

Transformada de Laplace

Ing. Juan Sacerdoti

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
Universidad de Buenos Aires

2005

V 1.00¹

¹*Agradecemos al Sr. Alejandro Quadrini por la transcripción de este documento.*

Índice

1. Introducción	1
1.1. ¿Qué es una transformada?	1
1.2. La aplicación de la Transformada de Laplace	2
2. Transformada de Fourier. Sus limitaciones	2
3. Función de Heaviside	3
4. Definición de T.L.	4
4.1. Definición	4
4.2. Notación de la T.L.	5
4.3. Relación entre T.L. y T.F.	5
5. Condiciones de existencia	5
5.1. Teoremas de CV para funciones acotadas	5
5.2. Convergencia absoluta. Abscisa de CV	6
5.3. Convergencia simple. Abscisa de CV	11
5.4. Convergencia para funciones de orden exponencial	14
5.4.1. Funciones de orden exponencial (FOE)	14
5.4.2. Definición de función CPOE	18
6. Propiedades básicas de la T.L.	18
6.1. Linealidad	18
6.2. Transformada de la derivada de f' . Derivación en t	19
7. Aplicación de la T.L. a la resolución de sistemas y ecuaciones diferenciales lineales	19
8. Transformadas elementales	23
8.1. Constante-Heaviside	23
8.2. Función potencial	23
8.3. Exponencial	23
8.4. Cos, Sen	24
8.5. Cosh, Senh	24
8.6. Tabla de transformadas elementales	24
9. Propiedades de la T.L. Segunda parte	25
9.1. Integración en t	25
9.2. Derivación en s	26
9.3. Integración en s	27
9.4. Desplazamiento en t	29
9.5. Desplazamiento en s	29
9.6. Cambio de $t \rightarrow k t$. Cambio de escala	29
9.7. Convolución	30
9.8. Transformada de funciones periódicas	32
9.9. Propiedades de la Transformada de Laplace. Tabla	34
10. Propiedades de la T.L. Tercera parte	35
10.1. Primer teorema del orden de la T.L.	35
10.2. Segundo teorema del orden de la T.L.	36
10.3. Teorema del valor inicial	36
10.4. Teorema del valor final	37
10.5. Propiedades del producto de convolución	37

11.Fórmula de reciprocidad de la T.L	38
11.1. Teorema de reciprocidad de la T.L.	38
11.2. Inversión. Cuando las singularidades de $F(s)$ son puntos singulares aislados	41
11.3. Fórmula de inversión cuando $F(s)$ tiene puntos de ramificación	45
11.4. Teorema de Heaviside	46
11.5. Ejercicios de antitransformación	47
12.Transformada de Laplace de Funciones Especiales	53
12.1. Función a^t	53
12.2. Función logaritmo	53
12.3. Funciones de Bessel $J_0(t)$	54
12.4. Funciones de Bessel $J_n(t)$	56
12.5. Relaciones entre sen y J_n	57
12.6. Funciones de Bessel hiperbólicas	58
12.7. Funciones cos y sen integral	59
12.8. Polinomios de Laguerre	60
13.Resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales	60
13.1. ED lineales de coeficientes constantes	61
13.2. Sistemas de ED lineales con coeficientes constantes	62
13.3. Ecuaciones Integro-Diferenciales	65
14.Aplicaciones	66
14.1. Resolución del modelo EDL con coeficientes constantes	67
14.1.1. Ecuación general en s	67
14.2. Respuesta para entrada nula (movimiento libre)	67
14.2.1. Condiciones de estabilidad en caso de entrada nula	70
14.2.2. Sistemas de entrada nula no amortiguados	72
14.2.3. Tabla para caso de entrada nula (movimiento libre)	72
14.3. Respuesta para entrada forzada. $i(t) = A$ (constante)	73
14.4. Respuesta para el caso general de entrada forzada	74
14.4.1. Respuesta a s_1, s_2	74
14.4.2. Respuesta a los polos de $I(s)$	75

1. Introducción

1.1. ¿Qué es una transformada?

Dados dos espacios E y E' con sendas leyes de composición interna T y T' , de manera que conformen dos estructuras (ET) y $(E'T')$, se llama *transformada* a una aplicación biyectiva $f : E \rightarrow E'$ que establezca un isomorfismo entre las estructuras (ET) y $(E'T')$

Es decir:

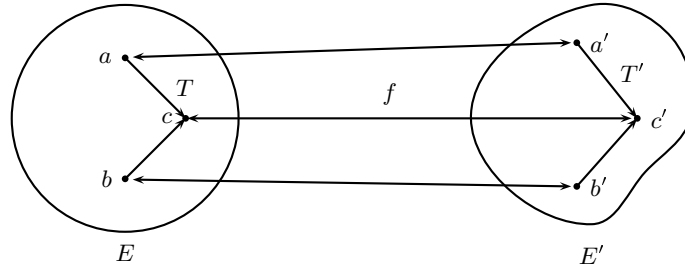


Figura 1: Isomorfismo f entre las estructuras (ET) y $(E'T')$.

$$T : E \times E \rightarrow E$$

$$(a, b) \mapsto c$$

$$T' : E' \times E' \rightarrow E'$$

$$(a', b') \mapsto c'$$

$$f : E \rightarrow E' \quad f \in \text{biyectiva}$$

$$a \leftrightarrow a'$$

$$b \leftrightarrow b'$$

$$aTb \leftrightarrow a'T'b'$$

Por medio de la transformada se establece, entonces, un comportamiento isomorfo entre las estructuras (ET) y $(E'T')$; que permite obtener, usando la transformada f como puente, el resultado de la composición interna T conociendo el de T' , o viceversa.

Por ejemplo, el resultado de T en E se puede obtener:

- 1º Transformando $f : a \rightarrow a'$
 $b \mapsto b'$
- 2º Componiendo $T' : (a', b') \rightarrow c' = a'T'b'$
- 3º Antitransformando $f^{-1} : c' \rightarrow c = aTb$

Por supuesto que el uso de la transformada, que se basa en la analogía de las estructuras isomorfas, se puede justificar solamente si el camino indirecto de: transformación, composición y antitransformación es más sencillo que el camino directo de la composición T .

Un ejemplo simple de la idea de transformada es el cálculo logarítmico para el producto de dos números reales positivos.

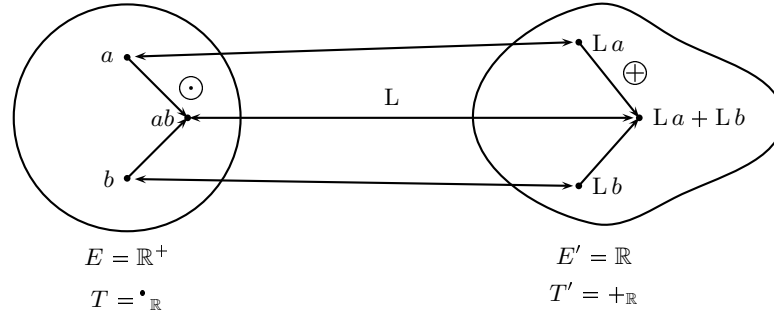


Figura 2: Isomorfismo, mediante L , entre las estructuras $(\mathbb{R}^+ \cdot)$ y $(\mathbb{R} +)$.

$$\begin{aligned}
 L : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R}' & L \in \text{biyectiva} \\
 a &\longleftrightarrow La \\
 b &\longleftrightarrow Lb \\
 a \cdot b &\longleftrightarrow La + Lb
 \end{aligned}$$

1.2. La aplicación de la Transformada de Laplace

La transformada de Laplace (T.L.) es una aplicación entre espacios de funciones.

Su aplicación principal es que reduce las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, en ecuaciones algebraicas lineales.

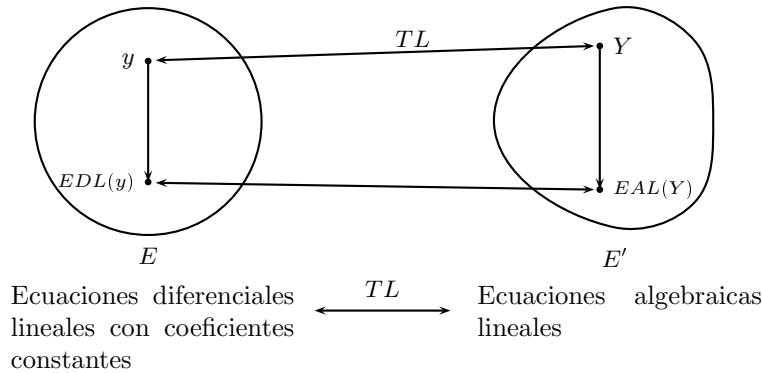


Figura 3: Transformada de Laplace entre el conjunto de EDL y el de EAL.

Con lo cual se obtiene un método poderoso, por rápido y eficaz, para resolver ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes.

Además, con la T.L. se resuelven con facilidad ecuaciones diferenciales de coeficientes no constantes en derivadas parciales y ecuaciones integrales.

Por todo esto, la T.L. es de gran aplicación en los modelos de la técnica.

2. Transformada de Fourier. Sus limitaciones

La transformada de Laplace tiene su origen en las limitaciones de la transformada de Fourier (T.F.), de la cual es un caso particular.

Ambas transformaciones tienen en esencia las mismas propiedades, pero la T.F. tiene un conjunto muy limitado de funciones sobre las cuales puede ser aplicada directamente, pues sus condiciones de existencia son muy restrictivas.

El teorema de la Integral de Fourier, que genera la T.F. es:

Teorema 2.1 (Integral de Fourier).

$$\left. \begin{array}{l}
 H_1) \quad f \in CP/\mathbb{R} \\
 H_2) \quad \begin{array}{l} f' \in CP/t^- \\ f' \in CP/t^+ \end{array} \\
 H_3) \quad \begin{array}{l} \int_{V_{-\infty}} |f| dt \in CV \\ \int_{V_{+\infty}} |f| dt \in CV \end{array}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l}
 T_1) \quad f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau d\omega \\
 T_2) \quad \begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ f^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{cases}
 \end{array} \right.$$

Donde se pueden observar las expresiones de la transformada de Fourier y su antitransformada.

La hipótesis H_3 es la que trae las restricciones es la aplicación de la T.F, pues la exigencia de la convergencia absoluta de f en un $V_{+\infty}$ y en un $V_{-\infty}$ es muy restrictiva, tanto que funciones fundamentales para el análisis como:

$$t, \text{sen}(t), e^t$$

no las satisfacen.

Esto lleva la definición de la T.L.

3. Función de Heaviside

La *función de Heaviside*, necesaria para la T.L, se define como:

$$\begin{aligned}
 H : \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 t &\longmapsto \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

y es llamada también *función escalón* o *salto unitario*.

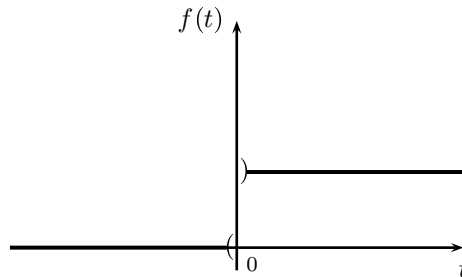


Figura 4: Función de Heaviside.

Observación 1: La función de Heaviside no se ha definido en $t = 0$, pues ello no tiene importancia. Se puede, sin embargo, definir como algunos autores $H : 0 \longmapsto \frac{1}{2}$. También es de uso común la función escalón desplazada $H(t - a)$.

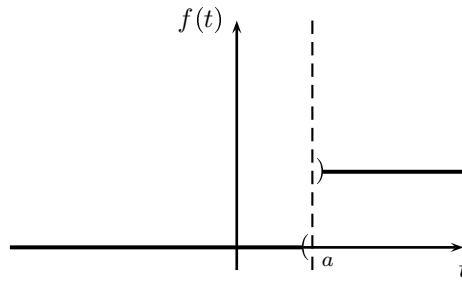


Figura 5: Función de Heaviside desplazada.

4. Definición de T.L.

4.1. Definición

La transformada de Laplace es:

$$\text{TL} : E \longrightarrow E'$$

$$\begin{aligned} f(t) \mapsto F(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(t) f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(t) f(t) e^{-st} dt \quad : \quad s = x + iy \end{aligned}$$

La transformada de Laplace es entonces una aplicación del espacio E de funciones reales, sobre el espacio E' de funciones complejas; donde $f(t)$ se llama *función original* y $F(s)$ se llama *función transformada*. A e^{-st} se la denomina *núcleo de la transformación*.

Observación 1: La T.L. también se extiende como aplicación de espacios complejos sobre espacios complejos.

Observación 2: En la mayoría de los libros se define:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Efectivamente, si se toma la definición original se llega a este resultado:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(t) f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Sin embargo, en el caso de funciones con desplazamiento, de tomarse la 2ª expresión $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$, se obtienen resultados incorrectos.

CORRECTO

$$\mathbf{H}(t-a) f(t-a) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(t-a) f(t-a) e^{-st} dt \equiv \int_a^{+\infty} f(t-a) e^{-st} dt$$

INCORRECTO (para $a < 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t-a) f(t-a) \mapsto \int_0^{+\infty} \mathbf{H}(t-a) f(t-a) e^{-st} dt &\stackrel{a>0}{\equiv} \int_a^{+\infty} f(t-a) e^{-st} dt \\ &\stackrel{a<0}{\equiv} \int_0^{+\infty} f(t-a) e^{-st} dt \end{aligned}$$

4.2. Notación de la T.L.

Los símbolos que se emplean para representar a la T.L. son:

$$f(t) \sqsupset F(s)$$

donde siempre la función se representa en t con minúscula y en s con la misma letra mayúscula.

Otra notación usual es también:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

que es menos práctica que la anterior.

4.3. Relación entre T.L. y T.F.

La T.L. de una función $f(t)$

$$f(t) \sqsupset F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \quad : \quad s = x + iy$$

no es más que la T.F. de otra función $g(t) = H(t) f(t) e^{-xt}$

$$g(t) = H(t) f(t) e^{-xt} \stackrel{TF}{\sqsupset} G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-iyt} dt$$

es decir:

$$f(t) \sqsupset F(s) = G(y) \stackrel{TF}{\sqsubset} H(t) f(t) e^{-xt}$$

Se puede observar claramente que la T.L. es una T.F. en la cual el problema de CV planteado por la H_3 del teorema 2.1:

$$H_3) \quad \int_{V_{-\infty}} |g| dx \in CV$$

$$\int_{V_{+\infty}} |g| dx \in CV$$

se enfrenta en $V_{-\infty}$ y en $V_{+\infty}$ de la siguiente manera:

1º En $V_{-\infty}$ se multiplica $f(t)$ por $H(t)$, que en este vecinal es nula y por lo tanto asegura la convergencia absoluta de $g(t)$.

$$\int_{V_{-\infty}} H(t) f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt = \int_{V_{-\infty}} 0 dx = 0 \implies \int_{V_{-\infty}} |g| dx \in CV$$

2º En $V_{+\infty}$ se multiplica $f(t)$ por e^{-xt} , que no asegura la convergencia absoluta, pero que la ayuda notablemente.

La existencia de la T.L. se reduce entonces al estudio de la CV en un $V_{+\infty}$.

5. Condiciones de existencia

5.1. Teoremas de CV para funciones acotadas

Hay varios teoremas que estudian la existencia de la T.L:

Teorema 5.1.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in CP \\ H_2) \quad \forall x \in V_{+\infty} \quad |f(t)| < M \\ H_3) \quad x > 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} T_1) \quad F \in CV \\ T_2) \quad F \in CA \end{array} \right.$$

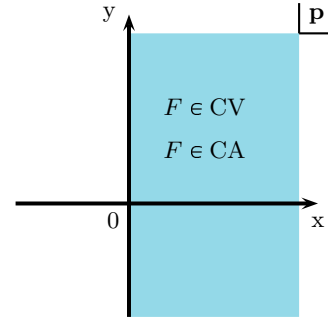
Demostración.

$$\underbrace{\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right|}_{\boxed{1}} \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-st}| dt}_{\boxed{2}} \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \xrightarrow{x>0} \frac{M}{x}$$

$$\boxed{1} \leq \frac{M}{x} \implies F \in CV$$

$$\boxed{2} \leq \frac{M}{x} \implies F \in CA$$

El análisis de los valores de s para los cuales se asegura como condición suficiente la CV y CA de la T.L es, entonces, $x > 0$.



□

Con una variante de la H_3 del teorema anterior, haciendo $x > x_0 > 0$ también se asegura la CU.

Teorema 5.2.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) f \in CP \\ H_2) \forall x \in V_{+\infty} |f(t)| < M \\ H_3) x \geq x_0 > 0 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} T_1) F \in CV \\ T_2) F \in CA \\ T_3) F \in CU \end{cases}$$

Demostración. Análogamente al T_1 anterior

$$\underbrace{\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right|}_{\boxed{1}} \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} |f(t)| |e^{-st}| dt}_{\boxed{2}} \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt \xrightarrow{x>0} \frac{M}{x}$$

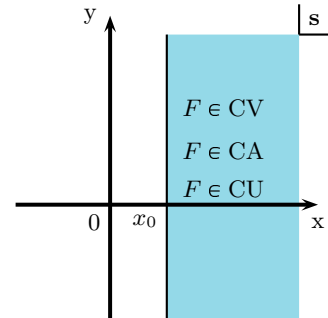
donde la cota $\frac{M}{x_0}$ es independiente del x y por lo tanto asegura la CU.

$$\boxed{1} \leq \frac{M}{x} \implies F \in CV$$

$$\boxed{2} \leq \frac{M}{x} \implies F \in CA$$

$$\boxed{1} \leq \frac{M}{x_0} \implies F \in CU$$

Es decir, si analizamos el campo de los valores de s donde se aseguran las tesis, es el representado en la figura.



□

5.2. Convergencia absoluta. Abscisa de CV

Un tercer teorema, relativo a la CA de la T.L. es:

Teorema 5.3. La CA en un valor $s_0 = x_0 + iy_0$ es condición suficiente de CV, CA y CU para: $\forall s : s = x + iy : x > x_0$.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) F \in CA/s_0 \\ H_2) x \geq x_0 \end{array} \right\} \implies \begin{cases} T_1) F \in CV/s \\ T_2) F \in CA/s \\ T_3) F \in CU/s \end{cases}$$

Demostración.

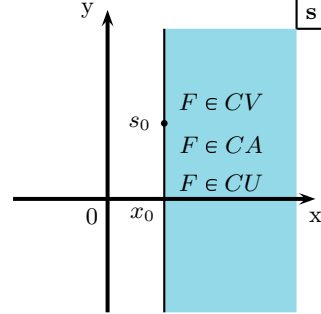
$$\underbrace{\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right|}_{\boxed{1}} \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-xt} dt}_{\boxed{2}} \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-x_0 t} dt}_{\boxed{3}} \xrightarrow{x > 0} \frac{M}{x}$$

$\boxed{3} \in CV$ por H_1

$\boxed{1} \leq \boxed{3} \implies F \in CU/s \implies F \in CV/s$

$\boxed{2} \leq \boxed{3} \implies F \in CA/s$

El campo de los valores de s donde se aseguran las tesis, se representa en la figura.



□

Analizando el TCR del teorema 5.3 se tiene un resultado importante para el estudio del campo de CA de la T.L.

Corolario 5.3.1 (TCR).

$$\left. \begin{array}{l} \overline{T_2) \quad F \notin CA/s_0 \\ H_2) \quad x \geq x_0 \end{array} \right\} \implies \overline{H_1) \quad F \notin CA/s_0$$

Cambiando la notación:

$$\begin{array}{l} s \longrightarrow s_1 \\ x \longrightarrow x_1 \\ s_0 \longrightarrow s \\ x_0 \longrightarrow x \end{array}$$

resulta la siguiente expresión del TCR:

Corolario 5.3.2 (TCR (forma alternativa)). La **no** convergencia absoluta en un valor $s_1 = x_1 + i y_1$ es condición suficiente de **no** convergencia absoluta para: $\forall s : s = x + iy : x \leq x_1$.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{T_2) \quad F \notin CA/s_1 \\ H_2) \quad x_1 \geq x \end{array} \right\} \implies \overline{H_1) \quad F \notin CA/s$$

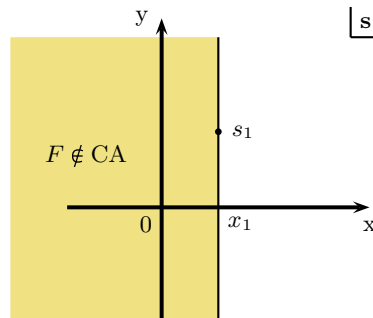


Figura 6: Región de **no** convergencia absoluta, según el corolario 5.3.2.

Combinando los resultados del T_3 y del TCR/ T_3 , tenemos que existe un semiplano a la derecha de x_0 ($x \geq x_0$) donde existe la CA, y un semiplano a la izquierda de x_1 ($x \leq x_1$) donde **no** existe la CA.

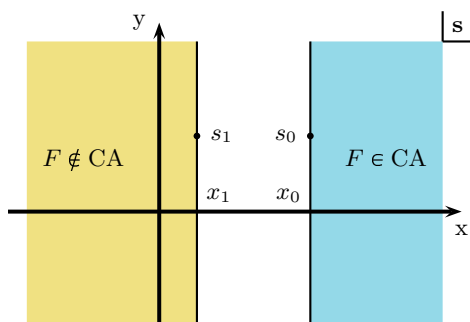


Figura 7: Regiones de CA, no CA y franja intermedia.

