\cdot\left(D^2\cdot z - z^3\right)\right] = K\cdot\left(D^2 - 3\cdot z^2\right) = 0$$

se obtienen los valores críticos para el ancho z : $z = \frac{-D}{\sqrt{3}}$; $z = \frac{D}{\sqrt{3}}$

Físicamente z no puede ser un número negativo, asi que la resistencia máxima a la flexión se obtendrá con $z = \dfrac{D}{\sqrt{3}}$.

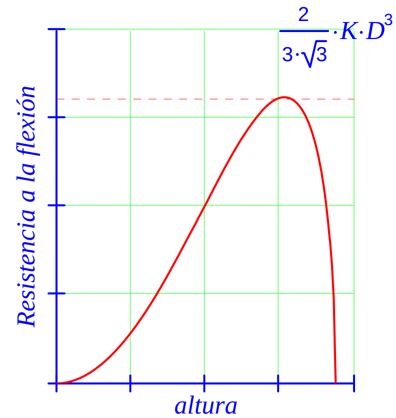


De éste modo, las dimensiones de la viga para que ésa resistencia sea máxima deben ser . . .

$$z = \boxed{\frac{D}{\sqrt{3}}}$$

$$h = \sqrt{D^2 - z^2} = \sqrt{D^2 - \left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^2} = \boxed{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot D}$$

Una viga con éstas proporciones tendrá el valor máximo de resistencia a la flexión . . .



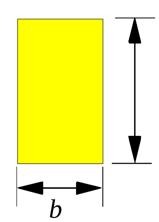
$$\left(R_f\right)_{max} = K\cdot\left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot D\right)^2$$

$$= \boxed{\frac{2}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot K\cdot D^3}$$

Expresando R_f en función de la altura h , se obtiene la gráfica de la derecha, la cual tiene una forma diferente a la gráfica donde la resistencia a la flexión se exprese en función del ancho de la viga; sin embargo muestra *el mismo máximo* .

Ejemplo 18. Doblar un alambre de longitud L de manera que se forme un rectángulo de área máxima.

Solución : El área de un rectángulo de base b y altura h está dada por:



$A(b,h) = b\cdot h$ que es una función de dos variables ; pero debido a que su perímetro es constante y está dado por $L = 2\cdot(b + h)$, es posible expresar el área del rectángulo como una función de una sola variable despejando por ejemplo b del perímetro : $b = \dfrac{L}{2} - h$ y substituyendo en la expresión del área. Queda de éste modo :

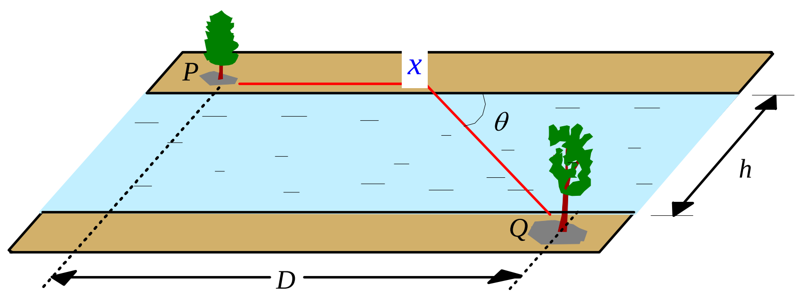
$$A(h) = \left(\frac{L}{2} - h\right)\cdot h$$

Igualando a cero la derivada de ésta función : $\dfrac{dA}{dh} = \left(-2\cdot h + \dfrac{1}{2}\cdot L\right) = 0$

resultan el valor crítico para la altura h : $h = \frac{L}{4}$

Por lo tanto, $b = \frac{L}{2} - h = \frac{L}{4}$. Resulta que el rectángulo de área máxima será un cuadrado de lado $\frac{L}{4}$

Ejemplo 19. La velocidad de un atleta en el agua es k veces menor a la que tiene en suelo firme y debe llegar desde un punto P situado en la orilla de un río sin corriente hasta otro punto Q en la orilla opuesta del río, como se ilustra en el siguiente esquema .El ancho del rio es h ,sus orillas son paralelas y además D es la distancia que separa a los puntos P y Q a lo largo del arroyo.
Si el atleta se mueve en línea recta y a velocidad constante, ¿ qué distancia x debe correr por la orilla antes de empezar a nadar cruzando el rio para llegar a Q en el menor tiempo posible ?



Solución : El movimiento del atleta es rectilíneo y uniforme en ambos trozos del recorrido asi que si v es la velocidad del atleta en tierra firme , entonces $k \cdot v$ es su velocidad en el agua y los tiempos que emplea corriendo y nadando son respectivamente . . .

$$t_1 = \frac{x}{v} \qquad \text{y} \qquad t_2 = \frac{\sqrt{(D-x)^2 + h^2}}{k \cdot v}$$

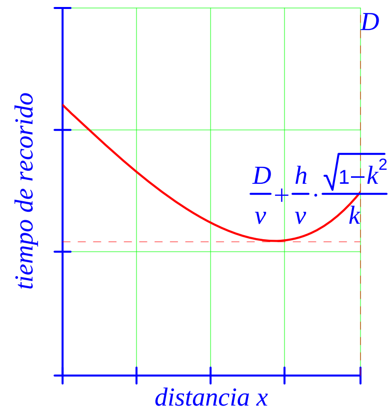
El tiempo total t de recorrido es la suma de éstos dos tiempos y como podemos apreciar, es una función de la variable x (puesto que todas las demás cantidades *son constantes*)

$$t(x) = \frac{x}{v} + \frac{\sqrt{(D-x)^2 + h^2}}{k \cdot v}$$

La derivada de ésta función es . . . $$\frac{dt}{dx} = \frac{k \cdot \sqrt{(D-x)^2 + h^2} - D + x}{k \cdot v \cdot \sqrt{(D-x)^2 + h^2}}$$

Igualando a cero ésta derivada, se obtiene la condición : $k\cdot\sqrt{(D-x)^2+h^2}-D+x=0$ y se deduce que el único valor crítico físicamente posible para x, con el cual se obtiene el tiempo mínimo de recorrido es :

$$x = D-\frac{h\cdot k}{\sqrt{1-k^2}}$$



De ésta manera, el atleta debe comenzar a nadar cuando su trayectoria con el punto final Q tenga la dirección dada por:

$$tan(\theta) = \frac{h}{(D-x)} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$$

su tiempo mínimo de recorrido será entonces :

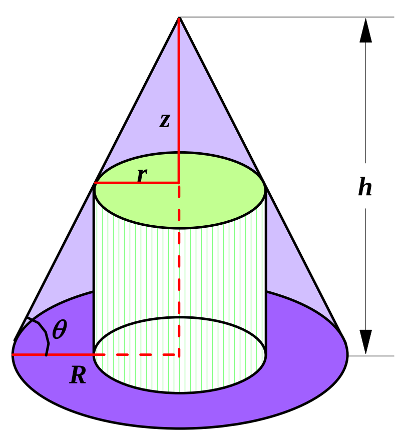
$$t_{min} = \frac{\left(D-\frac{h\cdot k}{\sqrt{1-k^2}}\right)}{v}+\frac{\sqrt{\left[D-\left(D-\frac{h\cdot k}{\sqrt{1-k^2}}\right)\right]^2+h^2}}{k\cdot v} = \boxed{\frac{D}{v}+\frac{h}{v}\cdot\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}}$$

Cuando un rayo de luz o una onda de sonido cruzan entre dos medios en los que tienen diferentes velocidades de propagación, su trayectoria se determina de ésta misma manera. La Naturaleza nos muestra asi que *las ondas recorren la distancia entre dos puntos en el menor tiempo posible*.

Ejemplo 20. Determinar el cilindro de volumen máximo que puede cortarse de un cono circular recto que tiene una altura h y un radio R .

Solución : El volumen V de un cilindro circular recto de radio r y altura H está dado por :

$$V(r,H) = \pi\cdot r^2\cdot H$$



que es una función de dos variables.
Sin embargo usando la geometría del problema es posible convertir esta expresión en una función de una variable al notar que. . .

$$cot(\theta) = \frac{r}{z} = \frac{R}{h}$$

es decir. . . $z = \frac{r}{R}\cdot h$

El volumen del cilindro queda expresado entonces en función de una sola variable :

$$V(r) = \pi\cdot r^2\cdot(h-z) \;=\; \pi\cdot r^2\cdot\left[h-\left(\frac{r}{R}\right)\cdot h\right]$$

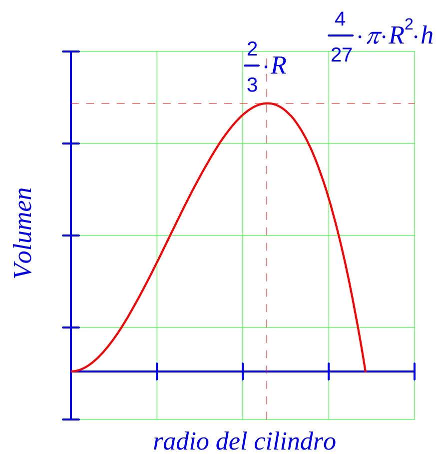
La derivada de ésta función es : $\dfrac{dV}{dr} = \left(\dfrac{\pi\cdot r\cdot h}{R}\right)\cdot(2\cdot R-3\cdot r)$, asi que igualándola a cero se obtienen los valores críticos para el radio del cilindro: $r = 0$; $r = \dfrac{2\cdot R}{3}$

Evidentemente $r = 0$ implica que el volumen del cilindro es cero (un mínimo) , y es claro que el cilindro de volumen máximo inscrito en el cono debe tener el radio $r = \dfrac{2}{3}\cdot R$.

En consecuencia su altura es

$$H = (h-z) = h-\left(\frac{r}{R}\right)\cdot h$$

$$= h-\frac{2\cdot R}{3\cdot R}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot h$$



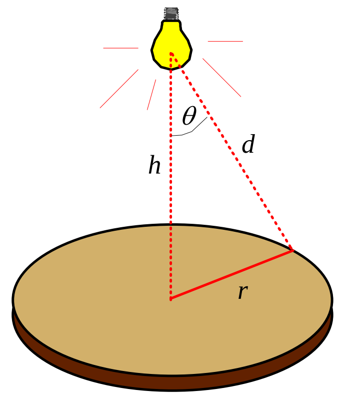
El volumen máximo es entonces :

$$V_{max} = \pi\cdot r^2\cdot H \;=\; \pi\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot R\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot h\right) \;=\; \boxed{\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot h\right)}$$

que es $\dfrac{4}{9}$ partes del volumen del cono .

Ejemplo 21. Se cuelga una lámpara sobre el centro de una mesa redonda de radio r. ¿ A qué altura h por encima de la mesa será máxima la iluminación L en su borde ? .

(*La iluminación* L *es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia de los rayos luminosos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco de luz*)



Solución : Como se indica en la figura, la iluminación en el borde de la mesa se calcula como . . .

$$L = k\cdot\frac{\cos(\theta)}{d^2}$$ (donde k es una constante de proporcionalidad)

Del triángulo rectángulo de lados h , d y r es inmediato que . . .

$$\cos(\theta) = \frac{h}{d} \quad ; \qquad d = \sqrt{h^2 + r^2}$$

por lo tanto la iluminación puede ser expresada como función de h solamente . . .

$$L(h) = k\cdot\frac{\left(\frac{h}{d}\right)}{d^2} = k\cdot\left[\frac{h}{\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^3}}\right]$$

La derivada de ésta función es . . .

$$\frac{dL}{dh} = \frac{k}{\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^3}} - 3\cdot k\cdot\frac{h^2}{\left(\sqrt{h^2+r^2}\right)^5} = k\cdot\left[\frac{r^2 - 2\cdot h^2}{\sqrt{\left(h^2+r^2\right)^5}}\right]$$

asi que igualándola a cero se obtiene la condición :

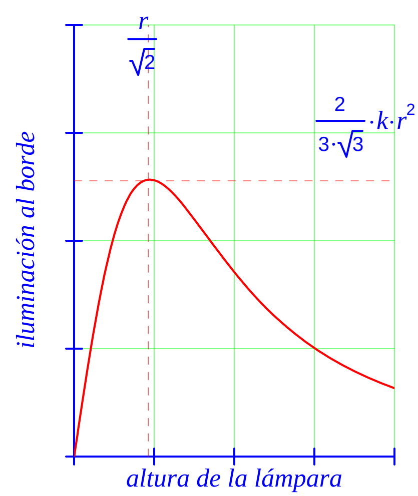
$$r^2 - 2\cdot h^2 = 0$$

que implica que : $h = \frac{r}{\sqrt{2}}$

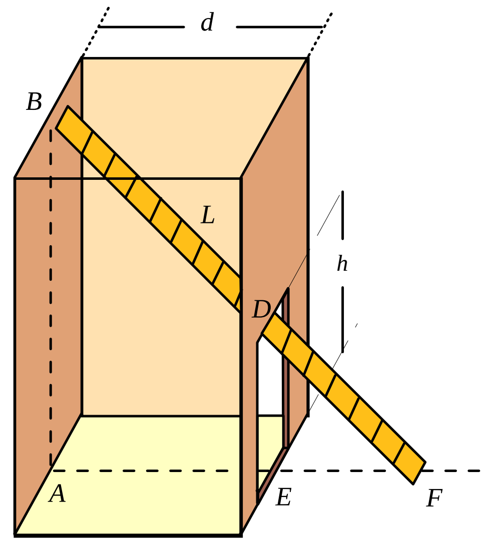
A ésta altura, la iluminación de la lámpara en el borde de la mesa será la máxima posible y vale:

$$L_{max} = k\cdot\left[\frac{\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 + r^2\right]^3}}\right]$$

$$= \boxed{\frac{2}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot k\cdot r^2}$$



Ejemplo 22. Determinar la altura mínima h que puede tener la puerta de una torre vertical para poder introducir en ella una escalera recta y rígida de longitud L, cuyo extremo inferior resbala sobre un suelo horizontal. El ancho de la torre es menor que la longitud de la escalera $(d < L)$.



Solución : De acuerdo con la figura de la derecha denotemos las longitudes:

$$y = \overline{AB} \;;\; x = \overline{AF} \;;\; h = \overline{DE}$$
$$d = \overline{AE} \;;\; L = \overline{BF}$$

Dado que la longitud L de la escalera es constante, al desplazarse el extremo de ésta sobre la pared vertical AB de la torre, la altura h aumenta hasta un valor máximo y luego disminuye.

Entonces . . .

$$L = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{es decir :} \quad y = \sqrt{L^2 - x^2} \qquad (*)$$

Además, de la semejanza entre los triángulos ABF y EDF se deduce que . . .

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{(x-d)} \qquad \text{es decir :} \quad h = y\cdot\left(\frac{x-d}{x}\right)$$

de modo que usando la ec. (*) , se obtiene la altura h como función de una sola variable:

$$h(x) = \sqrt{L^2 - x^2}\cdot\left(\frac{x-d}{x}\right)$$

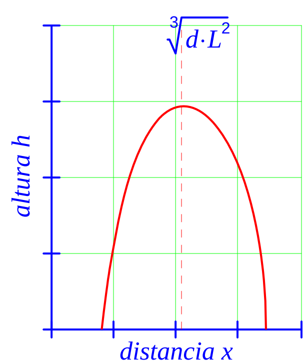
La derivada de ésta función es : $\dfrac{dh}{dx} = \boxed{\dfrac{d\cdot L^2 - x^3}{x^2\cdot\sqrt{L^2 - x^2}}}$

Igualando a cero esta derivada se obtiene el valor crítico:

$$x_c = \sqrt[3]{d\cdot L^2}$$

Para éste valor de x, la altura h alcanzará un valor máximo de . . .

$$h(x_c) = \boxed{\sqrt{\left(\sqrt[3]{L^2} - \sqrt[3]{d^2}\right)^3}}$$



Nótese que los límites físicos para x son d y L

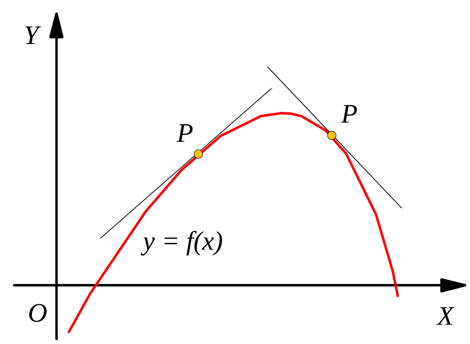
5.7 ***Concavidad* y *puntos de inflexión de una curva*** .

Se dice que la gráfica $y = f(x)$ de una función que es diferenciable en un intervalo $[\,a\,,\,b\,]$ es :

cóncava hacia abajo (*ó convexa*) . Si todos los puntos de la curva en ese intervalo quedan *por debajo de su tangente*

cóncava hacia arriba (*ó cóncava*) . Si todos los puntos de la curva en ese intervalo quedan *por encima de su tangente* .

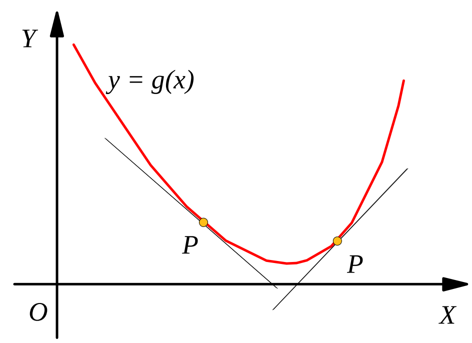
Por ejemplo en la siguientes curvas de la derecha, que representan dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, la curva $y = f(x)$ es *cóncava hacia abajo* porque en cualquier punto P en éste intervalo de la curva mostrada, *la pendiente* $\dfrac{df}{dx}$ *de la recta tangente , disminuye cuando tal punto se desplaza de izquierda a derecha.*



En otras palabras . . .

- *La derivada de una función cóncava hacia abajo es una función decreciente*

En cambio, la curva $y = g(x)$ es *cóncava hacia arriba* porque en cualquier punto P en éste intervalo de *la curva mostrada la pendiente* $\dfrac{dg}{dx}$ *de la recta tangente a la curva aumenta cuando tal punto se desplaza de izquierda a derecha,* es decir . . .



- *La derivada de una función cóncava hacia arriba es una función creciente*

Además, dado que *el signo de la derivada de una función evaluada en un punto dado, determina si tal función crece o decrece en ese punto*, se deduce que si una curva $y = f(x)$ es . . .

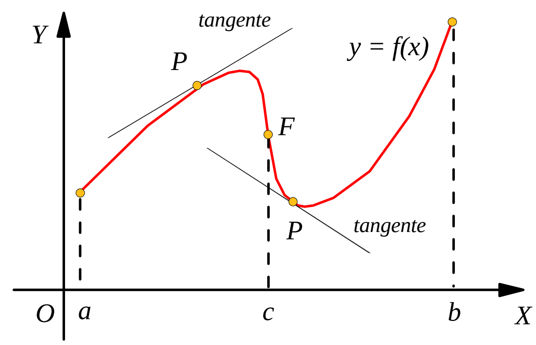
- *cóncava hacia arriba ,* $\dfrac{df}{dx}$ *es creciente y por lo tanto* $\dfrac{d}{dx}\cdot\left(\dfrac{df}{dx}\right)$ *es positivos, es decir :* $\dfrac{d^2\cdot f}{dx^2} > 0$
- *cóncava hacia abajo ,* $\dfrac{df}{dx}$ *es decreciente y por lo tanto* $\dfrac{d}{dx}\cdot\left(\dfrac{df}{dx}\right)$ *es negativa, es decir :* $\dfrac{d^2\cdot f}{dx^2} < 0$

En otras palabras, *el signo de la segunda derivada de una función, determina su concavidad :*

$$\textbf{Si} \quad \frac{d^2 \cdot f}{dx^2} > 0 \quad \textbf{entonces} \quad y = f(x) \quad \textbf{es un cóncava hacia arriba}$$

$$\textbf{Si} \quad \frac{d^2 \cdot f}{dx^2} < 0 \quad \textbf{entonces} \quad y = f(x) \quad \textbf{es un cóncava hacia abajo}$$

Por supuesto que una curva puede tener intervalos combinados de concavidad y convexidad. Por ejemplo , la curva representada en la figura de la derecha es convexa en el intervalo $[\,a\,,\,c\,]$ y cóncava en el intervalo $[\,c\,,\,b\,]$.
Cualquier recta tangente en el intervalo $[\,a\,,\,c\,]$ queda por encima de la curva en ese intervalo.
En el intervalo $[\,c\,,\,b\,]$ ocurre lo opuesto, la curva está por encima de cualquiera de sus tangentes .



El punto que separa dos arcos de concavidad opuesta de una curva continua $y = f(x)$ se llama punto de inflexión . En la figura anterior, el punto $F(c\,,\,f(c))$ es un punto de inflexión

En un punto de inflexión cambia el sentido de concavidad de una curva $y = f(x)$. Puesto que la concavidad se mide con la la segunda derivada $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ de la función, ésta cambia también de signo y por lo tanto *vale cero en un punto de inflexión* .

Para localizar los puntos de inflexión de una curva, basta entonces con resolver la ecuación . . .

$$\frac{d^2 \cdot f}{dx^2} = 0 \qquad (5.16)$$

Ejemplo 23. Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de la función $f(x) = e^{-a \cdot x^2}$

Solución : Calculemos la primera y la segunda derivada de ésta función . . .

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\left(e^{-a\cdot x^2}\right) = -2\cdot a\cdot x\cdot e^{-a\cdot x^2}$$

$$\frac{d^2 f}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\left(-2\cdot a\cdot x\cdot e^{-a\cdot x^2}\right) = -2\cdot a\cdot e^{-a\cdot x^2} + 4\cdot a^2\cdot x^2\cdot e^{-a\cdot x^2} = \frac{4\cdot a^2}{e^{a\cdot x^2}}\cdot\left(x^2 - \frac{1}{2\cdot a}\right)$$

Igualando a cero la segunda derivada se obtienen los valores críticos . . .

$$x_1 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot a}}\right) \qquad \text{y} \qquad x_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot a}}\right)$$

que dividen a la recta numérica en tres intervalos. Analicemos el signo de la segunda derivada en cada uno de ellos . . .

	$(-\infty, x_1)$	(x_1, x_2)	(x_2, ∞)
$(x - x_1)$	(−)	(+)	(+)
$(x - x_2)$	(−)	(−)	(+)
$\frac{d^2\cdot f}{dx^2} = \frac{4\cdot a^2}{e^{a\cdot x^2}}\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$	(−)(−) = **(+)**	(−)(+) = **(−)**	(+)(+) = **(+)**

Por los signos de la segunda derivada, se deduce que ésta curva es *cóncava hacia arriba* en los intervalos $(-\infty, x_1)$ y (x_2, ∞) mientras que es *cóncava hacia abajo* (ó *convexa*) en el intervalo (x_1, x_2)

Por lo tanto, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ *son puntos de inflexión, pues unen arcos de concavidad opuesta* .

Esta curva llamada a veces *"campana de Gauss"* , es utilizada con frecuencia en la teoría de la Probabilidad y la Estadística .

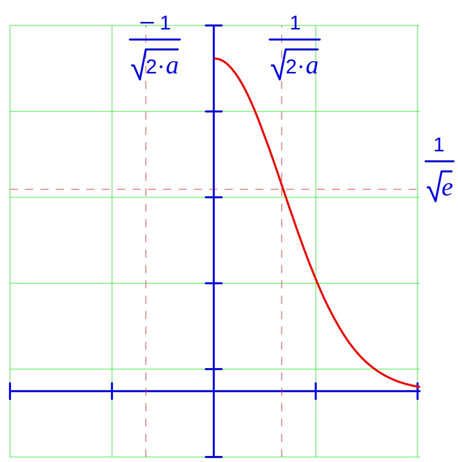
Dado que . .

$$f(x_1) = e^{-a\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{2\cdot a}}\right)^2} = e^{\frac{-1}{2}}$$

$$f(x_2) = e^{-a\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot a}}\right)^2} = e^{\frac{-1}{2}}$$

sus puntos de inflexión están en :

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{2\cdot a}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot a}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$



Ejemplo 24. Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de $f(x) = 3\cdot x^4 - 4\cdot x^3 + 1$

Solución : Calculando la primera y la segunda derivada de ésta función se obtiene. . .

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\left(3\cdot x^4 - 4\cdot x^3 + 1\right) = 12\cdot x^3 - 12\cdot x^2 = 12\cdot x^2\cdot(x-1)$$

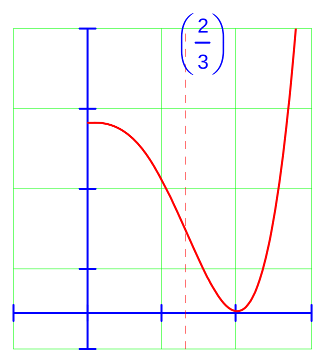
$$\frac{d^2\cdot f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cdot\left(12\cdot x^3 - 12\cdot x^2\right) = 36\cdot x^2 - 24\cdot x = 36\cdot x\cdot\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

por lo tanto, la segunda derivada será nula en $x = 0$ ó en $x = \frac{2}{3}$

El signo de la segunda derivada en los intervalos determinados por éstos puntos es . . .

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
$(x-0)$	(−)	(+)	(+)
$\left(x - \frac{2}{3}\right)$	(−)	(−)	(+)
$\frac{d^2\cdot f}{dx^2} = 36\cdot x\cdot\left(x - \frac{2}{3}\right)$	(−)(−) = **(+)**	(−)(+) = **(−)**	(+)(+) = **(+)**

De ésta manera . . .



- La primera derivada $\frac{df}{dx}$ es una función creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$ porque $\frac{d^2\cdot f}{dx^2} > 0$ en esos intervalos y por lo tanto, $f(x)$ es cóncava hacia arriba.

- La primera derivada $\frac{df}{dx}$ es una función decreciente en el intervalo $\left(0, \frac{2}{3}\right)$ porque $\frac{d^2\cdot f}{dx^2} < 0$ y por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia abajo.

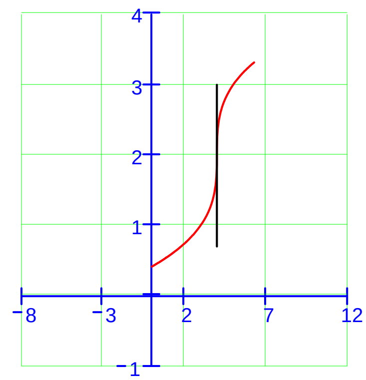
- Los puntos de inflexión son : $(0, f(0)) = (0, 1)$ y $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{11}{27}\right)$ .la curva es cóncava hacia abajo entre estos dos puntos .

Ejemplo 25. Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de : $f(x) = \sqrt[3]{x-4} + 2$

Solución : Las primeras derivadas de ésta función son. . .

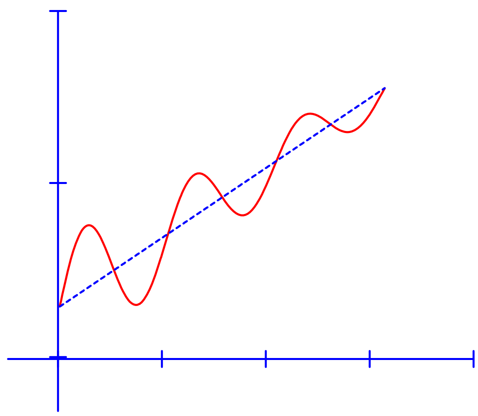
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-4)^2}} \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2\cdot f}{dx^2} = \frac{-2}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-4)^5}}$$

Notemos que la segunda derivada no está definida en $x = 4$. Además es positiva si $x < 4$, (*es decir, la curva es cóncava hacia arriba*) y es negativa si $x > 4$ (*es decir, la curva es cóncava hacia abajo*)
Entonces en $(4, f(4)) = (4,2)$ la curva tiene un punto de inflexión.
La primera derivada tampoco está definida en $x = 4$ lo cual significa que la recta tangente a la curva es vertical en el punto de inflexión .



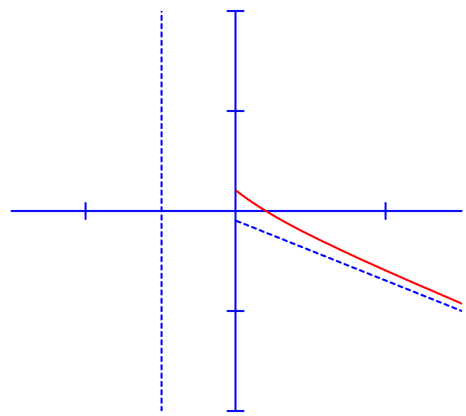
5.8 ***Asíntotas*** .

Una asíntota de la curva $y = f(x)$ *es una línea recta tal que la distancia entre un punto* P *sobre la curva y tal recta tiende a cero cuando una de las coordenadas* x *o* y *del punto* P *tiende al infinito.*
Asi por ejemplo en la siguientes curvas se ilustran sus asíntotas como rectas segmentadas . . .



Curva con una asíntota oblicua .

Cuando $x \to \infty$ *, la distancia entre la asíntota y la curva tiende a cero*



Curva con asíntota vertical y asíntota oblicua

Cuando $x \to \infty$ *,* $-\infty$*, la distancia entre la recta inclinada y la curva tiende a cero. Si* $y \to \infty$ *,* $-\infty$*, la distancia entre la recta vertical y la curva tiende a cero*

Se clasifican las asíntotas en:

- ***Asíntotas verticales*** .

Si existe un número finito a *tal que* $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ *, entonces la recta* $x = a$ *es una asíntota vertical de la curva* $y = f(x)$

- ***Asíntotas oblicuas*** .

Si existen los límites . . .

$$m = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) \quad y \quad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - m \cdot x \right) \qquad (5.17)$$

entonces la recta $y = m \cdot x + b$ *es una asíntota oblicua de la curva* $y = f(x)$

Determinar las asíntotas verticales es muy fácil, sólo hay que encontrar los valores de x tales que en el límite por la izquierda o por la derecha, la función $f(x)$ tienda al infinito positivo (ó al infinito negativo)
Usualmente las asíntotas verticales son las raíces de algún denominador que tenga la expresión de la función.

DEMOSTRACIÓN .

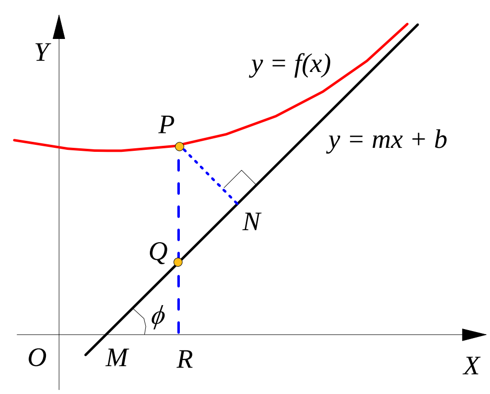
Supongamos que la línea recta $y = m \cdot x + b$ es una asíntota de la curva $y = f(x)$ y consideremos dos puntos : $P(x, y)$ sobre la curva y $Q(x, s)$ sobre tal recta , como se indica en la figura siguiente.

Tracemos una perpendicular PN desde el punto P sobre la curva hasta la recta.
Por la semejanza de los triángulos QMR y NPQ se sigue que . . .

$$\overline{NP} = \overline{PQ} \cdot cos(\phi) = (y - s) \cdot cos(\phi)$$

esto es . . .

$$\frac{\overline{NP}}{cos(\phi)} = [\, f(x) - (m \cdot x + b)] \qquad (*)$$



Pero si la recta es en realidad una asíntota de la curva, se debe cumplir que $\overline{NP} \to 0$ cuando $x \to \infty$ es decir :

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\overline{NP}}{\cos(\varphi)} \right) = \lim_{x \to \infty} \left| f(x) - (m \cdot x + b) \right|$$

$$0 = \left[\lim_{x \to \infty} \left(f(x) - m \cdot x \right) \right] - b$$

Las constantes m, $\cos(\phi)$ y b, son parámetros de la recta asíntota y no dependen de x, por lo tanto es inmediato que . . .

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m\cdot x)$$

Dividiendo ahora ambos miembros de la ecuación (*) entre x y considerando el límite cuando $x \to \infty$, se obtiene . . .

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{\overline{NP}}{\cos(\varphi)}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}\right)$$

$$0 = \left[\lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)\right] - m - 0$$

De ésta manera, la pendiente de la recta asíntota está dada por . . . $m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$

En particular, *cuando* $m = 0$ *la asíntota es horizontal* .

Si existen los límites (5.17), entonces determinan los parámetros para las asíntotas oblicuas de una curva .

Ejemplo 26. ¿ Tiene asíntotas la curva $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$?

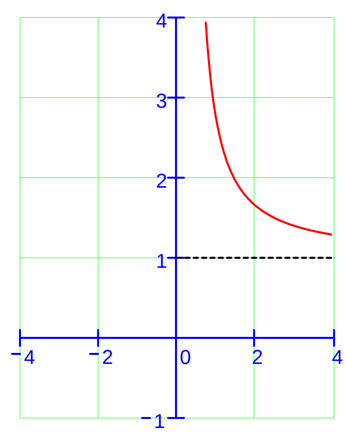
Solución : La curva tiene al menos la asíntota vertical $x = 0$ dado que si x tiende a cero . . .

$$\lim_{x\to 0^{+}} e^{\frac{1}{x}} = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^{-}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

y tiene también una asíntota horizontal porque . . .

$$m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - m\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 1$$



de modo que la recta $y = m\cdot x + b = 1$ es una asíntota horizontal .

Ejemplo 27. ¿ Tiene asíntotas la curva $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\cdot x - 1}{x}$?

Solución : La curva tiene la asíntota vertical $x = 0$ puesto que . . .

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 2\cdot x - 1}{x} = -\infty \quad ; \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + 2\cdot x - 1}{x} = \infty$$

Para las asíntotas oblicuas, calculemos los parámetros m y b . . .

$$m = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2 + 2\cdot x - 1}{x} \right) \right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - m\cdot x) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2\cdot x - 1}{x} - x \right)$$

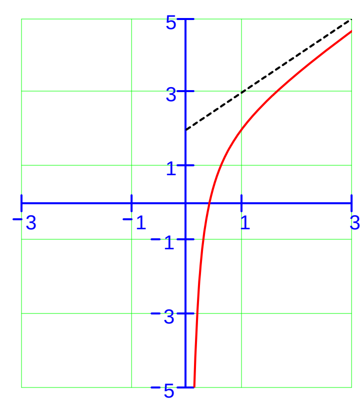
$$= \lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Por lo tanto, la recta $y = m\cdot x + b = x + 2$ es una asíntota oblicua para ésta curva.

Además, la diferencia entre las ordenadas de la curva y la asíntota para un valor de x es :

$$f(x) - (x + 2) = -\left(\frac{1}{x} \right)$$

que es negativa si $x > 0$, es decir la curva está por debajo de su asíntota; pero es positiva si $x < 0$, es decir la curva está por encima de su asíntota, como se puede apreciar en la figura de la derecha .



Ejemplo 28. Hallar las asíntotas de la curva : $f(x) = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

Solución : Esta función *no tiene asíntotas verticales* ya que para ningún valor real al que tienda x se obtiene que $f(x) \to \pm\infty$.
Por otra parte . . .

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)$$

$$= 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$$

que vale cero si $x \to -\infty$ ó bien vale 2 si $x \to +\infty$.

Por lo tanto, los correspondientes valores del parámetro b son :

$$b_1 = \lim_{x\to\infty}(f(x) - 2\cdot x) = \lim_{x\to\infty}\left(x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} - 2\cdot x\right) = -2$$

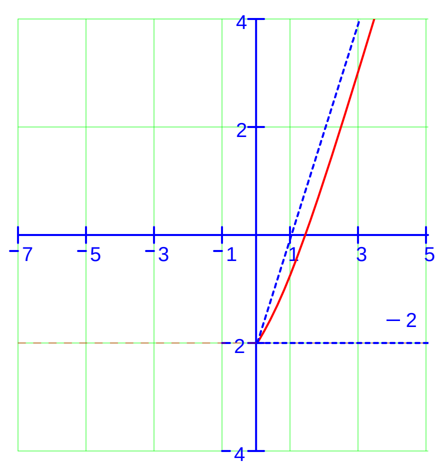
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}\right) = -2$$

Ésta curva tiene entonces las asíntotas :

$y = 2\cdot x - 2$ si $x \to +\infty$

y también :

$y = 0\cdot x - 2 = -2$ si $x \to -\infty$



Ejemplo 29. Hallar las asíntotas de la curva : $f(x) = \sqrt[3]{\left(2\cdot a\cdot x^2 - x^3\right)}$

Solución : Ésta función no tiene asíntotas verticales puesto que está definida para todo valor real de x . Veamos si existe alguna asíntota oblicua calculando los parámetros m y b

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{2\cdot\left(\frac{a}{x}\right) - 1} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - m\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{\left(2\cdot a\cdot x^2 - x^3\right)} + x\right]$$

Para calcular éste límite, se puede utilizar la identidad algebraica :

$$u^3 + v^3 = (u+v)\cdot\left(u^2 - u\cdot v + v^2\right) \quad \text{es decir :} \quad (u+v) = \frac{u^3+v^3}{u^2 - u\cdot v + v^2}$$

haciendo $u = \sqrt[3]{\left(2\cdot a\cdot x^2 - x^3\right)}$; $v = x$ y queda . . .

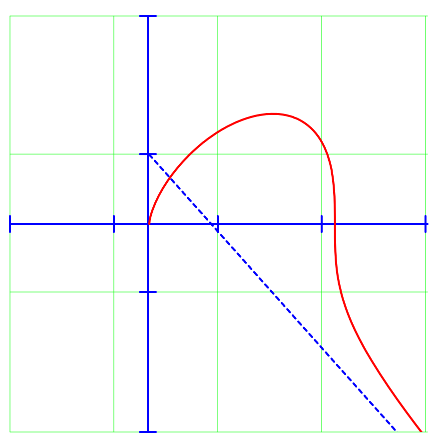
$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{2\cdot a\cdot x^2 - x^3}\right)^3 + x^3}{\left(\sqrt[3]{2\cdot a\cdot x^2 - x^3}\right)^2 - x\cdot\left(\sqrt[3]{2\cdot a\cdot x^2 - x^3}\right) + x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot a}{\left(\frac{\sqrt[3]{2\cdot a\cdot x^2 - x^3}}{x}\right)^2 - \frac{x}{x}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{2\cdot a\cdot x^2 - x^3}}{x}\right) + \frac{x^2}{x^2}} = \frac{2}{3}\cdot a$$

y en efecto, la recta:

$$y = -x + \frac{2}{3}\cdot a$$

es una asíntota oblicua de ésta curva, tal como se puede apreciar en la figura de la derecha .



EJERCICIO 5.2

Calcular los valores máximos y mínimos (*si existen*) para las siguientes funciones y graficarlas .

1. $f(x) = 10 + 12\cdot x - 3\cdot x^2 - 2\cdot x^3$

2. $f(x) = 3\cdot x^4 - 4\cdot x^3 - 12\cdot x^2$

3. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3\cdot x + 2}{x^2 + 3\cdot x + 2}$

4. $f(x) = x\cdot(a+x)^2\cdot(a-x)^3$

5. $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

6. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

7. $f(x) = cos(x) + sen(x)$ en $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

8. $f(x) = 2\cdot e^{x} + e^{-x}$

9. $f(x) = x\cdot(ln(x))^2$

10. $f(x) = arcsen(sen(x))$

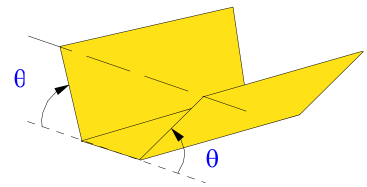
11. Hallar el rectángulo de máxima superficie que puede inscribirse en un círculo de radio R. Determinar también el rectángulo de perímetro máximo .

12. Hallar la altura del cilindro recto de volumen máximo, que pueda ser inscrito en una esfera de radio R.

13. Hallar el cono de mínimo volumen que puede circunscribirse en una esfera de radio r .

14. Hallar las dimensiones del cono circular recto de máxima capacidad que puede inscribirse en una esfera de radio R.

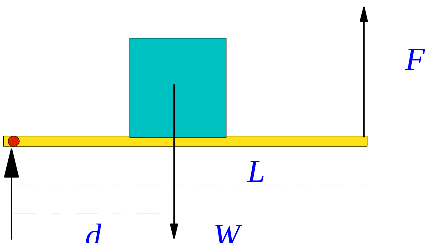
15. Se desea construir un canal abierto de capacidad máxima . La base y los lados del canal han de ser de 10 cm de ancho ; además los costados han de estar igualmente inclinados respecto a la base . ¿Cual debe ser la anchura del canal por arriba ?



16. Encontrar las dimensiones de una tienda cónica de volumen dado para que requiera de una cantidad mínima de tela al construirla.

17. Se desea fabricar un bote cilíndrico cerrado de volumen V_o constante . ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que sea mínima la cantidad de material utilizado?

18. Una carga W se eleva mediante una palanca, aplicando una fuerza F en un extremo y estando el punto de apoyo en el otro extremo de la palanca . Cada centímetro lineal de la palanca pesa p gramos y la carga se encuentra a la distancia d del apoyo . ¿Cual debe ser la longitud L de palanca para elevar la carga con una fuerza mínima ?



19. Dos focos luminosos iguales de intensidad I están separados una distancia d.

Se desea colocarlos en postes verticales de altura h de modo que se obtenga la iluminación óptima sobre el piso en el punto medio entre ellos. Determinar la altura de los postes.
(La iluminación en un punto dado es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco luminoso y directamente proporcional al coseno del ángulo de los rayos incidentes en tal punto)

20. Hay que rodear una superficie rectangular en tres de sus lados con una tela metálica de longitud L.
La superficie colinda con una pared de piedra en el cuarto lado, a la cual ya no es necesario bardear.
¿Qué longitudes de los lados del rectángulo darán la superficie de mayor área posible?

Hallar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de las siguientes funciones :

21. $f(x) = x^3 - 6\cdot x^2 + 12\cdot x + 4$

22. $f(x) = \sqrt[3]{\left(4\cdot x^3 - 12\cdot x\right)}$

23. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 12}$

24. $f(x) = x^2\cdot ln(x)$

25. $f(x) = \left(1 + x^2\right)\cdot e^x$

26. $f(x) = x\cdot e^{-x}$

Hallar las asíntotas de las siguientes curvas :

27. $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

28. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4\cdot x + 3}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

30. $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

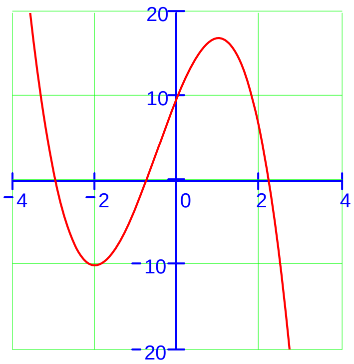
31. $\begin{pmatrix} x(t) = t \\ y(t) = t + 2\cdot arctan(t) \end{pmatrix}$

32. $f(x) = ln(1 + x)$

<u>*Respuestas*</u>: *Ejercicio* 5.2 *(problemas impares)*

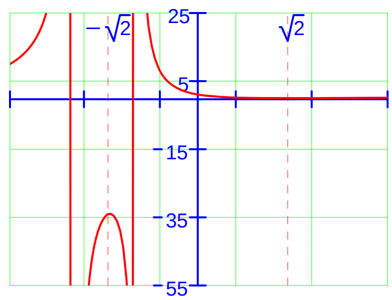
1. • *máximo relativo :* $f(1) = 17$

• *mínimo relativo :* $f(-2) = -10$

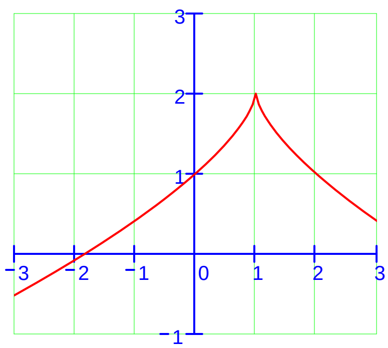


3 . • *mínimo relativo :* $y(\sqrt{2}) = \left(\dfrac{4 - 3\cdot\sqrt{2}}{4 + 3\cdot\sqrt{2}}\right)$

• *máximo relativo :* $y(-\sqrt{2}) = \left(\dfrac{4 + 3\cdot\sqrt{2}}{4 - 3\cdot\sqrt{2}}\right)$

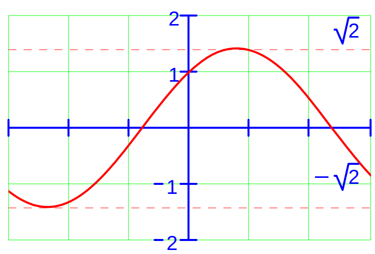


5 . • *máximo relativo :* $f(1) = 2$



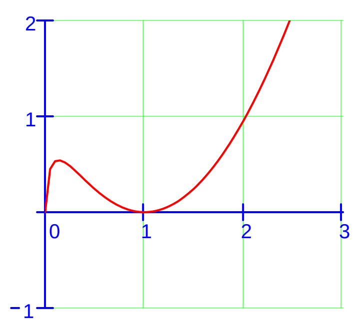
7 . • *máximo relativo :* $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

• *mínimo relativo* $f\left(-3\cdot\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$



9 . • *máximo relativo :* $f\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$

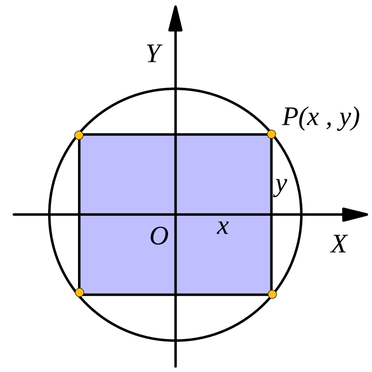
• *mínimo relativo :* $f(1) = 0$



11. La ecuación de una circunferencia de radio R con centro en el origen de coordenadas es $x^2 + y^2 = R^2$
Las coordenadas del punto P de incidencia entre el rectángulo y la circunferencia , determinan las dimensiones del rectángulo inscrito que, de acuerdo a la siguiente figura . . .

son $2 \cdot x$ y $2 \cdot y$, así que el área del rectángulo es . . .

$$A = (2 \cdot x) \cdot (2 \cdot y) = 4 \cdot x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$$



asi que :

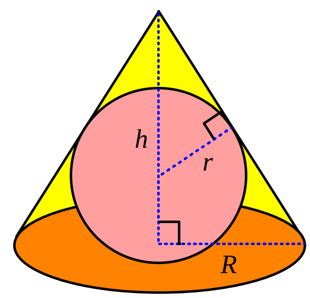
$$\frac{dA}{dx} = 4 \cdot \sqrt{R^2 - x^2} - 4 \cdot \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4 \cdot \left(\frac{2 \cdot x^2 - R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right)$$

y $\frac{dA}{dx} = 0$ implica que $2 \cdot x^2 - R^2 = 0$, es decir : $x = \boxed{\frac{R}{\sqrt{2}}}$

Entonces la ordenada es: $y = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right)^2} = \boxed{\frac{R}{\sqrt{2}}}$

Se trata en realidad de un cuadrado de lado $2 \cdot \left(\frac{R}{\sqrt{2}} \right) = R \cdot \sqrt{2}$ cuya área es $A_{max} = \left(R \cdot \sqrt{2} \right)^2 = \boxed{2 \cdot R^2}$

13. El volumen de un cono de radio R y altura h es: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$



Para que ésta relación dependa de una sola variable, notemos que de la semejanza de los triángulos rectos dibujados en la figura de la derecha, se deduce que la razón de su hipotenusa a su lado menor es la misma, es decir :

$$\frac{\sqrt{h^2 + R^2}}{R} = \frac{(h - r)}{r}$$

de donde se obtiene : $R^2 = h \cdot \frac{r^2}{(h - 2 \cdot r)}$ - El volumen del cono queda expresado como una función de su altura h . . .

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h \cdot r^2}{h - 2 \cdot r} \right) \cdot h$$

La derivada de ésta función igualada a cero, proporciona los valores críticos de h para hallar los valores extremos del volumen del cono.

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{h \cdot r^2 \cdot (h - 4 \cdot r)}{(h - 2 \cdot r)^2} = 0$$ implica que $h = \boxed{4 \cdot r}$

por lo tanto $R^2 = h\cdot\frac{r^2}{(h-2\cdot r)} = (4\cdot r)\cdot\frac{r^2}{[(4\cdot r)-2\cdot r]} = \boxed{2\cdot r^2}$ y el volumen máximo del cono

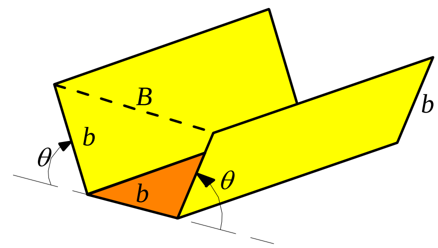
circunscrito a la esfera de radio r es entonces . . .

$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(2\cdot r^2\right)\cdot(4\cdot r) = \boxed{\frac{8}{3}\cdot\pi\cdot r^3}$$

Dado que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$, el volumen de éste cono es el doble.

15. La capacidad máxima del canal se logra cuando su sección transversal sea de área máxima y ésta es el área de un trapecio que se calcula por. . .

$$A = \left(\frac{B+b}{2}\right)\cdot h$$



donde B es la base mayor, b es la base menor y h es la altura:

$$B = b + 2\cdot(b\cdot cos(\theta)) \quad ; \quad h = b\cdot sen(\theta)$$

por lo tanto el área queda expresada como una función del ángulo θ . . .

$$A(\theta) = \left[\frac{(b+2\cdot b\cdot cos(\theta))+b}{2}\right]\cdot b\cdot sin(\theta) = b^2\cdot sen(\theta)\cdot(1+cos(\theta))$$

La derivada de ésta función igualada a cero proporciona los valores críticos de θ para calcular los valores extremos del área transversal del canal

$$\frac{dA}{d\theta} = b^2\cdot\left(cos(\theta) + cos(\theta)^2 - sin(\theta)^2\right) = b^2\cdot\left(2\cdot cos(\theta)^2 + cos(\theta) - 1\right)$$

$$= 2\cdot b^2\cdot\left(cos(\theta) - \frac{1}{2}\right)\cdot(cos(\theta)+1)$$

$\frac{dA}{d\theta} = 0$ implica que :

$$cos(\theta) = \frac{1}{2} \text{ y por lo tanto } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$cos(\theta) = -1 \text{ y por lo tanto } \theta = \pi \;.$$

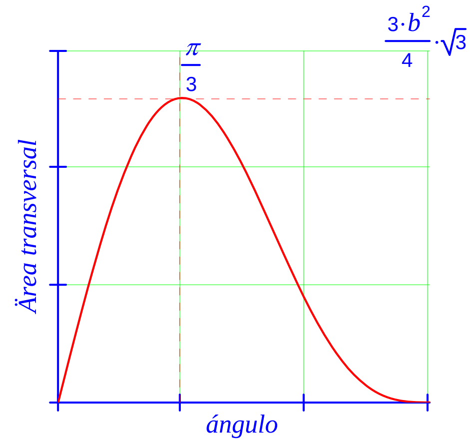
Es evidente que sólo para $\theta = \frac{\pi}{3}$ se obtendrá una capacidad máxima.

La distancia B es entonces:

$$B = b + 2\cdot(b\cdot\cos(\theta)) = b + 2\cdot\left[b\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2\cdot b$$

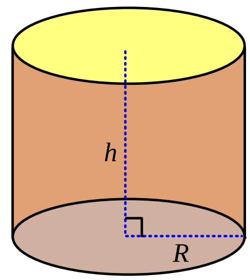
y el área transversal máxima . . .

$$A_{max} = \left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{4}\right)\cdot b^2$$



17. El volumen de un cilindro circular recto de radio R y de altura h está dado por:

$$V = \pi\cdot R^2\cdot h \qquad (1)$$



y el área de su superficie, la cual se desea minimizar se expresa como .

$$S = (2\cdot\pi\cdot R\cdot h) + 2\cdot(\pi\cdot R^2) = 2\cdot\pi\cdot R\cdot(R+h) \quad (2)$$

Para convertir ésta relación en una función de una sola variable, se puede substituir h de la ec. (1) en la ec. (2) . . .

$$S(R) = 2\cdot\pi\cdot R\cdot\left(R + \frac{V}{\pi\cdot R^2}\right)$$

La derivada de ésta función igualada a cero proporciona los valores críticos de R para calcular los posibles valores extremos del área superficial del cilindro . . .

$$\frac{dS}{dR} = 2\cdot\pi\cdot\left[R + \frac{V}{(\pi\cdot R^2)}\right] + 2\cdot\pi\cdot R\cdot\left[1 - 2\cdot\frac{V}{(\pi\cdot R^3)}\right] = \frac{2}{R^2}\cdot(2\cdot\pi\cdot R^3 - V)$$

Entonces $\frac{dS}{dR} = 0$ implica que $2\cdot\pi\cdot R^3 - V = 0$ y por lo tanto $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}$.

Es evidente que con éste valor para R se obtendrá una superficie del cilindro mínima pues con $R = 0$ o $R = \infty$ la superficie tiende a infinito.

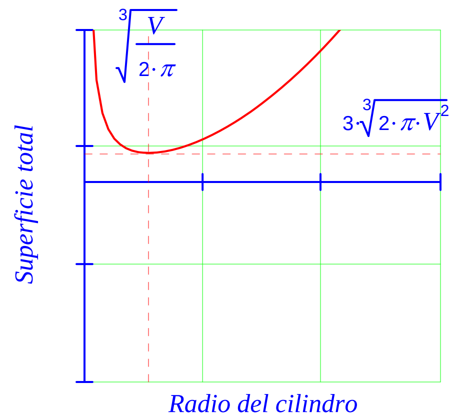
De la ec. (1) la altura h es entonces . . .

$$h = \frac{V}{\pi\cdot R^2} = \frac{V}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\cdot\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4\cdot V}{\pi}} = 2\cdot R$$

Esto es, un cilindro recto que tenga un volumen dado constante tendrá una superficie total mínima

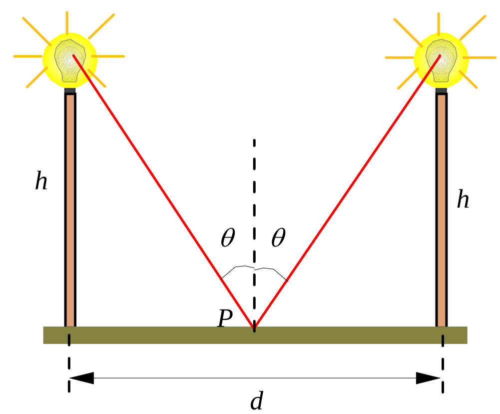
$$S_{mínima} = \boxed{3\cdot\sqrt[3]{2\cdot\pi\cdot V^2}}$$

cuando su altura sea el doble de su radio



19. La intensidad de luz es la suma de las intensidades de los dos focos en cualquier punto. En particular, en el punto sobre el suelo en medio de los postes, tal intensidad vale . . .

$$I_P = I\cdot\frac{\cos(\theta)}{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2\right]} + I\cdot\frac{\cos(\theta)}{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2\right]}$$

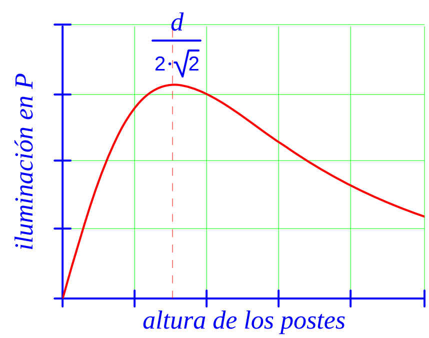


pero. . .

$$\cos(\theta) = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2}}$$

Así que la iluminación en el punto medio P entre los focos es una función de h :

$$I_P(h) = I\cdot\frac{2\cdot h}{\sqrt{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2\right]^3}}$$



La derivada de ésta función igualada a cero proporciona los valores críticos de h para calcular los posibles valores extremos de la iluminación en el punto P . . .

$$\frac{dI}{dh} = \frac{2\cdot I}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\cdot d^2 + h^2\right)^3}} - \frac{6\cdot I\cdot h^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\cdot d^2 + h^2\right)^5}} = 16\cdot I\cdot\frac{\left(d^2 - 8\cdot h^2\right)}{\sqrt{\left(d^2 + 4\cdot h^2\right)^5}}$$

Entonces $\frac{dI}{dh} = 0$ implica que $\left(d^2 + 8\cdot h^2\right) = 0$ y por lo tanto $h = \boxed{\frac{d}{2\cdot\sqrt{2}}}$.

La iluminación tiene el valor máximo . . . $I_{max} = \boxed{\dfrac{16}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\dfrac{I}{d^2}}$ para éste valor de la altura de los focos .

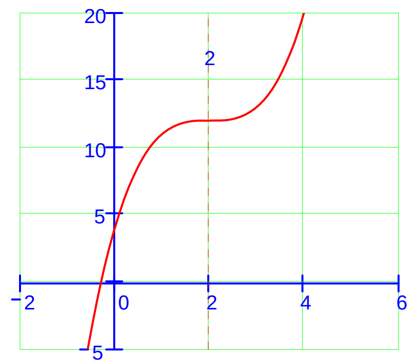
Los puntos de inflexión de una función $f(x)$ *se determinan resolviendo la ec.* $f''(x) = 0$ *y sus intervalos de concavidad se encuentran determinando el signo que tiene la segunda derivada entre dos puntos de inflexión consecutivos.*

21. Si $f(x) = x^3 - 6\cdot x^2 + 12\cdot x + 4$ entonces :

$$f''(x) = 6\cdot x - 12 = 0$$

implica que $x = 2$, de modo que $(2, f(2)) = (2, 12)$ es un punto de inflexión para ésta curva.
Además, es evidente que $f''(x) < 0$ si $x < 2$, lo cual significa que la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $-\infty < x < 2$

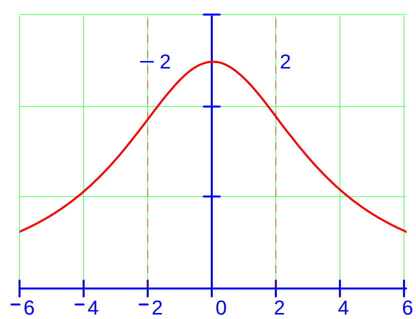
Pero $f''(x) > 0$ si $x > 2$, lo cual significa que la función es cóncava hacia arriba en el intervalo $2 < x < \infty$



23. Si $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 12}$ entonces . . .

$$f''(x) = 18\cdot\frac{\left(x^2 - 4\right)}{\left(x^2 + 12\right)^3} = 0$$

implica que $x = 2$ o $x = -2$, así que $\left(2, \dfrac{3}{16}\right)$ y $\left(-2, \dfrac{3}{16}\right)$ son los puntos de inflexión.



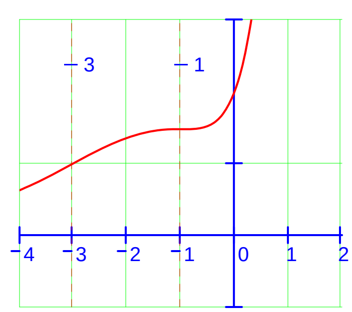
Además, como $f''(x) = 18\cdot\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{\left(x^2 + 12\right)^3}$ de modo que los factores $(x-2)$ y $(x+2)$ determinan si la curva es cóncava hacia abajo o si es cóncava hacia arriba.

25. Si $f(x) = \left(1 + x^2\right)\cdot e^x$ entonces . . .

$$f''(x) = e^x\cdot\left(3 + 4\cdot x + x^2\right) = e^x\cdot(x+1)\cdot(x+3)$$

de modo que $f''(x) = 0$ implica que $x = -1$ ó $x = -3$, así que $\left(-1, \dfrac{2}{e}\right)$ y $\left(-3, \dfrac{10}{e^3}\right)$ son los puntos de inflexión.

Esta curva es cóncava hacia abajo en $(-3, -1)$ y cóncava hacia arriba en cualquier otra parte.

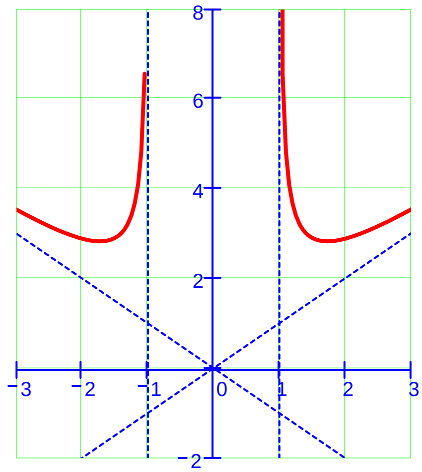


29 Si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ entonces . . .

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = 1$$

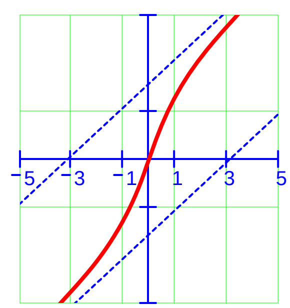
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - m\cdot x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} - x\right) = 0$$



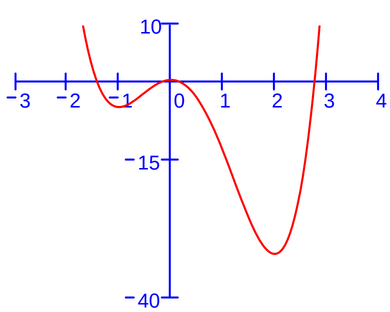
Además $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}} = \infty$, asi que ésta curva tiene las *asíntotas verticales* : $x = -1$, $x = 1$ y las *asíntotas oblicuas* : $y = x$, $y = -x$

31. *Asíntotas oblicuas* : $y = x + \pi$, $y = x - \pi$

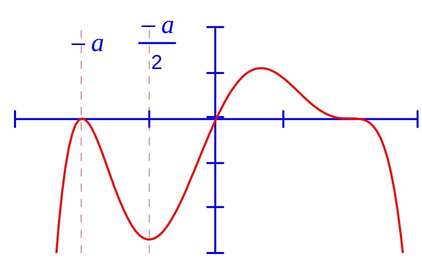


Respuestas .*Ejercicio* 5.2 *(Problemas pares)*

2.
- *mínimo relativo* : $f(-1) = -5$
- *máximo relativo* : $f(0) = 0$
- *mínimo relativo* : $f(2) = -32$

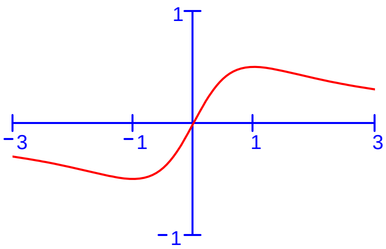


4.
- *máximo relativo* : $f(-a) = 0$
- *mínimo relativo* : $f\left(-\frac{1}{2}\cdot a\right) = \frac{-27}{64}\cdot a^6$
- *máximo relativo* : $f\left(\frac{1}{3}\cdot a\right) = \frac{128}{729}\cdot a^6$

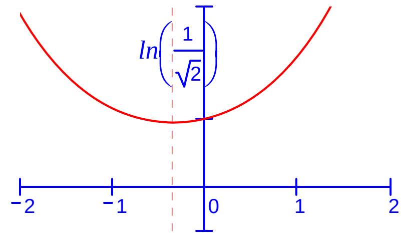


6. • *máximo relativo* : $f(1) = \dfrac{1}{2}$

• *mínimo relativo* : $f(-1) = \dfrac{-1}{2}$

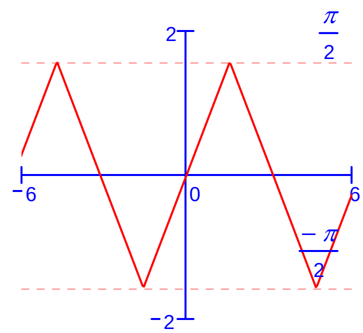


8. • *mínimo relativo* : $f\left(\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = 2\cdot\sqrt{2}$

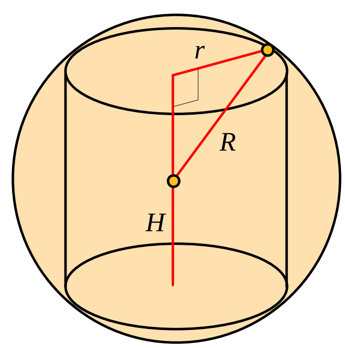


10. • *máximos relativos* : $f\left[\dfrac{\pi}{2}\cdot(4\cdot n+1)\right] = \dfrac{\pi}{2}$

• *mínimos relativos* : $f\left[\dfrac{\pi}{2}\cdot(4\cdot n+3)\right] = -\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$



12. El volumen de un cilindro circular recto de altura H y radio r está dado por : $V = \pi\cdot r^2\cdot H$ y de la figura de la derecha, si la esfera donde se inscribe el cilindro tiene un radio R , claramente, por el teorema de Pitágoras se sigue que . . .



$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2$$

por lo tanto el volumen del cilindro se puede expresar como una función de una sola variable . . .

$$V(H) = \pi\cdot\left[R^2 - \left(\frac{H}{2}\right)^2\right]\cdot H \;=\; \pi\cdot\left(R^2\cdot H - \frac{1}{4}\cdot H^3\right)$$

La derivada de ésta función igualada a cero : $\dfrac{dV}{dH} = \pi\cdot\left(R^2 - \dfrac{3}{4}\cdot H^2\right) \;=\; 0$ proporciona los valores críticos de H para calcular los posibles valores extremos del volumen del cilindro inscrito.

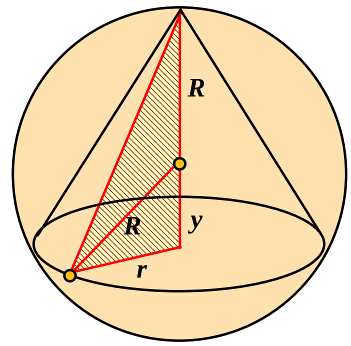
$$\left(R^2 - \frac{3}{4}\cdot H^2\right) = 0 \quad \text{es decir} \quad H = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot R \;.$$

Obviamente, para éste valor de la altura se obtiene un máximo del volumen del cilindro, que está dado por . . .

$$V_{max} = \pi\cdot\left[R^2\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot R\right) - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot R\right)^3\right] = \frac{4}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\pi\cdot R^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3\right)$$

es decir es la $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$ parte del volumen de la esfera

14. El volumen de un cono recto circular de radio r y altura h se calcula por : $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$. Pero por la ecuación para la circunferencia de radio R que es el contorno de la esfera dibujada en la figura de la derecha, se deduce fácilmente que. . .



$$r^2 + y^2 = R^2$$

y el volumen del cono inscrito en la esfera se puede expresara como una función de una sola variable. . .

$$V(y) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(R^2 - y^2\right)\cdot(R + y)$$

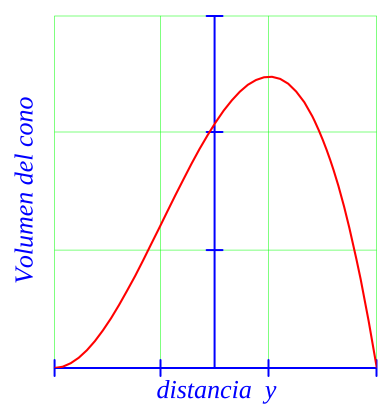
$$V(y) = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(R^2\cdot y + R^3 - y^3 - y^2\cdot R\right)$$

La derivada de ésta función igualada a cero proporciona los valores críticos de y para los posibles valores extremos del volumen del cono inscrito . . .

$$\frac{dV}{dy} = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(R^2 - 3\cdot y^2 - 2\cdot y\cdot R\right) = 0 \quad \text{implica que} \quad R^2 - 3\cdot y^2 - 2\cdot y\cdot R = 0$$

es decir $y = \frac{1}{3}\cdot R$ ó $y = -R$

Es claro que sólo con el valor $\frac{1}{3}\cdot R$ se obtiene un máximo en el volumen del cono, el cual vale . . .

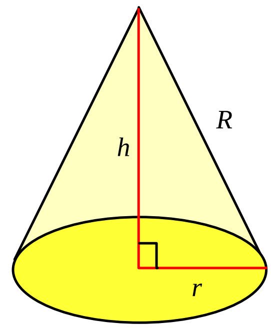


$$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left[R^2\cdot\left(\frac{R}{3}\right) + R^3 - \left(\frac{R}{3}\right)^3 - \left(\frac{R}{3}\right)^2\cdot R\right] = \frac{32}{81}\cdot\pi\cdot R^3$$

$$= \frac{8}{27}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3\right)$$

que es la $\frac{8}{27} = 0.296$ parte del volumen de la esfera .

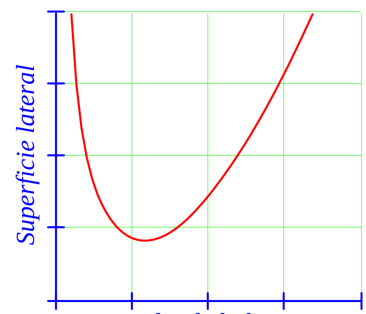
y las dimensiones de tal cono son entonces : $h = (R+y) = \frac{4}{3}\cdot R$; $r = \sqrt{R^2 - y^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\cdot R$



16. Se desea minimizar la superficie lateral S de un cono recto circular de radio r y altura h, la cual se calcula de : $S = \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2+h^2}$.

Dado que el volumen $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$ del cono ha de permanecer constante , se sigue que . . . $h = \frac{3\cdot V}{\pi\cdot r^2}$ y entonces es posible expresar su área lateral en función de una sola variable :

$$S(r) = \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2 + \left(\frac{3\cdot V}{\pi\cdot r^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^6\cdot\pi^2 + 9\cdot V^2}}{r}$$



cuya gráfica, como puede observarse, tiene un mínimo que puede localizarse igualando a cero la derivada de ésta función . . .

$$\frac{dS}{dr} = \frac{2\cdot r^6\cdot\pi^2 - 9\cdot V^2}{r^2\cdot\sqrt{r^6\cdot\pi^2 + 9\cdot V^2}} = 0$$

lo cual que implica que : $2\cdot r^6\cdot\pi^2 - 9\cdot V^2 = 0$, es decir . . . $r = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{V}{\pi}}}$

Por lo tanto :

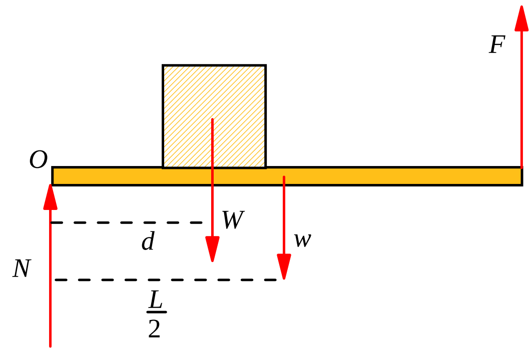
$$h = \frac{3\cdot V}{\pi\cdot r^2} = \frac{3\cdot V}{\left(\pi\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{V}{\pi}}}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{27\cdot V^3}{\pi^3\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{V^2}{\pi}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{6\cdot V}{\pi}}$$

Con éstas dimensiones para r y h, se obtiene una superficie lateral mínima que vale . . .

$$S_{min} = \pi\cdot r\cdot\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$= \pi\cdot\left(\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{V}{\pi}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{V}{\pi}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{6\cdot V}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{4\cdot\pi\cdot V^2}$$

18. El peso de la palanca es $w = p \cdot L$, donde p es el peso por unidad de longitud .
Si la palanca es homogénea se puede considerar que su peso actúa en el centro geométrico, a una distancia $\frac{L}{2}$ del punto de apoyo O .
Para lograr el equilibrio, la suma total de los momentos de las fuerzas debe ser cero. *(El momento de una fuerza es el producto de la fuerza por su distancia perpendicular al centro de giro)* .

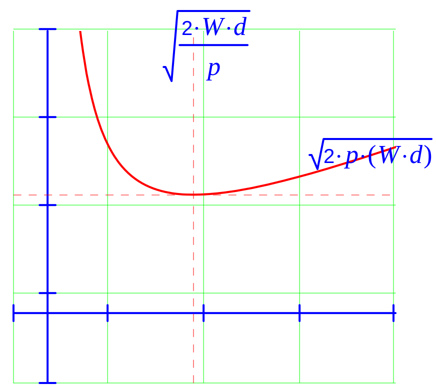


esto es . . .

$$F \cdot L - w \cdot \left(\frac{L}{2}\right) - W \cdot d = 0$$

De aquí se obtiene que la fuerza aplicada F es una función de la longitud L de la palanca . . .

$$F(L) = p \cdot \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{W \cdot d}{L}$$



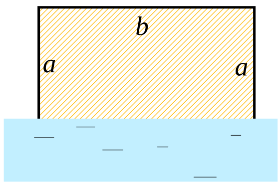
cuya gráfica, ilustrada a la derecha, muestra un mínimo relativo, el cual se puede calcular de la solución de la ecuación . . . $\frac{dF}{dL} = 0$ es decir . . .

$$\frac{1}{2} \cdot p - \frac{1}{L^2} \cdot W \cdot d = 0$$

de donde resulta que $L = \sqrt{\frac{2 \cdot W \cdot d}{p}}$.