Pero eligiendo un punto x_{int} intermedio entre x_1 y x_0 , es decir:

$$x_{int} \in (x_1, x_0)$$

por el principio del tercero excluido, se cumple que:

$$1^\circ. F \in CA/x_{int}$$

o

$$2^\circ. F \notin CA/x_{int}$$

con lo cual, en el 1º caso, por T₃:

$$\left. \begin{array}{l} F \in CA/x_{int} \\ x \geq x_{int} \end{array} \right\} \implies F \in CA/s$$

se extiende la CA

$$\forall s : x \geq x_{int}$$

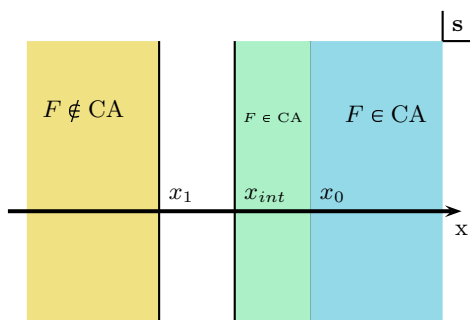


Figura 8: Region de CA para $x \geq x_{int}$.

Si se cumpliera el 2º caso, por TCR T₃

$$\left. \begin{array}{l} F \notin CA/x_{int} \\ x \leq x_{int} \end{array} \right\} \implies F \in CA/s$$

se extiende la **no** CA

$$\forall s : x \leq x_{int}$$

entonces, de una forma u otra, se reduce la franja intermedia donde está indefinida la CA.

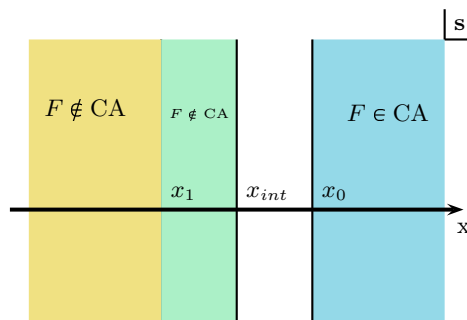


Figura 9: Región de no CA para $x \leq x_{int}$.

Reproduciendo este procedimiento n veces y llamando:

- Con subíndice par los sucesivos $x_{int} : F \in CA/x_{int}$.
- Con subíndice impar los sucesivos $x_{int} : F \notin CA/x_{int}$.

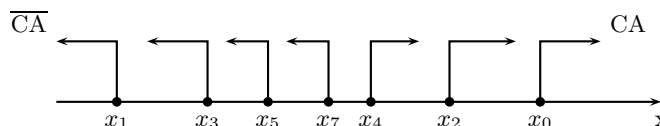


Figura 10: Sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0} : x_1 \leq x_n \leq x_0$

se pueden formar dos sucesiones tal que:

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 & \leq & x_0 \\
 \wedge & & \vee \\
 x_3 & \leq & x_2 \\
 \wedge & & \vee \\
 x_5 & \leq & x_4 \\
 \wedge & & \vee \\
 \vdots & & \vdots \\
 \wedge & & \vee \\
 x_{2n+1} & \leq & x_{2n} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \alpha_1 & \leq & \alpha_0
 \end{array}$$

1º La primera sucesión $\{x_0, x_2, \dots, x_{2n}, \dots\}$ es monótona no creciente y acotada inferiormente por x_1 entonces, por el teorema de Weierstrass al efecto, tiene límite para $n \rightarrow +\infty$, que coincide con su extremo inferior α_0 .

2º La segunda sucesión $\{x_1, x_3, \dots, x_{2n+1}, \dots\}$ es monótona no decreciente y acotada superiormente por x_0 entonces, por el mismo teorema, tiene límite para $n \rightarrow +\infty$, que coincide con su extremo superior α_1 .

Además $\alpha_1 \leq \alpha_0$

3º Por otra parte, por el procedimiento de elección del x_{int} , se puede asegurar que:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \implies |x_{2n} - x_{2n+1}| < \epsilon$$

de donde resulta que:

$$\alpha_1 = \alpha_0 = \alpha$$

que se llama abscisa de convergencia absoluta de la T.L. y que tiene la propiedad que:

$$\begin{aligned} \forall x > \alpha & \quad F \in \text{CA}/x \\ \forall x < \alpha & \quad F \notin \text{CA}/x \end{aligned}$$

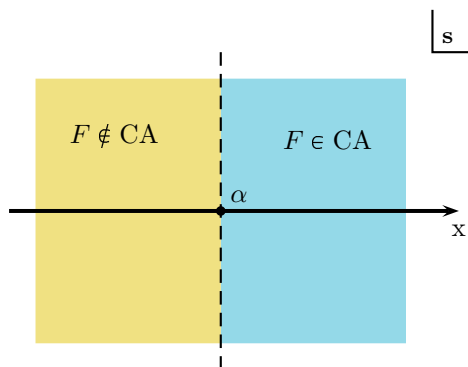


Figura 11: *Abscisa de CA, $x = \alpha$.*

Sobre la misma abscisa de CA ($s = \alpha$) no pueden hacerse aseveraciones generales en cuanto a la CA.

Hay T.L. que convergen en $x = \alpha$ y otras que no.

Resumiendo, el campo de CA de la T.L. es un semiplano a la derecha de α .

Observación 1: Nótese la analogía con los círculos de CA de la serie de Taylor, y lo que sucede en la frontera de los mismos.

Observación 2: Pueden presentarse los siguientes casos particulares de α :

1º $\alpha = -\infty$, entonces $F \in \text{CA}$ para todo el plano \underline{s} .

2º $\alpha = +\infty$, entonces $F \notin \text{CA}$ sobre ningún punto de \underline{s} y la función original no es transformable por T.L.

El siguiente teorema muestra la forma de encontrar la abscisa de CV.

Teorema 5.4.

$$\frac{\text{L}|f(t)|}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda \implies \lambda = \alpha$$

Demostración. Por hipótesis

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists t_0 : \forall t > t_0 \implies \left| \frac{\text{L}|f(t)|}{t} - \lambda \right| < \epsilon$$

Resulta entonces:

$$\begin{aligned} (\lambda - \epsilon)t < \text{L}|f(t)| < (\lambda + \epsilon)t \\ e^{(\lambda - \epsilon)t} < |f(t)| < e^{(\lambda + \epsilon)t} \end{aligned}$$

Aplicando estas desigualdades sobre la integral que da la CA de la T.L.: $\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-xt} dt$, resulta:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-xt} dt \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{(\lambda + \epsilon)t} e^{-xt} dt}_{\boxed{1}} \stackrel{x > \lambda + \epsilon}{=} \frac{\lambda}{x - (\lambda + \epsilon)}$$

donde $x > \lambda + \epsilon$ es la condición de CV de la integral $\boxed{1}$.

Además resulta:

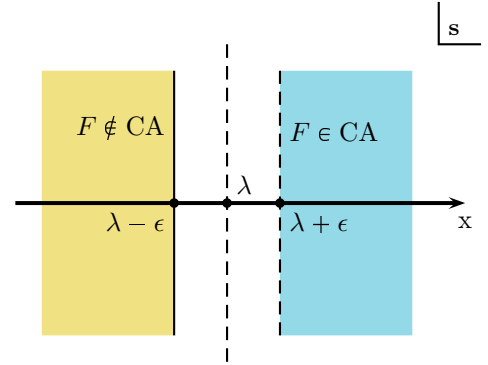
$$\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-xt} dt \geq \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{(\lambda-\epsilon)t} e^{-xt} dt}_{\boxed{2}} \stackrel{x \leq \lambda - \epsilon}{\geq} +\infty$$

donde $x \leq \lambda + \epsilon$ es la condición de **no** CV de la integral $\boxed{2}$.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \quad x > \lambda + \epsilon &\implies F(s) \in \text{CA}/x \\ x < \lambda - \epsilon &\implies F(s) \notin \text{CA}/x \end{aligned}$$

resultando entonces por definición $\lambda = \alpha$, abscisa de CA.



□

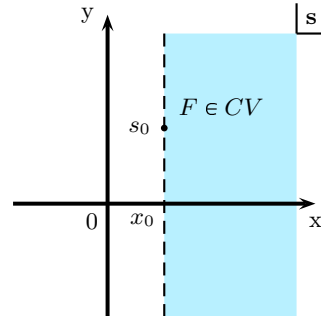
5.3. Convergencia simple. Abscisa de CV

Un cuarto teorema de convergencia, parecido al 5.3, pero que se refiere a la convergencia simple de la T.L. es:

Teorema 5.5. La convergencia simple en un valor $s_0 = x_0 + iy_0$ es condición suficiente de CV para: $\forall s : s = x + iy : x > x_0$.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad F \in \text{CV}/s_0 \\ H_2) \quad x > x_0 \end{array} \right\} \implies T) \quad F \in \text{CV}/s$$

Observación: Nótese que la diferencia con el teorema 5.3 consiste en que en H_1 se postula $F \in \text{CV}/s_0$ y no $F \in \text{CA}/s_0$, y que en H_2 se postula $x > x_0$ y no $x \geq x_0$.



Demostración.

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-s_0 t} e^{-(s-s_0)t} dt$$

Llamando:

$$\varphi'(t) = f(t) e^{-s_0 t}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t f(\tau) e^{-s_0 \tau} d\tau \\ \varphi(t) &\xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} F(s_0) \end{aligned}$$

que es convergente por H_1 , es decir, es finito.

Reemplazando $\varphi'(t)$ en la expresión anterior:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} \varphi'(t) e^{-(s-s_0)t} dt$$

Integrando por partes resulta:

$$F(s) = \varphi(t) e^{-(s-s_0)t} + (s-s_0) \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-(s-s_0)t} dt$$

La parte integrada vale cero, pues:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} F(s_0) : |F(s_0)| < M \quad \text{por } H_1 \\ |e^{-(s-s_0)t}| = e^{-(x-x_0)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \end{array} \right.$$

Entonces:

$$\varphi(t) e^{-(s-s_0)t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

Además:

$$\varphi(0) = \int_0^0 f(\tau) e^{-s_0\tau} d\tau = 0$$

Queda entonces:

$$F(s) = (s-s_0) \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-(s-s_0)t} dt$$

$$|F(s)| \leq |s-s_0| \int_0^{+\infty} |\varphi(t)| e^{-(x-x_0)t} dt \leq |s-s_0| M \frac{1}{x-x_0}$$

De donde resulta la tesis. □

Si analizamos el TCR de T_4 se tiene:

Corolario 5.5.1 (TCR).

$$\left. \begin{array}{l} \overline{T)} \quad F \notin CV/s \\ H_2) \quad x > x_0 \end{array} \right\} \implies \overline{H_1)} \quad F \notin CV/s_0$$

Cambiando la notación:

$$\begin{array}{l} s \longrightarrow s_1 \\ x \longrightarrow x_1 \\ s_0 \longrightarrow s \\ x_0 \longrightarrow x \end{array}$$

resulta la siguiente expresión del TCR del teorema 5.5:

Corolario 5.5.2 (TCR (forma alternativa)). *La **no** convergencia simple en un valor $s_1 = x_1 + iy_1$ es condición suficiente de **no** convergencia simple $\forall s : s = x + iy : x < x_1$.*

$$\left. \begin{array}{l} \overline{T)} \quad F \notin CV/s_1 \\ H_2) \quad x_1 > x \end{array} \right\} \implies \overline{H_1)} \quad F \notin CV/s$$

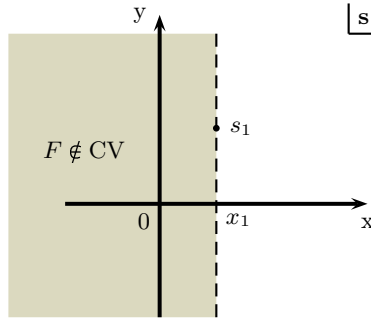


Figura 12: Región de **no** convergencia simple, según el corolario 5.5.2.

Combinando los resultados del teorema 5.5 y del corolario 5.5.2 en forma análoga a lo realizado para la CA, tenemos que existe un semiplano a la derecha de x_0 ($x > x_0$) donde existe CV; y un semiplano a la izquierda de x_1 ($x < x_1$) donde **no** existe CV.

Queda una franja intermedia $x_1 \leq x \leq x_0$ donde está indefinida la CV.

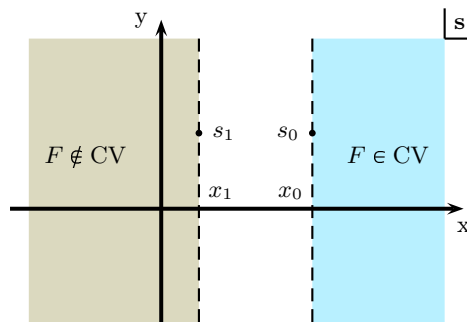


Figura 13: Regiones de CV, no CV y franja intermedia.

A partir de aquí, se puede repetir todo el razonamiento realizado en el párrafo anterior para definir la abscisa α de CA, estableciéndose entonces la existencia de una abscisa β de convergencia simple.

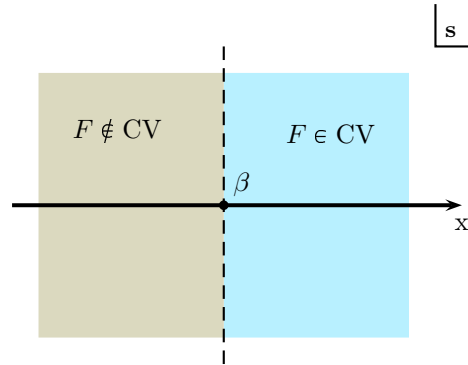


Figura 14: Abscisa de CV, $x = \beta$.

Además, sobre la misma abscisa de CV ($x = \beta$) tampoco pueden hacerse aseveraciones generales en cuanto a la CV; hay T.L. que convergen en la abscisa y otras que no.

Resumiendo, el campo de CV de la T.L. es un semiplano a la derecha de β .

Como la CA implica la CV, resulta:

Teorema 5.6.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \in ABS \ CA \\ \beta \in ABS \ CV \end{array} \right\} \implies \beta \leq \alpha$$

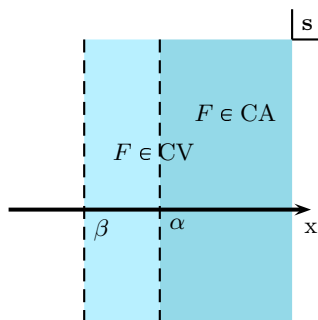


Figura 15: Regiones de CV ($x > \beta$) y CA ($x > \alpha$).

5.4. Convergencia para funciones de orden exponencial

5.4.1. Funciones de orden exponencial (FOE)

Se dice que una función es de *orden exponencial* en un $V_{+\infty}$ cuando:

$$f \in \text{O. EXP.} := |f(t)| \leq M e^{x_0 t} \quad \forall t > t_0 (V_{+\infty}), \quad M = \text{cte.}$$

Las funciones que pueden acotarse por una exponencial en el $V_{+\infty}$ tienen asegurada la CV, CA y CU de la T.L, que además es holomorfa; proposiciones que se demuestran en el siguiente importantísimo teorema.

Teorema 5.7 (CV de funciones de orden exponencial. “Teoremón”).

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in CP \\ H_2) \quad |f| \leq M e^{x_0 t} \\ H_3) \quad x_0 < x_1 \leq x \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_1) \quad F \in CV/x > x_0 \\ T_2) \quad F \in CA/x > x_0 \\ T_3) \quad F \in CU/x \geq x_1 \\ T_4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(t) e^{-st} dt \\ \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} f(t) e^{-st} dt \\ T_5) \quad F \in H/x \geq x_1 \\ T_6) \quad \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} f(t) e^{-st} dt \end{array} \right.$$

Demostración.

$$|F(s)| = \underbrace{\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right|}_{\boxed{1}} \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-xt} dt}_{\boxed{2}} \leq M \int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} dt \leq \frac{M}{x-x_0} \leq \frac{M}{x_1-x_0}$$

$$\boxed{1} \leq \frac{M}{x-x_0} \quad \Rightarrow \quad T_1) \quad F \in CV \quad (x > x_0)$$

$$\boxed{2} \leq \frac{M}{x-x_0} \quad \Rightarrow \quad T_2) \quad F \in CA \quad (x > x_0)$$

$$\boxed{2} \leq \frac{M}{x_1-x_0} \quad \Rightarrow \quad T_3) \quad F \in CU \quad (x \geq x_1)$$

Observación: Resulta entonces que si $|f| < M e^{x_0 t} \implies \beta \leq \alpha \leq x_0 < x_1$

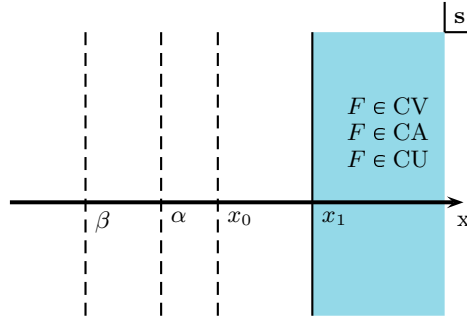


Figura 16: Regiones y abscisas de convergencia para FOE.

Para estudiar las tesis T_4 y T_5 se descompone $F(s)$ en partes real e imaginaria:

$$F(s) = u(xy) + iv(xy)$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(x+iy)t} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} (\cos yt + i \operatorname{sen} yt) dt$$

$$\begin{cases} u(xy) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \cos yt dt \\ v(xy) = \int_0^{+\infty} -f(t) e^{-xt} \operatorname{sen} yt dt \end{cases}$$

La derivabilidad bajo el signo integral se implica con el siguiente teorema:

$$\left. \begin{array}{l} \text{H}_1) \quad \varphi(t, \alpha) \in \mathbb{C}P/t, \alpha \\ \text{H}_2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \in \mathbb{C}P/t, \alpha \\ \text{H}_3) \quad \int_{V_{+\infty}} \varphi(t, \alpha) dt \in \mathbb{C}V \\ \text{H}_4) \quad \int_{V_{+\infty}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi(t, \alpha) dt \in \mathbb{C}U \end{array} \right\} \implies \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^{+\infty} \varphi(t, \alpha) dt = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \varphi(t, \alpha) dt$$

En nuestro caso se aplicará este teorema sobre

$$u(xy) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \cos yt dt$$

tomando x de parámetro.

Se deben verificar las cuatro hipótesis

$$H_1) \quad f(t) e^{-xt} \cos yt \in \text{CP}/t, x, y \iff \begin{cases} g(t, x, y) = f \in \text{CP}/t & (\text{por hipótesis}) \\ e^{-xt} \in \text{C}/t, x \\ \cos yt \in \text{C}/t, y \end{cases}$$

$$H_2) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = f(t) (-t) e^{-xt} \cos yt \in \text{CP}/t, x, y \iff \begin{cases} f \in \text{CP}/t \\ t \in \text{C}/t \\ e^{-xt} \in \text{C}/t, x \\ \cos yt \in \text{C}/t, y \end{cases}$$

$$H_3) \quad \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} \cos yt \, dt \in \text{CV} \iff F(s) \in \text{CV} \quad (\text{por tesis 1})$$

$$H_4) \quad \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-xt} \cos yt \, dt \in \text{CU} \iff$$

Este resultado se demuestra porque:

$$\begin{aligned} \left| \int_{V_{+\infty}} f(t) (-t) e^{-xt} \cos yt \, dt \right| &\leq \int_{V_{+\infty}} |f(t)| |t| e^{-xt} \, dt \leq \\ &\leq M \int_{V_{+\infty}} t e^{-(x-x_0)t} \, dt \leq \\ &\leq M \int_0^{+\infty} t e^{-(x-x_0)t} \, dt \leq \\ &\leq \frac{M}{(x-x_0)^2} \leq \frac{M}{(x_1-x_0)^2} \end{aligned}$$

Entonces, $\forall x : x \geq x_1$, se ha acotado la integral por $\frac{M}{(x_1-x_0)^2}$, que no depende ni de x ni de y ; por lo tanto hay CU respecto de ambas variables.

Observación: La convergencia uniforme de $u(xy)$ y de $v(xy)$ también puede demostrarse por un segundo método, basado en que t es de orden exponencial, y aplicando la misma tesis T_3 de este teorema:

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 : \frac{t}{e^{\delta t}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 &\implies \left| \frac{t}{e^{\delta t}} \right| < \epsilon \\ &\implies t < \epsilon e^{\delta t} \end{aligned}$$

Resulta entonces:

$$|f(t)| |t| \leq M e^{x_0 t} \epsilon e^{\delta t} = M_1 e^{(x_0+\delta)t}$$

Eligiendo δ :

$$x_0 + \delta < x_1$$

El mismo teorema que se está demostrando en su T_3 asegura que:

$$\left. \begin{array}{l} f(t) \cdot t \in \text{CP} \\ |f(t) \cdot t| \leq M_1 e^{(x_0+\delta)t} \\ x_0 + \delta < x_1 \leq x \end{array} \right\} \implies \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-xt} e^{iyt} \, dt \in \text{CU}$$

cuya parte real es la proposición H_4 buscada.

Se ha demostrado entonces que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} = \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-xt} \cos yt \, dt$$

Análogamente se demuestra que:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} = \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-xt} \operatorname{sen} yt \, dt$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} = \int_0^{+\infty} f(t) (+t) e^{-xt} \operatorname{sen} yt \, dt$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} = \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-xt} \cos yt \, dt$$

con lo cual queda demostrada la cuarta tesis (T₄).

Si se analizan las cuatro integrales anteriores se observa que:

1° Cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

2° Son funciones continuas respecto de x y de y por ser integrando continuo.

Lo cual lleva a que la T.L es holomorfa (T₅)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \in C/x, y \\ -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \in C/x, y \end{array} \right\} \implies F = u + iv \in H/x \geq x_1$$

Además como $\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x}$ es inmediata la T₆:

$$F'(s) = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} = \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-st} \, dt$$

Observación: Nótese que se ha demostrado la propiedad:

$$F'(s) \subset (-t) f(t)$$

sobre la cual se volverá más adelante.