Para ésta longitud de la palanca, la fuerza aplicada F será mínima y vale $F\left(\sqrt{\frac{2 \cdot W \cdot d}{p}}\right) = \sqrt{2 \cdot p \cdot W \cdot d}$

20. Se desea maximizar el área : $A = a \cdot b$ de un rectángulo de lados a y b .
El perímetro a rodear con la tela : $L = 2 \cdot a + b$ se puede usar para expresar el área del rectángulo como una función de una sola variable . . .



$$A(a) = a \cdot (L - 2 \cdot a)$$

Que tiene un máximo relativo, calculado al resolver la ecuación:

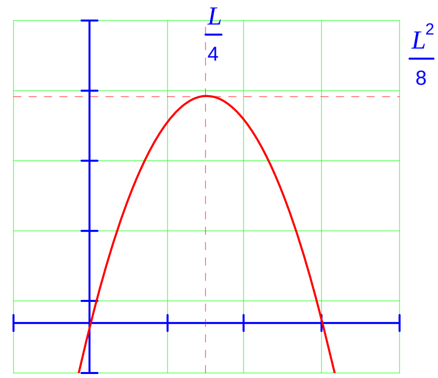
$$\frac{dA}{da} = 0 \qquad \text{es decir} \qquad L - 4 \cdot a = 0$$

de donde resulta que $a = \dfrac{L}{4}$ y entonces :

$$b = L - 2\cdot a \;=\; \frac{L}{2}$$

Por lo cual el área máxima se obtiene con éstas dimensiones y vale :

$$A_{max} = \left(\frac{L}{4}\right)\cdot\left(\frac{L}{2}\right) \;=\; \frac{L^2}{8}$$



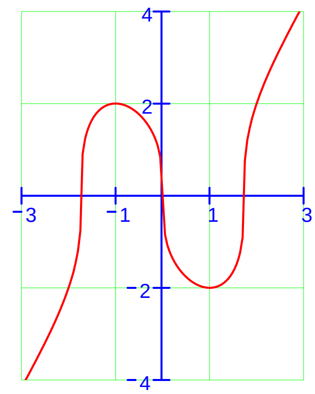
(el doble del área que se podría formar haciendo un cuadrado perfecto con la longitud L *de la tela)*

22. $$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt[3]{4\cdot x^3 - 12\cdot x}\right) = -\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt[3]{\left[\frac{2}{x\cdot\left(x^2-3\right)}\right]^5}$$

Puntos de inflexión en : $x = 0$, $x = -(\sqrt{3})$; $x = \sqrt{3}$

$f(x)$ *cóncava hacia abajo* en : $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, \infty)$

$f(x)$ *cóncava hacia arriba* en : $(\infty, -\sqrt{3})$ y $(0, \sqrt{3})$

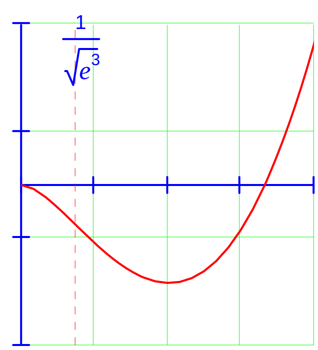


24. $$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\cdot ln(x)\right) = -(2\cdot ln(x) + 3)$$

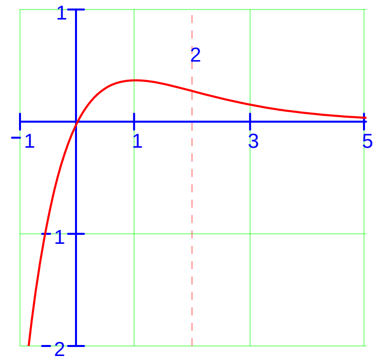
Punto de inflexión en : $x = \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$

$f(x)$ *cóncava hacia abajo en :* $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$

$f(x)$ *cóncava hacia arriba en :* $\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^3}}, \infty\right)$



26. $$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 \cdot ln(x)\right) = e^{-x} \cdot (x-2)$$



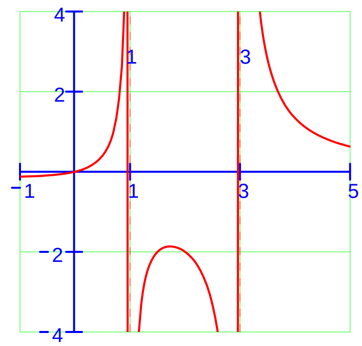
Punto de inflexión en : $x = 2$

$f(x)$ *cóncava hacia abajo en :* $(-\infty, 2)$

$f(x)$ *cóncava hacia arriba en :* $(2, \infty)$

28. *Asíntotas verticales :* $x = 1$, $x = 3$.

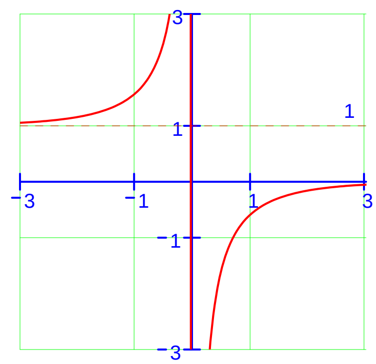
Asíntota horizontal : $y = 0$



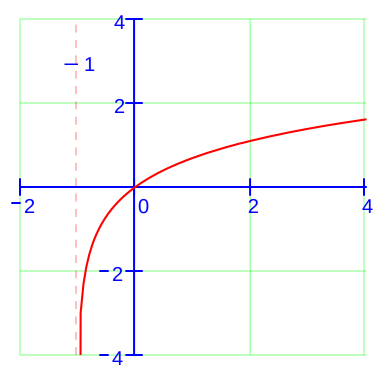
30. *Asíntota vertical :* $x = 0$

Asíntota horizontal derecha : $y = 0$.

Asíntota horizontal izquierda: $y = 1$.



32. *Asíntota vertical :* $x = -1$.



Capítulo VI
Teorema del Valor Medio y sus aplicaciones

6.1 ***Teorema de Rolle*** .

Este es uno de los teoremas fundamentales del cálculo diferencial. Establece que . . .

Si $f(x)$ ***es una función:***

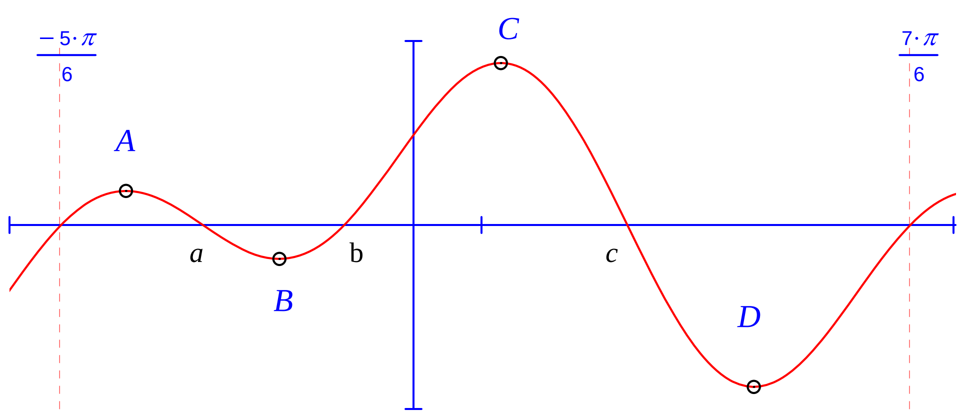
- ***continua en el intervalo*** $[\,a, b\,]$
- ***derivable en todo punto del intervalo abierto*** (a, b)
- ***que se anula en los extremos del intervalo, es decir*** $f(a) = 0$ ***y*** $f(b) = 0$

entonces existe en (a, b) ***al menos un valor*** x_0 ***para la variable*** x ***tal que*** $f'(x_0) = 0$

Geométricamente, el teorema de Rolle significa que:

" Toda función que satisface las condiciones del teorema, tiene por lo menos una tangente horizontal "

Consideremos por ejemplo, la gráfica de una función continua y derivable como la siguiente. . .



que se anula en los extremos del intervalo $\left(\frac{-5\cdot\pi}{6}, \frac{7\cdot\pi}{6}\right)$ y también corta al eje X en los puntos $a = \frac{-\pi}{2}$, $b = \frac{-\pi}{6}$ y $c = \frac{\pi}{2}$, es decir $f(a) = f(b) = f(c) = 0$.

En el intervalo $\left[\left(\frac{-5\cdot\pi}{6}\right), \left(\frac{7\cdot\pi}{6}\right)\right]$, la curva tiene cuatro puntos donde su derivada es nula : A , B , C y D . En esos puntos su pendiente es cero porque la tangente es horizontal, de acuerdo al teorema de Rolle . Por otra parte , en el intervalo $\left(\frac{-5\cdot\pi}{6}, \frac{-\pi}{2}\right)$ la pendiente de la curva es nula únicamente en el punto A .

Demostración del teorema de Rolle.

Dado que $f(x)$ es una función *continua* en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces *está definida en todo punto de ese intervalo* y dado que $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$, entonces $f(x)$ puede ser positiva en algunas partes del intervalo y negativa en otras.

Si la función es positiva en alguna parte del intervalo (a, b), necesariamente *tendrá un valor máximo en algún punto* o , si la función es negativa en alguna parte del intervalo (a, b) forzosamente *tendrá un valor mínimo en algún punto* del intervalo.
Pero en los puntos máximos o mínimos relativos de una función continua $f(x)$ se tiene que $\frac{df}{dx} = 0$, y se cumple el teorema de Rolle.

Ejemplo 1. ¿ Se cumple el teorema de Rolle para la función : $f(x) = 5 - 2\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}$?

Solución : Primero se debe encontrar al menos dos valores a y b de x para los cuales la función valga cero. . .

$$5 - 2\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2} = 0 \qquad \text{implica que :} \qquad x - 2 = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$$

esto es . . .

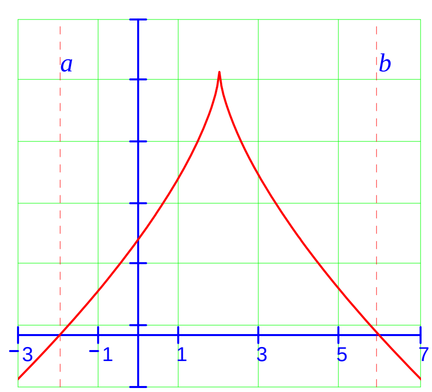
$$a := 2 - \frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}} \qquad \text{y} \qquad b := 2 + \frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}$$

Sin embargo, a pesar de que ésta función es también continua en el intervalo (a, b), el teorema de Rolle *no se cumple en éste caso,* porque la derivada :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\left[5 - 2\cdot\sqrt[3]{(x-2)^2}\right] = \frac{-4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$$

no existe en $x = 2$, valor que está comprendido en el intervalo (a, b) y una de las condiciones del teorema de Rolle falla.
En consecuencia, no se puede afirmar que exista un solo punto dentro de éste intervalo en el cual la función tenga una tangente horizontal .

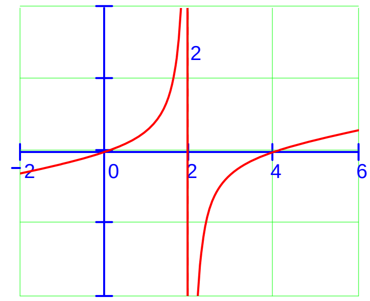
En éste ejemplo se ilustra que basta con un solo punto del intervalo en el cual la función no sea derivable para que el teorema de Rolle deje de aplicarse.



Ejemplo 2. ¿ Se aplica o no el teorema de de Rolle a las siguientes funciones ?

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4\cdot x}{x-2}$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 4\cdot x}{x+2}$

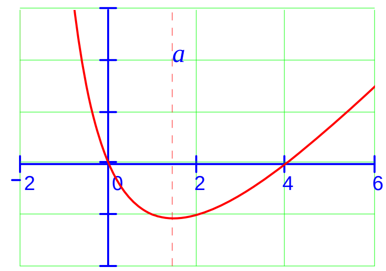
Solución : Ambas funciones se anulan en $x = 0$ y en $x = 4$; sin embargo, la función $f(x)$ es discontinua para $x = 2$, valor que queda dentro del intervalo $[0,4]$, por lo cual *el teorema no se aplica en éste caso*.



Como se puede apreciar en la gráfica de la función ilustrada a la derecha, ésta no tiene una tangente horizontal en ningún punto dentro del intervalo $(0,4)$.

La función $g(x)$ es discontinua en $x = -2$, pero éste valor de x está fuera del intervalo $[0,4]$ y además, su derivada es :

$$\frac{dg}{dx} = \frac{x^2 - 8 + 4\cdot x}{(x+2)^2}$$



la cual existe para todo punto en el intervalo (a,b)

Por lo tanto, el teorema de Rolle se aplica a $g(x)$ y predice al menos un punto comprendido entre $x = 0$ y $x = 4$ donde la tangente a la curva es horizontal .

En efecto, resolviendo para x la ecuación: $\dfrac{dg}{dx} = 0$ se obtiene que . . .

$$\frac{x^2 - 8 + 4\cdot x}{(x+2)^2} = 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 - 8 + 4\cdot x = 0$$

De donde resultan los valores : $a := -2 + 2\cdot\sqrt{3}$ y $b := -2 - 2\cdot\sqrt{3}$

Sin embargo *sólo el valor* $x = a$ *está dentro del intervalo* $(0,4)$ *y por lo tanto en el punto* $(a, g(a)) = (-2 + 2\cdot\sqrt{3}, 4\cdot\sqrt{3} - 8)$, *la tangente a la curva* $y = g(x)$ *es horizontal*.

Ejemplo 3. Determinar el valor que predice el teorema de Rolle para la función : $f(x) = x^3 - 12\cdot x$.

Solución : Ésta función se puede factorizar como . . .

$$f(x) = \left(x^3 - 12\cdot x\right) = x\cdot\left(x^2 - 12\right) = x\cdot\left(x - \sqrt{12}\right)\cdot\left(x + \sqrt{12}\right)$$

y además, es un polinomio. Por lo tanto, es una función continua y derivable para todo valor de x.

Los factores anteriores muestran que la función vale cero si : $x = a = -\sqrt{12}$, $x = b = 0$ o $x = c = \sqrt{12}$ y el teorema de Rolle puede aplicarse en tres intervalos : (a, b), (b, c) y (a, c).

La derivada de la función igualada a cero proporciona los puntos donde la tangente a al curva es horizontal . . .

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{implica que . . .} \quad \frac{d}{dx}\cdot\left(x^3 - 12\cdot x\right) = \left(3\cdot x^2 - 12\right) = 0$$

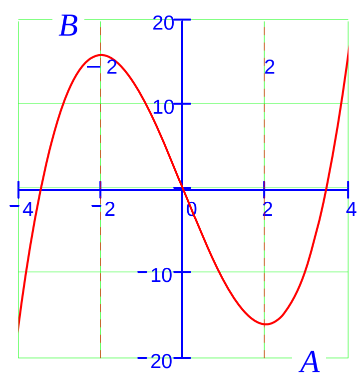
es decir : $3\cdot(x-2)\cdot(x+2) = 0$, de donde se obtiene que : $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

Por lo tanto, la curva $y = f(x)$ es horizontal en dos puntos :

$$A\left(x_1, f\left(x_1\right)\right) = (2, -16)$$

y

$$B\left(x_2, f\left(x_2\right)\right) = (-2, 16)$$



6.2 *Teorema general de la media y Teorema del Valor Medio* .

El teorema general de la media, también llamado *el teorema de Cauchy*. (por el matemático Francés *Agustín Louis Cauchy (1789-1857*)), establece que :

Si $f(x)$ ***y*** $g(x)$ ***son dos funciones que :***

- ***son continuas en el intervalo cerrado*** $[a, b]$
- ***son derivables en el intervalo abierto*** (a, b)
- ***la derivada*** $\dfrac{dg}{dx}$ ***no es cero en ningún punto de*** (a, b)

entonces existe al menos un valor x_0 ***comprendido entre*** a ***y*** b ***para el cual :***

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'\cdot\left(x_0\right)}{g'\cdot\left(x_0\right)} \qquad \textit{(6.1)}$$

Geométricamente éste teorema significa que el cociente de los incrementos para dos funciones continuas y derivables en un intervalo dado, es igual al cociente de sus pendientes *en por lo menos un punto* x_0 dentro del intervalo.

Demostración **.**

Definamos una constante M y una función $h(x)$ como sigue . . .

$$M = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \text{y} \qquad h(x) = (f(x) - f(b)) - M \cdot (g(x) - g(b))$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y derivables en el intervalo (a, b), entonces la función $h(x)$ también es continua y derivable en ese intervalo .

Además, esta función se anula en los extremos de (a, b) . . .

$$h(b) = (f(b) - f(b)) - M \cdot (g(b) - g(b)) = 0$$

$$h(a) = (f(a) - f(b)) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(a) - g(b)) = 0$$

por lo tanto $h(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle y su derivada valdrá cero en al menos un valor x_0 comprendido entre a y b . . .

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)_{x_0} = \left(\frac{df}{dx} - 0\right)_{x_0} - M \cdot \left(\frac{dg}{dx} - 0\right)_{x_0} = 0 \quad \text{esto es:} \quad \frac{dh(x_0)}{dx} = \frac{df(x_0)}{dx} - M \cdot \frac{dg(x_0)}{dx} = 0$$

de donde se obtiene . . . $M = \dfrac{\left(\dfrac{df(x_0)}{dx}\right)}{\left(\dfrac{dg(x_0)}{dx}\right)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$; con $a < x_0 < b$

substituyendo ahora la definición inicial de la constante M, queda demostrado el teorema de Cauchy

En particular, si $g(x) = x$ es la función identidad, entonces $g(a) = a$, $g(b) = b$ y $\left(\dfrac{dg}{dx}\right) = 1$

de modo que el teorema de Cauchy se reduce al llamado ***Teorema del valor medio*** o ***Teorema de Lagrange*** . . .

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)}$$

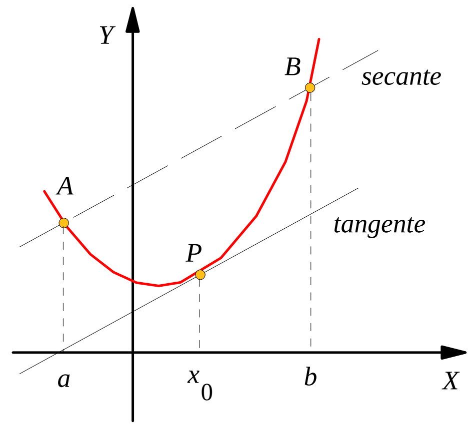
que en palabras dice. . .

" Si una función $f(x)$ es :

- *continua en un intervalo* $[a, b]$
- *derivable en el intervalo* (a, b)

entonces existe al menos un valor x_0 comprendido entre $x = a$ y $x = b$ tal que la pendiente de la recta tangente a la curva en x_0 es igual a la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos

$(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$ *"*



Es decir, para dos puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ de una curva que sea continua y derivable en cualquier punto interior de un intervalo (a, b), existe al menos un punto P comprendido entre A y B en el cual *la tangente a la curva es paralela a la recta secante que pasa por* A *y* B.

El teorema de Lagrange se puede enunciar de varias maneras a partir de la forma básica :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{df(x_0)}{dx} \quad ; \quad a < x_0 < b \qquad (6.2)$$

Por ejemplo, si se resuelve ésta ecuación para $f(b)$ y se hace $b = x$ se obtiene :

$$f(x) = f(a) + (x - a)\cdot\left[f'\cdot(x_0)\right] \quad ; \quad a < x_0 < b \qquad (6.2)_a$$

o bien haciendo $a = x$; $b = x + \Delta x$, resulta una tercera forma :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x\cdot\left[f'\cdot(x_0)\right] \quad ; \quad x < x_0 < (x + \Delta x) \qquad (6.2)_b$$

Con ésta última forma, se puede calcular el valor de una función en $x + \Delta x$ conociendo su valor en x .

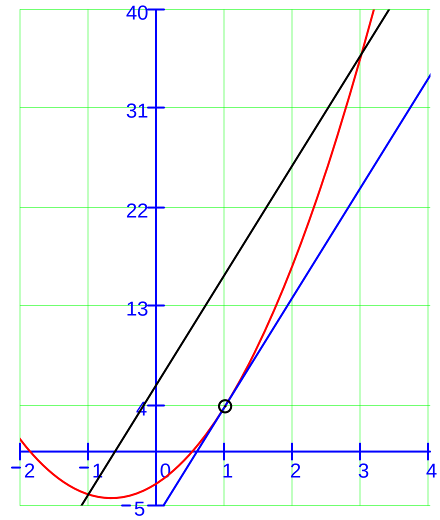
Ejemplo 4. Hallar el valor que predice el teorema de Lagrange para la función $f(x) = 3\cdot x^2 + 4\cdot x - 3$ en el intervalo $[-1, 3]$

Solución : La función $f(x)$ es un polinomio, así que es continua y derivable en cualquier punto. Además, haciendo $a = -1$ y $b = 3$ se obtiene . . .

$$f(a) = f(-1) = -4 \quad \text{y} \quad f(b) = f(3) = 36$$

Por lo tanto, del teorema de Lagrange

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{df(x_0)}{dx}$$



se obtiene que :

$$\frac{36-(-4)}{3-(-1)} = \left[\frac{d}{dx}\cdot\left(3\cdot x^2+4\cdot x-3\right)\right]_{x_0}$$

es decir : $\frac{40}{4} = \left(6\cdot x_0+4\right)$

de donde resulta que . . .

$$x_0 = \left(\frac{10-4}{6}\right) = 1$$

esto es, en el punto $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right) = (1, f(1)) = (1,4)$, la curva $y = f(x)$ tiene una recta tangente que es paralela a la recta secante que pasa por los puntos:

$(a, f(a)) = (-1,-4)$ y $(b, f(b)) = (3,36)$.

Ejemplo 5. Hallar un valor aproximado para el número : $\sqrt[6]{65}$

Solución : Defínase la función $f(x) = \sqrt[6]{x}$. Tómese como valor inicial $x = 64$ y como incremento $\Delta x = 1$. Aplicando entonces el teorema del valor medio en la forma (6. 2)$_b$ se obtiene. . .

$$f\left(x+\Delta x\right) = f(x) + \Delta x\cdot\frac{df\left(x_0\right)}{dx} \qquad ; \qquad x < x_0 < \left(x+\Delta x\right)$$

es decir :

$$\sqrt[6]{64+1} = \sqrt[6]{64} + (1)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(x_0\right)^{\frac{-5}{6}} \qquad ; \qquad 64 < x_0 < (64+1)$$

y aunque no se conoce aún el valor de x_0, es posible suponer que $x_0 = 64$ con el fin de simplificar el cálculo y *obtener un valor aproximado* del número pedido. Bajo ésta suposición queda entonces . . .

$$\sqrt[6]{65} \approx 2 + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[6]{64}}\right)^5 = 2 + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2^5}\right) = 2.0052083$$

Mientras que el resultado exacto hasta 6 cifras decimales es : $\sqrt[6]{65} = 2.0051747$, así que el valor aproximado está muy cerca del valor real. La precisión de la aproximación aumenta a medida que Δx tiende a cero.

Ejemplo 6. Hallar un punto en el segmento de la parábola $f(x) = 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 9$ comprendido entre $x = -2$ y $x = 2$ donde la tangente a la parábola sea paralela con la recta secante que pasa por los puntos $A(-2, f(-2))$ y $B(2. f(2))$

Solución : Ésta función es continua y derivable en cualquier punto puesto que es un polinomio, por lo tanto se le puede aplicar el teorema del Valor Medio :

$$\frac{f(-2) - f(2)}{(-2) - (2)} = \left[\frac{d}{dx}\cdot\left(3\cdot x^2 - 6\cdot x - 9\right)\right]_{x_0}$$

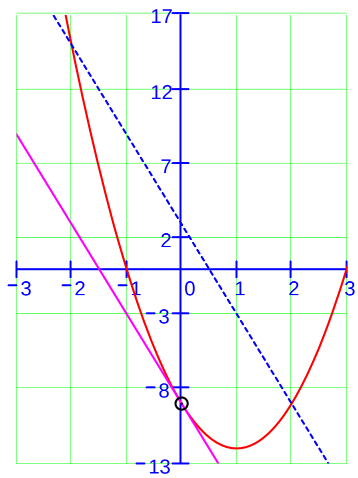
$$\frac{15 - (-9)}{-2 - (2)} = 6\cdot x_0 - 6$$

de donde se obtiene que . . .

$$x_0 = \frac{24}{-4\cdot(6)} + 1 = 0$$

Por lo tanto, la recta tangente pedida, toca a la parábola en el punto :

$$(0, f(0)) = (0, -9)$$



Ejemplo 7. La ecuación $e^x = 1 + x$ tiene una raíz en $x = 0$. Demostrar que ésta ecuación no tiene otra raíz real.

Solución : Defínase la función $f(x) = e^x - (1 + x)$, la cual es continua y derivable en todo valor de x puesto que es la suma de dos funciones continuas y derivables : una función exponencial y un polinomio de grado uno.

Además, $f(0) = e^0 - (1 + 0) = 0$ y es claro que la derivada $\left(\frac{df}{dx}\right) = e^x - 1$, no es cero en ningún punto de los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$. En otras palabras, el teorema de Rolle no se cumple porque *falla la condición de que* $f(x)$ *se anule en otro punto* distinto a $x = 0$, es decir la función $f(x)$ no tiene otra raiz real.

Ejemplo 8. Hallar el valor que predice el teorema general de la media en el intervalo $[1,4]$ para las funciones : $f(x) = 3\cdot x + 2$ y $g(x) = x^2 + 1$

Solución : Tanto $f(x)$ como $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[1,4]$ y además sus derivadas existen en cualquier punto del intervalo $(1,4)$, puesto que son polinomios. Sus derivadas son . . .

$$\frac{df}{dx} = 3 \qquad \text{y} \qquad \frac{dg}{dx} = 2\cdot x$$

Así que $\frac{dg}{dx} \neq 0$ en todo punto de $[1,4]$.

Con $a = 1$ y $b = 4$, se tiene . . .

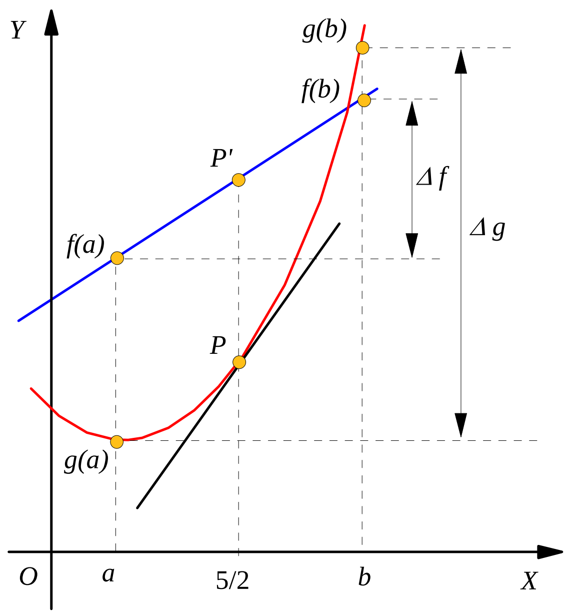
$f(1) = 5$; $g(1) = 2$
$f(4) = 14$; $g(4) = 17$

así que el teorema general de la media aplicado a éstas dos funciones establece que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \left[\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right]_{x_0}$$

esto es . . . $\left(\frac{14-5}{17-2}\right) = \frac{3}{2\cdot x_0}$

de donde se obtiene : $x_0 = \frac{5}{2}$



En la gráfica anterior se muestra como en los puntos P y P' donde $x = x_0$, *el cociente de las pendientes de las rectas tangentes respectivas, es igual al cociente de los incrementos* de las funciones $f(x)$ y $g(x)$

6.3 ***El teorema extendido del valor medio*** .

Siendo $f(x)$ una función continua y derivable, se puede definir una constante R tal que . . .

$$\left[f(b) - f(a) - (b-a)\cdot\frac{df(a)}{dx} - \frac{(b-a)^2}{(2)!}\cdot R \right] = 0 \qquad (1)$$

y también se define una función $F(x)$ si se reemplaza la constante b por la variable x en la ecuación (1) anterior . . .

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\cdot\frac{df(a)}{dx} - \frac{(x-a)^2}{(2)!}\cdot R \qquad (2)$$

Entonces es claro que $F(b) = 0$ según la ecuación (1) y $F(a) = 0$ según la ecuación (2) .

Además $F(x)$ es continua y derivable (*porque f(x) lo es*), asi que es posible aplicarle el teorema de Rolle, es decir , existe un valor x_0 comprendido entre $x = a$ y $x = b$ tal que

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x_0} = 0 \qquad (3)$$

Además . . .

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} - 0 - (1)\cdot\frac{df(a)}{dx} - \frac{2\cdot\left(x_0 - a\right)\cdot R}{2!}$$

$$= \frac{df(x)}{dx} - \frac{df(a)}{dx} - (x-a)\cdot R \qquad (4)$$

Entonces $\dfrac{dF(a)}{dx} = 0$ según la ecuación (4) y $\dfrac{dF\left(x_0\right)}{dx} = 0$ según la ecuación (3) , por lo tanto, se puede aplicar nuevamente el teorema de Rolle a la función $\dfrac{dF(x)}{dx}$ para inferir asi que existe un punto x_1 comprendido entre $x = a$ y $x = x_0$ tal que $\left[\dfrac{d}{dx}\cdot\left(\dfrac{dF}{dx}\right)\right]_{x_1} = 0$, es decir, derivando (4) . . .

$$\frac{d^2\cdot F\left(x_1\right)}{dx^2} = \left[\left(\frac{d^2\cdot f(x)}{dx^2}\right) - R\right]_{x_1} = 0$$

de donde se obtiene : $R = \left(\dfrac{d^2\cdot f(x)}{dx^2}\right)_{x_1} = \dfrac{d^2\cdot f\left(x_1\right)}{dx^2}$

Substituyendo este valor de R en la ecuación (1) resulta :

$$f(b) - f(a) - (b-a)\cdot\frac{df(a)}{dx} - \frac{(b-a)^2}{(2)!}\cdot\left(\frac{d^2\cdot f(x_1)}{dx^2}\right) = 0$$

donde $a < x_1 < b$ puesto que $x_1 < x_0 < b$

Si se aplica repetidamente n veces el procedimiento anterior a la expresión :

$$f(b) = f(a) + (b-a)\cdot\frac{df(a)}{dx} + \frac{(b-a)^2}{2!}\cdot\frac{d^2\cdot f(a)}{dx^2} + \frac{(b-a)^3}{3!}\cdot\frac{d^3\cdot f(a)}{dx^3} + \dots + \left[\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right]\cdot R$$

o en forma resumida : $$f(b) = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\cdot\frac{d^k\cdot f(a)}{dx^k}\right] + \left[\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right]\cdot R$$

se puede demostrar que . . .

$$R = \left(\frac{d^{n+1}\cdot f(x)}{dx^{n+1}}\right)_{x_n} = \frac{d^{n+1}\cdot f(x_n)}{dx^{n+1}}$$ con $a < x_n < b$ (6.3

)

y por lo tanto :

$$f(b) = \left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}\cdot\frac{d^k\cdot f(a)}{dx^k}\right] + \left[\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right]\cdot\frac{d^{n+1}\cdot f(x_n)}{dx^{n+1}}$$

o en forma resumida. . .

$$f(b) = \left[\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(b-a)^k}{k!}\right]\cdot f^{(k)}\cdot(a)\right] + \left[\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right]\cdot\left[f^{(n+1)}(x_n)\right]$$ (6.4)

Esta expresión es la <u>generalización</u> del teorema de Lagrange y se conoce como <u>teorema extendido del valor medio</u>

6.4 *Fórmula de Taylor* .

Uno de los resultados mas importantes del cálculo diferencial es que :

" Toda función matemática que en un intervalo dado . . .

- ***sea continua***
- ***tenga derivadas hasta el orden*** $(n+1)$

se puede representar como una serie de potencias enteras y positivas hasta el orden n ***de su variable independiente "***

Diciéndolo de manera más dramática :

" Cualquier función que sea continua y derivable hasta el orden $(n+1)$ ***en cierto intervalo , se puede desarrollar como un polinomio de grado n "***

DEMOSTRACIÓN .

Supongamos que $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y que además sea derivable en (a,b)
En otras palabras, que existe en todo punto del intervalo y tiene una derivada definida en cualquier punto *interior* de ese intervalo.

Imaginemos a $f(x)$ como una *serie infinita de potencias enteras y positivas* de $(x-a)$:

$$f(x) = A_0 + A_1\cdot(x-a) + A_2\cdot(x-a)^2 + A_3\cdot(x-a)^3 + A_4\cdot(x-a)^4 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

donde A_0 , A_1 , A_3 , A_4 etc. son coeficientes constantes y calculemos sus n primeras derivadas . . .

$$\frac{df(x)}{dx} = (1)\cdot A_1 + 2\cdot A_2\cdot(x-a) + 3\cdot A_3\cdot(x-a)^2 + 4\cdot A_4\cdot(x-a)^3 + 5\cdot A_5\cdot(x-a)^4 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^2\cdot f(x)}{dx^2} = (2)\cdot(1)\cdot A_2 + (3)\cdot(2)\cdot A_3\cdot(x-a) + (4)\cdot(3)\cdot A_4\cdot(x-a)^2 + (5)\cdot(4)\cdot A_5\cdot(x-a)^3 + \ldots\ldots.$$

$$\frac{d^3\cdot f(x)}{dx^3} = (3)\cdot(2)\cdot(1)\cdot A_3 + (4)\cdot(3)\cdot(2)\cdot A_4\cdot(x-a) + (5)\cdot(4)\cdot(3)\cdot A_5\cdot(x-a)^2 + \ldots\ldots$$

$$\frac{d^n\cdot f(x)}{dx^n} = n!\cdot A_n + \frac{(n+1)!}{(1)!}\cdot A_{n+1}\cdot(x-a) + \frac{(n+2)!}{(2)!}\cdot A_{n+2}\cdot(x-a)^2 + \frac{(n+3)!}{(3)!}\cdot A_{n+3}\cdot(x-a)^3 + \ldots$$

evaluando éstas derivadas en $x = a$, se pueden calcular los coeficientes constantes . . .

$$\frac{df(a)}{dx} = A_1 + 0 + 0 + \ldots\ldots \qquad \longrightarrow \qquad A_1 = \frac{df(a)}{dx}$$

$$\frac{d^2 \cdot f(a)}{dx^2} = (2!)\cdot A_2 + 0 + 0 + \ldots\ldots \qquad \longrightarrow \qquad A_2 = \frac{1}{(2)!}\cdot\frac{d^2 \cdot f(a)}{dx^2}$$

$$\frac{d^3 \cdot f(a)}{dx^3} = (3!)\cdot A_3 + 0 + 0 + \ldots\ldots \qquad \longrightarrow \qquad A_3 = \frac{1}{(3)!}\cdot\frac{d^2 \cdot f(a)}{dx^2}$$

y asi sucesivamente hasta :

$$\frac{d^n \cdot f(a)}{dx^n} = (n!)\cdot A_n + 0 + 0 + \ldots\ldots \qquad \longrightarrow \qquad A_n = \frac{1}{(n)!}\cdot\frac{d^n \cdot f(a)}{dx^n}$$

Substituyendo éstos coeficientes en el desarrollo (1) y dado que $f(a) = A_0$, se obtiene:

$$f(x) = f(a) + \frac{df(a)}{dx}\cdot(x-a) + \frac{1}{(2)!}\cdot\frac{d^2 \cdot f(a)}{dx^2}\cdot(x-a)^2 + \frac{1}{(3)!}\cdot\frac{d^2 \cdot f(a)}{dx^2}\cdot(x-a)^3 + \ldots.$$

o en forma abreviada . . .

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k \cdot f(a)}{dx^k}\right)\cdot(x-a)^k$$

Si ésta serie infinita se trunca en el *n-ésimo término*, puede representar en forma aproximada a la función $f(x)$. Denotando por $R(x)$ la suma de términos después del término *n-ésimo*, queda :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}\cdot\frac{d^k \cdot f(a)}{dx^k}\right)\cdot(x-a)^k + R(x) \qquad (6.5)$$

Comparando ésta expresión con el teorema generalizado de Lagrange (ec. (6.4)) haciendo $b = x$, se concluye que la función $R(x)$ debe ser:

$$R(x) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{d^{n+1} \cdot f(x_0)}{dx^{n+1}}\right)\cdot(x-a)^{n+1} \quad \text{donde } a < x_0 < x \qquad (6.6)$$

De éste modo, $R(x)$ representa *el error de aproximación* entre la función $f(x)$ y un polinomio en potencias de $(x-a)$ de grado n con el cual se representa en forma aproximada.
Este resultado se conoce como *Teorema de Taylor* . (Brook Taylor, 1685-1731)

TEOREMA DE TAYLOR

Si $f(x)$ es una función tal que :

- *sus primeras n derivadas son continuas en el intervalo $[a, b]$*
- *la derivada de orden $n+1$: $\dfrac{d^{n+1} \cdot f(x)}{dx^{n+1}}$, existe en todo punto del intervalo (a, b)*

entonces $f(x)$ se puede representar como la suma de un polinomio $P(x)$ en $(x-a)$ y una función residuo $R(x)$ . . .

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

donde . . .

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{d^{k} \cdot f(a)}{dx^{k}} \right) \cdot (x-a)^{k} \quad ; \quad R(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1} \cdot f(x_0)}{dx^{n+1}} \cdot (x-a)^{n+1}$$

con x_0 un valor comprendido entre a y x.

La función $R(x)$ mide la diferencia entre la función $f(x)$ y el polinomio $P(x)$ de grado n usado para aproximar a $f(x)$, es decir $R(x)$ representa la "cola" de términos después del n-ésimo en la serie para el desarrollo de $f(x)$

$$R(x) = f(x) - P(x)$$

Cuando ésta diferencia tiende a cero a medida que n tiende a infinito, *se dice que la serie converge hacia la función $f(x)$* es decir . . .

$$\lim_{n \to \infty} \left[\left(\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1} \cdot f(x_0)}{dx^{n+1}} \right) \cdot (x-a)^{n+1} \right] = 0 \qquad (6.7)$$

entonces el polinomio tiende a ser cada vez más igual a la función $f(x)$ cuanto mayor sea su número de términos considerados en la serie.
Si lo anterior no sucede, entonces la serie se llama *divergente* .

Un caso particular del teorema de Taylor, se obtiene cuando $a = 0$, pues entonces queda :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k \cdot f(0)}{dx^k} \right) \cdot (x-0)^k + \left(\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1} \cdot f\left(x_0\right)}{dx^{n+1}} \right) \cdot (x-0)^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k \cdot f(0)}{dx^k} \right) \cdot x^k + \left(\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{d^{n+1} \cdot f\left(x_0\right)}{dx^{n+1}} \right) \cdot x^{n+1} \quad ; \quad 0 < x_0 < x$$

o en forma resumida :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{f^{(k)} \cdot (0)}{k!} \right] \cdot x^k + R(x) \tag{6.8}$$

Que se conoce como *la fórmula de MacLaurin* .

Con la fórmula de MacLaurin *es posible desarrollar una función continua y derivable en el intervalo* $(0, x)$ *en una serie de potencias de* x

Ejemplo 9. Desarrollar la función $f(x) = e^x$ en potencias de $(x+1)$ y también en potencias de x.
Determinar si la serie de potencias correspondiente es convergente .

Solución : Se desea expandir ésta función en potencias del binomio $(x+1)$, es decir de $(x-a) = [x-(-1)]$ por lo cual $a = -1$, además, puesto que todas las derivadas de ésta función son iguales a e^x, al evaluarlas en $a = -1$ resulta :

$$f(-1) = e^{-1} \quad ; \quad \frac{df(-1)}{dx} = e^{-1} \quad ; \quad \frac{d^2 \cdot f(-1)}{dx^2} = e^{-1} \quad ; \quad \frac{d^3 \cdot f(-1)}{dx^3} = e^{-1} \ldots$$

y la serie de Taylor queda simplemente . . .

$$f(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-1}}{k!} \cdot (x+1)^k \right] + \left(\frac{e^{x_0}}{(n+1)!} \right) \cdot (x+1)^{n+1}$$

donde $-1 < x_0 < x$

esto es. . .

$$e^x = \frac{1}{e}\cdot\left[1 + (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{(x+1)^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{(x+1)^n}{n!}\right] + \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{x_0}$$

En particular, si $a = 0$, todas las derivadas valen 1 y el desarrollo de MacLaurin para ésta función es entonces . . .

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}\right) + \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)\cdot e^{x_0} \qquad (6.9)$$

Determinemos ahora la convergencia de ésta serie. Consideremos que x es un número fijo , entonces siempre podemos encontrar un entero positivo N tal que : $|x| < N$, esto es tal que : $\frac{|x|}{N} < 1$. Además $|R(x)|$ se puede escribir como . . .

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{x_0}\right| = \left|\left(\frac{x}{1}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\ldots\cdot\left(\frac{x}{n}\right)\cdot\left(\frac{x}{n+1}\right)\cdot e^{x_0}\right|$$

y usando las propiedades del valor absoluto queda:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{x_0}\right| = \left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\frac{x}{3}\right|\cdot\ldots\ldots\cdot\left|\frac{x}{N-1}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|\cdot\left|\frac{x}{N+1}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{x}{n}\right|\cdot\left|\frac{x}{n+1}\right|\cdot\left|e^{x_0}\right|$$

Todos los factores después de $\left|\frac{x}{N}\right|$ también son menores que la unidad , es decir :

$$\left|\frac{x}{N}\right| < 1 \quad ; \quad \left|\frac{x}{N+1}\right| < 1 \quad ; \quad \left|\frac{x}{N+2}\right| \quad , \quad \ldots \quad \left|\frac{x}{n+1}\right| < 1$$

Además , $\left|e^{x_0}\right|$ está acotada, así que la convergencia de la serie solo depende de los otros factores. . .

$$\left|\frac{(x)^{n+1}}{n+1!}\right| < \left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\frac{x}{3}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{x}{N-1}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|\cdot\ldots\ldots\cdot\left|\frac{x}{N}\right| =$$

$$= \left|\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\right|\cdot\left(\left|\frac{x}{N}\right|\right)^{[n+1-(N-1)]}$$

Sin embargo, si x es un número fijo entonces . . . $\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}$ es una <u>*constante*</u> y no depende de n, mientras que por ser $\frac{|x|}{N} < 1$ el número $\left(\left|\frac{x}{N}\right|\right)^{[n+1-(N-1)]}$ tiende a cero cuando n tiende al infinito. En otras palabras, para cualquiera que sea el valor de x, se tiene que $|R(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{x_0}\right|$ tiende a cero y por lo tanto, la serie siempre será convergente.

La función $f(x) = e^x$ se puede calcular entonces para cualquier valor de x con cualquier grado de precisión si se toma el suficiente número de términos en el desarrollo de Maclaurin. Por ejemplo si se definen las funciones. . .

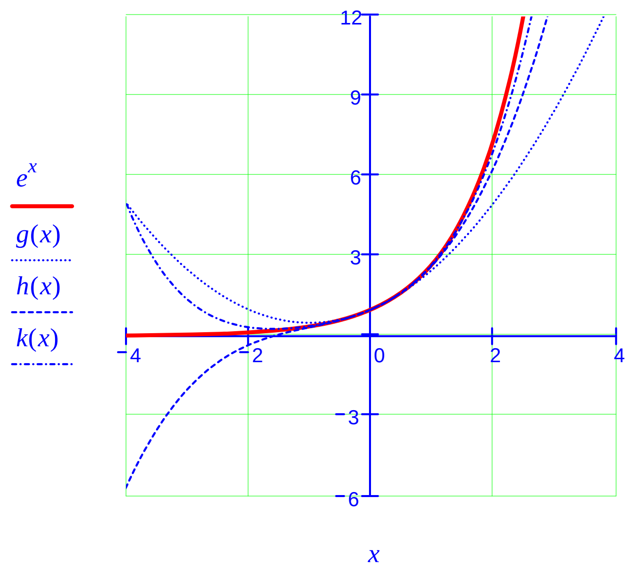
$$g(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \quad ; \quad h(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \quad ; \quad k(x) := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

y se comparan con la función:

$$f(x) = e^x$$

se aprecia claramente que a medida que se consideran más términos del desarrollo para $f(x)$, mayor es su semejanza con la función original y en puntos cada vez más lejanos a $x = 0$.

Para la función $k(x)$ se han considerado tan sólo los primeros 5 términos del desarrollo de $f(x)$, y sin embargo, se puede observar que la aproximación a $f(x)$ es ya bastante buena cerca de $x = 0$.



Ejemplo 10. Desarrollar el polinomio $f(x) = x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot x + 5$ en potencias de $(x-2)$

Solución: Evaluemos la función y sus derivadas sucesivas en $a = 2$ . . .

$$f(2) = (2)^3 - 2\cdot(2)^2 + 3\cdot(2) + 5 = 11$$

$$\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_2 = \left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 3\right)_2 = 3\cdot(2)^2 - 4\cdot(2) + 3 = 7$$

$$\left(\frac{d^2\cdot f(x)}{dx^2}\right)_2 = (6\cdot x-4)_2 = 6\cdot(2)-4 = 8$$

$$\left(\frac{d^3\cdot f(x)}{dx^3}\right)_2 = (6)_2 = 6$$

y por lo tanto, todas las demás derivadas de orden superior a 3 son nulas.

Substituyendo éstos resultados en la fórmula de Taylor se obtiene :

$$f(x) = f(2) + \left(\frac{df(2)}{dx}\right)\cdot(x-2) + \left(\frac{1}{2!}\cdot\frac{d^2\cdot f(2)}{dx^2}\right)\cdot(x-2)^2 + \left(\frac{1}{3!}\cdot\frac{d^3\cdot f(2)}{dx^3}\right)\cdot(x-2)^3$$

esto es . . .

$$f(x) = 11 + 7\cdot(x-2) + 4\cdot(x-2)^2 + (x-2)^3$$

En éste caso la serie es *finita* pues termina en el 4º término , y se deduce que el desarrollo es *convergente* para cualquier valor de x

Ejemplo 11. Desarrollar la función trigonométrica $f(x) = sen(x)$ en potencias enteras y positivas de x.

Solución : Evaluemos $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a), \ldots ,$ $f^{(n)}(a)$ en $a = 0$ . . .

$$f(x) = sen(x) \longrightarrow f(0) = sen(0) = 0$$

$$\frac{d\cdot f(x)}{dx} = cos(x) = sen\left[(x) + \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \frac{d\cdot f(0)}{dx} = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\frac{d^2\cdot f(x)}{dx^2} = -sen(x) = sen\left[(x) + 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \frac{d^2\cdot f(0)}{dx^2} = sen(\pi) = 0$$

$$\frac{d^3\cdot f(x)}{dx^3} = -cos(x) = sen\left[(x) + 3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \frac{d^3\cdot f(0)}{dx^3} = sen\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) = -1$$

$$\frac{d^4\cdot f(x)}{dx^4} = sen(x) = sen\left[(0) + 4\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \frac{d^4\cdot f(0)}{dx^4} = sen(2\cdot\pi) = 0$$

observando ésta secuencia,es posible inferir que . . .

$$\frac{d^n \cdot f(x)}{dx^n} = sen\left[(x) + n\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \frac{d^n \cdot f(0)}{dx^n} = sen\left(\frac{n}{2}\cdot\pi\right)$$

y por lo tanto, la serie de MacLaurin para la función seno es . . .

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}\cdot\left[\frac{df(0)}{dx}\right]\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{d^2\cdot f(0)}{dx^2}\right]\cdot x^2 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}\cdot\left[\frac{d^n\cdot f(0)}{dx^n}\right]\cdot x^n + R_n$$

$$sen(x) = 0 + \frac{1}{(1)!}\cdot x + 0 - \frac{1}{(3)!}\cdot x^3 + 0 + \frac{1}{(5)!}\cdot x^5 + 0 - \frac{1}{(7)!}\cdot x^7 + \ldots\ldots + R_n$$

es decir . . .

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots + R_n \qquad (6.10)$$

expresión en la que . . .

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{d^{n+1}\cdot f\left(x_0\right)}{dx^{n+1}}\right)\cdot x^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot sen\left[x_0 + (n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]\cdot x^{n+1}$$

en donde $0 < x_0 < x$ y como $\left|sen\left[x_0 + (n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]\right| \le 1$ se concluye que en el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left(R_n\right) = 0$ para cualquier valor de x. Esto significa que *la serie es convergente para todos los valores de* x .

Calculemos por ejemplo el valor aproximado de $sen(30°) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$ con el desarrollo anterior . . .

$$m(x)\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \approx \left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \approx 0.50000213$$

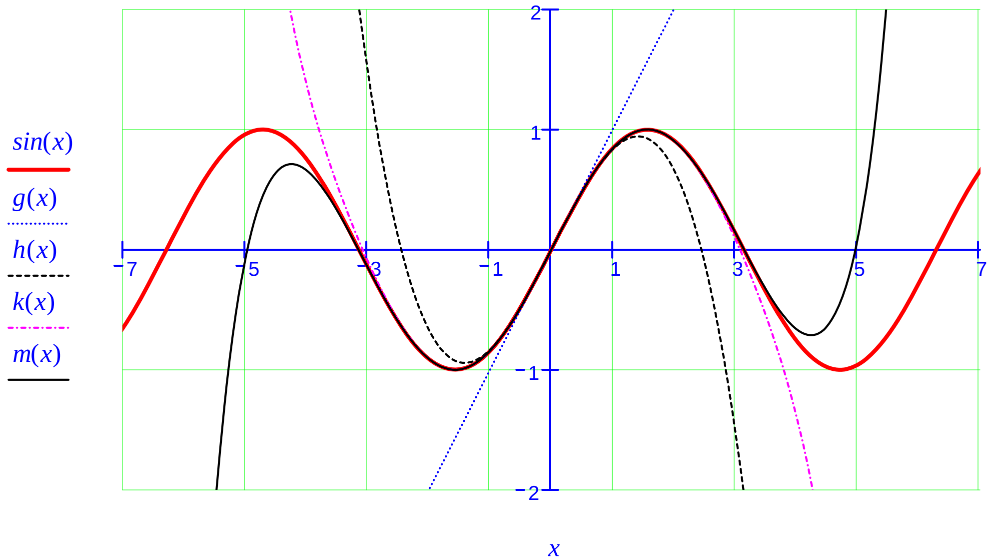
que prácticamente es el valor exacto 0.5, ¡ *usando solamente los tres primeros términos* del desarrollo en serie de potencias de la función seno !

Las funciones obtenidas considerando solo los primeros términos del desarrollo para la función seno son . . .

$$g(x) := x \quad ; \quad h(x) := x - \frac{x^3}{3!} \quad ; \quad k(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$m(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

y sus gráficas correspondientes se ilustran en la siguiente figura . . .



se puede observar que a medida que se consideran más términos del desarrollo de MacLaurin para ésta función, se obtienen funciones que dan una mejor aproximación de la función, en un rango más amplio de valores alrededor de $x = 0$.

Ejemplo 12. Desarrollar la función trigonométrica $f(x) = \cos(x)$ en potencias enteras y positivas de x.

Solución : La *fórmula de MacLaurin* , implica evaluar la función y sus derivadas sucesivas en $x = 0$:

$$f(x) = \cos(x) \longrightarrow f(0) = \cos(0) = 1$$

$$\frac{d \cdot f(x)}{dx} = -sen(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \frac{d \cdot f(0)}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 \cdot f(x)}{dx^2} = -\cos(x) = \cos\left[x + 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \frac{d^2 \cdot f(0)}{dx^2} = \cos(\pi) = -1$$

$$\frac{d^3 \cdot f(x)}{dx^3} = sen(x) = \cos\left[(x) + 3\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \frac{d^3 \cdot f(0)}{dx^3} = \cos\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) = 0$$

$$\frac{d^4 \cdot f(x)}{dx^4} = cos(x) = cos\left[x + 4\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \frac{d^4 \cdot f(0)}{dx^4} = cos(2\cdot\pi) = 1$$

observando ésta secuencia, se puede inferir que . . .

$$\frac{d^n \cdot cos(x)}{dx^n} = cos\left[x + n\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \longrightarrow \frac{d^n \cdot f(0)}{dx^n} = cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

y por lo tanto, la serie de MacLaurin para el coseno es . . .

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}\cdot\left[\frac{df(0)}{dx}\right]\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot\left[\frac{d^2 \cdot f(0)}{dx^2}\right]\cdot x^2 + ... + \frac{1}{n!}\cdot\left[\frac{d^n \cdot f(0)}{dx^n}\right]\cdot x^n + R_n$$

$$cos(x) = 1 + 0 - \frac{1}{(2)!}\cdot x^2 + 0 + \frac{1}{(4)!}\cdot x^4 + 0 - \frac{1}{(6)!}\cdot x^6 + 0 + ... + R_n$$

es decir . . .

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + ... + R_n \qquad (6.11)$$

donde

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{d^{n+1} \cdot f(x_0)}{dx^{n+1}}\right)\cdot x^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\cdot cos\left[x_0 + (n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right]\cdot x^{n+1}$$

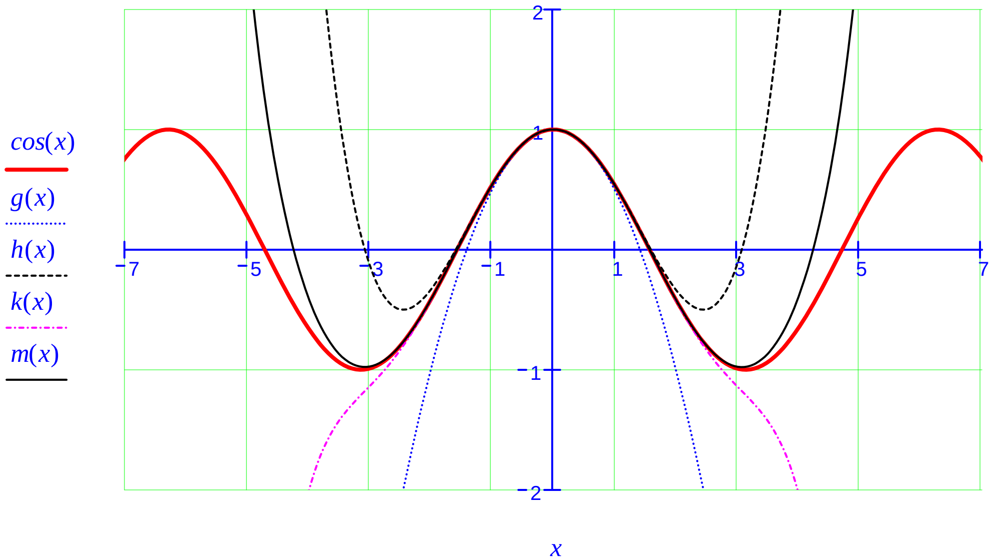
con $0 < x_0 < x$. En éste caso también $R_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Algunas de la funciones obtenidas considerando solo los primeros términos del desarrollo de ésta función son . . .

$$g(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} \quad ; \quad h(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$k(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \quad ; \quad m(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

y sus gráficas se ilustran en la siguiente figura, donde se puede observar que a medida que se consideran más términos del desarrollo de MacLaurin , se obtienen gráficas que se aproximan en un rango cada vez más amplio a la gráfica de la función inicial.



Por otra parte, si el desarrollo en serie de potencias para e^x se evalúa en el valor complejo $x = (\sqrt{-1})\cdot z = j\cdot z$, donde las potencias cíclicas del número imaginario $j = \sqrt{-1}$ son . . . $j^1 = j$, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$ y $j^4 = 1$ etc. resulta . . .

$$e^{j\cdot z} = 1 + \frac{j\cdot z}{1!} + \frac{(j\cdot z)^2}{2!} + \frac{(j\cdot z)^3}{3!} + \frac{(j\cdot z)^4}{4!} + \frac{(j\cdot z)^5}{5!} + \dots\dots$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\dots\dots\right) + j\cdot\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)$$

y al comparar con los desarrollos (6.10) y (6.11) se obtiene que . . .

$$\boxed{e^{j\cdot z} = cos(z) + j\cdot sen(z)} \qquad (6.12)$$

ecuación que se conoce como *identidad de Euler*. (Leonhard Euler (1707-1783))

EJERCICIOS 6.1

1. En los extremos del segmento $[0, 4]$ la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ vale : $f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}$
   ¿es válido el teorema de Rolle para ésta función en el intervalo $[0, 4]$?

2. ¿Se cumplen las condiciones del teorema de Rolle para la función $f(x) = tan(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$?

3. ¿ Se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange para $f(x) = x - x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$?.
   Si asi es , hallar el valor x_0 que predice el teorema .

4. ¿ Se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange para $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ en el intervalo $[-1, 1]$?.
   Si asi es , hallar el valor x_0 que predice el teorema .

5. ¿ Se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x) = sen(x)$ y
   $g(x) = cos(x)$ en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$? . Si asi es, hallar el valor x_0 que predice el teorema .

6. Desarrollar el polinomio $x^4 - 5 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + x + 2$ en potencias enteras y positivas del binomio $(x-2)$

7. Desarrollar el polinomio $x^5 + 2 \cdot x^4 - x^2 + x + 1$ en potencias enteras y positivas del binomio $(x+1)$

Desarrollar en potencias enteras y positivas de $(x-1)$, las funciones indicadas :

8. $f(x) = \sqrt{x}$ 9. $f(x) = ln(x)$ 10. $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2+1}$

11. Encontrar los tres primeros términos del desarrollo de MacLaurin para la función : $f(x) = \sqrt{x+1}$

12. Desarrollar $f(x) = ln(x+1)$ en una serie de potencias enteras y positivas de $(x-1)$. Determinar la convergencia de la serie.

Determinar el origen de las siguientes fórmulas aproximadas, válidas para pequeños valores de x y calcular el error de aproximación en las mismas :

13. $ln(cos(x)) \approx -\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12}$ 14. $arcsen(x) \approx x + \dfrac{x^3}{6}$ 15. $tan(x) \approx x + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2 \cdot x^5}{15}$

16. $arctan(x) \approx x - \dfrac{x^3}{3}$ 17. $ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \approx x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{3}{40} \cdot x^5$

Aplicando primero la fórmula de Taylor, calcular los límites de las siguientes expresiones :

18. $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{x-sen(x)}{e^{x}-\left(1+x+\dfrac{x^{2}}{2}\right)}\right]$

19. $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{x\cdot ln(1-x)}{sen^{2}\cdot(x)}\right]$

20. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1-sec(x)}{x^{2}}\right)$

21. $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^{2}}-cot^{2}\cdot(x)\right]$

6.5 ***Regla de L´Hopital*** .

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones tales que $f(a)=0$, $g(a)=0$, se puede plantear el problema de calcular el límite $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, que suele llamarse *forma indeterminada del tipo* $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Ya hemos enfrentado antes problemas de esa índole cuando calculamos el límite : $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{sen(x)}{x}\right)$ el cual existe a pesar de que la expresión no esté definida en $x=0$ cuando.

Otras formas indeterminadas, como $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{3\cdot x-2}{2\cdot x-7}\right)$, se llaman *forma indeterminada del tipo* $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Las notaciones para representar otras formas indeterminadas como las anteriores, utilizan los siguientes símbolos . . .

$$(0)\cdot(\infty) \quad , \quad (\infty-\infty) \quad , \quad (0)^{0} \quad , \quad (\infty)^{0} \quad , \quad (1)^{\infty}$$

Bajo ciertas condiciones, con la ayuda de la función derivada, es posible calcular los límites para estas formas indeterminadas.

REGLA DE L´HOPITAL

Si dos funciones $f(x)$ *y* $g(x)$

- *Satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy en un intervalo* $[a,c]$ *, es decir : 1°) son continuas en el intervalo cerrado* $[a,c]$ *2°) son derivables en el intervalo abierto* (a,c) *y 3°) la derivada* $\left(\dfrac{dg}{dx}\right)$ *no es cero en ningún punto de* (a,c)
- *Se anulan en un punto interior* $x=b$ *del intervalo:* $f(b)=0$, $g(b)=0$ *con* $a<b<c$

entonces

$$\lim_{x\to b}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to b}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

La utilidad de ésta regla consiste en que si el cociente de las funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$ es indeterminado, el cociente de sus derivadas posiblemente ya no lo sea y pueda calcularse su límite.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos un punto x distinto de b en el interior del intervalo $[a, c]$, y apliquemos *el teorema de Cauchy* a dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que sean continuas y derivables en ese intervalo :

$$\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \left[\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right]_{x=\zeta} \quad \text{con} \quad b < \zeta < x$$

y si además $f(b) = g(b) = 0$, se reduce a : $\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right]_{x=\zeta}$ con $b < \zeta < x$

Cuando $x \to b$, también $\zeta \to b$ puesto que ζ se encuentra entre b y x , de modo que tomando el límite se obtiene . . .

$$\lim_{x\to b}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{\xi\to b}\left[\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right]_{x=\zeta} = \lim_{x\to b}\left[\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right]$$

y queda demostrado.

OBSERVACIÓN 1 .

No se debe calcular la derivada de la expresión $\frac{f(x)}{g(x)}$ *considerándola como un cociente de funciones.*

La derivada de $f(x)$ se calcula *de manera independiente* a la derivada de $g(x)$.

OBSERVACIÓN 2 .
La regla de L´Hopital se puede aplicar repetidamente .

Cuando el límite $\lim_{x\to b}\left[\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right]$ vuelva a tomar una forma indeterminada, es posible aplicar otra vez la regla de L´Hopital *siempre y cuando* las nuevas funciones $\frac{df}{dx}$ y $\frac{dg}{dx}$ cumplan también con las condiciones de la regla, esto es . . .

$$\lim_{x\to b}\left[\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right] = \lim_{x\to b}\left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right]$$

El procedimiento se puede repetir nuevamente hasta obtener una forma que no sea indeterminada

OBSERVACIÓN 3 .

La regla de L´Hopital se aplica aunque $f(x)$ *o* $g(x)$ *no existan en* $x = b$; *pero existan sus límites*

$$\lim_{x\to b} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to b} g(x) = 0$$

puesto que los límites no dependen de que las funciones estén definidas en $x = b$.

OBSERVACIÓN 4 .

La regla de L´Hopital se aplica también cuando $b\to\infty$ *; siempre que existan los límites:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \qquad y \qquad \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

porque bajo el cambio de variable $x = \frac{1}{z}$, si $x\to\infty$ entonces $z\to 0$ y la regla se transforma en :

$$\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(g\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{d}{dz}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{d}{dz}\cdot g\left(\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{dz}{dx}} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{\frac{d}{dz}\cdot f\left(\frac{1}{z}\right)}{\frac{d}{dz}\cdot g\left(\frac{1}{z}\right)}\right)$$

y regresando a la variable x queda . . .

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{\left(\frac{dg}{dx}\right)}\right]$$

OBSERVACIÓN 5 .

La regla de L´Hopital se aplica también a la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Si $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \infty$, entonces es posible escribir . . .

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left(\frac{1-\dfrac{f(b)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(b)}{g(x)}} \right)$$

$$= \left[\lim_{x\to b} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \right] \cdot \frac{(1-0)}{(1-0)} = \lim_{x\to b} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

y del Teorema de *Cauchy* se llega de nuevo a : $\lim\limits_{x\to b} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim\limits_{x\to b} \left(\dfrac{f´(x)}{g´(x)} \right)$

Se podría pensar que con la regla de L´Hopital , terminaron las dificultades para calcular los límites de expresiones indeterminadas. En cierto modo asi es ; sin embargo , ésta regla debe emplearse con la precaución de verificar que las funciones involucradas cumplan con las condiciones que la misma regla impone.

Ejemplo 13. Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x^4-81}{x-3} \right)$

Solución : Definiendo las funciones: $f(x) = x^4 - 81$ y $g(x) = x-3$, se tiene que

$$f(3) = 3^4 - 81 = 0 \quad ; \qquad g(3) = 3-3 = 0$$

asi que el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$ en $x = 3$.

Dado que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que hemos definido, son continuas y derivables en cualquier punto alrededor de $x = 3$, es posible en este caso, aplicar la regla de L´Hopital . . .

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{x^4-81}{x-3} \right) = \lim_{x\to 3} \left[\frac{\dfrac{d}{dx}\left(x^4-81\right)}{\dfrac{d}{dx}(x-3)} \right] = \lim_{x\to 3} \left(\frac{4\cdot x^3}{1} \right) = 108$$

Ejemplo 14. Calcular el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)-x}{x-\operatorname{sen}(x)}\right)$

Solución : Si se definen las funciones: $f(x) = \tan(x) - x$ y $g(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ entonces :

$$f(0) = \tan(0) - 0 = 0 \qquad \text{y} \qquad g(0) = (0 - \operatorname{sen}(0)) = 0$$

asi que el cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ cuando $x = 0$.
Dado que éstas funciones son continuas y derivables en cualquier intervalo en torno al valor $x = 0$, es posible aplicar la regla de L´Hopital y se obtiene . . .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(x)-x}{x-\operatorname{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot(\tan(x)-x)}{\frac{d}{dx}\cdot(x-\operatorname{sen}(x))}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sec^2\cdot(x)-1}{1-\cos(x)}\right]$$

sin embargo, éste último cociente es también una forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ en $x = 0$.

No obstante, antes de hacer una segunda aplicación de la regla de L´Hopital, veamos primero si es posible simplificar la expresión mediante una transformación trigonométrica. . .

$$\frac{\sec^2\cdot(x)-1}{1-\cos(x)} = \left[\frac{\tan^2\cdot(x)}{1-\cos(x)}\right] = \frac{\left[\frac{\operatorname{sen}^2\cdot x}{\cos^2(x)}\right]}{1-\cos^2\cdot(x)} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)-\cos^3(x)}$$

de manera que aplicando ahora si la regla de L´Hopital resulta :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left[\operatorname{sen}^2(x)\right]}{\frac{d}{dx}\cdot\left(\cos^2\cdot x-\cos^3\cdot x\right)}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}{-2\cdot\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(x)+3\cdot\cos^2\cdot x\cdot\operatorname{sen}(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)\cdot(-2+3\cdot\cos(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{-2+3\cdot\cos(x)}\right)$$

Esta última fracción es continua en $x = 0$ y el límite vale: $\frac{2}{-2+3\cdot(1)} = 2$

A veces es necesario aplicar la regla de *L´Hopital* más de una vez, como se hizo en el ejercicio anterior, sin embargo, esto no se debe hacer de manera mecánica, pues puede conducirnos a errores, como se ilustra en la "solución" del siguiente ejercicio.

Ejemplo 15. Calcular el límite: $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3 - x^2 - 8\cdot x + 12}{2\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 12\cdot x - 4}\right)$

Solución : Sean las funciones: $f(x) = x^3 - x^2 - 8\cdot x + 12$ y $g(x) = 2\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 12\cdot x - 4$, entonces . . .

$$f(2) = (2)^3 - (2)^2 - 8\cdot(2) + 12 = 0 \quad \text{y} \quad g(2) = 2\cdot(2)^3 - 9\cdot(2)^2 + 12\cdot(2) - 4 = 0$$

de modo que el cociente $\dfrac{f(2)}{g(2)}$ es una forma indeterminada del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Tanto $f(x)$ como $g(x)$ son polinomios, por lo cual son funciones continuas y derivables en cualquier valor de x , asi que es posible aplicar la regla de L´Hopital . . .

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\dfrac{d}{dx}\cdot\left(x^3 - x^2 - 8\cdot x + 12\right)}{\dfrac{d}{dx}\cdot\left(2\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 12\cdot x - 4\right)}\right] = \lim_{x\to 2}\left(\frac{3\cdot x^2 - 2\cdot x - 8}{6\cdot x^2 - 18\cdot x + 12}\right) \qquad (*)$$

que vuelve a ser una forma indeterminada del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ en $x = 2$.

Definiendo entonces las funciones continuas y derivables $f(x) = 3\cdot x^2 - 2\cdot x - 8$ y $g(x) = 6\cdot x^2 - 18\cdot x + 12$, una segunda aplicación de la regla de *L´Hopital* da . . .

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\dfrac{d}{dx}\cdot\left(3\cdot x^2 - 2\cdot x - 8\right)}{\dfrac{d}{dx}\cdot\left(6\cdot x^2 - 18\cdot x + 12\right)}\right] = \lim_{x\to 2}\left(\frac{6\cdot x - 2}{12\cdot x - 18}\right) \qquad (**)$$

y una tercera aplicación de la regla da . . .

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{\dfrac{d}{dx}\cdot(6\cdot x - 2)}{\dfrac{d}{dx}\cdot(12\cdot x - 18)}\right] = \lim_{x\to 2}\left(\frac{6}{12}\right) = 2$$

La primera y la segunda aplicación de la regla de L´Hopital están justificadas porque actúan sobre una forma indeterminado del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$; pero la tercera aplicación es incorrecta porque ya no existe indeterminación en el límite : $\lim_{x\to 2}\left(\frac{6\cdot x-2}{12\cdot x-18}\right) = \frac{5}{3}$.

Ejemplo 16. Calcular el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{ln(x+1)}{x}\right)$

Solución : Definiendo las funciones: $f(x) = ln(x+1)$ y $g(x) = x$ se tiene que :

$$f(0) = ln(0+1) = 0 \quad \text{y} \quad g(0) = 0$$

asi que el cociente $\frac{f(0)}{g(0)}$ es una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Como $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y derivables en torno a $x = 0$, es posible aplicar la regla de L´Hopital y se obtiene . . .

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{ln(x+1)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{d}{dx}(ln(x+1))}{\frac{d}{dx}(x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(\frac{1}{1+x}\right)}{1}\right] = \frac{\left[\frac{1}{1+(0)}\right]}{1} = 1$$

Nótese con que facilidad y rapidez se ha calculado este límite, que resulta bastante difícil de obtener de manera algebraica.

Ejemplo 17. La corriente eléctrica i en un circuito lineal de resistencia R , inductancia L y fuerza electromotriz E es una función del tiempo t que está dada por. . .

$$i(t) = \frac{E}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\right)$$

obtener una expresión para i cuando $R \to 0$.

Solución : Se trata de calcular el límite : $\lim\limits_{R\to 0}\left[\frac{E}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\right)\right]$, sin embargo , la fracción

$\frac{E}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{R\cdot t}{L}}\right)$ no está definida en $R = 0$, asi que definiendo las funciones de R :

$$f(R) = E\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right) \qquad \text{y} \qquad g(R) = R$$

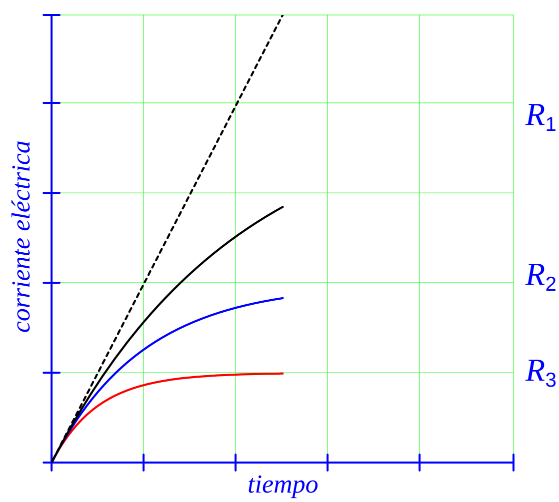
que son continuas y derivables en torno a $R = 0$, es posible aplicar la regla de L´Hopital :

$$\lim_{R\to 0}\left[\frac{E\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)}{R}\right] = \lim_{R\to 0}\left[\frac{\frac{d}{dR}\cdot E\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)}{\frac{d}{dR}\cdot R}\right] = \lim_{R\to 0}\left[\frac{\frac{E}{L}\cdot t\cdot\left(e^{\frac{-R}{L}\cdot t}\right)}{1}\right]$$

es decir . . .

$$\boxed{\lim_{R\to 0}\ (i(R)) = \frac{E}{L}\cdot t}$$

En las gráficas de la derecha, se puede apreciar que para tiempos largos, la corriente eléctrica i tiende a tomar un valor constante para un cierto valor de R ; pero de acuerdo al límite anterior, i *tiende a ser una función lineal del tiempo de pendiente E/L en el límite cuando R tiende a cero.* es decir , las curvas, que representan la variación de la corriente con el tiempo, tienden a aproximarse a la línea recta segmentada de la figura mostrada.



$$R_1 < R_2 < R_3$$

Ejemplo 18. Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x + sen(x) - 1}{ln(1+x)}\right)$

Solución : Sean las funciones : $f(x) = e^x + sen(x) - 1$ y $g(x) = ln(1+x)$ entonces . . .

$$f(0) = e^0 + 0 - 1 = 0 \quad \text{y} \quad g(0) = ln(1+0) = 0$$

asi que el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada del tipo $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ en $x = 0$.

Sin embargo, $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y derivables en torno a $x = 0$ y al aplicar la regla de *L´Hopital* se obtiene . . .

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + sen(x) - 1}{ln(1+x)}\right) = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\frac{d}{dx}\left(e^x + sen(x) - 1\right)}{\frac{d}{dx} ln(1+x)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{e^x + cos(x)}{\left(\frac{1}{1+x}\right)}\right] = \frac{(1)+(1)}{\left[\frac{1}{1+(0)}\right]} = 2$$

Apenas es posible imaginar la tremenda dificultad algebraica necesaria para resolver éste límite sin recurrir a la regla de *L´Hopital*. Gracias a ésta regla el cálculo de éste límite es muy simple y casi inmediato.

Ejemplo 19. Calcular el límite: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{tan(x)}{tan(3\cdot x)}\right)$

Solución : Definiendo las funciones: $f(x) = tan(x)$ y $g(x) = tan(3\cdot x)$ que no existen en $x = \dfrac{\pi}{2}$: pues $tan\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \infty$ y $tan\left(3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right) = \infty$ asi que el cociente $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una forma indeterminada del tipo $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ en $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Antes de aplicar la regla de *L'Hopital* , se puede transformar el límite a la forma indeterminada $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ notando que . . .

$$\frac{tan(x)}{tan(3\cdot x)} = \frac{\left(\frac{1}{cot(x)}\right)}{\left(\frac{1}{cot(3\cdot x)}\right)} = \left(\frac{cot(3\cdot x)}{cot(x)}\right)$$

y dado que $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cot\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = 0$ la función tiene ahora de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ cuando $x \to \frac{\pi}{2}$. Además , las funciones cotangente están bien definidas y son derivables en $x = \frac{\pi}{2}$, por lo tanto, aplicando la regla de *L´Hopital* , queda. . .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cot(3\cdot x)}{\cot(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\frac{d}{dx}\cdot\cot(3\cdot x)}{\frac{d}{dx}\cdot\cot(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-3\cdot\csc^2\cdot(3\cdot x)}{-\csc^2\cdot(x)}\right] = \frac{-3\cdot(1)^2}{-(1)^2} = 3$$

6.6 <u>*Las formas indeterminadas*</u> $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, $(0)^0$, $(\infty)^0$, $(1)^\infty$

La técnica para la solución de éstas formas indeterminadas es transformarlas a los tipos $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

- ***La forma*** $(0\cdot\infty)$

Cuando $\lim_{x\to a} (f(x)) = 0$ y $\lim_{x\to a} (g(x)) = \infty$ entonces el límite $\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x))$ calculado directamente por las propiedades de los límites, conduce a la forma indeterminada $(0\cdot\infty)$. Por ello, antes de calcular el límite a través de la regla de L´Hopital, es necesario transformar primero la expresión inicial rescribiéndola como . . .

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)}\right] \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)}\right]$$

de manera que se obtenga una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ ó $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ respectivamente.

<u>*Ejemplo*</u> 20. Calcular el límite: $\lim_{x\to 0} \left(x^n\cdot\ln(x)\right)$

Solución : Definiendo las funciones $f(x) = x^n$ y $g(x) = ln(x)$ entonces :

$$\lim_{x\to 0} x^n = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} ln(x) = \infty$$

y la expresión $f(x)\cdot g(x)$ es indeterminada del tipo $(0\cdot\infty)$ en el límite cuando $x \to 0$.

Transformando entonces a la forma $\left(\frac{0}{0}\right)$ queda . . .

$$\lim_{x\to 0} \left(x^n\cdot ln(x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^n}{\left(\frac{1}{ln(x)}\right)}$$

Como $f(x)$ y $\frac{1}{g(x)}$ son continuas y derivables si $x \neq 0$, aplicando la regla de *L´Hopital* se obtiene :

$$\lim_{x\to 0} \left(x^n\cdot ln(x)\right) = \lim_{x\to 0} \left[\frac{x^n}{\left(\frac{1}{ln(x)}\right)}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot x^n}{\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{ln(x)}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{n\cdot x^{n-1}}{\left(\frac{-1}{x\cdot ln(x)^2}\right)}\right]$$

¡ Uuupsss ! , ésta expresión es aún más complicada que la inicial. Esto significa que se debe transformar la expresión inicial a la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

$$\lim_{x\to 0} \left(x^n\cdot ln(x)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{ln(x)}{\left(\frac{1}{x^n}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\cdot ln(x)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{x^n}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{-n}{x^{n+1}}\right)}$$

y simplificando resulta finalmente : $\lim_{x\to 0} \left(x^n\cdot ln(x)\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-x^n}{n}\right) = 0$

- ***La forma*** $(\infty - \infty)$

Cuando $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ entonces el límite $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - g(x))$ calculado directamente usando los teoremas sobre límites, genera una forma indeterminada del tipo $(\infty - \infty)$.

Por ello, es necesario transformar primero la expresión inicial haciendo . . .

$$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = \left[\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\left(1 - \dfrac{g(x)}{f(x)}\right) \\ \text{ó} \\ \lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} - 1\right) \end{array}\right]$$

de manera que si el límite de de la fracción $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ó de $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ vale 1 entonces se obtiene la forma indeterminada $(0\cdot\infty)$ que se resuelve como en el caso anterior .

<u>Ejemplo</u> 21. Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

<u>Solución</u> : Las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$ son tales que . . .

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \infty$$

de modo que la expresión $f(x) - g(x)$ es indeterminada del tipo $(\infty - \infty)$ en el límite cuando $x \to 0$. Transformando la expresión inicial resulta . . .

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x}\cdot\left(1 - \frac{x}{e^x - 1}\right)\right]$$

y dado que $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x}{e^x - 1}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{e^x}\right) = 1$ y $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right) = \infty$

entonces $\lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{1}{x}\cdot\left(1 - \dfrac{x}{e^x - 1}\right)\right]$ es una forma indeterminada del tipo $(0\cdot\infty)$ que se resuelve haciendo . . .

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot\left(1-\frac{x}{e^x-1}\right)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\left(1-\dfrac{x}{e^x-1}\right)}{x}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-1-x}{x\cdot\left(e^x-1\right)}\right]$$

Como las funciones $\left(e^x-1-x\right)$ y $x\cdot\left(e^x-1\right)$ son continuas y derivables en todo valor de x , aplicando 2 veces la regla de *L´Hopital* se obtiene . . .

1ª aplicación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\cdot\left(e^x-1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}\cdot\left(e^x-x-1\right)}{\dfrac{d}{dx}\cdot\left[x\cdot\left(e^x-1\right)\right]} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x\cdot e^x+e^x-1}\right) \to \left(\frac{0}{0}\right)$$

2ª aplicación :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\cdot e^x+e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{d}{dx}\cdot\left(e^x-1\right)}{\dfrac{d}{dx}\cdot\left(x\cdot e^x+e^x-1\right)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{x\cdot e^x+2\cdot e^x}\right) = \frac{1}{2}$$

- ***Las formas*** 0^0 , ∞^0 ***y*** 1^∞ **.**

Cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \infty, 0, 1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty, 0$ entonces el límite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ calculado directamente usando las propiedades de los límites, puede generar una de las formas indeterminadas 0^0 , ∞^0 o 1^∞ . En éstos casos, por la propiedad de la función logaritmo. . .

$$ln\left(\lim_{x\to a} F(x)\right) = \lim_{x\to a} ln(F(x))$$

válida para una función $F(x)$ que sea continua y derivable , resulta . . .

$$ln\left(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x\to a} ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x\to a}\left(g(x)\cdot ln(f(x))\right)$$

de modo que éste límite adoptará la forma indeterminada : $(0\cdot\infty)$ en cualquier caso .
Una vez que se haya calculado tal límite, por la función inversa del logaritmo es claro que . . .

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right) = e^{\lim_{x\to a}\left(g(x)\cdot ln(f(x))\right)} \qquad (6.13)$$

Ejemplo 22. Calcular el límite: $\lim_{x\to 0} \left[sec^3\cdot(2\cdot x)\right]^{(cot(3\cdot x))^2}$

Solución : Calculado directamente, éste límite tiene la forma indeterminada $(1)^\infty$ . . .

$$\lim_{x\to 0} \left[sec^3\cdot(2\cdot x)\right]^{(cot(3\cdot x))^2} = \left[\lim_{x\to 0} sec^3\cdot(2\cdot x)\right]^{\lim_{x\to 0}(cot(3\cdot x))^2} = (1)^\infty$$

porque $sec(0) = 1$ y $cot(0) = \infty$.

Entonces definiendo $f(x) = sec^3\cdot(2\cdot x)$, $g(x) = (cot(3\cdot x))^2$ y aplicando la identidad (6.13) resulta . . .

$$\lim_{x\to 0} \left[sec^3\cdot(2\cdot x)\right]^{(cot(3\cdot x))^2} = e^{\lim_{x\to 0}\left[(cot(3\cdot x))^2\cdot ln\left[sec^3\cdot(2\cdot x)\right]\right]}$$

pero . . .

$$\lim_{x\to a} \left[(cot(3\cdot x))^2\cdot ln\left[sec^3\cdot(2\cdot x)\right]\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3\cdot ln[sec\cdot(2\cdot x)]}{tan^2\cdot(3\cdot x)}\right]$$

de manera que aplicando la regla de L´Hopital queda :

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot[\,3\cdot ln[sec\cdot(2\cdot x)]\,]}{\frac{d}{dx}\cdot\left[tan^2\cdot(3\cdot x)\right]}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{tan(2\cdot x)}{tan(3\cdot x)\cdot\left[sec^2\cdot(3\cdot x)\right]}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{tan(2\cdot x)}{tan(3\cdot x)}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left[sec^2\cdot(3\cdot x)\right]} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{tan(2\cdot x)}{tan(3\cdot x)}\right)\cdot(1)$$

que aún tiene la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$. Por lo tanto , una segunda aplicación dá . . .

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{d}{dx}\cdot tan(2\cdot x)}{\frac{d}{dx}\cdot tan(3\cdot x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2\cdot sec^2\cdot(2\cdot x)}{3\cdot sec^2\cdot(3\cdot x)}\right] = \frac{2}{3}$$

y finalmente . . . $\lim_{x\to 0} \left[sec^3\cdot(2\cdot x)\right]^{(cot(3\cdot x))^2} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$

Ejemplo 23. Calcular el límite: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan(x)^{\cos(x)}\right)$

Solución : Calculado directamente, éste límite tiene la forma indeterminada $(\infty)^0$ . . .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan(x)^{\cos(x)}\right) = \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos(x)\right)} = (\infty)^0$$

dado que $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Definiendo entonces $f(x) = \tan(x)$, $g(x) = \cos(x)$ y aplicando la identidad (6.13) , se obtiene . . .

$$\lim \left(f(x)^{g(x)}\right) = e^{\lim\limits_{x\to a} (g(x)\cdot \ln(f(x)))} = e^{\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos(x)\cdot \ln(\tan(x)))\right]}$$

pero, por la regla de *L´Hópital* :

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos(x)\cdot \ln(\tan(x))) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\ln(\tan(x))}{\sec(x)}\right) \to \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d}{dx}\cdot \ln(\tan(x))}{\frac{d}{dx}\cdot \sec(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left[\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)}\right]}{\sec(x)\cdot \tan(x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec(x)}{\tan^2(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}\right] = \frac{0}{(1)^2} = 0$$

y finalmente . . .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan(x)^{\cos(x)}\right) = e^0 = \boxed{1}$$

EJERCICIO 6.2

Calcular los siguientes límites.

1) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{e^x - e^2}{x-2}\right)$

2) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{x\cdot e^x}{1-e^x}\right)$

3) $\lim_{x\to -1}\left(\dfrac{ln(2+x)}{x+1}\right)$

4) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cdot arctan(x) - x}{2\cdot x - arcsen(x)}\right)$

5) $\lim_{x\to \infty}\left(\dfrac{ln(x)}{\sqrt{x}}\right)$

6) $\lim_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^4 + x^2}{e^x + 1}\right)$

7) $\lim_{x\to 0}\,(x\cdot csc(x))$

8) $\lim_{x\to 1}\,(csc(\pi\cdot x)\cdot ln(x))$

9) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[e^{-tan(x)}\cdot sec^2\cdot(x)\right]$

10) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{sen(x)}\right)$

11) $\lim_{x\to 0}\left(x^x\right)$

12) $\lim_{x\to 0}\left[(cos(x))^{\frac{1}{x}}\right]$

13) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left[(sen(x) - cos(x))^{tan(x)}\right]$

14) $\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{e^x\cdot\left(1-e^x\right)}{(1+x)\cdot ln(1+x)}\right]$

15) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3 - 2\cdot x^2 - x + 2}{x^3 - 7\cdot x + 6}\right)$

16) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1-x}{1 - sen\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot x\right)}\right)$

17) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\left[\dfrac{sec^2\cdot(x) - 2\cdot tan(x)}{1 + cos(4\cdot x)}\right]$

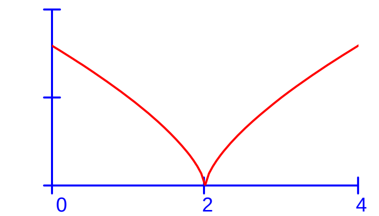
18) $\lim_{x\to 0}\,[cot(x)\cdot(1 - cos(x))]$

19) $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{ln(x)}\right)$

20) $\lim_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)} - \dfrac{1}{3\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right]$

Respuestas Ejercicio 6.1
(problemas impares)

1. No, porque la derivada de la función $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x-2}}$ no existe en $x = 2$, que es un punto interior del intervalo $[0,4]$.
Como se puede apreciar en la gráfica de ésta función, representada a la derecha, la curva no tiene en el intervalo $[0,4]$ una tangente horizontal porque su derivada nunca se anula .

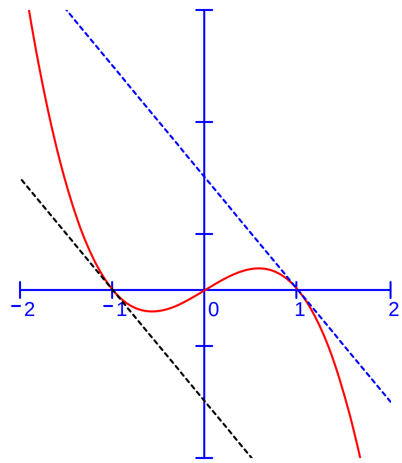


3. Si se cumplen, dado que $f(x) = x - x^3$ es un polinomio, y por lo tanto es una función continua y derivable en todo valor de x.
Además, del teorema de Lagrange . . .

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{(x_0)}$$

con $a = -2$ y $b = 1$ se obtiene: $\dfrac{6-0}{(-2)-1} = 1 - 3\cdot(x_0)^2$

lo que implica : $x_0 = -1$ o $x_0 = 1$. Por lo tanto existen dos puntos de la curva donde su tangente es paralela a la recta que pasa por $(-2,6)$ y $(1,0)$, como se puede ver en la gráfica de la derecha.

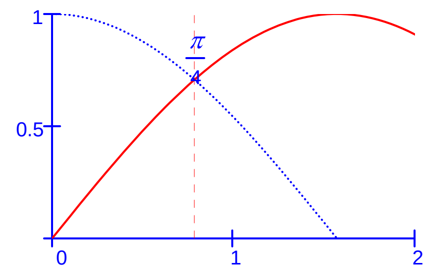


5. Si se cumplen , porque son las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = cos(x)$ son continuas y derivables en cualquier punto, así que por el teorema de Cauchy :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)_{(x_0)}$$

con $a = 0$ y $b = \dfrac{\pi}{2}$ se obtiene . . .

$$\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen(0)}{cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - cos(0)} = \frac{cos(x_0)}{-sen(x_0)}$$



es decir : $\left(\dfrac{1-0}{0-1}\right) = -tan(x_0)$ de donde resulta $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$

7. Las primeras derivadas de la función evaluadas en $a = -1$ son . . .

$$f(x) = x^5 + 2\cdot x^4 - x^2 + x + 1 \qquad f(-1) = 0$$

$$\frac{df}{dx} = 5\cdot x^4 + 8\cdot x^3 - 2\cdot x + 1 \qquad \frac{df(-1)}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2\cdot f}{dx^2} = 20\cdot x^3 + 24\cdot x^2 - 2 \qquad \frac{d^2\cdot f(-1)}{dx^2} = 2$$

$$\frac{d^3\cdot f}{dx^3} = 60\cdot x^2 + 48\cdot x \qquad \frac{d^3\cdot f(-1)}{dx^3} = 12$$

$$\frac{d^4\cdot f}{dx^4} = 120\cdot x + 48 \qquad \frac{d^4\cdot f(-1)}{dx^4} = -72$$

$$\frac{d^5\cdot f}{dx^5} = 120 \qquad \frac{d^5\cdot f(-1)}{dx^5} = 120$$

y por lo tanto, las derivadas de orden superior a 5 son nulas, de modo que de la fórmula Taylor queda:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\cdot\left(\frac{df(a)}{dx}\right) + \frac{(x-a)^2}{2!}\cdot\left(\frac{d^2\cdot f(a)}{dx^2}\right) + \frac{(x-a)^3}{3!}\cdot\left(\frac{d^3\cdot f(a)}{dx^3}\right) + \ldots$$
$$+ \ldots + \left[\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right]\cdot\left(\frac{d^{n+1}\cdot f(x_n)}{dx^{n+1}}\right)$$

con $a = -1$ queda en éste caso como . . .

$$f(x) = 0 + 0 + \frac{(x+1)^2}{(2)!}\cdot(2) + \frac{(x+1)^3}{(3)!}\cdot(12) + \frac{(x+1)^4}{(4)!}\cdot(-72) + \frac{(x+1)^5}{(5)!}\cdot(120)$$

y finalmente :

$$x^5 + 2\cdot x^4 - x^2 + x + 1 = (x+1)^2 + 2\cdot(x+1)^3 - 3\cdot(x+1)^4 + (x+1)^5$$

9. Las primeras derivadas de la función $f(x) = ln(x)$ evaluadas en $a = 1$ son . . .

$$f(x) = ln(x) \qquad f(1) = 0$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{df(1)}{dx} = 1$$

$$\frac{d^2 \cdot f}{dx^2} = \frac{-1}{x^2} \qquad \frac{d^2 \cdot f(1)}{dx^2} = -1$$

$$\frac{d^3 \cdot f}{dx^3} = \frac{2}{x^3} \qquad \frac{d^3 \cdot f(1)}{dx^3} = 2$$

$$\frac{d^4 \cdot f}{dx^4} = \frac{-6}{x^4} \qquad \frac{d^4 \cdot f(1)}{dx^4} = -6$$

$$\frac{d^5 \cdot f}{dx^5} = \frac{24}{x^5} \qquad \frac{d^5 \cdot f(1)}{dx^5} = 24$$

de modo que la fórmula de Taylor . . .

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\cdot(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3 + ... + \frac{f^{n+1}(x_n)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$$

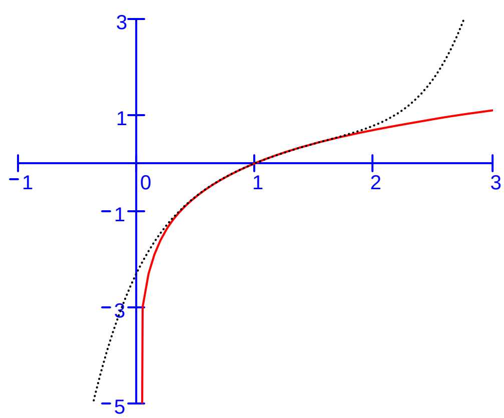
con $a = 1$ queda en éste caso como . . .

$$f(x) = 0 + (x-1) + \frac{(-1)}{(2)!}\cdot(x-1)^2 + \frac{2}{(3)!}\cdot(x-1)^3 + \frac{(-6)}{(4)!}\cdot(x-1)^4 + \frac{24}{(5)!}\cdot(x-1)^5 + ...$$

esto es . . .

$$ln(x) \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5} + ...$$

En la figura de la derecha se da una aproximación a la función $ln(x)$ tomando los cinco primeros términos de ésta serie centrada en $x = 1$.
Como se puede apreciar en la gráfica, la aproximación coincide con la función para puntos cercanos a $x = 1$.
En forma general, la aproximación a una función, obtenida con la fórmula de Taylor, siempre estará centrada alrededor del valor $x = a$



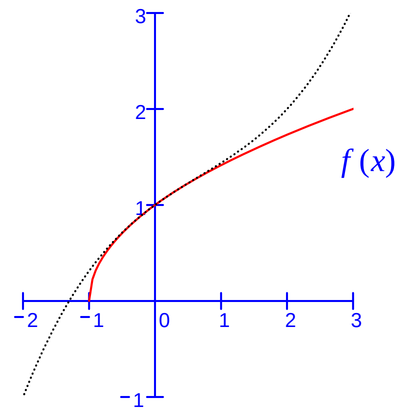
11. Las primeras derivadas de la función $f(x) = \sqrt{x+1}$ (que no son nulas) evaluadas en $a = 0$ son . . .

$$f(x) = \sqrt{x+1} \quad ; \quad f(0) = 1$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+1}} \quad ; \quad \frac{df(1)}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d^2\cdot f}{dx^2} = \frac{-1}{4\cdot\sqrt{(x+1)^3}} \quad ; \quad \frac{d^2\cdot f(0)}{dx^2} = \frac{-1}{4}$$

$$\frac{d^3\cdot f}{dx^3} = \frac{3}{8\cdot\sqrt{(x+1)^5}} \quad ; \quad \frac{d^2\cdot f(0)}{dx^2} = \frac{3}{8}$$



de modo que los primeros términos del desarrollo de MacLaurin :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{(2)!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{(3)!}\cdot x^3 + ...$$

para ésta función son . . .

$$\sqrt{x+1} \approx \boxed{1 + \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{8}\cdot x^2 + \frac{1}{16}\cdot x^3}$$

Esta aproximación está centrada en $x = 0$.

13. Es el desarrollo de MacLaurin hasta el 4º orden de la función $f(x) = ln(cos(x))$

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{(1)!}\cdot x + \frac{f''(0)}{(2)!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{(3)!}\cdot x^3 + \frac{f^{(4)}\cdot(0)}{(4)!}\cdot x^4 + ...$$

$$\approx ln(cos(0)) + \frac{-sen(0)}{cos(0)}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{cos(0)^2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{-2\cdot sen(0)}{cos(0)^3}\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot\frac{2\cdot\left(2\cdot cos(0)^2 - 3\right)}{cos(0)^4}\cdot x^4$$

$$\approx ln(1) + (0)\cdot x + \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot(0)\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot(-2)\cdot x^4 = \boxed{-\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^4}{12}\right)}$$

15. Es el desarrollo de MacLaurin hasta el 5º orden de la función $tan(x)$

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{f^{(4)}\cdot(0)}{4!}\cdot x^4 + \frac{f^{(5)}\cdot(0)}{5!}\cdot x^5 + ...$$

$$tan(x) \approx tan(0) + \frac{1}{cos(0)^2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot sen(0)}{cos(0)^3}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{(-2)\cdot\left(2\cdot cos(0)^2 - 3\right)}{cos(0)^4}\cdot x^3 \ ...$$
$$+ \frac{1}{24}\cdot\left[-8\cdot sin(0)\cdot\frac{\left(cos(0)^2 - 3\right)}{cos(x)^5}\right]\cdot x^4 + \frac{1}{120}\cdot\left[8\cdot\frac{\left(2\cdot cos(0)^4 - 15\cdot cos(0)^2 + 15\right)}{cos(x)^6}\right]\cdot x^5$$

$$\approx \ 0 + \frac{1}{(1)^2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\frac{0}{(1)^3}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot(2)\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot[-8\cdot(0)]\cdot x^4 + \frac{1}{120}\cdot[8\cdot(2)]\cdot x^5 \ = \ \boxed{x + \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{15}\cdot x^5}$$

17. Es el desarrollo de MacLaurin hasta el 3er orden de la función $f(x) = ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{(1)!}\cdot x + \frac{f''(0)}{(2)!}\cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{(3)!}\cdot x^3 + ...$$

$$\approx \ ln\left(0 + \sqrt{1 + 0^2}\right) + \frac{1}{(1)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + 0^2}}\cdot x + \frac{1}{(2)!}\cdot\frac{-(0)}{\sqrt{\left(1 + 0^2\right)^3}}\cdot x^2 + \frac{1}{(3)!}\cdot\frac{2\cdot(0)^2 - 1}{\sqrt{\left(1 + 0^2\right)^5}}\cdot x^3$$

$$\approx \ 0 + \left(\frac{1}{1^2}\right)\cdot x + (0)\cdot x^2 - \frac{1}{6}\cdot x^3 \ = \ \boxed{x - \frac{1}{6}\cdot x^3}$$

19. Desarrollando el numerador y el denominador de la función: $f(x) = \dfrac{x\cdot ln(1 - x)}{sen^2\cdot(x)}$ independientemente por medio de la fórmula de MacLaurin (puesto que $x \to 0$) , obtiene . . .

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\cdot ln(1 - x)}{sen^2\cdot(x)}\right] \ = \ \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x^3 - \frac{1}{3}\cdot x^4 + ...}{x^2 - \frac{1}{3}\cdot x^4 + ...}\right)$$

de modo que al dividir la fracción por x^2 resulta :

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\cdot ln(1 - x)}{sen^2\cdot(x)}\right] \ = \ \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + ...}{1 - \frac{x^2}{3} + ...}\right) \ = \ \frac{-1 - 0 - 0 - ..}{1 - 0 + 0 - ..} \ = \ \boxed{-1}$$

21. Al sumar los dos términos de la función y realizar la expansión en series de potencias de MacLaurin en el numerador que resulta, se obtiene . . .

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\cot^2(x)\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-(x\cdot\cot(x))^2}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{1}{3}\cdot x^2-\frac{1}{45}\cdot x^4+..\right)^2}{x^2}$$

y al simplificar se obtiene . . .

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}-\cot^2(x)\right] = \lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{2}{3}\cdot x^2+\frac{1}{15}\cdot x^4+\frac{2}{189}\cdot x^6+..\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}-\frac{x^2}{15}-\frac{2\cdot x^4}{189}+....\right) = \frac{2}{3}$$

<u>Respuestas</u> . *Ejercicio 6.2*
(problemas impares)

1 $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{e^x-e^2}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(e^x-e^2\right)}{\frac{d}{dx}\cdot(x-2)}\right] = \lim_{x\to 2}\left(\frac{e^x-0}{1-0}\right) = e^2$$

3. $$\lim_{x\to -1}\left(\frac{\ln(2+x)}{x+1}\right) = \lim_{x\to -1}\left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot\ln(2+x)}{\frac{d}{dx}\cdot(x+1)}\right] = \lim_{x\to -1}\left[\frac{\left(\frac{1}{2+x}\right)}{1+0}\right] = 1$$

5. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot\ln(x)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(\sqrt{x}\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

7. $$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\csc(x)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{d}{dx}\cdot x}{\frac{d}{dx}\cdot\operatorname{sen}(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos(x)}\right) = 1$$

9. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[e^{-\tan(x)}\cdot sec^2\cdot(x)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{sec^2\cdot(x)}{e^{\tan(x)}}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot sec^2\cdot(x)}{\frac{d}{dx}\cdot e^{\tan(x)}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{2\cdot sec(x)^2\cdot\tan(x)}{sec^2\cdot(x)\cdot e^{\tan(x)}}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\tan(x)}{e^{\tan(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot(2\cdot\tan(x))}{\frac{d}{dx}\cdot e^{\tan(x)}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot sec^2\cdot(x)}{sec^2\cdot(x)\cdot e^{\tan(x)}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{e^{\tan(x)}}\right)$$

pero . . .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{2}{e^{\tan(x)}}\right) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{2}{e^{\tan(x)}}\right) = \infty$$

11. Haciendo $y = x^x$, y tomando logaritmos : $\ln(y) = x\cdot\ln(x)$, al calcular el límite queda . . .

$$\lim_{x\to 0} \ln(y) = \lim_{x\to 0} (x\cdot\ln(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot\ln(x)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)}\right] = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}\right] = \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

por lo tanto : $\lim_{x\to 0} \ln(y) = \ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = 0$, lo cual significa que $\lim_{x\to 0} y = 1$, es decir :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \left(x^x\right) = 1}$$

13. Calculando directamente el límite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[(sen(x) - \cos(x))^{\tan(x)}\right]$, se genera la forma indeterminada :

$$(1-0)^{\infty} = 1^{\infty}$$

así que haciendo $y = (sen(x) - cos(x))^{tan(x)}$, tomando logaritmos :

$$ln(y) = tan(x) \cdot ln(sen(x) - cos(x))$$

y calculando el límite . . .

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} ln(y) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (tan(x) \cdot ln(sen(x) - cos(x)))$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\frac{d}{dx} \cdot ln(sen(x) - cos(x))}{\frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{1}{tan(x)} \right)} \right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\left(\frac{cos(x) + sen(x)}{sen(x) - cos(x)} \right)}{\left[\frac{-1}{sen^2(x)} \right]} \right]$$

$$= \frac{\left(\frac{0+1}{1-0} \right)}{\left(\frac{-1}{1^2} \right)} = -1$$

por lo tanto : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} ln(y) = ln\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y \right) = -1$ lo cual significa que $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} y = e^{-1}$, esto es :

$$\boxed{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[(sen(x) - cos(x))^{tan(x)} \right] = \frac{1}{e}}$$

15. $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 2}{x^3 - 7 \cdot x + 6} \right) = \lim_{x \to 1} \left[\frac{\frac{d}{dx} \cdot \left(x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 2 \right)}{\frac{d}{dx} \cdot \left(x^3 - 7 \cdot x + 6 \right)} \right] = \lim_{x \to 1} \left(\frac{3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1}{3 \cdot x^2 - 7} \right)$$

$$= \frac{3-4-1}{3-7} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

17. $$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{sec^2 \cdot (x) - 2 \cdot tan(x)}{1 + cos(4 \cdot x)} \right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left[tan^2 \cdot (x) + 1 \right] - 2 \cdot tan(x)}{1 + cos(4 \cdot x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(tan(x) - 1)^2}{1 + cos(4 \cdot x)}$$

que es la forma indeterminada : $\left(\frac{0}{0}\right)$ por lo cual . . .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(tan(x)-1)^2}{1+cos(4\cdot x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot(tan(x)-1)^2}{\frac{d}{dx}\cdot(1+cos(4\cdot x))}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cdot(tan(x)-1)\cdot sec^2\cdot(x)}{-4\cdot sen(4\cdot x)}$$

que aún es de la forma indeerminada $\left(\frac{0}{0}\right)$, po eso, con una segunda aplicación de la regla de L´Hopital se obtiene :

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left[\frac{2\cdot sec(x)^2\cdot\left(1+3\cdot tan(x)^2-2\cdot tan(x)\right)}{-16\cdot cos(4\cdot x)}\right]$$

$$= \frac{2\cdot(\sqrt{2})^2\cdot(1+3-2)}{-16\cdot(-1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

19. $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1} \left[\frac{x\cdot ln(x)-(x-1)}{(x-1)\cdot ln(x)}\right] = \lim_{x\to 1} \left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot[x\cdot ln(x)-(x-1)]}{\frac{d}{dx}\cdot[(x-1)\cdot ln(x)]}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{ln(x)}{\left[ln(x)+\frac{(x-1)}{x}\right]} \to \left(\frac{0}{0}\right)$$

Una segunda aplicación de la regla de L´Hopital da :

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1} \left[\frac{\frac{d}{dx}\cdot(ln(x))}{\frac{d}{dx}\cdot\left[ln(x)+\frac{(x-1)}{x}\right]}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left[\frac{(x+1)}{x^2}\right]} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Respuestas . Ejercicio 6.1
(problemas pares)

2. No, porque la función tangente es discontinua en $\frac{\pi}{2}$

4. Si. La función $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ es continua y derivable en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que . . .

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{d}{dx} \cdot f(x_o) \quad \text{implica que} \quad \frac{\sqrt[3]{(1)^4} - \sqrt[3]{(-1)^4}}{1 - (-1)} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[3]{x_o}$$

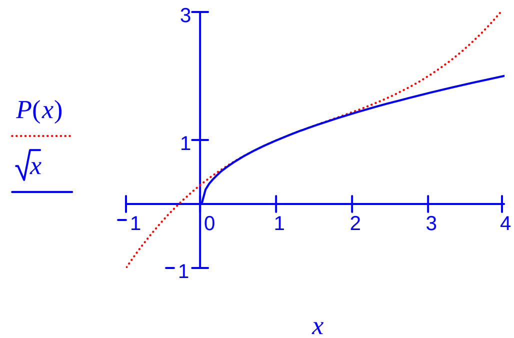
de donde se obtiene que . . . $x_o = 0$

6. $P(x) = -7 \cdot (x - 2) - (x - 2)^2 + 3 \cdot (x - 2)^3 + (x - 2)^4$

8. $\sqrt{x} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{(1)!} \cdot \left[\frac{1}{(2 \cdot \sqrt{1})} \right] \cdot (x - 1) + \frac{1}{(2)!} \cdot \left[\frac{-1}{4 \cdot \sqrt{(1)^3}} \right] \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{(3)!} \cdot \frac{3}{\left[8 \cdot \sqrt{(1)^5} \right]} \cdot (x - 1)^3$

de manera que el polinomio de tercer grado que aproxima a ésta función cerca de $x = 1$ es . . .

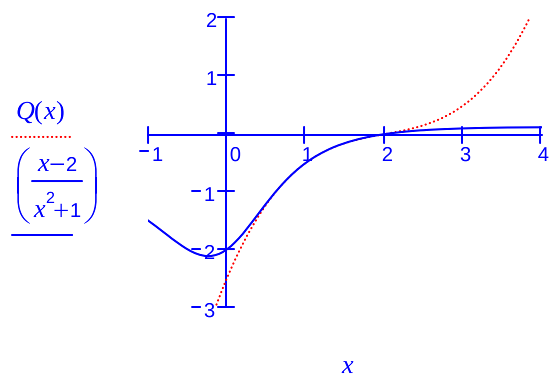
$$P(x) := \left(\frac{5}{16} + \frac{15}{16} \cdot x - \frac{5}{16} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot x^3 \right)$$



10. $\left(\frac{x - 2}{x^2 + 1} \right) \approx \frac{-1}{2} + \frac{1}{(1)!} \cdot (1) \cdot (x - 1) + \frac{1}{(2)!} \cdot \left(\frac{-3}{2} \right) \cdot (x - 1)^2 + \frac{1}{(3)!} \cdot \left(\frac{3}{2} \right) \cdot (x - 1)^3$

de manera que el polinomio de tercer grado que aproxima a ésta función cerca de $x = 1$ es . . .

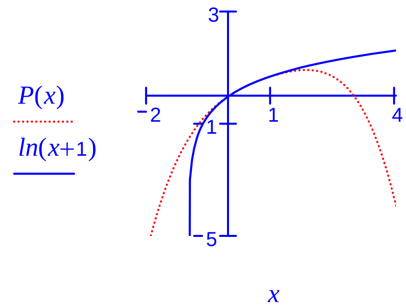
$$Q(x) := \frac{-5}{2} + \frac{13}{4} \cdot x - \frac{3}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot x^3$$



12. $ln(x+1) \approx ln(2) + \frac{1}{2}\cdot(x-1) + \frac{1}{2!}\cdot\frac{-1}{4}\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{4}\cdot(x-1)^3 + \frac{1}{4!}\cdot\frac{-3}{8}\cdot(x-1)^4 + ...$

y el polinomio de cuarto grado que aproxima a ésta función cerca de $x = 1$ es . . .

$$P(x) := ln(2) + \frac{31}{32}\cdot x - \frac{661}{960} - \frac{13}{32}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot x^3 - \frac{3}{64}\cdot x^4$$



14. Es el desarrollo de MacLaurin hasta el 3º orden para la función $f(x) = arcsen(x)$

$$arcsen(x) \approx arcsen(0) + \frac{1}{1!}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-0^2}}\right)\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{0}{\sqrt{\left(1-0^2\right)^3}}\cdot x^2 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{\left[2\cdot(0)^2 - 1\right]}{\sqrt{\left(1-0^2\right)^5}}\cdot x^3 = \boxed{x + \frac{1}{6}\cdot x^3}$$

16 . Es el desarrollo de MacLaurin hasta el 3º orden para la función $f(x) = arctan(x)$

$$arctan(x) \approx arctan(0) + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{1+(0)^2}\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{-2\cdot(0)}{\left(1+0^2\right)^2}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot 2\cdot\frac{\left[3\cdot(0)^2 - 1\right]}{\left(1+0^2\right)^3}\cdot x^3 = \boxed{x - \frac{x^3}{3}}$$

18. $$\lim_{x\to 0}\frac{x - sen(x)}{e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \left(x - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{120}\cdot x^5 + ..\right)}{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + ...\right) - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - ..}{\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + ...}\right) = \boxed{1}$$

20. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1 - sec(x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{5}{24}\cdot x^4 + ...\right)}{x^2}\right] = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

<u>Respuestas</u> . Ejercicio 6.2
(problemas pares)

2. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cdot e^x}{1-e^x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(x\cdot e^x\right)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(1-e^x\right)} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x\cdot(x+1)}{-e^x}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{-1}\right) = -1$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\cdot(2\cdot arctan(x)-x)}{\frac{d}{dx}\cdot(2\cdot x - arcsen(x))} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{2}{\left(1+x^2\right)}-1}{2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}\right] = \frac{2-1}{2-1} = 1$$

6. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(x^4+x^2\right)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(e^x+1\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4\cdot x^3+2\cdot x}{e^x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(4\cdot x^3+2\cdot x\right)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(e^x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{12\cdot x^2+2}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\cdot\left(12\cdot x^2+2\right)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(e^x\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{24\cdot x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\cdot(24\cdot x)}{\frac{d}{dx}\cdot\left(e^x\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{24}{e^x}\right) = 0$$

8. $$\lim_{x\to 1}\frac{ln(x)}{sen(\pi\cdot x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}\cdot(ln(x))}{\frac{d}{dx}\cdot(sen(\pi\cdot x))} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\pi\cdot cos(\pi\cdot x)} = \frac{-1}{\pi}$$

10. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)-x}{x\cdot sen(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\cdot(sen(x)-x)}{\frac{d}{dx}\cdot(x\cdot sen(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{cos(x)-1}{sen(x)+x\cdot cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\cdot(cos(x)-1)}{\frac{d}{dx}\cdot(sin(x)+x\cdot cos(x))} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{-sen(x)}{(2\cdot cos(x)-x\cdot sen(x))}\right] = \frac{0}{2-0} = 0$$

12. $\lim_{x\to 0} \left(\cos(x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1$

14. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{e^{x}\cdot\left(1-e^{x}\right)}{(1+x)\cdot ln(1+x)}\right] = -1$

16. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1-x}{1-sen\left(\frac{\pi}{2}\cdot x\right)}\right) = \infty$

18. $\lim_{x\to 0} \left[cot(x)\cdot(1-cos(x))\right] = 0$

20. $\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{2\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)} - \frac{1}{3\cdot\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\right] = \frac{1}{12}$

Capítulo VII
Integral Indefinida

7.1 *Definición y propiedades* .

En las matemáticas existen pares de operaciones que son mutuamente inversas: multiplicar y dividir, sumar y restar, las potencias y las raíces, logaritmos y exponenciales son algunos de esos pares .
Pues bien, la operación inversa a la derivación se llama *integración* y su objetivo fundamental es :

Hallar la función $F(x)$ ***cuya derivada*** $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ ***se conoce .***

o también:

Dada la diferencial $dF(x) = f(x) \cdot dx$ ***de una función*** $F(x)$ ***, hallar tal función .***

A la función $F(x)$ buscada se le llama *función primitiva* o *integral* .

Ejemplo 1.

a) Dado que $\dfrac{d}{dx} \cdot x^3 = 3 \cdot x^2$, entonces $F(x) = x^3$ es una función primitiva de $f(x) = 3 \cdot x^2$.

b) Si $\dfrac{d}{dx} \cdot sen(x) = cos(x)$, entonces $F(x) = sen(x)$ es una función primitiva de $f(x) = cos(x)$.

c) Si $\dfrac{d}{dx} \cdot arctan(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ entonces $F(x) = arctan(x)$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Es claro que si una función $f(x)$ tiene una función primitiva $F(x)$, ésta no es única puesto que . . .

$$\frac{d}{dx} \cdot (F(x) + C) = \frac{d}{dx} \cdot F(x) = f(x)$$

para cualquier constante C *arbitraria*.

De modo que $F(x) + C$ también es una función primitiva de $f(x)$ y como el valor de esa constante puede ser cualquier número real, se deduce que $f(x)$ tiene una infinidad de funciones primitivas.

Es posible demostrar que *todas las funciones primitivas de* $f(x)$ *son del tipo* $F(x) + C$, como sigue :

TEOREMA 1 .

Si $F_1(x)$ ***y*** $F_2(x)$ ***son dos integrales o funciones primitivas de*** $f(x)$ ***en el intervalo cerrado*** $[a, b]$ ***, entonces su diferencia es solamente una constante, es decir :***

$$F_1(x) = F_2(x) + C$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u> :

Si $F_1(x)$ ***y*** $F_2(x)$ ***son dos funciones primitivas de*** $f(x)$ ***entonces, se cumple que :***

$$\frac{dF_1(x)}{dx} = f(x) \qquad y \qquad \frac{dF_2(x)}{dx} = f(x)$$

entonces la derivada de la función: $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ ***respecto a*** x ***es :***

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \left[\frac{dF_1(x)}{dx} - \frac{dF_2(x)}{dx} \right] = (f(x) - f(x)) = 0$$

Dado que la derivada de una constante es cero, se concluye que $\Phi(x)$ ***es una constante . . .***

$$\Phi(x) = C$$

$$F_1\cdot(x) - F_2\cdot(x) = C$$

por lo tanto : $F_1(x) = F_2(x) + C$

Este teorema establece que *si se conoce cualquier función primitiva o integral* $F(x)$ *de una función* $f(x)$*, entonces cualquier otra integral de* $f(x)$ *tiene la forma* $F(x) + C$.

La expresión $F(x) + C$ se llama ***integral indefinida*** de la función $f(x)$, el procedimiento para encontrarla se llama ***integración*** y la operación se simboliza escribiendo ***el signo integral*** : $\int$ antes de ***la expresión diferencial :*** $dF = f(x)\cdot dx$.

(*el símbolo* $\int$ *es , históricamente una "S" deformada , que representa la letra inicial de la palabra "suma" , pues como veremos más adelante , una integral es también una suma infinita*)

<u>DEFINICIÓN</u> 1.

Se define la integral indefinida de la función $f(x)$ tal que $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ como :

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad \text{o también} \qquad \int .\,dF(x) = F(x) + C \qquad (7.1)$$

donde

C se llama <u>*constante de integración*</u> .

$f(x)$ se llama <u>*integrando*</u>

$f(x)\cdot dx$ se llama <u>*elemento de integración*</u> o <u>*expresión bajo el signo integral*</u>

El significado geométrico de una integral indefinida es una ***familia de curvas*** de la forma $F(x) + C$, donde cada curva de la familia es idéntica a las demás pero desplazada hacia arriba o hacia abajo sobre el eje Y una distancia igual al valor particular de la constante de integración C.
La pregunta obligada es :

¿ Cualquier función matemática $f(x)$ tiene una integral indefinida ?

La respuesta es en general ***NO*** . *Sin embargo toda función $f(x)$ que sea continua en un intervalo dado $[a, b]$* ***SI*** *tiene una función primitiva en ese intervalo.*

Al verificar el resultado de toda integración indefinida el criterio que se debe aplicar es :

La derivada de la integral indefinida debe ser igual al integrando

es decir, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dx}\cdot(F(x) + C) = f(x) \qquad (7.2)$$

Lo cual identifica a una integral indefinida como la operación opuesta a la derivación, o una ***antiderivada***, puesto que . . .

$$f(x) = \frac{d}{dx}\cdot F(x) \quad \text{si y solo si} \quad \int f(x)\,dx = F(x)$$

La derivación y la integración ***son operaciones inversas que se cancelan mutuamente*** *puesto que si* $f(x) = \frac{d}{dx}\cdot F(x)$ *entonces . . .*

$$f(x) = \frac{d}{dx}\cdot F(x) = \frac{d}{dx}\cdot\left(\int f(x)\,dx\right) \quad \text{y} \quad F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}\cdot F(x)\,dx \qquad (7.3)$$

de modo que los símbolos $\left(\frac{d}{dx}\right)$ y $\left(\int \;.\,dx\right)$ se cancelan entre si.

O bien, en términos de diferenciales . . .

$$d(F(x)) = f(x)\cdot dx = d\cdot\left(\int f(x)\,dx\right) \quad \text{y} \quad F(x) = \int f(x)\,dx = \int d(F(x)\;\;dx \qquad (7.4)$$

Los resultados (7.2) , (7.3) y (7.4) resumen las *propiedades básicas de la integral indefinida* .

7.2 Reglas de integración

A diferencia del cálculo diferencial, ***en el cálculo integral no existe una regla general de integración .***
El procedimiento general de integración es la búsqueda de la respuesta a la siguiente pregunta :

¿ Qué función $F(x)$ ***al ser derivada, genera el integrando*** $f(x)$ ***en la integral*** $\int f(x)\,dx$ ***?***

de manera que esencialmente, la integración es un procedimiento de ensayos.
Sin embargo, dado que la integral indefinida es la operación opuesta de la derivación, a partir de las reglas inmediatas de derivación, es posible formar una *tabla de integrales inmediatas* , leyendo en sentido contrario las fórmulas de derivación.

Desafortunadamente, muchas expresiones integrales no se encontrarán registradas en la tabla de integrales inmediatas y en tal caso, ***el procedimiento previo de integración consiste en transformar el integrando a una de las formas de la tabla de integrales inmediatas*** por medio de alguna de las *técnicas de integración* que desarrollaremos más adelante.

Para elaborar una tabla de integrales inmediatas, se deben considerar las siguientes dos reglas:

La integral de una suma algebraica de funciones es igual a la suma de las integrales correspondientes.

$$\int (f(x) + g(x) - h(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx - \int h(x)\,dx \qquad (7.5)$$

La integral de una constante k ***por una función es igual a la constante por la integral de tal función .***

$$\int k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int f(x)\,dx \qquad (7.6)$$

DEMOSTRACIÓN.

Por la definición de integral indefinida, si existen las integrales :

$$F(x) = \int f(x)\,dx\ , \quad G(x) = \int g(x)\,dx \quad \text{y} \quad H(x) = \int h(x)\,dx$$

es porque . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot F(x) = f(x)\ , \quad \frac{d}{dx}\cdot G(x) = g(x) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}\cdot H(x) = h(x)$$

Por lo tanto, la integral de la suma algebraica de las funciones f , g y h es :

$$\int (f(x) + g(x) - h(x))\, dx = \int \left(\frac{d}{dx} \cdot F(x) + \frac{d}{dx} \cdot G(x) - \frac{d}{dx} \cdot H(x) \right) dx$$

Sin embargo, una suma de derivadas es la derivada de una suma . . .

$$= \int \frac{d}{dx} \cdot (F(x) + G(x) - H(x))\, dx$$

Pero por la propiedad (7.3) de la integral indefinida, los símbolos $\int .\, dx$ y $\frac{d}{dx}$ se cancelan porque representan operaciones inversas, y resulta finalmente :

$$\int (f(x) + g(x) - h(x))\, dx = F(x) + G(x) - H(x)$$

$$= \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx - \int h(x)\, dx$$

y queda probado (7.5).

Por otra parte, si k es una constante, entonces

$$\int k \cdot f(x)\, dx = \int k \cdot \left(\frac{d}{dx} \cdot F(x) \right) dx$$

Pero la derivada de una constante por una función es la derivada de la constante por la función:

$$= \int \frac{d}{dx} \cdot (k \cdot F(x))\, dx$$

y como los símbolos $\int .\, dx$ y $\frac{d}{dx}$ se cancelan resulta finalmente :

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot F(x) = k \cdot \int f(x)\, dx$$

lo cual demuestra (7.6)

7.3 Tabla de integrales indefinidas inmediatas

Por ser la integración y la derivación operaciones inversas, se deduce que :

"Toda fórmula de derivación genera una correspondiente fórmula de integración"

puesto que si $\frac{d}{dx} \cdot F(x) = f(x)$ entonces $\int f(x)\, dx = F(x) + C$

Sea $u(x)$ una función de x y sea C una constante indefinida, entonces es posible clasificar a las integrales inmediatas en 5 grupos fundamentales . . .

GRUPO I . ***FUNCIONES ALGEBRÁICAS***

I $\int .\, dx = x + C$

II $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad ;\ (n \neq -1)$

III $\int \left(\frac{1}{u}\right) du = ln(u) + C$

GRUPO II . ***FUNCIONES POTENCIA , EXPONENCIAL Y LOGARITMO***

IV $\int a^u\, du = \frac{1}{ln(a)} \cdot a^u + C \quad ;\ (a > 0 \ ,\ a \neq -1)$

IVa $\int e^u\, du = e^u + C$

V $\int ln(u)\, du = u \cdot ln(u) - u + C$

GRUPO III . ***FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS***

VI $\int sen(u)\, du = -cos(u) + C$

VII $\int cos(u)\, du = sen(u) + C$

VIII $\int tan(u)\, du = -ln(cos(u)) + C$

IX $\int cot(u)\, du = ln(sen(u)) + C$

X $\int sec(u)\, du = ln(sec(u) + tan(u)) + C$

XI $\int csc(u)\, du = ln(csc(u) - cot(u)) + C$

XII $$\int \sec^2(u)\,du = \tan(u) + C$$

XIII $$\int \csc^2(u)\,du = -\cot(u) + C$$

XIV $$\int \sec(u)\cdot\tan(u)\,du = \sec(u) + C$$

XVI $$\int \csc(u)\cdot\cot(u)\,du = -\csc(u) + C$$

GRUPO IV. **FUNCIONES RACIONALES**

XVI $$\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du = \frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

XVII $$\int \frac{1}{a^2 - u^2}\,du = \frac{1}{2\cdot a}\cdot\ln\left(\left|\frac{a+u}{a-u}\right|\right) + C$$

XVIII $$\int \frac{1}{u^2 - a^2}\,du = \frac{1}{2\cdot a}\cdot\ln\left(\left|\frac{a-u}{a+u}\right|\right) + C$$

GRUPO V. **FUNCIONES IRRACIONALES**

XIX $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

XX $$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}\,du = \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$$

XXI $$\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}}\,du = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$$

XXII $$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

XXIII $$\int \sqrt{u^2 + a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) + C$$

XXIV $$\int \sqrt{u^2 - a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left(u + \sqrt{u^2 - a^2}\right) + C$$

Se puede comprobar que la derivada del miembro derecho de cada una de éstas fórmulas inmediatas de integración genera precisamente el integrando del lado izquierdo. Así por ejemplo de la fórmula X :

$$\frac{d}{du}\cdot(\ln(\sec(u)+\tan(u))+C) = \frac{\frac{d}{du}\cdot(\sec(u)+\tan(u))}{\sec(u)+\tan(u)} + \frac{dC}{dx}$$

$$= \frac{\sec(u)\cdot\tan(u)+\sec^2(u)}{\sec(u)+\tan(u)} = \sec(u)\cdot\left(\frac{\sec(u)+\tan(u)}{\sec(u)+\tan(u)}\right) = \sec(u)$$

y se deduce que en efecto . . .

$$\int \sec(u)\,du = \ln(\sec(u)+\tan(u))+C$$

O por ejemplo, para la fórmula XVIII . . .

$$\frac{d}{du}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot a}\cdot\ln\left(\left|\frac{u-a}{u+a}\right|\right)+C\right) = \left[\frac{1}{2\cdot a}\cdot\frac{d}{du}\cdot(\ln(|u-a|)-\ln(|u+a|))\right] + \frac{dC}{dx}$$

$$= \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left(\frac{1}{u-a}-\frac{1}{u+a}\right) = \frac{1}{2\cdot a}\cdot\left[\frac{(u+a)-(u-a)}{u^2-a^2}\right] = \frac{1}{u^2-a^2}$$

y se deduce que . . .

$$\int \left(\frac{1}{u^2-a^2}\right)du = \frac{1}{2\cdot a}\cdot\ln\left(\left|\frac{u-a}{u+a}\right|\right)+C$$

<u>Ejemplo</u> 2. Resolver las siguientes integrales indefinidas usando las fórmulas inmediatas de integración.

1 . $\int \left(5\cdot a^2\cdot x^5\right)dx$ 2 . $\int \left(7\cdot x^3+8\cdot x-6\right)dx$ 3. $\int x\cdot(x+a)\cdot(x-b)\,dx$

4 . $\int \left(a+b\cdot x^2\right)^3 dx$ 5 . $\int \sqrt{2\cdot b\cdot x}\,dx$ 6. $\int \left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}\right)^3 dx$

7 . $\int \frac{1}{x^2+7}\,dx$ 8 . $\int \frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^3-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ 9. $\int \frac{1}{x^2-12}\,dx$

10 . $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 12}}\, dx$ 11 . $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}}\, dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{8 - x^2}}\, dx$

13 . $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^4}}\, dx$ 14 . $\displaystyle\int tan^2\cdot(x)\, dx$ 15. $\displaystyle\int (3\cdot e)^x\, dx$

16 . $\displaystyle\int \frac{a}{(a - x)}\, dx$ 17 . $\displaystyle\int \frac{2\cdot x + 3}{2\cdot x + 1}\, dx$ 18. $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}\, dx$

19 . $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}}\, dx$ 20 . $\displaystyle\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3\cdot x}}\, dx$ 21. $\displaystyle\int \frac{e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x} + 1}\, dx$

<u>Soluciones</u> :

1. Por la regla (7.6), la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función, es decir . . .

$$\int \left(5\cdot a^2\cdot x^5\right) dx = \left(5\cdot a^2\right)\cdot \int x^5\, dx$$

y aplicando la fórmula inmediata II : $\displaystyle\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, resulta . . .

$$\int \left(5\cdot a^2\cdot x^5\right) dx = \left(5\cdot a^2\right)\cdot \frac{x^{(5+1)}}{(5 + 1)} + C$$

$$= \boxed{\frac{5}{6}\cdot a^2\cdot x^6 + C}$$

<u>*Comprobación*</u> *:*

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{5}{6}\cdot a^2\cdot x^6 + C\right) = \frac{5}{6}\cdot a^2\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot x^6\right) + \frac{dC}{dx} = \left(\frac{5}{6}\cdot a^2\right)\cdot 6\cdot x^5 + 0 = 5\cdot a^2\cdot x^5$$

y se cumple que si $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x)$ entonces $\displaystyle\frac{d}{dx}\cdot(F(x)) = f(x)$.

2. De la regla (7-5) , la integral de una suma de funciones es la suma de las integrales de las funciones correspondientes.

$$\int \left(7\cdot x^3 + 8\cdot x - 6\right) dx = \int 7\cdot x^3\, dx + \int 8\cdot x\, dx - \int 6\, dx$$

y de la regla (7-6) , la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función . . .

$$= 7\cdot\int x^3\, dx + 8\cdot\int x\, dx - 6\cdot\int .\, dx$$

Aplicando ahora la fórmula inmediata II : $\displaystyle\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ a cada término de la suma queda :

$$= 7\cdot\frac{x^{3+1}}{(3+1)} + 8\cdot\frac{x^{2+1}}{(2+1)} - 6\cdot\frac{x^{0+1}}{(0+1)} + C$$

$$= \frac{7}{4}\cdot x^4 + \frac{8}{3}\cdot x^3 - 6\cdot x + C$$

Comprobación :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{7}{4}\cdot x^4 + \frac{8}{3}\cdot x^3 - 6\cdot x + C\right) = \left[\frac{7}{4}\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot x^4\right) + \frac{8}{3}\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot x^3\right)\right] - 6\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot x\right) = 7\cdot x^3 + 8\cdot x - 6$$

por lo tanto se cumple que si $\displaystyle\int f(x)\, dx = F(x) + C$ *entonces* $\displaystyle\frac{d}{dx}\cdot(F(x) + C) = f(x)$

3. El integrando $x\cdot(x+a)\cdot(x-b)$ no corresponde a ninguno de los enlistados en las fórmulas inmediatas ; sin embargo es posible realizar la integral si se desarrolla primero el producto . . .

$$x\cdot(x+a)\cdot(x-b) = x^3 + (a-b)\cdot x^2 - a\cdot b\cdot x$$

se aplican las reglas (7.5) , (7.6) y la fórmula inmediata II :

$$\int \left[x^3 + (a-b)\cdot x^2 - a\cdot b\cdot x\right] dx = \int x^3\, dx - b\cdot\int x^2\, dx + a\cdot\int x^2\, dx - a\cdot b\cdot\int x\, dx$$

$$= \frac{x^{3+1}}{3+1} + \left[(a-b)\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1}\right] - a\cdot b\cdot\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^4}{4} + \left(\frac{a-b}{3}\right)\cdot x^3 - \frac{a\cdot b}{2}\cdot x^2 + C$$

Comprobación :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left[\frac{x^4}{4}+\left(\frac{a-b}{3}\right)\cdot x^3-\frac{a\cdot b}{2}\cdot x^2+C\right]=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot x^4\right)+\frac{a-b}{3}\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot x^3\right)\right]-\frac{a\cdot b}{2}\cdot\left(\frac{d}{dx}\cdot x^2\right)+0$$

$$=x^3+(a-b)\cdot x^2-a\cdot b\cdot x$$

y en efecto se cumple que $\frac{d}{dx}\cdot(F(x)+C)=f(x)$ *cuando* $\int f(x)\,dx=F(x)+C$

4. El integrando $\left(a+b\cdot x^2\right)^3$ no corresponde a ninguno de los enlistados en las fórmulas inmediatas de integración ; sin embargo es posible realizar la integral si se desarrolla primero el producto:

$$\left(a+b\cdot x^2\right)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b\cdot x^2+3\cdot a\cdot b^2\cdot x^4+b^3\cdot x^6$$

y se aplican las reglas (7.5), (7.6) así como la fórmula inmediata II :

$$\int\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b\cdot x^2+3\cdot a\cdot b^2\cdot x^4+b^3\cdot x^6\right)dx=$$

$$=a^3\cdot\int .\,dx+3\cdot a^2\cdot b\cdot\int x^2\,dx+3\cdot a\cdot b^2\cdot\int x^4\,dx+b^3\cdot\int x^6\,dx$$

$$=a^3\cdot x+\left(3\cdot a^2\cdot b\right)\cdot\frac{x^3}{3}+3\cdot a\cdot b^2\cdot\frac{x^5}{5}+b^3\cdot\frac{x^7}{7}+C$$

Comprobación :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left[a^3\cdot x+\left(a^2\cdot b\right)\cdot x^3+\frac{3\cdot a\cdot b^2}{5}\cdot x^5+\frac{b^3}{7}\cdot x^7+C\right]=$$

$$=a^3\cdot\frac{d\cdot x}{dx}+a^2\cdot b\cdot\frac{d}{dx}\cdot x^3+\frac{3\cdot a\cdot b^2}{5}\cdot\frac{d}{dx}\cdot x^5+\frac{b^3}{7}\cdot\frac{d}{dx}\cdot x^7$$

$$=a^3\cdot(1)+a^2\cdot b\cdot\left(3\cdot x^2\right)+\frac{3\cdot a\cdot b^2}{5}\cdot\left(5\cdot x^4\right)+\frac{b^3}{7}\cdot\left(7\cdot x^6\right)$$

$$=a^3+3\cdot a^2\cdot b\cdot x^2+3\cdot a\cdot b^2\cdot x^4+b^3\cdot x^6$$

y en efecto se cumple que si $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ *entonces* $\frac{d}{dx}\cdot(F(x)+C)=f(x)$

5. $$\int \sqrt{2\cdot b\cdot x}\,dx = \int \left(\sqrt{2\cdot b}\cdot\sqrt{x}\right)dx = \sqrt{2\cdot b}\cdot\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$ (por la regla 7.6)

$$= \sqrt{2\cdot b}\cdot\frac{x^{\left(\frac{1}{2}+1\right)}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} + C = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{2\cdot b}\cdot x^{\frac{3}{2}} + C = \boxed{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2\cdot b\cdot x^3} + C}$$

6. El integrando no corresponde a ninguno de los enlistados en las fórmulas inmediatas ; sin embargo es posible realizar fácilmente la integral si se desarrolla primero el binomio al cubo . . .

$$\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 = a^2 - 3\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}} + 3\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}} - x^2$$

y se aplican las reglas (7.5) y (7.6)

$$\int \left(a^2 - 3\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{2}{3}} + 3\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{4}{3}} - x^2\right)dx =$$

$$= a^2\cdot\int .\,dx - 3\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot\int x^{\frac{2}{3}}\,dx + 3\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot\int x^{\frac{4}{3}}\,dx - \int x^2\,dx$$

$$= a^2\cdot x - 3\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\left(\frac{2}{3}+1\right)} + 3\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\left(\frac{4}{3}+1\right)} - \frac{x^{2+1}}{(2+1)} + C$$

$$= \boxed{a^2\cdot x - \left(\frac{9}{5}\right)\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{9}{7}\right)\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)\cdot x^3 + C}$$

Comprobación :

$$\frac{d}{dx}\cdot\left[a^2\cdot x - \left(\frac{9}{5}\right)\cdot a^{\frac{4}{3}}\cdot x^{\frac{5}{3}} + \left(\frac{9}{7}\right)\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{7}{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)\cdot x^3 + C\right]$$

$$= a^2 - \frac{9}{5}\cdot a^{\left(\frac{4}{3}\right)}\cdot\frac{5}{3}\cdot x^{\left(\frac{5}{3}-1\right)} + \frac{9}{7}\cdot a^{\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot\frac{7}{3}\cdot x^{\left(\frac{7}{3}-1\right)} - \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} + 0$$

$$= a^2 - 3\cdot a^{\left(\frac{4}{3}\right)}\cdot x^{\left(\frac{2}{3}\right)} + 3\cdot a^{\left(\frac{2}{3}\right)}\cdot x^{\left(\frac{4}{3}\right)} - x^2$$

y en efecto se cumple que si $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$ *entonces* $\displaystyle\frac{d}{dx}\cdot(F(x)) = f(x)$

7. $$\int \frac{1}{x^2+7}\,dx = \int \left[\frac{1}{x^2+(\sqrt{7})^2}\right]dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

8. Desarrollando primero el integrando . . .

$$\frac{(x^2+1)\cdot(x^3-2)}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{(x^5-2\cdot x^2+x^3-2)}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{13}{3}} - 2\cdot x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{7}{3}} - 2\cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

y aplicando las reglas (7.5) y (7.6) , se obtiene :

$$\int \frac{(x^2+1)\cdot(x^3-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{\frac{13}{3}}\,dx - 2\cdot\int x^{\frac{4}{3}}\,dx + \int x^{\frac{7}{3}}\,dx - 2\cdot\int x^{-\frac{2}{3}}\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{13}{3}+1}}{\left(\frac{13}{3}+1\right)} - 2\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\left(\frac{4}{3}+1\right)} + \frac{x^{\frac{7}{3}+1}}{\left(\frac{7}{3}+1\right)} - 2\cdot\frac{x^{\frac{-2}{3}+1}}{\left(\frac{-2}{3}+1\right)} + C$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\sqrt[3]{x^{16}} - \frac{6}{7}\cdot\sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{10}\cdot\sqrt[3]{x^{10}} - 6\cdot\sqrt[3]{x} + C$$

Comprobación:

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{3}{16}\cdot x^{\frac{16}{3}} - \frac{6}{7}\cdot x^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{10}\cdot x^{\frac{10}{3}} - 6\cdot x^{\frac{1}{3}} + C\right) = x^{\left(\frac{13}{3}\right)} - 2\cdot x^{\left(\frac{4}{3}\right)} + x^{\left(\frac{7}{3}\right)} - 2\cdot x^{-\left(\frac{2}{3}\right)} + 0$$

y en efecto se cumple que si $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x)$ entonces $\displaystyle\frac{d}{dx}\cdot(F(x)) = f(x)$

9. $$\int \frac{1}{x^2 - 12}\,dx = \int \left[\frac{1}{x^2 - (\sqrt{12})^2}\right] dx = \frac{1}{2\cdot\sqrt{12}}\cdot ln\left(\left|\frac{\sqrt{12} - x}{\sqrt{12} + x}\right|\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{4\cdot\sqrt{3}}\cdot ln\left(\left|\frac{x - 2\cdot\sqrt{3}}{x + 2\cdot\sqrt{3}}\right|\right) + C}$$

10. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 12}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - (\sqrt{12})^2}}\,dx = \boxed{ln\left(x + \sqrt{x^2 - 12}\right) + C}$$

11. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + (\sqrt{8})^2}}\,dx = \boxed{ln\left(x + \sqrt{x^2 + 8}\right) + C}$$

12. $$\int \frac{1}{\sqrt{8 - x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{8})^2 - x^2}}\,dx = \boxed{arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C}$$

13. $$\int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{\left(2 + x^2\right)\cdot\left(2 - x^2\right)}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{2 + x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - x^2}}\,dx - \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + x^2}}\,dx = \boxed{arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - ln\left(x + \sqrt{2 + x^2}\right) + C}$$

14. $$\int tan^2\cdot(x)\,dx = \int \left[sec^2\cdot(x) - 1\right] dx = \int sec^2\cdot(x)\,dx + \int .\,dx = \boxed{tan(x) + x + C}$$

15. $$\int (3\cdot e)^x\,dx = \frac{1}{ln(3\cdot e)}\cdot(3\cdot e)^x + C = \boxed{\frac{3^x\cdot e^x}{ln(3)+1} + C}$$ *(por la regla IV)*

16. Si se hace el cambio de variable : $u = (a - x)$, la integral se transforma en inmediata dado que . . .

$$dx = d\cdot(u + a) = du + 0$$

y queda :

$$\int \frac{a}{(a-x)}\,dx = a\cdot\int \frac{1}{u}\,du = a\cdot ln(u) + C$$ *(por la regla III)* .

$$= \boxed{a\cdot ln(a - x) + C}$$ *(regresando a la variable inicial)*

17. Aunque el integrando $\frac{2\cdot x+3}{2\cdot x+1}$ no es alguno de los que se enlistan en las integrales inmediatas, se puede transformar haciendo primero la división de la fracción: $\frac{2\cdot x+3}{2\cdot x+1} = 1 + \frac{2}{(2\cdot x+1)}$

y con el cambio de variable $u = (2\cdot x + 1)$, la integral se transforma en inmediata dado que :

$$du = 2\cdot dx + 0 = 2\cdot dx$$

y queda . . .

$$\int \left(\frac{2\cdot x+3}{2\cdot x+1}\right) dx = \int \left[1 + \frac{2}{(2\cdot x+1)}\right] dx = \int .\,dx + \int \frac{1}{u}\,du = x + ln(u) + C$$

$$= \boxed{x + ln(2\cdot x + 1) + C}$$

18. Con la misma técnica que en el ejercicio 17 anterior, se tiene que :

$$\int \frac{x^2-2}{x^2+2}\,dx = \int \left(1 - \frac{4}{2+x^2}\right) dx = \int .\,dx + 4\cdot\int \frac{1}{(\sqrt{2})^2 + x^2}\,du$$

$$= \boxed{x + \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C}$$

19. A primera vista, ésta integral $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\,dx$ parece difícil de realizar; sin embargo, es posible transformarla en sencillas integrales inmediatas racionalizando el denominador del integrando . . .

$$\sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}}\right) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-3^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-3^2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2-3^2}}$$

en el primer término se puede hacer ahora el cambio de variable : $u = x^2 - 3^2$ y por lo tanto $du = 2\cdot x\cdot dx$, con lo cual : $x\cdot dx = \dfrac{du}{2}$ y resulta . . .

$$\int \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}\,dx = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-3^2}} + \frac{3}{\sqrt{x^2-3^2}}\right)dx = \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{u}}\,du + 3\cdot\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3^2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\left(\frac{-1}{2}+1\right)}}{\left(\frac{-1}{2}+1\right)} + 3\cdot ln\left(x+\sqrt{x^2-3^2}\right) + C = \sqrt{x^2-3^2} + 3\cdot ln\left(x+\sqrt{x^2-3^2}\right) + C$$

20. Para simplificar el integrando $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3\cdot x}}$ se puede hacer el cambio de variable : $u = x^3 + 3\cdot x$, y por lo tanto $du = 3\cdot\left(x^2+1\right)\cdot dx$, esto es $\left(x^2+1\right)\cdot dx = \dfrac{1}{3}\cdot du$ de modo que la integral queda . . .

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3\cdot x}}\,dx = \int \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{3}\cdot\int u^{\frac{-1}{2}}\,du = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3+3\cdot x} + C$$

21. Haciendo el cambio de variable : $u = \left(e^{2\cdot x}+1\right)$, $du = 2\cdot e^{2\cdot x}\cdot dx$, esto es: $e^{2\cdot x}\cdot dx = \dfrac{1}{2}\cdot du$,

entonces la integral : $\displaystyle\int \frac{e^{2\cdot x}}{e^{2\cdot x}+1}\,dx$ se transforma en inmediata :

$$\int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot ln(u) + C = \frac{1}{2}\cdot ln\left(e^{2\cdot x}+1\right) + C = \boxed{ln\left(\sqrt{e^{2\cdot x}+1}\right) + C}$$

7.3 ***Técnicas de Integración*** .

En los ejemplos anteriores, se ha ilustrado que para integrar expresiones que no tienen la forma de los integrandos de la tabla de integrales inmediatas, es necesario transformarlos en formas inmediatas por medio de ciertos procedimientos o técnicas de integración específicas que ahora desarrollaremos .

I *integración por cambio de variable o substitución*

II *integración de algunas funciones que contienen un trinomio de segundo grado .*

III. *integración por partes.*

IV *integración de funciones racionales.*

V *integración de algunas funciones irracionales por racionalización.*

VI *integración de funciones trigonométricas .*

VII *integración por substitución trigonométrica*

VIII *integración por substituciones diversas .*

Técnica I . Integración por cambio de variable o substitución .

Algunas veces, cuando la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ no es inmediata pero se sabe que existe, es posible hacer un *cambio de variable de integración* definiendo a la variable de integración como una función de una nueva variable: $x = \phi(t)$ mediante la cual resulta que su diferencial es: $dx = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)\cdot dt$.

Escogiendo la función $\phi(t)$ de manera que :

a) *tenga inversa*
b) *sea continua, y por lo tanto derivable*

.
la integral inicial se transformará en la integral equivalente :

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)dt} \qquad (7.7)$$

la cual puede ser inmediata .

DEMOSTRACIÓN .

Derivando ambos miembros de (7.7) respecto a x aplicando la *"regla de la cadena"*:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = \frac{d}{dt}\left[\int f(\phi(t))\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)dt\right]\cdot\left(\frac{d\cdot t}{dx}\right)$$

y por la propiedad (7.2) queda :

$$f(x) = f(\phi(t))\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)\cdot\left(\frac{d\cdot t}{dx}\right) \qquad (*)$$

pero la derivada de la función inversa $t = \Psi(x)$ es la inversa de la derivada de $x = \phi(t)$, es decir :

$\dfrac{d\cdot t}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}$, por lo cual resulta que . . . $\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)\cdot\left(\dfrac{d\cdot t}{dx}\right) = \left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)} = \dfrac{d\phi}{dx}\cdot\dfrac{1}{\left(\dfrac{d\phi}{dt}\right)} = 1$.

de modo que la expresión (*) queda : $f(x) = f(\phi(t))$ y en efecto , las derivadas respecto a x de ambos miembros de la fórmula (7.7) son iguales. Se concluye entonces que ambos miembros representan la misma función integral, salvo por una constante.

Ejemplo 3. Resolver las siguientes integrales indefinidas por substitución o cambio de variable.