Resulta entonces que para funciones $f(t)$ acotadas y de orden exponencial

$$\forall s : s = x + iy \quad x \geq x_1$$

se cumplen simultáneamente:

$$F \in CV$$

$$F \in CA$$

$$F \in CU$$

$$F \in H$$

siendo válida además la derivabilidad bajo el signo integral, respecto de x , y y s . □

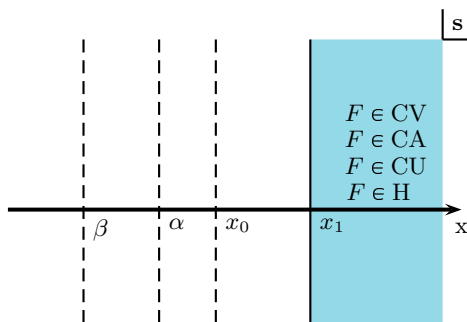


Figura 17: Regiones de CV, CA, CU y holomorfía para FOE.

5.4.2. Definición de función CPOE

Por ser las hipótesis del teorema 5.7 de una aplicación posterior amplia y frecuente, es conveniente definir la siguiente proposición:

$$f \in \text{CPOE}/x_0 < x_1 \leq x := \begin{cases} \text{H}_1) & f \in \text{CP} \\ \text{H}_2) & |f| \leq M e^{x_0 t} \\ \text{H}_3) & x_0 < x_1 \leq x \end{cases}$$

que representa a las funciones continuas por partes y de orden exponencial sobre el intervalo señalado.

6. Propiedades básicas de la T.L.

La transformada de Laplace tiene dos propiedades que son las que permiten resolver sistemas y ecuaciones diferenciales lineales con gran facilidad. Son la linealidad y la transformada de la función derivada.

6.1. Linealidad

Teorema 6.1. La T.L de una combinación lineal es la combinación lineal de las T.L.

$$\left. \begin{matrix} f_1(t) \supset F_1(s) \\ f_2(t) \supset F_2(s) \end{matrix} \right\} \implies \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) \supset \lambda_1 F_1(s) + \lambda_2 F_2(s)$$

Demostración. La demostración de este teorema es inmediata:

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \supset \int_0^{+\infty} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) e^{-st} dt &= \lambda_1 \int_0^{+\infty} f_1 e^{-st} dt + \lambda_2 \int_0^{+\infty} f_2 e^{-st} dt \\ &= \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \quad \square \end{aligned}$$

Observación: De este teorema se extrae inmediatamente que la T.L. es un vector. Mejor aún, si E' es el conjunto de las T.L, es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los complejos (o de los reales) con las leyes de composición suma de funciones y producto por un complejo.

$$\left. \begin{matrix} E' = \{F\} \\ (\mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}) \in \text{Cuerpo complejo} \\ T: E' \times E' \longrightarrow E' \\ (F_1, F_2) \longmapsto F_1(s) + F_2(s) \\ s: \mathbb{C} \times E' \longrightarrow E' \\ (\lambda, F) \longmapsto \lambda F(s) \end{matrix} \right\} \implies (E', \mathbb{C}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}, T, s) \in \text{EEV (Estructura de Espacio Vectorial)}$$

6.2. Transformada de la derivada de f' . Derivación en \mathbf{t}

Dentro de las hipótesis del teorema de CV para funciones CPOE (teorema 5.7) es válido:

Teorema 6.2.

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in \text{CPOE} \\ H_1) \quad f(t) \supset F(s) \end{array} \right\} \implies f'(t) \supset s F(s) - f(0^+)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f'(t) \supset \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt &= f(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \\ &= 0 - f(0^+) + s F(s) \end{aligned}$$

pues:

$$\begin{aligned} f(t) e^{-st} &\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \iff |f(t)| < M e^{x_0 t} : x > x_0 \\ f(t) e^{-st} &\xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f(0^+) \end{aligned}$$

□

A su vez, si hallamos la transformada de $f''(t)$ como transformada de la derivada de $f'(t)$, aplicando el teorema 6.2:

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in \text{CPOE} \\ H_1) \quad f'(t) \supset G(s) \end{array} \right\} \implies \begin{cases} f''(t) \supset s G(s) - g(0^+) \\ f''(t) \supset s^2 F(s) - s f(0^+) - f'(0^+) \end{cases}$$

y esto se puede extender por inducción completa a $f^{(n)}(t)$, por lo cual:

Corolario 6.2.1.

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in \text{CPOE} \\ H_1) \quad f(t) \supset F(s) \end{array} \right\} \implies \begin{aligned} f^{(n)}(t) \supset & s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots \\ & \dots - s f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+) \end{aligned}$$

Obsérvese que si las condiciones iniciales son nulas:

$$f(0^+) = f'(0^+) = f''(0^+) = \dots = f^{(n-1)}(0^+) = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f(t) &\supset F(s) \\ f'(t) &\supset s F(s) \\ f''(t) &\supset s^2 F(s) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(t) &\supset s^n F(s) \end{aligned}$$

es decir, derivar n veces en el campo original \mathbf{t} significa multiplicar por s , n veces (s^n) en el campo transformado \mathbf{s} .

7. Aplicación de la T.L. a la resolución de sistemas y ecuaciones diferenciales lineales

Los modelos usuales en la ingeniería y en la ciencia en general son lineales. Ello es porque existen dos razones que se influyen mutuamente

1° Los modelos físicos se construyen con funciones o sistemas de funciones cualesquiera, cuya primera aproximación es la lineal.

2° La matemática más desarrollada es la lineal.

La T.L. es una herramienta especialmente útil en la resolución y análisis de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (pero no exclusivamente) que aparecen en una gran cantidad de problemas de ingeniería.

En el cuadro siguiente se han recopilado modelos regidos por la E.D.D.T.¹ lineal con coeficientes constantes, que conforman un conjunto de sistemas análogos entre sí.

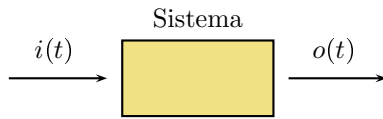
Se observa que se han cubierto las ramas más variadas de la ingeniería, desde la electricidad, magnetismo, mecánica, acústica hasta la química, entre otros.

¹E.D.D.T: Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Totales.

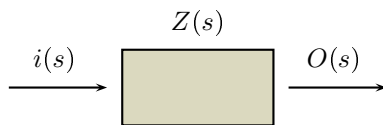
Nombre	Esquema	Ecuación	VAR		COEF			Descripción
			s	e	a	b	c	
Modelo Sistema General		$a s'' + b s' + c s = e(t)$	s	e	a	b	c	salida entrada coeficiente de s'' coeficiente de s' coeficiente de s
Electricidad Circuito Serie		$L i' + R i + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = u(t)$ $L q'' + R q' + \frac{1}{C} q = u(t)$	i/q	u	L	R	$1/C$	tensión inductancia resistencia 1/capacidad
Electricidad Circuito Paralelo		$C u' + \frac{1}{R} u + \frac{1}{L} \int_0^t u dt = i(t)$	u	i	L	$1/R$	$1/C$	tensión corriente inductancia 1/resistencia 1/capacidad
Magnetismo								
Mecánica Vibraciones Longitudinal		$m x'' + c x' + k x = f(t)$	x	f	m	c	k	desplazamiento fuerza excitante masa cte. amortiguamiento cte. elástica
Mecánica Vibraciones Torsión		$J \varphi'' + c \varphi' + \mu \varphi = \mathfrak{M}(t)$	φ	\mathfrak{M}	J	c	μ	desplazamiento angular par excitante momento de inercia cte. amortiguamiento cte. elástica torsional
Mecánica Vibraciones Torsión		$J x'' + c x' + \mu x = f(t)$	x	f	J	c	μ	desplazamiento fuerza excitante momento de inercia cte. amortiguamiento cte. elástica torsional
Acústica Resonador Helmholtz		$M V'' + R_a V' + \frac{1}{C_a} V = P(t)$	V	P	M	R_a	$1/C_a$	volumen de desplazamiento presión exterior coef. de inercia acústica resistencia acústica 1/capacidad acústica

Cuadro 1: Modelos de la física rigidos por E.D.D.T. lineales con coeficientes constantes.

Todos los sistemas físicos lineales analógicos pueden ser representados en su análisis (estudio e interpretación del sistema) y en su síntesis (diseño y proyecto del sistema) por el modelo general siguiente.



□



$$O(s) = \frac{I(s)}{a s^2 + b s + c}$$

llamando $Z(s) = a s^2 + b s + c$

$$\boxed{O(s) = \frac{I(s)}{Z(s)}} \quad \text{Ley de Ohm generalizada}$$

Se puede observar entonces que la ecuación diferencial lineal en t se transformó en una ecuación algebraica lineal en s , característica fundamental de la T.L.

Es así como el sistema transformado sobre s tiene por ley que lo rige a:

$$\boxed{O(s) = \frac{I(s)}{Z(s)}}$$

que no es otra que la ley de Ohm generalizada para circuitos eléctricos con corrientes cualesquiera (no solamente continua o senoidal) o para sistemas vibratorios o acústicos, etc. y donde siempre se pueda definir a:

$$\boxed{Z(s) = a s^2 + b s + c}$$

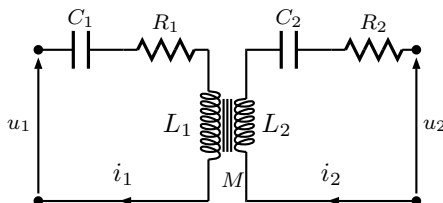
que no es otra cosa que la impedancia generalizada.

Con este planteo, entonces, la resolución de las ecuaciones diferenciales se reduce a la de ecuaciones algebraicas.

Los modelos físicos más complejos, apoyados sobre sistemas de ED lineales, también son fácilmente operables por medio de la T.L.

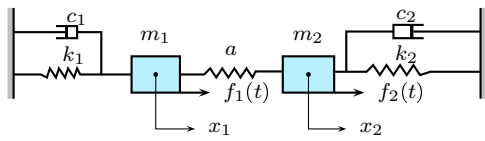
Son ejemplo de estos modelos:

Circuitos eléctricos acoplados



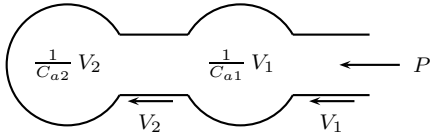
$$\begin{cases} L_1 i_1' + R_1 i + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i_1 dt + M i_2 = u_1(t) \\ L_2 i_2' + R_2 i + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i_2 dt + M i_1 = u_2(t) \end{cases}$$

Vibraciones acopladas



$$\begin{cases} m_1 x_1'' + c_1 x_1' + k_1(x_1 - x_2) = f_1(t) \\ m_2 x_2'' + c_2 x_2' + k_2(x_2 - x_1) = f_2(t) \end{cases}$$

Resonador acoplado



$$\begin{cases} M_1 V_1'' + r_{a1} V_1' + \frac{1}{C_{a1}} V_1 - a V_2 = 0 \\ M_2 V_2'' + r_{a2} V_2' + \frac{1}{C_{a2}} V_2 - a V_1 = P(t) \end{cases}$$

que pueden ser expresados por un modelo general.

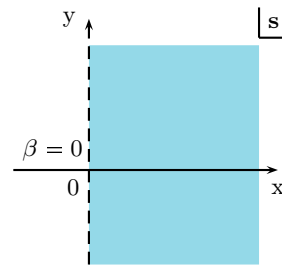
8. Transformadas elementales

Las transformadas de Laplace de las funciones elementales son las siguientes:

8.1. Constante-Heaviside

$$\boxed{1 \Leftrightarrow \frac{1}{s}}$$

$$\int_0^{+\infty} 1 e^{-st} dt = \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{+\infty} \stackrel{x>0}{=} \frac{1}{s}$$



Observación: Como

$$1 \cdot H(t) = H(t) \quad t > 0$$

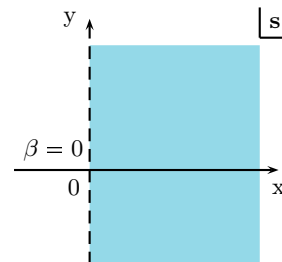
entonces es inmediato que

$$H(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}$$

8.2. Función potencial

$$\boxed{t^w \Leftrightarrow \frac{\Gamma(w+1)}{s^{w+1}}}$$

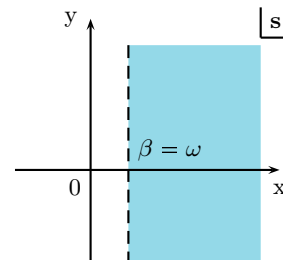
$$\int_0^{+\infty} t^w e^{-st} dt \stackrel{st=\tau}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\tau^w}{s^w} e^{-\tau} \frac{d\tau}{s} = \frac{\Gamma(w+1)}{s^{w+1}}$$



8.3. Exponencial

$$\boxed{e^{\omega t} \Leftrightarrow \frac{1}{s-\omega}}$$

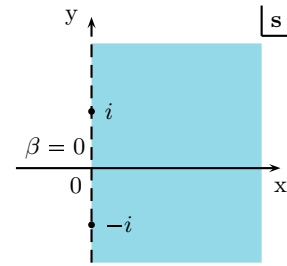
$$\int_0^{+\infty} e^{\omega t} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\omega)t} dt \stackrel{x>\omega}{=} \frac{1}{s-\omega}$$



8.4. Cos, Sen

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos \omega t \sqsupset \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \text{sen } \omega t \sqsupset \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \sqsupset \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \text{sen } \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \sqsupset \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s - i\omega} - \frac{1}{s + i\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$



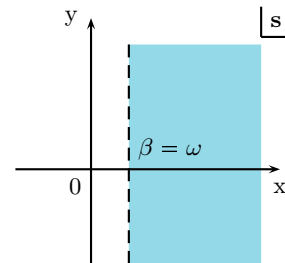
Se pueden verificar estos datos por aplicación del teorema de transformación de la derivada:

$$\cos \omega t = \frac{1}{\omega} (\text{sen } \omega t)' \sqsupset \frac{1}{\omega} \left[s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \text{sen}(0^+) \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

8.5. Cosh, Senh

$$\boxed{\begin{array}{l} \cosh \omega t \sqsupset \frac{s}{s^2 - \omega^2} \\ \text{senh } \omega t \sqsupset \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} \cosh \omega t &= \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \sqsupset \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - \omega} + \frac{1}{s + \omega} \right] = \frac{s}{s^2 - \omega^2} \\ \text{senh } \omega t &= \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \sqsupset \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - \omega} - \frac{1}{s + \omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \end{aligned}$$



8.6. Tabla de transformadas elementales

	$f(t)$	$F(s)$
1	$1 = H(t)$	$\frac{1}{s}$
2	t^w	$\frac{\Gamma(w+1)}{s^{w+1}}$
3	$e^{\omega t}$	$\frac{1}{s - \omega}$
4	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
5	$\text{sen } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
6	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
7	$\text{senh } \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$

9. Propiedades de la T.L. Segunda parte

Para operar con la T.L. con rapidez y eficacia, conviene tener en cuenta, además de lo visto en 6, nuevas propiedades que se demostrarán a continuación.

Todas se resumen en el cuadro que cierra el presente capítulo.

9.1. Integración en \mathbf{t}

Teorema 9.1.

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in CPOE \\ H_1) \quad f(t) \supset F(s) \end{array} \right\} \implies \int_0^t f(\tau) d\tau \supset \frac{F(s)}{s}$$

Demostración. Llamando $\int_0^t f(\tau) d\tau = \varphi(t)$, ésta se transforma en $\phi(s)$.

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \supset \phi(s)$$

Si $|f(t)| < M e^{x_0 t}$, es decir es de orden exponencial, $\varphi(t)$ lo es también.

$$|\varphi(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq M \int_0^t e^{x_0 \tau} d\tau = \frac{M}{x_0} (e^{x_0 t} - 1) \leq \frac{M}{x} e^{x_0 t}$$

Por lo tanto, aplicando el teorema 6.2:

$$\varphi'(t) = f(t) \supset s\phi(s) - \varphi(0^+) = F(s)$$

Como

$$\varphi(0^+) = \int_0^{0^+} f(\tau) d\tau = 0$$

Resulta

$$\phi(s) = \frac{F(s)}{s} \quad \square$$

Observación: Recordando el teorema 6.2, derivar en el campo \mathbf{t} era multiplicar por s a $F(s)$ en el campo \mathbf{s} (si las condiciones iniciales son nulas).

Integrar en el campo \mathbf{t} es ahora dividir por s a $F(s)$ en el campo \mathbf{s} .

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{sen } \omega t &\supset \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \int_0^t \text{sen } \omega \tau d\tau &= \frac{1 - \cos \omega t}{\omega} \supset \frac{1}{s} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Se puede plantear también la transformación de $\int_a^t f(\tau) d\tau$, que se reduce así:

$$\int_a^t f(\tau) d\tau = \int_a^0 f(\tau) d\tau + \int_0^t f(\tau) d\tau$$

La primera integral es una constante y por lo tanto su T.L es:

$$\int_a^0 f(\tau) d\tau \supset \frac{1}{s} \left[\int_a^0 f(\tau) d\tau \right]$$

Se obtiene entonces el siguiente corolario:

Corolario 9.1.1.

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in CPOE \\ H_1) \quad f(t) \supset F(s) \end{array} \right\} \implies \int_a^t f(\tau) d\tau \supset \frac{\int_a^0 f(\tau) d\tau}{s} + \frac{F(s)}{s}$$

9.2. Derivación en s

Este teorema ya ha sido demostrado en el teorema 5.7 del párrafo 5.4 (ver observación al final de la demostración.)

Teorema 9.2.

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in CPOE \\ H_1) \quad f(t) \supset F(s) \end{array} \right\} \implies (-t)f(t) \supset F'(s)$$

Demostración. La demostración vista consistía en derivar $F(s)$, que es holomorfa para $x > x_0$, bajo el signo integral:

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s} f(t) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) (-t) e^{-st} dt \end{aligned}$$

Con lo cual resulta:

$$(-t)f(t) \supset F'(s) \quad \square$$

Observación: Derivar en el campo s es multiplicar por $(-t)$ a $f(t)$ en el campo t .

El resultado anterior se puede extender n veces, pues al ser $F(s)$ holomorfa, existe $F^{(n)}(s)$.

$$F^{(n)}(s) = \frac{\partial^n}{\partial s^n} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} f(t) (-t)^n e^{-st} dt$$

De donde:

$$(-t)^n f(t) \supset F^{(n)}(s)$$

Generalizando entonces el enunciado del teorema 9.2, queda:

Corolario 9.2.1.

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in CPOE \\ H_1) \quad f(t) \supset F(s) \end{array} \right\} \implies (-t)^n f(t) \supset F^{(n)}(s)$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \supset & \frac{1}{s} \\ t & \supset & -D \left[\frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s^2} \\ t^2 & \supset & -D \left[\frac{1}{s^2} \right] = \frac{2}{s^3} \\ \vdots & & \vdots \\ t^n & \supset & -D \left[\frac{(n-1)!}{s^n} \right] = \frac{n!}{s^{n+1}} \\ \Downarrow & & \Downarrow \text{por inducción completa} \\ t^{n+1} & \supset & -D \left[\frac{n!}{s^{n+1}} \right] = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} \end{array}$$

Se verifica así el resultado obtenido en la tabla de T.L. elementales.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{sen } \omega t &\supset \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ t \text{ sen } \omega t &\supset -D \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

9.3. Integración en s

Teorema 9.3.

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in CPOE \\ H_1) \quad f(t) \sqsupset F(s) \\ H_2) \quad \int_{V_{0+}} \frac{f(t)}{t} dt \in CV \end{array} \right\} \implies \frac{f(t)}{t} \sqsupset \int_s^{\infty} F(s) ds$$

Demostración. Si se plantea la integral compleja

$$(\gamma) \int_s^{\infty} F(s) ds$$

donde

$$F(s) \in H/x \geq x_1$$

$\gamma \in$ Camino contenido en $\{s \in \mathbb{C} : x \geq x_1\}$, desde el origen s hasta el extremo final ∞ (infinito complejo)

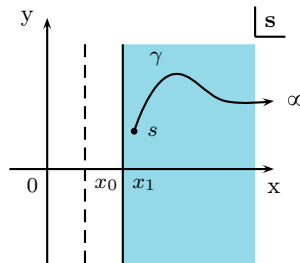


Figura 18: Camino de integración para el teorema 9.3.

La integral es entonces una función compleja $\phi(s)$:

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \int_s^{\infty} F(s) ds \\ &= - \int_{\infty}^s F(s) ds \end{aligned}$$

Por el teorema fundamental del cálculo integral en el plano complejo:

$$\phi'(s) = -F(s)$$

Queda entonces:

$$\phi(s) \sqsupset \varphi(t)$$

$$\phi'(t) = -F(s) \sqsupset (-t) \varphi(t) = -f(t)$$

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Por lo tanto:

$$\phi(s) = \int_s^{\infty} F(s) ds = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt$$

Asegurando la convergencia con

$$\int_{V_{0+}} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \cong \int_{V_{0+}} \frac{f(t)}{t} dt \in CV \quad (\text{por hipótesis})$$

entonces

$$\int_s^{\infty} F(s) ds \sqsupset \frac{f(t)}{t}$$

□

Observación: Integrar en el campo s es dividir por t a $f(t)$ en el campo t .