1 . $\displaystyle\int sen(3\cdot x - 5)\,dx$

2 . $\displaystyle\int \frac{1}{e^x - 1}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{7\cdot x - 3}}\,dx$

4 . $\displaystyle\int \frac{e^{2\cdot x}}{\sqrt{e^x + 1}}\,dx$

5 . $\displaystyle\int \frac{sen^3\cdot(x)}{\sqrt{cos(x)}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9 + x^4}}\,dx$

7 . $\displaystyle\int \frac{(ln(x))^2}{x}\,dx$

8 . $\displaystyle\int cot(x)\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^2}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^4}\,dx$

Soluciones :

1. $\displaystyle\int sen(3\cdot x-5)\,dx$

Hagamos la substitución: $t = (3\cdot x-5)$, es decir: $x = \phi(t) = \dfrac{t+5}{3}$, con lo cual $dx = \dfrac{dt}{3}$ y apliquemos (7.7), obteniéndose . . .

$$\int sen(3\cdot x-5)\,dx = \int sen(t)\cdot\frac{1}{3}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\int sen(t)\,dt = -\frac{1}{3}\cdot cos(t)+C$$

Retornando a la variable inicial x resulta finalmente : $\displaystyle\int sen(3\cdot x-5)\,dx = \boxed{-\frac{1}{3}\cdot cos(3\cdot x-5)+C}$

2. $\displaystyle\int\left(\frac{1}{e^x-1}\right)dx = \int\left[\frac{1}{e^x\cdot\left(1-e^{-x}\right)}\right]dx = \int\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx$

Haciendo la substitución: $t = 1-e^{-x}$, esto es : $x = \phi(t) = -ln(1-t)$, de donde se obtiene el diferencial: $dx = \left(\dfrac{1}{1-t}\right)\cdot dt$, la integral se transforma en :

$$\int\left(\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}\right)dx = \int\left(\frac{1-t}{t}\right)\cdot\frac{1}{1-t}\,dt = \int\left(\frac{1}{t}\right)dt = ln(t)+C$$

resultado que en términos de la variable inicial x es : $\displaystyle\int\frac{1}{e^x-1}\,dx = \boxed{ln\left(1-e^{-x}\right)+C}$

Usando las propiedades de la función logaritmo, éste resultado se puede rescribir también en las siguientes formas equivalentes :

$$ln\left(1-e^{-x}\right)+C = ln\left[e^{-x}\cdot\left(e^x-1\right)\right]+C$$

$$= \boxed{ln\left(e^x-1\right)+ln\left(e^{-x}\right)+C}$$

$$= \boxed{ln\left(e^x-1\right)-x+C}$$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{7\cdot x-3}}\,dx$

Haciendo la substitución: $t = \Psi(x) = 7\cdot x - 3$, queda el diferencial: $dt = 7\cdot dx$, es decir $dx = \dfrac{dt}{7}$ y la integral se transforma en :

$$\int \frac{1}{\sqrt{7\cdot x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)dt = \frac{1}{7}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{2\cdot\sqrt{t}}{7} + C = \boxed{\frac{2}{7}\cdot\sqrt{7\cdot x-3}+C}$$

4. $\displaystyle\int \frac{e^{2\cdot x}}{\sqrt{e^{x}+1}}\,dx$

Haciendo la substitución : $u^2 = e^x + 1$, es decir : $x(u) = ln\left(u^2-1\right)$, resulta el diferencial $dx = \dfrac{2\cdot u\cdot du}{u^2-1}$ y la integral inicial queda como :

$$\int \frac{\left(u^2-1\right)^2}{\sqrt{u^2}}\cdot\left(\frac{2\cdot u}{u^2-1}\right)du = \int 2\cdot\left(u^2-1\right)du = 2\cdot\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+C$$

en términos de la variable x , haciendo $u = \sqrt{e^x+1}$ se obtiene :

$$\int \frac{e^{2\cdot x}}{\sqrt{e^{x}+1}}\,dx = \boxed{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\left(e^x+1\right)^3} - 2\cdot\sqrt{e^x+1}+C}$$

5. $\displaystyle\int \frac{sen^3\cdot(x)}{\sqrt{cos(x)}}\,dx$

Haciendo : $u(x)^2 = cos(x)$ y diferenciando implícitamente resulta : $2\cdot u\cdot d\cdot u = -sen(x)\cdot dx$.

Además, por la identidad trigonométrica : $sen^2\cdot(x) = 1 - cos^2\cdot(x) = 1 - u^4$ se obtiene . . .

$$\int \frac{sen^3(x)}{\sqrt{cos(x)}}\,dx = \int \frac{sen^2(x)\cdot sen(x)}{\sqrt{cos(x)}}\,dx = \int \frac{(1-u^4)\cdot(-2\cdot u)}{\sqrt{u^2}}\,du = -2\cdot\int (1-u^4)\,du$$

$$= -2\cdot\left(u - \frac{1}{5}\cdot u^5\right) + C$$

y en términos de la variable x, haciendo $u = \sqrt{cos(x)}$ resulta :

$$\int \frac{sen^3(x)}{\sqrt{cos(x)}}\,dx = -2\cdot\sqrt{cos(x)} + \frac{2}{5}\cdot cos(x)^{\frac{5}{2}} + C$$

6. $$\int \frac{x}{\sqrt{9+x^4}}\,dx$$

Haciendo la substitución $u = x^2$, entonces $du = (2\cdot x)\cdot dx$ de donde se obtiene que $x\cdot dx = \frac{du}{2}$ y la integral se transforma en :

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+u^2}}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{9+u^2}}\,du = \frac{1}{2}\cdot ln\left(u+\sqrt{9+u^2}\right) + C = ln\left(\sqrt{x^2+\sqrt{9+x^4}}\right) + C$$

Algunas veces es muy fácil integrar <u>por simple inspección</u> basándose en las siguientes fórmulas :

I. $$\int (f(x))^n\cdot\left(\frac{df}{dx}\right)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

II. $$\int \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)}{f(x)}\,dx = ln(f(x)) + C$$

Ambas se obtienen haciendo la substitución : $u = f(x)$, es decir $du = \left(\frac{df}{dx}\right)\cdot dx$ y luego se aplicando las integrales inmediatas $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$; $(n \neq 1)$ y

$\int \left(\frac{1}{u}\right)du = ln(u) + C$.

7. $$\int \frac{(ln(x))^2}{x}\, dx$$

Notemos que si $u(x) = ln(x)$, entonces $du = \frac{dx}{x}$ y la integral tiene la forma : $\int u^2\, du$ por lo cual:

$$\int \frac{(ln(x))^2}{x}\, dx = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \boxed{\frac{1}{3}\cdot ln(x)^3 + C}$$

8. $$\int cot(x)\, dx = \int \left(\frac{cos(x)}{sen(x)}\right) dx$$

Haciendo entonces la substitución $u = sen(x)$, se obtiene $du = cos(x)\cdot dx$ y se transforma en :

$$\int cot(x)\, dx = \int \left(\frac{1}{u}\right) du = ln(u) + C = \boxed{ln(sen(x)) + C}$$

9. Haciendo la substitución $u = 1 + x^2$, se obtiene $du = 2\cdot x\cdot dx$ o $x\cdot dx = \frac{du}{2}$ y la integral se transforma en . . .

$$\int \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{u}\, du = \frac{1}{2}\cdot ln(u) + C = \boxed{ln\left(\sqrt{1 + x^2}\right) + C}$$

10. Haciendo $u = x^2$, se obtiene el diferencial $du = 2\cdot x\cdot dx$ o $x\cdot dx = \frac{du}{2}$, de modo que la integral toma la forma . . .

$$\int \frac{x}{1 + x^4}\, dx = \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(1 + u^2\right)}\, du = \frac{1}{2}\cdot arctan(u) + C = \boxed{\frac{1}{2}\cdot arctan\left(x^2\right) + C}$$

La técnica de substitución o cambio de variable, es quizá el más fundamental de todos los métodos de integración, puesto que aún en los pasos intermedios de otros métodos , a veces es necesario recurrir a un adecuado cambio de variable para simplificar una integral .

Se requiere habilidad para elegir el cambio de variable acertado y ésta virtud, ***sólo se adquiere con la práctica***. de modo que se le recomienda fuertemente resolver muchos ejercicios al respecto.

EJERCICIO 7.1 Integración por substitución

1. $\displaystyle\int x\cdot(2\cdot x+5)^{10}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}\,dx$

3. $\displaystyle\int \left(\frac{ln(2\cdot x)}{ln(4\cdot x)}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{e^{x}-1}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{\left(arcsen\left(2^{-1}\cdot x\right)\right)^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

6. $\displaystyle\int \sqrt{e^{x}-1}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{cos(x)^3}{\sqrt{sen(x)}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{4\cdot x^2+9}}\,dx$ (*Sugerencia:* $x = \frac{1}{t}$)

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$

11. $\displaystyle\int \frac{sen(ln(x))}{x}\,dx$

Respuestas : Ejercicio 7.1

1. $\frac{1}{528}\cdot(2\cdot x+5)^{11}\cdot(22\cdot x-5)+C$

2. $-4\cdot\sqrt{x}-x-\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}-2\cdot ln\left(-1-x+2\cdot\sqrt{x}\right)+C$

3. $-ln(2\cdot ln(2)+ln(x))\cdot ln(2)+ln(x)+C$

4. $2\cdot arctan\left(\sqrt{e^{x}-1}\right)+C$

5. $\frac{1}{3}\cdot(arcsen(x))^3+C$

6. $2\cdot\sqrt{e^{x}-1}-2\cdot arctan\left(\sqrt{e^{x}-1}\right)+C$

7. $2\cdot\sqrt{sen(x)}-\frac{2}{5}\cdot\sqrt{sen(x)^5}+C$

8. $\frac{-1}{3}\cdot ln\left(\frac{3+\sqrt{4\cdot x^2+9}}{2\cdot x}\right)+C$

9. $arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)+C$

10. $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x+1)^3}-2\cdot\sqrt{x+1}+C$

11. $-cos(ln(x))+C$

Técnica II . ***Integrales que contienen un trinomio de segundo grado .***

Algunas de las formas generales de éste tipo de integrales son las siguientes :

I. $\displaystyle\int \frac{A\cdot x+B}{m\cdot x^2+n\cdot x+c}\,dx$ II. $\displaystyle\int \frac{A\cdot x+B}{\sqrt{m\cdot x^2+n\cdot x+c}}\,dx$

III. $\displaystyle\int \sqrt{m\cdot x^2+n\cdot x+c}\,dx$ IV. $\displaystyle\int \frac{1}{(A\cdot x+B)\cdot\sqrt{m\cdot x^2+n\cdot x+c}}\,dx$

- En el caso III la integral se reduce a una forma inmediata completando el trinomio cuadrado perfecto de la expresión dentro del radical .
- La integral del tipo IV se reduce al caso II por medio de la substitución : $u = \dfrac{1}{(A\cdot x+B)}$
- En los casos I y II , las integrales se reducen a formas inmediatas si el numerador $(A\cdot x+B)\cdot dx$ se transforma en la diferencial del denominador $(2\cdot m\cdot x+n)\cdot dx$, como sigue :

$$A\cdot x+B = \frac{A}{2\cdot m}\cdot(2\cdot m\cdot x)+B \quad \textit{(multiplicando y dividiendo por 2m)}$$

$$= \frac{A}{2\cdot m}\cdot(2\cdot m\cdot x+n)+\left(B-A\cdot\frac{n}{2\cdot m}\right) \qquad \textit{(agregando y restando : } \frac{A}{2\cdot m}\cdot n \textit{)}$$

El último término es solo una constante y el primero contiene como factor la expresión buscada.
La integral del caso I por ejemplo, se transforma en dos integrales:

$$\int \frac{A\cdot x+B}{m\cdot x^2+n\cdot x+c}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2\cdot m}\cdot(2\cdot m\cdot x+n)+\left(B-A\cdot\frac{n}{2\cdot m}\right)}{m\cdot x^2+n\cdot x+c}\,dx$$

$$= \frac{A}{2\cdot m}\cdot\int \frac{2\cdot m\cdot x+n}{m\cdot x^2+n\cdot x+c}\,dx+\left(B-A\cdot\frac{n}{2\cdot m}\right)\cdot\int \frac{1}{mx^2+n\cdot x+x}\,dx$$

Haciendo ahora la substitución : $z = \left(m\cdot x^2+n\cdot x+c\right)$, la primera integral de la derecha se reduce a la forma inmediata : $\displaystyle\int \frac{1}{z}\,dz = ln(z) + C$. En la segunda integral , el trinomio cuadrado se transforma a una suma o diferencia de cuadrados como sigue:

$$m\cdot x^2 + n\cdot x + c = m\cdot\left(x^2 + \frac{n}{m}\cdot x + \frac{c}{m}\right) \quad \text{; \textit{Factorizando el coeficiente de} } x^2 .$$

$$= m\cdot\left[x^2 + \frac{n}{m}\cdot x + \left(\frac{n}{2\cdot m}\right)^2 - \left(\frac{n}{2\cdot m}\right)^2 + \frac{c}{m}\right] \quad \text{; \textit{Agregando y restando} } \left(\frac{n}{2\cdot m}\right)^2 .$$

$$= m\cdot\left[\left(x + \frac{n}{2\cdot m}\right)^2 + \frac{c}{m} - \left(\frac{n}{2\cdot m}\right)^2\right] \quad \text{; \textit{Factorizando como el cuadrado de un binomio.}}$$

$$= m\cdot\left(u^2 + a^2\right)$$

En éste último paso se hicieron las substituciones : $u = \left(x + \frac{n}{2\cdot m}\right)$ y $a^2 = \frac{c}{m} - \left(\frac{n}{2\cdot m}\right)^2$

En definitiva, se obtiene:

$$\int \frac{A\cdot x + B}{m\cdot x^2 + n\cdot x + c}\,dx = \frac{A}{2\cdot m}\cdot\int \frac{1}{z}\,dz + \left(B - A\cdot\frac{n}{2\cdot m}\right)\cdot\int \frac{1}{m\cdot\left(u^2 + a^2\right)}\,du$$

$$= \frac{A}{2\cdot m}\cdot\int \frac{1}{z}\,dz + \left(B - A\cdot\frac{n}{2\cdot m}\right)\cdot\frac{1}{m}\cdot\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

$$= \frac{A}{2\cdot m}\cdot ln\left(m\cdot x^2 + n\cdot x + c\right) + \left(B - A\cdot\frac{n}{2\cdot m}\right)\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{a}\cdot arctan\left(\frac{x + \frac{n}{2\cdot m}}{a}\right) + C$$

Por otra parte, cuando $a^2 < 0$, es decir . . . $\frac{c}{m} < \left(\frac{n}{2\cdot m}\right)^2$ la integral es :

$$= \frac{A}{2\cdot m}\cdot ln\left(m\cdot x^2 + n\cdot x + c\right) + \left(B - A\cdot\frac{n}{2\cdot m}\right)\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2\cdot a}\cdot ln\left[\frac{a - \left(x + \frac{n}{2\cdot m}\right)}{a + \left(x + \frac{n}{2\cdot m}\right)}\right] + C$$

Ejemplo 4. Resolver las siguientes integrales que contienen un trinomio de 2° grado.

1 . $\displaystyle\int \frac{1}{3\cdot x^2 - x + 1}\,dx$ 2 . $\displaystyle\int \frac{3\cdot x - 2}{x^2 - 4\cdot x - 5}\,dx$ 3. $\displaystyle\int \frac{2\cdot x - 8}{\sqrt{1 - x - x^2}}\,dx$

4 . $\displaystyle\int \frac{1}{(2\cdot x + 3)\cdot\sqrt{x^2 + 2\cdot x - 3}}\,dx$ 5 . $\displaystyle\int \sqrt{2 - x - x^2}\,dx$

Soluciones :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{3\cdot x^2 - x + 1}\,dx$

Completando el trinomio del denominador, se tiene :

$$\left(3\cdot x^2 - x + 1\right) = 3\cdot\left(x^2 - \frac{1}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\right) = 3\cdot\left[x^2 - \frac{1}{3}\cdot x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\right]$$

$$= 3\cdot\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}\right]$$

luego, la integral toma la forma : $\displaystyle\int \frac{1}{3\cdot x^2 - x + 1}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}}\,dx$

Haciendo $u = x - \frac{1}{6}$, es posible aplicar la regla XVI : $\displaystyle\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du = \frac{1}{a}\cdot arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$

para obtener: $\displaystyle\int \frac{1}{3\cdot x^2 - x + 1}\,dx = \frac{1}{3\cdot a}\cdot arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{11}}\cdot arctan\left(\frac{6\cdot x - 1}{\sqrt{11}}\right) + C$

2. $$\int \frac{3\cdot x-2}{x^2-4\cdot x-5}\,dx$$

Transformando el numerador para que tenga la derivada del denominador :

$\frac{d}{dx}\left(x^2-4\cdot x-5\right) = 2\cdot x-4$ y a la vez completando el cuadrado perfecto del trinomio en el denominador :

$$3\cdot x-2 \;=\; \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x)-2 \;=\; \left[\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-4)+\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 4-2\right] \;=\; \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-4)+4$$

$$x^2-4\cdot x-5 \;=\; x^2-4\cdot x+(4-4)-5 \;=\; (x-2)^2-3^2$$

la integral queda entonces como :

$$\int \frac{\frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-4)+4}{x^2-4\cdot x-5}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int \frac{2\cdot x-4}{x^2-4\cdot x-5}\,dx + 4\cdot\int \frac{1}{(x-2)^2-3^2}\,dx$$

que corresponden a las integrales inmediatas : $\frac{3}{2}\cdot\int \frac{1}{z}\,dz + 4\cdot\int \frac{1}{u^2-a^2}\,dx$, haciendo $u = x-2$

y $z = x^2-4\cdot x-5$, de manera que . . .

$$\int \frac{3\cdot x-2}{x^2-4\cdot x-5}\,dx \;=\; \frac{3}{2}\cdot ln(z)+4\cdot\frac{1}{2\cdot(3)}\cdot ln\left(\left|\frac{3-u}{3+u}\right|\right)+C$$

Regresando a la variable inicial, se obtiene finalmente . . .

$$\int \frac{3\cdot x-2}{x^2-4\cdot x-5}\,dx \;=\; \frac{3}{2}\cdot ln\left(x^2-4\cdot x-5\right)+\frac{2}{3}\cdot ln\left(\left|\frac{5-x}{1+x}\right|\right)+C$$

3. $\int \frac{2\cdot x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$: La derivada del denominador es $\frac{d}{dx}\left(1-x-x^2\right) = -1-2\cdot x$. Formándola

en el numerador y completando el cuadrado perfecto del trinomio en el denominador se tiene :

$$2\cdot x - 8 \;=\; -(8 - 2\cdot x) \;=\; -[8 + (1-1) - 2\cdot x] \;=\; -9 - (-1 - 2\cdot x)$$

$$1 - x - x^2 \;=\; 1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - x - x^2 \;=\; \left(1 + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + x\right)^2$$

luego, la integral se transforma en :

$$\int \frac{2\cdot x - 8}{\sqrt{1 - x - x^2}}\,dx = -\int \frac{-1 - 2\cdot x}{\sqrt{1 - x - x^2}}\,dx - 9\cdot\int \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} + x\right)^2}}\,dx$$

integrales que bajo las substituciones : $z = 1 - x - x^2$ y $u = x + \frac{1}{2}$ se convierten en las integrales inmediatas :

$$\int \frac{2\cdot x - 8}{\sqrt{1 - x - x^2}}\,dx \;=\; -\int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz - 9\cdot\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}}\,du$$

$$= -2\cdot\sqrt{z} - 9\cdot arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

y regresando a la variable inicial resulta finalmente . . .

$$\int \frac{2\cdot x - 8}{\sqrt{1 - x - x^2}}\,dx \;=\; \boxed{-2\cdot\sqrt{1 - x - x^2} - 9\cdot arcsen\left(\frac{2\cdot x + 1}{\sqrt{5}}\right) + C}$$

4. $$\int \frac{1}{(2\cdot x + 3)\cdot\sqrt{x^2 + 2\cdot x - 3}}\,dx$$

Haciendo la substitución : $u = \frac{1}{2\cdot x + 3}$ se obtiene : $x = \frac{1}{2\cdot u} - \frac{3}{2}$ con $dx = \frac{-1}{2\cdot u^2}\cdot du$ por lo cual el integrando se transforma en :

$$\frac{dx}{(2\cdot x + 3)\cdot\sqrt{x^2 + 2\cdot x - 3}} = \frac{u\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot u^2}\cdot du\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot u} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{u} - 3\right) - 3}} = \frac{\frac{-1}{2\cdot u}\cdot du}{\sqrt{\frac{1 - 2\cdot u - 15\cdot u^2}{4\cdot u^2}}} = \frac{-du}{\sqrt{1 - 2\cdot u - 15\cdot u^2}}$$

Completando el cuadrado perfecto del radicando : $1-2\cdot u-15\cdot u^2 \;=\; 1+\dfrac{1}{15}-15\cdot\left(u+\dfrac{1}{15}\right)^2$ y

haciendo $z = \sqrt{15}\cdot\left(u+\dfrac{1}{15}\right)$, $dz = \sqrt{15}\cdot du$, $a^2 = \left(1+\dfrac{1}{15}\right) = \dfrac{16}{15}$, la integral anterior se convierte en . . .

$$\int \frac{1}{(2\cdot x+3)\cdot\sqrt{x^2+2\cdot x-3}}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{15}}\cdot\left(\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz\right) \;=\; -\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\cdot arcsen\left(\frac{z}{a}\right)+C$$

regresando a la variable u : $$= -\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\cdot arcsen\left(\frac{u+\frac{1}{15}}{\frac{4}{15}}\right)+C$$

y luego a la variable x, con $u = \dfrac{1}{2\cdot x+3}$: $$= -\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)\cdot arcsen\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+9}{2\cdot x+3}\right)\right]+C$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$

Completando el trinomio cuadrado perfecto del radicando :

$$2-x-x^2 \;=\; 2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-x-x^2 \;=\; \frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \;=\; \left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

Haciendo entonces las substituciones $u = x+\dfrac{1}{2}$, $du = dx$, $a = \dfrac{3}{2}$, la integral queda en la forma :

$$\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx \;=\; \int \sqrt{a^2-u^2}\,du \;=\; \frac{1}{2}\cdot u\cdot\sqrt{a^2-u^2}+\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot arcsen\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

y rescribiendo éste resultado en términos de la variable inicial x queda :

$$\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx \;=\; \left(\frac{2\cdot x+1}{4}\right)\cdot\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{8}\cdot arcsen\left(\frac{2\cdot x+1}{3}\right)+C$$

***EJERCICIO* 7.2 Integración de expresiones cuadráticas**

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2\cdot x}\,dx$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2\cdot x+5}\,dx$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-7\cdot x+13}\,dx$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+3\cdot x-2\cdot x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3\cdot x+4}\,dx$

6. $\displaystyle\int \frac{3\cdot x-6}{\sqrt{x^2-4\cdot x+5}}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{1-x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+x-1}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2\cdot x+5}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-2}}\,dx$

11. $\displaystyle\int \sqrt{x-x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int \frac{ln(x)}{x\cdot\sqrt{1-4\cdot ln(x)-(ln(x))^2}}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{cos(x)}{sen(x)^2-6\cdot sen(x)+12}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1+3\cdot e^x+e^{2\cdot x}}}\,dx$

15. $\displaystyle\int \frac{sen(x)}{\sqrt{cos(x)^2+4\cdot cos(x)+1}}\,dx$

Respuestas: Ejercicio 7.2

1. $\displaystyle ln\left(\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)+C$

2. $\displaystyle \frac{1}{2}\cdot arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$

3. $\displaystyle \frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2-7\cdot x+13\right)+\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot arctan\left(\frac{2\cdot x-7}{\sqrt{3}}\right)+C$

4. $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot arcsen\left(\frac{4\cdot x-3}{5}\right)+C$

5. $\displaystyle x-\frac{5}{2}\cdot ln\left(x^2+3\cdot x+4\right)+\frac{9}{\sqrt{7}}\cdot arctan\left(\frac{2\cdot x+3}{\sqrt{7}}\right)+C$

6. $3\cdot\sqrt{x^2-4\cdot x+5}+C$

7. $\ln\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)+C$

8. $\operatorname{arcsen}\left[\dfrac{(x-2)}{\sqrt{5}\cdot x}\right]+C$

9. $\dfrac{x+1}{2}\cdot\sqrt{x^2+2\cdot x+5}+2\cdot\ln\left(2\cdot\sqrt{x^2+2\cdot x+5}+2\cdot x+2\right)$

10. $\arctan\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-2}}\right)+C$

11. $\dfrac{2\cdot x-1}{4}\cdot\sqrt{x-x^2}+\dfrac{1}{8}\cdot\operatorname{arcsen}(2\cdot x+1)+C$

12. $-\sqrt{1-4\cdot\ln(x)-\ln(x)^2}-2\cdot\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\ln(x)+2}{\sqrt{5}}\right)+C$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{sen}(x)-\sqrt{3}\right)+C$

14. $\ln\left[2\cdot\sqrt{1+3\cdot e^x+\left(e^x\right)^2}+2\cdot e^x+3\right]+C$

Técnica III ***Integración por partes*** **.**

Considérese la diferencial del producto de dos funciones $u(x)$ y $v(x)$: $d\cdot(u\cdot v)=u\cdot dv+v\cdot du$ e intégrese ambos miembros . . .

$$\int d(uv)=\int u\cdot dv+v\cdot du\, d.$$

$$u\cdot v=\int u\,dv+\int v\,du$$

expresión que se puede escribir también como : $\boxed{\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du}$ (7.8)

Esta es la *fórmula de integración por partes* (*abreviadamente : f. i. p.*) .

Su gran utilidad radica en que si la integración directa de $\int u\,dv$ resulta difícil o complicada , entonces el cálculo de $\int v\,du$, pueden ser un problema más sencillo .

Para aplicar ésta fórmula es necesario descomponer primero el integrando en dos factores: $u(x)$ y dv de tal manera que la integral de la derecha en (7.8) resulte más simple .

Para lograr éste fin se requiere cierta habilidad e intuición matemática que *sólo la experiencia y la práctica pueden proporcionar* .

El método de integración por partes es tal vez , la más poderosa técnica de integración y se puede aplicar en muchos casos, por ejemplo a integrales cuyos integrandos son una combinación de funciones elementales tales como :

$$\int x^k \cdot sen(a \cdot x)\, dx \qquad \int x^k \cdot cos(a \cdot x)\, dx \qquad \int x^k \cdot ln(x)\, dx$$

$$\int x^k \cdot e^{a \cdot x}\, dx \qquad \int x^k \cdot arcsen(a \cdot x)\, dx \qquad \int x^k \cdot arccos(a \cdot x)\, dx$$

y muchas otras más .

Ejemplo 5. Resolver las siguientes integrales integrando por partes..

1 . $\int x \cdot cos(x)\, dx$ 2 . $\int x \cdot ln(x)\, dx$ 3. $\int x \cdot e^{a \cdot x}\, dx$

4 . $\int x^2 \cdot e^{a \cdot x}\, dx$ 5 . $\int e^{a \cdot x} \cdot sen(n \cdot x)\, dx$ 6. $\int \sqrt{z^2 + a^2}\, dz$

7. $\int x^4 \cdot e^{2 \cdot x}\, dx$ 8. $\int \frac{1}{\sqrt{\left(1 + x^2\right)^5}}\, dx$

Soluciones :

1. En $\boxed{\int x \cdot cos(x)\, dx}$ eligiendo: $\begin{pmatrix} u = x \\ dv = cos(x) \cdot dx \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} du = dx \\ v = \int cos(x)\, dx = sen(x) + C \end{pmatrix}$

por lo tanto, aplicando la fórmula de integración por partes :

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$$\int x\cdot\cos(x)\,dx = x\cdot\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)\,dx = \boxed{x\cdot\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C}$$

OBSERVACIÓN : *Es notable la rapidez y facilidad que nos proporciona éste poderoso método de integración en integrales como la anterior, la cuales son difíciles de resolver por otra técnica .*

Además la constante de integración indefinida C que resulta de la integración del diferencial dv,

$\int .\,dv = v + C$, *no afecta el resultado de la integración final puesto que . . .*

$$\int u\,dv = u\cdot(v + C) - \int (v + C)\,du$$

$$= u\cdot v + C\cdot u - \int v\,du - \int C\,du = u\cdot v - \int v\,du$$

y queda la misma fórmula (f.i.p.) . Se puede ignorar esa constante o considerarla cero

2. En la integral: $\boxed{\int x\cdot\ln(x)\,dx}$ escojamos : $\begin{pmatrix} u = \ln(x) \\ dv = x\cdot dx \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} du = \dfrac{1}{x}\cdot dx \\ v = \displaystyle\int x\,dx = \dfrac{1}{2}\cdot x^2 + C \end{pmatrix}$

por lo tanto, aplicando la fórmula de integración por partes :

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$$\int x\cdot\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)dx = \boxed{\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C}$$

3. Aplicando *f.i.p.* en : $\boxed{\displaystyle\int x\cdot e^{a\cdot x}\,dx}$ escojamos $\begin{pmatrix} u = e^{a\cdot x} \\ dv = x\cdot dx \end{pmatrix}$, entonces $\begin{pmatrix} du = a\cdot e^{a\cdot x}\cdot dx \\ v = \displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C \end{pmatrix}$

y queda . . . $\displaystyle\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$$\int x\cdot e^{a\cdot x}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot e^{ax} - \int \frac{a}{2}\cdot x^2\cdot e^{ax}\,dx$$

La integral que hemos obtenido en el lado derecho no es más sencilla que la integral inicial *(el exponente de x aumentó)* . Esto nos indica que no hemos elegido convenientemente los factores u y dv.

Sean entonces. . . $\begin{pmatrix} u = x \\ dv = e^{a\cdot x}\cdot dx \end{pmatrix}$, de donde se obtiene que : $\begin{pmatrix} du = dx \\ v = \displaystyle\int e^{a\cdot x}\,dx = \frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot x} + C \end{pmatrix}$

La aplicación de *f. i. p.* da ahora : $\displaystyle\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$$\int x\cdot\left(e^{a\cdot x}\right)dx = \frac{x}{a}\cdot e^{a\cdot x} - \frac{1}{a}\cdot\int e^{a\cdot x}\,dx = \frac{x}{a}\cdot e^{a\cdot x} - \frac{e^{a\cdot x}}{a^2} + C$$

En algunos casos es necesario aplicar la fórmula de integración por partes más de una vez , como se muestra en el ejemplo siguiente :

4. En la integral : $\boxed{\displaystyle\int x^2\cdot e^{a\cdot x}\,dx}$ sean: $\begin{pmatrix} u = x^2 \\ dv = e^{a\cdot x}\cdot dx \end{pmatrix}$ entonces $\begin{pmatrix} du = 2\cdot x\cdot dx \\ v = \displaystyle\int e^{a\cdot x}\,dx = \frac{1}{a}\cdot e^{a\cdot x} + C \end{pmatrix}$

Aplicando la *f. i. p.* resulta : $\displaystyle\int x^2\cdot\left(e^{a\cdot x}\right)dx = x^2\cdot\left(\frac{e^{a\cdot x}}{a}\right) - \frac{2}{a}\cdot\int x\cdot e^{a\cdot x}\,dx$

y la integral del segundo miembro puede calcularse aplicando otra vez *f. i. p* como se hizo ya en el ejemplo 3 anterior, obteniéndose . . .

$$\int x^2 \cdot e^{a\cdot x}\,dx = x^2\cdot\left(\frac{e^{a\cdot x}}{a}\right) - \frac{2}{a}\cdot\left[\frac{x}{a}\cdot\left(e^{a\cdot x}\right) - \frac{e^{a\cdot x}}{a^2}\right] + C$$

$$= \boxed{\frac{e^{a\cdot x}}{a^3}\cdot\left(x^2\cdot a^2 - 2\cdot a\cdot x + 2\right) + C}$$

Algunas otras veces, la aplicación repetida de la integración por partes nos lleva nuevamente a la integral inicial . En éste caso, por simple álgebra se resuelve el problema como se muestra en el siguiente ejemplo.

5. En $\boxed{\int e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)\,dx}$ si $u = e^{a\cdot x}$ entonces $du = a\cdot e^{a\cdot x}\cdot dx$

si $dv = sen(n\cdot x)\cdot dx$ entonces $v = \int sen(n\cdot x)\,dx = \frac{-1}{n}\cdot cos(n\cdot x)$

y aplicando $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$ resulta :

$$\int e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)\,dx = \frac{-1}{n}\cdot e^{a\cdot x}\cdot cos(n\cdot x) + \frac{a}{n}\cdot\int cos(n\cdot x)\cdot e^{a\cdot x}\,dx$$

En la última integral de la derecha, apliquemos nuevamente la *f.i.p.* con:

$u = e^{a\cdot x}$ de donde $du = a\cdot e^{a\cdot x}\cdot dx$

$dv = cos(n\cdot x)\cdot dx$ de donde $v = \int cos(n\cdot x)\,dx = \frac{1}{n}\cdot sen(n\cdot x)$

y así resulta . . .

$$\int e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)\,dx = \frac{-1}{n}\cdot e^{a\cdot x}\cdot cos(n\cdot x) + \frac{a}{n}\cdot\left(\frac{e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)}{n} - \frac{a}{n}\cdot\int e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)\,dx\right)$$

Notemos como la integral original $I = \int e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)\,dx$ se repite a la derecha . Despejémosla :

$$I = -\frac{e^{a\cdot x}\cdot cos(n\cdot x)}{n} + \frac{a}{n}\cdot\frac{e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)}{n} - \left(\frac{a}{n}\right)^2\cdot I$$

$$I\cdot\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right) = a\cdot\frac{e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)}{n^2} - \frac{1}{n}\cdot e^{a\cdot x}\cdot cos(n\cdot x)$$

por lo tanto :

$$\int e^{a\cdot x}\cdot sen(n\cdot x)\,dx = \frac{e^{a\cdot x}}{\left(n^2+a^2\right)}\cdot(a\cdot sen(n\cdot x) - n\cdot cos(n\cdot x)) + C$$

6. $\boxed{\int \sqrt{z^2+a^2}\,dz}$ Multiplicando y dividiendo primeramente por $\sqrt{z^2+a^2}$ la integral se transforma en :

$$\int \sqrt{z^2+a^2}\,dz = \int \sqrt{z^2+a^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{z^2+a^2}}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)dz$$

$$= \int \frac{z^2+a^2}{\sqrt{z^2+a^2}}\,dz = a^2\cdot\int \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\,dz + \int z\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\,dz$$

pero la primera integral de la derecha es una integral inmediata. Aplicando entonces *f.i.p.* a la 2ª integral

con $\left(\begin{array}{c} u = z \\ dv = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\cdot dz \end{array}\right)$ de donde $\left(\begin{array}{c} du = dz \\ v = \displaystyle\int \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\,dz = \sqrt{z^2+a^2} \end{array}\right)$

queda entonces que . . .

$$\int \sqrt{z^2+a^2}\,dz = a^2\cdot ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right) + \left(z\cdot\sqrt{z^2+a^2} - \int \sqrt{z^2+a^2}\,dz\right)$$

De modo que la integral inicial aparece nuevamente en el miembro derecho de ésta ecuación. Despejándola resulta :

$$\int \sqrt{z^2+a^2}\,dz = \frac{a^2}{2}\cdot ln\left(z+\sqrt{z^2+a^2}\right) + \frac{z}{2}\cdot\sqrt{z^2+a^2} + C$$

que es una de las reglas de integración inmediata.

La aplicación sucesiva de la integración por partes puede generar una ***fórmula de reducción*** *,(o recurrencia) la cual contiene una nueva integral de* *la misma forma* *que la integral inicial , pero con un exponente aumentado o disminuido que puede corresponder a una integral más simple.*

Algunas fórmulas de reducción obtenidas integrando por partes son las siguientes :

I. $$\int x^m \cdot e^{a\cdot x}\,dx = \frac{1}{a}\cdot x^m\cdot e^{a\cdot x} - \frac{m}{a}\cdot\int x^{(m-1)}\cdot e^{a\cdot x}\,dx$$

II. $$\int sen^m\cdot(x)\,dx = \frac{-1}{m}\cdot\left[sen^{m-1}\cdot(x)\right]\cdot cos(x) + \frac{m-1}{m}\cdot\int sen^{m-2}\cdot(x)\,dx$$

III. $$\int \frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^m}\,dx = \frac{x}{2\cdot a^2\cdot(m-1)\cdot\left(a^2-x^2\right)^{m-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2\cdot m-3}{2\cdot m-2}\cdot\int\frac{1}{\left(a^2-x^2\right)^{m-1}}\,dx \; ; \; m \neq 1$$

IV. $$\int sen^m\cdot(x)\cdot cos^n\cdot(x)\,dx = \frac{sen^{m+1}\cdot(x)\cdot cos^{n-1}\cdot(x)}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\cdot\int sen^m\cdot(x)\cdot cos^{n-2}\cdot(x)\,dx$$

V. $$\int x^m\cdot sen(b\cdot x)\,dx = -\left(\frac{x^m}{b}\right)\cdot cos(b\cdot x) + \frac{m}{b}\cdot\int x^{m-1}\cdot cos(b\cdot x)\,dx$$

y muchas otras más .

Consideremos por ejemplo la integral $\int x^4\cdot e^{2\cdot x}\,dx$. Aplicando la fórmula de reducción I, con $m = 4$

y $a = 2$ se tiene : $$\int x^4\cdot e^{2\cdot x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot x^4\cdot e^{2\cdot x} - \frac{4}{2}\cdot\int x^3\cdot e^{2\cdot x}\,dx$$

Aplicando a la integral de la derecha otra vez la misma fórmula de reducción, pero ahora con $m = 3$ queda:

$$\int x^4\cdot e^{2\cdot x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot x^4\cdot e^{2\cdot x} - \frac{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^3\cdot e^{2\cdot x} - \frac{3}{2}\cdot\int x^2\cdot e^{2\cdot x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x^4\cdot e^{2\cdot x} - x^3\cdot e^{2\cdot x} + 3\cdot\int x^2\cdot e^{2\cdot x}\,dx$$

Nótese cómo va disminuyendo el exponente del factor x^n en el integrando a medida que se aplica repetidamente la fórmula de reducción.

Una 3ª aplicación con $m = 2$ y una 4ª aplicación con $m = 1$ de la misma fórmula de reducción a la integral de la derecha permite llegar al resultado final . . .

$$\int x^4 \cdot e^{2\cdot x}\, dx = \frac{1}{2}\cdot x^4\cdot e^{2\cdot x} - x^3\cdot e^{2\cdot x} + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{2\cdot x} - \int x\cdot e^{2\cdot x}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x^4\cdot e^{2\cdot x} - x^3\cdot e^{2\cdot x} + \frac{3}{2}\cdot x^2\cdot e^{2\cdot x} - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2\cdot x} - \frac{1}{2}\cdot\int e^{2\cdot x}\, dx\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot x^4 - x^3 + \frac{3}{2}\cdot x^2 - \frac{3}{2}\cdot x + \frac{3}{4}\right)\cdot e^{2\cdot x} + C$$

Como un segundo ejemplo, considérese la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}\, dx$. Usando la fórmula de reducción:

$$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^m}\, dx = \frac{x}{2\cdot a^2\cdot(m-1)\cdot\left(a^2+x^2\right)^{m-1}} + \frac{2\cdot m-3}{a^2\cdot(2\cdot m-2)}\cdot\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{m-1}}\, dx$$

(Demuéstrela integrando por partes)

con $a = 1$ y $m = \frac{5}{2}$ se obtiene :

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}\, dx = \frac{x}{3\cdot\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} + \frac{2}{3}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}\, dx$$

Una segunda aplicación de la misma fórmula, tomando $m = \frac{3}{2}$, en la integral de la derecha da :

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}\, dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}} + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + 0\cdot\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot x + 2\cdot x^3}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}} + C$$

EJERCICIO 7.3 *Integración por partes*

1. $\displaystyle\int ln(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int x\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)dx$
3. $\displaystyle\int u\cdot sec^2\cdot(u)\,du$
4. $\displaystyle\int v\cdot sen^2\cdot(v)\,dv$
5. $\displaystyle\int x^n\cdot ln(x)\,dx$
6. $\displaystyle\int \left(x\cdot a^x\right)dx$
7. $\displaystyle\int arcsen(x)\,dx$
8. $\displaystyle\int arctan(x)\,dx$
9. $\displaystyle\int arccsc\left(\frac{t}{2}\right)dt$
10. $\displaystyle\int e^{\theta}\cdot cos(\theta)\,d\theta$
11. $\displaystyle\int \frac{ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$
12. $\displaystyle\int \left[\frac{ln(x)}{(x+1)^2}\right]dx$
13. $\displaystyle\int \frac{x\cdot e^x}{(x+1)^2}\,dx$
14. $\displaystyle\int arcsen\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)dx$
15. $\displaystyle\int \frac{arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
16. $\displaystyle\int csc(\theta)^3\,d\theta$
17. $\displaystyle\int \left(e^x+2\cdot x\right)^2 dx$
18. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}\,dx$
19. $\displaystyle\int \left[\frac{1}{\left(x^2-16\right)^3}\right]dx$

Respuestas : Ejercicio 7.3

1. $x\cdot ln(x) - x + C$
2. $4\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right) - 2\cdot x\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$
3. $u\cdot tan(u) + ln(cos(u)) + C$
4. $\frac{-1}{2}\cdot v\cdot cos(v)\cdot sen(v) + \frac{1}{4}\cdot v^2 - \frac{1}{4}\cdot cos(v)^2 + C$

5. $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)}\cdot\left[\ln(x)-\dfrac{1}{(n+1)}\right]+C$

6. $a^x\cdot\left[\dfrac{x}{\ln(a)}-\dfrac{1}{\ln^2(a)}\right]$

7. $x\cdot arcsen(x)+\sqrt{1-x^2}+C$

8. $x\cdot\arctan(x)-\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(1+x^2\right)+C$

9. $t\cdot arccsc\left(\dfrac{t}{2}\right)+2\cdot\ln\left(\dfrac{t}{2}+\sqrt{\dfrac{t^2}{4}-1}\right)$

10. $\dfrac{1}{2}\cdot e^{\theta}\cdot\left(\cos(\theta)+sen(\theta)\right)+C$

11. $2\cdot\sqrt{x+1}\cdot(\ln(x+1)-2)+C$

12. $\dfrac{x}{x+1}\cdot(\ln(x)-\ln(x+1))+C$

13. $\dfrac{e^x}{(x+1)}+C$

14. $(x-1)\cdot arcsen\left(\sqrt{\dfrac{x}{2}}\right)+\dfrac{\sqrt{2\cdot x}}{4}\cdot\sqrt{4-2\cdot x}+C$

15. $\dfrac{1}{2}\cdot arcsen(x)^2+C$

16. $\dfrac{-\cos(\theta)}{2\cdot sen^2(\theta)}+\dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(\csc(\theta)-\cot(\theta)\right)+C$

17. $\dfrac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}+4\cdot(x-1)\cdot e^x+\dfrac{4}{3}\cdot x^3+C$

18. $\dfrac{2}{15}\cdot\sqrt{x+1}\cdot\left[3\cdot(x+1)^2-10\cdot x+5\right]+C$

19. $\dfrac{1}{2^{11}}\cdot\dfrac{3\cdot x^3-80\cdot x}{\left(x^2-16\right)^2}+\dfrac{3}{2^{14}}\cdot\ln\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)+C$

Técnica IV. ***Integración de funciones racionales*** **.**

Así como el cociente $\dfrac{r}{s}$ de dos números enteros r y s (*con* $s\neq 0$) es un número racional, una función racional es el cociente de dos polinomios o funciones enteras $P_n(x)$ y $Q_m(x)$:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3+....+a_n\cdot x^n}{b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+b_3\cdot x^3+....+b_m\cdot x^m}\quad\text{con}\quad Q_m(x)\neq 0$$

Una función racional es *propia* si $n<m$, es decir si el grado n del polinomio numerador $P_n(x)$ es *menor* que el grado m del polinomio denominador $Q_m(x)$.

Cuando $m\geq n$, la función racional se llama *impropia* . Por ejemplo las siguientes funciones. . .

$$f(x) = \frac{2\cdot x + 1}{x^3 + 2}$$

Es el cociente de los polinomios $P_1(x) = 2\cdot x + 1$ de grado 1 y $Q_3(x) = x^3 + 2$ de grado 3 por lo cual es una función racional *propia* .

$$g(x) = \frac{3\cdot x^4 + 2\cdot x}{x^3 - x^2}$$

Es el cociente de los polinomios $P_3(x) = 3\cdot x^4 + 2\cdot x$ de grado 4 y $Q_3(x) = x^3 - x^2$ de grado 4 por lo cual es una función racional *impropia* .. (Se puede realizar la división de los polinomios)

$$h(x) = \frac{x^3 - 1}{2\cdot x^3 - x^2}$$

Es el cociente de los polinomios del mismo grado (3) , por lo cual es una función racional *impropia* .

$$z(x) = \frac{-5\cdot x^2 + 3\cdot x - 1}{3\cdot\sqrt{x^3} - 2\cdot x}$$

No es propia ni impropia porque simplemente *no es una función racional* , dado que el denominador no es un polinomio debido a que uno de sus términos no es una potencia entera positiva .

Cuando una función racional es impropia, usando la división de polinomios, se puede escribir como la suma de un polinomio y una función racional propia , esto es . . .

$$\frac{P_{n}\cdot(x)}{Q_{m}\cdot(x)} = C\cdot(x) + \frac{R_{s}\cdot(x)}{Q_{m}\cdot(x)}$$

donde $C(x)$ es el polinomio *cociente* y $R_s\cdot(x)$ es el *polinomio residuo* de grado s (con $s < m$) por lo cual la fracción $\dfrac{R_s\cdot(x)}{Q_m\cdot(x)}$ ya es propia .

Consideremos por ejemplo la función : $\dfrac{P_5\cdot(x)}{Q_2\cdot(x)} = \dfrac{x^5 - 54\cdot x - 79}{x^2 - x - 6}$ que no es propia ; pero por división se puede expresar como . . .

$$\frac{P_5\cdot(x)}{Q_2\cdot(x)} = x^3 + x^2 + 7\cdot x + 13 + \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$$

que es la suma del polinomio cociente $C(x) = x^3 + x^2 + 7\cdot x + 13$ y la fracción propia del residuo.

Puesto que la integración de polinomios es relativamente fácil , la dificultad principal en la integración de funciones racionales se reduce a la *integración de funciones racionales propias.*

Por otra parte, es un resultado bien conocido del Álgebra que :

- *Todo polinomio se puede expresar como el producto de factores lineales de la forma* $(x-a)$ *y cuadráticos irreducibles de la forma* $\left(x^2+p\cdot x+q\right)$.
- *Toda función racional propia se puede expresar como una suma de fracciones parciales de uno de los 4 tipos fundamentales siguientes :*

I . LINEALES : $\dfrac{A}{x-a}$ II . LINEALES REPETIDAS: $\dfrac{A}{(x-a)^n}$; $n \geq 2$

III. CUADRÁTICAS: $\dfrac{A\cdot x+B}{x^2+p\cdot x+q}$ IV. REPETIDAS : $\dfrac{A\cdot x+B}{\left(x^2+p\cdot x+q\right)^m}$;

donde A , B , a , p y q *son constantes* .

La integración de cualquiera de éstas formas elementales se realiza por alguna de las técnicas de integración que ya se han analizado anteriormente.

Se tiene entonces el siguiente . . .

PROCEDIMIENTO PARA LA DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUNCIÓN RACIONAL EN UNA SUMA DE FRACCIONES PARCIALES .

1º. Si la función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es impropia, entonces dividir para escribirla como :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = N(x) + \frac{P\cdot(x)}{Q\cdot(x)}$$

donde la función racional $\dfrac{P\cdot(x)}{Q\cdot(x)}$ ya es propia. A ella se aplicarán los siguientes pasos.

2º. *Factorizar el polinomio denominador* $Q(x)$ en :

- *factores lineales* : $(a\cdot x+b)^n$
- *cuadráticos irreducibles en los reales* (*que no tienen raíces reales*): $\left(p\cdot x^2+q\cdot x+r\right)^m$

donde m y n son enteros positivos que representan su grado de repetición .

3º Por cada factor lineal $(a\cdot x+b)^n$ se debe incluir en la descomposición una suma de n fracciones parciales de la forma general :

$$\frac{A_1}{a\cdot x+b}+\frac{A_2}{(a\cdot x+b)^2}+\frac{A_3}{(a\cdot x+b)^3}+\;.....\;+\frac{A_n}{(a\cdot x+b)^n}$$

donde A_1, A_2 , . . . , A_m son *constantes por determinar* .

4º. Por cada factor cuadrático $\left(p\cdot x^2+q\cdot x+r\right)^m$ se debe incluir en la descomposición una suma de m fracciones parciales de la forma :

$$\frac{B_1\cdot x+C_1}{p\cdot x^2+q\cdot x+r}+\frac{B_2\cdot x+C_2}{\left(p\cdot x^2+q\cdot x+r\right)^2}+\frac{B_3\cdot x+C_3}{\left(p\cdot x^2+q\cdot x+r\right)^3}+\;....\;+\frac{B_n\cdot x+C_n}{\left(p\cdot x^2+q\cdot x+r\right)^n}$$

donde B_1, B_2 , . . . , B_n y C_1 , C_2 , . . ., C_n son *constantes por determinar* .

Algunos métodos para determinar los coeficientes A_1, A_2 , . . ., A_m ; B_1, B_2 , . . ., B_n y C_1, C_2 , . . ., C_n son los siguientes :

IGUALACIÓN DE COEFICIENTES .

Consiste en :

1° ***Sumar*** las fracciones parciales propuestas como desarrollo de la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{N_1(x)}{D_1(x)}+\frac{N_2(x)}{D_2(x)}+\;......\;+\frac{N_k(x)}{D_k(x)}$$

2° ***Igualar*** los numeradores de las fracciones a la derecha y a la izquierda de la ecuación anterior, puesto sus denominadores ya son iguales: $Q(x)=D_1\cdot(x)\cdot D_2\cdot(x)\cdot ....\cdot D_k\cdot(x)$ y dado que ambas fracciones representan la misma función.

$$P(x)=(Numerador\_de\_la\_suma\_de\_fracciones)$$

3° ***Igualar*** los coeficientes de iguales potencias de x en ambos miembros, puesto que dos polinomios son iguales sólo si sus coeficientes correspondientes son iguales.

Este procedimiento genera un sistema de ecuaciones simultáneas para los coeficientes indeterminados.

SUBSTITUCIÓN :

Sólo difiere del método anterior en el tercer paso :

3° ***Asignar*** valores arbitrarios a la variable x en la expresión :

$$P(x) = (Numerador\_de\_la\_suma\_de\_fracciones)$$

y *resolver* las ecuaciones resultantes para cada uno de los coeficientes.

Cuando no hay factores repetidos, éste es el procedimiento más corto.

Cabe mencionar en éste método que *aunque los valores asignados a la variable* x *son arbitrarios, usualmente se escogen las raíces del denominador* $Q(x)$ *de la función racional, con el objeto de simplificar el cálculo*.

Ejemplo 6. Desarrollar en fracciones parciales la siguiente función racional $f(x) = \dfrac{x^3 + 2\cdot x - 1}{x^5 + x^4 - x - 1}$

Solución : Ésta función racional es *propia* pues es mayor el grado de su denominador, además, usando los procedimientos para factorizar polinomios, éste se factoriza en :

$$x^5 + x^4 - x - 1 = (x-1)\cdot\left(x^2+1\right)\cdot(x+1)^2$$

- un factor cuadrático : $\left(x^2+1\right)$
- un factor lineal : $(x-1)$
- un factor lineal repetido : $(x+1)^2$,el cual genera por lo tanto dos fracciones parciales . *(En general, el número de fracciones parciales que resultan de un factor repetido es igual al exponente del factor.)*

De acuerdo entonces al procedimiento para la descomposición de una función racional en una suma de fracciones parciales, se propone el desarrollo . . .

$$\frac{x^3 + 2\cdot x - 1}{x^5 + x^4 - x - 1} = \frac{A}{x-1} + \left[\frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}\right] + \frac{C\cdot x + D}{x^2+1}$$

y sumando en el lado derecho se obtiene el numerador . . .

$$\left(C + A + B_1\right)\cdot x^4 + \left(B_2 + D + 2\cdot A + C\right)\cdot x^3 + \left(-C + 2\cdot A + D - B_2\right)\cdot x^2 \ \ldots$$
$$+\left(2\cdot A + B_2 - C - D\right)\cdot x + \left(A - D - B_1 - B_2\right)$$

Si los numeradores de ambas fracciones a la izquierda y a la derecha van a ser iguales, es necesario que los polinomios en sus numeradores sean iguales puesto que los polinomios denominadores ya lo son, esto es . . .

$$\left(x^3+2\cdot x-1\right) =$$
$$= \left(C+A+B_1\right)\cdot x^4+\left(B_2+D+2\cdot A+C\right)\cdot x^3+\left(-C+2\cdot A+D-B_2\right)\cdot x^2 \ldots$$
$$+\left(2\cdot A+B_2-C-D\right)\cdot x+\left(A-D-B_1-B_2\right)$$

Por otra parte, dos polinomios son iguales solo si sus coeficientes correspondientes a las mismas potencias de x son iguales.

Igualando los coeficientes para x^4 : $\quad A+B_1+C=0$

Igualando los coeficientes para x^3 : $\quad 2\cdot A+B_2+C+D=1$

Igualando los coeficientes para x^2 : $\quad 2\cdot A-B_2-C+D=0$

Igualando los coeficientes para x : $\quad 2\cdot A+B_2-C-D=2$

Igualando los coeficientes para x^0 $\quad A-B_1-B_2-D=-1$

Este *sistema de ecuaciones lineales simultáneas* tiene por solución :

$$A=\frac{1}{4} \;;\quad B_1=\frac{1}{4} \;;\quad B_2=1 \;;\quad C=\frac{-1}{2} \;;\quad D=0$$

De modo que función racional queda expresada como una suma de fracciones simples :

$$\frac{x^3+2\cdot x-1}{x^5+x^4-x-1}=\frac{1}{4\cdot(x-1)}+\frac{1}{4\cdot(x+1)}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+1\right)}$$

Evidentemente será más sencillo integrar por separado cada una de éstas fracciones, que la función racional inicial .
Aquí se podría decir que se aplica plenamente el popular refrán : ***" divide y vencerás "***

Ejemplo 7. Realizar la integración : $\displaystyle\int \frac{2\cdot x+3}{x^3+x^2-2\cdot x}\,dx$

Solución : El integrando es una función racional *propia* cuyo denominador se factoriza como :

$$x^3+x^2-2\cdot x = x\cdot(x+2)\cdot(x-1)$$

que son 3 factores lineales no repetidos.
El desarrollo en fracciones parciales propone entonces la forma:

$$\frac{2\cdot x+3}{x^3+x^2-2\cdot x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-1}$$

con las constantes A , B y C por determinar.
Sumando las fracciones del lado derecho queda . . .

$$\frac{2\cdot x+3}{x^3+x^2-2\cdot x} = \frac{A\cdot x^2+A\cdot x-2\cdot A+B\cdot x^2-B\cdot x+C\cdot x^2+2\cdot C\cdot x}{x\cdot(x+2)\cdot(x-1)}$$

Los numeradores de ambas fracciones deben ser iguales dado que sus denominadores son los mismos :

$$2\cdot x+3 = (A+B+C)\cdot x^2+(-B+A+2\cdot C)\cdot x-2\cdot A$$

y por la igualdad de dos polinomios, *los coeficientes de potencias iguales de x deben ser iguales*, es decir :

$$A+B+C = 0$$
$$A-B+2\cdot C = 2$$
$$-2\cdot A = 3$$

Éste sistema de ecuaciones lineales tiene la solución : $A = \frac{-3}{2}$, $B = \frac{-1}{6}$, $C = \frac{5}{3}$,

por lo tanto la función racional es equivalente a la suma :

$$\frac{2\cdot x+3}{x^3+x^2-2\cdot x} = \frac{\frac{-3}{2}}{x}+\frac{\frac{-1}{6}}{x+2}+\frac{\frac{5}{3}}{x-1}$$

y la complicada integral inicial se descompone en tres integrales simples que se resuelven por substitución:

$$\int \frac{2\cdot x+3}{x^3+x^2-2\cdot x}\,dx = \int \left(\frac{\frac{-3}{2}}{x}+\frac{\frac{-1}{6}}{x+2}+\frac{\frac{5}{3}}{x-1}\right)dx$$

$$= \frac{-3}{2}\cdot\int \frac{1}{x}\,dx+\frac{5}{3}\cdot\int \frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{6}\cdot\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{-3}{2}\cdot ln(x)+\frac{5}{3}\cdot ln(x-1)-\frac{1}{6}\cdot ln(x+2)+C$$

Usando las propiedades de los logaritmos, éste resultado se escribe también como :

$$\int \frac{2\cdot x+3}{x^3+x^2-2\cdot x}\,dx = ln\left[\frac{\sqrt[3]{(x-1)^5}}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[6]{(x+2)}}\right]+C$$

Ejemplo 8. Realizar la integral indefinida : $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x\cdot(x-1)^3}\,dx$

Solución : El integrando es una función racional *propia* y el denominador ya está totalmente factorizado. Contiene un factor lineal no repetido $(x-0)$ que genera una sola fracción parcial y un factor lineal repetido $(x-1)^3$ que genera tres fracciones parciales. Se propone entonces el desarrollo :

$$\frac{x^3+1}{x\cdot(x-1)^3} = \frac{A}{x}+\left[\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}\right]$$

$$= \frac{A\cdot(x-1)^3+B\cdot x\cdot(x-1)^2+C\cdot x\cdot(x-1)+D\cdot x}{x\cdot(x-1)^3}$$

Si éstas dos fracciones han de ser iguales deben ser iguales sus numeradores, puesto que su denominador es el mismo, esto es :

$$x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1 = A\cdot(x-1)^3+B\cdot x\cdot(x-1)^2+C\cdot x\cdot(x-1)+D\cdot x$$

Ésta ecuación, que se obtiene de la igualación de los numeradores se llama ***ecuación básica .***

Para determinar las constantes A, B, C y D usemos ahora el método de substitución, el cual se basa en el principio: *"si dos polinomios son iguales, significa que tienen el mismo valor cuando a su variable independiente x se asigna un valor arbitrario"*

Así por ejemplo, cuando $x = 0$, *(una de las raices del denominador)* queda :

$$0^3+1 = A\cdot(0-1)^3+B\cdot 0\cdot(0-1)^2+C\cdot 0\cdot(0-1)+D\cdot 0$$

esto es :

$$1 = -A$$

cuando $x = 1$ *(otra de las raíces del denominador)* queda :

$$1^3 + 1 = A\cdot(1-1)^3 + B\cdot(1)\cdot(1-1)^2 + C\cdot(1)\cdot(1-1) + D\cdot(1)$$

esto es :

$$2 = D$$

De éste modo han quedado rápidamente determinadas dos de las constantes y la ecuación básica se reduce a :

$$x^3 + 1 = (-1)\cdot(x-1)^3 + B\cdot x\cdot(x-1)^2 + C\cdot x\cdot(x-1) + 2\cdot x$$

o simplificando queda . . . $2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + x = B\cdot x\cdot(x-1)^2 + C\cdot x\cdot(x-1)$

Substituyendo ahora el valor arbitrario $x = -1$ de ésta ecuación se obtiene :

$$2\cdot(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 + (-1) = B\cdot(-1)\cdot(-1-1)^2 + C\cdot(-1)\cdot(-1-1)$$

es decir . . .

$$-6 = -4\cdot B + 2\cdot C \qquad (1)$$

y con otro valor cualquiera, por ejemplo $x = 2$ resulta :

$$2\cdot(2)^3 - 3\cdot(2)^2 + 2 = B\cdot(2)\cdot(2-1)^2 + C\cdot(2)\cdot(2-1)$$

esto es

$$6 = 2\cdot B + 2\cdot C \qquad (2)$$

Las dos ecuaciones simultáneas (1) y (2) , tienen como solución : $B = -2$, $C = 1$
La integral inicial queda expresada entonces como una suma de integrales más simples que se transforman en inmediatas por substitución :

$$\int \left[\frac{x^3+1}{x\cdot(x-1)^3}\right] dx = \int \left[\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}\right] dx$$

$$= \int -\frac{1}{x}\, dx + 2\cdot\int \frac{1}{x-1}\, dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\, dx + \int \frac{2}{(x-1)^3}\, dx$$

$$= \boxed{-ln(x) + 2\cdot ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C}$$

EJERCICIO 7.4 Integrales de funciones racionales (factores lineales)

1. $\displaystyle\int \left(\frac{4\cdot x-2}{x^3-x^2-2\cdot x}\right)dx$

2. $\displaystyle\int \left(\frac{4\cdot x+3}{4\cdot x^3+8\cdot x^2+3\cdot x}\right)dx$

3. $\displaystyle\int \frac{z^2}{(z-1)^3}\,dz$

4. $\displaystyle\int \left(\frac{y^4-8}{y^3+2\cdot y^2}\right)dy$

5. $\displaystyle\int \left(\frac{5\cdot x^2-9}{x^3-9\cdot x}\right)dx$

6. $\displaystyle\int \left[\frac{3\cdot x^2+11\cdot x+2}{(x+3)\cdot\left(x^2-1\right)}\right]dx$

7. $\displaystyle\int \left[\frac{24\cdot y^2+10\cdot y+5}{(2\cdot y-1)\cdot(2\cdot y+1)^2}\right]dx$

8. $\displaystyle\int \left(\frac{t^4+1}{t^3-t}\right)dt$

9. $\displaystyle\int \left(\frac{x^3-2\cdot x+4}{x^4+2\cdot x^3}\right)dx$

10. $\displaystyle\int \left(\frac{x+2}{x^4+2\cdot x^3+x^2}\right)dx$

Respuestas : Ejercicio 7.4

1. $\displaystyle ln\left[\frac{x\cdot(x-2)}{(x+1)^2}\right]+C$

2. $\displaystyle ln\left(\frac{x}{\sqrt{2\cdot x+3}\cdot\sqrt{2\cdot x+1}}\right)+C$

3. $\displaystyle \frac{-1}{2\cdot(z-1)^2}-\frac{2}{z-1}+ln(z-1)+C$

4. $\displaystyle \frac{1}{2}\cdot y^2-2\cdot y+\frac{4}{y}+ln\left[\left(y^2+2\cdot y\right)^2\right]+C$

5. $\displaystyle ln\left[x\cdot(x-3)^2\cdot(x+3)^2\right]+C$

6. $\displaystyle ln\left[\frac{(x-1)^2\cdot\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt{x+3}}\right]+C$

7. $\displaystyle ln\left[(2\cdot y-1)^2\cdot(2\cdot y+1)\right]+\frac{3}{2\cdot(2\cdot y+1)}+C$

8. $\displaystyle \frac{1}{2}\cdot t^2+ln\left(\frac{t^2-1}{t}\right)+C$

9. $\displaystyle \frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x}+ln(x)+C$

10. $\displaystyle \frac{-2}{x}-\frac{1}{(x+1)}+ln\left[\left(\frac{x+1}{x}\right)^3\right]+C$

Ejemplo 9. Realizar la integral indefinida : $\displaystyle\int \frac{4}{x^3+4\cdot x}\,dx$

Solución : El denominador de ésta función racional se factoriza como : $x\cdot\left(x^2+4\right)$, (un factor lineal $(x-0)$ y uno cuadrático irreducible $\left(x^2+4\right)$) . Estos factores proponen el siguiente desarrollo en fracciones parciales:

$$\frac{4}{x^3+4\cdot x} = \frac{A}{x}+\frac{B\cdot x+C}{x^2+4}$$

Sumando las fracciones de la derecha e igualando los numeradores de ambos miembros se obtiene : $4 = A\cdot\left(x^2+4\right)+(B\cdot x+C)\cdot x$ esto es . . .

$$4 = (A+B)\cdot x^2+C\cdot x+4\cdot A$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de x se forma un sistema simple de ecuaciones simultáneas:

$$A+B = 0$$
$$C = 0$$
$$4\cdot A = 4$$

de donde se obtiene la solución : $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$. Por lo tanto :

$$\frac{4}{x^3+4\cdot x} = \frac{1}{x}+\frac{(-1)\cdot x+0}{x^2+4} = \frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}$$

De ésta manera , la integral de la función racional inicial se transforma en :

$$\int \left(\frac{4}{x^3+4\cdot x}\right)dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+4}\,dx = ln(x)-\frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+4\right)+C$$

Usando las propiedades de los logaritmos, se puede escribir el resultado en la forma :

$$\int \left(\frac{4}{x^3+4\cdot x}\right)dx = ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)+C$$

Ejemplo 10. Realizar la integral indefinida : $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\,dx$

Solución : El integrando es una fracción racional propia, cuyo denominador es una diferencia de cubos y por lo tanto, se factoriza como :

$$x^3+2^3 = (x+2)\cdot\left(x^2-2\cdot x+4\right)$$

así que contiene un *factor lineal* $(x+2)$ y un *factor cuadrático irreducible en los reales* : $x^2-2\cdot x+4$, lo cual significa que *la ecuación* $x^2-2\cdot x+4 = 0$ *no tiene raíces reales, solo raíces complejas*.
Para la función racional se propone entonces la descomposición en la suma . . .

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{A}{x+2}+\frac{B\cdot x+C}{x^2-2\cdot x+4}$$

Sumando las fracciones parciales de la derecha e igualando los numeradores de ambos miembros se obtiene :

$$1 = A\cdot\left(x^2-2\cdot x+4\right)+(B\cdot x+C)\cdot(x+2)$$

es decir . . .

$$1 = (A+B)\cdot x^2+(2\cdot B-2\cdot A+C)\cdot x+4\cdot A+2\cdot C$$

Igualando los coeficientes de iguales potencias de x se obtiene el sistema de ecuaciones simultáneas . . .

$$A+B = 0$$
$$-2\cdot A+2\cdot B+C = 0$$
$$4\cdot A+2\cdot C = 1$$

que tiene la solución: $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{-1}{12}$, $C = \frac{1}{3}$.

El desarrollo de la función racional es entonces :

$$\frac{1}{x^3+8} = \frac{1}{12\cdot(x+2)}+\frac{\frac{-1}{12}\cdot x+\frac{1}{3}}{x^2-2\cdot x+4} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(x+2)}-\frac{1}{12}\cdot\frac{x-4}{\left(x^2-2\cdot x+4\right)}$$

y la integral de la función racional se transforma en :

$$\int \frac{1}{x^3+8}\,dx = \frac{1}{12}\cdot\int \frac{1}{x+2}\,dx-\frac{1}{12}\cdot\int \frac{x-4}{x^2-2\cdot x+4}\,dx$$

La primera integral de la derecha se transforma en inmediata por substitución en tanto que la segunda contiene un trinomio cuadrado y se resuelve por la técnica correspondiente :
(formando la derivada del denominador en el numerador y completando el trinomio cuadrado perfecto del denominador)

$$\int \frac{1}{x^3+8}\,dx =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\int \frac{1}{x+2}\,dx - \frac{1}{24}\cdot\left[\int \frac{2\cdot x-2}{x^2-2\cdot x+4}\,dx - \int \frac{6}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{12}\cdot ln(x+2) - \frac{1}{24}\cdot ln\left(x^2-2\cdot x+4\right) + \frac{1}{4\cdot\sqrt{3}}\cdot arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

O usando las propiedades de los logaritmos . . .

$$\int \frac{1}{x^3+8}\,dx = \frac{1}{24}\cdot ln\left[\frac{(x+2)^2}{x^2-2\cdot x+4}\right] + \frac{1}{4\cdot\sqrt{3}}\cdot arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Ejemplo 11. Hacer la integral : $\displaystyle\int \frac{2\cdot z^3+z+3}{\left(z^2+1\right)^2}\,dz$

Solución : La función racional del integrando es propia . El denominador está factorizado y contiene un factor cuadrático irreducible en los reales que además, está repetido, por lo tanto se propone el desarrollo :

$$\frac{2\cdot z^3+z+3}{\left(z^2+1\right)^2} = \frac{A\cdot z+B}{\left(z^2+1\right)^2} + \frac{C\cdot z+D}{\left(z^2+1\right)}$$

Sumando e igualando los numeradores de ambas fracciones se obtiene :

$$2\cdot z^3+z+3 = (A\cdot z+B)+(C\cdot z+D)\cdot\left(z^2+1\right)$$

es decir . . .

$$2\cdot z^3+z+3 = C\cdot z^3+D\cdot z^2+(A+C)\cdot z+B+D$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de z , se origina el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas :

$$A + C = 1$$
$$B + D = 3$$
$$C = 2$$
$$D = 0$$

de cuya solución : $A = -1$, $B = 3$, $C = 2$, $D = 0$ la integral se transforma en :

$$\int \frac{2\cdot z^3 + z + 3}{\left(z^2 + 1\right)^2}\, dz = \int \frac{2\cdot z + 0}{z^2 + 1} + \frac{-z + 3}{\left(z^2 + 1\right)^2}\, dz$$

$$= \int \frac{2\cdot z}{z^2 + 1}\, dz - \int \frac{z}{\left(z^2 + 1\right)^2}\, dz + 3\cdot \int \frac{1}{\left(z^2 + 1\right)^2}\, dz$$

Las primeras dos integrales de la derecha se transforman en elementales por simple

substitución, mientras que la integral : $I = \int \frac{1}{\left(z^2 + 1\right)^2}\, dz$ se puede resolver usando la

fórmula de reducción :

$$I = \frac{x}{2\cdot a^2\cdot (m-1)\cdot \left(a^2 + x^2\right)^{m-1}} + \frac{2\cdot m - 3}{a^2\cdot (2\cdot m - 2)}\cdot \left[\int \frac{1}{\left(a^2 + x^2\right)^{m-1}}\, dx\right]$$

con $a = 1$ y $m = 2$, obteniendo . . .

$$3\cdot \int \frac{1}{\left(z^2 + 1\right)^2}\, dz = \frac{3\cdot z}{2\cdot (1)^2\cdot (2-1)\cdot \left(z^2 + 1\right)} + \frac{3\cdot [2\cdot (2) - 3]}{(1)^2\cdot [2\cdot (2) - 2]}\cdot \int \frac{1}{\left(z^2 + 1\right)}\, dz$$

$$= \frac{3\cdot z}{2\cdot \left(z^2 + 1\right)} + \frac{3}{2}\cdot \int \frac{1}{z^2 + 1}\, dz$$

Finalmente la integral inicial se expresa como la suma de integrales :

$$\int \frac{2\cdot z}{z^2 + 1}\, dz - \int \frac{z}{\left(z^2 + 1\right)^2}\, dz + \frac{3\cdot z}{2\cdot \left(z^2 + 1\right)} + \frac{3}{2}\cdot \int \frac{1}{z^2 + 1}\, dz$$

es decir :

$$\int \frac{2\cdot z^3 + z + 3}{\left(z^2+1\right)^2}\, dz = ln\left(z^2+1\right) + \frac{1}{2\cdot\left(z^2+1\right)} + \frac{3\cdot z}{2\cdot\left(z^2+1\right)} + \frac{3}{2}\cdot arctan(z) + C$$

$$= \boxed{ln\left(z^2+1\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot z+1}{z^2+1} + \frac{3}{2}\cdot arctan(z) + C}$$

EJERCICIO 7.5 *Integrales de funciones racionales (factores cuadráticos)*

1. $\displaystyle\int \frac{4\cdot x^2+6}{x^3+3\cdot x}\, dx$

2. $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{(x-1)\cdot\left(x^2+1\right)}\, dx$

3. $\displaystyle\int \frac{2\cdot y^3+y^2+2\cdot y+2}{y^4+3\cdot y^2+2}\, dy$

4. $\displaystyle\int \frac{1}{z^4+z^2}\, dz$

5. $\displaystyle\int \frac{x^5+9\cdot x^3-9\cdot x^2-9}{x^3+9\cdot x}\, dx$

6. $\displaystyle\int \frac{4\cdot x^2+2\cdot x+8}{x\cdot\left(x^2+2\right)^2}\, dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2+x}\, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^5+4\cdot x^3}{\left(x^2+2\right)^3}\, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{4}{x^4-1}\, dx$

10. $\displaystyle\int \left(\frac{x+3}{x^2-4\cdot x-5}\right)^2 dx$

Respuestas : Ejercicio 7.5

1. $ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+3}\right) + C$

2. $ln(x-1) + arctan(x) + C$

3. $ln\left(y^2+2\right) + arctan(y) + C$

4. $\dfrac{-1}{z} - arctan(z) + C$

5. $\dfrac{1}{3}\cdot x^3 - ln\left[\dfrac{x}{\left(x^2+9\right)^4}\right] + C$

6. $ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+2}\right) + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{x^2+2} + \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

7. $\ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\dfrac{2\cdot x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

8. $\dfrac{1}{\left(x^2+2\right)^2} + \dfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+2\right) + C$

9. $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - 2\cdot\arctan(x) + C$

10. $\dfrac{-1}{9}\cdot\dfrac{17\cdot x+11}{x^2-4\cdot x-5} + \dfrac{4}{27}\cdot\ln\left(\dfrac{x+1}{x-5}\right) + C$

Técnica V. ***Integración por racionalización de algunas funciones irracionales*** **.**

Salvo en muy pocos casos, la integral de una función irracional no se puede expresar en términos de funciones elementales.
Sin embargo, mediante substituciones adecuadas, algunas de ellas pueden transformarse en funciones racionales equivalentes o en integrales inmediatas.

CASO I . *Integrales del tipo :* $\displaystyle\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots\ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$

donde el símbolo R representa una función racional en las variables: x, $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{p}{q}}$, ... $x^{\frac{r}{s}}$ es decir , que *solamente se realizan operaciones racionales con tales expresiones* . Estas integrales se resuelven mediante la substitución :

$$x(u) = u^k$$

donde k es el menor factor común de los denominadores de las fracciones $\dfrac{m}{n}$, $\dfrac{p}{q}$, . . . , $\dfrac{r}{s}$, es decir *es el mínimo común múltiplo de los números :* n , q , . . . , s .

Con ésta substitución , cada potencia fraccionaria de x corresponde a una potencia entera de u y por lo tanto el integrando se transforma en una función racional.

Ejemplo 12. Hacer la integral : $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

Solución : El integrando sólo contiene las potencias fraccionarias de x: $x^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{1}{2}}$ y el mínimo común múltiplo de los denominador de estas potencias es 6 , por lo cual, la substitución $x = u^6$, $dx = 6\cdot u^5\cdot du$ transformará a la integral inicial en racional como sigue . . .