Una segunda forma de demostrar este mismo teorema es:

$$\int_s^A F(s) ds = \int_s^A \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt ds$$

Asegurada la CU de $F(s)$ por $f \in \text{CPOE}$ se puede permutar el signo $\int_s^A \int_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \int_s^A$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} f(t) \int_s^A e^{-st} ds dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-At} - e^{-st}}{-t} dt \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $A \rightarrow \infty$

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_s^A F(s) ds = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-At} - e^{-st}}{-t} dt$$

se puede permutar el límite con la integral por la CU de la función integrando asegurada por

$$H_1 \quad |f(t)| < M e^{x_0 t}$$

$$H_2 \quad \int_{V_{0+}} \frac{f(t)}{t} dt \in \text{CV}$$

luego:

$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} F(s) ds &= \int_0^{+\infty} \lim_{A \rightarrow \infty} f(t) \frac{e^{-At} - e^{-st}}{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \quad \square \quad \frac{f(t)}{t} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\text{sen } \omega t \quad \square \quad \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\frac{\text{sen } \omega t}{t} \quad \square \quad \int_s^{\infty} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} ds = \frac{1}{\omega} \text{Arctg } \frac{s}{\omega} \Big|_s^{\infty}$$

$$\quad \square \quad \frac{1}{\omega} \left[\frac{\pi}{2} - \text{Arctg } \frac{s}{\omega} \right]$$

Además se verifican las condiciones

$$1^\circ) \quad x > 0$$

$$2^\circ) \quad \frac{\text{sen } \omega t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \omega \implies \int_{V_{0+}} \frac{\text{sen } \omega t}{t} dt \in \text{CV}$$

Ejemplo:

$$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t} \quad \square \quad \frac{1}{s + \alpha} - \frac{1}{s + \beta}$$

$$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \quad \square \quad \int_s^{\infty} \left[\frac{1}{s + \alpha} - \frac{1}{s + \beta} \right] ds$$

$$= L \left[\frac{s + \alpha}{s + \beta} \right] \Big|_s^{\infty} = L \left[\frac{s + \alpha}{s + \beta} \right]$$

Se verifica

$$x > \text{máx}\{-\alpha, -\beta\}$$

$$\frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -\alpha + \beta \implies \int_{V_{0+}} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt \in \text{CV}$$

9.4. Desplazamiento en t

Teorema 9.4.

$$f(t) \supset F(s) \implies H(t-a) f(t-a) \supset e^{-as} F(s)$$

Demostración. En este teorema es donde hay que tener especial cuidado con la definición de la T.L.

Hay que tomar

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-st} dt$$

como ya se ha explicado en la definición de la T.L. (párrafo 4)

$$\begin{aligned} H(t-a) f(t-a) &\supset \int_{-\infty}^{+\infty} H(t-a) f(t-a) e^{-st} dt \\ &\stackrel{\tau=t-a}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) f(\tau) e^{-s\tau} e^{-as} d\tau = e^{-as} F(s) \end{aligned} \quad \square$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \sinh \omega t &\supset \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \\ H(t-b) \sinh \omega(t-b) &\supset e^{-bp} \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

9.5. Desplazamiento en s

Teorema 9.5.

$$f(t) \supset F(s) \implies e^{at} f(t) \supset F(s-a)$$

Demostración. Aplicando la definición:

$$e^{at} f(t) \supset \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a) \quad \square$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 1 &\supset \frac{1}{s} \\ e^{\omega t} &\supset \frac{1}{s - \omega} \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \cos \omega t &\supset \frac{s}{s^2 - \omega^2} \\ e^{bt} \cos \omega t &\supset \frac{s - b}{(s - b)^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

9.6. Cambio de $t \rightarrow |k|t$. Cambio de escala

Teorema 9.6.

$$f(t) \supset F(s) \implies f(|k|t) \supset \frac{1}{|k|} F\left(\frac{s}{|k|}\right)$$

Demostración. Aplicando la definición

$$\begin{aligned} f(|k|t) &\supset \int_0^{+\infty} f(|k|t) e^{-st} dt \stackrel{|k|t=\tau}{=} \int_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{|k|} e^{-s \frac{\tau}{|k|}} d\tau \\ &= \frac{1}{|k|} F\left(\frac{s}{|k|}\right) \end{aligned} \quad \square$$

Observación: En este cambio de escala se toma la constante positiva $|k|$ pues en caso de tomarse negativa, los límites de la integral, después del cambio de variable, no serían los de una T.L.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t &\sqsupset \frac{1}{s^2 + 1} \\ \operatorname{sen} \omega t &\sqsupset \frac{1}{\omega} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

9.7. Convolución

Mediante el siguiente teorema se desea obtener la antitransformada del producto de dos transformadas de Laplace. Es decir, la antitransformada de $F(s) \cdot G(s)$.

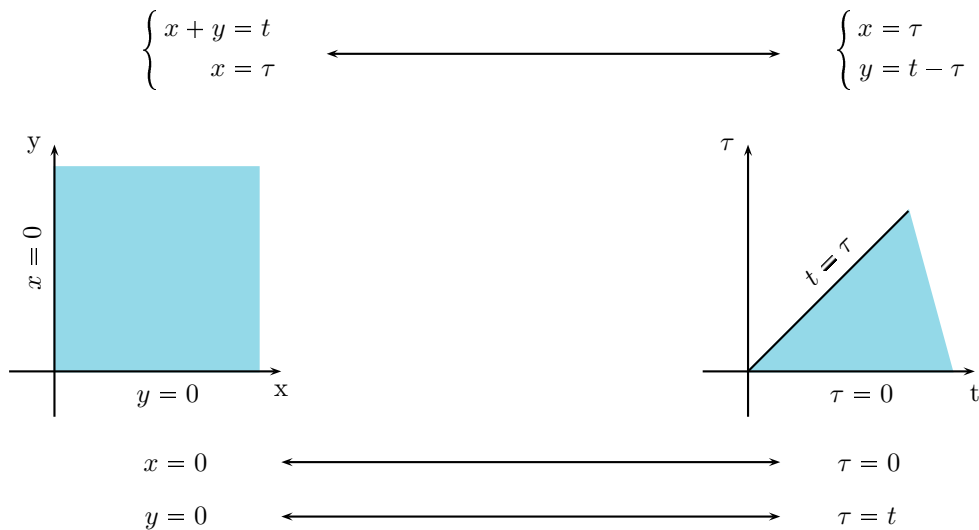
Teorema 9.7 (Teorema de Convolución (Borel)).

$$\left. \begin{aligned} f(t) &\sqsupset F(s) \\ g(t) &\sqsupset G(s) \end{aligned} \right\} \implies f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \sqsupset F(s) \cdot G(s) \quad (t \geq 0)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \left(\int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx \right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} g(y) e^{-sy} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x) g(y) e^{-s(x+y)} dx dy \end{aligned}$$

Se plantea un cambio de variable en esta integral doble:



$$|J| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = |-1| = 1$$

Se obtiene entonces:

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) dt$$

Por lo tanto:

$$F(s) \cdot G(s) \sqsupset \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = f(t) * g(t)$$

Esta integral es la que se llama *producto de convolución* y es la que se simboliza por $f(t) * g(t)$. \square

Una segunda demostración del teorema de convolución es:

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= G(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\tau) f(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\tau) f(\tau) G(s) e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

Por el teorema de desplazamiento de la función original

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\tau) f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(t-\tau) g(t-\tau) e^{-st} dt \right) d\tau$$

Cambiando el orden de integración, válido dentro del campo de CU

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\tau) f(\tau) \mathbf{H}(t-\tau) g(t-\tau) d\tau}_{\boxed{1}} dt$$

La integral $\boxed{1}$ resulta

$$\begin{aligned} \boxed{1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(\tau) f(\tau) \mathbf{H}(t-\tau) g(t-\tau) d\tau = 0 \quad t \leq 0 \\ &= \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \quad t > 0 \end{aligned}$$

De donde

$$\boxed{1} = \mathbf{H}(t) \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Entonces

$$F(s) \cdot G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} \mathbf{H}(t) \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau dt$$

$F(s) \cdot G(s)$ se antitransforma

$$F(s) \cdot G(s) \supset \mathbf{H}(t) \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} &\supset \mathbf{H}(t) \\ \frac{1}{s^2+1} &\supset \text{sen}(t) \\ \frac{1}{s(s^2+1)} &\supset \int_0^t \text{sen}(\tau) \mathbf{H}(t-\tau) d\tau = \int_0^t \text{sen}(\tau) d\tau = -\cos(\tau)|_0^t \\ \frac{1}{s(s^2+1)} &\supset 1 - \cos(t) \end{aligned}$$

Verificación:

$$1 - \cos(t) \supset \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

9.8. Transformada de funciones periódicas

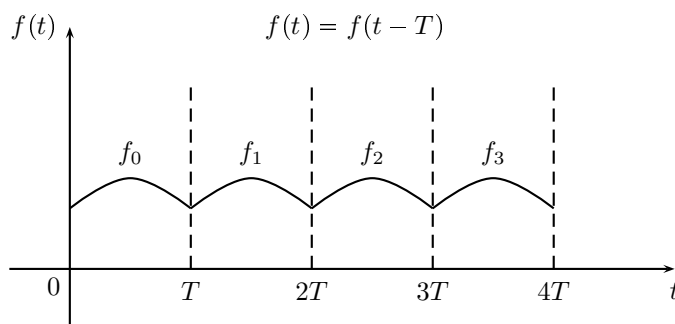
Teorema 9.8. Sea una función periódica de período T , siendo su primera onda $f_0(t)$:

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f(t) = f(t - T) \\ H_2) \quad f_0(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0, T] \\ 0 & t > T \end{cases} \end{array} \right\} \implies F(s) = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}$$

Demostración. La convergencia de la T.L. de funciones periódicas está asegurada por el teorema 5.1, donde las funciones acotadas tienen T.L. CV para $x > 0$.

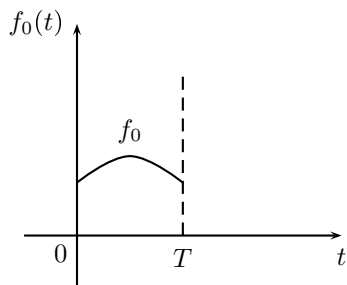
Además hay CU, porque al ser acotada es de orden exponencial.

Una función periódica puede descomponerse en una serie de ondas



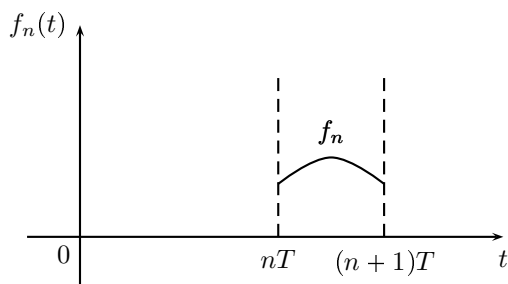
Primera onda

$$f_0(t) = H(t) f_0(t) \quad \supset \quad F_0(s)$$



Onda $(n + 1)$

$$f_n(t) = H(t - nT) f_0(t - nT) \quad \supset \quad F_0(s) e^{-nTs}$$



$$f(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) + \dots$$

Transformando la serie en serie de transformadas, posible por la existencia de CU de la serie de funciones originales:

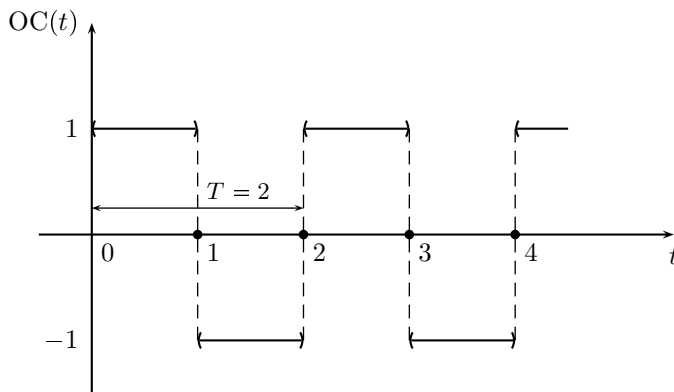
$$\begin{aligned} F(s) &= F_0(s) + F_0(s) e^{-Ts} + F_0(s) e^{-2Ts} + \dots + F_0(s) e^{-nTs} + \dots \\ &= F_0(s) [1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots + e^{-nTs} + \dots] \end{aligned}$$

que es una serie geométrica de razón e^{-Ts}

$$F(s) = F_0(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

□

Ejemplo:



$$f_0(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0, 1) \\ -1 & t \in (1, 2) \\ 0 & t \in (2, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_0(s) &= \int_0^1 1 e^{-st} dt + \int_1^2 (-1) e^{-st} dt \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s} - e^{-2s}}{s} = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s} = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s} \end{aligned}$$

Por lo tanto, siendo el período $T = 2$

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s} \frac{1}{1 - e^{-2s}} = \frac{(1 - e^{-s})^2}{s} \frac{1}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} \left(\frac{1 - e^{-s}}{1 + e^{-s}} \right)$$

9.9. Propiedades de la Transformada de Laplace. Tabla

Propiedad	Teo.	$f(t)$	$F(s)$
Linealidad	6.1	$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(s) + \lambda_2 F_2(s)$
Derivación en t $f \in \text{CPOE}$	6.2	$f'(t)$ $f^{(n)}(t)$	$s F(s) - f(0^+)$ $s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - s f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$
Integración en t $f \in \text{CPOE}$	9.1	$\int_0^t f(\tau) d\tau$ $\int_a^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$ $\frac{\int_a^0 f(\tau) d\tau}{s} + \frac{F(s)}{s}$
Derivación en s $f \in \text{CPOE}$	9.2	$(-t) f(t)$	$F'(s)$
Integración en s $f \in \text{CPOE}$ $\int_{V_{0^+}} \frac{f(t)}{t} dt \in \text{CV}$	9.3	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$
Desplazamiento en t	9.4	$H(t-a) f(t-a)$	$e^{-as} F(s)$
Desplazamiento en s	9.5	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
Cambio $t \rightarrow k t$	9.6	$f(k t)$	$\frac{1}{ k } F\left(\frac{s}{ k }\right)$
Convolución	9.7	$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$	$F(s) \cdot G(s)$
Funciones Periódicas	9.8	$f(t) = f(t-T)$ $f_0(t) = \begin{cases} f(t) & t \in (0, T) \\ 0 & t \geq T \end{cases}$	$\frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}$

10. Propiedades de la T.L. Tercera parte

En este capítulo se desarrollan propiedades adicionales de la T.L. que complementan, con las ya vistas, el conjunto de teoremas necesarios para operar con la misma.

10.1. Primer teorema del orden de la T.L.

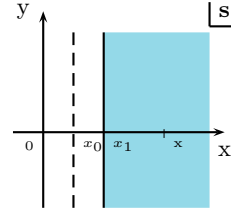
Este teorema permite acotar a la T.L. de esta manera:

$$|F(s)| \leq \frac{M_1}{x}$$

tomando como hipótesis que f cumple con las previstas en el teorema 5.7 de funciones de orden exponencial (“Teorema”).

Se recuerda que eso significa:

$$f \in \text{CPOE} := \begin{cases} \text{H}_1) & f \in \text{CP} \\ \text{H}_2) & |f| \leq M e^{x_0 t} \\ \text{H}_3) & x_0 < x_1 \leq x \end{cases}$$



También se demuestra como consecuencia de la tesis anterior que:

$$F(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

El primer teorema del orden de $F(s)$ se enuncia:

Teorema 10.1.

$$H) f \in \text{CPOE} \implies \begin{cases} T_1) & |F(s)| \leq \frac{M_1}{x} \\ T_2) & F(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Demostración. Se realiza una acotación análoga a la realizada en el teorema 5.7 de CPOE.

$$\begin{aligned} |F(s)| &\leq \left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| e^{-xt} dt \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} M e^{-(x-x_0)t} dt \leq \frac{M}{x-x_0} \leq \frac{M}{x_1-x_0} \end{aligned}$$

Multiplicando por x a ambos miembros de la desigualdad:

$$x |F(s)| \leq x \frac{M}{x-x_0} = \frac{M}{1-\frac{x_0}{x}}$$

Como $x_1 \leq x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &\leq \frac{1}{x_1} \\ 1 - \frac{x_0}{x_1} &\leq 1 - \frac{x_0}{x} \\ \frac{1}{1 - \frac{x_0}{x}} &\leq \frac{1}{1 - \frac{x_0}{x_1}} \end{aligned}$$

Llamando $M_1 := \frac{M}{1 - \frac{x_0}{x_1}}$ (cte.), resulta:

$$x |F(s)| \leq \frac{M}{1 - \frac{x_0}{x}} \leq \frac{M}{1 - \frac{x_0}{x_1}} = M_1$$

$$|F(s)| \leq \frac{M_1}{x}$$

La segunda tesis es consecuencia inmediata de esta acotación. Si $s \rightarrow \infty$, $x \geq x_1$ y $x \rightarrow +\infty$, entonces:

$$F(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

10.2. Segundo teorema del orden de la T.L.

Este segundo teorema de la acotación de la T.L. tiene condiciones más restrictivas que el anterior, porque además de la hipótesis de que f cumpla con los requisitos de CPOE se agrega que también los debe cumplir f' .

La acotación que se prueba es:

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|}$$

El enunciado del teorema es:

Teorema 10.2.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in CPOE \\ H_2) \quad f' \in CPOE \end{array} \right\} \implies T) \quad |F(s)| \leq \frac{M_1}{|s|}$$

Demostración. De acuerdo a las acotaciones vistas en el teorema anterior

$$|s F(s) - f(0^+)| \leq \frac{M}{x - x_0} \leq \frac{M}{x_1 - x_0}$$

$$|s F(s)| \leq \frac{M}{x_1 - x_0} + |f(0^+)| =: M_1$$

$$|F(s)| \leq \frac{M_1}{|s|} \quad \square$$

10.3. Teorema del valor inicial

Con las mismas hipótesis del teorema 10.1 se puede probar que:

$$s F(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f(0^+)$$

que es la tesis del teorema llamado del *valor inicial*.

Teorema 10.3.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in CPOE \\ H_2) \quad f' \in CPOE \end{array} \right\} \implies T) \quad s |F(s)| \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f(0^+)$$

Demostración. De acuerdo a la acotación ya empleada en el teorema anterior, $s \rightarrow \infty \implies x \rightarrow +\infty$.

$$|s F(s) - f(0^+)| \leq \frac{M}{x - x_0}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow x \rightarrow +\infty \\ 0 \end{array} \implies s F(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} f(0^+)$$

□

Ejemplo:

$$1 + e^{-t} \supset \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$1 + e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} 2$$

$$s F(s) = 1 + \frac{s}{s+1} \xrightarrow[s \rightarrow \infty]{\quad} 2 = f(0^+)$$

10.4. Teorema del valor final

Con hipótesis más restrictivas que las del teorema 10.3, se puede probar que:

$$s F(s) \xrightarrow[s \rightarrow 0]{\quad} f(+\infty)$$

Enunciamos el llamado *teorema del valor final*.

Teorema 10.4.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in CPOE \\ H_2) \quad f' \in CPOE \\ H_3) \quad x_1 < 0 \\ H_4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty) \end{array} \right\} \implies T) \quad s |F(s)| \xrightarrow[s \rightarrow 0]{\quad} f(+\infty)$$

Demostración. De acuerdo al teorema de derivación en \mathbf{t} válido por H_1 :

$$\int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = s F(s) - f(0^+)$$

Puede pasarse al límite cuando $s \rightarrow 0$, pues $x_1 < 0$ y esto asegura que la CU de la T.L. para $x_1 < x$ por H_2

$$\int_0^{+\infty} f'(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)] - f(0^+)$$

Integrando el primer término

$$f(t)|_0^{+\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)] - f(0^+)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - \cancel{f(0^+)} = \lim_{s \rightarrow 0} [s F(s)] - \cancel{f(0^+)}$$

Resulta:

$$s F(s) \xrightarrow[s \rightarrow 0]{\quad} f(+\infty) \quad \square$$

Ejemplo:

$$1 + e^{-t} \supset \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$1 + e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\quad} 1$$

$$s F(s) = 1 + \frac{s}{s+1} \xrightarrow[s \rightarrow 0]{\quad} 1 = f(+\infty)$$

10.5. Propiedades del producto de convolución

El producto de convolución en la T.L. definido como una ley de composición interna entre dos funciones sobre \mathfrak{F} , el espacio de Fourier, es:

$$* : \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}$$

$$(f, g) \mapsto f * g = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

Este producto goza de las siguientes propiedades:

Teorema 10.5.

$$\text{Definición de Producto de Convolución} \implies \begin{cases} f * (g * h) = (f * g) * h \\ \qquad \qquad \qquad \text{Prop. Asociativa} \\ f * g = g * f \\ \qquad \qquad \qquad \text{Prop. Conmutativa} \\ f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \\ \qquad \qquad \qquad \text{Prop. Distributiva} \end{cases}$$

Demostración. La demostración es inmediata a partir de las transformadas:

$$\begin{aligned} F(s) \cdot [G(s) \cdot H(s)] &= [F(s) \cdot G(s)] \cdot H(s) \quad \square \quad f * (g * h) = (f * g) * h \\ F(s) \cdot G(s) &= G(s) \cdot F(s) \quad \square \quad f * g = g * f \\ F(s) \cdot [G(s) + H(s)] &= [F(s) \cdot G(s)] + [F(s) \cdot H(s)] \quad \square \quad f * (g + h) = (f * g) + (f * h) \quad \square \end{aligned}$$

11. Fórmula de reciprocidad de la T.L

11.1. Teorema de reciprocidad de la T.L.

Este teorema es llamado también *de inversión* o *de Mellin* y permite obtener la función original a partir de la transformada, es decir, la llamada *antitransformada*.

Las fórmulas de reciprocidad de la T.L. se obtienen a partir de las fórmulas de reciprocidad de la T.F. resultantes del teorema de la integral de Fourier (visto en el párrafo 2) cuyo enunciado es:

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad g \in CP/\mathbb{R} \\ H_2) \quad \begin{array}{l} g' \in CP/t^- \\ g' \in CP/t^+ \end{array} \\ H_3) \quad \begin{array}{l} \int_{V_{-\infty}} |g| dt \in CV \\ \int_{V_{+\infty}} |g| dt \in CV \end{array} \end{array} \right\} \implies \begin{cases} G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-iyt} dt \\ g^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) e^{iyt} dy \end{cases}$$

Para poder aplicar este teorema a la T.L. debe recordarse la relación existente entre T.L. y T.F.

$$f(t) \quad \square \quad F(s) = G(y) \quad \stackrel{TF}{\square} \quad H(t) f(t) e^{-xt} = g(t)$$

y de aquí el teorema de reciprocidad:

Teorema 11.1.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in CP/\mathbb{R} \\ H_2) \quad \begin{array}{l} f' \in CP/t^- \\ f' \in CP/t^+ \end{array} \\ H_3) \quad x > \alpha \quad (\text{Abcisa de CA}) \end{array} \right\} \implies \begin{cases} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-st} dt \\ H(t) f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow c} F(s) e^{st} ds \end{cases}$$

Demostración. Se aplica entonces el teorema de la integral de Fourier con:

$$g(t) = H(t) f(t) e^{-xt}$$

Es inmediata la verificación de H_1 y H_2

$$H_1) \quad H(t) f(t) e^{-xt} \in \text{CP}/\mathbb{R} \iff \begin{cases} f(t) \in \text{CP}/\mathbb{R} \\ H(t) \in \text{CP}/\mathbb{R} \\ e^{-xt} \in \text{CP}/\mathbb{R} \end{cases}$$

$$H_2) \quad (H(t) f(t) e^{-xt})' \in \text{CP}/t^-, t^+ \iff \begin{cases} f' \in \text{CP}/t^-, t^+ \\ H' \in \text{CP}/t^-, t^+ \\ (e^{-xt})' \in \text{CP}/t^-, t^+ \end{cases}$$

La verificación de la H_3 en $V_{-\infty}$, como ya se ha visto en 4.3, se cumple siempre por la presencia de $H(t)$, mientras que en $V_{+\infty}$ la CA de la T.F. se asegura por la hipótesis de que $x > \alpha$, donde α es la abscisa de CA de la T.L.

$$H_3) \quad \begin{aligned} \int_{V_{-\infty}} |g| dt \in \text{CV} &\iff \int_{V_{-\infty}} 0 dt = 0 \\ \int_{V_{+\infty}} |g| dt \in \text{CV} &\iff \int_{V_{+\infty}} f(t) e^{-st} dt \in \text{CA} \iff x > \alpha \end{aligned}$$

Verificadas las hipótesis del teorema integral de Fourier, lo aplicamos:

$$\begin{cases} F(s) = G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-xt} e^{-iyt} dt \\ g^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{iyt} dy \end{cases}$$

Se observa lo siguiente:

$$g^*(t) = H(t) f^*(t) e^{-xt}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} H(t) f^*(t) e^{-xt} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{iyt} dy \\ H(t) f^*(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{xt} e^{iyt} dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) e^{st} ds \end{aligned}$$

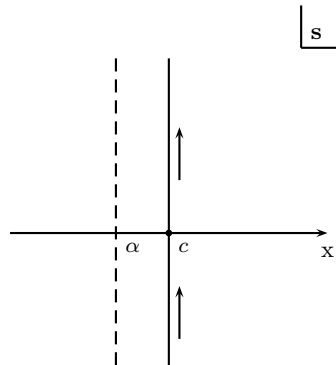


Figura 19: Camino de integración para la antitransformada de Laplace

Esta integral corresponde a una integral curvilínea en el plano s a lo largo de cualquier recta vertical $s = c$ dentro del campo de CA, como se muestra en la figura 11.1.

$$\begin{aligned} \text{rt} : (-\infty, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto \begin{cases} c + iy = s : c \in \mathbb{R}, c > \alpha \\ ds = i dy \end{cases} \end{aligned}$$

Resulta entonces la antitransformada o fórmula de inversión o fórmula de Mellín.

$$H(t) f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow c} F(s) e^{st} ds$$

integral a lo largo de cualquier recta vertical de abscisa c , dentro del campo de CA, recorrida en el sentido de las y crecientes, que conjuntamente con la T.L. dan las fórmulas de reciprocidad

$$\left\{ \begin{array}{l} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-st} dt \\ H(t) f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow c} F(s) e^{st} ds \end{array} \right.$$

□

Observación 1: Algunas autores dan como fórmula de inversión

$$f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow c} F(s) e^{st} ds \quad t > 0 \quad (1)$$

y agregan que

$$f(t) = 0 \quad t < 0$$

Esto no es así pues $f(t)$ puede tomar cualquier valor para $t < 0$, lo que se anula es $H(t) f(t)$. Por otra parte, la fórmula 1 no es válida si hay desplazamiento, observación derivada de la *Observación 2* del párrafo 4.1.

El teorema de reciprocidad de la T.L. se puede particularizar suponiendo $f(t)$ de orden exponencial:

$$|f(t)| < M e^{x_0 t}$$

y tomando $x_0 < x_1 \leq x$.

Ello implica, como se ha visto que $\alpha < x_0$, por lo tanto:

Teorema 11.2.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in CP/\mathbb{R} \\ H_2) \quad \begin{array}{l} f' \in CP/t^- \\ f' \in CP/t^+ \end{array} \\ H_3) \quad |f| < M e^{x_0 t} \\ H_4) \quad x_0 < x_1 \leq x \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-st} dt \\ H(t) f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow c} F(s) e^{st} ds \end{array} \right.$$

Enunciado que puede presentarse también de la siguiente forma, recordando que:

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \\ H_3) \\ H_4) \end{array} \right\} =: f \in CPOE/x_0 < x_1 \leq x$$

Corolario 11.2.1.

$$\left. \begin{array}{l} H) \quad f \in CPOE \\ H_2) \quad \begin{array}{l} f' \in CP/t^- \\ f' \in CP/t^+ \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(t) f(t) e^{-st} dt \\ H(t) f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow c} F(s) e^{st} ds \end{array} \right.$$

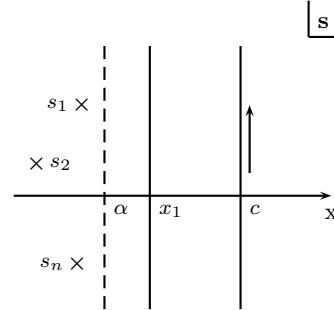
11.2. Inversión. Cuando las singularidades de $F(s)$ son puntos singulares aislados

De la fórmula de inversión anterior se puede hallar una simplificación, como la suma de los residuos de $F(s) e^{st}$ cuando las singularidades de $F(s)$ sólo son puntos singulares aislados, es decir, son polos o puntos singulares esenciales.

De acuerdo a la tesis T_5 del teorema 5.7 de CV para funciones continuas por partes y de orden exponencial (párrafo 5.4).

$$f \in \text{CPOE}/_{x_0 < x_1 \leq x} \implies F(s) \in \text{H}/_{x_1 \leq x}$$

Los puntos singulares sólo pueden estar a la izquierda de x_1 .



Suponiendo válidas la hipótesis del teorema 11.2, se tiene:

Teorema 11.3.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in \text{CPOE}/_{x_1 \leq x} \\ H_2) \quad \begin{array}{l} f' \in \text{CP}/t^- \\ f' \in \text{CP}/t^+ \end{array} \\ H_3) \quad \{s_i\}_{i=1}^n \in s. \text{ Sing. Aislados} \\ H_4) \quad |F(s)| < \frac{M}{R^k} : k > 0 \end{array} \right\} \implies T) \quad H(t) f^*(t) = H(t) \sum_{i=1}^n \mathcal{R}(F(s) e^{st}, s_i)$$

Observación: Una variante de H_4 puede ser la siguiente:

$$|F(s)| < \frac{M}{\mathcal{O}(R^k)} \sim \frac{M}{R^k}$$

Demostración del Teorema 11.3. La demostración se basa en la aplicación del teorema de los residuos a la fórmula de inversión.

$$H(t) f^*(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow c} F(s) e^{st} ds$$

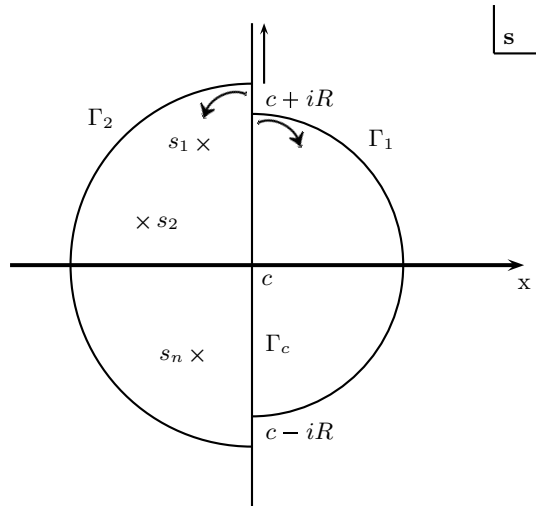


Figura 20: Caminos de integración cuando los $s.S.$ son todos aislados.

Para aplicar el teorema de los residuos se toma en primer lugar un segmento de recta vertical Γ_c .

$$\begin{aligned} \Gamma_c : [-R, +R] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto s = c + iy \end{aligned}$$

porque cuando se pasa al límite para $R \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_c} F(s) e^{st} ds &= \int_{c-iR}^{c+iR} F(s) e^{st} ds \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st} ds = \\ &= 2\pi i H(t) f^*(t) \end{aligned}$$

se obtiene la integral buscada (fórmula de inversión).

Para formar una lazo, el segmento de recta Γ_c se completa por yuxtaposición con una semicircunferencia Γ_1 o Γ_2 según convenga, para lograr que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F(s) e^{st} ds &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \\ \int_{\Gamma_2} F(s) e^{st} ds &\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Para lograr este objetivo se tiene en cuenta la hipótesis H_4

$$|F(s)| < \frac{M}{R^k} : k > 0$$

y que la ecuación de las circunferencias Γ es:

$$\begin{aligned} \Gamma : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto s = c + R e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Se aplica entonces el teorema de acotación de la integral a cualquiera de las dos circunferencias

Γ_1

$$\left| \int_{\Gamma_i} F(s) e^{st} ds \right| \leq L \cdot M = \pi R \cdot \text{Cota}\{|F(s)|\} e^{st}$$

$$\leq \underbrace{\pi R \frac{M}{R^k}}_{\boxed{\text{A}}} e^{ct} e^{Rt \cos \varphi}$$

$$\boxed{\text{A}} \begin{matrix} k > 1 \\ t < 0 \\ \cos \varphi > 0 \Rightarrow \Gamma_i = \Gamma_1 \end{matrix} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \implies \int_{\Gamma_1} F(s) e^{st} ds \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

$$\boxed{\text{A}} \begin{matrix} k > 1 \\ t > 0 \\ \cos \varphi < 0 \Rightarrow \Gamma_i = \Gamma_2 \end{matrix} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \implies \int_{\Gamma_2} F(s) e^{st} ds \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Esta demostración nos lleva a que el camino de integración es:

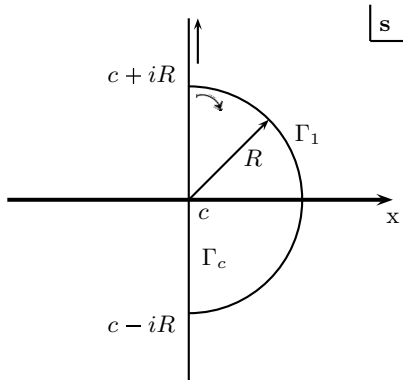
$$\begin{cases} \Gamma_1 & \text{si } t < 0 \\ \Gamma_2 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Además, esta demostración sólo es válida con la restricción $k > 1$ y no $k > 0$ como lo expresa H_2 , pues la exponencial $e^{Rt \cos \varphi}$ no tiende a 0 cuando $R \rightarrow +\infty$ para los casos $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies e^{Rt \cos \varphi} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Sin embargo, por un vía más larga, se puede extender la tesis al caso $k > 0$, como se verá a continuación.

I. Caso $t < 0$



Para el caso $t < 0$ se completa el lazo con Γ_1

$$\Gamma_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \mapsto s = c + R e^{i\varphi}$$

que se recorre en sentido negativo.

Acotando la integral a lo largo de Γ_1 :

$$\left| \int_{\Gamma_1} F(s) e^{st} ds \right| \leq \int_{\Gamma_1} |F(s)| e^{xt} |ds| \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{M}{R^k} e^{Rt \cos \varphi} R d\varphi$$

$$\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi$$

Como la integral es de función par y $t < 0$

$$= \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-R|t| \cos \varphi} d\varphi$$

Cambiando la variable $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta$

$$= \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-R|t|\sin\theta} d\theta$$

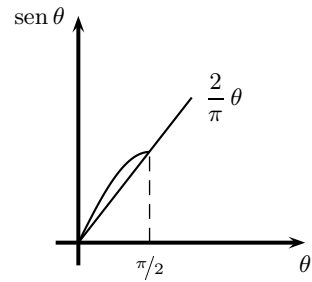
Para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se cumple

$$\sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta$$

como se muestra en la figura.

Queda entonces:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_1} F(s) e^{st} ds \right| &\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-R|t|\cos\theta} d\theta \\ &\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-R|t|\frac{2}{\pi}\theta} d\theta = \frac{\pi M}{R^{k-1}} \frac{e^{-R|t|\frac{2}{\pi}\theta}}{-R|t|} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi M}{R^k} \frac{1 - e^{-R|t|}}{|t|} \xrightarrow[\substack{k>0 \\ t<0}]{R \rightarrow +\infty} 0 \implies \int_{\Gamma_1} F(s) e^{st} ds \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$



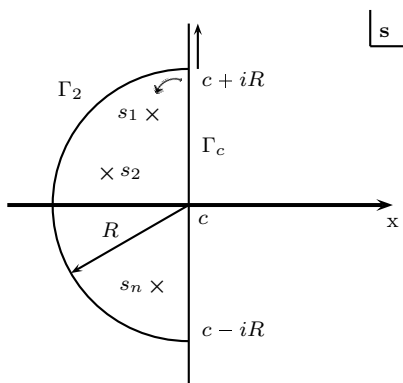
Por lo tanto, planteando la tesis del teorema de los residuos, sabiendo que a la derecha del segmento Γ_c no hay puntos singulares, se tiene:

$$\begin{array}{ccc} \int_{c-iR}^{c+iR} F(s) e^{st} ds & + & \int_{\Gamma_1} F(s) e^{st} ds = 0 \\ \downarrow R \rightarrow +\infty & & \downarrow R \rightarrow +\infty \\ 2\pi i \cdot H(t) f^*(t) & + & 0 = 0 \end{array}$$

Lo cual lleva al resultado obvio:

$$H(t) f(t) = 0 \quad \text{para } t < 0$$

II. Caso $t > 0$



Para el caso $t > 0$ se complementa el lazo con Γ_2

$$\begin{aligned} \Gamma_2 : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] &\rightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto s = c + R e^{i\varphi} \end{aligned}$$

que se recorre en sentido positivo.

Se acota la integral a lo largo de Γ_2 .

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} F(s) e^{st} ds \right| &\leq \int_{\Gamma_2} |F(s)| e^{st} |ds| \leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{M}{R^k} e^{Rt \cos\varphi} R d\varphi \\ &\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Esta última integral se puede reducir a una equivalente a la del caso anterior.

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \stackrel{\varphi = \omega - \pi}{=} \int_{\pi/2}^{\pi/2} e^{Rt \cos \omega} d\omega = 2 \int_0^{\pi/2} e^{Rt \cos \omega} d\omega$$

Análogamente al lo realizado en el caso anterior, $\omega = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} e^{Rt \sin \theta} d\theta$$

Acotando $\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta$ para $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-Rt \frac{2}{\pi} \theta} d\theta = 2 \frac{1 - e^{-Rt}}{Rt}$$

Por lo tanto, volviendo a la acotación \int_{Γ_2}

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} F(s) e^{st} ds \right| &\leq \frac{2M}{R^{k-1}} \frac{1 - e^{-Rt}}{Rt} \\ &\leq \frac{2M}{R^k} \frac{1 - e^{-Rt}}{t} \xrightarrow[\substack{k > 0 \\ t > 0}]{R \rightarrow +\infty} 0 \implies \int_{\Gamma_2} F(s) ds \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Se plantea el teorema de los residuos, sabiendo que los únicos puntos singulares son polos o puntos singulares esenciales: el conjunto $\{s_i\}$ finito.

$$\begin{array}{ccc} \int_{c-iR}^{c+iR} F(s) e^{st} ds & + & \int_{\Gamma_1} F(s) e^{st} ds = 2\pi i \sum_{i=1}^n \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i] \\ \downarrow R \rightarrow +\infty & & \downarrow R \rightarrow +\infty \\ 2\pi i \cdot \mathcal{H}(t) f^*(t) & + & 0 = 2\pi i \sum_{i=1}^n \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i] \end{array}$$

De ello resulta:

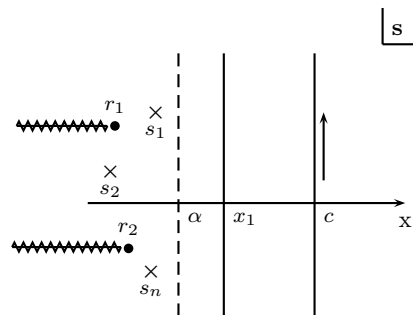
$$\mathcal{H}(t) f^*(t) = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i] \quad \text{para } t > 0 \quad \square$$

11.3. Fórmula de inversión cuando $F(s)$ tiene puntos de ramificación

Un caso más general que el visto en el párrafo anterior es cuando $F(s)$ tiene puntos de ramificación y las correspondientes cortaduras, además de los puntos singulares aislados.

Por supuesto que estos puntos de ramificación sólo pueden encontrarse a la izquierda de x_1 ($x < x_1$) de acuerdo a la tesis T₅ del teorema 5.7 de CV para funciones CPOE.

$$f \in \text{CPOE}/_{x_0 < x_1 \leq x} \implies F(s) \in \mathcal{H}/_{x_1 \leq x}$$



Suponiendo válidas las hipótesis del teorema 11.2, entonces:

Teorema 11.4.

$$\left. \begin{array}{l}
 H_1) \quad f \in CPOE /_{x_0 < x_1 \leq x} \\
 H_2) \quad \begin{array}{l} f' \in CP/t^- \\ f' \in CP/t^+ \end{array} \\
 H_3) \quad \{s_i\}_{i=1}^m \in s. \text{ Sing. Aislados} \\
 H_4) \quad |F(s)| < \frac{M}{R^k} : k > 0 \\
 H_5) \quad \{r_j\}_{j=1}^m \in s. \text{ Ramificación}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}
 H(t) f(t) = H(t) \left[\sum_{i=1}^n \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i] \right. \\
 \left. - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{r_j} F(s) e^{st} ds \right]
 \end{array} \right]$$

Demostración. El caso $t < 0$ es análogo al visto en el párrafo anterior. Por lo tanto, se analiza directamente el caso $t > 0$.

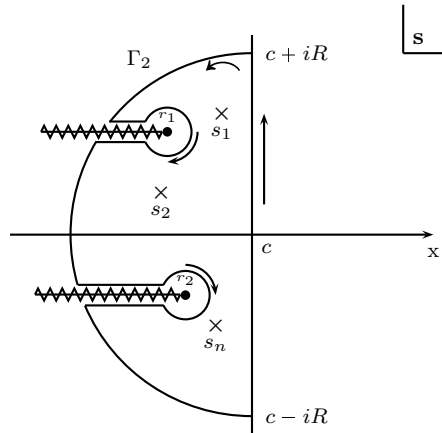


Figura 21: Camino de integración cuando hay puntos de ramificación.

Se aplica el teorema de los residuos:

$$\int_{c-iR}^{c+iR} F(s) e^{st} ds + \int_{\Gamma_2} + \sum_{j=1}^m \int_{r_j} = 2\pi i \sum_{i=1}^n \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i]$$

$\downarrow R \rightarrow +\infty$ $\downarrow R \rightarrow +\infty$ $\downarrow R \rightarrow +\infty$ $\downarrow R \rightarrow +\infty$

$$2\pi i \cdot H(t) f^*(t) + 0 + \sum_{j=1}^m \int_{r_j} = 2\pi i \sum_{i=1}^n \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i]$$

Por lo tanto, para $t > 0$

$$H(t) f(t) = H(t) \sum_{i=1}^n \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i] - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{r_j} F(s) e^{st} ds \quad \square$$

11.4. Teorema de Heaviside

Una función $F(s)$ muy frecuente en las aplicaciones, que debe antitransformarse, es la racional

$$F(s) = \frac{s_m(s)}{Q_n(s)}$$

donde $m < n$ (por el teorema del orden de la T.L.) y donde todos los polos son simples, es decir que hay n raíces simples del denominador $Q_n(s)$.

La tesis que se obtiene es la *fórmula de Heaviside*.

Teorema 11.5.