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\,dx \longrightarrow \int \left[\frac{\sqrt[3]{\left(u^6\right)^2}}{1+\sqrt{u^6}}\right]\cdot 6\cdot u^5\,du = 6\cdot\int \frac{u^9}{1+u^3}\,du$$

la cual se resuelve desarrollando en fracciones parciales e integrando cada una de ellas :

$$6\cdot\int \frac{u^9}{1+u^3}\,du = 6\cdot\int \left[\left(u^6-u^3+1\right)-\frac{1}{3\cdot(u+1)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(u-2)}{\left(u^2-u+1\right)}\right]du$$

$$= \frac{6}{7}\cdot u^7-\frac{3}{2}\cdot u^4+6\cdot u+\ln\left[\frac{u^2-u+1}{(u+1)^2}\right]-2\cdot\sqrt{3}\cdot\arctan\left(\frac{2\cdot u-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Expresando el resultado anterior en términos de la variable inicial x, substituyendo $u = \sqrt[6]{x}$ se obtiene el resultado :

$$= \frac{6\cdot x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{3\cdot x^{\frac{2}{3}}}{2}+6\cdot x^{\frac{1}{6}}+\ln\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}+1}{x^{\frac{1}{3}}+2\cdot x^{\frac{1}{6}}+1}\right)-2\cdot\sqrt{3}\cdot\arctan\left(\frac{2\cdot x^{\frac{1}{6}}-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

CASO II . *Integrales del tipo:*

$$\int R\left[x,\left(\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}\right)^{\frac{m}{n}},\left(\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}\right)^{\frac{p}{q}},\ldots\ldots,\left(\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$$

Donde R representa una función racional de las expresiones dentro del paréntesis recto . Estas integrales se pueden transformar en racionales mediante la substitución :

$$\left(\frac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}\right) = u^k$$

donde k es el menor factor común de los denominadores de las fracciones $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$, . . ., $\frac{r}{s}$, es decir *es el mínimo común múltiplo de los números* : n , q , . . . , s .

Con esta substitución se garantiza que cada potencia fraccionaria de $\frac{ax+b}{cx+d}$ corresponderá a una potencia entera de u y por lo tanto el integrando se transformará en una función racional.

Ejemplo 13. Hacer la integral : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2\cdot x-1}-\sqrt[4]{2\cdot x-1}}\,dx$

Solución : Considerando que $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right) = (2\cdot x-1)$ en la forma general , éste factor aparece elevado a las potencias $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{1}{4}$ cuyo mínimo común denominador es 4 , así que mediante la substitución: $(2\cdot x-1) = u^4$ es decir $x = \dfrac{u^4+1}{2}$ y $dx = 2\cdot u^3\cdot du$ la integral se convierte en :

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\cdot x-1}-\sqrt[4]{2\cdot x-1}}\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{u^4}-\sqrt[4]{u^4}}\cdot 2\cdot u^3\,du = 2\cdot\int \frac{u^2}{u-1}\,du$$

que es una integral de una función racional impropia . Aplicando el método para solucionar éste tipo de integrales se obtiene . . .

$$2\cdot\int \frac{u^2}{u-1}\,du = 2\cdot\int \left(u+1+\frac{1}{u-1}\right)du = u^2+2\cdot u+2\cdot ln\left(\left|u-1\right|\right)+C$$

Retornando a la variable inicial haciendo $u = \sqrt[4]{2\cdot x-1}$ se obtiene finalmente . . .

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\cdot x-1}-\sqrt[4]{2\cdot x-1}}\right)dx = \sqrt{2\cdot x-1}+2\cdot\sqrt[4]{2\cdot x-1}+2\cdot ln\left(\sqrt[4]{2\cdot x-1}-1\right)+C$$

Ejemplo 14. Hacer la integral : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{x+1}}\,dx$

Solución : Considerando que $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right) = (x+1)$ en la forma general del caso II, éste factor aparece elevado a las potencias $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$ cuyo mínimo común denominador es 2, así que

mediante la substitución: $(1+x) = z^2$, $dx = 2\cdot z\cdot dz$, la integral se transforma en . . .

$$\int \frac{1}{\sqrt{(1+x)^3}+\sqrt{x+1}}\,dx \longrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{\left(z^2\right)^3}+\sqrt{z^2}}\cdot 2\cdot z\,dz = \int \frac{2\cdot z}{z^3+z}\,dz$$

$$= 2\cdot arctan(z)$$

Al rescribir éste resultado en términos de $x = z^2 - 1$, queda :

$$= 2\cdot arctan\left(\sqrt{x+1}\right) + C$$

CASO III . *Integrales del tipo :* $\int x^m\cdot\left(a\cdot x^n + b\right)^p\,dx$ (n , m , a , b , p son constantes)

Estas integrales se conocen como *integrales binomias* . Pueden reducirse a una integral racional *únicamente cuando las constantes* m , n *y* p *son números racionales tales que alguna de las siguientes tres expresiones:*

a) p b) $\frac{m+1}{n}$ c) $\frac{m+1}{n} + p$

es un número entero .

PRUEBA:

Mediante la substitución : $x = u^{\frac{1}{n}}$ y $dx = \frac{1}{n}\cdot u^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}\cdot du$ la integral binomia se transforma en:

$$\int x^m\cdot\left(a\cdot x^n+b\right)^p\,dx = \int \left(u^{\frac{1}{n}}\right)^m\cdot\left[a\cdot\left(u^{\frac{1}{n}}\right)^n + b\right]^p\cdot\left[\frac{1}{n}\cdot u^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}\right]du$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\int u^{\frac{m}{n}}\cdot(a\cdot u+b)\cdot u^{\left(\frac{1}{n}-1\right)}\,du = \frac{1}{n}\cdot\int u^{\left(\frac{m+1}{n}-1\right)}\cdot(a\cdot u+b)^p\,du$$

Definiendo la constante $q = \frac{m+1}{n} - 1$, se obtiene una integral de la forma : $\int u^q \cdot (a \cdot u + b)^p \, du$ y de éste modo :

- Si p es un número entero siendo q un número racional de la forma $\frac{r}{s}$, la integral es del tipo de integrales irracionales del caso I anterior : $\int R\left(u^{\frac{r}{s}}, u\right) du$ que como se ha visto , se transforman a una integral racional con la substitución : $u = t^s$, es decir $\boxed{x^n = t^s}$

- Si $\frac{m+1}{n}$ es un número entero, entonces $q = \frac{m+1}{n} - 1$ es también un número entero. Por lo tanto, si el número p es racional de la forma $p = \frac{r}{s}$, entonces la integral binomia es una integral irracional del caso II anterior porque tiene la forma : $\int R\left[u^q, (a \cdot u + b)^{\frac{r}{s}}\right] du$ que como se ha indicado, se reduce a una integral racional mediante la substitución : $a \cdot u + b = t^s$, es decir dado que $u = x^n$: $\boxed{\left(a \cdot x^n + b\right) = t^s}$

- Si $\frac{m+1}{n} + p$ es un número entero, entonces $(q + p) = \frac{m+1}{n} - 1 + p$ también es un número entero y la integral binomia se puede escribir : $\int u^q \cdot (a \cdot u + b)^p \, du = \int u^{q+p} \cdot \left(\frac{a \cdot u + b}{u}\right)^p du$ donde $q + p$ es un entero y p es un número racional . La integral por lo tanto pertenece al grupo de integrales irracionales del caso II anterior , pues adopta la forma : $\int R\left[u, \left(\frac{a \cdot u + b}{u + 0}\right)^{\frac{r}{s}}\right] du$. Como ya se ha dicho, éstas integrales se reducen a una integral racional mediante la substitución : $\frac{a \cdot u + b}{c \cdot u + d} = t^s$, esto es . . . $\frac{a \cdot u + b}{u} = t^s$ que se traduce en la substitución: $\boxed{a \cdot x^n + b = x^n \cdot t^s}$

Se puede demostrar que éstas son las únicas 3 combinaciones posibles de los números p y q que reducen una integral binomia a los casos de integrales irracionales I y II anteriores.

Ejemplo 15. Hacer la integral : $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{\left(a\cdot x^2+b\right)^3}}\,dx$

Solución : Escribiendo primero la integral en la forma binomia . . .

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{\left(a\cdot x^2+b\right)^3}}\,dx = \int x^3\cdot\left(a\cdot x^2+b\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx$$

por comparación con la forma binomia general : $\displaystyle\int x^m\cdot\left(a\cdot x^n+b\right)^p\,dx$, se identifica de inmediato que $m = 3$, $n = 2$ y $p = \dfrac{-3}{2}$

Dado que p no es un número entero pero $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{3+1}{2} = 2$ si lo es, la integral se puede transformar a una integral racional mediante la substitución :

$$a\cdot x^n + b = t^s \qquad \text{es decir . . .} \qquad a\cdot x^2 + b = t^2$$

de donde se obtiene . . .

$$x = \sqrt{\frac{t^2-b}{a}} \quad ; \quad dx = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{t^2-b}}\cdot\dfrac{t}{\sqrt{a}}}{1}\cdot dt \quad \text{y} \quad \left(a\cdot x^2+b\right)^{-\frac{3}{2}} = t^{-3}$$

Substituyendo éstas expresiones, la integral se transforma en :

$$\int x^3\cdot\left(a\cdot x^2+b\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \int \left(\sqrt{\frac{t^2-b}{a}}\right)^3\cdot t^{-3}\cdot\frac{t}{\sqrt{a}\cdot\sqrt{t^2-b}}\,dt$$

$$= \int \frac{t^2 - b}{a^2 \cdot t^2}\, dt = \frac{1}{a^2} \cdot \int \left(1 - \frac{b}{t^2}\right) dt = \frac{1}{a^2} \cdot \left(t + \frac{b}{t}\right) + C$$

Retornando a la variable inicial x con $t = \sqrt{a \cdot x^2 + b}$, el resultado final de ésta integración es . . .

$$\int x^3 \cdot \left(a \cdot x^2 + b\right)^{-\left(\frac{3}{2}\right)} dx = \frac{1}{a^2} \cdot \left(\sqrt{a \cdot x^2 + b} + \frac{b}{\sqrt{a \cdot x^2 + b}}\right) + C$$

Ejemplo 16. Realizar la integral : $\displaystyle\int \frac{1}{x^4 \cdot \sqrt{1 + x^2}}\, dx$

Solución : Rescribiendo ésta integral en la forma binomia : $\displaystyle\int x^{-4} \cdot \left(x^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}} dx$ y por comparación con la forma general $\displaystyle\int x^m \cdot \left(a \cdot x^n + b\right)^p dx$, se identifican las constantes

$m = -4$, $n = 2$, $p = \frac{-1}{2}$, $a = 1$ y $b = 1$

Entonces, dado que p no es un número entero y $\frac{m+1}{n} = \frac{-4+1}{2} = \frac{-3}{2}$ tampoco lo es pero $\frac{m+1}{n} + p = \left(\frac{-4+1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -2$ es entero, la integral se puede transformar en una integral racional mediante la substitución :

$$\frac{a \cdot x^n + b}{x^n} = t^s \quad \text{es decir} \quad \frac{x^2 + 1}{x^2} = t^2 \quad \text{que equivale a} \quad x^2 \cdot \left(t^2 - 1\right) = 1$$

de donde se obtiene que :

$$x = \left(t^2 - 1\right)^{\frac{-1}{2}} \qquad \text{y} \qquad dx = -t \cdot \left(t^2 - 1\right)^{\frac{-3}{2}} \cdot dt$$

por lo tanto :

$$= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2-1}}} = \frac{1}{t}\cdot\sqrt{t^2-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)^4} = \left(t^2-1\right)^2$$

de tal manera que la integral irracional inicial se transformará, bajo éstos cambios en :

$$\int \frac{1}{x^4\cdot\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \left(t^2-1\right)^2\cdot\left(\frac{1}{t}\cdot\sqrt{t^2-1}\right)\cdot\left[-t\cdot\left(t^2-1\right)^{\frac{-3}{2}}\right]dt$$

$$= \int \left(1-t^2\right)dt = t - \frac{1}{3}\cdot t^3 + C$$

Al rescribir éste resultado en función de la variable inicial x, se obtiene finalmente . . .

$$\int \frac{1}{x^4\cdot\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)^3 + C = \frac{\left(2\cdot x^2-1\right)}{3\cdot x^3}\cdot\sqrt{x^2+1} + C$$

Ejemplo 17. Realizar la integral : $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{\left(3+5\cdot x^2\right)^3}}\,dx$

Solución : Rescribiendo ésta integral en la forma binomia normal : $\displaystyle\int x^{-2}\cdot\left(5\cdot x^2+3\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx$

por comparación con la forma general : $\displaystyle\int x^m\cdot\left(a\cdot x^n+b\right)^p\,dx$, se identifican de

inmediato las constantes $m = -2$, $n = 2$, $p = \frac{-3}{2}$, $a = 5$ y $b = 3$

Además, dado que p no es un número entero y $\frac{m+1}{n} = \frac{-2+1}{2} = \frac{-1}{2}$ tampoco lo es; pero $\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{-2+1}{2} - \dfrac{3}{2} = -2$ es entero, entonces la integral binomia se puede transformar a una integral racional mediante la substitución :

$$\frac{a\cdot x^n + b}{x^n} = t^s \quad \text{es decir :} \quad \frac{5\cdot x^2 + 3}{x^2} = t^2 \quad \text{que equivale a :} \quad x^2\cdot\left(t^2 - 5\right) = 3$$

de donde se obtiene que . . .

$$x = \sqrt{3}\cdot\left(t^2 - 5\right)^{\frac{-1}{2}} \quad ; \quad dx = -\sqrt{3}\cdot t\cdot\left(t^2 - 5\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot dt$$

y por lo tanto :

$$\frac{1}{x^2} = \frac{t^2 - 5}{3} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{\left(5\cdot x^2 + 3\right)^3}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{\left(t^2 - 5\right)^3}}{t^3}$$

y la integral irracional se transforma en :

$$\int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{\left(3 + 5\cdot x^2\right)^3}}\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot\left(t^2 - 5\right)\cdot\left[\frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{\left(t^2 - 5\right)^3}}{t^3}\right]\cdot\frac{-\sqrt{3}\cdot t}{\sqrt{\left(t^2 - 5\right)^3}}\,dt$$

$$= \frac{-1}{9}\cdot\int \left(\frac{t^2 - 5}{t^2}\right) dt = \frac{-1}{9}\cdot t - \frac{5}{9\cdot t} + C$$

Éste resultado en función de la variable inicial x, usando $t = \sqrt{t^2} = \sqrt{\dfrac{5\cdot x^2 + 3}{x^2}}$, es :

$$\int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{\left(3 + 5\cdot x^2\right)^3}}\,dx = \frac{-1}{9}\cdot\left(\frac{10\cdot x^2 + 3}{x\cdot\sqrt{5\cdot x^2 + 3}}\right) + C$$

EJERCICIO 7.6 *Integrales de funciones irracionales.*

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^3+2\cdot x^2-3\cdot x}\,dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\cdot\sqrt[4]{x}}\,dx$ 3. $\displaystyle\int \frac{1}{y^{\frac{5}{8}}-y^{\frac{1}{8}}}\,dy$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{(a+b\cdot x)^3}}\,dx$ 5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$ 6. $\displaystyle\int \frac{t+5}{(t+4)\cdot\sqrt{t+2}}\,dt$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{\left(1+\sqrt{x^3}\right)^2}}\,dx$ 9. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^3\cdot\sqrt{x^2+2\cdot x}}\,dx$

Respuestas : *Ejercicio 7.6*

1. $\displaystyle\frac{-1}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot arctan\left(\sqrt{\frac{x}{3}}\right)+\frac{1}{4}\cdot ln\left[\frac{\left(-1-x+2\cdot\sqrt{x}\right)}{(x-1)}\right]+C$ 2. $\displaystyle\frac{2}{27}\cdot x^{\frac{9}{4}}-\frac{2}{13}\cdot x^{\frac{13}{12}}+C$

3. $\displaystyle 2\cdot ln\left(\frac{y^{\frac{1}{8}}-1}{y^{\frac{1}{8}}+1}\right)+4\cdot arctan\left(y^{\frac{1}{8}}\right)+\frac{8}{3}\cdot y^{\frac{3}{8}}+C$ 4. $\displaystyle\frac{2}{b^2}\cdot\frac{(2\cdot a+b\cdot x)}{\sqrt{a+b\cdot x}}+C$

5. $x+4\cdot\sqrt{x+1}+2\cdot ln\left(-2-x+2\cdot\sqrt{x+1}\right)+C$ 6. $\displaystyle 2\cdot\sqrt{t+2}+\sqrt{2}\cdot arctan\left(\sqrt{\frac{t+2}{2}}\right)+C$

7. $\displaystyle ln\left[\frac{x\cdot\left(1-x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)}{(x+1)\cdot\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^2}\right]+C$ 8. $\displaystyle -2\cdot\sqrt[3]{1+x^{\frac{-3}{2}}}+C$

9. $\displaystyle\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\sqrt{x^2-x+1}-\frac{1}{8}\cdot ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right)$ 10. $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(x+1)^2-1}}{(x+1)^2}+\frac{arcsec(x+1)}{2}$

Técnica VI . Integración de funciones trigonométricas .

Ahora examinaremos algunas integrales de funciones no algebráicas, comenzando con las funciones trigonométricas. Consideremos primero la integral de una función racional en senos y cosenos de la forma general :

$$\int R(sen(x), cos(x))\, dx$$

donde R representa *el cociente de dos polinomios en senos y cosenos*.

Esta integral se puede transformar siempre a la integral de una función racional mediante la ***substitución trigonométrica universal*** :

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = u$$

porque de ella se obtiene que . . .

$$sen(x) = 2\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cdot\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\left[cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\right] = 2\cdot tan\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\cdot tan\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{sec^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)}\right] = 2\cdot tan\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left[\frac{1}{1+tan^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)}\right]$$

$$= 2\cdot\left(\frac{u}{1+u^2}\right)$$

y también . . .

$$cos\cdot(x) = cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right) - sen^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right) + sen^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\dfrac{cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)-sen^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)+sen^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)}{cos^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1-tan^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tan^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

de ésta manera, bajo la substitución universal la función seno y la función coseno se transforman en funciones racional de la variable u .

De la substitución universal $u = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ se deduce además que . . .

$$x = 2\cdot arctan(u) \quad \text{y} \quad dx = 2\cdot\frac{du}{1+u^2}$$

En resumen, las funciones $sen(x)$, $cos(x)$ y *todas sus potencias enteras* , así como el diferencial dx , quedan expresados como *funciones racionales de la variable* u .

Dado que una función racional de funciones racionales es también racional, se sigue que una integral racional en senos y cosenos se transforma en una función racional en la variable u :

$$\int R(sen(x), cos(x))\,dx = \int R\left[\left(\frac{2\cdot u}{1+u^2}\right), \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\right]\cdot\left(\frac{2}{1+u^2}\right)du$$

integral que se resuelve con las técnicas correspondientes para las funciones racionales.

Ejemplo 18. Realizar la integral : $\int \frac{1}{2+3\cdot cos(x)}\,dx$

Solución : Bajo la substitución trigonométrica universal : $u = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ el integrando se transforma en :

$$\frac{1}{2+3\cdot cos(x)} = \frac{1}{2+3\cdot\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \frac{1+u^2}{5-u^2}$$

y por lo tanto . . .

$$\int \frac{1}{2+3\cdot cos(x)}\,dx = \int \frac{1+u^2}{5-u^2}\cdot\left(\frac{2}{1+u^2}\right)du = \int \frac{2}{5-u^2}\,du$$

que es una integral inmediata de la forma general :

$$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2\cdot a}\cdot ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C$$

Por lo cual resulta . . .

$$\int \frac{2}{(\sqrt{5})^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot ln\left(\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right) + C$$

Al escribir éste resultado en función de la variable inicial x, usando $u = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ queda :

$$\int \left(\frac{1}{2+3\cdot cos(x)}\right) dx = \frac{1}{2\cdot\sqrt{5}}\cdot ln\left(\frac{\sqrt{5}+tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{5}-tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right) + C$$

OBSERVACIÓN :

Aunque es verdad que mediante la substitución universal cualquier función racional en senos y cosenos se puede transformar en la integral de una función racional en otra variable , algunas veces la expresión obtenida al final resulta algebraicamente demasiado complicada .
Por ésta razón es conveniente conocer otras substituciones que a menudo , resuelven más rápida o más fácilmente una integral trigonométrica , como son las siguientes :

***CASO* I** . Integrales del tipo : $\int R(sen(x))\cdot cos(x)\, dx$ con R una función racional en $sen(x)$.

Éste tipo de integrales se puede transformar en la integral de una función racional mediante la substitución:

$$u = sen(x) \quad ; \quad du = cos(x)\cdot dx$$

Ejemplo 19. Realizar la integral : $\displaystyle\int \frac{3\cdot sen(x) - 1}{sen^2\cdot(x) + 2\cdot sen(x)}\cdot cos(x)\, dx$

Solución : Bajo la substitución $u = sen(x)$, $du = cos(x)\cdot dx$ la integral se transforma en :

$$\int \frac{3\cdot sen(x) - 1}{sen^2\cdot(x) + 2\cdot sen(x)}\cdot cos(x)\, dx = \int \frac{3\cdot u - 1}{u^2 + 2\cdot u}\, du$$

que se resuelve completando la derivada del denominador en el numerador y el trinomio cuadrado perfecto del denominador:

$$\int \left[\frac{\frac{3}{2}\cdot(2\cdot u+2)-4}{u^2+2\cdot u}\right] du = \frac{3}{2}\cdot\int \left(\frac{2\cdot u+2}{u^2+2\cdot u}\right) du - 4\cdot\int \left[\frac{1}{(u+1)^2-1}\right] du$$

$$= \frac{3}{2}\cdot ln\left(u^2+2\cdot u\right) - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{u}{u+2}\right) + C$$

$$= ln\left[\frac{\left(u^2+2\cdot u\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{u}{u+2}\right)^2}\right] = ln\left[\sqrt{\frac{(u+2)^7}{u}}\right] + C$$

retornando a la variable inicial queda :

$$\int \frac{3\cdot sen(x)-1}{sen^2\cdot(x)+2\cdot sen(x)}\cdot cos(x)\,dx = \boxed{ln\left[\sqrt{\frac{(sen(x)+2)^7}{sen(x)}}\right] + C}$$

***CASO* II** . Integrales del tipo $\int R(cos(x))\cdot sen(x)\,dx$ con R una función racional en $cos(x)$.

Éste tipo de integrales se puede transformar en la integral de una función racional mediante la substitución:

$$\boxed{u = cos(x)} \quad ; \quad \boxed{du = -sen(x)\cdot dx}$$

Ejemplo 20. Realizar la integral : $\displaystyle\int \frac{sen^3\cdot(x)}{cos^3\cdot(x)-1}\,dx$

Solución : Rescribiendo : $\displaystyle\int \frac{sen^2\cdot(x)\cdot sen(x)}{cos^3\cdot(x)-1}\,dx = \int \left[\frac{1-cos^2(x)}{cos^3\cdot(x)-1}\right]\cdot sen(x)\,dx$

Bajo la substitución $u = cos(x)$, $du = -sen(x) \cdot dx$ la integral se transforma en :

$$\int \frac{sen^3 \cdot (x)}{cos^3 \cdot (x) - 1} \, dx = \int \left(\frac{1 - u^2}{u^3 - 1} \right) \cdot (-1) \, du$$

$$= -\int \frac{(1-u) \cdot (1+u)}{(u-1) \cdot \left(u^2 + u + 1\right)} \, du = \int \frac{u+1}{u^2 + u + 1} \, du$$

que es una integral que contiene un trinomio cuadrado y por lo tanto . . .

$$\int \frac{\frac{1}{2} \cdot (2 \cdot u + 1) + \frac{1}{2}}{\left(u^2 + u + 1\right)} \, du = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot u + 1}{u^2 + u + 1} \, du + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \, du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ln\left(u^2 + u + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arctan\left(\frac{2 \cdot u + 1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

regresando a la variable x :

$$\int \frac{sen^3 \cdot (x)}{cos^3 \cdot (x) - 1} \, dx = ln\left[\sqrt{cos^2 \cdot (x) + cos(x) + 1} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arctan\left(\frac{2 \cdot cos(x) + 1}{\sqrt{3}} \right)$$

***CASO* III** . Integrales del tipo $\int R(tan(x)) \, dx$ con R una función racional en $tan(x)$.

Éste tipo de integrales se puede transformar en la integral de una función racional mediante la substitución:

$u = tan(x)$ y puesto que $x = arctan(u)$, $dx = \left(\frac{1}{u^2 + 1} \right) \cdot du$

Ejemplo 21. Hacer la integral : $\displaystyle \int \frac{sec^2 \cdot (x)}{tan^2 \cdot (x) - tan \cdot (x)} \, dx$

Solución : Usando la identidad $sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$ queda :

$$\int \frac{tan^2\cdot(x) + 1}{tan^2\cdot(x) - tan\cdot(x)}\,dx = \int \left(\frac{u^2+1}{u^2-1}\right)\cdot\frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$= \int \frac{1}{u^2-1}\,du = \frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + C$$

es decir . . .

$$\int \frac{sec^2\cdot(x)}{tan^2\cdot(x) - tan\cdot(x)}\,dx = ln\left(\sqrt{\frac{tan(x)-1}{tan(x)+1}}\right) + C$$

CASO* IV** . Integrales del tipo $\int R(sen(x), cos(x))\,dx$ con R una función racional que contiene ***solo potencias pares de $sen(x)$ y $cos(x)$

Éste tipo de integrales se puede transformar en la integral de una función racional mediante la substitución:

$u = tan(x)$ y puesto que $x = arctan(u)$ entonces $dx = \left(\frac{1}{u^2+1}\right)\cdot du$

Las funciones $sen^2\cdot(x)$ y $cos^2\cdot(x)$ se expresan en éste caso como funciones racionales en u dado que . . .

$$sen^2\cdot(x) = \frac{sen^2\cdot(x)}{cos^2\cdot(x)}\cdot cos^2\cdot(x) = tan^2\cdot(x)\cdot\frac{1}{sec^2\cdot(x)} = \frac{tan^2\cdot(x)}{1+tan^2\cdot(x)} = \frac{u^2}{1+u^2}$$

$$cos^2\cdot(x) = \frac{1}{sec^2\cdot(x)} = \frac{1}{1+tan^2\cdot(x)} = \frac{1}{1+u^2}$$

por lo tanto *todas sus potencias pares también serán funciones racionales en* u .

Ejemplo 22. Integrar : $\displaystyle\int \frac{sen^2(x)}{1+cos^2(x)}\,dx$

Solución : Con las substituciones correspondientes a éste caso, la integral se transforma en :

$$\int \frac{\left(\dfrac{u^2}{1+u^2}\right)}{1+\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du = \int \frac{u^2}{\left(2+u^2\right)\cdot\left(1+u^2\right)}\,du$$

de manera que, desarrollando el integrando en una suma de fracciones parciales queda :

$$\int \frac{u^2}{\left(2+u^2\right)\cdot\left(1+u^2\right)}\,du = \int \left[\frac{2}{\left(2+u^2\right)} - \frac{1}{\left(1+u^2\right)}\right]du$$

$$= 2\cdot\int \left(\frac{1}{u^2+2}\right)du - \int \left(\frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$= \sqrt{2}\cdot arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) - arctan(u) + C$$

y en función de x . . .

$$\int \frac{sen^2(x)}{1+cos^2(x)}\,dx = \sqrt{2}\cdot arctan\left(\frac{tan(x)}{\sqrt{2}}\right) - x + C$$

NOTA : Observar que $arctan(tan(b\cdot x)) = b\cdot x$ *; pero* $arctan(b\cdot tan(x)) \neq b\cdot x$ *porque en éste último caso la constante* b *aparece fuera del argumento de la función tangente)*

Ejemplo 23. Integrar : $\displaystyle\int sen^4(x)\cdot cos^4(x)\,dx$

Solución: Bajo las substituciones correspondientes a éste caso la integral se transforma en :

$$\int \left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+u^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+u^2}\, du = \int \frac{u^4}{\left(1+u^2\right)^5}\, du$$

y desarrollado el integrando en fracciones parciales resulta . . .

$$\int \frac{u^4}{\left(1+u^2\right)^5}\, du = \int \left[\frac{1}{\left(1+u^2\right)^5} - \frac{2}{\left(1+u^2\right)^4} + \frac{1}{\left(1+u^2\right)^3}\right] du$$

Éstas integrales se pueden resolver usando la fórmula de reducción :

$$\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^m}\, dx = \frac{x}{2\cdot a^2\cdot(m-1)\cdot\left(a^2+x^2\right)^{m-1}} + \frac{2\cdot m-3}{a^2\cdot(2\cdot m-2)}\cdot\int \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{m-1}}\, dx$$

con $a = 1$; $m = 2 , 3 , 4$ y 5 , obteniéndose . . .

$$\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^5}\, du = \frac{u}{2\cdot(4)\cdot\left(1+u^2\right)^4} + \frac{7}{8}\cdot\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^4}\, du \qquad (1)$$

$$\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^4}\, du = \frac{u}{2\cdot(3)\cdot\left(1+u^2\right)^3} + \frac{5}{6}\cdot\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^3}\, du \qquad (2)$$

$$\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^3}\, du = \frac{u}{2\cdot(2)\cdot\left(1+u^2\right)^2} + \frac{3}{4}\cdot\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^2}\, du \qquad (3)$$

$$\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)^2}\, du = \frac{u}{2\cdot(1)\cdot\left(1+u^2\right)} + \frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{1+u^2}\, du \qquad (4)$$

Por eso substituyendo (1) . . .

$$\int sen^4(x)\cdot cos^4(x)\,dx = \frac{u}{8\cdot(1+u^2)^4} - \frac{9}{8}\cdot\int \frac{1}{(1+u^2)^4}\,du + \int \frac{1}{(1+u^2)^3}\,du$$

substituyendo (2) :

$$= \frac{u}{8\cdot(1+u^2)^4} - \frac{9}{48}\cdot\frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{3}{48}\cdot\int \frac{1}{(1+u^2)^3}\,du$$

substituyendo (3) :

$$= \frac{u}{8\cdot(1+u^2)^4} - \frac{3}{16}\cdot\frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{1}{16}\cdot\left[\frac{u}{4\cdot(1+u^2)^2} + \frac{3}{4}\cdot\int \frac{1}{(1+u^2)^2}\,du\right]$$

substituyendo (4) :

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{u}{(1+u^2)^4} - \frac{3}{16}\cdot\frac{u}{(1+u^2)^3} + \frac{1}{64}\cdot\frac{u}{(1+u^2)^2} + \frac{3}{128}\cdot\frac{u}{(1+u^2)} + \frac{3}{128}\cdot arctan(u)$$

Regresando a la variable inicial con $u = tan(x)$ y $(1+u^2) = \left[1+tan^2(x)\right] = sec^2(x)$ se obtiene finalmente:

$$\int sen^4(x)\cdot cos^4(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{tan(x)}{sec^8(x)} - \frac{3}{16}\cdot\frac{tan(x)}{sec^6(x)} + \frac{1}{64}\cdot\frac{tan(x)}{sec^4(x)} + \frac{3}{128}\cdot\frac{tan(x)}{sec^2(x)} + \frac{3}{128}\cdot x + C$$

$$= \left(\frac{1}{64}\cdot cos^3 x + \frac{3}{128}\cdot cos(x) + \frac{1}{8}\cdot cos^7 x - \frac{3}{16}\cdot cos^5 x\right)\cdot sen(x) + \frac{3}{128}\cdot x + C$$

Ejemplo 24. Integrar : $\int \left[sen^2(x)\right]\cdot\left[cos^{-4}(x)\right]dx$

Solución : Bajo la substitución correspondiente a éste caso la integral se transforma en :

$$\int \left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{1+u^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}\cdot tan^3(x) + C$$

CASO V . Integrales del tipo $\displaystyle\int \left[sen^{m}\cdot(x)\right]\cdot\left[cos^{n}\cdot(x)\right]dx$ donde m y n ***son números enteros***.

En éste tipo de integrales conviene considerar 3 subcasos:

a) ***por lo menos uno de los números enteros*** m **,** n ***es impar***

b) m ***y*** n ***son no negativos y pares .***

c) m ***y*** n ***son pares pero al menos uno de ellos es negativo .***

SUBCASO V a) : por lo menos uno de los números enteros m **,** n ***es impar***

Supongamos que el número entero n es impar, entonces tiene la forma: $n = (2\cdot p + 1)$ donde p es un número entero cualquiera. La integral se convierte en :

$$\int \left[sen^{m}\cdot(x)\right]\cdot\left[cos^{(2\cdot p+1)}\cdot(x)\right]dx = \int \left[sen^{m}\cdot(x)\right]\cdot\left[cos^{2\cdot p}\cdot(x)\right]\cdot cos(x)\,dx$$

pero $cos^{2\cdot p}\cdot(x) = \left[cos^{2}\cdot(x)\right]^{p} = \left[1 - sen^{2}\cdot(x)\right]^{p}$, de modo que haciendo la substitución :

$u = sen(x)$, $du = cos(x)\cdot dx$, la integral se transforma en racional . . .

$$\int sen^{m}\cdot(x)\cdot cos^{(2\cdot p+1)}\cdot(x)\,dx = \int u^{m}\cdot\left(1 - u^{2}\right)^{p}du$$

La misma conclusión se obtiene si se considera que el entero m es impar pues . . .

$$\int \left[sen^{2\cdot p+1}\cdot(x)\right]\cdot\left[cos^{n}\cdot(x)\right]dx = \int \left[sen^{2\cdot p}\cdot(x)\right]\cdot\left[cos^{n}\cdot(x)\right]\cdot sen(x)\,dx$$

pero $sen^{2\cdot p}\cdot(x) = \left[sen^{2}\cdot(x)\right]^{p} = \left[1 - cos^{2}\cdot(x)\right]^{p}$, de modo que haciendo la substitución:

$u = cos(x)$, $du = -sen(x)\cdot dx$, la integral se transforma en racional . . .

$$\int \left[sen^{2\cdot p+1}\cdot(x)\right]\cdot\left[cos^{n}\cdot(x)\right]dx = (-1)\cdot\left[\int \left(1 - u^{2}\right)^{p}\cdot u^{n}\,du\right]$$

Ejemplo 25. Hacer la integral : $\displaystyle\int \frac{sen^3(x)}{cos^4(x)}\,dx$

Solución :

$$\int \frac{sen^3(x)}{cos^4(x)}\,dx = \int \frac{sen^2(x)\cdot sen(x)}{cos^4(x)}\,dx = \int \frac{1-cos^2(x)}{cos^4(x)}\cdot sen(x)\,dx$$

Haciendo la substitución $u = cos(x)$, $du = -sen(x)\cdot dx$, la integral se transforma en :

$$\int \left[\frac{1-u^2}{u^4}\cdot(-1)\right]du = \int \left(\frac{-1}{u^4}+\frac{1}{u^2}\right)du = \frac{1}{3\cdot u^3} - \frac{1}{u} + C$$

regresando a la variable x se obtiene :

$$\int \frac{sen^3(x)}{cos^4(x)}\,dx = \frac{1}{3\cdot cos(x)^3} - \frac{1}{cos(x)} + C$$

SUBCASO* V *b)* : *los enteros* m *y* n *son no negativos y pares .

Sean los números pares $m = 2\cdot p$ y $n = 2\cdot q$. Usando entonces las identidades trigonométricas :

$$sen^2(x) = \frac{1-cos(2\cdot x)}{2} \qquad ; \qquad cos^2(x) = \frac{1+cos(2\cdot x)}{2}$$

y substituyéndolas en la integral se obtiene :

$$\int sen^m(x)\cdot cos^n(x)\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\cdot(1-cos(2\cdot x))\right]^p\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(1+cos(2\cdot x))\right]^q dx$$

Al desarrollar el integrando se obtienen términos con potencias pares e impares de $cos(2\cdot x)$.
Los términos con potencias impares se integran como en el subcaso V *a)* , los términos con potencias pares se reducen nuevamente utilizando sucesivamente las identidades anteriores.

Ejemplo 26. Hacer la integral : $\int sen^4(x)\cdot cos^4(x)\,dx$

Solución : Usando las identidades para éste caso, el integrando se transforma en . . .

$$sen^4(x)\cdot cos^4(x) = \left[sen^2(x)\right]^2\cdot\left[cos^2(x)\right]^2 = \left(\frac{1-cos(2\cdot x)}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1+cos(2\cdot x)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\left[1-cos^2(2\cdot x)\right]^2}{16}$$

la integral queda como . . .

$$\int sen^4(x)\cdot cos^4(x)\,dx = \frac{1}{16}\cdot\int\left[1-cos^2(2\cdot x)\right]^2 dx$$

Usando nuevamente la identidad trigonométrica : $cos^2(z) = \dfrac{1+cos(4\cdot z)}{2}$ se tiene que . . .

$$\left[1-cos^2(2\cdot x)\right]^2 = \left[\frac{1-cos\cdot(4\cdot x)}{2}\right]^2 = \left[\frac{1-2\cdot cos(4\cdot x)+cos^2(4\cdot x)}{4}\right]$$

pero $cos^2(4\cdot x) = \dfrac{1+cos(8\cdot x)}{2}$ así que el integrando se reduce todavía más a :

$$\left[1-cos^2(2\cdot x)\right]^2 = \frac{1}{4}\cdot\left(1-2\cdot cos(4\cdot x)+\frac{1+cos(8\cdot x)}{2}\right)$$

y la integral queda finalmente :

$$\int sen^4(x)\cdot cos^4(x)\,dx = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}\cdot\int\left(\frac{3}{2}-2\cdot cos(4\cdot x)+\frac{1}{2}\cdot cos(8\cdot x)\right)dx$$

$$= \frac{1}{64}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot sen(4\cdot x)+\frac{1}{16}\cdot sen(8\cdot x)\right)+C$$

Esta misma integral se resolvió antes en el ejemplo 22 del caso IV con otra técnica y aunque el resultado se ha obtenido aquí en forma distinta (*y de una manera más rápida*) , se puede demostrar que en realidad ambos resultados son equivalentes . *(Demuéstrelo !)*

***SUBCASO* V c) : Los enteros m y n son pares pero al menos uno de ellos es negativo .**

En éste caso es necesario hacer la substitución : $u = tan(x)$ *(o bien* $u = cot(x)$ *)* , es decir . . .

$$x = arctan(u) \quad \text{y por lo tanto :} \quad dx = \frac{du}{1+u^2}$$

de donde resulta que :

$$sen(x) = \frac{1}{csc(x)} = \frac{1}{\sqrt{cot^2(x)+1}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{tan^2(x)}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{u^2}+1}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}}$$

$$cos(x) = \frac{1}{sec(x)} = \frac{1}{\sqrt{tan^2(x)+1}} = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$$

Ejemplo 27. Hacer la integral : $\displaystyle\int sen^4(x)\cdot cos^{-4}(x)\,dx = \int \frac{sen^2(x)}{cos^4(x)}\,dx$

Solución : Usando las substituciones mencionadas en éste caso, la integral se transforma en :

$$\int \frac{sen^2(x)}{cos^4(x)}\,dx = \int \frac{\left(\dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right)^4}\cdot\left(\frac{1}{u^2+1}\right)du = \int u^2\,du = \frac{1}{3}\cdot u^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}\cdot tan^3(x) + C$$

El mismo resultado que ya se había obtenido en el ejemplo 23 del caso IV .

***CASO* VI** . Integrales de los tipos :

$$\int cos(m\cdot x)\cdot cos(n\cdot x)\,dx \ , \quad \int cos(m\cdot x)\cdot sen(n\cdot x)\,dx \ , \quad \int sen(m\cdot x)\cdot sen(n\cdot x)\,dx$$

donde n y m son constantes.

Estas integrales se pueden resolver con ayuda de las siguientes identidades trigonométricas :

$$sen(n\cdot x)\cdot cos(m\cdot x) = \frac{1}{2}\cdot[\ sen[(n+m)\cdot x] + sen[(n-m)\cdot x]\ ]$$

$$sen(n\cdot x)\cdot sen(m\cdot x) = \frac{1}{2}\cdot[\ -cos[(n+m)\cdot x] + cos[(n-m)\cdot x]\ ]$$

$$cos(n\cdot x)\cdot cos(m\cdot x) = \frac{1}{2}\cdot[\ cos[(n+m)\cdot x] + cos[(n-m)\cdot x]\ ]$$

que se obtienen a partir de las identidades trigonométricas básicas :

$$sen(a+b) = sen(a)\cdot cos(b) + sen(b)\cdot cos(a)$$
$$sen(a-b) = sen(a)\cdot cos(b) - sen(b)\cdot cos(a)$$

$$cos(a+b) = cos(a)\cdot cos(b) - sen(b)\cdot sen(a)$$
$$cos(a-b) = cos(a)\cdot cos(b) + sen(b)\cdot sen(a)$$

haciendo $a = m\cdot x$; $b = n\cdot x$ y sumándolas en forma conveniente , por ejemplo . . .

$$cos(a+b) + cos(a-b) = cos(a)\cdot cos(b) - sen(b)\cdot sen(a) + cos(a)\cdot cos(b) + sen(b)\cdot sen(a)$$

$$= 2\cdot cos(a)\cdot cos(b)$$

de donde resulta :

$$cos(a)\cdot cos(b) = \frac{1}{2}\cdot(cos(a+b) + cos(a-b))$$

asi que substituyendo $a = m\cdot x$; $b = n\cdot x$ se obtiene una de las identidades anteriores .

Ejemplo 28. Integrar : $\displaystyle\int sen\left(\frac{x}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{3\cdot x}{4}\right) dx$

Solución : Usando una de las identidades trigonométricas mencionadas anteriormente, con $m = \frac{1}{4}$ y $n = \frac{3}{4}$, se obtiene . . .

$$sen\left(\frac{x}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{3\cdot x}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[sen\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot x\right] + sen\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)\cdot x\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(sen(x) + sen\left(\frac{-x}{2}\right)\right)$$

de modo que la integral se transforma en inmediata y vale . . .

$$\int sen\left(\frac{x}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{3\cdot x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\int sen(x)\,dx - \int sen\left(\frac{x}{2}\right)dx\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)\cdot cos(x) + cos\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

EJERCICIO 7.7 *Integrales de funciones trigonométricas.*

1. $\int cos^3\cdot(x)\,dx$

2. $\int sen^5\cdot(x)\,dx$

3. $\int sen^3\cdot\left(\frac{x}{2}\right)\cdot cos^5\cdot\left(\frac{x}{2}\right)dx$

4. $\int sen^4\cdot(x)\,dx$

5. $\int \frac{1}{sen(x)^5}\,dx$

6. $\int \frac{1+tan(x)}{1-tan(x)}\,dx$

7. $\int cos^6\cdot(x)\,dx$

8. $\int sen^2\cdot(x)\cdot cos^4\cdot(x)\,dx$

9. $\int \frac{1}{sen^2\cdot(x)\cdot cos^4\cdot(x)}\,dx$

10. $\int \frac{sen^2\cdot(x)}{cos^4\cdot(x)}\,dx$

11. $\int sen^5\cdot(x)\cdot\sqrt{cos(x)}\,dx$

12. $\int sen(3\cdot x)\cdot cos(5\cdot x)\,dx$

13. $\int sen\left(\frac{x}{3}\right)\cdot cos\left(\frac{2\cdot x}{3}\right)dx$

14. $\int sen(x)\cdot sen(2\cdot x)\cdot sen(3\cdot x)\,dx$

15. $\int \frac{cos(2\cdot x)}{cos^4\cdot(x)+sen^4\cdot(x)}\,dx$

16. $\int \frac{3\cdot sen(x)+2\cdot cos(x)}{2\cdot sen(x)+3\cdot cos(x)}\,dx$

17. $\int \frac{1}{3+5\cdot cos(x)}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{1}{8-4\cdot sen(x)+7\cdot cos(x)}\,dx$ 19. $\displaystyle\int \frac{1}{1+3\cdot cos^2\cdot(x)}\,dx$ 20. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+cos(x))^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int \frac{1}{sen(x)+tan(x)}\,dx$ 22. $\displaystyle\int \frac{cos(x)}{1+cos(x)}\,dx$ 23. $\displaystyle\int \frac{sen(x)}{1+sen(x)}\,dx$

Respuestas : (Ejercicio 7.7)

1. $\frac{1}{3}\cdot sen(x)\cdot cos^2\cdot(x)+\frac{2}{3}\cdot sen(x)+C$

2. $-cos(x)+\frac{2}{3}\cdot cos(x)^3-\frac{1}{5}\cdot cos(x)^5+C$

3. $-\left(\frac{1}{3}\right)\cdot cos^6\cdot\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}\cdot cos^8\cdot\left(\frac{x}{2}\right)+C$

4. $\frac{3}{8}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot sen(2\cdot x)+\frac{1}{32}\cdot sen(4\cdot x)+C$

5. $\frac{1}{8}\cdot cos(x)\cdot\frac{\left(-5+3\cdot cos(x)^2\right)}{sin(x)^4}+\frac{3}{8}\cdot ln\left(\frac{sen(x)}{cos(x)+1}\right)+C$

6. $ln\left(\frac{\sqrt{1+tan(x)^2}}{-1+tan(x)}\right)+C$

7. $\frac{1}{16}\cdot\left[5\cdot x+4\cdot sen(2\cdot x)-\frac{1}{3}\cdot sen^3\cdot(2\cdot x)+\frac{3}{4}\cdot sen(4\cdot x)\right]+C$

8. $\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\cdot sen(4\cdot x)+\frac{1}{48}\cdot(sen(2\cdot x))^3+C$

9. $\frac{1}{3}\cdot tan(x)^3+2\cdot tan(x)-\frac{1}{tan(x)}+C$

10. $\frac{1}{3}\cdot tan(x)^3+C$

11. $\frac{-2}{11}\cdot\sqrt{\cos(x)^{11}} + \frac{4}{7}\cdot\sqrt{\cos(x)^{7}} - \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\cos(x)^{3}} + C$

12. $\frac{-1}{16}\cdot\cos(8\cdot x) + \frac{1}{4}\cdot\cos(2\cdot x) + C$

13. $\frac{-1}{2}\cdot\cos(x) + \frac{3}{2}\cdot\cos\left(\frac{x}{3}\right) + C$

14. $\frac{-1}{16}\cdot\cos(4\cdot x) - \frac{1}{8}\cdot\cos(2\cdot x) + \frac{1}{24}\cdot\cos(6\cdot x) + C$

15. $\frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\ln\left(\frac{\tan(x)^2 + \tan(x)\cdot\sqrt{2} + 1}{-\tan(x)^2 + \tan(x)\cdot\sqrt{2} - 1}\right) + C$

16. $\frac{-5}{13}\cdot\ln(-3\cdot\cos(x) - 2\cdot sen(x)) + \frac{12}{13}\cdot x + C$

17. $\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 2}\right) + C$

18. $\ln\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 5}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 3}\right) + C$

19. $\frac{1}{2}\cdot\arctan\left(2\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\cdot\arctan\left(2\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{3}\right) + C$

20. $\frac{1}{6}\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

21. $\frac{1}{4}\cdot\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C$

22. $x - \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$

23. $x + \frac{2}{1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C$

Técnica VII . Integración por substitución trigonométrica .

Algunas veces, éste es el método más corto para integrales de expresiones racionales en $\sqrt{a\cdot x^2 + b\cdot x + c}$ que tienen la forma general :

$$\int R\left(x, \sqrt{a\cdot x^2 + b\cdot x + c}\right)\, dx$$

Mediante una substitución que convierta al trinomio $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ en el cuadrado de una función trigonométrica, la integral anterior se transformará en la integral de una función racional en senos y cosenos:

$$\int R(sen(u), cos(u))\, du$$

Primero, notemos que siempre es posible transformar el trinomio $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ en una suma (o *diferencia*) de cuadrados, completando el trinomio cuadrado perfecto:

$$a\cdot x^2 + b\cdot x + c = a\cdot\left(x + \frac{b}{2\cdot a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4\cdot a}\right)$$

y haciendo entonces las substituciones : $z = x + \dfrac{b}{2\cdot a}$; $m^2 = a$; $n^2 = c - \dfrac{b^2}{4\cdot a}$

la integral inicial se transformará en una de las siguientes tres formas equivalentes :

I $\displaystyle\int R\left(z, \sqrt{m^2\cdot z^2 + n^2}\right)\, dz$ II. $\displaystyle\int R\left(z, \sqrt{m^2\cdot z^2 - n^2}\right)\, dz$ III. $\displaystyle\int R\left(z, \sqrt{n^2 - m^2\cdot z^2}\right)\, dz$

dependiendo del signo algebraico de los números m^2 y n^2 *(Cuando ambos sean negativos, el radical será puramente imaginario y la integral no es real) .*

Observemos como se elimina el radical de éstas formas integrales mediante una substitución trigonométrica :

$$Si \quad z = \frac{n}{m}\cdot tan(u) \quad entonces \quad \sqrt{m^2\cdot z^2 + n^2} = \sqrt{n^2\cdot\left[tan^2(u) + 1\right]} = n\cdot sec(u)$$

$$Si \quad z = \frac{n}{m}\cdot sec(u) \quad entonces \quad \sqrt{m^2\cdot z^2 - n^2} = \sqrt{n^2\cdot\left[sec^2(u) - 1\right]} = n\cdot tan(u)$$

$$Si \quad z = \frac{n}{m}\cdot sen(u) \quad entonces \quad \sqrt{n^2 - m^2\cdot z^2} = \sqrt{n^2\cdot\left[1 - sen^2(u)\right]} = n\cdot cos(u)$$

Ejemplo 29. Integrar : $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}\,dx$

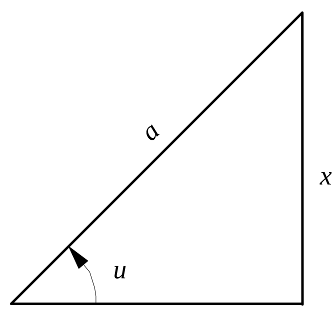
Solución : Haciendo la substitución : $x = a\cdot sen(u)$, entonces $dx = a\cdot cos(u)\cdot dx$ y la integral se transforma en

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left[a^2\cdot\left(1-sen(u)^2\right)\right]^3}}\cdot a\cdot cos(u)\,du = \int \frac{a\cdot cos(u)}{\sqrt{\left(a^2\cdot cos(u)^2\right)^3}}\,du$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\int \frac{1}{cos(u)^2}\,du = \frac{1}{a^2}\cdot\left(\int sec(u)^2\,du\right) = \frac{1}{a^2}\cdot tan(u) + C$$

Para escribir el resultado en función de la variable de integración inicial , se recurre a la substitución inicial $x = a\cdot sen(u)$ y la definición del seno de un ángulo para un triángulo rectángulo, se obtiene así que :

$$sen(u) = \frac{cateto\_opuesto}{hipotenusa} = \frac{x}{a}$$



Del Teorema de Pitágoras se deduce que la longitud del tercer lado del triángulo es:

$$cateto\_adyacente = \sqrt{a^2-x^2}$$

recurriendo a la definición trigonométrica de la tangente, se obtiene asi que :

$$tan(u) = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

y por lo tanto, el resultado de la integral se expresa como . . .

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}\,dx = \frac{1}{a^2}\cdot tan(u) + C = \frac{1}{a^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) + C$$

Ejemplo 30. Integrar : $\displaystyle\int \left(\sqrt{z^2 - a^2}\right) dz$

Solución : Esta es una de las formas integrales inmediatas *(Fórmula XXIV)* .
Hagamos la substitución: $z = a\cdot sec(\theta)$, entonces $dz = a\cdot sec(\theta)\cdot tan(\theta)$ y la integral se transforma en una integral trigonométrica :

$$\int \sqrt{z^2 - a^2}\, dz = \int \sqrt{a^2\cdot\left[sec^2\cdot(\theta) - 1\right]}\cdot a\cdot sec(\theta)\cdot tan(\theta)\, d\theta$$

$$= \int a^2\cdot tan^2\cdot(\theta)\cdot sec(\theta)\, d\theta$$

Integrando ahora por partes , haciendo :

$$\begin{bmatrix} u = (tan(\theta)) \\ dv = tan(\theta)\cdot sec(\theta)\cdot d\theta \end{bmatrix} \text{ es decir : } \begin{bmatrix} du = sec^2\cdot(\theta)\cdot d\theta \\ v = sec(\theta) \end{bmatrix}$$

la integral queda como:

$$\int tan^2\cdot(\theta)\cdot sec(\theta)\, d\theta = u\cdot v - \int v\, du$$

$$= tan(\theta)\cdot sec(\theta) - \int sec^2\cdot(\theta)\cdot sec(\theta)\, d\theta$$

$$= tan(\theta)\cdot sec(\theta) - \int \left[1 + tan^2\cdot(\theta)\right]\cdot sec(\theta)\, d\theta$$

$$= tan(\theta)\cdot sec(\theta) - \int tan^2\cdot(\theta)\cdot sec(\theta)\, d\theta - \int sec(\theta)\, d\theta$$

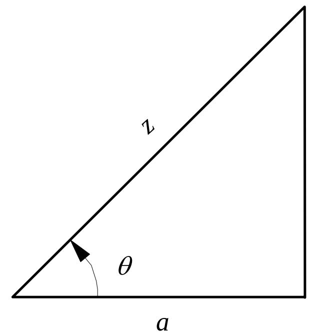
$$= tan(\theta)\cdot sec(\theta) - ln(sec(\theta) + tan(\theta)) - \int tan^2\cdot(\theta)\cdot sec(\theta)\, d\theta$$

La integral inicial se repite a la derecha, asi que despejándola se obtiene :

$$\int \tan^2(\theta)\cdot\sec(\theta)\,d\theta \;=\; \frac{1}{2}\cdot\left(\tan(\theta)\cdot\sec(\theta) - \ln\left(\sec(\theta)+\tan(\theta)\right)\right) + C$$

Finalmente, expresando éste resultado en función de la variable inicial, mediante la substitución empleada $z = a\cdot\sec(\theta)$, se tiene . . .

$$\sec(\theta) = \frac{hipotenusa}{cateto\_adyacente} = \frac{x}{a}$$



Del Teorema de Pitágoras se deduce que la longitud del tercer lado del triángulo es:

$$cateto\_opuesto = \sqrt{z^2 - a}$$

y de la definición trigonométrica de la tangente :

$$\tan(\theta) = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{a}$$

el resultado de la integración queda :

$$\int \sqrt{z^2 - a^2}\,dz = \frac{a^2}{2}\cdot\left[\frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{a}\cdot\left(\frac{z}{a}\right) - \ln\left(\frac{z}{a} + \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{a}\right)\right] + C$$

$$= \boxed{\frac{z}{2}\cdot\sqrt{z^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right) - \frac{a^2}{2}\cdot\ln(a) + C}$$

Este es el resultado de la fórmula de integración inmediata XXIV. (en la cual se ha escrito la constante $-\frac{a^2}{2}\cdot\ln(a) + C$ como una nueva constante de integración indefinida

Ejemplo 31. Integrar : $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{4\cdot x^2 + 9}}\,dx$

Solución : Para eliminar el radical, hágase la substitución : $x = \frac{3}{2}\cdot\tan(\theta)$ y en consecuencia

$dx = \frac{3}{2}\cdot\sec^2(\theta)\cdot d\theta$, con lo cual la integral se transforma en :

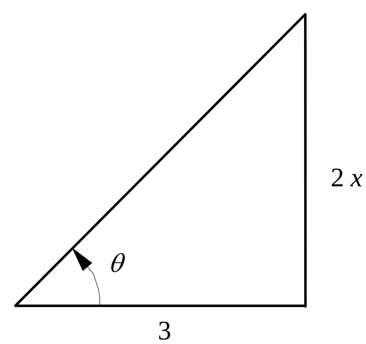
$$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{4\cdot x^2+9}}\,dx = \int \frac{\sec^2\cdot\theta}{\tan(\theta)\cdot\sqrt{9\cdot\left[\tan^2\cdot(\theta)+1\right]}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)}\right)d\theta = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{\frac{1}{\cos(\theta)}}{\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)}\,d\theta = \frac{1}{3}\cdot\int \csc(\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\ln(\csc(\theta)-\cot(\theta))+C$$

y de la substitución inicial : $\tan(\theta) = \frac{2\cdot x}{3}$, se obtiene :

$$\cot(\theta) = \frac{3}{2\cdot x} \quad ; \quad \csc(\theta) = \frac{\sqrt{4\cdot x^2+9}}{2\cdot x}$$



por lo tanto :

$$\int \frac{1}{x\cdot\sqrt{4\cdot x^2+9}}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\ln\left(\frac{\sqrt{4\cdot x^2+9}}{2\cdot x}-\frac{3}{2\cdot x}\right)+C$$

(Compárese éste procedimiento de solución con el método de la substitución $u = \frac{1}{x}$ *)*

Ejemplo 32. Integrar : $\int \frac{t^2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$

Solución : Hagamos la substitución : $t = 2\cdot\sin(\theta)$ para formar en el radical el cuadrado de una función trigonométrica . En consecuencia $dt = 2\cdot\cos\cdot(\theta)\cdot d\theta$ y la integral se transforma en . . .

$$\int \frac{(2\cdot\sin(\theta))^2}{\sqrt{4\cdot\left[1-\sin^2\cdot(\theta)\right]}}\cdot 2\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \int 4\cdot\sin^2\cdot(\theta)\,d\theta$$

De la identidad: $\cos(2\cdot\theta) = 1 - 2\cdot \mathrm{sen}^2\cdot(\theta)$, queda: $4\cdot \mathrm{sen}^2\cdot(\theta) = 2\cdot(1-\cos(2\cdot\theta))$ de modo que la integral anterior es simplemente . . .

$$2\cdot\int (1-\cos(2\cdot\theta))\,d\theta = 2\cdot\theta - \mathrm{sen}(2\cdot\theta) + C$$

Pero por la substitución inicial se tiene : $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{t}{2}$ y $\theta = \arcsin\left(\frac{t}{2}\right)$ de manera que

$\cos(\theta) = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\cdot(\theta)}$, es decir : $\cos(\theta) = \sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}$; por lo tanto :

$$\mathrm{sen}(2\cdot\theta) = 2\cdot \mathrm{sen}(\theta)\cdot\cos(\theta) = \frac{t}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{t}{2}\cdot\sqrt{4-t^2}$$

Substituyendo lo anterior en la integral inicial se obtiene finalmente :

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \boxed{2\cdot \arcsin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{t}{2}\cdot\sqrt{4-t^2} + C}$$

EJERCICIO 7.8 *Integración por substitución trigonométrica.*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{y^2\cdot\sqrt{y^2-7}}\,dy$ 2. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+8)^3}}\,dx$ 3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16-t^2}}{t^2}\,dt$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{y^2-9}}{y}\,dy$ 5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{4+x^2}}\,dx$ 6. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{(16-9\cdot x^2)^3}}{x^6}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4\cdot x^2-24\cdot x+27}}\,dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\cdot\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$ 9. $\displaystyle\int \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Respuestas : (Ejercicio 7.8)

1. $\frac{1}{7}\cdot\frac{\sqrt{y^2-7}}{y}+C$

2. $\frac{-x}{\sqrt{x^2+8}}+ln\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)+C$

3. $\frac{-\left(\sqrt{16-t^2}\right)}{t}-arcsen\left(\frac{1}{4}\cdot t\right)+C$

4. $\sqrt{y^2-9}-3\cdot arcsec\left(\frac{1}{3}\cdot y\right)+C$

5. $\frac{-1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}+C$

6. $\frac{-1}{80}\cdot\frac{\sqrt{\left(16-9\cdot x^2\right)^5}}{x^5}+C$

7. $\frac{1}{2}\cdot ln\left(4\cdot\sqrt{4\cdot x^2-24\cdot x+27}+8\cdot x-24\right)+C$

8. $ln\left(\frac{2+x-2\cdot\sqrt{1+x+x^2}}{x^2}\right)+C$

9. $\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\cdot ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$

VIII . *Conclusión* .

En un gran número de casos no se puede dar técnica específica para determinar una integral indefinida, la única guía es la experiencia adquirida al resolver muchos problemas.

Por ejemplo en las siguientes integrales se indican las substituciones con las cuales se transforman en una integral más simple o en una integral inmediata :

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\,dx \quad \text{al substituir} \quad x = \frac{1}{u} \quad \text{se transforma en :} \quad \int u\cdot\sqrt{a^2\cdot u^2-1}\,du$$

$$\int \left(\frac{1}{e^x+1}\right)dx \quad \text{al substituir} \quad x = -ln(u) \quad \text{se transforma en :} \quad \int \frac{-1}{(1+u)}\,du$$

$$\int \left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right)dx \quad \text{al substituir} \quad e^x = u \quad \text{se transforma en :} \quad \int \frac{1}{\left(u^2+1\right)}\,du$$

$$\int \left(\frac{ln(2\cdot x)}{ln(4\cdot x)}\cdot\frac{1}{x}\right)dx \quad \text{al substituir} \quad u = ln(x) \quad \text{se transforma en :} \quad \int \frac{ln(2)+u}{2\cdot ln(2)+u}\,du$$

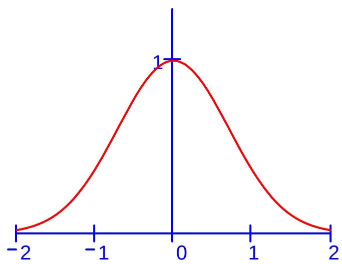
y muchas otras más .
Por otra parte, aunque toda función continua en un intervalo tiene siempre una integral indefinida en tal intervalo, no siempre tal integral se puede expresar en términos de funciones elementales. Ejemplos de ello son las siguientes:

$A)\ \int e^{-x^2}\,dx \qquad B)\ \int \frac{sen(x)}{x}\,dx$

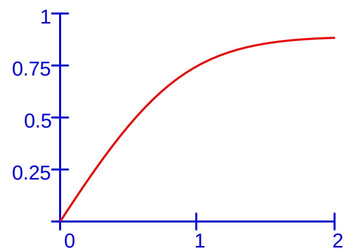
$C)\ \int \sqrt{1-k^2\cdot sen^2\cdot(x)}\,dx \qquad D)\ \int \frac{1}{ln(x)}\,dx$

En éstas integrales y en muchas otras, la función primitiva no puede expresarse como una suma finita de funciones elementales. *Cada una de éstas integrales es una función de naturaleza especial* .

Así por ejemplo, la integral del inciso $A)$ llamada *función de Gauss* , es muy utilizada en Probabilidad y Estadística para describir ciertos fenómenos aleatorios y se designa por $\Phi(x)$.
Su gráfica se indica en la siguiente figura :



$f(x) = e^{-x^2}$



$\Phi(x) = \int e^{-x^2}\,dx$

Por otra parte, la función primitiva : $\int \sqrt{1-k^2\cdot sen^2\cdot(x)}\,dx$ donde $k < 1$, llamada *integral elíptica*

se denota por $E(x)$ y surge por ejemplo cuando se trata de calcular en forma exacta el período de oscilación de un péndulo simple . Muchas funciones especiales como ésta surgen de la solución para un problema físico particular .

7.4 ***Algunas aplicaciones de la integral indefinida*** .

La constante C que se obtiene en una integral indefinida, representa cualquier valor numérico real . Esto significa que *la gráfica de la función primitiva* $y = F(x)$ *se puede desplazar paralelamente al eje Y una distancia C* .

De éste modo, $F(x) + C$ *representa una familia de curvas*, idénticas en forma y que solo difieren en el punto donde cruzan el eje Y .

1ª Aplicación . Determinación de la ecuación de una curva .

Es posible determinar una curva particular de la familia de curvas $y = F(x) + C$, asignando un valor particular a la constante de integración C . Esto se hace por ejemplo, exigiendo que tal curva pase por un punto particular $P(x_0, y_0)$ es decir se exige la condición : $F(x_0) = y_0$

Ejemplo 33. Hallar la función $F(x)$ que tiene el valor -1 cuando $x = 1$ y cuya pendiente para un valor dado de x está dado por: $3 \cdot x^2 + x - \frac{7}{2}$

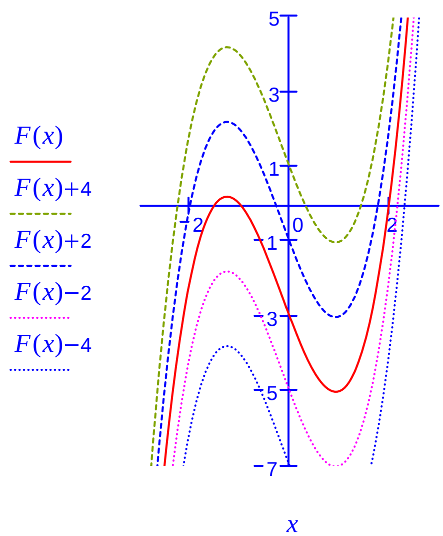
Solución : Se sabe que la pendiente en un punto dado de la curva $y = F(x)$, es el valor de la derivada de la función $F(x)$ en ese punto, se sigue entonces que :

$$\frac{d}{dx} F(x) = 3 \cdot x^2 + x - \frac{7}{2}$$

Integrando ambos miembros de esta igualdad respecto a x, se obtiene :

$$\int \left(\frac{F(x)}{dx} \right) dx = \int 3 \cdot x^2 + x - \frac{7}{2} \, dx$$

$$F(x) = x^3 + \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{7}{2} \cdot x - 3 + C$$



que es la familia de curvas mostrada en la figura de la derecha .

Dado que a cada valor real de C corresponde una sola curva de la familia, la curva particular del problema, debe pasar por el punto $(1, -1)$. es decir se debe cumplir que $F(1) = -1$, así que. . .

$$(1)^3 + \frac{1}{2}\cdot(1)^2 - \frac{7}{2}\cdot(1) - 3 + C = -1$$

de donde se obtiene que $C = 4$. Por lo tanto, la función particular buscada es :

$$F(x) = \left(x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{7}{2}\cdot x - 3\right) + 4 \;=\; \boxed{x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{7}{2}\cdot x + 1}$$

Ejemplo 34. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en cualquier punto sea el doble de la abscisa en ese punto y que además pase por $(-1, 3)$.

Solución : El valor de la derivada de una función en un punto dado, es su pendiente en tal punto. Esto significa que si $y = f(x)$ es la ecuación de la curva buscada se debe cumplir que . . .

$$\frac{df(x)}{dx} = 2\cdot x$$

Integrando ambos miembros respecto a x :

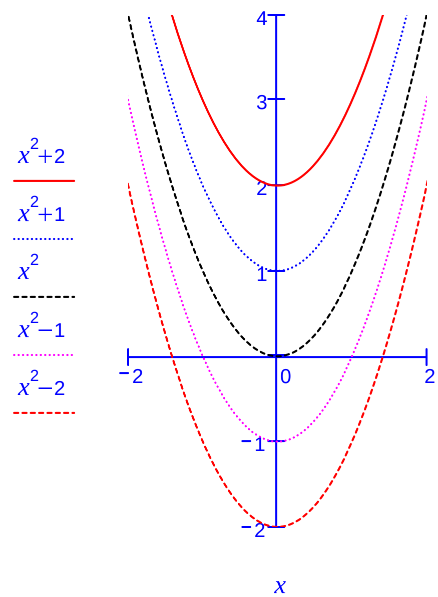
$$\int \frac{df(x)}{dx}\,dx = 2\cdot\int x\,dx$$

$$= x^2 + C$$

que es la familia de parábolas verticales :

$$f(x) = x^2 + C$$

Cada parábola queda determinada por un valor particular de la constante de integración C . y todas ellas tienen la misma pendiente para el mismo valor de x y se pueden obtener trasladando una parábola de la familia a lo largo del eje Y .



Como además se exige la condición de que la curva pase por el punto $(-1, 3)$, la ecuación encontrada debe satisfacer la condición $f(-1) = 3$, de modo que:

$$3 = (-1)^2 + C$$

y resulta que $C = 2$. La curva particular que se busca es entonces: $\boxed{f(x) = x^2 + 2}$

Ejemplo 35. En todo punto de una cierta curva $y = F(x)$, se cumple que $\frac{d^2}{dx^2}y = \left(x^2 - 3\right)$.

Además tal curva pasa por el punto $(2,-1)$ y es tangente a la línea recta $x - 2\cdot y = 3$ en el punto $(-3,1)$. Hallar su ecuación

Solución : Dado que : $y''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\cdot F(x) = \frac{d}{dx}\cdot(F'(x)) = x^2 - 3$ integrando respecto a x se obtiene :

$$\int \frac{d\cdot(F'(x))}{dx}\,dx = \int \left(x^2 - 3\right) dx$$

es decir . . . $F'(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - 3\cdot x + C_1$ (*)

Ésta función representa la pendiente en un punto cualquiera de la curva buscada. En particular en el punto $(-1,3)$ debe ser igual a la pendiente de su recta tangente, es decir debe valer $\frac{1}{2}$. Se tiene así la condición :

$$F'(-3) = \frac{1}{2} \quad \text{esto es} \ldots \quad \frac{1}{3}\cdot(-3)^3 - 3\cdot(-3) + C_1 = \frac{1}{2}$$

de donde resulta que : $C_1 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto la ecuación (*) es :

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{3}\cdot x^3 - 3\cdot x + \frac{1}{2}$$

Una segunda integración da :

$$\int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = \int \frac{1}{3}\cdot x^3 - 3\cdot x + \frac{1}{2}\,dx$$

$$F(x) = \left(\frac{1}{12}\cdot x^4 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + \frac{x}{2}\right) + C_2$$

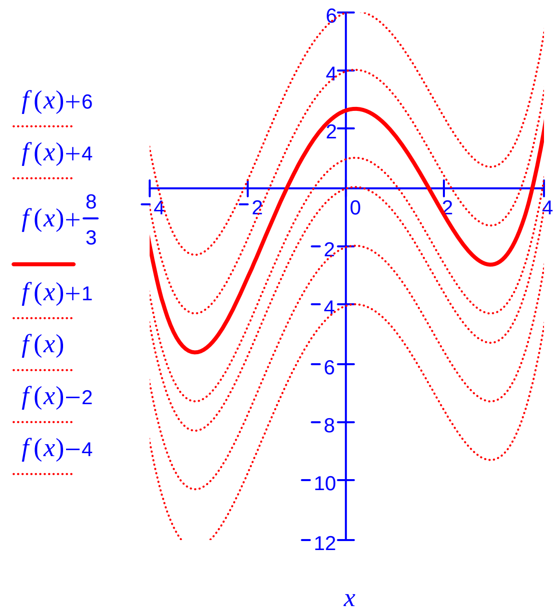
Como la curva buscada pasa por el punto $(2,-1)$, se tiene que $F(2) = -1$, esto es :

$$\left[\frac{1}{12}\cdot(2)^4 - \frac{3}{2}\cdot(2)^2 + \frac{(2)}{2}\right] + C_2 = -1$$

de donde resulta $C_1 = \frac{8}{3}$.

Por lo tanto, la curva buscada tiene la ecuación :

$$y(x) = \frac{1}{12}\cdot x^4 - \frac{3}{2}\cdot x^2 + \frac{x}{2} + \frac{8}{3}$$



Ejemplo 36. Cierta cantidad que cambia con el tiempo $q(t)$, crece a un ritmo proporcional al valor de si misma en un instante t (*medido en segundos*) . Si $q(0) = 25$ y dos segundos después se tiene $q(2) = 75$, ¿cuál será su valor en el instante $t = 6$?

Solución : Bajo la escala apropiada de tiempo, éste problema puede interpretarse como el crecimiento de una población *(de seres humanos , bacterias , insectos , radio isótopos , etc.)* .

Usualmente la derivada de una función que depende del tiempo se interpreta como la ***velocidad, rapidez o ritmo de cambio*** de tal cantidad .

Siendo k una constante de proporcionalidad , el problema plantea que :

$$\frac{dq}{dt} = k\cdot q \qquad \text{es decir . . .} \qquad \frac{dq}{q} = k\cdot dt$$

Al integrar ésta última expresión respecto al tiempo se obtiene :

$$\int \frac{1}{q}\,dq = \int k\,dt \qquad \text{esto es .} \qquad ln(q(t)) = k\cdot t + C$$

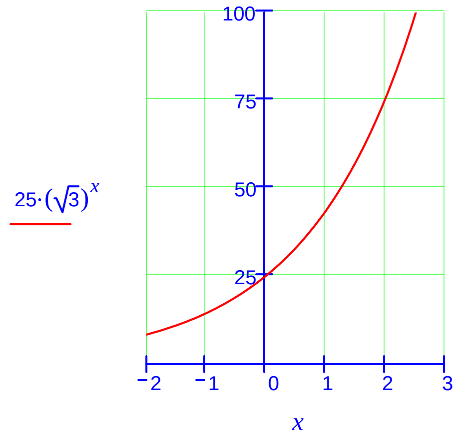
que se puede rescribir, usando la función inversa del logaritmo como :

$$q(t) = e^C\cdot e^{k\cdot t}$$

De la condición $q(0) = 25$ se deduce que . . . $25 = e^C\cdot e^0$ es decir $e^C = 25$

y de la condición $q(2) = 75$ se obtiene que . . . $75 = 25\cdot e^{k\cdot 2}$ de lo cual se deduce el valor de la constante k :

$$k = \frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{75}{25}\right) = ln\left(\sqrt{\frac{75}{25}}\right) = ln(\sqrt{3})$$



Substituyendo los valores encontrados para las constantes C y k , la función particular que describe el crecimiento de la cantidad q es :

$$q(t) = 25\cdot e^{ln(\sqrt{3})\cdot t} = \boxed{25\cdot(\sqrt{3})^t}$$

De donde es posible calcular el valor de q para el instante $t = 6$:

$$q(6) = 25\cdot(\sqrt{3})^6 = 25\cdot(3)^3 = 675$$

Como ejemplo particular, si la ciudad de Morelia tuvo una población de 300 000 habitantes en 1970 ; pero en 1980 su población aumentó a 1 millón entonces para el año2020 el número de habitantes que tendrá la ciudad de acuerdo con éste modelo de crecimiento será: 123.5 millones !! . (*Se deja como ejercicio para el lector comprobar de éste resultado*).
Factores como la taza de mortalidad, enfermedades o la migración , pueden cambiar el valor de la constante k

2ª Aplicación . Ecuación de movimiento .

Para una función de la forma $s = f(t)$ que represente la posición s de un objeto en movimiento, en función del tiempo t, se definen las cantidades :

- ***velocidad*** v del objeto como la rapidez de cambio de su posición respecto al tiempo, es decir:

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

- ***aceleración*** a del objeto como la rapidez de cambio de su velocidad :respecto al tiempo, es decir:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dx}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right) = \boxed{\frac{d^2\cdot s}{dt^2}}$$

Por ejemplo si s representa la distancia recorrida por un objeto en línea recta a partir de una posición inicial hasta cierto instante t , entonces la ecuación del movimiento $s = f(t)$ define completamente el movimiento lineal de tal objeto.
La función de posición $s = f(t)$ para un objeto dado, se puede determinar por integración si se conoce su aceleración $a(t)$ así como los valores iniciales de su la posición : $s(t_0)$ y su velocidad $v(t_0)$ para un instante particular t_0 (*usualmente se escoge* $t_0 = 0$) .

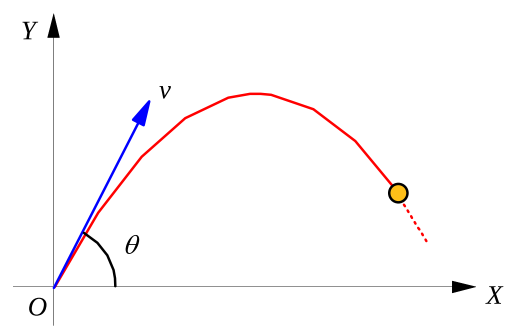
Ejemplo 37. Describir el movimiento de un proyectil lanzado cerca de la superficie terrestre, bajo un ángulo inicial de tiro θ por encima de la horizontal y con una velocidad inicial v_0. Ignórese el rozamiento con el aire .

Solución : El movimiento del proyectil ocurre en un plano, escojamos el plano vertical OXY .

Si el proyectil parte del origen $(0,0)$, entonces la aceleración sobre el proyectil se debe únicamente a la fuerza de atracción gravitacional, está dirigida hacia abajo a lo largo del eje Y .

Además, si la altura que alcanza el proyectil sobre la superficie de la Tierra es mucho menor que el radio terrestre, tal aceleración permanece prácticamente *constante* y vale :

$$g = 9.8 \cdot \frac{m}{seg^2}$$



De modo que :

En la dirección X :

aceleración : $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0$

velocidad inicial: $v_x(0) = v_0 \cdot cos(\theta)$

posición inicial: $x(0) = 0$

En la dirección Y :

aceleración : $a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -g$

velocidad inicial: $v_y(0) = v_0 \cdot sen(\theta)$

posición inicial: $y(0) = 0$

La velocidad se encuentra por integración respecto al tiempo a partir de su definición . . .

$a(t) = \dfrac{dv}{dt}$ implica que : $dv = a(t) \cdot dt$ de donde : $\displaystyle\int dv = \int a(t)\, dt$

es decir . . .

$$\boxed{v(t) = \int a(t)\, dt}$$

por lo tanto :

$$v_x = \int a_x\, dt = \int 0\, dt = C_1 \quad ; \quad v_y = \int (-g)\, dt = -gt + C_2$$

Entonces la velocidad en la dirección X se mantiene constante y es la componente horizontal de la velocidad inicial, es decir $C_1 = v_0 \cdot cos(\theta)$.

Por otra parte, la componente de la velocidad inicial en la dirección Y vale:

$$v_0 \cdot sen(\theta) = -g(0) + C_2 = C_2$$

lo cual determina la constante de integración $C_2 = v_0 \cdot sen(\theta)$

De éste manera, las velocidades del proyectil en función del tiempo son:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cdot cos(\theta) \quad \text{es decir :} \quad dx = v_0 \cdot cos(\theta) \cdot dt$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + v_0 \cdot sen(\theta) \quad \text{es decir :} \quad dy = (-g \cdot t + v_0 \cdot sen(\theta)) \cdot dt$$

Integrando nuevamente cada una de éstas expresiones respecto al tiempo, resulta :

$$\int .\, dx = \int v_0 \cdot cos(\theta)\, dt \quad ; \quad \int .\, dy = \int (-g \cdot t + v_0 \cdot sen(\theta))\, dt$$

$$x(t) = (v_0 \cdot cos(\theta)) \cdot t + C_3 \quad ; \quad y(t) = (v_0 \cdot sen(\theta)) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + C_4$$

donde las constantes de integración C_3 y C_4 se determinan a partir de las condiciones iniciales para la posición : $x(0) = 0$; $y(0) = 0$ esto es . . .

$$0 = (v_0 \cdot cos(\theta)) \cdot 0 + C_3 \quad ; \quad 0 = (v_0 \cdot sen(\theta)) \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (0)^2 + C_4$$

resultando : $C_3 = 0$ y $C_4 = 0$.

Entonces, para un objeto sometido a ésta aceleración y bajo éstas condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento son :

$$\boxed{x(t) = v_0 \cdot cos(\theta) \cdot t} \quad ; \quad \boxed{y(t) = v_0 \cdot sen(\theta) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}$$

Estas son dos ecuaciones describen la posición del proyectil y quedan definidas en función del parámetro tiempo.
Al eliminar el parámetro, se obtiene *la ecuación de la trayectoria del proyectil* en el plano . . .
(despejando t de $x(t)$ y substituyendo en $y(t)$ se obtiene)

$$y(x) = v_0 \cdot sen(\theta) \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot cos(\theta)} \right) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{\left[(v_0)^2 \cdot cos^2 \cdot (\theta) \right]}$$

o bien :

$$y(x) = \tan(\theta)\cdot x - \frac{g}{2\cdot(v_o)^2}\cdot\left[1 + \tan^2\cdot(\theta)\right]\cdot x^2$$

Que adopta la forma general para una *parábola vertical* : $y(x) = A\cdot x^2 + B\cdot x + C$. que se extiende hacia abajo (puesto que el coeficiente de x^2 es negativo).

Supongamos por ejemplo que se lanza una pelota con una velocidad inicial $v_0 = 49\cdot\frac{m}{seg}$ contra una pared vertical situada a $147\cdot m$. Si el ángulo de lanzamiento por encima de la horizontal vale $\theta = 45°$ entonces . . .

- la altura del impacto del proyectil sobre la pared por el valor de $y(x)$ en $x = 147$, es decir, de la ecuación para la trayectoria se tiene . . .

$$y(147) = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot(147\cdot m) - \frac{1}{2}\cdot\frac{g}{\left(49\cdot\frac{m}{seg}\right)^2}\cdot\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right)\cdot(147\cdot m)^2$$

$$= 58.8\cdot m$$

- Si se desea que el impacto de la pelota ocurra precisamente en la base de la pared, entonces el ángulo inicial de tiro θ puede calcularse de la condición: $y(147) = 0\cdot m$ y queda . . .

$$0 = \tan(\theta)\cdot x - \frac{g\cdot x^2}{2\cdot(v_o)^2}\cdot\left[1 + \tan^2\cdot(\theta)\right]$$

resolviendo ésta ecuación para θ se obtiene . . .

$$\tan(\theta) = \frac{(v_0)^2}{g\cdot x}\cdot\left[1 + \sqrt{1 - \frac{g^2\cdot x^2}{(v_0)^4}}\right]$$

y

$$\theta = \arctan\left[\frac{(v_0)^2}{g\cdot x}\cdot\left[1 + \sqrt{1 - \frac{g^2\cdot x^2}{(v_0)^4}}\right]\right]$$

calculando . . .

$$\theta = \arctan(3) = 71.56°$$

o también $\theta = 18.43°$ si se toma el signo negativo del radical .

- Si se desea que la pelota golpeé en la pared a una altura $y = 24.5 \cdot m$, entonces el ángulo de tiro θ puede calcularse a partir de la condición : $y(147) = 24.5$, es decir:

$$y_1 = \tan(\theta)\cdot x - \frac{g\cdot x^2}{2\cdot (v_0)^2}\cdot\left[1 + \tan^2(\theta)\right] \qquad \text{con} \qquad y_1 = 147\cdot m$$

resolviendo esta ecuación para $\tan(\theta)$ se obtiene :

$$\tan(\theta) = \frac{(v_0)^2}{g\cdot x} + \sqrt{\left[\frac{(v_0)^2}{g\cdot x}\right]^2 - \left[\frac{2\cdot (v_0)^2}{g\cdot x}\right]\cdot\left(\frac{y_1}{x} - 1\right)}$$

y $\theta = 70.47°$ (ó también $\theta = 29.32°$ si se toma el signo negativo del radical) .
Es claro también que el radicando debe ser una cantidad positiva , de donde se deduce la condición :

$$\left[\frac{(v_0)^2}{g\cdot x}\right]^2 \geq \left[\frac{2\cdot (v_0)^2}{g\cdot x}\right]\cdot\left(\frac{y_1}{x} - 1\right) \quad \text{, es decir :} \quad v_0 \geq \sqrt{2\cdot g\cdot (y_1 - x)}$$

Si el proyectil no tiene al menos ese valor de velocidad inicial entonces no alcanzará la altura y_1 cuando haya recorrido la distancia horizontal x .

- Si se desea conocer la máxima altura del impacto que puede tener la pelota en la pared, el ángulo de tiro θ se puede obtener calculando el valor máximo de y para $x = 147\cdot m$, así que derivando la ecuación de la trayectoria respecto a θ . . .

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\cdot\left[\tan(\theta)\cdot x - \frac{g\cdot x^2}{2\cdot (v_0)^2}\cdot\left[1 + \tan^2(\theta)\right]\right]$$

$$= \left(1 + \tan(\theta)^2\right)\cdot x - \frac{g\cdot x^2}{(v_0)^2}\cdot\tan(\theta)\cdot\left(1 + \tan(\theta)^2\right)$$

Igualando a cero esta derivada y resolviendo la ecuación resultante para $\tan(\theta)$ se obtiene:

$$\tan(\theta) = \left[\frac{(v_0)^2}{g\cdot x}\right] = \frac{\left(49\cdot\frac{m}{seg}\right)^2}{9.8\cdot\frac{m}{seg^2}\cdot 147\cdot m} = 1.667$$

y por lo tanto : $\theta = \arctan\left[\frac{(v_0)^2}{g\cdot x}\right] = \arctan(1.667) = 59°$

La correspondiente altura máxima sobre la pared se obtiene de la ecuación para la trayectoria con el valor anterior para $tan(\theta)$ y $x = 147 \cdot m$ resultando . . .

$$y_{max} = x \cdot \left[\frac{(v_0)^2}{g \cdot x}\right] - \frac{g}{2 \cdot (v_0)^2} \cdot \left[1 + \left[\frac{(v_0)^2}{g \cdot x}\right]^2\right] \cdot x^2$$

$$= (147 \cdot m) \cdot 1.667 - \frac{g}{2 \cdot (v_0)^2} \cdot (1 + 1.667^2) \cdot (147 \cdot m)^2 = 78.3 \cdot m$$

Ejemplo 38. Se deja caer una piedra desde un globo que asciende a $5 \cdot \frac{m}{seg}$. Se observa que la piedra llega al suelo $8 \cdot seg$ después . ¿ Qué altura sobre el suelo tenía el globo en el momento en que se dejó caer la piedra?

Solución : La aceleración gravitacional sobre la piedra que cae libremente es constante ($g = -9.8 \cdot \frac{m}{seg^2}$) . Así que ubicando un sistema de coordenadas con el eje Y vertical y el eje X al nivel del suelo, se tiene : $a_y = \frac{dv_y}{dt} = -g$; $(v_0)_y = 5 \cdot \frac{m}{seg}$

Integrando entonces . . .

$$v_y = \int \left(\frac{dv_y}{dt}\right) dt = \int (-g)\, dt = -g \cdot t + C_1$$

Dado que en el instante $t = 0$ la velocidad de la piedra es la inicial que lleva junto al globo, se tiene : $(v_0)_y = -g \cdot (0) + C_1$ y resulta . . . $C_1 = (v_0)_y$.

Integrando ahora la velocidad vertical $v_y = \frac{dy}{dt}$ queda:

$$y(t) = \int \left(\frac{dy}{dt}\right) dt = \int \left[-g \cdot t + (v_0)_y\right] dt = \frac{-1}{2} \cdot g \cdot t^2 + (v_0)_y \cdot t + C_2$$

donde C_2 es el valor de la altura y sobre el suelo cuando $t = 0$, es decir $y_0 = y(0)$, la altura que tenía el globo cuando se dejó caer la piedra. Cuando $t = 8 \cdot seg$, la piedra ha llegado al suelo, de modo que su altura vale cero y de la ecuación anterior se obtiene que:

$0 = \frac{-1}{2} \cdot g \cdot (8)^2 + (v_0)_y \cdot (8) + y_0$ es decir : $y_0 \approx 274 \cdot m$

Ejemplo 39. La velocidad con que fluye el agua por un pequeño agujero situado a una profundidad h por debajo de la superficie de un depósito está dada por la ecuación $v^2 = k^2 \cdot 2 \cdot g \cdot h$ donde k es una constante de proporcionalidad y g es la aceleración gravitacional. Calcular el tiempo que tardará en vaciarse un depósito cilíndrico vertical de altura H y radio R inicialmente lleno y que tiene un orificio circular de radio r en el fondo.

Solución : Sean : $A = \pi \cdot R^2$; $a = \pi \cdot r^2$ las áreas circulares del cilindro y del orificio en el fondo respectivamente.

En un tiempo dt, habrá salido del depósito la cantidad de fluido :

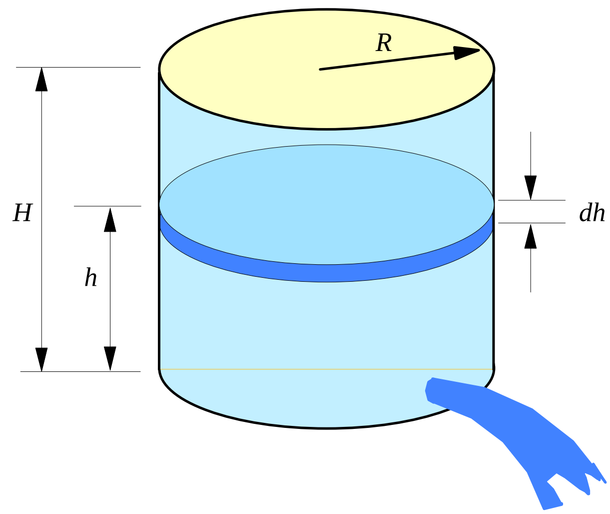
$$Q = v \cdot a \cdot dt$$

donde v es la rapidez de flujo por el orificio .

Ésta debe ser la misma cantidad en la que *ha disminuido* el volumen de agua en el depósito, es decir

$$-dV = -A \cdot dh$$

donde dh es el cambio en la altura de la superficie del agua, en otras palabras . . .



$Q = -dV$ es decir . . . $v \cdot a \cdot dt = -A \cdot dh$ o bien $k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot a \cdot dt = -A \cdot dh$

de donde se obtiene la relación para el cambio diferencial de la altura h con el tiempo t :

$$dt = \left(\frac{-A}{k \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot a} \right) \cdot dh$$

Integrando respecto al tiempo se obtiene . . .

$$t = -\left(\frac{A}{k \cdot a \cdot \sqrt{2 \cdot g}} \right) \cdot \int \left(\frac{1}{\sqrt{h}} \right) dh = \frac{-A}{k \cdot a} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} + C$$

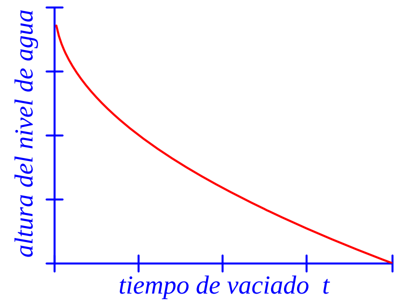
Dado que cuando $t = 0$, la altura de la superficie del agua es H , queda :

$$0 = \frac{-A}{(k \cdot a)} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}} + C \text{ , es decir : } C = \frac{A}{(k \cdot a)} \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot H}}{\sqrt{g}}$$

Por lo tanto, la ecuación que describe el nivel h del agua en función del tiempo es:

$$t = \frac{-A}{k\cdot a}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot h}{g}} + \frac{A}{k\cdot a}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot H}{g}}$$

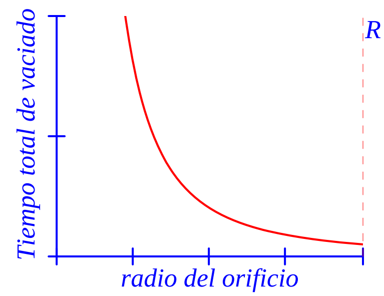
$$= \frac{A}{k\cdot a}\cdot\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot\left(\sqrt{H}-\sqrt{h}\right)$$



De éste modo, el tiempo total de vaciado se obtiene cuando $h = 0$ y vale :

$$T = \frac{A}{k\cdot a}\cdot\sqrt{\frac{2}{g}}\cdot\left(\sqrt{H}-0\right) = \frac{R^2}{k\cdot r^2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot H}{g}}$$

Asi por ejemplo, si $H = 1.53\ m$, $R = 0.305\ m$, $r = 1.25\ cm$, $k = 0.6$, resulta : $t = 9.24\ min$.



En la gráfica de la derecha se muestra el tiempo de vaciado en función del radio r del orificio del fondo. Observe que T no es cero cuando $r = R$ y que T aumenta en proporción inversa con r^2 .

EJERCICIO 7.10

1. Hallar la ecuación de la curva $y = f(x)$, dada su 2ª derivada y su pendiente en el punto indicado :

a) $\frac{d^2}{dx^2}y = (3\cdot x - 2)$; $\frac{dy}{dx} = -2$ en $(-1, 3)$

b) $\frac{d^2}{dx^2}y = x\cdot e^{2\cdot x}$; $\frac{dy}{dx} = 3$ en $(1, 2)$

2. En una familia de curvas ortogonales (*perpendiculares*) a otro sistema de curvas dado, cada una de las curvas de la familia, corta a toda curva del otro sistema en ángulo recto. Hallar la familia de curvas ortogonales al conjunto :

a) trayectorias parabólicas: $y^2 = 4\cdot x + C$ b) hipérbolas equiláteras : $x\cdot y = C$

3. Un material se está transformando en otra a un ritmo proporcional a la cantidad que queda de él sin transformar. Si la cantidad inicial era 50 unidades, y transcurridos 3 *seg* quedan 25 unidades, ¿en cuánto tiempo quedarán 5 unidades de tal material ?

4. El número N de bacterias de cierto cultivo aumenta con el tiempo *(en horas* de manera proporcional a la cuarta parte del valor de N en un instante dado. Si inicialmente $N = 10$, ¿Cuántas bacterias habrá en 32 horas? .

Respuestas Ejercicio 7.10

1. a) $f(x) = \frac{1}{2}\cdot x^3 - x^2 - \frac{11}{2}\cdot x - 1$ b) $f(x) = \frac{1}{4}\cdot\left(x\cdot e^{2\cdot x} - e^{2\cdot x} - x\cdot e^2 + e^2 - 4\right) + 3\cdot x$

2. a) $y(x) = C\cdot e^{-\frac{x}{2}}$ b) $y^2 - x^2 = C$

3. $9.96\cdot seg$

4. $N = 29810$

Capítulo VIII
Integral Definida

8.1 ***Definición*** .

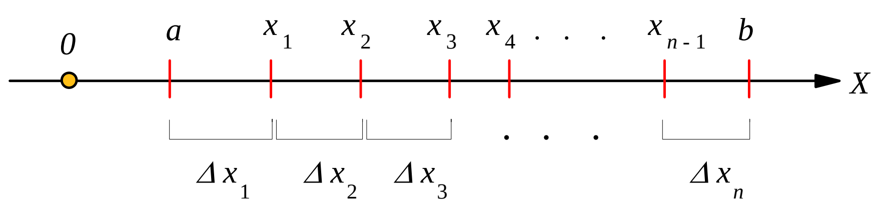
Tanto para el análisis como para el cálculo, la integración definida es una poderosa herramienta que se utiliza en diversas áreas por su gran diversidad de aplicaciones, por ejemplo en la Física o en la Ingeniería se utiliza para el cálculo de áreas limitadas por líneas curvas , trayectorias en el espacio, volúmenes de revolución , energía , presión de líquidos , etc.

Considérese una función continua $y = f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sean M y m los valores máximo y mínimo absolutos respectivamente de $f(x)$ en ese intervalo .

Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n partes o *subintervalos* , no necesariamente iguales entre si, mediante los puntos:

$$x_0 \;,\; x_1 \;,\; x_2 \;,\; \ldots\ldots ,\; x_{n-1} \;,\; x_n$$

siendo $a = x_0$ y $b = x_n$.



Se generan así n subintervalos :

$$\Delta x_1 = (x_1 - x_0),\quad \Delta x_2 = (x_2 - x_1),\quad \Delta x_3 = (x_3 - x_2),\ \ldots,\ \Delta x_n = (x_n - x_{n-1})$$

todos ellos son positivos $(\Delta x_k > 0)$ porque los puntos x_k están ordenados, es decir $x_{k-1} < x_k$

Sean M_k y m_k *el mayor y el menor valor de* $f(x)$ *respectivamente* en el subintervalo Δx_k.

Definamos ahora las sumas :

integral inferior : $S_{(n)} = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + m_3 \cdot \Delta x_3 + \ldots. + m_n \cdot \Delta x_n = \boxed{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k}$

integral superior : $S^{(n)} = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + M_3 \cdot \Delta x_3 + \ldots. + M_n \cdot \Delta x_n = \boxed{\sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k}$

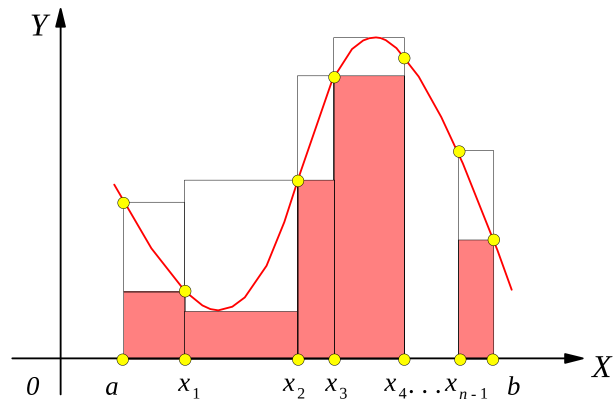
Las cuales representan geométricamente la suma de las áreas de los rectángulos (inscritos o circunscritos), que tienen una base Δx_k y una altura ya sea de M_k o de m_k siempre que $f(x) > 0$, como se indica en la siguiente figura.

Además, puesto que los valores m_k son mínimos y los M_k son máximos en cada subintervalo Δx_k se cumple que :

$$m_k \leq M_k$$

Multipliquemos ésta desigualdad por el número positivo Δx_k :

$$m_k \cdot \Delta x_k \leq M_k \cdot \Delta x_k$$



Si ahora se suman éstos productos en todos los subintervalos resulta . . .

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \qquad \text{es decir . . .} \qquad S_{(n)} \leq S^{(n)}$$

Geométricamente éste resultado significa que el área total de los rectángulos inscritos bajo la curva es menor o igual que el área total de los rectángulos circunscritos sobre ella.
Además, si $\boldsymbol{m}$ es el mínimo absoluto y $\boldsymbol{M}$ es el máximo absoluto de $f(x)$ en todo el intervalo $[a, b]$, se tiene que:

$$\boldsymbol{m} \leq m_k \qquad ; \qquad M_k \leq \boldsymbol{M}$$

Estas desigualdades se cumplen en cualquier subintervalo, así que si se multiplican por la longitud positiva Δx_k del *k*-ésimo subintervalo quedan :

$$\boldsymbol{m} \cdot \Delta x_k \leq m_k \cdot \Delta x_k \qquad ; \qquad M_k \cdot \Delta x_k \leq \boldsymbol{M} \cdot \Delta x_k$$

Sumando éstos productos en todos los subintervalos se obtiene :

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{m} \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \; ; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M} \cdot \Delta x_k$$

es decir . . .

$$\boldsymbol{m} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \right) \leq S_{(n)} \qquad ; \qquad S^{(n)} \leq \boldsymbol{M} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \right)$$

donde $S_{(n)}$ y $S^{(n)}$ son las sumas integrales definidas anteriormente y los números $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{M}$ que son constantes, se han factorizado de todos los términos de las sumatorias .

Por otra parte la sumatoria : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \left(\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_2 + ... + \Delta x_n \right)$

es equivalente a :

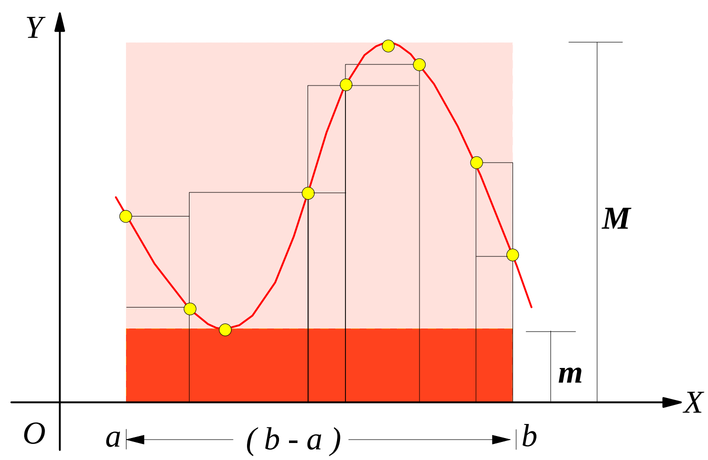
$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1}) = (x_n - x_0) = \boxed{b - a}$$

que es la longitud total del intervalo cerrado $[a, b]$.

En resumen, las desigualdades anteriores indican que : $\boldsymbol{m}\cdot(b-a) \le S_{(n)} \le S^{(n)} \le \boldsymbol{M}\cdot(b-a)$

Geométricamente, esto significa que el área de los rectángulos inscritos y circunscritos a la curva $y = f(x)$ está ***acotada*** , es decir queda comprendida entre el área de un rectángulo mínimo de área $\boldsymbol{m}\cdot(b-a)$ y otra de un rectángulo máximo de área: $(b-a)\cdot\boldsymbol{M}$

Tal como se muestra en la figura de la derecha. .



Escojamos ahora dentro de cada uno de los n subintervalos Δx_j un punto particular arbitrario :

ζ_1 en el intervalo Δx_1 , es decir : $x_0 \le \zeta_1 \le x_1$

ζ_2 en el intervalo Δx_2 , es decir : $x_1 \le \zeta_2 \le x_2$

ζ_3 en el intervalo Δx_3 , es decir : $x_2 \le \zeta_3 \le x_3$

. . . .

ζ_n en el intervalo Δx_n , es decir : $x_{n-1} \le \zeta_n \le x_n$

Calculemos el valor correspondiente de la función, $f(\zeta_j)$ para cada uno de éstos puntos ζ_j , que representa la altura de un rectángulo de base Δx_j , el cual tiene entonces el área : $f(\zeta_j)\cdot\Delta x_j$
Formemos la ***suma integral*** . . .

$$\Sigma = f(\zeta_1)\cdot\Delta x_1 + f(\zeta_2)\cdot\Delta x_2 + f(\zeta_3)\cdot\Delta x_3 + \ldots\ldots + f(\zeta_n)\cdot\Delta x_n = \boxed{\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\cdot\Delta x_j}$$

Si m_j y M_j representan el mínimo y el máximo valor de la función $f(x)$ en el intervalo Δx_j , entonces necesariamente se cumple que . . .

$$m_j \leq f\left(\zeta_j\right) \leq M_j$$

puesto que ζ_j está en el intervalo Δx_j .Ésta desigualdad no cambia su sentido si se multiplica por la longitud positiva del intervalo Δx_j , es decir . . .

$$m_j \cdot \Delta x_j \leq f\left(\zeta_j\right) \cdot \Delta x_j \leq M_j \cdot \Delta x_j$$

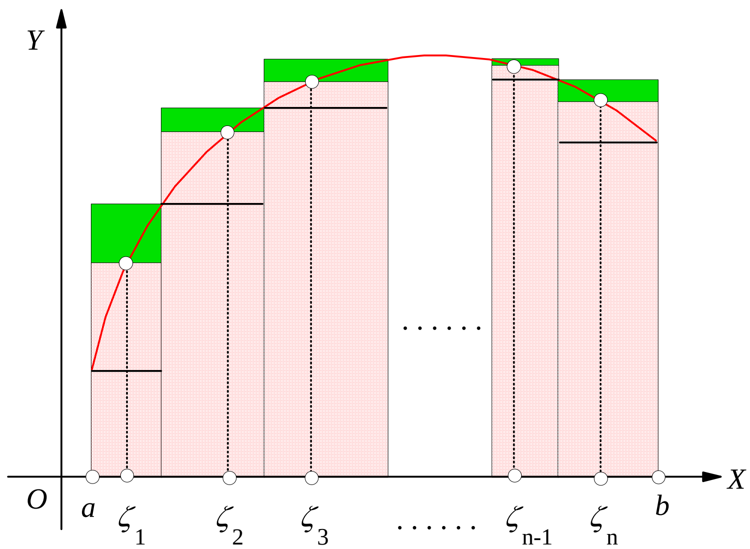
Sumando éstos productos para todos los n subintervalos se obtiene. . .

$$\left(\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \Delta x_j \right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} f\left(\zeta_j\right) \cdot \Delta x_j \right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} M_j \cdot \Delta x_j \right)$$

Al aplicar las definiciones de las sumas integrales superior $S^{(n)}$ e inferior $S_{(n)}$, se concluye que :

$$S_{(n)} \leq \Sigma \leq S^{(n)}$$

Geométricamente, Σ es el área total de los rectángulos de base Δx_j y altura $f\left(\zeta_j\right)$ y *depende de cómo se haya dividido el intervalo* $[\,a\,,b\,]$ *y de la elección de los puntos* ζ_1 , ζ_2 , ζ_3 , . . . , ζ_n



Entonces el área Σ *está comprendida* entre el área $S_{(n)}$ de los rectángulos inscritos y el área $S^{(n)}$ de los rectángulos circunscritos a la curva $y = f(x)$, como se ilustra en la figura de arriba .

Haciendo *diferentes particiones del intervalo* $[\,a\,,b\,]$ *, de modo que el subintervalo más grande* $[\,x_{i-1}\ ,\ x_i\,]$ *en todas ellas tienda a cero cuando el número de subintervalos* n *tienda a infinito, es decir :*

$$\textit{Si}\ \ n \to \infty \qquad \textit{entonces} \quad \Delta x_i \to 0$$

entonces el límite de la suma integral queda :

$$s = \lim_{\Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\zeta_i\right) \cdot \Delta x_i \right) \qquad (8.1)$$

Se puede demostrar que siempre que $f(x)$ sea continua en $[\,a\,,b\,]$ ***éste límite tiene el mismo valor , sin importar cual haya sido la subdivisión hecha del intervalo*** $[\,a\,,b\,]$ ***o la elección de los puntos arbitrarios interiores*** ζ_j ***en cada subintervalo.***

Éste límite es único y se llama ***integral definida de la función*** $f(x)$ ***en el intervalo*** $[a\,,b]$. Se denota por el símbolo :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

El valor de éste límite geométricamente es igual al área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$; $x = b$.
Los números a y b se llaman respectivamente : *límite inferior y límite superior de integración* .

- ***<u>OBSERVACIÓN</u> 1*** : De la definición misma para una integral definida se deduce de inmediato que :

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

puesto que si se hace la partición del intervalo $[a\,,b]$ desde b hasta a en lugar de ser desde a hasta b , entonces *los n subintervalos tendrán una longitud negativa* , es decir:
La inversión de los límites de integración , cambia el signo de una integral definida .

- ***<u>OBSERVACIÓN</u> 2*** : Una integral definida *depende únicamente* de los límites de integración y de la forma de la función $f(x)$; pero *es independiente* del nombre dado a la variable de integración o a la función misma , por lo cual es equivalente escribir :

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad ; \quad \int_a^b g(z)\,dz \quad ; \quad \int_a^b h(w)\,dw$$

siempre que f , g , h representen la misma función matemática .

- ***<u>OBSERVACIÓN</u> 3*** : A diferencia de la integración indefinida, donde no existe una regla general de integración , aquí sí es posible definir un procedimiento sistemático para evaluar una integral definida, puesto que su definición , al igual que una derivada, se base en en el siguiente proceso de límite . . .

<u>REGLA GENERAL PARA LA INTEGRACIÓN DEFINIDA</u>

- ***<u>Paso</u>* # 1 . *Dividir el intervalo de integración*** $[a\,,b]$ *en* n *subintervalos* Δx_k *(iguales o no) y calcular la longitud de cada uno de ellos .*

- ***Paso* # 2 .** *Elegir un punto particular* ζ_k *interior en cada subintervalo* Δx_k *para* ***formar la suma integral :***

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot \Delta x_k$$

- ***Paso* # 3 . *Calcular el límite de la suma integral*** *cuando* $n \to \infty$ es decir, cuando *cada* $\Delta x_k \to 0$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\cdot \Delta x_i \right)$$

Si éste límite existe, se denota por el símbolo : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Ejemplo 1. Calcular la integral definida de la función constante : $f(x) = c$ entre los límites a y b

Solución :

- Dividamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos que, por comodidad de cálculo, se considerarán *todos de la misma longitud* : Δx dada por . . .

$$\Delta x = \left(\frac{b-a}{n} \right)$$

- Escojamos un punto particular ζ_k dentro de cada subintervalo y formemos la *suma integral* :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot \Delta x_k$$

Para la función considerada en el problema : $f(\zeta_k) = c$ para cualquier ζ_k , dado que es una función constante. Además $\Delta x_k = \Delta x$, de modo que la suma integral es:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c\cdot\left(\frac{b-a}{n} \right) = c\cdot\left(\frac{b-a}{n} \right)\cdot \sum_{k=1}^{n} \quad (1)$$

Dado que la sumatoria es el número 1 sumado n veces, queda:

$$\sum_{k=1}^{n} (1) = 1+1+1+\ldots\ldots+1 = n$$

y resulta asi que . . .

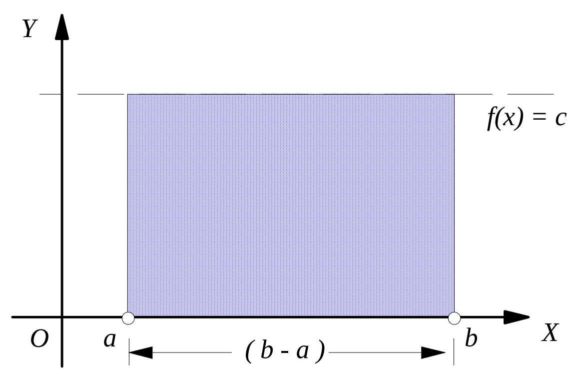
$$s_n = c\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right)\cdot n = c\cdot(b-a)$$

- Sin importar cual sea la partición del intervalo $[a, b]$ o la elección de los puntos interiores ζ_k, *el límite cuando $n \to \infty$ de la suma integral anterior tiene el mismo valor* y representan la integral definida de la función $f(x)$ en ese intervalo.

En el problema se obtiene entonces que :

$$\int_a^b (c)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\sum_{k=1}^{n} (c)\cdot\Delta x\right] = \lim_{\Delta x\to 0} c\cdot(b-a) = \boxed{c\cdot(b-a)}$$

Éste resultado ya se esperaba, puesto que el valor de la integral definida, es igual al área limitada por la recta horizontal $y = f(x) = c$, el eje X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. que en éste caso es el área de un rectángulo de base $(b-a)$ y altura c .



Ejemplo 2. Calcular la integral definida de la función : $f(x) = x^2$ entre los límites 0 y b

Solución : • Para simplificar el cálculo, dividamos el intervalo de integración $[0, b]$ en n subintervalos iguales, por medio de la partición :

$$x_0 = 0,\; x_1 = \Delta x,\; x_2 = 2\cdot\Delta x,\ldots,\; x_{n-1} = (n-1)\cdot\Delta x,\; x_n = b$$

cada subintervalo tiene de ésta manera la longitud :

$$\Delta x = \left(\frac{b-0}{n}\right) = \frac{b}{n}$$

- Escojamos como los puntos interiores ζ_k *los extremos izquierdos de cada subintervalo* $[\, x_{k-1} \,,\, x_k \,]$, esto es :

$$\zeta_k = x_{k-1} = (k-1)\cdot \Delta x$$

(Con cualquier otra elección de puntos ζ_k , el resultado de la integración será exactamente el mismo). Entonces . . .

$$f(\zeta_k) = (\zeta_k)^2 = \left[(k-1)\cdot \Delta x\right]^2$$

$$f(\zeta_k)\cdot \Delta x_k = (k-1)^2\cdot(\Delta x)^3$$

La suma integral tiene por lo tanto la forma :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2\cdot(\Delta x)^3$$

como Δx no depende del índice de la sumatoria, se puede escribir como factor fuera de ella y queda . . .

$$s_n = (\Delta x)^3\cdot \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = (\Delta x)^3\cdot\left[0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2\right]$$

La suma de los cuadrados de los primeros m números enteros es . . .

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 = \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + m^2\right) = \boxed{\left[\frac{m\cdot(m+1)\cdot(2\cdot m+1)}{6}\right]}$$

[otras fórmulas útiles de sumatorias de enteros son :

$$\sum_{k=1}^{m} k = (1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+m) = \boxed{\left[\frac{m\cdot(m+1)}{2}\right]}$$

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + m^3\right) = \boxed{\left[\frac{m\cdot(m+1)}{2}\right]^2}$$

y muchas otras . Todas ellas se pueden demostrar por inducción matemática]

De ésta manera, la suma integral anterior se expresa como :

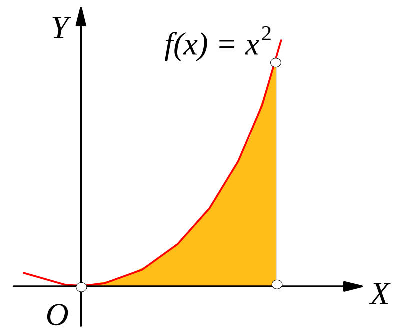
$$s_n = \left(\frac{b}{n}\right)^3\cdot\left[\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2\cdot n-1)}{6}\right]$$

- Al tomar el límite cuando $n \to \infty$, o cuando $\Delta x_k \to 0$ se obtiene :

$$\int_0^b x^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{b}{n}\right)^3 \cdot \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2\cdot n-1)}{6} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{n}{n}\right)\cdot\left(2-\frac{1}{n}\right)\right] = \boxed{\frac{1}{3}\cdot b^3}$$

Éste resultado, geométricamente es el valor del área limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y las rectas verticales $x = 0$; $x = b$, como se ilustra en la figura de la derecha



Ejemplo 3. Calcular la integral definida $\displaystyle\int_1^3 x^3\, dx$

Solución :

- Dividamos el intervalo $[1,3]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud . . .

$$\Delta x = \left(\frac{3-1}{n}\right) = \frac{2}{n}$$

mediante la partición :

$$x_0 = 1,\quad x_1 = 1+\Delta x,\quad x_2 = 1+2\cdot\Delta x,\ \ldots,\ x_n = 1+n\cdot\Delta x$$

- Elijamos como puntos interiores representativos de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, los extremos de la derecha en cada uno de ellos, es decir :

$$\zeta_k = x_k = 1+k\cdot\Delta x$$

La suma integral queda entonces :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k)^3\cdot\Delta x = \Delta x\cdot\sum_{k=1}^{n}(1+k\cdot\Delta x)^3$$

Desarrollando el binomio al cubo y distribuyendo la sumatoria en cada uno de los términos resulta :

$$= \Delta x\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) + 3\cdot\Delta x^2\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + 3\cdot\Delta x^3\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + \Delta x^4\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)$$

Usando las fórmulas para las sumatorias . . .

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[n\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2$$

y con $\Delta x = \dfrac{2}{n}$ resulta :

$$s_n = \frac{2}{n}\cdot n + 3\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} + 3\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^3\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)}{6} + \left(\frac{2}{n}\right)^4\cdot\left[n\cdot\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2$$

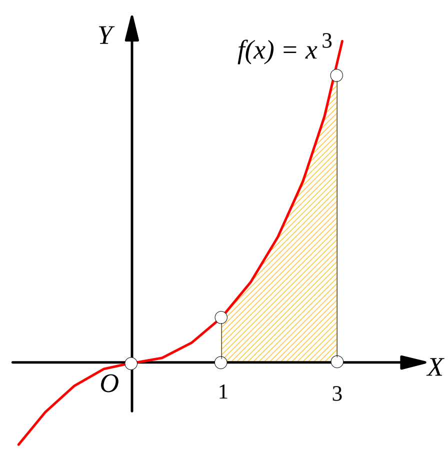
$$= 2 + 6\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) + 4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) + 4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

- Al tomar el límite en la suma integral cuando $n \to \infty$, es decir cuando $\Delta x \to 0$ se obtiene . . .

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \int_1^3 x^3\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[2 + 6\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) + 4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right) + 4\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]$$

$$= 2 + 6 + 4\cdot(2) + 4$$
$$= 20$$



¿Pero 20 qué ? . ¿Qué significa éste número ?.

Pues bien, dependiendo de la cantidad que representen la variable x y la función $y = f(x)$, el valor numérico anterior será el producto de las unidades de x y de las unidades de $f(x)$ y quedará representado geométricamente como el valor del área bajo la curva $y = x^3$ entre las rectas verticales $x = 1$; $x = 3$ y el eje X .

Ejemplo 4. Calcular la integral definida $\int_a^b e^x \, dx$

Solución :

- Dividamos el intervalo de integración $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud : $\Delta x = \left(\frac{b-a}{n}\right)$, mediante la partición :

$$x_0 = a \ , \quad x_1 = a + \Delta x \ , \quad x_2 = a + 2\cdot\Delta x \ , \quad \ldots , \ x_n = \left(a + n\cdot\Delta x\right) = b$$

- Elijamos ahora como puntos interiores ζ_k de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ a los puntos medios es decir . . .

$$\zeta_k = \left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) = \frac{\left(a + k\cdot\Delta x\right) + \left[a + (k-1)\cdot\Delta x\right]}{2} = a + k\cdot\Delta x - \frac{1}{2}\cdot\Delta x$$

La suma integral toma entonces la forma :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\cdot\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} e^{\left(a + k\cdot\Delta x - \frac{1}{2}\cdot\Delta x\right)}\cdot\Delta x = \Delta x\cdot e^{\left(a - \frac{\Delta x}{2}\right)}\cdot\sum_{k=1}^{n} e^{k\cdot\Delta x}$$

Ésta última sumatoria es una serie geométrica de la forma . . .

$$\sum_{k=1}^{n} a\cdot r^k = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^m = \boxed{a\cdot\left(\frac{r^{m+1} - 1}{r - 1}\right)}$$

es decir . . .

$$\sum_{k=1}^{n} e^{k\cdot\Delta x} = e^{\Delta x} + e^{2\cdot\Delta x} + e^{3\cdot\Delta x} + \ldots\ldots + e^{n\cdot\Delta x}$$

$$= e^{\Delta x} + \left(e^{\Delta x}\right)^2 + \left(e^{\Delta x}\right)^3 + \ldots\ldots + \left(e^{\Delta x}\right)^n$$

$$= e^{\Delta x}\cdot\left[1 + e^{\Delta x} + \left(e^{\Delta x}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(e^{\Delta x}\right)^{n-1}\right]$$

de modo que la expresión entre paréntesis es una serie geométrica con $a = 1$, $r = e^{\Delta x}$ y $m = n - 1$ de manera que su suma es . . .

$$\sum_{k=1}^{n} e^{k\cdot\Delta x} = e^{\Delta x}\cdot\left[\frac{\left(e^{\Delta x}\right)^{n} - 1}{e^{\Delta x} - 1}\right]$$

La suma integral toma entonces la forma :

$$s_n = \Delta x\cdot e^{\left(a - \frac{\Delta x}{2}\right)}\cdot e^{\Delta x}\cdot\left[\frac{\left(e^{n\cdot\Delta x}\right) - 1}{e^{\Delta x} - 1}\right]$$

pero dado que $n\cdot\Delta x = (b - a)$ queda . . .

$$s_n = e^{\left(a - \frac{\Delta x}{2} + \Delta x\right)}\cdot\left[\frac{e^{(b-a)} - 1}{\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)}\right] = e^{a}\cdot\left[e^{(b-a)} - 1\right]\cdot\left[\frac{e^{\frac{\Delta x}{2}}}{\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)}\right]$$

- Tomando el límite cuando $n \to \infty$, entonces $\Delta x \to 0$ y resulta . . .

$$\int_a^b e^x\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\left[e^{a}\cdot e^{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\left[\frac{e^{b-a} - 1}{\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)}\right]\right]$$

$$= e^{a}\cdot\left(e^{b-a} - 1\right)\cdot\left[\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} e^{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right)}\right] = \left(e^{b} - e^{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{1}\right) = e^{b} - e^{a}$$

Estos ejemplos deberían bastar para convencernos de que aún con funciones relativamente simples, el cálculo de una integral definida puede ser un problema muy complicado algebraicamente, o bien pueden empezar a persuadirnos de abandonar nuestros estudios sobre las integrales definidas y dedicarnos a otra cosa menos árida.

Pero.....! alto ¡ , antes de tomar una decisión equivocada e irreversible que cambie para siempre nuestra endeble excursión por el cálculo, recordemos que en el maravilloso mundo de las matemáticas surge una sorpresa cuando menos se espera.

8.2 ***Propiedades básicas de la integral definida.***

Como se pudo notar en los ejemplos anteriores, el cálculo directo de una integral definida como el límite de una suma integral, es un problema cuya dificultad crece con la complejidad de la función que se integra .

Afortunadamente existe una forma mucho más simple de evaluar una integral definida, que fué descubierta por *Isaac Newton y Wilhelm Leibniz*, *y que se basa en la propiedad fundamental de ser la integración el proceso inverso de la derivación* y en las siguientes propiedades que son válidas para dos funciones $f(x)$, $g(x)$ que sean continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$:

PROPIEDAD 1 .

Todo factor constante A ***se puede escribir fuera de una integral definida*** .

$$\boxed{\int_a^b A\cdot f(x)\,dx = A\cdot\int_a^b f(x)\,dx} \qquad (8.2)$$

DEMOSTRACIÓN .

Un factor A constante que aparezca en todos los términos de una sumatoria integral se puede factorizar de todos ellos y escribirse fuera de la suma :

$$\sum_{j=1}^{n} A\cdot f(\zeta_j)\cdot\Delta x_j = A\cdot f(\zeta_1)\,\Delta x_1 + A\cdot f(\zeta_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots\ldots + A\cdot f(\zeta_n)\cdot\Delta x_n$$

$$= A\cdot\left[\, f(\zeta_1)\cdot(\Delta x_1) + f(\zeta_2)\cdot(\Delta x_2) + \ldots\ldots + f(\zeta_n)\cdot(\Delta x_n)\right]$$

$$= A\cdot\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\cdot\Delta x_j$$

y como el límite de una constante por una función es el producto de la constante por el límite de tal función, se tiene que . . .

$$\lim_{\Delta x_j\to 0}\left(\sum_{j=1}^{n} A\cdot f(\zeta_j)\cdot\Delta x_j\right) = \boxed{\int_a^b A\cdot f(x)\,dx} = A\cdot\lim_{\Delta x_j\to 0}\left(\sum_{j=1}^{n} f(\zeta_j)\cdot\Delta x_j\right)$$

$$= \boxed{A\cdot\int_a^b f(x)\,dx}$$

PROPIEDAD 2 .

La integral definida de una suma de funciones continuas es igual a la suma algebraica de las integrales correspondientes .

$$\int_a^b [\, f\cdot(x) + g\cdot(x)\,]\, dx = \int_a^b f\cdot(x)\, dx + \int_a^b g\cdot(x)\, dx \qquad (8.3)$$

DEMOSTRACIÓN .

La suma integral se divide en dos partes y se aplica a cada una la definición de integral definida :

$$\int_a^b [\, f\cdot(x) + g\cdot(x)\,]\, dx = \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[\, f\cdot(\zeta_k) + g\cdot(\zeta_k)\right]\cdot \Delta x_k$$

$$= \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\zeta_k\right)\cdot \Delta x_k + \lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\zeta_k)\cdot \Delta x_k$$

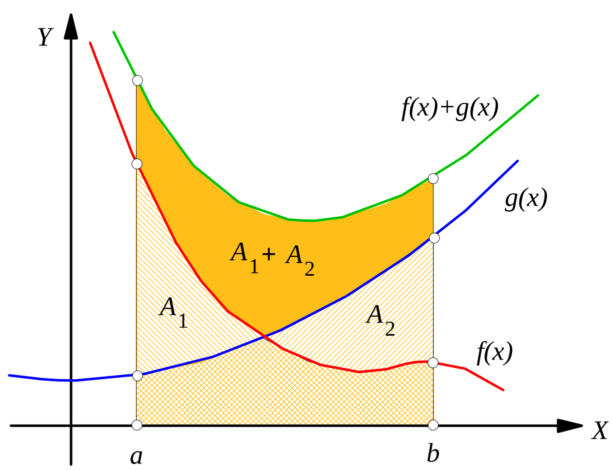
$$= \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Geométricamente, esta propiedad significa que, para los mismos límites de integración, la suma de las áreas bajo las curvas

$$y_1 = f(x) \quad ; \quad y_2 = g(x)$$

es igual que el área bajo la curva:

$$y_3 = f(x) + g(x)$$



PROPIEDAD 3 .

Para tres números reales a, b, c arbitrarios, se verifica la igualdad :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx \qquad (8.4)$$

DEMOSTRACIÓN .

Supóngase que $a < c < b$. Dividiendo entonces la suma integral en dos intervalos : $[a, c]$ y $[c, b]$ queda :

$$\sum_{(a,b)} f(\zeta_i)\cdot \Delta x_i = \left[\sum_{(a,c)} f(\zeta_i)\cdot \Delta x_i\right] + \left[\sum_{(c,b)} f(\zeta_i)\cdot \Delta x_i\right]$$

Al tomar el límite cuando $\Delta x \to 0$ y aplicando la definición de integral definida, se obtiene la propiedad (8.4).

Si $a < b < c$, entonces la propiedad que acabamos de demostrar permite escribir :

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

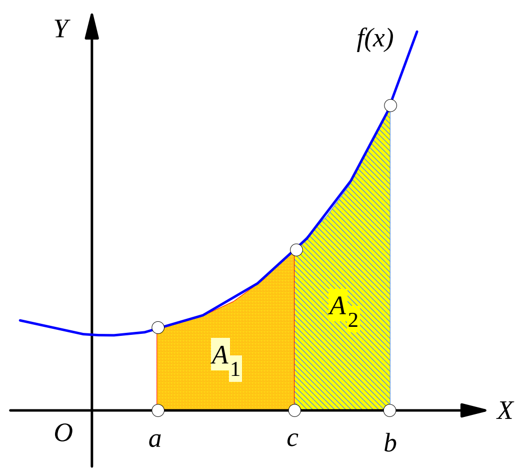
de donde se sigue que. . .

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx - \int_b^c f(x)\, dx$$

sin embargo . . .

$$\int_b^c f(x)\, dx = -\int_c^b f(x)\, dx$$

con lo cual se obtiene también en éste caso la propiedad (8.4).



La interpretación geométrica de esta propiedad es evidente y se puede apreciar como la suma de dos partes del área bajo la curva $y = f(x)$

PROPIEDAD 4 . ***Teorema del valor medio para integrales definidas*** .

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces existe un punto x en ese intervalo tal que :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = (b-a)\cdot f(x_0)} \quad \textbf{\textit{con}} \quad a \le x_0 \le b \qquad (8.5)$$

DEMOSTRACIÓN .

Si $f(x) = c$ donde c es una constante, el resultado es evidente por si mismo puesto que $f(x)$ *vale siempre* c de modo que x_0 puede ser cualquier valor para x comprendido en el intervalo $[a, b]$.

Si $f(x) \neq c$, sean m y M los valores *mínimo y máximo absolutos* respectivamente de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Entonces . . . $m \leq f(x) \leq M$ y como ya se ha probado antes, se cumple que . . .

$$m \cdot (b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot \Delta x_k \leq M \cdot (b-a)$$

Al tomar el límite en éstas desigualdades, cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene :

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} m \cdot (b-a) \leq \lim_{\Delta x_k \to 0} \left(\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \cdot \Delta x_k \right) \leq \lim_{\Delta x_i \to 0} M \cdot (b-a)$$

que por definición es la integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ . . .

$$m \cdot (b-a) \leq \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \leq M \cdot (b-a)$$

Al dividir entre $(b-a)$ éstas desigualdades, queda . . .

$$m \leq \left(\frac{1}{b-a} \right) \cdot \int_a^b f(x)\, dx \leq M$$

Dado que $f(x)$ es continua, necesariamente asume todos los valores numéricos reales comprendidos entre el mínimo m y el máximo M, y entre ellos *el número* $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$,

por eso existe por lo menos un valor x_0 en $[a, b]$ para el cual la función vale ese número en particular, es decir . . .

$$f(x_0) = \left(\frac{1}{b-a} \right) \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

y queda así demostrada ésta propiedad.

Por otra parte, si se considera en la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ al límite inferior fijo y al límite superior variable, entonces es obvio que ***la integral será una función de su límite superior***, puesto que geométricamente representa el área bajo la curva $y = f(x)$ comprendida entre $x = a$ y $x = b$, y por lo tanto tal área también variará cuando el límite superior cambie.

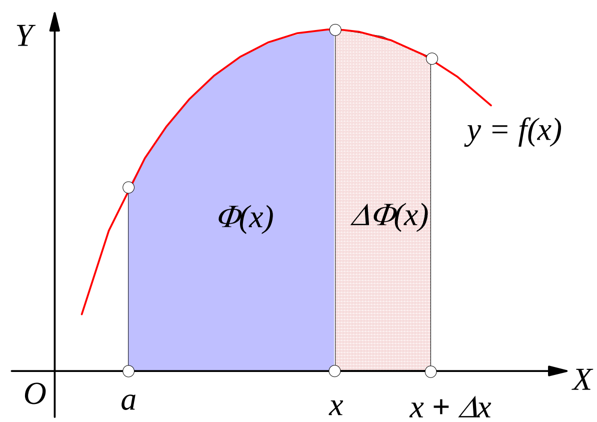
Sea x el límite superior de integración y sea $\Phi(x)$ al área correspondiente bajo la curva $y = f(x)$ comprendida entre los límites a y x, entonces . . .

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u)\, du$$

(se ha denotado la variable de integración por u, ya que *el valor de una integral definida sólo depende de los límites de integración y de la función que se integra , no del nombre dado a ésta ni a su variable independiente*).

Entonces la función $\Phi(x)$ cambiará en $\Delta\Phi(x)$ cuando x cambie en Δx.

Esta interpretación permite establecer la siguiente propiedad de las integrales definidas



PROPIEDAD 5 .

La derivada de una integral definida respecto a su límite superior es igual al integrando evaluado en tal límite

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(u)\, du\right) = f(x)} \qquad (8.6)$$

DEMOSTRACIÓN .

Apliquemos la regla general de 4 pasos para la derivación a la función $\Phi(x)$:

- Si $\Phi(x) = \int_a^x f(u)\, du$, el valor incrementado de $\Phi(x)$ es :

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(u)\, dx$$

- El incremento de la función es entonces :

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(u)\, du - \int_a^x f(u)\, du$$

pero por la propiedad 3 para una integral definida se deduce que :

$$\Delta\Phi(x) = \left(\int_a^x f(u)\,du + \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du\right) - \int_a^x f(u)\,du = \int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du$$

- El cociente de incrementos es :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot\left(\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du\right)$$

que se puede rescribir sumando y restando en el denominador la cantidad x como sigue:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{1}{(x+\Delta x)-x}\cdot\left(\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du\right)$$

Aplicando ahora la propiedad 4 para integrales definidas, con los límites de integración $a = x$ y $b = (x+\Delta x)$, se deduce que existe un valor x_0 en el intervalo $[x, x+\Delta x]$ tal que

$$\frac{1}{(x+\Delta x)-x}\cdot\left(\int_x^{x+\Delta x} f(u)\,du\right) = f(x_0)$$

- En el límite cuando $\Delta x \to 0$, necesariamente se cumple que $x_0 \to x$ dado que x_0 está siempre dentro del intervalo $[x, x+\Delta x]$. Por lo tanto :

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0)\right) = f(x)$$

y queda probada ésta propiedad. En otras palabras. . .

$$\textbf{si}\quad \Phi(x) = \int_a^x f(u)\,du \quad \textbf{entonces}\quad \frac{d}{dx}\left(\Phi(x)\right) = f(x)$$

De modo que $\Phi(x)$ es una integral indefinida o antiderivada de la función $f(x)$.

Una consecuencia de ésta demostración , es que *toda función* $f(x)$ *que sea continua siempre tiene una integral indefinida o función primitiva* $\Phi(x)$.

PROPIEDAD 6 . **Teorema Fundamental del Cálculo Integral .**

Si $f(x)$ ***es una función continua en el intervalo*** $[a, b]$ ***y si*** $F(x)$ ***es una integral indefinida de*** $f(x)$ ***, entonces :***

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (8.7)$$

Esta expresión se conoce como ***fórmula de integración de Newton- Leibniz*** .
Su importancia radica en que relaciona la integración indefinida, vista simplemente como la operación inversa de la derivación , con la integración definida vista como el límite de una suma integral.

Esto significa que *no es necesario calcular una integral definida de acuerdo a su definición fundamental como el límite de una suma integral, pues bastará con calcular una integral indefinida del integrando y evaluarla en los límites de integración* a *y* b .

DEMOSTRACIÓN.

Si $F(x)$ es una integral indefinida de $f(x)$, significa que $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ y según la propiedad 5 para una integral definida, se tiene que . . .

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

Además, dos integrales indefinidas de $f(x)$ sólo pueden diferir entre si por una constante C , de modo que una integral indefinida general para $f(x)$ es $F(x) + C = \int_a^x f(t)\,dt$

Haciendo $x = a$ en ésta expresión resulta. . .

$$F(a) + C = \int_a^a f(u)\,du$$

que geométricamente representa el área bajo un solo punto de la curva $y = f(x)$ y por lo tanto es cero. De aquí se deduce que $F(a) + C = 0$ es decir: $C = -F(a)$ y queda:

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx$$

Finalmente haciendo $x = b$, se obtiene la propiedad (8.7) o fórmula de Newton-Leibniz .

Con la fórmula de Newton-Leibniz ahora es posible realizar una integral definida sin recurrir a su definición fundamental, pues solo hay que *encontrar una integral indefinida para la función que se integra y evaluarla en los extremos del intervalo de integración* .

Desde la antigüedad (en tiempos de *Arquímedes*) se conocía ya un proceso análogo a la integral definida como límite de una suma integral ; pero las aplicaciones de ese método se limitaban a la geometría y a los casos mas sencillos. Con la fórmula de *Newton- Leibniz*, se amplia enormemente el campo de aplicación de la integral definida en diversas áreas de la ciencia y de la técnica .

Notación : Se escribirá la diferencia $F(b) - F(a)$ como : $F(x)\Big|_a^b$

de modo que la fórmula de *Newton-Leibniz* queda :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

Ya que $F(b) - F(a) = -[\,F\cdot(a) - F\cdot(b)\,]$, es posible escribir . . .

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

De modo que ***" la inversión de los límites de integración cambia el signo de una integral definida "***

un resultado que ya se había establecido anteriormente .

A manera de venganza y armados ahora con la fórmula de *Newton-Leibniz* , realicemos las integrales que penosamente calculamos antes considerándolas como el límite de una suma integral . . .

- $\int_a^b c\,dx$. La integral indefinida es $\int c\,dx = c\cdot x$, por eso $\int_a^b c\,dx = c\cdot b - c\cdot a = c\cdot(b-a)$
- $\int_0^b x^2\,dx$. La integral indefinida es $\int x\,dx = \frac{x^3}{3}$, por eso $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{b^3}{3}$
- $\int_1^3 x^3\,dx$. La integral indefinida es $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$, por eso $\int_1^3 x^3\,dx = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20$
- $\int_a^b x^3\,dx$. La integral indefinida es $\int e^x\,dx = e^x$, por eso $\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$

y lo que antes fué arduo y laborioso, ahora es una tarea muy simple.

Pero este no es el fin de la historia, ahora también es posible hacer integrales definidas tan complicadas como las técnicas de integración indefinida nos lo permitan . Por ejemplo . . .

- $$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$$

  porque la integral indefinida respectiva es : $\boxed{\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \arctan(x)}$

- Dado que : $\boxed{\int \left[sen^2\cdot(x)\right] dx = \int \frac{1}{2}\cdot[\,1-\cos\cdot(2\cdot x)\,]\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left(x - \frac{1}{2}\cdot sen(2\cdot x)\right)}$

  entonces : $$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[sen^2\cdot(x)\right] dx = \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot sen\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{1}{2}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\cdot sen\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

  $$= \left[\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\cdot\left(sen(\pi) + sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] = \frac{1}{8}\cdot\pi + \frac{1}{4}$$

- Dada la integral indefinida : $\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = 2\cdot\sqrt{1+x}}$

  entonces: $$\int_{0}^{3} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) dx = 2\cdot\sqrt{1+(3)} - 2\cdot\sqrt{1+(0)} = (4-2) = 2$$

- Dada la integral indefinida : $\boxed{\int \frac{x^3}{x^2+x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\frac{2\cdot x+1}{\sqrt{3}}\right)}$ entonces :

  $$\int_{\frac{-1}{2}}^{0} \left(\frac{x^3}{x^2+x+1}\right) dx = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) - \left(\frac{5}{8} + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\arctan(0)\right) = \frac{\pi}{3\cdot\sqrt{3}} - \frac{5}{8}$$

- Dada la integral indefinida : $\boxed{\int \left(\frac{1}{3+cos(2\cdot x)}\right) dx = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot arctan\left(\frac{tan(x)}{\sqrt{2}}\right)}$ entonces . . .

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3+cos(2\cdot x)}\right) dx = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\left(arctan\left(\frac{tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right) - arctan\left(\frac{tan(0)}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\left[arctan(\infty) - arctan\cdot(0)\right] = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \boxed{\frac{\pi}{4\cdot\sqrt{2}}}$$

- De la integral indefinida : $\boxed{\int \left(\frac{1}{25-x^2}\right) dx = \frac{1}{2\cdot(5)}\cdot ln\left(\frac{5+x}{5-x}\right)}$ se sigue que . . .

$$\int_3^4 \left(\frac{1}{25-x^2}\right) dx = \frac{1}{2\cdot(5)}\cdot\left[ln\left[\frac{5+(4)}{5-(4)}\right] - ln\left[\frac{5+(3)}{5-(3)}\right]\right] = \frac{1}{10}\cdot\left(ln\left(\frac{9}{1}\right) - ln\left(\frac{8}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\left(ln\left(\frac{9}{4}\right)\right) = \frac{1}{10}\cdot ln\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = \boxed{\frac{1}{5}\cdot ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

TEOREMA : 1

Dadas las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ continuas y derivables entonces . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(u)\, du\right) = f(g(x))\cdot\left(\frac{dg(x)}{dx}\right) - f(h(x))\cdot\left(\frac{dh(x)}{dx}\right) \tag{8.8}$$

DEMOSTRACIÓN.

Al dividir el intervalo de integración $[h(x), g(x)]$ en dos partes la integral definida se escribe como . . .

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(u)\, du = \int_{h(x)}^{a} f(u)\, du + \int_{a}^{g(x)} f(u)\, du$$

e invirtiendo ahora los límites de integración en la primera integral definida de la derecha resulta . . .

$$\int_{h(x)}^{g(x)} f(u)\,du = -\int_{a}^{h(x)} f(u)\,du + \int_{a}^{g(x)} f(u)\,du$$

Derivando ahora respecto a x ambos miembros de ésta igualdad se obtiene . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(u)\,du\right) = \frac{d}{dx}\cdot\left(-\int_{a}^{h(x)} f(u)\,du + \int_{a}^{g(x)} f(u)\,du\right)$$

$$= \frac{d}{dh}\cdot\left(-\int_{a}^{h(x)} f(u)\,du\right)\cdot\left(\frac{dh}{dx}\right) + \frac{d}{dg}\cdot\left(\int_{a}^{g(x)} f(u)\,du\right)\cdot\left(\frac{dg}{dx}\right)$$

donde se ha aplicado la "regla de la cadena" para derivar una función compuesta.
Se sigue ahora de la propiedad 5 para una integral definida que. . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\int_{a}^{h(x)} f(u)\,du\right) = f(h(x)) \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}\cdot\left(\int_{a}^{g(x)} f(u)\,du\right) = f(g(x))$$

por lo tanto . . .

$$\frac{d}{dx}\cdot\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(u)\,du\right) = -f(h)\cdot\left(\frac{dh}{dx}\right) + f(g)\cdot\left(\frac{dg}{dx}\right)$$

y queda demostrado

Ejemplo 5. Obtener la derivada de las siguientes integrales definidas

a) $\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{4\cdot x} \cos(u)\,du\right)$ b) $\frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{\cos(x)} \left(\frac{1}{4+u^2}\right) du\right]$

Solución : a) Aquí $h(x) = x^2$, $g(x) = 4\cdot x$, $f(x) = \cos(x)$ son todas funciones continuas para todo valor de x, así que una aplicación directa de la fórmula (8.8) da . . .

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{4\cdot x} \cos(u)\,du\right) = \cos(4\cdot x)\cdot\frac{d}{dx}\cdot(4\cdot x) - \cos\left(x^2\right)\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left(x^2\right)$$

$$= 4\cdot\cos(4\cdot x) - (2\cdot x)\cdot\cos\left(x^2\right)$$

b) Aquí $h(x) = 1$, $g(x) = cos(x)$, $f(x)$ son funciones continuas de x, asi que la aplicación del teorema (8.8) da . . .

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{1}^{cos(x)} \left(\frac{1}{4+u^2}\right) du\right] = \left[\frac{1}{4+cos^2\cdot(x)}\right]\cdot\frac{d}{dx}cos(x) - \left(\frac{1}{4+1^2}\right)\cdot\frac{d}{dx}(1)$$

$$= \boxed{\frac{-sen(x)}{4+cos^2\cdot(x)}}$$

8.3 ***Cambio de variable en la integral definida*** **.**

Cuando se integra por substitución, algunas veces es complicado rescribir el resultado de la integración en términos de la variable inicial .
Al hacer una substitución o cambio de variable en una integral definida podemos evitarnos el procedimiento de restituir la variable original si se cambian también los límites de integración, de tal manera que sean los límites correspondientes a la variable que se substituye .

TEOREMA : 2

Si $f(x)$ *es una función continua en el intervalo cerrado* $[a, b]$ *y en la integral definida:*

$\int_a^b f(x)\, dx$ *se hace la substitución* $x = \varphi(u)$ *tal que :*

- $a = \varphi(\alpha)$
- $b = \varphi(\beta)$
- $\varphi(u)$ *y* $\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$ *sean continuas en el intervalo* $[\alpha, \beta]$
- $f(\varphi(u))$ *esté definida y es continua en* $[\alpha, \beta]$

entonces la integral definida toma la ***forma equivalente*** *:* $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\cdot\left(\frac{d\varphi}{du}\right) du$

DEMOSTRACIÓN

Si $F(x)$ es una integral indefinida o antiderivada de $f(x)$, entonces $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ y dado que $x = \varphi(u)$, de la *"regla de la cadena"* para derivadas, se sigue que . . .

$$\frac{dF(\varphi(u))}{dx} = \left[\frac{dF(\varphi(u))}{du}\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)\right] = f(\varphi(u))$$

que por la derivada de una función inversa: $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{dx}{du}\right)} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{d\varphi}{du}\right)}$ se puede escribir como:

$$\frac{dF(\varphi(u))}{du}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{d\varphi}{du}\right)} = f(\varphi(u)) \quad \text{es decir :} \quad \frac{dF(\varphi(u))}{du} = f(\varphi(u))\cdot\left(\frac{d\varphi}{du}\right)$$

de tal manera que integrando respecto a u ambos miembros de ésta igualdad resulta. . .

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{dF(\varphi(u))}{du}\right)du = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\cdot\left(\frac{d\varphi}{du}\right)du$$

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\cdot\left(\frac{d\varphi}{du}\right)du$$

donde se ha aplicado la fórmula de *Newton-Leibniz* al miembro izquierdo , es decir se obtiene . . .

$$F(b) - F(a) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\cdot\left(\frac{d\varphi}{du}\right)du$$

Por otra parte, por ser $F(x)$ una integral indefinida de $f(x)$, también es cierto que . . .

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

así que ambas integrales dan el mismo resultado y queda demostrado que :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u))\cdot\left(\frac{d\varphi}{du}\right)du$$

Ejemplo 6. Calcular la integral definida $\displaystyle\int_{0}^{16}\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\right)dx$

Solución : La integral indefinida se simplifica con la substitución $x = \varphi(u) = u^4$ y por lo tanto:

si $x = 0$ entonces $u = \sqrt[4]{0} = 0$

si $x = 16$ entonces $u = \sqrt[4]{16} = 2$

y $\dfrac{d\varphi}{du} = 4 \cdot u^3$

De modo que $\varphi(u)$ y $\dfrac{d\varphi}{du}$ son funciones continuas en el intervalo $[0,2]$. La función compuesta $f(\varphi(u)) = \dfrac{u}{1+u^2}$ está definida también y es continua en ese intervalo.

Por lo tanto, se satisfacen todas las condiciones del teorema y la integral se transforma en:

$$\int_0^{16} \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{u}{1+u^2} \right) \cdot \left(4 \cdot u^3\right) du$$

y se resuelve como . . .

$$= 4 \cdot \int_0^2 \frac{u^4}{1+u^2}\, du = 4 \cdot \int_0^2 \left[u^2 - 1 + \frac{1}{\left(1+u^2\right)} \right] du$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{u^3}{3} - u + \arctan(u) \right) \Bigg|_0^2$$

esto es . . .

$$\int_0^{16} \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right) dx = 4 \cdot \left(\frac{2^3}{3} - 2 + \arctan(2) \right) - 4 \cdot \left(\frac{0^3}{3} - 0 + \arctan(0) \right)$$

$$= \frac{8}{3} + 4 \cdot \arctan(2)$$

Nótese que éste procedimiento es más simple que restituir la variable inicial en el resultado de la integración

Ejemplo 7. Calcular la integral definida $\displaystyle\int_0^a x^2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Solución : Siguiendo la técnica por substitución trigonométrica , sea $x = \varphi(\theta) = a\cdot sen(\theta)$, de donde se obtiene que :

si $x = 0$ entonces $\theta = arcsen\left(\frac{0}{a}\right) = 0$

si $x = a$ entonces $u = arcsen\left(\frac{a}{a}\right) = \frac{\pi}{2}$

y $\frac{d\varphi}{d\theta} = a\cdot cos(\theta)$

de modo que $\varphi(\theta)$ y $\frac{d\varphi}{d\theta}$ son funciones continuas en el intervalo cerrado $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Además la función compuesta $f(\varphi(\theta)) = (a\cdot sen(\theta))^2\cdot\sqrt{a^2\cdot[1 - sen^2\cdot(\theta)]}$ está definida y es continua en ese intervalo.

Se satisfacen todas las condiciones del teorema y la integral se transforma en . . .

$$\int_0^a x^2\cdot\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(\theta))\cdot\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a^3\cdot sen(\theta)^2\cdot cos(\theta)\right)\cdot(a\cdot cos(\theta))\,du$$

$$= a^4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\cdot(\theta)\cdot cos^2\cdot(\theta)\,d\theta = \frac{a^4}{4}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\cdot(2\cdot\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{a^4}{8}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos(4\cdot\theta))\,d\theta$$

$$= \frac{a^4}{8}\cdot\left(\theta - \frac{1}{4}\cdot sen(4\cdot\theta)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^4}{8}\cdot\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot sen\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) - 0\right]$$

$$= \frac{\pi\cdot a^4}{16}$$

EJERCICIOS 8.1

Resolver las siguientes integrales definidas usando la fórmula de *Newton-Leibniz*

1. $\displaystyle\int_1^2 \left(x^2 - 2\cdot x + 3\right) dx$

2. $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\right) dy$

3. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 + 4\cdot x + 5}\right) dx$

4. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{z^3}{z^8 + 1}\right) dz$

5. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tan(x)\, dx$

6. $\displaystyle\int_3^{29} \left[\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + 3}\right] dx$

7. $\displaystyle\int_0^{ln(2)} \left(\sqrt{e^x - 1}\right) dx$

8. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1 + x^2}\right) dx$

9. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^{2\cdot\pi} \left(\frac{1}{5 - 3\cdot cos(x)}\right) dx$

11. Para la integral definida : $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ hacer una substitución lineal de la forma $x = (A\cdot u + B)$ y determinar las constantes A y B tales que el intervalo de integración se transforme en $[0, 1]$.