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad F(s) = \frac{s_m(s)}{Q_n(s)} \\ H_2) \quad Q_n(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) : \forall i \neq j \Rightarrow s_i \neq s_j \end{array} \right\} \Rightarrow f^*(t) = \sum_{i=1}^n \frac{s_m(s_i)}{Q'_n(s_i)} e^{s_i t} \quad t > 0$$

Demostración. Las hipótesis del teorema T_3 de antitransformación se cumplen:

$$H_4) \quad |F(s)| = \frac{|s_m(s)|}{|Q_n(s)|} \leq \frac{1}{\mathcal{O}(R^{n-m})} \Leftarrow n - m > 0$$

de acuerdo al teorema del orden de la T.L. (teorema 10.2)

$$H_3) \quad \{s_i\}_{i=1}^n \in \text{s. Sing. Aislados} \Leftarrow s_i \in \text{Polos de primer orden}$$

A su vez, H_1 y H_2 se cumplen porque:

$$\left. \begin{array}{l} H_1) \quad f \in \text{CPOE}/_{x_1 \leq x} \\ H_2) \quad f' \in \text{CP}/_{t^-, t^+} \end{array} \right\} \Leftarrow f = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} : k_i \in \text{cte.}$$

De acuerdo al teorema 11.3:

$$F(s) = \frac{s_m(s)}{Q_n(s)} \sqsubset f^*(t) = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i]$$

Por ser s_i polos simples:

$$\mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_i] = \frac{s_m(s_i)}{Q'_n(s_i)} e^{s_i t}$$

Resulta entonces:

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^n \frac{s_m(s_i)}{Q'_n(s_i)} e^{s_i t} \quad t > 0 \quad \square$$

11.5. Ejercicios de antitransformación

Para antitransformar una T.L. puede usarse la fórmula de inversión (con sus casos particulares) o cualesquiera de las propiedades de la misma T.L., conjuntamente con la tabla de transformadas de funciones.

Un ejemplo que ilustra las diferentes formas de antitransformar es el siguiente:

Ejemplo 1. Antitransformar

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

Método 1. Fracciones simples

1.1. $a \neq b$

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b}$$

Los coeficientes A y B son los residuos de $F(s)$ en a y b , respectivamente.

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathcal{R}(a)}{s-a} + \frac{\mathcal{R}(b)}{s-b} \\ &= \frac{\frac{1}{a-b}}{s-a} + \frac{\frac{-1}{a-b}}{s-b} \sqsubset \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \mathbf{H}(t) \end{aligned}$$

1.2. $a = b$

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{(s-a)^2} \sqsubset t e^{at} \mathbf{H}(t)$$

Esta se obtiene directamente por tabla y el teorema del desplazamiento en s .

Método 2. Inversión

2.1. $a \neq b$ (Heaviside)

$$|F(s)| \leq \left| \frac{1}{(s-a)(s-b)} \right| \leq \frac{1}{\mathcal{O}(R^2)}$$

Puede acotarse $F(s)$ por un polinomio en R^2 , por lo tanto vale el teorema de inversión.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(t) f^*(t) &= \mathbf{H}(t) \sum_{i=1}^2 \mathcal{R}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)} e^{st}, s_i\right] \\ &= \mathbf{H}(t) \left[\frac{1}{a-b} e^{at} + \frac{1}{b-a} e^{bt} \right] \\ &= \mathbf{H}(t) \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \end{aligned}$$

2.2. $a = b$

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \frac{1}{(s-a)^2} \leq \frac{1}{\mathcal{O}(R^2)} \\ \mathbf{H}(t) f^*(t) &= \mathbf{H}(t) \mathcal{R}[F(s) e^{st}, a] \end{aligned}$$

$a \in$ polo de segundo orden

$$\begin{aligned} &= \mathbf{H}(t) D_s [e^{st}] \Big|_a \\ &= \mathbf{H}(t) t e^{at} \end{aligned}$$

Método 3. Convolución

De acuerdo al teorema de convolución, suponemos $t > 0$.

3.1. $a \neq b$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \frac{1}{s-a} &\sqsubset e^{at} \\ \frac{1}{s-b} &\sqsubset e^{bt} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{t>0} e^{at} * e^{bt} &= \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{bt} \frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b} \Big|_0^t \\ &= \frac{e^{bt}}{a-b} [e^{(a-b)t} - 1] \\ &\stackrel{t>0}{=} \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \end{aligned}$$

3.2. $a = b$

$$e^{at} * e^{bt} = \int_0^t e^{a\tau} e^{a(t-\tau)} d\tau = e^{at} \int_0^t d\tau = t e^{at}$$

Método 4. Combinación de integración en t y desplazamiento en s

4.1. $a \neq b$

$$\frac{1}{s - \beta} \sqsubset e^{\beta t}$$

$$\frac{1}{s(s - \beta)} \sqsubset \int_0^t e^{\beta\tau} d\tau = \frac{1}{\beta} (e^{\beta t} - 1)$$

Desplazando $s \rightarrow s - a$

$$\frac{1}{(s - a)(s - a - \beta)} \sqsubset \frac{1}{\beta} (e^{\beta t} - 1) e^{at} = \frac{1}{\beta} e^{(\beta+a)t} - e^{at}$$

Tomando $a + \beta = b \Leftrightarrow \beta = b - a$

$$\frac{1}{(s - a)(s - b)} \sqsubset \frac{1}{b - a} (e^{bt} - e^{at}) = \frac{1}{a - b} (e^{at} - e^{bt})$$

4.2. $a = b$

Es análogo al 1.2. (se obtiene directamente de tabla).

Método 5.

5.1. $a = b$

$$\frac{1}{(s - a)(s - b)} = \frac{1}{s^2 - (a + b)s + ab}$$

Llamando $2\alpha = a + b$, $\beta = ab$

$$= \frac{1}{s^2 - 2\alpha s + \beta}$$

$$= \frac{1}{(s^2 - \alpha)^2 - (\alpha^2 - \beta)}$$

Considerando $w^2 = \alpha^2 - \beta$, resulta

$$\frac{1}{(s - a)(s - b)} = \frac{1}{(s - \alpha)^2 - w^2} \sqsubset \frac{1}{w} \sinh(wt) e^{\alpha t}$$

De donde, para $t > 0$

$$f^*(t) = \frac{e^{\alpha t}}{w} \frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2} = \frac{1}{2w} (e^{(\alpha+w)t} - e^{(\alpha-w)t})$$

Expresando w, α y β en función de a y b :

$$w^2 = \alpha^2 - \beta = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab$$

$$= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$\alpha + w = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$$

$$\alpha - w = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$$

$$2w = a - b$$

Resulta

$$f^*(t) = \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$$

Otro ejemplo de antitransformación, con puntos de ramificación, es:

Ejemplo 2.

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

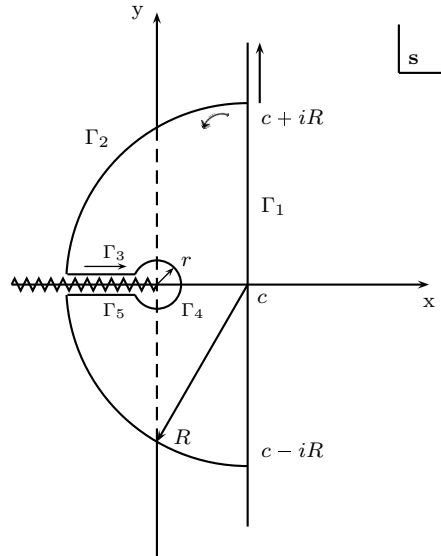


Figura 22: Camino de integración para $F(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}$.

Esta función no tiene polos ni puntos singulares esenciales, pero sí un punto de ramificación en $s = 0$, como se muestra en el figura 11.5.

Por otro lado

$$|F(s)| = \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \right| \leq \frac{1}{\mathcal{O}(R^{1/2})}$$

Se aplica la tesis del teorema 11.3 para $t > 0$:

$$f^*(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{st} ds \quad (r_j = 0) \quad (2)$$

Se plantean las integrales en $\Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5$

$$\Gamma_3 : [R - c, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\rho \longmapsto \rho e^{i\pi}$$

$$\int_{\Gamma_3} = \int_{R-c}^0 \frac{1}{\rho^{1/2} e^{i\pi/2}} e^{\rho e^{i\pi} t} d\rho = -i \int_0^{R-c} \rho^{1/2} e^{-\rho t} d\rho \xrightarrow{R \rightarrow +\infty}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -i \int_0^{+\infty} \rho^{1/2} e^{-\rho t} d\rho \stackrel{\rho t = \tau}{=} -i \int_0^{+\infty} \frac{\tau^{-1/2}}{t^{-1/2}} e^{-\tau} \frac{d\tau}{t} = \frac{-i}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma_4 : [\pi, -\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi \longmapsto r e^{i\varphi}$$

$$\left| \int_{\Gamma_4} \right| \leq 2\pi r \frac{e^{-r \cos(\varphi)t}}{\sqrt{r}} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0 \implies \int_{\Gamma_4} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0$$

$$\Gamma_5 : [0, R - c] \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\rho \longmapsto \rho e^{-i\pi}$$

$$\int_{\Gamma_5} = \int_0^{R-c} \frac{1}{\rho^{1/2} e^{-i\pi/2}} e^{\rho e^{-i\pi} t} d\rho = -i \int_0^{R-c} \rho^{1/2} e^{-\rho t} d\rho \xrightarrow{R \rightarrow +\infty}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow +\infty} -i \int_0^{+\infty} \rho^{1/2} e^{-\rho t} d\rho = \frac{-i}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi}$$

Volviendo a la ecuación 2 ($t > 0$)

$$f^*(t) = \frac{-1}{2\pi i} \int = \frac{-1}{2\pi i} \left[-2i \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \right]$$

$$f^*(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad \left(\begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \\ \text{---} \end{array} \right)_{r_j}$$

De donde

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \square \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

Un tercer ejemplo de antitransformación, para funciones periódicas, es el siguiente:

Ejemplo 3.

$$F(s) = \frac{1}{s(1 - e^{-s})}$$

Los polos son las raíces de:

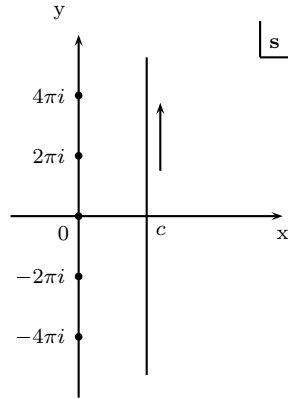
$$1 - e^{-s}$$

entonces

$$s = -2k\pi i$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} k = 0 & \text{polo doble} \\ k \neq 0 & \text{polos simples} \end{cases}$$



En este ejemplo hay infinitos polos simples. Puede aplicarse el teorema de los residuos, pero después debe analizarse el límite cuando $R \rightarrow +\infty$ de la suma de los residuos.

Para $t > 0$

$$f^*(t) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=-k}^k \mathcal{R} \left[\frac{1}{s(1 - e^{-s})}, s_i \right]$$

Calculamos

$$\mathcal{R}(0) = D \left[\frac{s}{1 - e^{-s}} \right]_{s=0} = \frac{(1 - e^{-s}) - s e^{-s}}{(1 - e^{-s})^2} \Big|_{s=0}$$

Aplicando L'Hospital

$$\cong \frac{e^{-s} - e^{-s} + s e^{-s}}{2(1 - e^{-s}) e^{-s}} \xrightarrow{s \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(2k\pi i) &= \frac{1/s e^{st}}{(1 - e^{-s})'} \Big|_{s=2k\pi i} = \frac{1/s e^{st}}{e^{-s}} \Big|_{s=2k\pi i} \\ &= \frac{e^{2k\pi i t}}{2k\pi i} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=-k}^k \mathcal{R} &= \frac{1}{2} + \sum_{i=-k}^k \frac{e^{2k\pi i t}}{2k\pi i} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f^* t \\ f^*(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2k\pi i t}}{2k\pi i} \end{aligned}$$

esta es una serie de Fourier exponencial, que también puede transformarse en trigonométrica:

$$f^*(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{2k\pi i t} - e^{-2k\pi i t}}{2k\pi i} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\text{sen } 2k\pi t}{k\pi}$$

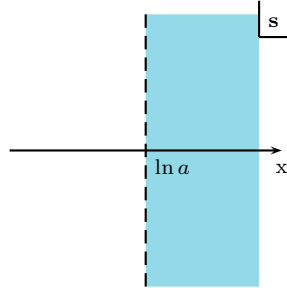
donde se ve como la función periódica de $T = 1$ puede expresarse como serie de Fourier.

12. Transformada de Laplace de Funciones Especiales

12.1. Función a^t

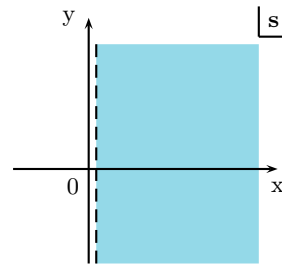
$$\boxed{a^t \supset \frac{1}{s - \ln a}} \quad a > 0$$

$$a^t = e^{t \ln a} \supset \frac{1}{s - \ln a} : x > \ln a$$



12.2. Función logaritmo

$$\boxed{\ln t \supset \frac{1}{s} (\Gamma'(1) - L s)}$$



Demostración 1º

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \ln t e^{-st} dt &\stackrel{st=\tau}{=} \int_0^{+\infty} L\left(\frac{\tau}{s}\right) e^{-\tau} \frac{d\tau}{s} \\ &= \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} L \tau e^{-\tau} d\tau - \frac{L s}{s} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{s} (\Gamma'(1) - L s) \end{aligned}$$

Demostración 2º

$$t^w \supset \frac{\Gamma(w+1)}{s^{w+1}}$$

Para hallar la transformada de $\frac{\partial t^w}{\partial w}$ basta derivar dentro del signo integral.

Esto es posible porque se cumple:

$$H_1) \quad t^w e^{-st} \in C/w, t$$

$$H_2) \quad t^w \ln t e^{-st} \in C/w, t > 0$$

$$H_3) \quad \int_{V_{+\infty}} t^w e^{-st} dt \in CV \iff t^w \in CPOE/_{0 < x}$$

$$H_4) \quad \int_{V_{+\infty}} t^w \ln t e^{-st} dt \in CV \iff t^w \ln t \in CPOE/_{0 < x_1 \leq x}$$

Entonces:

$$\frac{\partial t^w}{\partial w} \supset \frac{\partial}{\partial w} \frac{\Gamma(w+1)}{s^{w+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial t^w}{\partial w} e^{-st} dt$$

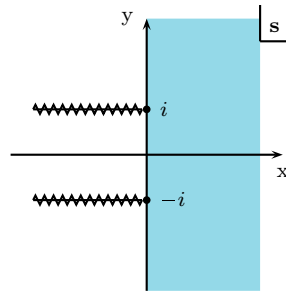
$$t^w \ln t = \frac{\partial t^w}{\partial w} \supset \frac{\Gamma'(w+1)}{s^{w+1}} - \frac{\Gamma(w+1)}{s^{w+1}} L s$$

Pasando al límite cuando $w \rightarrow 0$

$$\ln t \supset \frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\Gamma(1) L s}{s}$$

12.3. Funciones de Bessel $J_0(t)$

$$J_0(t) \supset \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$$



Demostración 1 Esta demostración es un ejemplo de como la T.L. también resuelve ED lineales de coeficientes no constantes.

ED. BESSEL $\nu = 0$

$$y'' + \frac{1}{t} y' + y = 0 \quad J_0(0^+) = 1$$

$$J'(0^+) = 0$$

Se tiene entonces la ED que se transforma

$$t y'' + y' + t y = 0$$

Transformando, aplicando la linealidad y la derivación en s

$$- [s^2 Y(s) - s y(0^+) - y'(0^+)]' + [s Y(s) - y(0^+)] - [Y(s)]' = 0$$

Sabiendo que $J(0^+) = 1$ y que $J'(0^+) = 0$:

$$- s^2 Y'(s) - 2s Y(s) + \mathcal{I} + s Y(s) - \mathcal{I} - Y'(s) = 0$$

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = \frac{-s}{s^2 + 1}$$

$$L Y(s) = -\frac{1}{2} L(s^2 + 1) + L k$$

$$Y(s) = \frac{k}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

Aplicando el teorema del valor inicial

$$sY(s) = \frac{k s}{\sqrt{s^2 + 1}} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} k = f(0^+) = J_0(0^+) = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

Demostración 2 Esta demostración es un ejemplo de como operar en T.L. con series:

$$J_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}}{k! k!} \quad (3)$$

Transformado término a término (existe CU)

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! k!} \frac{1}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{s^{2k+1}} \quad (4)$$

Recordando la serie de Taylor de $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$

$$f = \frac{1}{\sqrt{1-z}} = (1-z)^{-\frac{1}{2}} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1$$

$$f' = \frac{1}{2} (1-z)^{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

$$f'' = \frac{1}{2} \frac{3}{2} (1-z)^{-\frac{5}{2}} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{3}{2}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$f^{(k)} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2k-1}{2} (1-z)^{-(2k+1)} \xrightarrow{z \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \dots \frac{2k-1}{2} = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k} k!} \frac{z^k}{k!}$$

En nuestro caso, la serie 4:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{J_0(t)\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! k!} \frac{1}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{s^{2k+1}} = \frac{1}{s} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{s^2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{aligned}$$

Demostración 3 Recordando la forma integral de Bessel

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t \operatorname{sen} \varphi - n\varphi)} d\varphi$$

Para $n = 0$

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it \operatorname{sen} \varphi} d\varphi$$

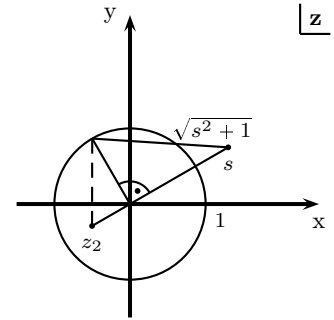
$$J_0(t) \supset \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{it \operatorname{sen} \varphi} d\varphi \right) e^{-st} dt$$

Se puede cambiar el orden de integración pues la función es $f \in \text{CPOE}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} e^{it \operatorname{sen} \varphi} e^{-st} dt d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{s - i \operatorname{sen} \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Esta integral se puede calcular en el campo complejo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{s - i \operatorname{sen} \varphi} d\varphi &\stackrel{z=e^{i\varphi}}{=} \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=1} \frac{1}{s - i \left(\frac{z-z^{-1}}{2i} \right)} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{-2}{z^2 - 2pz - 1} dz \\ &= \mathcal{R}(z_2) \\ &= \frac{-2}{2s - 2\sqrt{s^2 + 1} - 2s} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z_{1,2} &= s \pm \sqrt{s^2 + 1} \\ |z_1| &> 1 \\ |z_2| &= \left| \frac{1}{z_1} \right| \leq 1 \end{aligned}$$

12.4. Funciones de Bessel $J_n(t)$

$$J_n(t) \sqsupset \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^n}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

Demostración 1

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t \operatorname{sen} \varphi - n\varphi)} d\varphi = (-1)^n J_{-n}(t)$$

$$J_n(t) \sqsupset (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t \operatorname{sen} \varphi - n\varphi)} d\varphi e^{-st} dt$$

Cambiando el orden de integración, válido porque $f \in \text{CPOE}$

$$\begin{aligned} &= (-1)^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi} \int_0^{+\infty} e^{st \operatorname{sen} \varphi} e^{-st} dt d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\varphi}}{s - i \operatorname{sen} \varphi} \end{aligned}$$

Haciendo $z=e^{i\varphi}$ como en el caso de $J_0(t)$

$$= (-1)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z^n \frac{-2}{z^2 - 2pz - 1}$$

Los puntos singulares son:

$$z_1 = s + \sqrt{s^2 + 1} \quad (\text{excluido})$$

$$z_2 = s - \sqrt{s^2 + 1} \quad (\text{incluido})$$

$$= (-1)^n \mathcal{R}(z_2)$$

$$= (-1)^n \frac{(z_2)^n (-2)}{2z_2 - 2s}$$

$$= \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^n}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

Demostración 2 De acuerdo a las fórmulas de recurrencia de las funciones de Bessel.

$$2J'_n(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)$$

$$J_{n+1} = J_{n-1} - 2J'_n$$

Para $n = 0$

$$J_1 = J_{-1} - 2J'_0$$

Como $J_1 = -J_{-1}$

$$J_1 = -J'_0$$

Transformando $-J'_0(t)$

$$J_1(t) \sqsupset - \left[s \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} - 1 \right] = \frac{\sqrt{s^2 + 1} - s}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} J_2(t) = J_0 - 2J'_1 &\sqsupset \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} - 2s \left[s \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} - 1 \right] = \frac{1 - 2s\sqrt{s^2 + 1} + 2s^2}{\sqrt{s^2 + 1}} \\ &= \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^2}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{aligned}$$

Ensayando por recurrencia la fórmula

$$J_n(t) = \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^n}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} J_{n+1} = J_{n-1} - 2J'_n &\sqsupset \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^{n-1}}{\sqrt{s^2 + 1}} - 2s \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^n}{\sqrt{s^2 + 1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^{n-1}}{\sqrt{s^2 + 1}} [1 - 2s\sqrt{s^2 + 1} + 2s^2] \\ &= \frac{(\sqrt{s^2 + 1} - s)^{n+1}}{\sqrt{s^2 + 1}} \end{aligned}$$

12.5. Relaciones entre sen y J_n

Recordando el producto de convolución y las transformadas de sen y J_0 , queda:

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} = \frac{1}{s^2 + 1} \sqsupset \int_0^t J_0(\tau) J_0(t - \tau) d\tau = \text{sen } t$$

Además

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}} \cdot \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{-n}}{\sqrt{s^2+1}} &= \frac{1}{s^2+1} \sqsubset \int_0^t J_n(\tau) J_{-n}(t-\tau) d\tau = \text{sen } t \\ &\sqsubset \int_0^t J_n(\tau) J_n(t-\tau) d\tau = (-1)^n \text{sen } t \end{aligned}$$

12.6. Funciones de Bessel hiperbólicas

$$I_n(t) \sqsubset \frac{(s - \sqrt{s^2+1})^n}{\sqrt{s^2-1}}$$

Las funciones de Bessel modificadas de 1º especie son:

$$I_n(t) = i^{-n} J_n(it) = i^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}}{n!(n+k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}}{n!(n+k)!}$$

Transformando la serie

$$I_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}}{n!(n+k)!} \sqsubset \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+k)!} \frac{1}{2^{2k+n}} \frac{(2k+n)!}{s^{2k+n+1}}$$

Comparando con

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{2k+n}}{n!(n+k)!} \sqsubset \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+k)!} \frac{1}{2^{2k+n}} \frac{(-1)^k (2k+n)!}{s^{2k+n+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}} \end{aligned}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} I_n(t) &\sqsubset \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+k)!} \frac{1}{2^{2k+n}} \frac{(2k+n)!}{i^{2k+n+1} \left(\frac{s}{i}\right)^{2k+n+1}} = \\ &= i^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+k)!} \frac{1}{2^{2k+n}} \frac{(-1)^k (2k+n)!}{i \left(\frac{s}{i}\right)^{2k+n+1}} \\ &= \frac{i^{-n} \left(\sqrt{\left(\frac{s}{i}\right)^2 + 1} - \frac{s}{i} \right)^n}{i \sqrt{\left(\frac{s}{i}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{-s^2+1}}{i} - \frac{s}{i^2} \right)^n}{i \sqrt{s^2+1}} \\ &= \frac{(s - \sqrt{s^2+1})^n}{\sqrt{s^2-1}} \end{aligned}$$

12.7. Funciones cos y sen integral

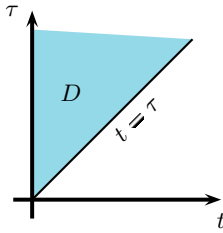
$$\begin{aligned} \text{ci}(t) &\sqsupset -\frac{1}{s} \text{L} \sqrt{s^2 + 1} \\ \text{si}(t) &\sqsupset -\frac{1}{s} \text{Arctg } s \end{aligned}$$

Recordando la definición

$$\text{ci}(t) = - \int_t^{+\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau$$

$$\text{si}(t) = - \int_t^{+\infty} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau$$

$$\begin{aligned} \text{ci}(t) + i \text{si}(t) &= - \int_t^{+\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau + i - \int_t^{+\infty} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau \\ &= - \int_t^{+\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau} d\tau \sqsupset - \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau} d\tau \right) e^{-st} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau} \int_0^\tau e^{-st} dt d\tau \end{aligned}$$



Esta integral se calcula cambiando el orden de integración en el recinto D , entonces $t \in [0, \tau]$ y $\tau \in (0, +\infty)$.

$$\text{ci}(t) + i \text{si}(t) \sqsupset - \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau} \frac{e^{-s\tau} - 1}{-s} d\tau = -\frac{1}{s} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\tau} - e^{-(s-i)\tau}}{\tau} d\tau$$

Esta integral se puede calcular así:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{bt}}{t} e^{-st} dt = \int_s^\infty \frac{1}{s-\alpha} - \frac{1}{s-\beta} ds = \text{L} \left(\frac{s-\alpha}{s-\beta} \right) \Big|_s^\infty = \text{L} \left(\frac{s-\beta}{s-\alpha} \right)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} - \int_t^{+\infty} \frac{e^{i\tau}}{\tau} d\tau &\sqsupset -\frac{1}{s} \text{L} \left(\frac{-(s-i)}{i} \right) = -\frac{1}{s} \text{L}(1 + is) \\ &= -\frac{1}{s} \left[\text{L} \sqrt{s^2 + 1} + i \text{Arctg } s \right] \end{aligned}$$

Separando parte real e imaginaria

$$\text{ci}(t) = - \int_t^{+\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau \sqsupset -\frac{1}{s} \text{L} \sqrt{s^2 + 1}$$

$$\text{si}(t) = - \int_t^{+\infty} \frac{\text{sen } \tau}{\tau} d\tau \sqsupset -\frac{1}{s} \text{Arctg } s$$

12.8. Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre $L_n(t)$ son un caso de polinomios ortogonales en el intervalo $t \in (0, +\infty)$. La fórmula de Rodrigues correspondiente es:

$$L_n(t) = e^t D^{(n)} [t^n e^{-t}]$$

Transformando $\varphi(t) = t^n e^{-t}$

$$\varphi(t) = t^n e^{-t} \quad \supset \quad \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}$$

Como $\varphi(0^+) = \varphi'(0^+) = \dots = \varphi^{(n-1)}(0^+) = 0$

$$D^{(n)}[\varphi(t)] = D^{(n)}[t^n e^{-t}] \quad \supset \quad \frac{s^n n!}{(s+1)^{n+1}}$$

Resulta por el teorema de desplazamiento en el campo s

$$e^t D^{(n)}[t^n e^{-t}] \quad \supset \quad \frac{n! (s-1)^n}{s^{n+1}} = n! \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^n$$

$$\boxed{L_n(t) \quad \supset \quad n! \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^n}$$

Esta fórmula permite hallar la fórmula generatriz de los polinomios de Laguerre, pues:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t) \frac{x^n}{n!} \quad \supset \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \cancel{n!} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^n \frac{x^n}{\cancel{n!}}$$

Serie geométrica de razón $(1 - \frac{1}{s})x$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t) \frac{x^n}{n!} &\supset \frac{1}{s} \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{s})x} = \frac{1}{s - px + x} = \frac{1}{s(1-x) + x} = \\ &= \frac{1}{s + \frac{x}{1-x}} \end{aligned}$$

Esta última expresión es fácil de antitransformar

$$\frac{1}{1-x} e^{-t(\frac{x}{1-x})} \quad \supset \quad \frac{1}{1-x} \frac{1}{s + \frac{x}{1-x}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(t) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-x} e^{-t(\frac{x}{1-x})}}$$

Fórmula generatriz de los polinomios de Laguerre

13. Resolución de ecuaciones diferenciales y sistemas de ecuaciones diferenciales

En este capítulo se desarrollan ejemplos de aplicación de la T.L. a diferentes tipos de ED y sistemas de ED.

13.1. ED lineales de coeficientes constantes

Ejemplo 1.

$$y'' + 2y' + y = t e^{-t} \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Transformando se obtiene una ecuación algebraica.

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) + 2s Y(s) + Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^2} \\ Y(s)(s+1)^2 &= \frac{1}{(s+1)^2} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s+1)^4} \end{aligned}$$

Antitransformando

$$y(t) = \frac{t^3}{3!} e^{-t}$$

Verificación:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + y &= t e^{-t} - \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}!} t^2 e^{-t} + \frac{t^3}{3!} e^{-t} + \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}!} t^2 e^{-t} - 2 \frac{\cancel{t^3}}{\cancel{3}!} e^{-t} + \frac{\cancel{t^3}}{\cancel{3}!} e^{-t} \\ &= t e^{-t} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

$$y''' + y = t \quad \begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - 1 + Y(s) &= \frac{1}{s^2} \\ Y(s) &= \left(\frac{1}{s^2} + 1 \right) \frac{1}{s^3 + 1} \\ Y(s) &= \frac{s^2 + 1}{s^2 (s^3 + 1)} \end{aligned}$$

Como $f^*(t) = \sum_{j=1}^4 \mathcal{R}[F(s) e^{st}, s_j]$ para $t > 0$, se calculan los residuos.
Los polos son:

$$\begin{aligned} s^3 + 1 = 0 &\implies s = (-1)^{1/3} = e^{i \left(\frac{2k+1}{3} \pi \right)} & \xrightarrow{k=-1} s_1 = e^{-i \pi/3} & \text{(polo simple)} \\ & & \xrightarrow{k=0} s_2 = e^{i \pi/3} & \text{(polo simple)} \\ & & \xrightarrow{k=1} s_3 = e^{i \pi} = -1 & \text{(polo simple)} \\ s^2 = 0 &\implies & \longrightarrow s_4 = 0 & \text{(polo doble)} \end{aligned}$$

Los residuos de primer orden s_1, s_2, s_3 se calculan por:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(s_j) &= \frac{\frac{s_j^2 + 1}{s_j^2} e^{s_j t}}{3 s_j^2} = \frac{(s_j^2 + 1) e^{s_j t}}{3 s_j^4} = \frac{s_j + s_j^{-1}}{3 s_j^3} e^{s_j t} \longrightarrow \\ \xrightarrow{j=1} \mathcal{R}(s_1) &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{-3} e^{e^{-i\pi/3} t} = -\frac{1}{3} e^{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t} \\ \xrightarrow{j=2} \mathcal{R}(s_2) &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{3}}{-3} e^{e^{i\pi/3} t} = -\frac{1}{3} e^{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)t} \\ \xrightarrow{j=3} \mathcal{R}(s_3) &= \frac{2}{3} e^{-t} \end{aligned}$$

El residuo en $s = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(0) &= D \left[\frac{s^2 + 1}{s^3 + 1} e^{st} \right]_{s=0} = \left[\frac{2s(s^3 + 1) - 3s^2(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)^2} e^{st} + \frac{s^2 + 1}{s^3 + 1} t e^{st} \right]_{s=0} \\ &= t \end{aligned}$$

Entonces

$$y(t) = -\frac{1}{3} e^{\frac{1}{2}t} \left(e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}it} + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}it} \right) + \frac{2}{3} e^{-t} + t$$

$$y(t) = -\frac{2}{3} e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{2}{3} e^{-t} + t$$

Verificación:

$$\begin{aligned} y''' &= -\frac{2}{3} \left[\frac{1}{8} e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + 3 \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}t} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t + \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}t} \left(-\frac{3}{4} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + e^{\frac{1}{2}t} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right] - \frac{2}{3} e^{-t} + 0 \\ y''' + y &= e^{\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \left(-\frac{2}{24} + \frac{18}{24} - \frac{2}{3} \right) + \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \left(\frac{2}{3} \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{2}{3} \frac{3\sqrt{3}}{8} \right) \right] \\ &\quad + e^{-t} \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) + t = t \end{aligned}$$

13.2. Sistemas de ED lineales con coeficientes constantes

Ejemplo 1.

$$\begin{cases} x' = x - y & x(0^+) = 5 \\ y' = 2x + 4y & y(0^+) = 7 \end{cases}$$

Transformando el sistema lineal de ED se obtiene un sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

$$\begin{cases} sX(s) - x(0^+) = X(s) - Y(s) \\ sY(s) - y(0^+) = 2X(s) + 4Y(s) \end{cases}$$

ordenando:

$$\begin{cases} -5 = X(s)(1-s) + Y(s)(-1) \\ -7 = X(s)(2) + Y(s)(4-s) \end{cases}$$

Se resuelve por el teorema de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-s & -1 \\ 2 & 4-s \end{vmatrix} = s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3)$$

Este determinante no es otro que el polinomio característico $|A - sI|$, donde las raíces de Δ son los polos de las transformadas $X(s)$ e $Y(s)$, y son los autovalores de A .

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -7 & 4-s \end{vmatrix} = 5s - 27$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1-s & -5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 7s + 3$$

Por lo tanto, antitransformando por Heaviside : $t > 0$

$$X(s) = \frac{5s - 27}{(s-2)(s-3)} \quad \square \quad \boxed{x(t) = 17e^{2t} - 12e^{3t}}$$

Verificamos $x(0^+) = 5$

$$Y(s) = \frac{7s + 3}{(s-2)(s-3)} \quad \square \quad \boxed{y(t) = -17e^{2t} + 24e^{3t}}$$

Verificamos $y(0^+) = 7$

Puede realizarse una verificación general

$$\begin{aligned} x' &= 34e^{2t} - 36e^{3t} = (17e^{2t} - 12e^{3t}) - (-17e^{2t} + 24e^{3t}) = 34e^{2t} - 36e^{3t} \\ y' &= -34e^{2t} + 72e^{3t} = 2(17e^{2t} - 12e^{3t}) + 4(-17e^{2t} + 24e^{3t}) = -34e^{2t} + 72e^{3t} \end{aligned}$$

Ejemplo 2.

$$\begin{cases} x' = x + 2y + e^{-t} & x(0^+) = 0 \\ y' = 2x + y & y(0^+) = 1 \end{cases}$$

Transformando:

$$\begin{cases} sX(s) - x(0^+) = X(s) + 2Y(s) + \frac{1}{s+1} \\ sY(s) - y(0^+) = X(s) + Y(s) \end{cases}$$

ordenando:

$$\begin{cases} -\frac{1}{s+1} = X(s)(1-s) + Y(s)(2) \\ -1 = X(s)(2) + Y(s)(1-s) \end{cases}$$

Se resuelve por el teorema de Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-s & 2 \\ 2 & 1-s \end{vmatrix} = s^2 - 2s - 3 = (s+1)(s-3)$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -\frac{1}{s+1} & 2 \\ -1 & 1-s \end{vmatrix} = \frac{s-1}{s+1} + 2 = \frac{3s+1}{s+1}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1-s & -\frac{1}{s+1} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = s-1 + \frac{2}{s+1} = \frac{s^2+1}{s+1}$$

Antitransformando por Heaviside : $t > 0$

$$X(s) = \frac{3s+1}{(s-3)(s+1)^2} \sqsubset x(t) = \mathcal{R}(3) + \mathcal{R}(-1)$$

$$\mathcal{R}(3) = \frac{10}{16} e^{3t} = \frac{5}{8} e^{3t}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-1) &= D \left[\frac{3s+1}{s-3} e^{st} \right]_{s=-1} = \left[\frac{3(s-3) - (3s+1)}{(s-3)^2} e^{st} + \frac{3s+1}{s-3} t e^{st} \right]_{s=-1} \\ &= -\frac{10}{16} e^{-t} + \frac{-2}{-4} t e^{-t} = e^{-t} \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{2} t \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{5}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{2} t \right)}$$

Verificamos $x(0^+) = 0$

$$Y(s) = \frac{s^2+1}{(s-3)(s+1)^2} \sqsubset y(t) = \mathcal{R}(3) + \mathcal{R}(-1)$$

$$\mathcal{R}(3) = \frac{10}{16} e^{3t} = \frac{5}{8} e^{3t}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(-1) &= D \left[\frac{s^2+1}{s-3} e^{st} \right]_{s=-1} = \left[\frac{2s(s-3) - (s^2+1)}{(s-3)^2} e^{st} + \frac{s^2+1}{s-3} t e^{st} \right]_{s=-1} \\ &= \frac{6}{16} e^{-t} - \frac{2}{4} t e^{-t} = e^{-t} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} t \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{5}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} t \right)}$$

Verificamos $y(0^+) = 1$

Verificación:

$$\begin{aligned}
 x' &= \frac{15}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{5}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{2}t \right) \right) + \\
 &\quad + 2 \left(\frac{5}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}t \right) \right) + e^{-t} \\
 &= \frac{15}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{1}{2}t + \frac{9}{4} \right) = \frac{15}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{5}{8} + \frac{t}{2} + \frac{6}{8} - t + 1 \right) \\
 &= \frac{15}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{t}{2} + \frac{9}{4} \right) \\
 \\
 y' &= \frac{15}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{3}{8} - \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\frac{5}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{2}t \right) \right) + \\
 &\quad + \left(\frac{5}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}t \right) \right) \\
 &= \frac{15}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{7}{2}t - \frac{7}{8} \right) = \frac{15}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(-\frac{10}{8} + t + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}t \right) \\
 &= \frac{15}{8} e^{3t} + e^{-t} \left(\frac{t}{2} - \frac{7}{8} \right)
 \end{aligned}$$

13.3. Ecuaciones Integro-Diferenciales

Ejemplo 1.

$$y(t) + 3 \int_0^t y(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau) d\tau = e^{-t}$$

Transformando:

$$Y(s) + 3Y(s) \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s + 1}$$

Despejando:

$$\begin{aligned}
 Y(s) \left[\frac{s^2 + 1 + 3}{s^2 + 1} \right] &= \frac{1}{s + 1} \\
 Y(s) &= \frac{s^2 + 1}{(s + 1)(s^2 + 4)}
 \end{aligned}$$

Antitransformando:

$$y(t) = \mathcal{R}(-1) + \mathcal{R}(2i) + \mathcal{R}(-2i)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}(-1) &= \frac{2}{5} e^{-t} \\
 \mathcal{R}(2i) &= \frac{-4 + 1}{(2i + 1)4i} e^{i2t} = \frac{-3(1 - 2i)}{4i \cdot 5} e^{i2t} \\
 \mathcal{R}(-2i) &= \frac{-4 + 1}{(-2i + 1)(-4i)} e^{-i2t} = \frac{3(1 + 2i)}{4i \cdot 5} e^{-i2t}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{2}{5} e^{-t} + \frac{3}{20i} [e^{-i2t} + e^{-i2t} + 2i (e^{i2t} + e^{-i2t})] \\
&= \frac{2}{5} e^{-t} + \frac{3}{20i} (-2i \operatorname{sen} 2t + 4i \operatorname{cos} 2t)
\end{aligned}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{2}{5} e^{-t} + \frac{3}{5} \operatorname{cos} 2t - \frac{3}{10} \operatorname{sen} 2t}$$

Ejemplo 2.

$$4 \int_0^t y(\tau) d\tau + y'(t) = \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau \quad y(0) = 1$$

$$4 \frac{Y(s)}{s} + sY(s) - 1 = Y(s) \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) \left[\frac{4}{s} + s - \frac{s}{s^2 + 1} \right] = 1$$

$$Y(s) \left[\frac{4s^2 + 4 + s^4 + s^2 - s^2}{s(s^2 + 1)} \right] = 1$$

$$Y(s) = \frac{s(s^2 + 1)}{(s^2 + 2)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{R}(\sqrt{2}i) + \mathcal{R}(-\sqrt{2}i)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\sqrt{2}i) &= \text{D} \left[\frac{s^3 + s}{(s + \sqrt{2}i)^2} e^{st} \right]_{s=\sqrt{2}i} \\
&= \left[\frac{(3s^2 + 1)(s + \sqrt{2}i)^2 - 2(s + \sqrt{2}i)(s^3 + s)}{(s + \sqrt{2}i)^4} e^{st} + \frac{s^3 + s}{(s + \sqrt{2}i)^2} t e^{st} \right]_{s=\sqrt{2}i}
\end{aligned}$$

$$= \left[(-6 + 1)(-8) - 2(2\sqrt{2}i)(\sqrt{2}i)(-1) \right] \frac{e^{i\sqrt{2}t}}{64} + \frac{\sqrt{2}i(-1)}{-8} t e^{i\sqrt{2}t}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(-\sqrt{2}i) &= \text{D} \left[\frac{s^3 + s}{(s - \sqrt{2}i)^2} e^{st} \right]_{s=-\sqrt{2}i} \\
&= \left[\frac{(3s^2 + 1)(s - \sqrt{2}i)^2 - 2(s - \sqrt{2}i)(s^3 + s)}{(s - \sqrt{2}i)^4} e^{st} + \frac{s^3 + s}{(s - \sqrt{2}i)^2} t e^{st} \right]_{s=-\sqrt{2}i}
\end{aligned}$$

$$= \left[(-6 + 1)(-8) - 2(2 - \sqrt{2}i)(-\sqrt{2}i)(-1) \right] \frac{e^{-i\sqrt{2}t}}{64} + \frac{(-\sqrt{2}i)(-1)}{-8} t e^{-i\sqrt{2}t}$$

$$\boxed{y(t) = \operatorname{cos} \sqrt{2}t - \frac{\sqrt{2}}{4} t \operatorname{sen} \sqrt{2}t}$$

14. Aplicaciones

La principal aplicación de la T.L. es resolver con rapidez las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

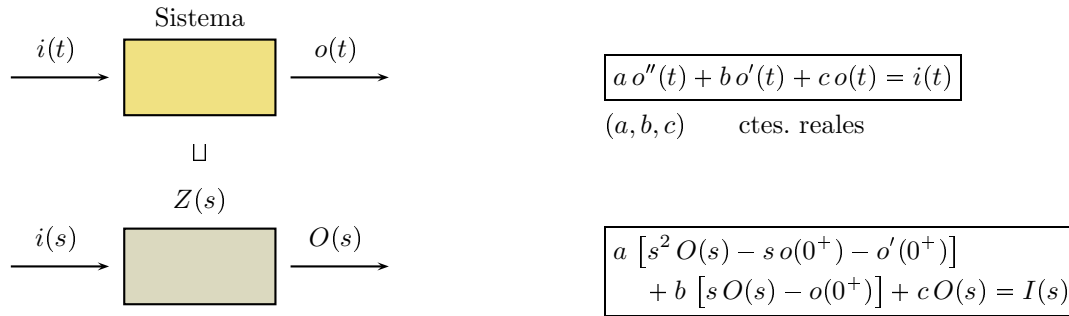
Además pueden resolverse ecuaciones lineales en derivadas parciales, ecuaciones integro-diferenciales y aún ecuaciones diferenciales con coeficientes no constantes.

El primer modelo, por excelencia, es el presentado en el párrafo 7, regido por la ecuación diferencial de 2º grado que se trata a continuación.

14.1. Resolución del modelo EDL con coeficientes constantes

14.1.1. Ecuación general en s

Se resuelve entonces el modelo planteado en 7 en el caso general, aún con condiciones de contorno no nulas.