Demostrar que . . .

12. si $f(x)$ es una función *par* entonces : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\, dx$

13. si $f(x)$ es una función *impar* entonces : $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$

14. si $f(x)$ es *periódica* de periodo T entonces $\displaystyle\int_0^T f(x)\, dx = \int_a^{a+T} f(x)\, dx$ para *cualquier* valor de la constante a

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\cdot\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx$

16. $\int_0^1 \left(\frac{1}{arccos(x)}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sen(x)}{x}\right) dx$

17. Haciendo uso de la definición de una integral definida como el límite de una suma integral, demostrar que:

a) $\int_1^4 x^2\, dx = 21$ b) $\int_0^1 e^x\, dx = e^x - 1$

Respuestas Ejercicio 8.1

1. $\frac{7}{3}$ 2. $\frac{7}{4}$ 3. $arctan(3) - arctan(2)$

4. $\frac{\pi}{16}$ 5. 0 6. $\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\pi + 8$

7. $2 - \frac{\pi}{2}$ 8. $\frac{\pi}{2}$ 9. $\frac{\pi}{3}$ 10. $\frac{\pi}{2}$

11. Cuando $x = a$ la variable u debe ser igual a 0 , así que la substitución $x = (A\cdot u + B)$ queda

$a = A\cdot(0) + B$ esto es $a = B$ (1)

Cuando $x = b$ la variable u debe ser igual a 1, asi que la substitución $x = (A\cdot u + B)$ queda

$b = A\cdot(1) + B$ esto es $b = A + B$ (2)

Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) para A y B se obtiene : $A = (b - a)$ y $B = a$.

La substitución buscada es entonces : $x = (b - a)\cdot u + a$

12. Si $f(x)$ es par entonces $f(x) = f(-x)$. Además, por la propiedad 3 para integrales definidas. . .

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = \int_{-a}^{0} f(x)\, dx + \int_0^a f(x)\, dx$$

Haciendo el cambio de variable $x = -u$ en la primera integral de la derecha :

si $x = -a$ entonces $u = a$

si $x = 0$ entonces $u = 0$

además $\frac{dx}{du} = -1$

la función $x = -u$ y su derivada son continuas y derivables, asi que . . .

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)\cdot(-1)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

pero $f(-u) = f(u)$ por ser f una función par , de modo que . . .

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

pero al invertir los límites de integración, cambia el signo de una integral definida, asi que en la primera integral de la derecha se obtiene :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

aunque el nombre de la variable de integración sea distinto, las dos integrales de la derecha son exactamente iguales porque se integra la misma función entre los mismos límites, de modo que :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

y queda demostrado.

13. Si $f(x)$ es *impar* , entonces $-f(x) = f(-x)$ y bajo el mismo cambio de variable $x = -u$ que en el problema anterior, la integral queda . . .

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)\cdot(-1)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} (-f(u))\cdot(-1)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

donde se ha considerado en la primera integral de la derecha que $f(x)$ es una función impar, asi que:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

invirtiendo los límites de integración en la primera integral, resulta . . .

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

y queda demostrado.

14. Si $f(x)$ es una función *periódica* entonces $f(x) = f(x+T)$ y $f(x) = f(x-T)$.

Bajo el cambio de variable: $x = (u-T)$ se obtiene que . . .

si $x = 0$ entonces $u = T$

si $x = a$ entonces $u = a+T$

por lo tanto . . .

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(u-T)\,du$$

pero por ser $f(u-T) = f(u)$ resulta . . . $\int_0^a f(x)\,dx = \int_T^{a+T} f(u)\,du$ (1)

Por otra parte, por la propiedad 3 para integrales definidas :

$$\int_0^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

esto es . . .

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

Substituyendo ahora el resultado (1) en la primera integral de la izquierda, se obtiene. . .

$$\int_T^{a+T} f(u)\,du + \int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

De éste modo se cancela la primera integral de la izquierda con la segunda integral de la derecha y queda asi demostrada la propiedad pedida.

8.4 Integrales Impropias

Algunas veces al realizar una integral definida puede suceder que :

- *el integrando tenga uno o más puntos de discontinuidad dentro del intervalo de integración* $[a, b]$
- *alguno de los límites de integración sea infinito.*

En tales casos la integral definida se llama *impropia* y se evalúa como sigue :

Integrado discontinuo . Si la función $f(x)$ que se integra es continua en el intervalo $[a, b]$, excepto en uno de los puntos interiores del intervalo, es decir es continua en $a \le x < c$ y $c < x \le b$, entonces se calcula su integral definida aproximándose infinitamente a la discontinuidad por la izquierda y por la derecha , como sigue . . .

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \right) + \lim_{\eta \to 0} \left(\int_{c+\eta}^b f(x)\,dx \right) \qquad (8.9)$$

Si los dos límites del lado derecho existen y son finitos, se dice que la integral impropia es convergente. Gráficamente esto significa que el área bajo la curva $y = f(x)$ es finita aunque la función tienda a infinito en uno de los puntos de su dominio . En caso contrario, la integral se llama divergente y el área bajo la curva es infinita .

Cuando $f(x)$ se hace discontinua en uno de los extremos de integración, es decir en $c = a$ o en $c = b$, la definición anterior es simplemente :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \right) \qquad (\text{Si } f(x) \text{ es discontinua en } x = b)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right) \qquad (\text{Si } f(x) \text{ es discontinua en } x = a)$$

Límites de integración infinitos . Si la función $f(x)$ que se integra es continua pero los límites de integración son infinitos se define :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to -\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{a} f(x)\,dx \right) + \lim_{\eta \to \infty} \left(\int_a^{\eta} f(x)\,dx \right) \qquad (8.10)$$

Si ambos límites existen y son finitos la integral es convergente . En caso contrario será divergente .

Si sólo un extremo de integración es infinito, la definición se reduce al caso correspondiente :

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\eta \to \infty} \left(\int_a^{\eta} f(x)\,dx \right) \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to -\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{a} f(x)\,dx \right)$$

Ejemplo 8. Calcular la integral definida $\displaystyle\int_0^{3\cdot a} \left[\frac{2\cdot x}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}\right] dx$

Solución : El integrando es discontinuo en $x = a$ y en $x = -a$, sin embargo sólo el primer punto queda dentro del intervalo de integración $[0, 3\cdot a]$.
La integral es impropia y para calcularla se usará la definición (8.9) :

$$\int_0^{3\cdot a} \frac{2\cdot x}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{a-\varepsilon} \frac{2\cdot x}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}\,dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{3\cdot a} \frac{2\cdot x}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}\,dx$$

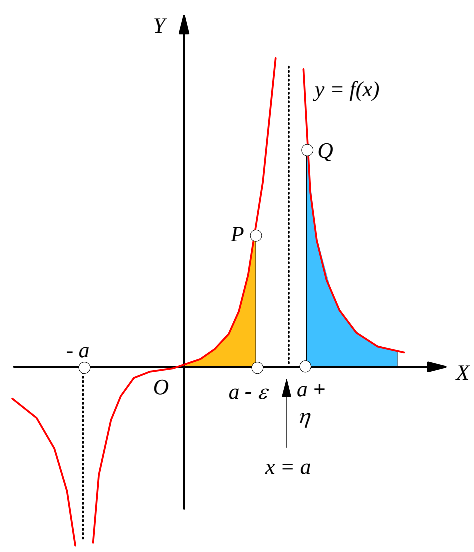
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[3\cdot\sqrt[3]{(x^2-a^2)}\right]\Bigg|_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\eta\to 0}\left[3\cdot\sqrt[3]{(x^2-a^2)}\right]\Bigg|_{a+\eta}^{3\cdot a}$$

evaluando . . .

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[3\cdot\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2-a^2} + 3\cdot\sqrt[3]{a^2}\right] + \lim_{\eta\to 0}\left[3\cdot\sqrt[3]{(a+\eta)^2-a^2} + 3\cdot\sqrt[3]{(8\cdot a^2)}\right]$$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{a^2} + 6\cdot\sqrt[3]{a^2} = \boxed{9\cdot\sqrt[3]{a^2}}$$

La recta $x = a$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{2\cdot x}{\sqrt[3]{(x^2-a^2)^2}}$ y como se puede apreciar en su gráfica , cuando el punto P se desplaza hacia la derecha sobre la curva, el punto correspondiente $x = (a-\varepsilon)$ sobre el eje X tiende al valor a por la izquierda y el área bajo la curva en ésta parte se aproxima al valor $3\cdot\sqrt[3]{a^2}$.
De manera similar, cuando el punto Q se mueve hacia la izquierda , él área bajo ésta parte de la curva se aproxima cada vez más al valor $6\cdot\sqrt[3]{a^2}$.



Ejemplo 9. Calcular la integral definida $\displaystyle\int_0^{2\cdot a} \frac{1}{(x-a)^2}\,dx$

Solución : La función del integrando $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$ es discontinua en $x = a$, valor que está dentro del intervalo de integración $[0, 2\cdot a]$, lo cual hace a la integral impropia .
Aplicando la definición (8.9) resulta . . .

$$\int_0^{2\cdot a} \frac{1}{(x-a)^2}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{1}{(x-a)^2}\,dx + \lim_{\eta\to 0} \int_{a+\eta}^{2\cdot a} \frac{1}{(x-a)^2}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-\left(\frac{1}{x-a}\right)\right]\Bigg|_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\eta\to 0} \left[-\left(\frac{1}{x-a}\right)\right]\Bigg|_{a+\eta}^{2\cdot a}$$

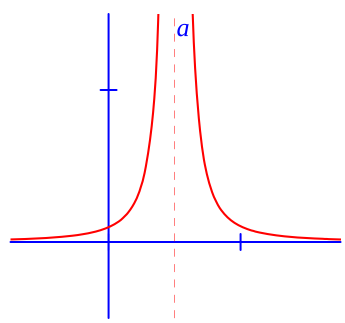
evaluando . . .

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{a}\right) + \lim_{\eta\to 0} \left[-\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{\eta}\right]$$

En éste caso los límites no existen por lo que la integral es *divergente.*

La gráfica de ésta función es muy parecida a la del ejemplo anterior ; sin embargo en éste caso no existe la integral.

El área bajo la curva del ejemplo anterior es finita a pesar de que la función tiende al infinito en $x = a$, la de éste ejemplo en cambio es infinita.



Sería un grave error resolver ésta integral por integración directa (ignorando la discontinuidad en el intervalo de integración) como sigue . . .

$$\int_0^{2\cdot a} \frac{1}{(x-a)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{(x-a)}\right]\Bigg|_0^{2\cdot a}$$

evaluando . . .

$$\int_0^{2\cdot a} \frac{1}{(x-a)^2}\,dx = \left[\frac{-1}{(2\cdot a)-a}\right] - \left[\frac{-1}{(0)-a}\right] = -\left(\frac{2}{a}\right)$$

Éste resultado es absurdo ya que la función $f(x)$ siempre es positiva en el intervalo $[0, 2\cdot a]$ y geométricamente es imposible que el área bajo la curva sea negativa. Este es un indicador de que no se realizó la integración en forma correcta.

Ejemplo 10. Calcular la integral $\int_{-\infty}^{0} e^{2\cdot x}\,dx$

Solución : El límite inferior es infinito, asi que aplicando la definición (8.10) resulta . . .

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2\cdot x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to(-\infty)} \left(\int_{\varepsilon}^{0} e^{2\cdot x}\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\to(-\infty)} \left(\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{0}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to(-\infty)} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2\cdot\varepsilon}}{2}\right) = \frac{1}{2} - 0$$

Considérese ahora dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ que son continuas en todo valor de x excepto en $x = c$. Se puede demostrar entonces que . . .

TEOREMA 3

Si $\int_a^c g(x)\,dx$ *es convergente entonces* $\int_a^c f(x)\,dx$ *también es convergente,*

siempre que $0 \le f(x) \le g(x)$.

TEOREMA 4

Si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *es convergente entonces* $\int_a^b f(x)\,dx$ *también es convergente .*

cuando $f(x)$ *sea una función de signo variable en el intervalo* $[a, b]$ *y discontinua sólo en el punto* $x = b$

Ejemplo 11. ¿ Es convergente o no la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^3+2\cdot x}}\,dx$?

Solución : El integrando es discontinuo en el límite inferior de integración y comparándolo con la función más simple $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ se tiene que $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > \dfrac{1}{\sqrt{x^3+2\cdot x}}$.

Además la integral impropia . . .

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{0+\varepsilon}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx\right] = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\cdot\sqrt{(1)} - 2\sqrt{(\varepsilon)}\right] = 2$$

existe (*es convergente*) y por lo tanto, de acuerdo al teorema 3, la integral de la función dada también es convergente. Es decir, aún cuando la integración de la función dada sea muy difícil, al menos sabemos que tiene un valor finito.

Ejemplo 12. ¿ Es convergente o no la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{sen(x)}{x^3}\,dx$?

Solución : El integrando es una función de signo variable en el intervalo de integración $[1, \infty)$, y por otra parte, es claro que. . .

$$\left|\frac{sen(x)}{x^3}\right| < \left|\frac{1}{x^3}\right|$$

Además en el intervalo $[1, \infty)$ se cumple que $\left|\dfrac{1}{x^3}\right| = \dfrac{1}{x^3}$

Por otra parte la integral impropia . . .

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x^3}\right) dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\int_1^\varepsilon \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left[\frac{-1}{2\cdot(\varepsilon)^2} - \frac{-1}{2\cdot(1)^2}\right] = 0 + \frac{1}{2}$$

es convergente, así que la integral $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{sen(x)}{x^3}\right| dx$ también lo es y por el teorema 4 se sigue que la integral dada también converge.

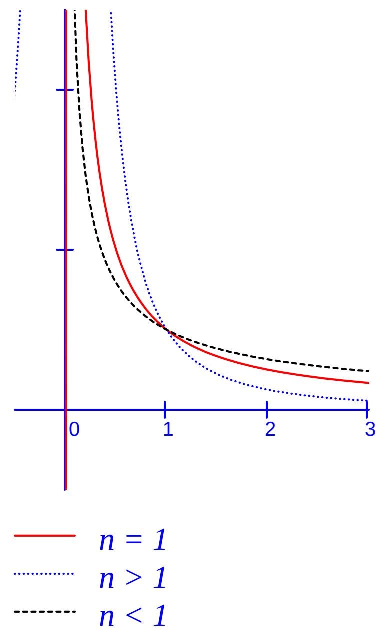
Ejemplo 13. ¿ Para qué valores de n existe la integral $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) dx$?

Solución : Nótese que para $n \neq 1$ . . .

$$\int_1^b \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{b^{(1-n)} - 1}{1-n}$$

así que :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b^{(1-n)} - 1}{1-n}\right]$$



Si $b > 1$ y $n > 1$ entonces $b^{1-n} \to 0$
es decir, la integral converge en este caso
al valor $\frac{1}{n-1}$

Si $b > 1$ y $n < 1$, entonces $b^{1-n} \to \infty$ y la integral diverge .

Cuando $n = 1$, se tiene . . . $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = ln(\infty) - ln(1) = \infty$

por lo tanto la integral inicial diverge si $n \leq 1$ y converge si $n > 1$.

8.5 ***Métodos numéricos para calcular integrales definidas en forma aproximada*** .

Frecuentemente, debido a la limitación de las técnicas de integración, no es posible expresar el resultado de una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ en términos de funciones elementales. En éstos casos el valor de la integral definida correspondiente $\int_a^B f(x)\,dx$ se puede calcular aunque sea en forma aproximada utilizando un método numérico .

Analizaremos dos métodos aproximados, ambos basados en la interpretación geométrica de una integral definida, como el área bajo la curva $y = f(x)$.

Dividamos el intervalo de integración $[a, b]$ sobre el eje X en n *partes iguales* mediante los puntos:

$$a = x_0 \;,\quad x_1 \;,\quad x_2 \;,\; \ldots \;,\; x_{n-1} \;,\quad x_n = b$$

Cada una de esas partes tiene entonces la longitud : $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$

Los valores x_k , junto con los valores correspondientes de la función $y_k = f(x_k)$, determinan los siguientes puntos sobre la curva . . .

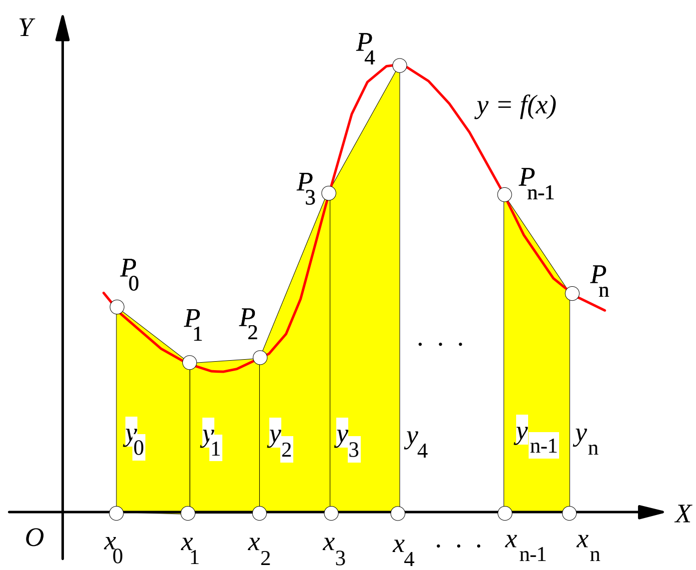
$$P_0 = (x_0, y_0) \;,\quad P_1 = (x_1, y_1) \;,\quad P_2 = (x_2, y_2) \;, \ldots ,\; P_n = (x_n, y_n)$$

A unir con líneas rectas éstos puntos se forman n *trapecios,* todos ellos con la misma "altura" Δx .

Un trapecio es un cuadrilátero con dos lados paralelos (las bases) , cuya área A se calcula como :

$$A = \left(\frac{B+b}{2} \right) \cdot h$$

donde h es la altura del trapecio, B y b son las longitudes de sus lados paralelos o bases.



La suma de las áreas de todos los trapecios es una medida aproximada del área bajo la curva $y = f(x)$ y por lo tanto, también es una medida aproximada del valor de la integral definida de $f(x)$, esto es . . .

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\cdot\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\cdot\Delta x + \frac{y_2+y_3}{2}\cdot\Delta x + \ldots\ldots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot\Delta x$$

Se puede simplificar la suma de la derecha notando que todos los valores y_k se repiten una vez a excepción del primero y el último, por lo cual . . .

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \boxed{\Delta x\cdot\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)}$$

Este resultado se conoce como ***fórmula de los trapecios*** y permite obtener el valor aproximado de una integral definida, de un modo muy sencillo.

Debe observarse que cuanto mayor sea el número arbitrario n de trapecios, tanto más cercano será el valor aproximado al valor real de la integral definida.

Fórmula de Simpson .

Dividamos ahora el intervalo de integración $[a,b]$ en *un número par de partes iguales* . La idea ahora es unir los puntos P_0 , P_1 , P_2 , ..., P_n sobre la curva $y = f(x)$ con arcos parabólicos, los cuales se ajustarán mejor al contorno de la curva que las líneas rectas del método de los trapecios.

Para desarrollar ésta idea, primero es necesario calcular el área bajo un arco parabólico correspondiente a dos intervalos adyacentes $[x_k, x_{k+1}]$ y $[x_{k+1}, x_{k+2}]$ que pase por los tres puntos :

$$M_k(x_k, y_k)\ ,\quad M_{k+1}(x_{k+1}, y_{k+1}) \quad \text{y} \quad M_{k+2}(x_{k+2}, y_{k+2})$$

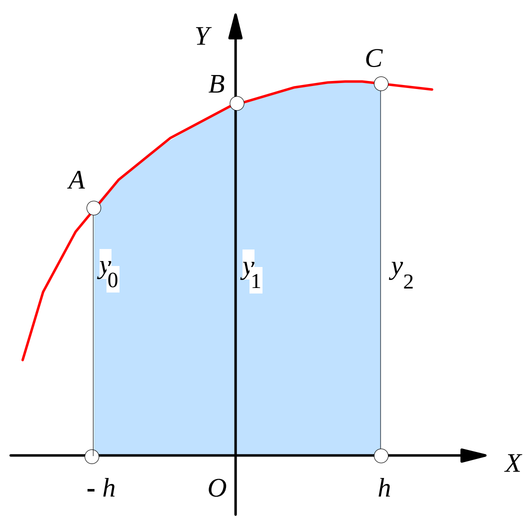
La ecuación general para una parábola vertical es:

$$y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

y una condición necesaria es que pase por los puntos

$$A(-h, y_0)\ ,\ B(0, y_1) \ \text{y}\ C(h, y_2)$$

con A y C situados simétricamente respecto al eje Y, se tiene asi que. . .



$$\text{para } x = -h \quad ; \quad y_0 = a\cdot(-h)^2 + b\cdot(-h) + c$$

$$\text{para } x = 0 \quad ; \quad y_1 = a\cdot(0)^2 + b\cdot(0) + c$$

$$\text{para } x = h \quad ; \quad y_2 = a\cdot(h)^2 + b\cdot(h) + c$$

El área de éste segmento parabólico se calcula por medio una integral definida :

$$\int_{-h}^{h} \left(a\cdot x^2 + b\cdot x + c\right) dx = \left(\frac{1}{3}\cdot a\cdot h^3 + \frac{1}{2}\cdot b\cdot h^2 + c\cdot h\right) - \left(\frac{-1}{3}\cdot a\cdot h^3 + \frac{1}{2}\cdot b\cdot h^2 - c\cdot h\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(2\cdot a\cdot h^2 + 6\cdot c\right)$$

Pero de las ecuaciones para los puntos A , B y C se obtiene : $2\cdot a\cdot h^2 + 6\cdot c = \left(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2\right)$

por lo cual el área del "trapecio parabólico" es $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2\right)$

Esta expresión no depende de x, sólo de las ordenadas y_0 , y_1 , y_2 lo cual significa que no cambia si la parábola se desplaza horizontalmente sobre el eje X , asi que es posible escribir . . .

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left(\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx\right) + \left(\int_{x_2}^{x_4} f(x)\, dx\right) + \ldots\ldots + \left(\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\, dx\right)$$

y por lo tanto, aproximando las integrales de la derecha por el área de los segmentos parabólicos correspondientes, se obtiene un valor aproximado de la integral definida que es una mejor aproximación que la que se pudiera obtener con el método de los trapecios :

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}\cdot\left(y_0 + 4\cdot y_1 + y_2\right) + \frac{\Delta x}{3}\cdot\Delta x\cdot\left(y_2 + 4\cdot y_3 + y_4\right) + \ldots\ldots + \frac{\Delta x}{3}\cdot\Delta x\cdot\left(y_{n-2} + 4\cdot y_{n-1} + y_n\right)$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}\cdot\left(y_0 + 4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 4\cdot y_3 + \ldots\ldots + 2\cdot y_{n-2} + 4\cdot y_{n-1} + y_n\right)$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}\cdot\left[y_0 + 2\cdot\left(y_2 + y_4 + \ldots\ldots + y_{n-2}\right) + 4\cdot\left(y_1 + y_3 + \ldots.. + y_{n-1}\right) + y_n\right]$$

que se conoce como ***fórmula de Simpson*** para calcular el valor aproximado de una integral definida .

Nótese que en ésta fórmula los valores pares de y_k se multiplican por 2 y los impares se multiplican por 4 , a excepción del primero : y_0 y del último : y_n .

Ejemplo 14. Calcular las siguientes integrales por la fórmula de los trapecios y por la fórmula de Simpson, tomando el mismo número de partes de división del intervalo de integración.

a) $\displaystyle\int_0^{10} x^3\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \sqrt{\left(20+x^4\right)}\,dx$

Solución : a) Tomando $n = 10$ entonces $\Delta x = \dfrac{10-0}{10} = 1$ y resultan los siguientes valores para x e $y = f(x) = x^3$ ...

$x =$	$f(x) =$
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	$1\cdot 10^3$

Aplicando la fórmula de los trapecios se obtiene :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\cdot\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\text{........}+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$$

$$\int_0^{10} x^3\,dx \approx 1\cdot\left(\frac{0}{2}+1+8+27+\text{.......}+729+\frac{1000}{2}\right) = 2525$$

La fórmula de Simpson da en cambio :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\cdot\left[y_0+2\cdot\left(y_2+\text{......}+y_{n-2}\right)+4\cdot\left(y_1+\text{.....}+y_{n-1}\right)+y_n\right]$$

$$\int_0^{10} x^3\,dx \approx \frac{1}{3}\cdot[0+2\cdot(8+64+216+512)+4\cdot(1+27+125+343+729)+1000]$$

$$= \boxed{2500}$$

Ésta integral se puede realizar en forma exacta: $\displaystyle\int_0^{10} x^3\,dx = \frac{10^4}{4}-\frac{0^4}{4} = 2500$

De modo que la fórmula de Simpson dá en éste caso un *resultado exacto !* .

b) En la integral $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$ consideremos $n = 6$, entonces $\Delta x = \dfrac{(4-0)}{6} = \dfrac{2}{3}$,

de modo que quedan los siguientes valores para x e $y = f(x)$ . . .

$x =$	$f(x) =$
0	0.5
0.667	0.4825
1.333	0.3962
2	0.2887
2.667	0.2087
3.333	0.1561
4	0.1213

Aplicando la fórmula de los trapecios

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x\cdot\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots.. + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

se obtiene:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}\,dx \approx \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{0.5}{2} + 0.4825 + 0.3962 + \ldots.. + \frac{0.1213}{2}\right) = \boxed{1.2286}$$

Aplicando la fórmula de Simpson :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}\cdot\left[y_0 + 2\cdot\left(y_2 + \ldots\ldots + y_{n-2}\right) + 4\cdot\left(y_1 + \ldots.. + y_{n-1}\right) + y_n\right]$$

se obtiene . . .

$$\int_0^{10} x^3\,dx \approx \frac{2}{3^2}\cdot[0.5 + 2\cdot(0.3962 + 0.2087) + 4\cdot(0.4825 + 0.2887 + 0.1561) + 0.1213]$$

$$= \boxed{1.2312}$$

Esta integral no se puede expresar en términos de funciones elementales; pero su valor preciso hasta la 6ª cifra decimal es

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4+x^3}}\,dx = 1.230181$$

Así que aún con un número de divisiones bastante pequeño, el valor aproximado que se obtiene con la fórmula de Simpson es más preciso que el valor generado de la fórmula de los trapecios.

c) En la integral $\int_{-2}^{3} \sqrt{(20+x^4)}\,dx$ sea $n = 4$, entonces $\Delta x = \frac{3-(-2)}{4} = \frac{5}{4}$, de modo que quedan los siguientes valores para x e $y = f(x)$ . . .

$x =$	$f(x) =$
-2	6
-0.75	4.507
0.5	4.479
1.75	5.42
3	10.05

Por la fórmula de los trapecios :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x \cdot \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots\dots. + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right)$$

se obtiene:

$$\int_{-2}^{3} \sqrt{(20+x^4)}\,dx \approx \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{6}{2} + 4.5074 + 4.4791 + 5.4202 + \frac{10.0499}{2} \right) = 28.0396$$

Por la fórmula de Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3} \cdot \left[y_0 + y_n + 2 \cdot \left(y_2 + \dots\dots\dots. + y_{n-2} \right) + 4 \cdot \left(y_1 + \dots.. + y_{n-1} \right) \right]$$

resulta . . .

$$\int_{-2}^{3} \sqrt{(20+x^4)}\,dx \approx \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot [\, 6 + 10.0499 + 2 \cdot (4.4791) + 4 \cdot (4.5074 + 5.4202) \,]$$

$$= 26.966$$

Esta integral tampoco se puede resolver en términos de funciones elementales; pero su valor exacto hasta la la 6ª cifra decimal es :

$$\int_{-2}^{3} \sqrt{\left(20 + x^4\right)}\, dx = 26.991568$$

Y nuevamente aunque el número de divisiones del intervalo de integración n, sea bastante pequeño, el valor que se obtiene de la fórmula de Simpson es mucho más preciso que el valor que resulta de la fórmula de los trapecios.

En resumen, si n es pequeño, la formula de los trapecios es sencilla; pero bastante inexacta mientras que la fórmula de Simpson es menos simple; pero más precisa.

EJERCICIOS 8.2

I. Calcular las siguientes integrales impropias *(o determinar al menos su convergencia)* :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ 2. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

4. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\, dx$ 5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 4\cdot x + 9}\, dx$

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\cdot ln(x)}\, dx$ 8. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\cdot (ln(x))^2}\, dx$ 9. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{sen(x)}{x^2}\, dx$

II. Calcular los valores aproximados de las siguientes integrales, con el valor dado de n:

10. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\, dx$; $n = 6$ 11. $\displaystyle\int_1^{10} log_{10}(x)\, dx$; $n = 10$

12. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{x}\, dx$; $n = 10$

13. Calcular un valor aproximado del número π aplicando la fórmula de Simpson con $n = 10$ y usando el resultado de la integral definida inmediata :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{4}$$

Respuestas . Ejercicio (8.2)

1. 2 2. ∞ 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. ∞

5. π 6. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ 7 $-\infty$ 8. $\frac{1}{ln(2)}$

9. 0.16462698 10. trapecios: 0.8109

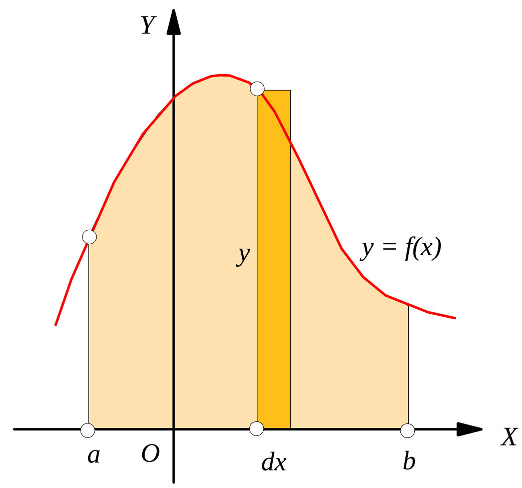
11. Trapecios : 0.60656 ; Simpson: 6.0896 12. Simpson: 1.371

Capítulo IX
Aplicaciones de la Integral Definida

9.1 ***Superficies limitadas por curvas planas***..

Por definición, cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, *el número representado por la integral definida :*

$$A = \int_a^b f(x)\, dx \qquad (9.1)$$

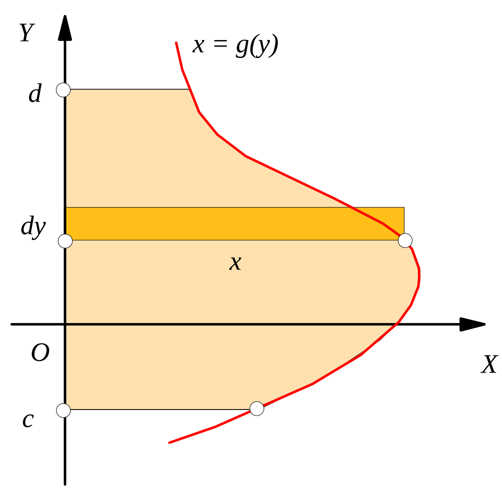


es geométricamente igual al área A limitada por :

- la curva $y = f(x)$
- el eje X
- las rectas verticales $x = a$; $x = b$

El integrando $f(x) \cdot dx$ se puede interpretar como el diferencial $du = f(x) \cdot dx$ de una función $u(x)$ que geométricamente es el área de un *rectángulo diferencial vertical* de base dx y de altura $y = f(x)$ como se muestra en la figura anterior.
La suma infinita (*es decir, la integral definida*) de todos éstos elementos diferenciales de área es el área total bajo la curva .
Cuando la curva tiene la forma $x = g(y)$, es decir cuando x es una función de y, sólo es necesario invertir los ejes de coordenadas y aplicar la fórmula anterior para calcular el área que ahora queda limitada por :

- las rectas horizontales: $y = c$, $y = d$
- el eje Y
- la curva $x = g(y)$



considerando que los elementos diferenciales de área ahora son *rectángulos horizontales*, con base dy y altura x cada uno de ellos de área : $du = g(y) \cdot dy$

El área limitada se calcula como la suma infinita de todos esos elementos diferenciales de área, es decir, como la integral definida . . .

$$A = \int_c^d . du = \int_c^d g(y)\, dy \qquad (9.2)$$

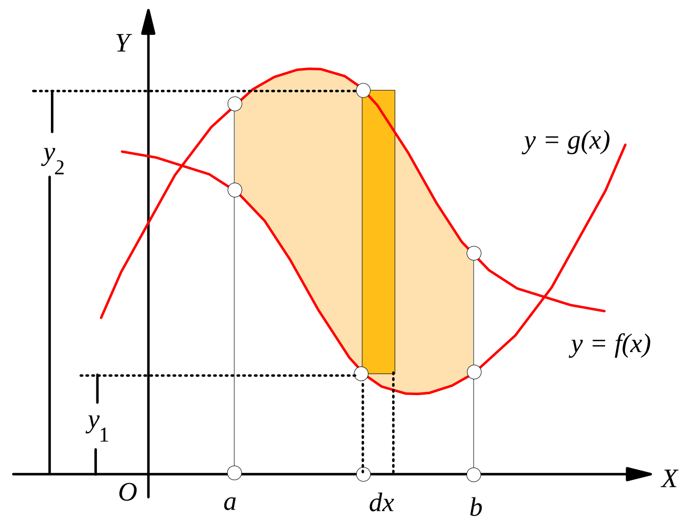
En las dos fórmulas anteriores (9.1) y (9.2), está claro que si la "*altura*" de los rectángulos diferenciales es negativa entonces el valor de la integral definida también será negativo.
Esto simplemente significará que el área limitada estará *por debajo del eje X o a la izquierda del eje Y .*

Para calcular el área limitada por las dos curvas: $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y las rectas verticales $x = a$, $x = b$, *siendo* $f(x) \geq g(x)$ *en todo punto del intervalo* $[a, b]$, basta con calcular la ***diferencia*** de las áreas bajo las curvas correspondientes . . .

$$A = \int_a^b . du = \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$



Nótese que los límites de integración se podrían extender hasta las intersecciones entre las curvas; pero no más lejos puesto que a la derecha o a la izquierda de tales puntos $g(x) \geq f(x)$

Ejemplo 1. Calcular el área limitada por la parábola semicúbica $a \cdot y^2 = x^3$, el eje Y y las rectas horizontales $y = a$; $y = 2 \cdot a$.

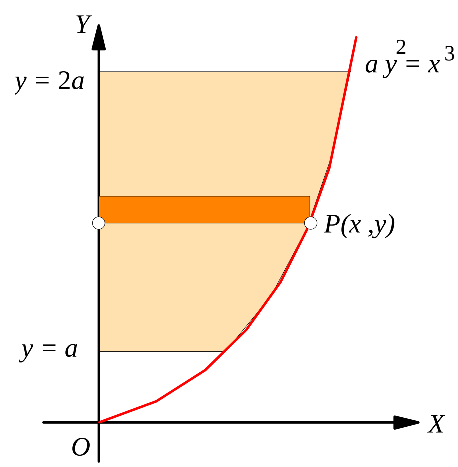
Solución : Considerando que el área pedida está formada por *un número infinito de rectángulos diferenciales horizontales*, cada uno de área $du = x \cdot dy$, que se apilan uno sobre otro entre los límites $y = a$; $y = 2 \cdot a$, el área total u es la suma integral de todos ellos, es decir, por la fórmula (9.2) . . .

$$A = \int_a^{2 \cdot a} . du = \int_a^{2 \cdot a} x\, dy$$

$$= \int_a^{2 \cdot a} \left(\sqrt[3]{a \cdot y^2}\right) dy$$

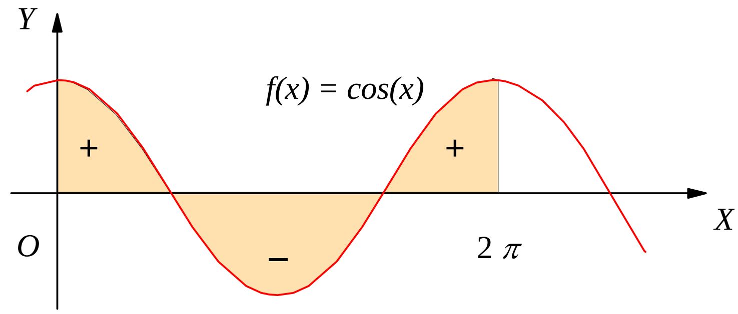
$$= \left[\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \sqrt[3]{a \cdot y^5}\right] \Bigg|_a^{2 \cdot a}$$

$$= \boxed{\frac{3 \cdot a^2}{5} \cdot \left[2^{\left(\frac{5}{3}\right)} - 1\right]}$$



Ejemplo 2. Hallar el área limitada por la curva coseno, el eje X y las rectas verticales $x = 0$, $x = 2\cdot\pi$

Solución : Calculemos la integral definida de la función $f(x) = \cos(x)$, considerando los elementos diferenciales de área como *rectángulos verticales diferenciales, cada uno de ellos de área* $du = y\cdot dx$:



$$A = \int_a^b y\,dx = \int_0^{2\cdot\pi} \cos(x)\,dx = \operatorname{sen}(x)\Big|_0^{2\cdot\pi}$$

$$= \operatorname{sen}(2\cdot\pi) - \operatorname{sen}(0) = 0$$

Se esperaba éste resultado puesto que una parte de la curva está por debajo del eje X , esto es, el área *es negativa* y *por la simetría de la curva, es* exactamente *del mismo valor que la parte positiva que queda por encima del eje* X .
Sin embargo, el área pedida no puede ser cero y para determinarla es necesario calcular por separado la integral definida de cada parte de la curva por encima o por debajo del eje X y *sumar los valores absolutos de cada resultado* como sigue . . .

$$\int_0^{2\cdot\pi} \cos(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\cdot\pi} \cos(x)\,dx\right| + \int_{\frac{3}{2}\cdot\pi}^{2\cdot\pi} \cos(x)\,dx$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) + \left|\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| + \operatorname{sen}(2\cdot\pi) - \operatorname{sen}\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)$$

$$= (1-0) + |(-1-1)| + [0-(-1)] = \boxed{4}$$

de modo que la curva tiene dos unidades de área positivas (por encima del eje X) y dos negativas (por debajo del eje X) .

Ejemplo 3. Calcular el área limitada por las curvas: $y^2 = 2\cdot x$; $2\cdot x - y = 6$.

Solución : Es necesario determinar primero si la parábola horizontal : $y^2 = 2\cdot x$ y la línea recta $2\cdot x - y = 6$ tienen puntos de intersección.

En un punto de intersección, los valores de x y de y son iguales para ambas curvas, así que resolviendo sus ecuaciones simultáneamente resulta . . .

$y^2 = 6 + y$ *(substituyendo* $2\cdot x$ *de la primera ecucación en la segunda)*

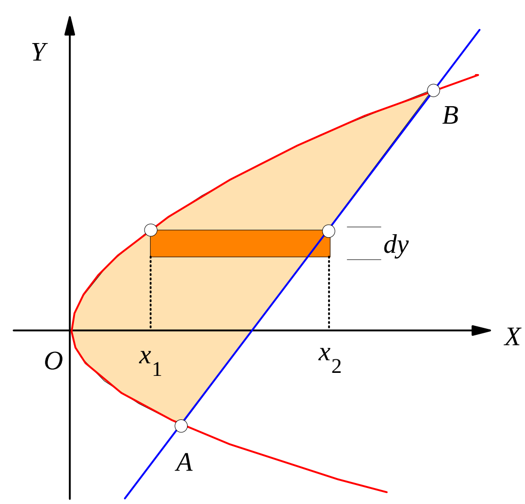
$y^2 - y - 6 = 0$ *que tiene como soluciones :* $y = 3$, $y = -2$.

los correspondientes valores de x en los puntos de intersección se obtienen substituyendo éstos valores para y en cualquiera de las ecuaciones iniciales, resultando: $x = \frac{9}{2}$ y $x = 2$ respectivamente. Los puntos de intersección de éstas curvas son entonces . . .

$$A(2,-2) \qquad \text{y} \qquad B\left(\frac{9}{2},3\right)$$

Consideremos el área limitada entre las dos curvas $g(y) = \frac{y^2}{2}$; $f(y) = \frac{6+y}{2}$ como una suma infinita de *rectángulos diferenciales horizontales*, cada uno de ellos de área $du = x\cdot dy$ donde x es la " *altura* " (la diferencia entre las abscisas de las curvas) y dy es la " *base* " del rectángulo.

Si las ordenadas de los puntos de intersección A y B son y_1 e y_2 , entonces el área total es :



$$A = \int_{y_1}^{y_2} x\,dy = \int_{y_1}^{y_2} (f(y) - g(y))\,dy$$

$$= \int_{-2}^{3} \left[\left(\frac{y+6}{2}\right) - \frac{y^2}{2}\right] dy$$

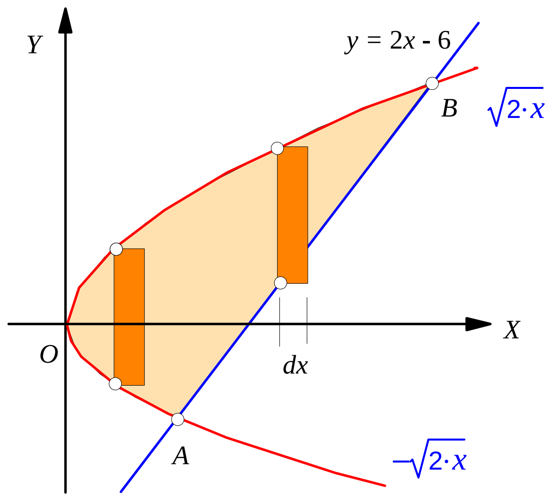
$$= \left(\frac{1}{4}\cdot y^2 + 3\cdot y - \frac{1}{6}\cdot y^3\right) \Bigg|_{-2}^{3}$$

$$= \left[\frac{1}{4}\cdot(3)^2 + 3\cdot(3) - \frac{1}{6}\cdot(3)^3\right] - \left[\frac{1}{4}\cdot(-2)^2 + 3\cdot(-2) - \frac{1}{6}\cdot(-2)^3\right] = \frac{125}{12}$$

Otra manera de calcular ésta área sería considerar que está formada por una infinidad de *rectángulos diferenciales verticales* cada uno de ellos de área : $du = y \cdot dx$, donde dx es el "ancho" del rectángulo y $y = y_s - y_i$ es la "altura" (*la diferencia de ordenadas*) , esto es . . .

$$du = \left(y_s - y_i\right) \cdot dx$$

Sin embargo, con éste enfoque es necesario construir dos tipos diferentes de rectángulos diferenciales, dependiendo de que su "*base*" está sobre un punto de la rama inferior de la parábola , o sobre un punto de la línea recta.



Se tiene así que . . .

$$A = \int_0^{\frac{9}{2}} y\, dx = \int_0^2 y\, dx + \int_2^{\frac{9}{2}} y\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[\sqrt{2 \cdot x} - \left(-\sqrt{2 \cdot x}\right)\right] dx + \int_2^{\frac{9}{2}} \left[\sqrt{2 \cdot x} - (2 \cdot x - 6)\right] dx$$

y resulta . . .

$$A = \left(\frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x^3}\right) \Bigg|_0^2 + \left(\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x^3} - x^2 + 6 \cdot x\right) \Bigg|_2^{\frac{9}{2}}$$

$$= \left(\frac{4 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{2^3} - 0\right) + \left[\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^3} - \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{9}{2} - \left[\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{2^3} - 2^2 + 6 \cdot (2)\right]\right]$$

$$= \left(\frac{16}{3}\right) + \left(\frac{61}{12}\right) = \boxed{\frac{125}{12}}$$

Que es el mismo resultado obtenido en el primer cálculo, pero con bastante más esfuerzo. La moraleja que debemos aprender de éste ejemplo es que *si es posible resolver un problema de varias maneras distintas, lo más sensato es esojer la solución más simple*.

Forma paramétrica :

Si la curva que limita al área tiene la forma :

$$x = \phi(t) \quad , \quad y = \psi(t) \qquad \text{con} \quad \alpha \le t \le \beta$$

donde los límites α y β quedan determinados por las condiciones : $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$ que son los límites de integración correspondientes a las rectas verticales $x = a$, $x = b$, entonces la integral definida para el cálculo del área . . .

$$A = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

simplemente se transforma con la substitución : $x = \phi(t)$; $dx = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)\cdot dt$; $y = f(x) = \psi(t)$ en la integral equivalente:

$$\boxed{A = \int_\alpha^\beta \left[\psi(t)\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)\right] dt} \qquad (9.4)$$

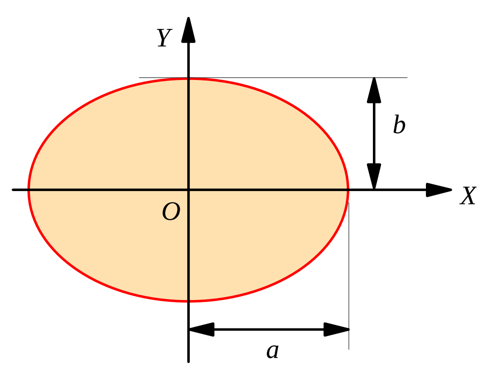
Ejemplo 4. Calcular el área limitada por la elipse $\begin{pmatrix} x = a\cdot cos(t) \\ y = b\cdot sen(t) \end{pmatrix}$; $0 \le t \le 2\cdot\pi$

Solución : Debido a la simetría de la curva, el área total será el doble del área por encima del eje X .

Además de $x = a\cdot cos(t)$ se obtiene :

$$t = arccos\left(\frac{x}{a}\right)$$

de manera que si x varía entre $-a$ y a, el parámetro t cambia entre los límites :



$$t_1 = arccos\left(\frac{-a}{a}\right) = arccos(-1) = \pi$$

$$t_2 = arcos\left(\frac{a}{a}\right) = arccos(1) = 0$$

El área total encerrada por la elipse es entonces de acuerdo a la fórmula (9.4) . . .

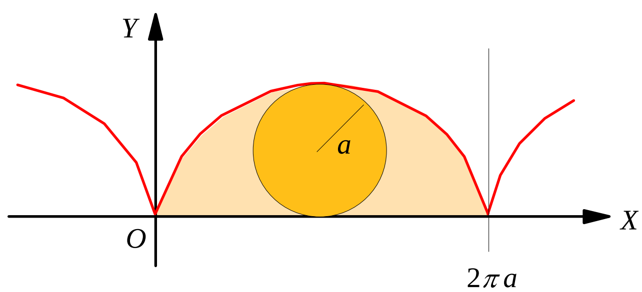
$$A = 2\cdot\int_{\pi}^{0}\left[\psi(t)\cdot\left(\frac{d\phi}{dt}\right)\right]dt = 2\cdot\int_{\pi}^{0} b\cdot sen(t)\cdot\left(\frac{d}{dt}\cdot a\cdot cos(t)\right)dt$$

$$= 2\cdot a\cdot b\left[\int_{0}^{\pi} sen^{2}\cdot(t)\,dt\right] = 2\cdot a\cdot b\cdot\int_{0}^{\pi}\left(\frac{1-cos(2\cdot t)}{2}\right)dt = \pi\cdot a\cdot b$$

Cuando $a = b = R$, la elipse se transforma en una circunferencia de radio R y se obtiene la conocida fórmula para el área del círculo : $\pi\cdot R^{2}$

Ejemplo 5. Calcular el área limitada por un arco de la cicloide: $\begin{bmatrix} x(\theta) = a\cdot(\theta - sen(\theta)) \\ y(\theta) = a\cdot(1-cos(\theta)) \end{bmatrix}$

Solución : Un arco completo de la cicloide se describe cuando el parámetro θ varía entre 0 y $2\cdot\pi$ radianes.



entonces con $\alpha = 0$, $\beta = 2\cdot\pi$, la fórmula (9.4) queda :

$$A = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\psi(\theta)\cdot\frac{d\phi}{d\theta}\right)d\theta = \int_{0}^{2\cdot\pi} a\cdot(1-cos(\theta))\cdot[a\cdot(1-cos(\theta))]\,d\theta$$

$$= a^{2}\cdot\int_{0}^{2\cdot\pi}\left[1-2\cdot cos(\theta)+cos^{2}\cdot(\theta)\right]d\theta$$

$$= a^{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\theta - 2\cdot sen(\theta) + \frac{1}{2}\cdot cos(\theta)\cdot sen(\theta)\right)\Bigg|_{0}^{2\cdot\pi}$$

$$= a^2 \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot (2 \cdot \pi) - 2 \cdot (0) + \frac{1}{2} \cdot (1) \cdot (0) \right] = 3 \cdot a^2 \cdot \pi$$

que equivale al área de tres circulos de radio a (*el círculo generador de la cicloide*)

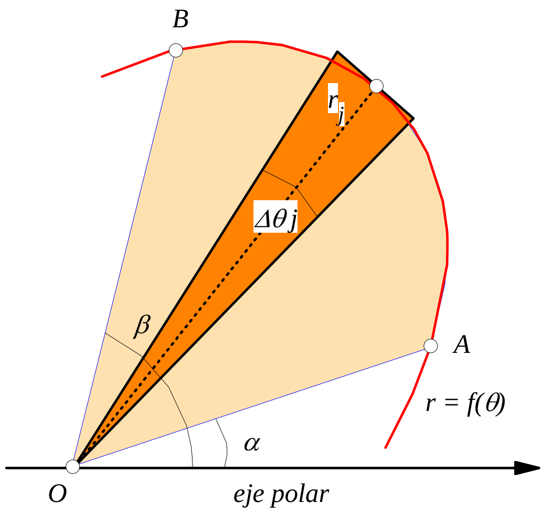
Forma polar **:**

Si la curva que limita al área tiene la forma : $r = f(\theta)$ entonces el área limitada por la curva y dos de sus radios vectores: $r = \alpha$ y $r = \beta$, se puede considerar formada por un número infinito de elementos diferenciales que tienen la forma de *sectores circulares* de ángulo central $\Delta\theta$ y radio $r_j = f(\theta_j)$.

El área de un sector circular tal se puede aproximar por el área ΔA_j de un triángulo isósceles de base $r_j \cdot \Delta\theta$ y altura r_j :

$$\Delta A_j = \frac{1}{2} \cdot (r_j \cdot \Delta\theta_j) \cdot r_j$$

como se ilustra en la figura de la derecha .



De modo que la suma de todos los sectores circulares construidos sobre n puntos en el arco AB de la curva polar, representa en forma aproximada el área comprendida entre los radios polares OA , OB y la curva $r = f(\theta)$, esto es . . .

$$A \approx \sum_j \Delta A_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (r_j \cdot \Delta\theta_j) \cdot r_j$$

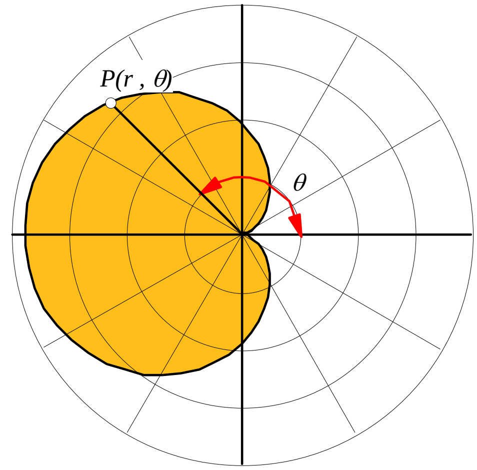
Cuando el número n de sectores circulares tiende al infinito, el área polar tiende al límite:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot (r_j \cdot \Delta\theta_j) \cdot r_j = \frac{1}{2} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta \qquad (9.5)$$

Ejemplo 6. Calcular el área encerrada por la Cardioide $r(\theta) = a \cdot (1 - \cos(\theta))$

Solución : La curva completa se describe cuando el ángulo polar θ varía entre 0 y $2 \cdot \pi$ radianes. Además, debido a la simetría de ésta curva respecto al eje polar, podemos calcular la mitad del área (*la comprendida entre* 0 *y* π *radianes*) y luego multiplicar el resultado por 2

Entonces . . .



$$A = \frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{2\cdot\pi} a^2\cdot(1-\cos(\theta))^2\, d\theta$$

$$= 2\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\int_{0}^{\pi} \left(1-2\cdot\cos(\theta)+\cos(\theta)^2\right) d\theta$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}\cdot\pi\cdot a^2}$$

Esta misma curva escrita en la forma paramétrica tiene las ecuaciones. . .

$$\begin{bmatrix} x = \phi(t) = a\cdot\cos(t)\cdot(1-\cos(t)) \\ y = \Psi(t) = a\cdot sen(t)\cdot(1-\cos(t)) \end{bmatrix}$$

Calculemos su área empleando ahora la fórmula (9.4) : $A = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\cdot\left(\frac{d\phi(t)}{dt}\right) dt$

$$A = \int_{2\cdot\pi}^{0} [a\cdot sen(t)\cdot(1-\cos(t))]\cdot\frac{d}{dt}[a\cdot\cos(t)\cdot(1-\cos(t))]\, dt$$

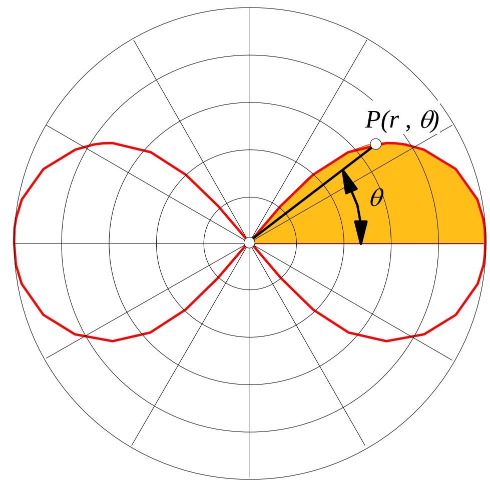
$$= 2\cdot\int_{\pi}^{0} a^2\cdot\left(2\cdot\cos(t)^4-3\cdot\cos(t)^3-\cos(t)^2+3\cdot\cos(t)-1\right) dt = \boxed{\frac{3}{2}\cdot\pi\cdot a^2}$$

y por supuesto, se obtiene el mismo resultado que se calculó antes en la forma polar. Se dejan los detalles de la integración como ejercicio para el lector.

Ejemplo 7. Calcular el área encerrada por la Lemniscata de Bernoulli: $r^2 = a^2\cdot\cos(2\cdot\theta)$

Solución : La curva completa se describe cuando el ángulo polar polar θ varía entre 0 y $2\cdot\pi$ radianes

Pero debido a la simetría de la curva respecto al eje polar, el área total que encierra es 4 veces el área de la región generada cuando θ varía desde 0 hasta $\frac{\pi}{4}$ según se ilustra en la figura de la derecha.



Por lo tanto, de la fórmula (9.5) se obtiene . . .

$$A = \frac{1}{2}\cdot\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

$$= 4\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(a^2\cdot cos(2\cdot\theta)\right) d\theta\right] = a^2\cdot\left[sen\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - sen[2\cdot(0)]\right] = a^2$$

(se dejan los detalles de ésta integración como ejercicio para el lector).

Es curioso que ésta área sea equivalente al área de un cuadrado de lado a construido sobre el eje polar.

EJERCICIOS 9. 1

I *Hallar el área de la superficie limitada por*

1. $y = ln(x)$, el eje X y la recta $x = 10$

2. $y = x\cdot e^{x}$, el eje X y la recta $x = 0$

3. los ejes X e Y y la curva: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

4. la *Astroide* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

II. *Calcular el área comprendida entre las dos curvas dadas y mostrar los rectángulos diferenciales de área.*

5. $y^2 = 6\cdot x$; $x^2 = 6\cdot y$

6. $y = 4 - x^2$; $y = 4 - 4\cdot x$

7. $y^2 = 2\cdot x$; $x^2 + y^2 = 4\cdot x$

8. $y = 6\cdot x - x^2$; $y = x$

9. $y = x^3 - 3\cdot x$; $y = x$

10. $y^2 = 4\cdot x$; $x = 12 + 2\cdot y - y^2$

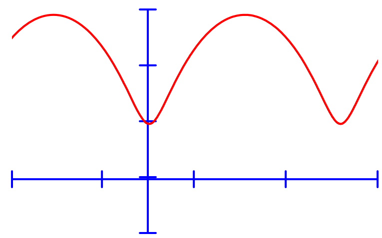
11. $y^3 = x^2$ y la cuerda que une los puntos: $(-1,1)$, $(8,4)$

12. $y^2 - x^2 = a^2$, el eje Y y una recta desde $(0,0)$ a cualquier punto (x,y) sobre la curva .

III. *Encontrar el área limitada por las siguientes curva paramétricas :*

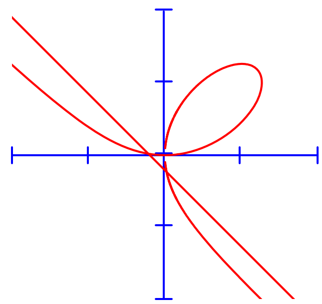
13. Una rama de la *Trocoide* :

$$\begin{pmatrix} x(t) = a\cdot t - b\cdot sen(t) \\ y(t) = a - b\cdot cos(t) \end{pmatrix} \; ; \; 0 < b < a$$



14. El lazo del *folium de Descartes :*

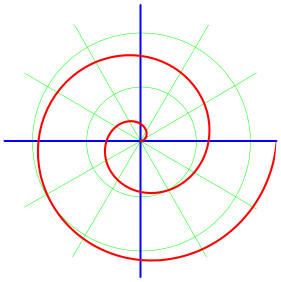
$$\begin{bmatrix} x(t) = \left(\dfrac{3\cdot a\cdot t}{1+t^3}\right) \\ y(t) = \left(\dfrac{3\cdot a\cdot t^2}{1+t^3}\right) \end{bmatrix} \; ; \; 0 \le t < \infty$$



IV. *Encontrar el área limitada por las siguientes curvas polares :*

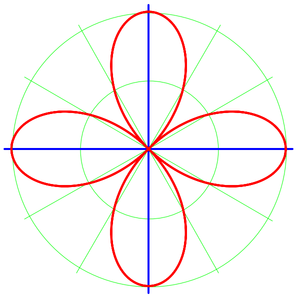
15. La primera y la segunda espira de la *espiral de Arquímedes:*

$$r = a\cdot\theta.$$

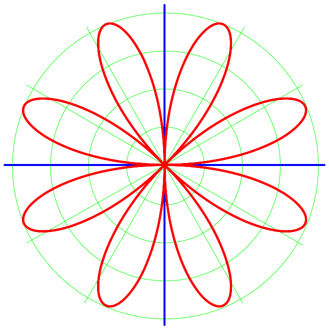


16. Una de las hojas de *la rosa :*

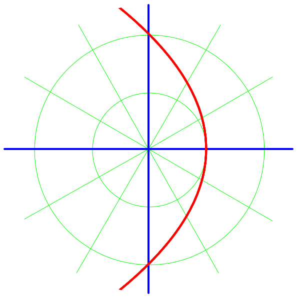
$$r = a\cdot cos(2\cdot\theta)$$



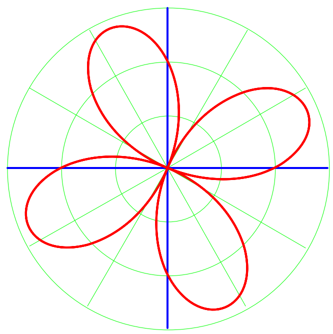
17. $r^2 = a^2\cdot sen(4\cdot\theta)$



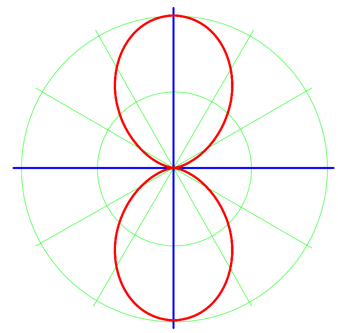
18. $r = a\cdot sec^2\cdot\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ para $\theta = \dfrac{\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$



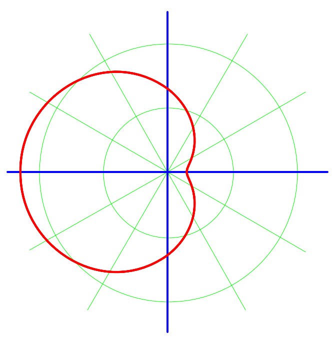
19 $r = a\cdot(sen(2\cdot\theta) + cos(2\cdot\theta))$



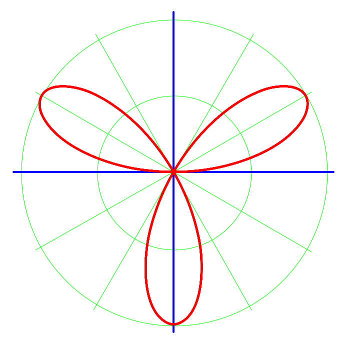
20. $r = a\cdot sen^2\cdot(\theta)$



21 $r = 2 - cos(\theta)$

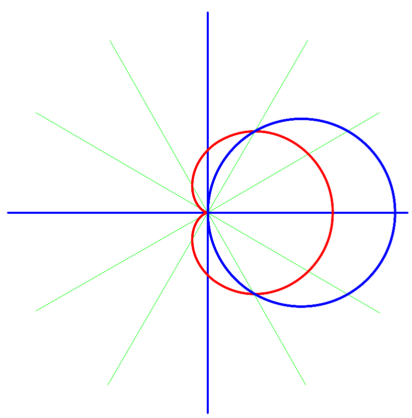


22. $r = a\cdot sen(3\cdot\theta)$

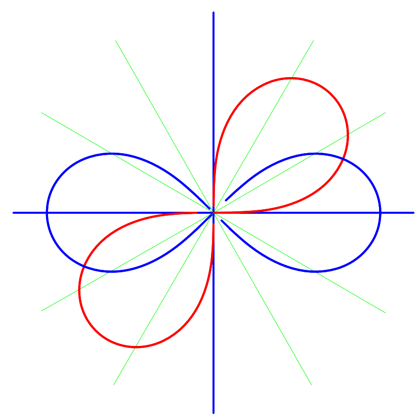


V. *Calcular el área que encierran en común los siguientes pares de curvas :*

23. $r = 3\cdot cos(\theta)$; $r = 1 + cos(\theta)$



24. $r^2 = sen(2\cdot\theta)$; $r^2 = cos(2\cdot\theta)$



Respuestas : *Ejercicio* 9.1

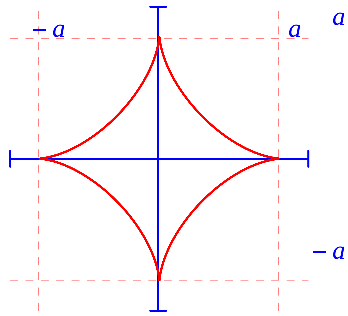
1. $\displaystyle\int_1^{10} ln(x)\,dx = 10\cdot ln(2) + 10\cdot ln(5) - 9$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x\,dx = -1$

3. $\displaystyle\int_0^{a} \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx = \frac{1}{6}\cdot a^2$

4. De la forma paramétrica para la Astroide :

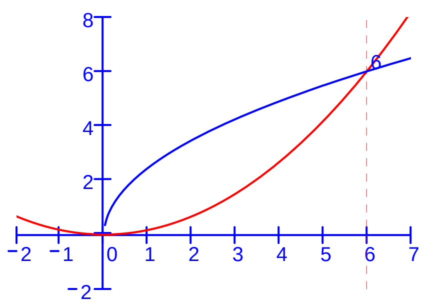
$$\begin{bmatrix} x(t) = a\cdot cos^3(t) \\ y(t) = a\cdot sen^3\cdot(t) \end{bmatrix}$$

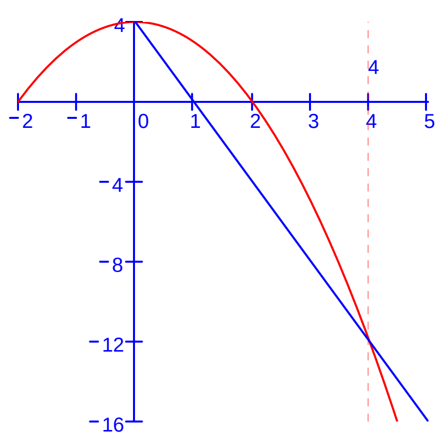


y utilizando la simetría de la curva se obtiene :

$$4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a\cdot sen(\theta)^3\right)\cdot 3\cdot a\cdot cos(\theta)^2\cdot sen(\theta)\,d\theta = \frac{3}{8}\cdot\pi\cdot a^2$$

5. $\displaystyle\int_0^{6} \left(\sqrt{6\cdot x} - \frac{x^2}{6}\right) dx = 12$





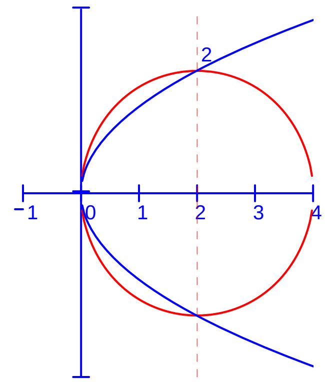
6. $\displaystyle\int_0^{4} \left[\left(4 - x^2\right) - (4 - 4\cdot x)\right] dx = \frac{32}{3}$

7. Área "exterior " :

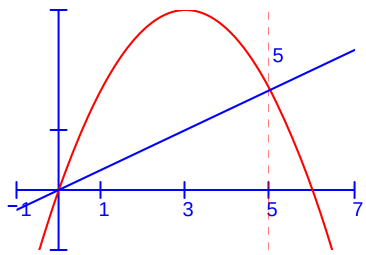
$$2\cdot\left[\int_0^2 \left(\sqrt{4\cdot x - x^2} - \sqrt{2\cdot x}\right)\,dx\right] = 2\cdot\pi - \frac{16}{3}$$

Área "interior " :

$$\int_{-2}^{2}\left[\left(2+\sqrt{4-y^2}\right) - \frac{y^2}{2}\right]dy = 2\cdot\pi + \frac{16}{3} = 2\cdot\pi + \frac{16}{3}$$

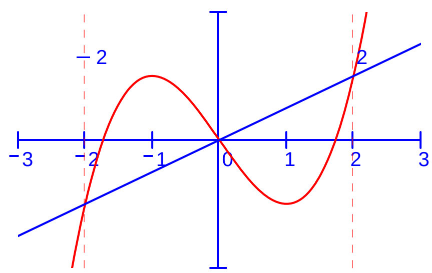


8. $$\int_0^5 \left[\left(6\cdot x - x^2\right) - x\right]dx = \frac{125}{6}$$

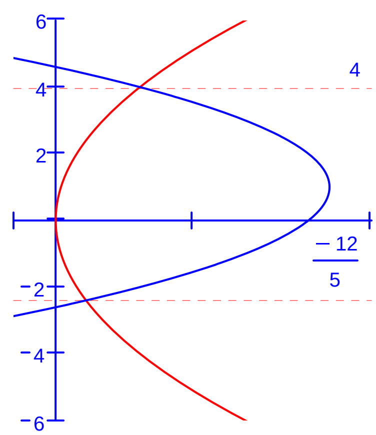


9. $$\int_{-2}^{0} \left[\left(x^3 - 3\cdot x\right) - x\right]dx + \int_0^2 \left[x - \left(x^3 - 3\cdot x\right)\right]dx$$

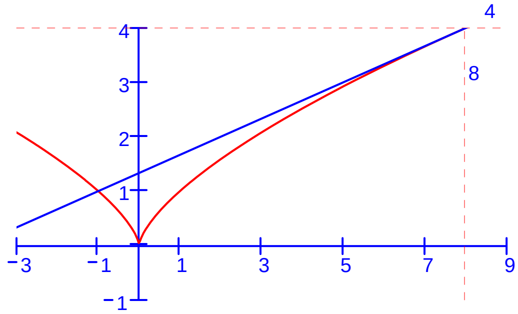
$$= 8$$



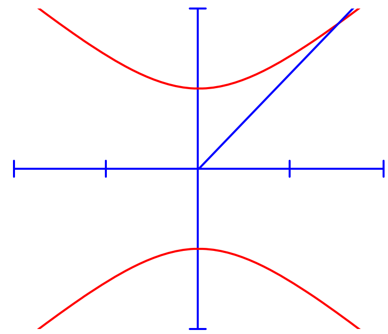
10. $$\int_{-\left(\frac{12}{5}\right)}^{4} \left[\left(12 + 2\cdot y - y^2\right) - \frac{y^2}{4}\right]dy = \frac{4096}{75}$$



11. $$\int_{-1}^{8} \left(\frac{4+x}{3} - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{27}{10}$$



12. $$\int_{0}^{x} \left(\sqrt{x^2 + a^2} - m \cdot x \right) dx = \boxed{\frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot ln\left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a} \right)}$$

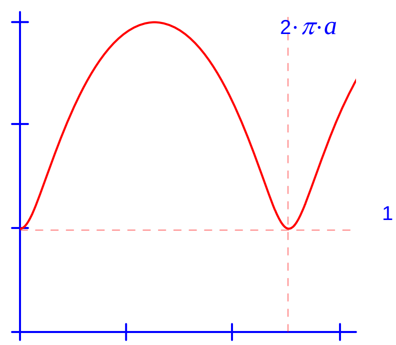


13. $$\int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{0}^{2\cdot\pi} (a - b \cdot cos(t)) \cdot \left[\frac{d}{dt} \cdot (a \cdot t - b \cdot sen(t)) \right] dt$$

$$= \int_{0}^{2\cdot\pi} \left(a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(t) + b^2 \cdot cos(t)^2 \right) dt$$

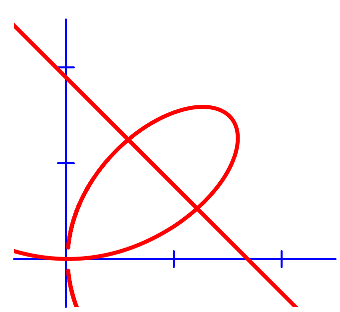
$$= \boxed{\left(2 \cdot a^2 + b^2 \right) \cdot \pi}$$



14. $$\int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = \int_{\infty}^{0} \left(\frac{3 \cdot a \cdot t^2}{1 + t^3} \right) \cdot \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{3 \cdot a \cdot t}{1 + t^3} \right) \right] dt$$

$$= \int_{\infty}^{0} \frac{\left(9 \cdot a^2 \cdot t^2 - 18 \cdot a^2 \cdot t^5 \right)}{\left(1 + t^3 \right)^3} dt$$

$$= \boxed{\frac{3}{2} \cdot a^2}$$



15. $\displaystyle\int_{2\cdot\pi}^{4\cdot\pi} \frac{1}{2}\cdot(a\cdot\theta)^2\, d\theta = \frac{28}{3}\cdot\pi^3\cdot a^2$

16. $\displaystyle\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\cdot(a\cdot cos(2\cdot\theta))^2\, d\theta = \frac{\pi\cdot a^2}{8}$

17. $\displaystyle 8\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cdot sen(4\cdot\theta)\, d\theta\right) = 2\cdot a^2$

18. $\displaystyle\frac{2\cdot a^2}{3}\cdot\left(2-\frac{5}{3\cdot\sqrt{3}}\right)$

19. $\pi\cdot a^2$

20. $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{2\cdot\pi} \left(a\cdot sen(\theta)^2\right)^2 d\theta = \frac{3}{8}\cdot a^2\cdot\pi$

21. $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{2\cdot\pi} (2-cos(\theta))^2\, d\theta = \frac{9}{2}\cdot\pi$

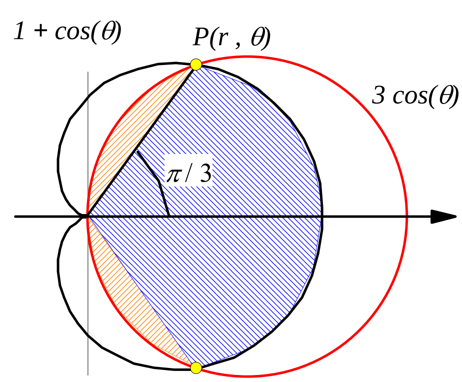
22. $\displaystyle 3\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (a\cdot sin(3\cdot\theta))^2\, d\theta\right] = \frac{a^2\cdot\pi}{4}$

23. Las curvas se cortan en el punto polar $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{3}\right)$ y por la simetría de la figura, se puede escribir :

$$Area = 2\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (1+cos(\theta))^2\, d\theta + \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cdot cos(\theta))^2\, d\theta\right]$$

$$= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(\frac{9}{8}\cdot\sqrt{3}+\frac{\pi}{2}\right)+\left(\frac{3\cdot\pi}{4}-\frac{9}{8}\cdot\sqrt{3}\right)\right]$$

$$= \boxed{\frac{5}{4}\cdot\pi}$$



24. Las curvas se cortan en $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}},\frac{\pi}{8}\right)$, y por simetría :

$$Area = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} sen(2\cdot\theta)\, d\theta + \frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} cos(2\cdot\theta)\, d\theta\right) = 2\cdot\left(\frac{-1}{8}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{4}+\frac{-1}{8}\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

9.2 ***Longitud de arco de una curva***.

Forma Rectangular .

Consideremos la gráfica de una función en coordenadas rectangulares $y = f(x)$ que sea continua en el intervalo $[a, b]$ y dividamos éste intervalo de integración sobre el eje X , en n partes *no necesariamente iguales entre si* , por medio de los $n+1$ puntos :

$$x_0 \,,\; x_1 \,,\; x_2 \,, \ldots\ldots, x_{j-1} \,,\; x_j \,, \ldots\ldots, x_n$$

donde $x_0 = a$ es el punto inicial y $x_n = b$ es el final.

A éstos valores de x, corresponden los puntos sobre la curva :

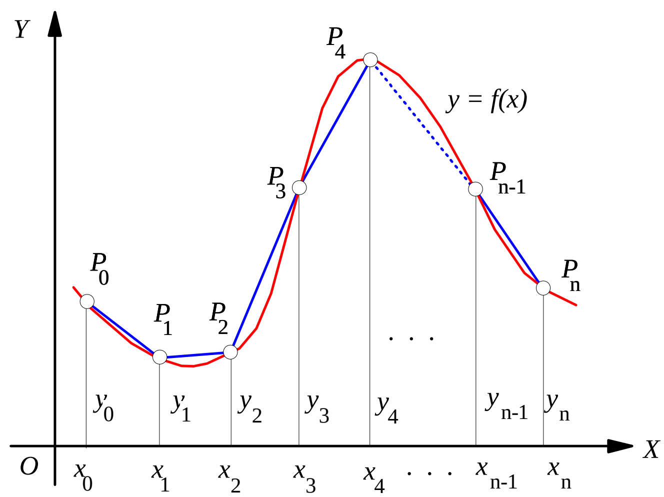
$$A \,,\; P_1 \,,\; P_2 \,, \ldots\ldots, P_{j-1} \,,\; P_j \,, \ldots\ldots, B$$

según se muestra en la siguiente figura, siendo $y_j = f(x_j)$ la ordenada respectiva para el punto P_j :

Al unir éstos puntos por medio de líneas rectas, es claro que la longitud total de éstas líneas será una aproximación de la longitud total de la curva compredida entre los puntos A y B .

Sea entonces Δs_i la longitud de la cuerda que une los puntos cosecutivos P_{i-1} y P_i sobre la curva y sean :

$$\Delta x_i = \left(x_i - x_{i-1}\right)$$
$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$



las longitudes de los intervalos correspondientes sobre los ejes X e Y respectivamente.

Por el teorema de Pitágoras, la longitud de la i-ésima cuerda $P_{i-1}\, P_i$ es entonces :

$$\Delta s_i = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right)^2}$$

esto es . . .

$$\Delta s_i = \sqrt{\left(\Delta x_i\right)^2 + \left(\Delta y_i\right)^2} = \left(\Delta x_i\right) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Por el teorema del valor medio aplicado a ésta función en el intervalo $\left(x_{i-1}, x_i\right)$ se obtiene que . . .

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right) = \frac{df(\beta_i)}{dx} \qquad \text{con} \quad x_{i-1} < \beta_i < x_i$$

es decir . . .

$$\Delta s_i = \left(\Delta x_i\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{df\left(\beta_i\right)}{dx}\right)^2}$$

De ésta manera, la longitud total de la línea poligonal $A\cdot P_1 P_2\cdot P_3\cdot.......\cdot P_{n-1}\cdot B$ es . . .

$$\Delta s = \sum_{i=0}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\Delta x_i\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{df\left(\beta_i\right)}{dx}\right)^2}$$

En el límite cuando $n \to \infty$, esta longitud se aproximará a la longitud s de la curva en el intervalo $[\,a\,,b\,]$:

$$s = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{n} \left(\Delta x_i\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{df\left(\beta_i\right)}{dx}\right)^2}\right]$$

Esta expresión es precisamente la de una integral definida que nos permite calcular la longitud de la curva continua $y = f\,(x)$ entre $x = a$ y $x = b$, es decir . . .

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df\left(\beta_i\right)}{dx}\right)^2}\,dx} \quad \text{o bien} \quad \boxed{s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx} \qquad (9.6)$$

Es posible obtener también una expresión para *el diferencial de la longitud de una curva en coordenadas rectangulares*, puesto que que si la longitud s de la curva se interpreta como una suma infinita de elementos diferenciales ds, esto es : $s = \int .\, ds$, entonces la fórmula (9.6) queda . . .

$$ds = \left[\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right]\cdot dx$$

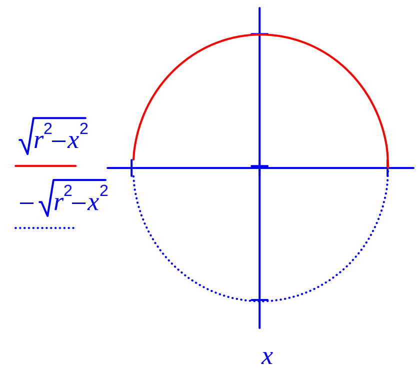
y en vista de que la derivada $\frac{dy}{dx}$, se puede interpretar como el cociente de dos diferenciales, el diferencial de arco se puede escribir también como :

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx = \sqrt{\frac{(dx)^2+(dy)^2}{(dx)^2}}\cdot dx = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}\cdot dx = \boxed{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}} \qquad (9.7)$$

Ejemplo 8. Calcular la longitud del perímetro de una circunferencia de radio r .

Solución : La ecuación rectangular de una circunferencia de radio r y centro en el origen de coordenadas es : $x^2 + y^2 = r^2$.

Escogiendo a la variable y como función de x , toda recta vertical la debe cortar en un solo punto, por ello tal función se debe expresar como . . .



$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{o como} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

que representan las semicircunferencias superior e inferior al eje X respectivamente, con x en el dominio $[-r , r]$.

entonces . . .

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d}{dx}\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Además debido a su simetría, la longitud de la curva en el primer cuadrante es un cuarto de la longitud total, así que. . .

$$s = 4\cdot\int_0^r \left(\frac{ds}{dx}\right) dx = \int_0^r \frac{4\cdot r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\cdot r\cdot\left(arcsen\left(\frac{r}{r}\right) - arcsen\left(\frac{0}{r}\right)\right) = 4\cdot r\cdot\left[\frac{\pi}{2} - (0)\right] = 2\cdot\pi\cdot r$$

que en efecto, es la conocida fórmula para calcular el perímetro de una circunferencia de radio r .

Forma Paramétrica.

Si una curva está dada en la forma paramétrica : $\begin{pmatrix} x = \phi(t) \\ y = \Psi(t) \end{pmatrix}$, entonces los diferenciales correspondientes de longitud sobre los ejes X e Y son . . .

$$dx = \left(\frac{d\phi}{dt}\right)\cdot dt \qquad ; \qquad dy = \left(\frac{d\Psi}{dt}\right)\cdot dt$$

de manera que el diferencial de longitud de arco queda expresado como . . .

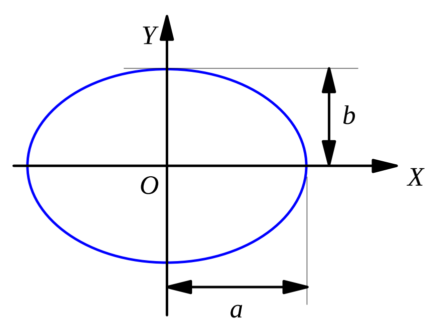
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}\cdot dt$$

y la longitud de una curva paramétrica continua entre los puntos $x_1 = \phi(t_1)$; $x_2 = \phi(t_2)$ es :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} .\, ds = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt} \tag{9.8}$$

Ejemplo 9. Calcular la longitud de la elipse $\begin{pmatrix} x = a\cdot cos(t) \\ y = b\cdot sen(t) \end{pmatrix}$; $0 < t \le 2\cdot\pi$

Solución : Para que ésta curva represente realmente una función de x, es necesario considerar sólo la parte que queda por encima del eje X (*ó la parte negativa por debajo de él*) pues solamente asi *cualquier recta vertical cortará a la gráfica de tal función en un solo punto* . Esto implica que el parámetro t varíe desde π hasta 0 solamente.



Entonces . . .

$$\frac{dx}{dt} = -(a\cdot sen(t)) \qquad ; \qquad \frac{dy}{dt} = b\cdot cos(t)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{\pi}^{0} \sqrt{(-a\cdot sen(t))^2 + (b\cdot cos(t))^2}\, dt$$

Además, por su simetría, la longitud total de ésta curva, es el doble de ese arco.

Por lo tanto:

$$s = 2\cdot\int_{\pi}^{0}\left[\sqrt{a^2+\left(b^2-a^2\right)\cdot cos^2\cdot(t)}\right]dt$$

definiendo ahora la constante : $k = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} < 1$, la integral toma la forma . . .

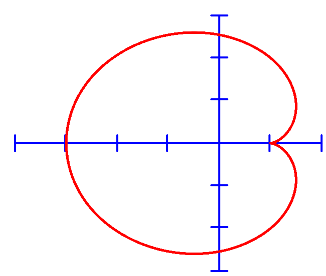
$$s = 2\cdot a\cdot\int_{\pi}^{0}\left[\sqrt{1-k^2\cdot cos^2\cdot(t)}\right]dt$$

llamada *integral elíptica*, la cual *no se puede resolver en términos de funciones elementales*.

Esta integral se puede calcular solamente por medio de un método numérico aproximado para un valor específico de la constante k.

Ejemplo 10. Calcular el perímetro de la Cardioide $\begin{bmatrix} x = a\cdot(2\cdot cos(t) - cos(2\cdot t)) \\ y = a\cdot(2\cdot sen(t) - sen(2\cdot t)) \end{bmatrix}$; $0 < t \le 2\cdot\pi$

Solución : Ésta curva es cortada por una recta vertical en más de un punto y sólo la parte por encima del eje X *(ó la parte por debajo de él)* representa realmente una función de x, es decir , cuando el parámetro t varía solamente desde 0 hasta π.
Además, por la simetría de la curva , la longitud total es el doble de ese arco, asi que . . .



$$\frac{dx}{dt} = a\cdot(-2\cdot sen(t) + 2\cdot sen(2\cdot t)) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = a\cdot(2\cdot cos(t) - 2\cdot cos(2\cdot t))$$

por lo tanto . . .

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 8\cdot a^2\cdot(1 - sen(t)\cdot sen(2\cdot t) - cos(t)\cdot cos(2\cdot t))$$

$$= 8\cdot a^2\cdot(1 - cos(2\cdot t - t)) = 8\cdot a^2\cdot(1 - cos(t))$$

y aplicando (9.8) , se obtiene :

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= 2\cdot\int_0^{\pi} \sqrt{8\cdot a^2\cdot(1-cos(t))}\, dt \;=\; 4\cdot\sqrt{2}\cdot a\cdot\int_0^{\pi} \sqrt{1-cos(t)}\, dt$$

$$= 4\cdot\sqrt{2}\cdot a\cdot\left(-2\cdot\sqrt{1+cos(\pi)} + 2\cdot\sqrt{1+cos(0)}\right)$$

$$= 4\cdot\sqrt{2}\cdot a\cdot(2\cdot\sqrt{2}) \;=\; 16\cdot a$$

Forma polar

Si $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva en coordenadas polares, siendo r el radio vector y θ el ángulo polar, para determinar la longitud de la curva comprendida entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, es necesario transformar el elemento diferencial de arco ds de la forma rectangular a la forma polar por medio de las ecuaciones que relacionan a ambos tipos de coordenadas :

$$x = r\cdot cos(\theta) \qquad , \qquad y = r\cdot sen(\theta)$$

y dado que el radio vector r está dado por $r = f(\theta)$, quedan . . .

$$x = f(\theta)\cdot cos(\theta) \qquad , \qquad y = f(\theta)\cdot sen(\theta)$$

De ésta manera, se puede considerar que éstas ecuaciones representan una "forma paramétrica" de la curva polar, siendo θ el parámetro y por lo tanto . . .

$$dx = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)\cdot d\theta = \left[\left(\frac{df}{d\theta}\right)\cdot cos(\theta) - f(\theta)\cdot sen(\theta)\right]\cdot d\theta$$

$$dy = \left(\frac{dy}{d\theta}\right)\cdot d\theta = \left[\left(\frac{df}{d\theta}\right)\cdot sen(\theta) + f(\theta)\cdot cos(\theta)\right]\cdot d\theta$$

y el elemento diferencial de arco $(ds)^2$ queda expresado como . . .

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$= \left[\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2\cdot cos(\theta)^2 - 2\cdot\frac{df}{d\theta}\cdot cos(\theta)\cdot f(\theta)\cdot sen(\theta) + (f(\theta))^2\cdot sen(\theta)^2\right]\cdot(d\theta)^2 \ldots$$
$$+ \left[\left(\frac{df}{d\theta}\right)^2\cdot sen(\theta)^2 + 2\cdot\frac{df}{d\theta}\cdot cos(\theta)\cdot f(\theta)\cdot sen(\theta) + (f(\theta))^2\cdot cos(\theta)^2\right]\cdot(d\theta)^2$$

$$(ds)^2 = \left[\left(\frac{df}{d\theta} \right)^2 + (f(\theta))^2 \right] \cdot (d\theta)^2$$

de manera que la forma polar del elemento diferencial de longitud es . . .

$$ds = \left[\sqrt{(f(\theta))^2 + \left(\frac{df}{d\theta} \right)^2} \right] \cdot d\theta \; = \boxed{\left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} \right] \cdot d\theta} \qquad (9.9)$$

y la longitud de una curva polar $r = f(\theta)$ *continua* entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, es entonces :

$$\boxed{s = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} \right] d\theta} \qquad (9.10)$$

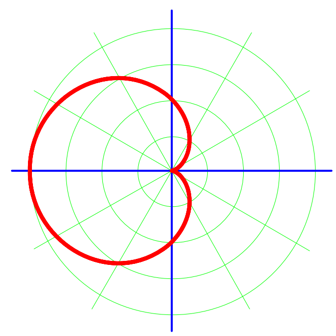
Ejemplo 11. Calcular el perímetro de la Cardioide $r = 2 \cdot a \cdot (1 - cos(\theta))$

Solución : Ésta es *la misma curva del ejemplo 10 anterior* , asi que aplicando (9.9) el diferencial polar de arco es :

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} \cdot d\theta$$

$$= \sqrt{[2 \cdot a \cdot (1 - cos(\theta))]^2 + (2 \cdot a \cdot sen(\theta))^2} \cdot d\theta$$

$$= \sqrt{8 \cdot a^2 \cdot (1 - cos(\theta))} \cdot d\theta$$



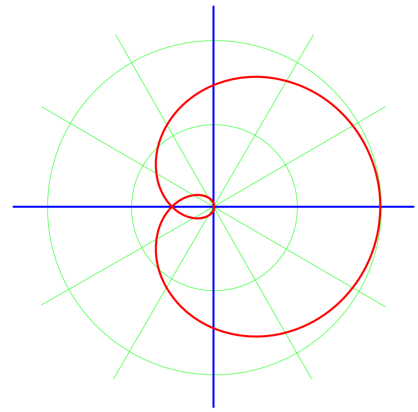
Aplicando (9.10) y usando la simetría de la curva resulta :

$$s = 2 \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{8} \cdot a \cdot \sqrt{1 - cos(\theta)} \, d\theta \; = \; 4 \cdot \sqrt{2} \cdot a \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{1 - cos(\theta)} \, d\theta$$

que es exactamente la misma integral definida del ejemplo 10, obteniéndose como resultado : $s = 16 \cdot a$.

Ejemplo 12. Calcular el perímetro de la curva $r = a \cdot sen^4 \cdot \left(\frac{\theta}{4}\right)$

Solución : Ésta curva se describe completamente cuando el ángulo polar varía desde 0 hasta $4 \cdot \pi$ radianes.
Aprovechando su simetría, la longitud total es 2 veces la longitud de la parte superior de la curva descrita para $0 < \theta < 2 \cdot \pi$:



$$s = 2 \cdot \int_0^{2\cdot\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

$$= 2 \cdot \left[\int_0^{2\cdot\pi} \sqrt{\left[a \cdot \left(sen\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)^4 \right]^2 + \left(a \cdot sen\left(\frac{\theta}{4}\right)^3 \cdot cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\right)^2}\, d\theta \right]$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\cdot\pi} a \cdot \sqrt{sen^6 \cdot \left(\frac{\theta}{4}\right) \cdot \left[sen^2 \cdot \left(\frac{\theta}{4}\right) + cos^2 \cdot \left(\frac{\theta}{4}\right)\right]}\, d\theta = 2 \cdot a \cdot \int_0^{2\cdot\pi} sen\left(\frac{\theta}{4}\right)^3 d\theta$$

$$= 8 \cdot a \cdot cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot cos^2 \cdot \left(\frac{\theta}{4}\right) - 1\right] \Bigg|_0^{2\pi} = \boxed{\frac{16}{3} \cdot a}$$

9. 3 *Superficies de revolución* .

Forma rectangular .

Cuando el arco de una curva continua $y = f(x)$ comprendido en el intervalo desde $x = a$ hasta $x = b$ se hace girar alrededor de un eje fijo, por ejemplo el eje X , se genera una superficie de revolución.

Es posible calcular el área de ésta superficie por medio de una integral definida considerándola como la suma infinita de las áreas laterales de conos truncados, como se ilustra enseguida .

Al dividir el intervalo $[a, b]$ en los subintervalos :

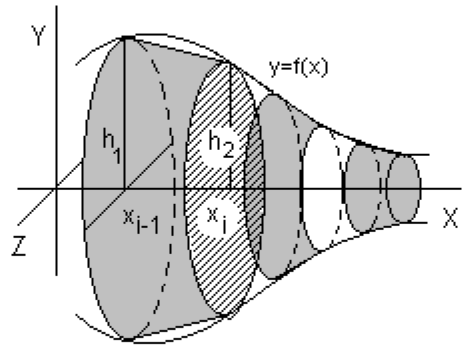
$$\Delta x_1 \ , \ \Delta x_2 \ , \ \Delta x_3 \ , \ldots , \ \Delta x_n$$

por medio de los puntos :

$$x_0 \ , \ x_1 \ , \ x_2 \ , \ldots , x_n$$

las ordenadas correspondientes sobre la curva son :

$$f(x_0) \ , \ f(x_1) \ , \ f(x_2) \ , \ldots , \ f(x_n)$$

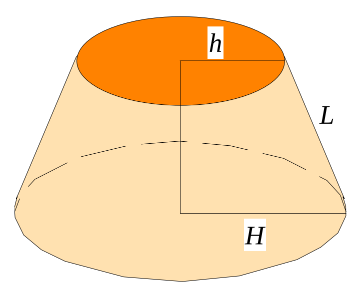


y los puntos correspondientes sobre la curva $y = f(x)$ pueden unirse con líneas rectas, las cuales al girar en torno al eje X, generan la superficies laterales de conos truncados .

Los radios de las bases circulares para el *i-ésimo* cono truncado son los valores $h = f(x_i)$ y $H = f(x_{i-1})$ donde $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ es la "altura" de tal cono.

De la geometría elemental, es bien sabido que el área lateral de un cono recto circular truncado de longitud lateral L está dada por :

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{h + H}{2} \right) \cdot L$$



Por lo tanto, el *i-ésimo* cono que se genera al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje X, tiene una longitud lateral que es la longitud de la cuerda Δs_i que une los puntos $\left(x_{i-1}, f(x_{i-1})\right)$ y $\left(x_i, f(x_i)\right)$ sobre la curva .

De modo que por la fórmula anterior, su área lateral ΔA_i es . . .

$$\Delta A_i = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \right) \cdot \Delta s_i$$

y del teorema de Pitágoras se deduce ahora que . . .

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i} \right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Pero del teorema del valor medio de obtiene que . . .

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{df(\beta_i)}{dx} \qquad ; \ x_{i-1} < \beta_i < x_i$$

donde $\dfrac{df(\beta_i)}{dx}$ es la derivada de $f(x)$ evaluada en β_i . De ésta manera, el área lateral *i-ésima* es :

$$\Delta A_i = 2\cdot\pi\cdot\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{df(\beta_i)}{dx}\right)^2}\right]\cdot\Delta x_i$$

y la superficie lateral de todos los conos truncados es la suma . . .

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i = \pi\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{df(\beta_i)}{dx}\right)^2}\right]\cdot\Delta x_i$$

extendida a todas las cuerdas Δs_i de la línea poligonal trazada sobre la curva $y = f(x)$.

En el límite cuando n (el número de conos truncados) tiende al infinito, ésta suma es en efecto el valor buscado de la superficie de revolución y queda . . .

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[\pi\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{df(\beta_i)}{dx}\right)^2}\right]\cdot\Delta x_i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\pi\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(2\cdot f(\beta_i)\right)\cdot\left[\sqrt{1+\left(\frac{df(\beta_i)}{dx}\right)^2}\right]\cdot\Delta x_i$$

que representa la integral definida :

$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx \qquad (9.11)$$

la cual también se puede escribir como . . .

$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_a^b y\,ds \quad .$$

donde ds es el elemento diferencial de longitud sobre la curva $y = f(x)$.

Esta integal se puede interpretar como la suma de un número infinito de "aros diferenciales " verticales de radio $y = f(x)$, ancho ds cuya área es por lo tanto $2\cdot\pi\cdot y\cdot ds$.

¿ **Qué pasa si la curva** $y = f(x)$ **gira alrededor del eje *Y*** ?

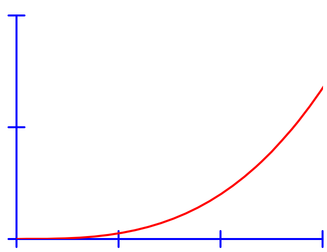
En principio no hay nada nuevo, el único cambio es que los elementos diferenciales de superficie ahora son "*aros horizontales*" de radio igual al valor de la abscisa x, ancho ds y área $2\cdot\pi\cdot x\cdot ds$, de modo que la suma infinita de todos ellos corresponde a la integral definida . . .

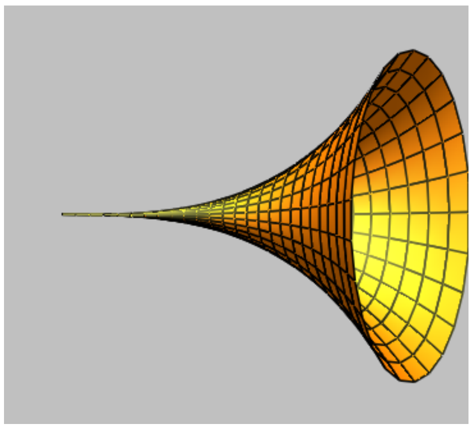
$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_c^d x\,ds = 2\cdot\pi\cdot\int_c^d x\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \qquad (9.12)$$

Sin embargo, podría suceder que la función $y = f(x)$ no sea biyectiva y que x *no sea una función de* y. En éste caso debemos calcular por separado las superficies de revolución generadas por las partes crecientes y decrecientes de la curva y luego sumarlas.

Ejemplo 13. Calcular el área de la superficie que se genera cuando el arco de la parábola cúbica $a^2\cdot y = x^3$ comprendido entre $x = 0$ y $x = a$, gira alrededor del eje X.

Solución : Considerando gráfica de la función $y = f(x) = \frac{x^3}{a^2}$, cuando el arco de la curva comprendido entre $x = 0$ y $x = a$ gira alrededor del eje X, se genera la superficie en forma de embudo mostrada en la siguiente figura a la derecha .





El elemento diferencial de arco en coordenadas rectangulares para ésta curva es :

$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx = \sqrt{1+\left(\frac{3\cdot x^2}{a^2}\right)^2}\cdot dx$$

Así que aplicando la fórmula (9.11) , se obtiene . . .

$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_a^b y\, ds \;=\; 2\cdot\pi\cdot\int_0^a \frac{x^3}{a^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{3\cdot x^2}{a^2}\right)^2}\, dx$$

que se simplifica a una integral inmediata bajo el cambio de variable $z = a^4 + 9\cdot x^4$ . . .

$$A = \frac{2\cdot\pi}{a^4}\cdot\int_0^a x^3\cdot\sqrt{a^4+9\cdot x^4}\, dx \;=\; \frac{2\cdot\pi}{36\cdot a^4}\cdot\int_{a^4}^{10\cdot a^4}\sqrt{z}\, dz$$

$$= \left(\frac{2\cdot\pi}{54\cdot a^4}\right)\cdot\left[\sqrt{\left(a^4+9\cdot a^4\right)^3} - \sqrt{\left(a^4+0\right)^3}\right]$$

$$= \frac{\pi\cdot a^2}{27}\cdot\left(10\cdot\sqrt{10}-1\right)$$

Forma paramétrica .

Si la curva que genera la superficie de revolución está dada en la forma paramétrica :

$$y = f(t) \quad , \quad x = g(t)$$

entonces basta con aplicar en las fórmulas (9.11) y (9.12) la forma correspondiente del diferencial de longitud de arco ds :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\cdot dt$$

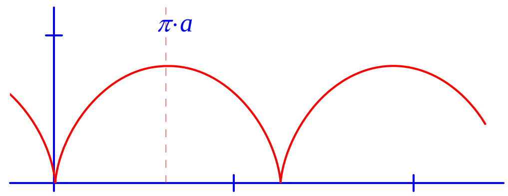
y cambiar los límites de integración para que correspondan adecuadamente al parámetro t de modo que se describa el arco de curva correspondiente .

Ejemplo 14. Calcular el área de la superficie que se genera al girar alrededor de su eje de simetría un arco de la cicloide :

$$x = a\cdot(\theta - sen(\theta)) \quad ; \quad y = a\cdot(1-cos(\theta))$$

Solución : El eje de simetría es la recta $x = \pi\cdot a$ puesto que la cicloide tiene valores simétricamente situados a la izquierda y a la derecha del ángulo $\theta = \pi$.

Considerando a y como función de x, podemos aplicar la fórmula (9.12) asi como la forma paramétrica del elemento diferencial de arco ds para obtener . . .



$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \cdot a \cdot (\theta - sen(\theta)) = a \cdot (1 - cos(\theta))$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \cdot a \cdot (1 - cos(\theta)) = a \cdot sen(\theta)$$

y . . .

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta = \sqrt{a^2 \cdot (1 - cos(\theta))^2 + a^2 \cdot sen^2 \cdot (\theta)} \cdot d\theta$$

$$= a \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos(\theta)} \cdot d\theta = 2 \cdot a \cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot d\theta$$

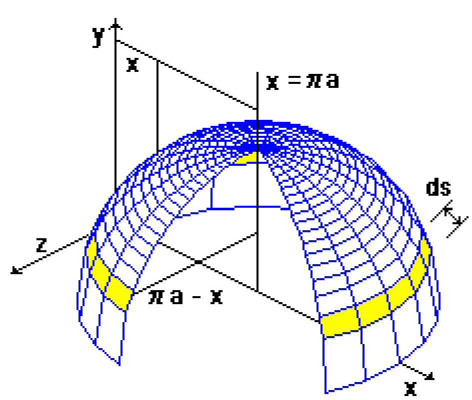
Los *"aros"* diferenciales son franjas horizontales de radio : $\pi \cdot a - x$, y la integral de superficie toma la forma . . .

$$A = 2 \cdot \pi \cdot \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\pi \cdot a - x)\, ds = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} [\pi \cdot a - a \cdot (\theta - sen(\theta))] \cdot 2 \cdot a \cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

Usando ahora la identidad trigonométrica : $sen(2 \cdot A) = 2 \cdot sen(A) \cdot cos(A)$ con $2 \cdot A = \theta$, se obtiene . . .

$$A = 4 \cdot \pi \cdot a \cdot \int_0^{\pi} \left(\pi \cdot a - a \cdot \theta + 2 \cdot a \cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

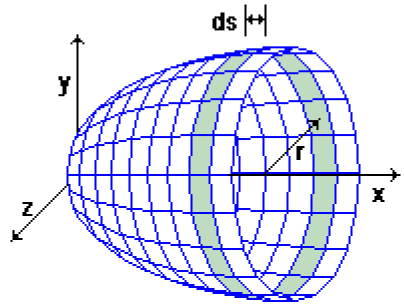
$$= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot (6 \cdot \pi - 8)$$



Si la cicloide gira alrededor del eje X, entonces el diferencial de superficie es un "*aro vertical*" de ancho ds y radio $y(\theta)$, de modo que la superficie total es la suma de todos esos aros , es decir . . .

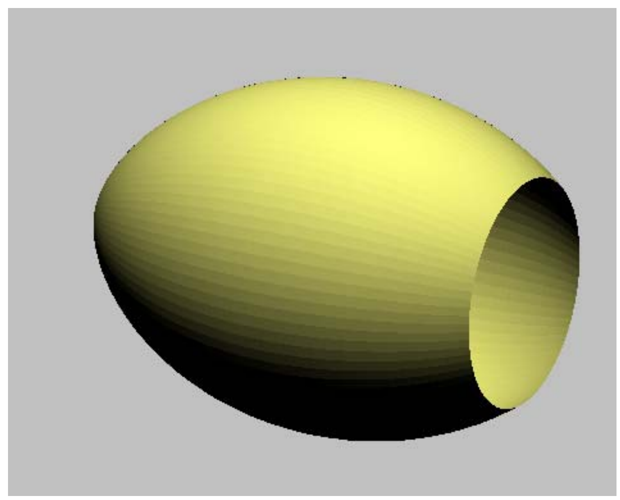
$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} y\,ds$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} y(\theta)\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

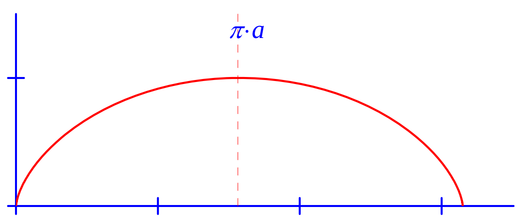


$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_{0}^{2\cdot\pi} a\cdot(1-\cos(\theta))\cdot 2\cdot a\cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = \frac{64}{3}\cdot a^2\cdot\pi$$

obteniéndose una superficie como la mostrada en corte en la figura de la derecha . . .



Si la cicloide gira alrededor del eje Y , hay un arco creciente (*desde* $x = 0$ *hasta* $x = \pi\cdot a$) y otro decreciente (*desde* $x = \pi\cdot a$ *hasta* $x = 2\cdot\pi\cdot a$) que generan cada uno sus propios elementos de superficie

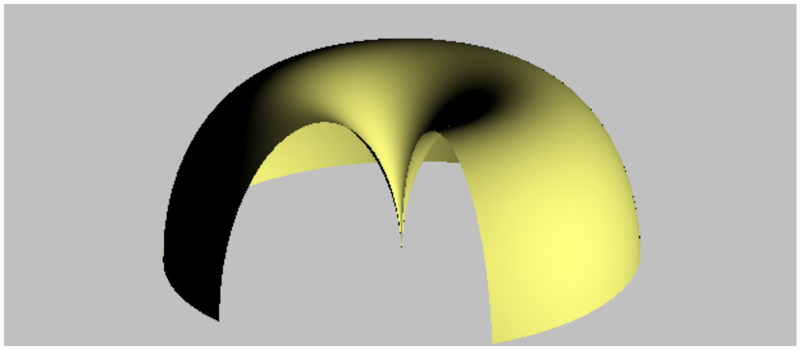


de manera que la superficie total es . . .

$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_{0}^{a\cdot\pi} x_1\,ds + 2\cdot\pi\cdot\int_{a\cdot\pi}^{0} x_2\,ds$$

Donde x_1 es el radio de los aros diferenciales construidos sobre el arco de la curva desde $x = 0$ *hasta* $x = \pi\cdot a$ y similarmente x_2 es el radio de los aros diferenciales sobre la otra rama de la cicloide .

En la figura se muestra en corte una parte de la superficie asi generada , la cual se calcula entonces como :



$$A = 2\cdot\pi\cdot\left[\int_0^{\pi} a\cdot(\theta - sen(\theta))\cdot 2\cdot a\cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta + \int_{\pi}^{2\cdot\pi} a\cdot(\theta - sen(\theta))\cdot 2\cdot a\cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta\right]$$

que se simplifica a . . .

$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{2\cdot\pi} a\cdot(\theta - sen(\theta))\cdot 2\cdot a\cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 16\cdot\pi^2\cdot a^2$$

Forma polar **.**

Cuando un arco de una curva polar $r = f(\theta)$ se hace girar alrededor del eje polar o alrededor de un radio polar fijo, se genera también una superficie de revolución .

En éste caso en las fórmulas (9.11) y (9.12), se debe usar el diferencial de arco en la forma polar :

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\cdot d\theta)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$$

así como las ecuaciones de transformación entre coordenadas polares y rectangulares :

$$x = r\cdot cos(\theta) \qquad ; \qquad y = r\cdot sen(\theta)$$

De modo que la fórmula para el cálculo de la *superficie generada cuando una curva polar gire alrededor del eje polar* es. . .

$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_a^b y\, ds \longrightarrow 2\cdot\pi\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\cdot sen(\theta)\cdot\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad (9.13)$$

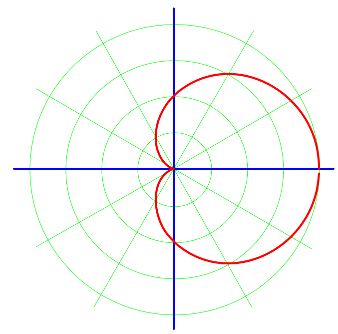
Y para una *superficie generada al girar un arco de curva polar alrededor de la recta a 90º del eje polar* (*el eje Y*) se tiene . . .

$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_a^b x\,ds \quad\longrightarrow\quad \boxed{2\cdot\pi\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\cdot cos(\theta)\cdot\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta} \tag{9.14}$$

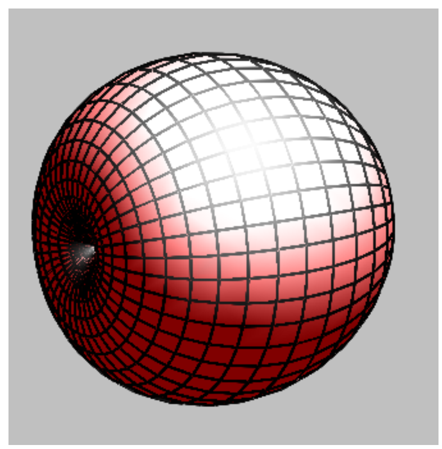
Ejemplo 15. Calcular el área de la superficie que se genera al girar alrededor del eje polar la Cardioide:

$$r = 2\cdot a\cdot(1+cos(\theta))$$

Solución : Esta curva se genera cuando el ángulo polar θ varía entre 0 y $2\cdot\pi$ y se muestra en la figura de la derecha.
Aprovechando su simetría respecto al eje polar, para generar la superficie buscada, solo es necesario que θ varíe entre 0 y π .



Cuando la gráfica de la Cardioide gira alrededor del eje polar, se genera la superficie mostrada a la derecha .
Para poder aplicar la forma polar de (9.13) calculemos primero la expresión del diferencial de arco polar para ésta curva en particular :



$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{dr}\cdot 2\cdot a\cdot(1+cos(\theta)) = -2\cdot a\cdot sen(\theta)$$

y por lo tanto . . .

$$ds = \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\cdot d\theta$$

$$= \sqrt{[2\cdot a\cdot(1+cos(\theta))]^2+(-2\cdot a\cdot sen(\theta))^2}\cdot d\theta = \sqrt{8}\cdot a\cdot\sqrt{1+cos(\theta)}\cdot d\theta$$

entonces . . .

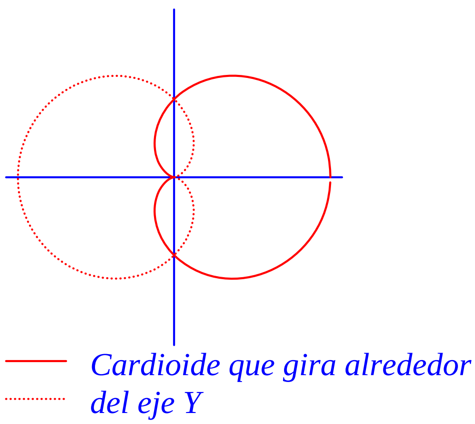
$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\cdot sen(\theta)\cdot\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

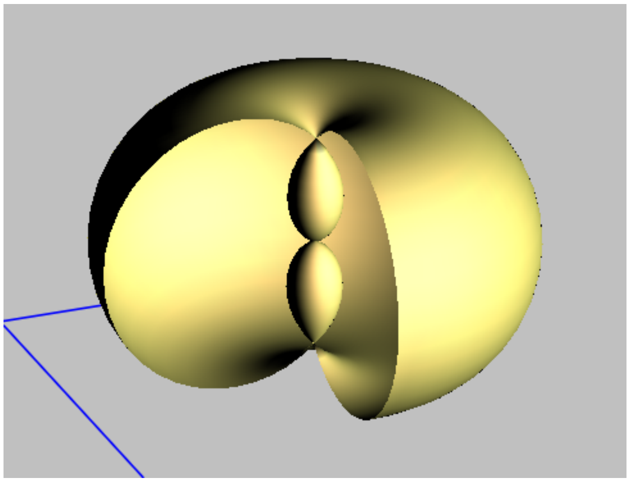
$$= 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\pi} 2\cdot a\cdot(1+cos(\theta))\cdot sen(\theta)\cdot\left(\sqrt{8}\cdot a\cdot\sqrt{1+cos(\theta)}\right)d\theta$$

y resulta . . .

$$A = \frac{128}{5}\cdot\pi\cdot a^2$$

Si la Cardioide se hace girar alrededor de la recta perpendicular al eje polar, es decir , en torno al eje Y , como se indica en la siguinte figura , se genera la superficie que se muestra en corte a la derecha . Para calcular esa superficie hueca que tiene una parte en el interior, usamos. . .





$$A = 2\cdot\pi\cdot\int_c^d x\,ds \qquad \text{es decir :} \qquad A = 2\cdot\pi\cdot\int_{\theta_1}^{\theta_2} r\cdot\cos(\theta)\cdot\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

y queda . . .

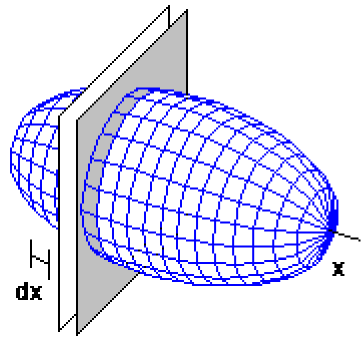
$$A = 2\cdot\pi\cdot\left[2\cdot\int_0^{\pi} 2\cdot a\cdot(1+\cos(\theta))\cdot\cos(\theta)\cdot\left(\sqrt{8}\cdot a\cdot\sqrt{1+\cos(\theta)}\right)d\theta\right]$$

$$A = 8\cdot\sqrt{8}\cdot\pi\cdot a^2\cdot\int_0^{\pi}\cos(\theta)\cdot\left[\sqrt{(1+\cos(\theta))^3}\right]d\theta = \frac{256}{5}\cdot\pi\cdot a^2$$

9.4 *Volúmenes que son función de su sección transversal* .

Si el área A de la sección transversal de un volumen geométrico es una función continua de una sola variable, es decir $A = f(x)$, entonces es posible imaginar al volumen formado por un número infinito de franjas o "*rebanadas*" diferenciales transversales (*de espesor infinitesimal* dx), que son todas de la misma forma y que varían solamente en tamaño .

Normalmente, la variable de la que depende la sección transversal está relacionada con el eje de simetría del volumen geométrico.



Así por ejemplo en la figura mostrada a la derecha, cada plano perpendicular al eje X hace un corte en el volumen y tiene cierta área transversal que es función de la posición x El volumen diferencial comprendido entre dos planos sucesivos separados entre si por la distancia diferencial dx, se puede aproximar entonces por el producto :

$$(area\_de\_la\_base) \times (altura)$$

es decir

$$dV = A(x)\cdot dx$$

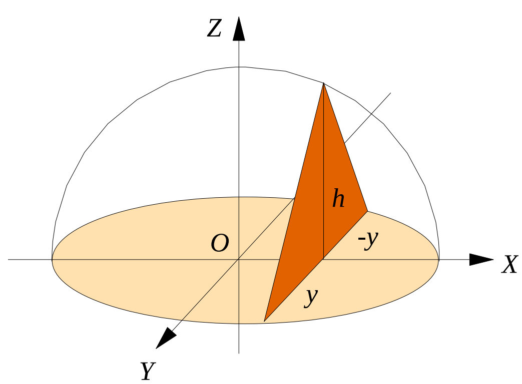
la suma de todos los elementos diferenciales de volumen será el volumen geométrico total V :

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad (9.15)$$

Ejemplo 16. Un objeto sólido tiene una base circular de radio a y toda sección transversal perpendicular a un diámetro fijo de la base es un triángulo equilátero. Calcular su volumen .

Solución : Ubicando a la circunferencia que sirve de base en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, tiene la ecuación:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

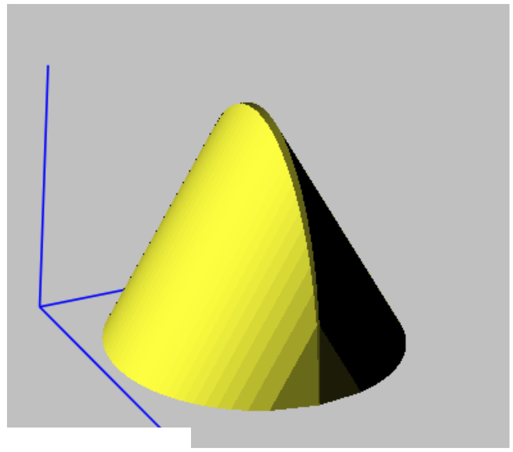


luego, para un valor dado de x, la ordenada y vale . . .

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

tanto positiva como negativa , así que la longitud de la base del triángulo equilátero es $2\cdot y$. Por lo tanto su altura es:

$$h = \sqrt{(2\cdot y)^2 - y^2} = \sqrt{3}\cdot y$$



el área del éste triángulo equilátero transversal es :

$$A(x) = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot y)\cdot\left(\sqrt{3}\cdot y\right) = (\sqrt{3})\cdot y^2$$

$$= \sqrt{3}\cdot\left(a^2 - x^2\right)$$

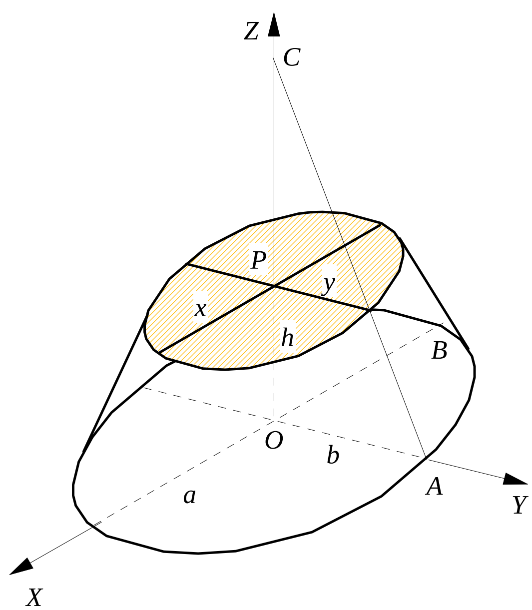
Aplicando la fórmula (9.15) se obtiene . . .

$$V = \int_{-a}^{a} A(x)\,dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{3}\cdot\left(a^2 - x^2\right)\,dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot a^3$$

Ejemplo 17. Hallar al volumen de un cono recto de altura h que tiene por base una elipse de eje mayor $2\cdot a$ y de eje menor $2\cdot b$

Solución : Escogiendo como origen de coordenadas el centro geométrico de la elipse que es la base del cono, entonces cualquier sección transversal del cono es paralela al plano XY y perpendicular al eje Z , de modo que a una altura h , tal sección es una elipse de eje mayor $2\cdot x$ y eje menor $2\cdot y$ que tiene por lo tanto el área : $A = \pi\cdot x\cdot y$



Pero de la semejanza de triángulos en la figura de la derecha se obtiene que :

$$\frac{x}{PC} = \frac{a}{OC} \quad \text{o} \quad \frac{x}{h-z} = \frac{a}{h}$$

$$\frac{y}{PC} = \frac{b}{OC} \quad \text{o} \quad \frac{y}{h-z} = \frac{b}{h}$$

Por lo tanto, substituyendo x e y resulta que el área de la sección elíptica transversal es una función de z que tiene la forma :

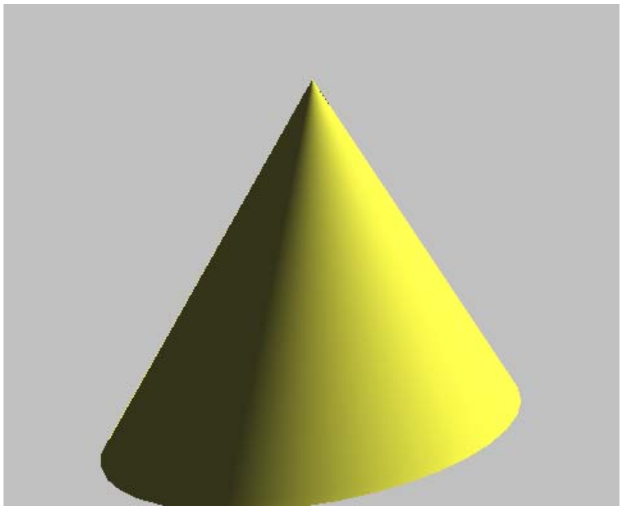
$$A(z) = \pi\left(a\cdot\frac{h-z}{h}\right)\cdot\left(b\cdot\frac{h-z}{h}\right)$$

El volumen generado es entonces :

$$V = \int_0^h A(z)\,dz$$

$$= \int_0^h \pi\cdot a\cdot b\cdot\left(\frac{h-z}{h}\right)^2 dz$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot a\cdot b\cdot h}$$



(x, y, z)

Que es la conocida fórmula de la geometría elemental para calcular el volumen de un cono recto .

Ejemplo 18. Calcular el volumen limitado por el plano $z = h$ y el paraboloide : $\dfrac{x^2}{A} + \dfrac{y^2}{B} = z$

Solución : Cualquier plano de la forma z = *constante*, es perpendicular al eje Z y corta del paraboloide una sección transversal elíptica .

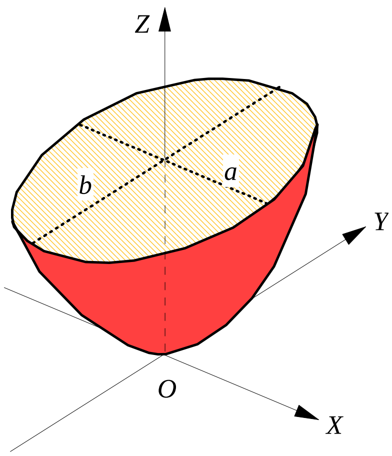
Comparando la ecuación general de una elipse con centro en el origen del plano XY : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

con la ecuación del paraboloide : $\dfrac{x^2}{A\cdot z} + \dfrac{y^2}{B\cdot z} = 1$

se deduce que . . .

$$a = \sqrt{A\cdot z} \quad , \quad b = \sqrt{B\cdot z}$$

son las longitudes de los semiejes de la sección transversal elíptica .



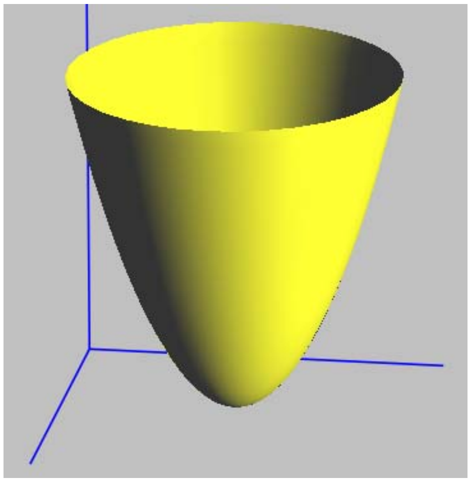
Luego el área de tal sección es : $A(z) = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot \sqrt{A \cdot B} \cdot z$

de modo que la sección transversal es una función de z y el volumen del paraboloide que está comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = h$ es entonces . . .

$$V = \int_0^h A(z)\,dz$$

$$= \sqrt{A \cdot B} \cdot \pi \cdot \left(\int_0^h z\,dz \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{A \cdot B} \cdot \pi \cdot h^2}$$



9.5 ***Volúmenes de revolución*** .

Como caso particular de la fórmula (9.15) se tiene el volumen generado por la rotación del área limitada por una curva continua que gira alrededor de un eje fijo, o por la rotación del área limitada entre dos ó más curvas continuas.
En éste caso, la sección transversal siempre será un círculo de área . . .

- $\pi \cdot x^2$ con radio x si la curva gira alrededor del eje X .
- $\pi \cdot y^2$ con radio y si la curva gira alrededor del eje Y .
- $\pi \cdot r^2$ con radio r si la curva gira alrededor de cualquier otra recta fija , donde r es la distancia perpendicular desde la curva hasta la recta que sirve de eje de giro.

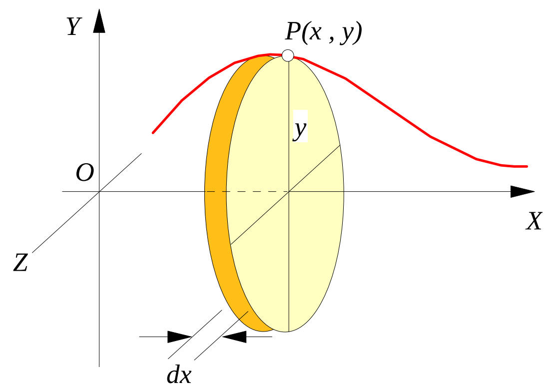
Se llega así a las correspondientes fórmulas para un *volumen de revolución* :

Caso I . El área limitada por la curva $y = f(x)$ ***, el eje*** X ***y las rectas verticales*** $x = a$; $x = b$ ***gira alrededor del eje*** X .

En éste caso para un punto P sobre la curva $y = f(x)$, los elementos diferenciales de volumen son cilindros rectos de radio y de ancho dx que tienen un volumen diferencial dado por : $dV = (\pi \cdot y^2) \cdot dx$
y entonces el volumen total será . . .

$$V = \int_a^b . dV$$

$$= \int_a^b \pi \cdot y^2\, dx = \boxed{\pi \cdot \int_a^b f(x)^2\, dx}$$

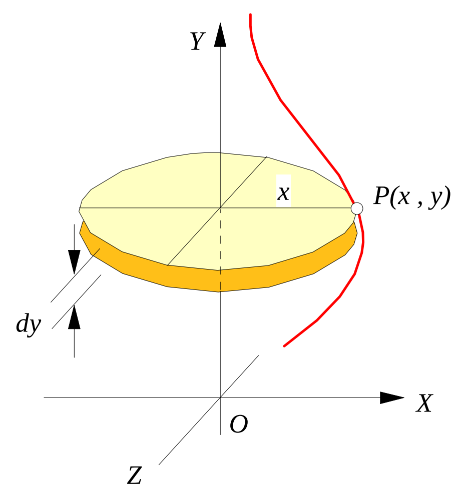


Caso II . El área limitada por la curva $x = g(x)$, el eje Y y las rectas horizontales $y = a$; $y = b$ gira alrededor del eje Y

En éste caso para un punto P sobre la curva $x = g(x)$, los elementos diferenciales de volumen son cilindros rectos de radio x que tienen un ancho dy y su volumen es : $dV = \left(\pi \cdot x^2\right) \cdot dy$
y entonces el volumen total será . . .

$$V = \int_a^b . dV$$

$$= \int_a^b \pi \cdot x^2\, dy = \boxed{\pi \cdot \int_a^b g(y)^2\, dy}$$

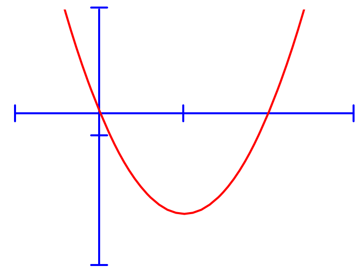


Ejemplo 19. Calcular el volumen que se genera cuando el área limitada por la parábola $y = a \cdot \left(x^2 - c \cdot x\right)$ el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = c$ gira alrededor del eje X

Solución : La curva corta al eje X precisamente en $x = 0$ y en $x = c$

Cualquier sección diferencial transversal al eje X es un cilindro de volumen $dV = \pi \cdot y^2 \cdot dx$, por lo tanto :

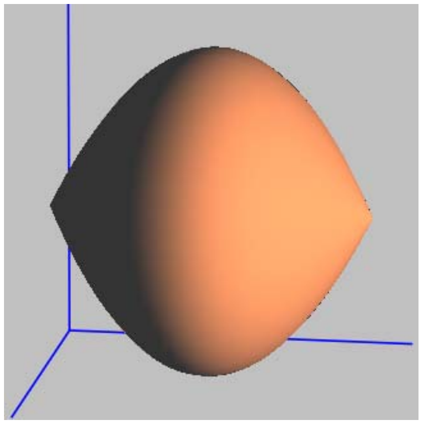
$$V = \pi \cdot \int_a^b y^2 \, dx$$



$$= \pi \cdot \int_0^c \left[a \cdot \left(x^2 - c \cdot x \right) \right]^2 dx$$

$$= a \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot (c)^3 - \frac{1}{2} \cdot c \cdot (c)^2 \right] - 0$$

$$= \frac{\pi}{30} \cdot a^2 \cdot c^5$$

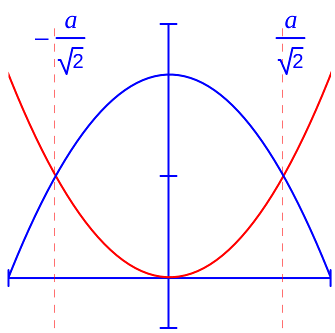


El volumen generado corresponde al de un "*paraboloide*" circular de revolución como el mostrado en la figura de la derecha.

Ejemplo 20. Calcular el volumen que se genera cuando el área limitada por las curvas $y = x^2$ y $y = a^2 - x^2$ gira alrededor del eje Y

Solución : Primeramente se debe localizar el área entre las curvas la cual, al girar alrededor del eje Y, genera el volumen pedido. Para éste fin, es necesario determinar los puntos de intersección de las curvas igualando sus ordenadas. . .:

$$x^2 = \left(-x^2 + a^2 \right)$$

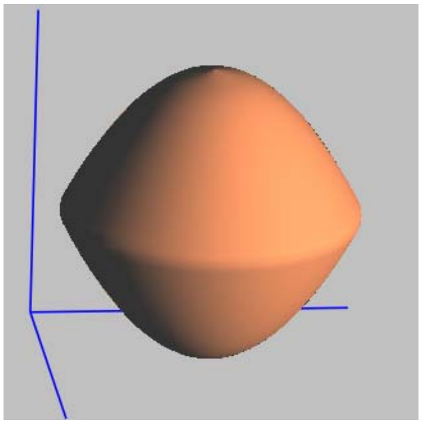


se deduce que $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ y $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

y por lo tanto : $y = x^2 = \frac{a^2}{2}$

Los elementos diferenciales de volumen son entonces cilindros horizontales con centro sobre el eje Y, cuyo radio está sobre uno de los puntos de las dos parábolas es decir . . .

$$V = \pi\cdot\int_{0}^{\frac{a^2}{2}} (x_1)^2\,dy + \pi\cdot\int_{\frac{a^2}{2}}^{a^2} (x_2)^2\,dy$$



donde x_1 es la abscisa de la parábola que se extiende "hacia arriba" y x_2 es la abscisa de la parábola que se extiende "hacia abajo" .

El volumen generado tiene la forma de "ovni" y vale :

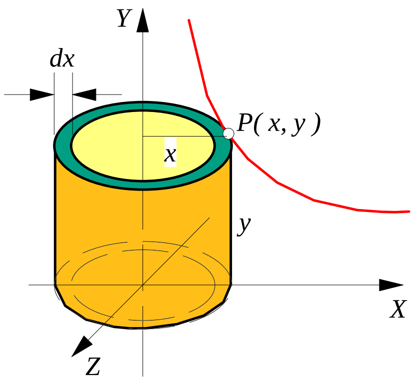
$$V = \pi\cdot\int_{0}^{\frac{a^2}{2}} y\,dy + \pi\cdot\int_{\frac{a^2}{2}}^{a^2} \left(a^2 - y\right)dy = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot a^4$$

Algunas veces, cuando los diferenciales de volumen tienen dos o más formas distintas, como en el ejemplo anterior, es preferible formar otro elemento de volumen diferencial que tenga una forma única.

Por ejemplo, si el área bajo la curva $y = f(x)$ gira en torno al eje Y ó el área bajo la curva $x = g(y)$ gira alrededor del eje X .

En éstos casos los diferenciales de volumen pueden verse como *cilindros "huecos"* de un espesor infinitesimal como se ilustra en las siguientes figuras . . .

Cuando el área bajo la curva $y = f(x)$ comprendida entre las rectas verticales $x = a$, $x = b$ gira alrededor del eje Y , los diferenciales de volumen son "*cilindros huecos verticales*" de altura y y radio x, que tienen un ancho diferencial dx y en consecuencia su volumen es igual al perímetro circular $2\cdot\pi\cdot x$ multiplicado por el área transversal rectangular $y\cdot dx$, en otras palabras. . .



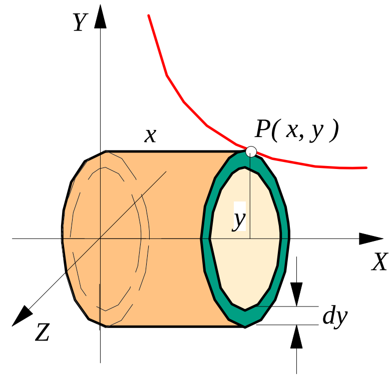
$$dV = (2\cdot\pi\cdot x)\cdot(y\cdot dx)$$

De manera que el volumen total generado es . . .

$$V_Y = 2\cdot\pi\cdot\int_a^b x\cdot y\,dx \qquad (9.16)$$

Similarmente, si el área bajo la curva $x = g(y)$ comprendida entre las rectas horizontales $y = c$, $y = d$ gira alrededor del eje X , los elementos diferenciales de volumen son "*cilindros huecos horizontales*" de altura x y radio y que tienen un ancho diferencial dy para cada punto *P* sobre la curva y en consecuencia su volumen diferencial es igual al perímetro circular $(2\cdot\pi\cdot y)$ multiplicado por el área transversal rectangular $(x\cdot dy)$, esto es. . .

$$dV = (2\cdot\pi\cdot y)\cdot(x\cdot dy)$$



De manera que el volumen total generado es . . .

$$V_X = 2\cdot\pi\cdot\int_c^d x\cdot y\, dy \qquad (9.17)$$

Asi por ejemplo, en el ejercicio anterior, igual hubiera sido considerar elementos diferenciales de volumen V_Y en forma de *cilindros verticales huecos*, de altura :

$$(y_2 - y_1) = (-x^2 + a^2) - x^2 = (a^2 - 2\cdot x^2)$$, "radio" x y espesor dx y el volumen de rotación

se hubiese calculado entonces como sigue . . .

$$V_Y = 2\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} x\cdot(-2\cdot x^2 + a)\, dx = 2\cdot\pi\cdot\left[\left[\frac{-1}{2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^4 + \frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2\right] - 0\right] = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot a^2$$

obteniéndose por supuesto el mismo resultado.

Ejemplo 21. Calcular el volumen que se genera cuando área encerrada por el circulo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ (con $a \le b$) gira alrededor del eje X . (*El volumen generado se llama Toroide o toro*)

Solución : Para un punto P sobre la circunferencia del círculo, formemos un "*cilindro diferencial horizontal hueco*" de radio y , ancho $2\cdot x$, espesor dy cuyo volumen es por lo tanto :

$$dV = 2\cdot\pi\cdot y\cdot(2\cdot x)\cdot dy$$

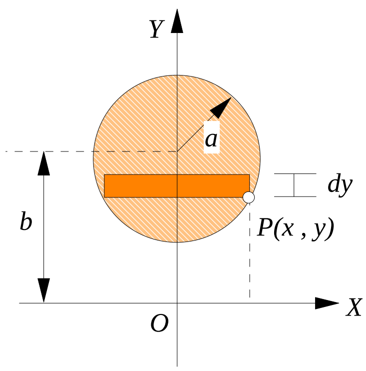
con la ordenada y variando desde $b - a$ hasta $b + a$.

Además de la ecuación para la circunferencia de radio a y centro en $(0, b)$

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2$$

se sigue que . . .

$$x = g(y) = \sqrt{a^2 - (y-b)^2}$$

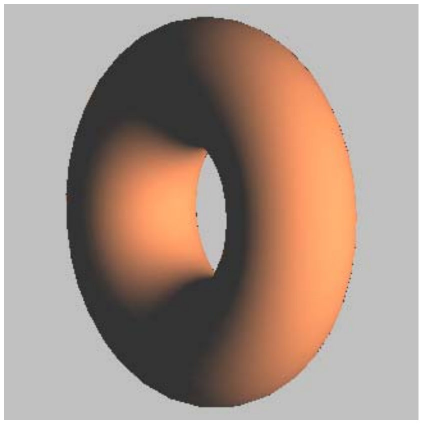


El volumen de revolución es entonces . . .

$$V_y = 2\cdot\pi\cdot\int_c^d y\cdot g(y)\,dy$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\int_{b-a}^{b+a} 2\cdot y\cdot\sqrt{a^2-(y-b)^2}\,dy$$

$$= 2\cdot\pi^2\cdot b\cdot a^2$$

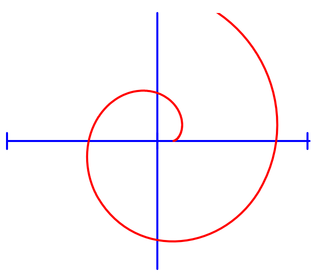


EJERCICIOS 9.2

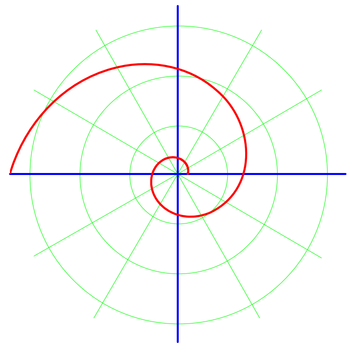
Longitud de arco de una curva .

1. ¿Qué longitud tiene la curva $y^2 = x^3$ desde el origen hasta el punto $(4,8)$?
2. Hallar la longitud del arco de la curva $y = e^x$, comprendido entre $x = 0$ y $x = 1$
3. Calcular la longitud del arco de la curva $y = ln(x)$ desde $x = \sqrt{3}$ hasta $x = \sqrt{8}$
4. Hallar la longitud de arco de la curva $x = ln(sec(y))$ comprendido entre $y = 0$ y $y = \frac{\pi}{3}$.
5. Hallar la longitud de la evolvente del círculo : $\begin{bmatrix} x(t) = a\cdot(cos(t) + t\cdot sen(t)) \\ y(t) = a\cdot(sen(t) - t\cdot cos(t)) \end{bmatrix}$;

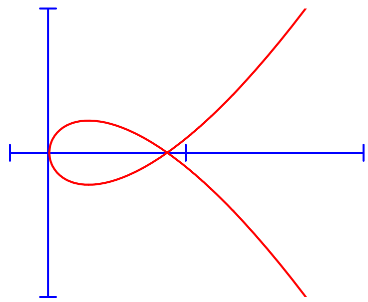
$0 \le t \le 2\cdot\pi$



6. Hallar la longitud de la primera espira de la espiral logarítmica $r(\theta) = e^{a\cdot\theta}$



7. Hallar la longitud de la parte cerrada de la curva : $9\cdot a\cdot y^2 = x\cdot(x - 3\cdot a)^2$



Superficies de revolución .

8. ¿Cuál es el área de la superficie generada al hacer girar alrededor del eje X el arco de la senoide :
$y(x) = sen(x)$; $0 < x \le \pi$?

9. El arco de la curva $y(x) = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = \infty$, se hace girar alrededor del eje X .
Hallar el área de la superficie generada .

10. Hallar el área de la superficie obtenida al girar de la astroide $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ alrededor del eje Y

11. Hallar el área de la superficie limitada en una esfera de radio r por dos planos paralelos, cada uno de ellos a una distancia $\frac{d}{2}$ del centro . (*Sugerencia : Usar coordenadas polares*).

12. Hallar el área de la superficie que corta de una esfera de radio r, un cono recto circular de semiángulo θ que tiene su vértice en el centro de la esfera .

13. Una elipse horizontal de semieje mayor a, semieje menor b y con centro en el origen de coordenadas, gira alrededor del eje X . ¿Cuál es el valor del área del elipsoide de revolución que se genera ?

Volúmenes de revolución y con secciones transversales conocidas .

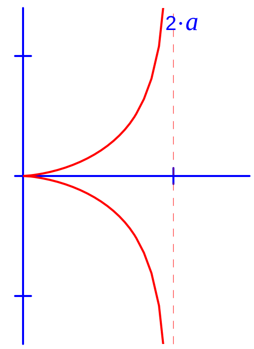
14. Hallar el volumen que se genera haciendo girar la curva llamada *Cisoide de Diocles* :

$$y^2 = \frac{x^3}{2 \cdot a - x}$$

alrededor de su única asíntota : $x = 2 \cdot a$.

Sugerencia : Usar la forma paramétrica de la Cisoide :

$$x = 2 \cdot a \cdot sen^2 \cdot (\theta) \quad ; \quad y(\theta) = 2 \cdot a \cdot tan(\theta) \cdot sen^2 \cdot (\theta)$$



15. Hallar el volumen obtenido al hacer girar alrededor del eje dado, el área plana que limita la curva .

- El círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de su diámetro
- El área entre las rectas : $y = (6 - x)$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ alrededor del eje X .
- El área limitada por el arco de la parábola $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ entre los puntos $(0,0)$ y (a,b) , el eje X , alrededor de su eje de simetría , y también alrededor del eje Y .
- La superficie limitada por una astroide, alrededor del eje Y
- El área limitada por una arcada de $y = cos(2 \cdot x)$ alrededor del eje X .
- El área limitada por $y = x \cdot e^x$, $y = 0$, $x = 1$ alrededor del eje X .
- El área limitada por la elipse $9 \cdot x^2 + 16 \cdot y^2 = 144$ alrededor del eje Y .
- El área limitada por la curva $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \sqrt[3]{\left(\frac{y}{b}\right)^2} = 1$ alrededor del eje Y .

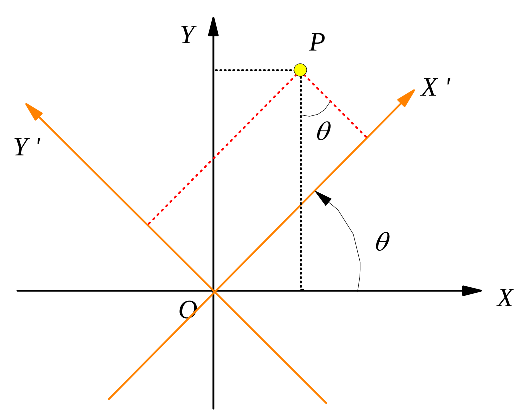
16. Calcular el volumen que se genera haciendo girar alrededor de la recta dada , el área que ésta corta de la curva correspondiente .

$y = 3$; $y(x) = 4 \cdot x - x^2$.

$y = x$; $y(x) = x^2$

$y = x + \frac{33}{4}$; $y(x) = 9 - x^2$

$y = 1 - x$; $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$



Sugerencia : Hacer una rotación de los ejes de coordenadas, de la forma :

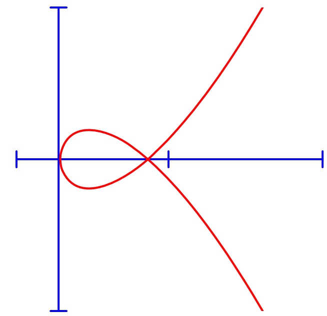
$$\begin{pmatrix} x = x' \cdot cos(\theta) - y' \cdot sen(\theta) \\ y = x' \cdot sen(\theta) + y' \cdot cos(\theta) \end{pmatrix}$$

donde θ es el ángulo de rotación , de manera que la ecuación de la curva se transforme para que la recta alrededor de la cual gira sea uno de los nuevos ejes de coordenadas.

17. Dada la curva paramétrica :

$$x(t) = t^2 \quad ; \quad y(t) = a \cdot t - t^3$$

hallar el área limitada por su lazo y el volumen de revolución generado por éste cuando la curva gira alrededor del eje X .



18. Un objeto tiene una base circular de radio r . Hallar el volumen del objeto si cada sección plana que es perpendicular a un diámetro del círculo es :

a) Un triángulo equilátero.
b) Un triángulo rectángulo isósceles, con hipotenusa sobre la base.
c) Un triángulo rectángulo isósceles , con cateto sobre la base .
d) Un triángulo isósceles, con altura igual a la base.

19. Un volumen en forma de cuerno se genera moviendo un círculo, con los extremos de su diámetro paralelo al eje X y sobre las curvas parabólicas : $y^2 + 8 \cdot x = 64$; $y^2 + 16 \cdot x = 64$ en el primer cuadrante. Hallar su volumen .

20. Un triángulo equilátero variable se mueve con su plano perpendicular al eje X mateniendo los vértices de su base sobre las curvas : $y^2 = 16 \cdot a \cdot x$; $y^2 = 4 \cdot a \cdot x$ situadas por encima del eje X . Calcular el volumen que el triángulo genera si se mueve desde el origen hasta $x = a$.

21. Los ejes de dos cilindros circulares de radio r, se intersectan en ángulo recto. Hallar su volumen común .

22. Calcular el volumen de un cono recto de altura h que tiene una base elíptica de eje mayor $2 \cdot a$ y eje menor $2 \cdot b$

23. La base de un sólido es el área acotada en el primer cuadrante por la recta $4 \cdot x + 5 \cdot y = 20$ y los ejes de coordenadas. Hallar su volumen si toda sección plana perpendicular al eje X es un semicírculo .

24. Se perfora un orificio de 1 *cm* de radio a lo largo del diámetro de una esfera de radio 6 *cm*. Hallar el volumen de la esfera perforada .

<u>*Respuestas*</u> . Ejercicio 9.2

1. $\frac{8}{27} \cdot \left(10 \cdot \sqrt{10} - 1\right)$

2. $\sqrt{1+e^2} + ln\left[\frac{\left(1+\sqrt{1+e^2}\right)}{e \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)}\right] - \sqrt{2}$

3. $1 + ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

4. $ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

5. $2\cdot\pi\cdot a^2$

6. $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}\cdot\left(e^{2\cdot a\cdot\pi}-1\right)$

7. $2\cdot\displaystyle\int_0^{3\cdot a}\sqrt{1+\frac{(a-x)^2}{4\cdot a\cdot x}}\,dx = 4\cdot\sqrt{3}\cdot a$

8. $2\cdot\pi\cdot\left(\sqrt{2}+ln(\sqrt{2}+1)\right)$

9. $\pi\cdot\left(\sqrt{2}+ln(\sqrt{2}+1)\right)$

10. $\dfrac{12}{5}\cdot\pi\cdot a^2$

11. $2\cdot\pi\cdot r\cdot d$

12. $2\cdot\pi\cdot r^2\cdot\left(1-cos(\theta)\right)$

13. $4\cdot\pi\cdot\left(b^2+\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot a^2\cdot arcsen\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right)$

14. $2\cdot\left(\pi^2\cdot a^3\right)$

15. a) $\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$ b) $39\cdot\pi$ c) $\pi\cdot p\cdot a^2$, $\dfrac{8}{3}\cdot\pi\cdot a^3\cdot p$

d) $\dfrac{12}{5}\cdot\pi\cdot a^2$ e) $\dfrac{\pi^2}{2}$ f) $\dfrac{1}{4}\cdot\pi\cdot\left(e^2-1\right)$

g) $64\cdot\pi$ h) $\dfrac{4}{5}\cdot\pi\cdot b\cdot a^2$.

16. a) $\dfrac{16}{15}\cdot\pi$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{60}\cdot\pi$ c) $\dfrac{8\cdot\sqrt{2}}{15}\cdot\pi$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{15}\cdot\pi$

17. $A = \dfrac{4}{15}\cdot\sqrt{a^5}$, $V = \pi\cdot\dfrac{a^4}{12}$

18. a) $\dfrac{4\cdot r^3}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{4\cdot r^3}{3}$ c) $\dfrac{8\cdot r^3}{3}$ d) $\dfrac{8\cdot r^3}{3}$

19. $\dfrac{256}{15}\cdot\pi$

20. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot a^3$

21. $\dfrac{16\cdot r^3}{3}$

22. $\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot a\cdot b\cdot h$