Por lo tanto, la ecuación general de $O(s)$ es:

$$O(s) = \frac{I(s)}{a s^2 + b s + c} + \frac{(a s + b) o(0^+) + a o'(0^+)}{a s^2 + b s + c}$$

Llamando $Z(s) = a s^2 + b s + c$

$$O(s) = \frac{I(s)}{Z(s)} + \frac{(a s + b) o(0^+) + a o'(0^+)}{Z(s)}$$

Donde el primer término $\frac{I(s)}{Z(s)}$ es la respuesta a la excitación de entrada y el segundo término es la respuesta del sistema a las condiciones iniciales $o(0^+)$ y $o'(0^+)$.

Para estudiar mejor la respuesta $o(t)$ se clasifican los siguientes casos, según sea $i(t)$.

TIPO DE ENTRADA

Nula (libre)	$i(t) = 0$
Forzada	$i(t) \neq 0$
Constante	$i(t) = A$
Cisoidal	$i(t) = A e^{i\omega t}$
Poliarmónica	$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$
General	$i(t)$ genérica

Por la linealidad de la T.L. se puede siempre estudiar por separado $\frac{I(s)}{Z(s)}$ y $\frac{(a s + b) o(0^+) + a o'(0^+)}{Z(s)}$ y luego superponer los resultados.

14.2. Respuesta para entrada nula (movimiento libre)

Siendo $i(t) = 0 \Rightarrow I(s) = 0$, la respuesta general se reduce a

$$O(s) = \frac{(a s + b) o(0^+) + a o'(0^+)}{Z(s)} = \frac{(a s + b) o(0^+) + a o'(0^+)}{a s^2 + b s + c}$$

que es una función racional que tiene como denominador un polinomio de 2º grado. Sus raíces son los ceros de la impedancia $Z(s)$.

$$Z(s) = a s^2 + b s + c = 0 \implies s_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Se pueden clasificar tres casos según el discriminante Δ

$$\Delta = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

- I $\Delta > 0$ $s_1 \neq s_2$ raíces reales y distintas
- II $\Delta = 0$ $s_1 = s_2$ raíces reales e iguales
- III $\Delta < 0$ $s_1 = \overline{s_2}$ raíces complejas conjugadas

IIa) Solución en el caso I ($\Delta > 0$)

$$O(s) = \frac{(a s + b) o(0^+) + a o'(0^+)}{a s^2 + b s + c} = \frac{(s + b/a) o(0^+) + a o'(0^+)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Por el teorema de los residuos

$$o(t) = \frac{(s_1 + b/a) o(0^+) + a o'(0^+)}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} + \frac{(s_2 + b/a) o(0^+) + a o'(0^+)}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}$$

Analizando el resultado se tiene:

$$s_1 - s_2 = \left(\frac{-b}{2a} + \sqrt{\Delta}\right) - \left(\frac{-b}{2a} - \sqrt{\Delta}\right)$$

$$s_1 + \frac{b}{a} = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\Delta} + \frac{b}{a} = \frac{b}{2a} + \sqrt{\Delta} = -s_2$$

$$s_2 + \frac{b}{a} = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\Delta} + \frac{b}{a} = \frac{b}{2a} - \sqrt{\Delta} = -s_1$$

Por lo tanto:

$$o(t) = \frac{-s_2 o(0^+) + o'(0^+)}{2\sqrt{\Delta}} e^{s_1 t} + \frac{-s_1 o(0^+) + o'(0^+)}{-2\sqrt{\Delta}} e^{s_2 t}$$

$$o(t) = \frac{o(0^+)}{2\sqrt{\Delta}} (-s_2 e^{s_1 t} + s_1 e^{s_2 t}) + \frac{o'(0^+)}{2\sqrt{\Delta}} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

Verificando el resultado con respecto a las condiciones iniciales:

$$o(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{o(0^+)}{2\sqrt{\Delta}} (-s_2 + s_1) + \frac{o'(0^+)}{2\sqrt{\Delta}} (0) = o(0^+)$$

$$o'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{o(0^+)}{2\sqrt{\Delta}} (-s_2 s_1 + s_1 s_2) + \frac{o'(0^+)}{2\sqrt{\Delta}} (s_1 - s_2) = o'(0^+)$$

IIb) Solución en el caso II ($\Delta = 0$)

$$O(s) = \frac{\left(s + \frac{b}{a}\right) o(0^+) + o'(0^+)}{(s - s_1)^2}$$

Por el teorema de los residuos

$$o(t) = o(0^+) e^{s_1 t} + \left[\left(s_1 + \frac{b}{a} \right) o(0^+) + o'(0^+) \right] t e^{s_1 t}$$

$$o(t) = o(0^+) e^{s_1 t} + [(-s_1) o(0^+) + o'(0^+)] t e^{s_1 t}$$

$$o(t) = o(0^+) (1 - s_1 t) e^{s_1 t} + o'(0^+) t e^{s_1 t}$$

Se verifican las condiciones iniciales:

$$o(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} o(0^+)$$

$$\begin{aligned} o'(t) &= o(0^+) [(-s_1) + (1 - s_1 t) s_1] e^{s_1 t} + o'(0^+) (1 + s_1 t) e^{s_1 t} \\ &\xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} o(0^+) (-s_1 + s_1) + o'(0^+) = o'(0^+) \end{aligned}$$

IIIc Solución en el caso III ($\Delta < 0$)

Siendo los polos diferentes y complejos conjugados, la solución es la misma que en el caso I.

$$o(t) = \frac{o(0^+)}{2\sqrt{\Delta}} (-s_2 e^{s_1 t} + s_1 e^{s_2 t}) + \frac{o'(0^+)}{s\sqrt{\Delta}} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$$

pero aquí podemos analizar: $\Delta < 0 \implies \sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}$

$$s_1 = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\Delta} = \frac{-b}{2a} + i\sqrt{|\Delta|}$$

$$s_2 = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\Delta} = \frac{-b}{2a} - i\sqrt{|\Delta|}$$

$$\begin{aligned} o(t) &= \frac{o(0^+)}{2i\sqrt{|\Delta|}} \left[\left(\frac{b}{2a} + i\sqrt{|\Delta|} \right) e^{\left(\frac{-b}{2a} + i\sqrt{|\Delta|} \right) t} + \left(\frac{-b}{2a} + i\sqrt{|\Delta|} \right) e^{\left(\frac{-b}{2a} - i\sqrt{|\Delta|} \right) t} \right] \\ &\quad + \frac{o'(0^+)}{2i\sqrt{|\Delta|}} \left[e^{\left(\frac{-b}{2a} + i\sqrt{|\Delta|} \right) t} - e^{\left(\frac{-b}{2a} - i\sqrt{|\Delta|} \right) t} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} o(t) &= o(0^+) \frac{e^{\left(\frac{-b}{2a} \right) t}}{2i\sqrt{|\Delta|}} \left[\frac{b}{2a} 2i \operatorname{sen} \sqrt{|\Delta|} t + \sqrt{|\Delta|} 2i \cos \sqrt{|\Delta|} t \right] \\ &\quad + o'(0^+) \frac{e^{\left(\frac{-b}{2a} \right) t}}{2i\sqrt{|\Delta|}} \left[2i \operatorname{sen} \sqrt{|\Delta|} t \right] \end{aligned}$$

$$o(t) = \frac{e^{\left(\frac{-b}{2a} \right) t}}{\sqrt{|\Delta|}} \left[o(0^+) \left(\frac{b}{2a} \operatorname{sen} \sqrt{|\Delta|} t + \sqrt{|\Delta|} \cos \sqrt{|\Delta|} t \right) + o'(0^+) \operatorname{sen} \sqrt{|\Delta|} t \right]$$

Se verifican las condiciones iniciales

$$\begin{aligned}
 o(t) &\xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \left[o'(0^+) \sqrt{|\Delta|} + 0 \right] = o(0^+) \\
 o'(t) &= \frac{e^{(-\frac{b}{2a})t}}{\sqrt{|\Delta|}} \left(\frac{-b}{2a} \right) \left[o(0^+) \left(\frac{b}{2a} \operatorname{sen} \sqrt{|\Delta|} t + \sqrt{|\Delta|} \cos \sqrt{|\Delta|} t \right) + o'(0^+) \operatorname{sen} \sqrt{|\Delta|} t \right] \\
 &\quad + \frac{e^{(-\frac{b}{2a})t}}{\sqrt{|\Delta|}} \left[o(0^+) \left(\frac{b}{2a} \sqrt{|\Delta|} \cos \sqrt{|\Delta|} t - \left(\sqrt{|\Delta|} \right)^2 \operatorname{sen} \sqrt{|\Delta|} t \right) + o'(0^+) \sqrt{|\Delta|} \cos \sqrt{|\Delta|} t \right] \\
 &\xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \left[\frac{-b}{2a} o(0^+) \sqrt{|\Delta|} + o(0^+) \frac{b}{2a} \sqrt{|\Delta|} + o'(0^+) \sqrt{|\Delta|} \right] = o'(0^+)
 \end{aligned}$$

14.2.1. Condiciones de estabilidad en caso de entrada nula

Se define a un sistema como *estable* cuando la solución no diverge, es decir, está acotada.

$$\text{SISTEMA ESTABLE} := \forall t : |o(t)| < M$$

Se estudiará la estabilidad en el caso del sistema lineal de entrada nula, caso por caso, suponiendo que los coeficientes a , b y c son no nulos.

Caso I ($\Delta > 0$) Siendo las respuestas una combinación lineal de exponenciales $e^{s_1 t}$ y $e^{s_2 t}$, la solución es acotada si y sólo si:

$$\forall t : |o(t)| < M \iff \begin{cases} s_1 \leq 0 \\ s_2 \leq 0 \end{cases}$$

O sea que:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{-b}{2a} + \sqrt{|\Delta|} \leq 0 \\
 s_2 &= \frac{-b}{2a} - \sqrt{|\Delta|} \leq 0
 \end{aligned}$$

Como $s_2 < s_1$ entonces

$$s_2 < s_1 \leq 0$$

y basta demostrar solamente que $s_1 \leq 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{-b}{2a} + \sqrt{|\Delta|} &\leq 0 \\
 \sqrt{|\Delta|} &\leq \frac{b}{2a} \\
 \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{c}{a} &\leq \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \\
 0 &\leq \frac{c}{a} \implies \operatorname{sg} b = \operatorname{sg} a
 \end{aligned}$$

Por otra parte, de $\sqrt{|\Delta|} \leq \frac{b}{2a}$

$$0 < \sqrt{|\Delta|} \leq \frac{b}{2a} \implies \operatorname{sg} b = \operatorname{sg} a$$

En resumen:

$$\text{Caso I} \quad \text{SISTEMA ESTABLE} \iff \operatorname{sg} a = \operatorname{sg} b = \operatorname{sg} c$$

Caso II ($\Delta = 0$) Las respuestas en este caso son una combinación lineal de $e^{s_1 t}$ y $t e^{s_2 t}$, por lo tanto:

$$\forall t : |o(t)| < M \iff s_1 = s_2 \leq 0$$

De donde

$$s_1 = \frac{-b}{2a} \leq 0$$

$$0 \leq \frac{b}{2a} \implies \text{sg } b = \text{sg } a$$

Además

$$\Delta = 0 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$0 \leq \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \implies \text{sg } c = \text{sg } a$$

Análogamente al caso I

$$\text{Caso II} \quad \text{SISTEMA ESTABLE} \iff \text{sg } a = \text{sg } b = \text{sg } c$$

Caso III ($\Delta < 0$) La respuesta es una combinación de funciones seno y coseno, multiplicadas por una exponencial $e^{\left(\frac{-b}{2a}\right)t}$, entonces:

$$\forall t : |o(t)| < M \iff \frac{-b}{2a} \leq 0$$

$$0 \leq \frac{b}{2a} \implies \text{sg } b = \text{sg } a$$

Por otra parte

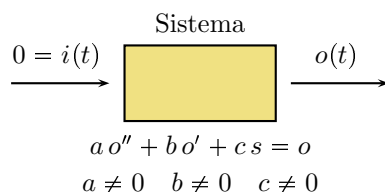
$$\Delta < 0 \implies \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \leq 0$$

$$0 \leq \left(\frac{b}{2a}\right)^2 < \frac{c}{a} \implies \text{sg } c = \text{sg } a$$

Como resultado se repite lo que ya se obtuvo en los casos I y II

$$\text{Caso III} \quad \text{SISTEMA ESTABLE} \iff \text{sg } a = \text{sg } b = \text{sg } c$$

Entonces: Condición necesaria y suficiente de estabilidad es que los coeficientes a , b , c (no nulos) tengan el mismo signo.



$$\text{SISTEMA ESTABLE} \iff \text{sg } a = \text{sg } b = \text{sg } c$$

14.2.2. Sistemas de entrada nula no amortiguados

Este caso se presenta cuando b , el coeficiente de o' , es nulo.

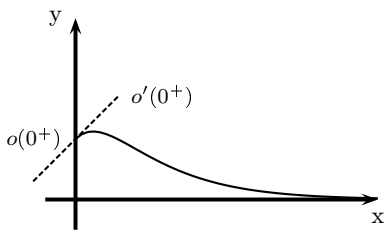
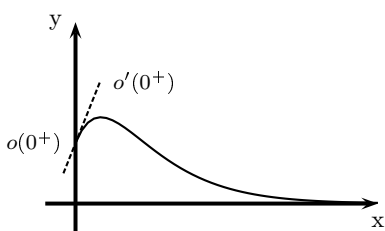
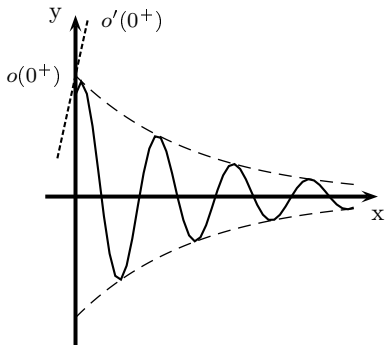
SISTEMA NO AMORTIGUADO := $b = 0$

La respuesta es un caso III, pues $s_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm i\sqrt{|\Delta|}$. La solución $o(t)$ se reduce a:

$$o(t) = o(0^+) \cos \sqrt{|\Delta|} t + o'(0^+) \frac{\sin \sqrt{|\Delta|} t}{\sqrt{|\Delta|}}$$

caso de vibración armónica no amortiguada, donde $\sqrt{|\Delta|}$ se llama *frecuencia natural de vibración*.

14.2.3. Tabla para caso de entrada nula (movimiento libre)

CASO	Δ	SOLUCION
I Sobreamortiguado	$\Delta > 0$	$o(t) = \frac{o(0^+)}{2\sqrt{ \Delta }} (-s_2 e^{s_1 t} + s_1 e^{s_2 t}) + \frac{o'(0^+)}{2\sqrt{ \Delta }} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$ 
II Amortiguado Límite	$\Delta = 0$	$o(t) = o(0^+) (1 - s_1 t) e^{s_1 t} + o'(0^+) t e^{s_1 t}$ 
III Subamortiguado	$\Delta < 0$	$o(t) = \frac{e^{-\frac{b}{2a}t}}{\sqrt{ \Delta }} \left[o(0^+) \left(\frac{b}{2a} \sin \sqrt{ \Delta } t + \sqrt{ \Delta } \cos \sqrt{ \Delta } t \right) + o'(0^+) \sin \sqrt{ \Delta } t \right]$ 

14.3. Respuesta para entrada forzada. $i(t) = A$ (constante)

De acuerdo a lo visto en I

$$O(s) = \frac{I(s)}{Z(s)} + \frac{(a s + b) o(0^+) + a o'(0^+)}{Z(s)}$$

La respuesta del sistema es la superposición de los términos de la expresión anterior:

$$O_1(s) = \frac{I(s)}{Z(s)}$$

$$O_2(s) = \frac{(a s + b) o(0^+) + a o'(0^+)}{Z(s)}$$

el segundo de los cuales es la respuesta del sistema al caso de entrada nula (movimiento libre) ya estudiado.

Por lo tanto, se realiza el análisis de $O_1(s)$:

$$i(t) = A \quad \Rightarrow \quad I(s) = \frac{A}{s}$$

$$O_1(s) = \frac{A}{s Z(s)} = \frac{A/a}{s(s - s_1)(s - s_2)}$$

De acuerdo a los casos estudiados de s_1 y s_2 , se tiene:

Caso I ($\Delta > 0$)

$$\begin{aligned} o_1(t) &= \frac{A}{a} \left[\frac{1}{s_1 s_2} + \frac{e^{s_1 t}}{s_1 (s_1 - s_2)} + \frac{e^{s_2 t}}{s_2 (s_2 - s_1)} \right] \\ &= \frac{A}{a s_1 s_2} \left[1 + \frac{s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \right] \end{aligned}$$

Como $s_1 \cdot s_2 = \frac{c}{a}$

$$o_1(t) = \frac{A}{c} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \right]$$

Caso II ($\Delta = 0$)

$$\begin{aligned} O_1(s) &= \frac{A/a}{s(s - s_1)^2} \\ o_1(t) &= \frac{A}{a} \left[\frac{1}{s^2} + D \left[\frac{e^{st}}{s} \right] \right]_{s=s_1} = \frac{A}{a} \left[\frac{1}{s_1^2} + \frac{-1}{s_1^2} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_1} t e^{s_1 t} \right] \\ o_1(t) &= \frac{A}{c} [1 - e^{s_1 t} + s_1 t e^{s_1 t}] \end{aligned}$$

Caso III ($\Delta < 0$) El resultado es análogo al del caso I, con $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{|\Delta|}$

$$o_1(t) = \frac{A}{c} \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \right]$$

Realizando las mismas operaciones que en el análisis del caso IIc, queda:

$$o_1(t) = \frac{A}{c} \left[1 - e^{-\frac{b}{2a}t} \left(\frac{b}{2a} \operatorname{sen} \sqrt{|\Delta|} t + \sqrt{|\Delta|} \cos \sqrt{|\Delta|} t \right) \right]$$

Observación: Las condiciones de estabilidad son análogas a las vistas para el sistema de movimiento libre.

14.4. Respuesta para el caso general de entrada forzada

Se estudia la respuesta

$$O_1(s) = \frac{I(s)}{Z(s)}$$

Antitransformando

$$o_1(t) = \sum_{k=1}^n \mathcal{R} \left[\frac{I(s)}{Z(s)} e^{st}, s_k \right]$$

donde se suman los residuos en los polos de $\frac{1}{Z(s)}$ y en los polos de $I(s)$.

$$o_1(t) = \sum_{\text{polos } \frac{1}{Z(s)}} \mathcal{R} \left[\frac{I(s)}{Z(s)} e^{st}, s_k \right] + \sum_{\text{polos } I(s)} \mathcal{R} \left[\frac{I(s)}{Z(s)} e^{st}, s_k \right]$$

El primer término (polos de $\frac{1}{Z(s)}$) es una combinación lineal de exponenciales.

$$\begin{array}{l} e^{s_1 t} \quad \text{y} \quad e^{s_2 t} \\ \text{o} \\ t e^{s_1 t} \quad \text{y} \quad t e^{s_2 t} \end{array}$$

de la misma manera que en el caso de entrada nula.

Si se cumplen las condiciones de estabilidad ($\text{sg } a = \text{sg } b = \text{sg } c$), estas soluciones tienden a cero para $t \rightarrow +\infty$.

$$\sum_{\text{polos } \frac{1}{Z(s)}} \mathcal{R} \left[\frac{I(s)}{Z(s)} e^{st}, s_k \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Esta respuesta, conjuntamente con la respuesta $o_2(t)$, que depende de las condiciones iniciales, forman parte del régimen transitorio.

El segundo término

$$\sum_{\text{polos } I(s)} \mathcal{R} \left[\frac{I(s)}{Z(s)} e^{st}, s_k \right] \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

puede también tener transitorios, pero además puede tener respuesta permanente, que no desaparece cuando $t \rightarrow +\infty$.

Un ejemplo es el caso armónico:

$$i_1(t) = B \text{ sen } \omega t \quad \square \quad I(s) = \frac{B \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$I_1(s) = \frac{1}{a} \frac{B \omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{B \omega}{s^2 + \omega^2} \frac{1}{a s^2 + b s + c}$$

14.4.1. Respuesta a s_1, s_2

Caso I ($\Delta > 0$)

$$\mathcal{R}(s_1) = \frac{1}{a} \frac{B \omega}{s_1^2 + \omega^2} \frac{1}{s_1 - s_2} e^{s_1 t}$$

$$\mathcal{R}(s_2) = \frac{1}{a} \frac{B \omega}{s_2^2 + \omega^2} \frac{1}{s_2 - s_1} e^{s_2 t}$$

Caso II ($\Delta = 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(s_1) &= \frac{1}{a} \text{D} \left[\frac{B\omega}{s^2 + \omega^2} e^{st} \right]_{s=s_1} \\ &= \frac{B\omega}{a} \left[\frac{-2s}{(s^2 + \omega^2)^2} e^{st} + \frac{1}{s^2 + \omega^2} t e^{st} \right]_{s=s_1} \\ &= \frac{B\omega}{a} e^{s_1 t} \left[\frac{-2s_1}{(s_1^2 + \omega^2)^2} + \frac{1}{s_1^2 + \omega^2} t \right]\end{aligned}$$

Caso III ($\Delta < 0$) Análogo al caso I

14.4.2. Respuesta a los polos de $I(s)$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(i\omega) &= \frac{B\omega}{2i\omega} \frac{1}{a(i\omega)^2 + b i\omega + c} e^{i\omega t} \\ \mathcal{R}(-i\omega) &= \frac{B\omega}{-2i\omega} \frac{1}{a(-i\omega)^2 + b(-i\omega) + c} e^{-i\omega t}\end{aligned}$$

La suma de los residuos se puede reducir a la forma:

$$\mathcal{R}(i\omega) + \mathcal{R}(-i\omega) = \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t$$

que es la respuesta permanente del sistema.