Matemáticas Avanzadas para Ingeniería: Serie de Taylor

Departamento de Matemáticas

MA3002

Intro

Suponga una serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z - z_o)^k$$

Para un valor de $z^\star$ que pertenezca al interior del círculo de convergencia de dicha serie, el valor límite de la serie L es un número complejo perfectamente definido a partir de $z^\star$ (aunque el cálculo de L sea un dolor de cabeza!). En este sentido, se tiene una función matemática de variable compleja: el dominio es el interior del círculo de convergencia de la serie y cuya regla de asociación es el cálculo del valor límite de la serie para el $z^\star$ en el dominio. En este mundo de funciones matemáticas definidas por series de potencias, ¿Cuáles son sus propiedades? ¿Tendrá su contraparte en *este mundo* una función tradicional?

Suponga que $f(z)$ es la función definida por la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z - z_o)^k$$

que tiene como círculo de convergencia $|z - z_o| = R$, para $R \neq 0$. Diremos que su dominio D es $|z - z_o| < R$. Entonces

- $f(z)$ es una función continua en D: Es decir, que si z_1 y z_2 son puntos en el dominio entonces

$$|f(z_1) - f(z_2)| \to 0 \text{ cuando } |z_1 - z_2| \to 0$$

- $f(z)$ tiene derivada en todo punto de D. No sólo eso, hay una función cuyo dominio es también D y que da la derivada de $f(z)$, y más aún tal función derivada es también una función definida como una serie de potencias (ouch!). Y todavía más (y para felicidad nuestra!):

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \, a_k \, (z - z_o)^{k-1}$$

Más aún, hay una relación entre los coeficientes de la serie de potencias que define la función y las derivadas de la función en el centro del círculo de convergencia:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!} \text{ ó } f^{(k)}(z_o) = k! \cdot a_k \text{ para } k \geq 0$$

Por tanto, la serie de potencias debe tener la forma:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!} (z - z_o)^k$$

Esta serie de llama serie de Taylor. Cuando $z_o = 0$ la serie se llama serie de Maclaurin:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

- Integración de series de potencias

  Si se tiene definida una función de variable compleja $f(z)$ por medio de una serie de potencias en su círculo de convergencia

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z - z_o)^k \, ,$$

entonces $f(z)$ admite una función primitiva $F(z)$ (es decir, una función que cumple $F'(z) = f(z)$); y más aún $F(z)$ es también una función definida por serie de potencias en $z - z_o$ (ouch!) que puede ser calculada integrando término a término la serie de $f(z)$ (aaah!).

- Unicidad de las series de potencias
  Si dos series de potencias en $z - z_o$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (z - z_o)^k \;\; \text{y} \;\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, (z - z_o)^k$$

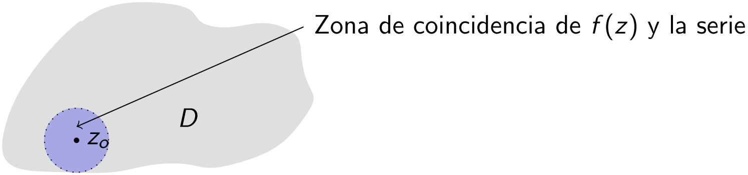
tienen en mismo radio de convergencia y coinciden en los valores límite en todo punto del interior del círculo de convergencia, entonces $a_k = b_k$.

Teorema de Taylor

Sea $f(z)$ una función analítica con dominio D y un punto z_o en el interior de D. Entonces, $f(z)$ tiene una representación en serie de potencias en $z - z_o$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!} \, (z - z_o)^k$$

que es válida para el círculo más grande con centro en z_o y que está contenido en D.



Ejemplo 1

Determine la serie de Maclaurin y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula:

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

Obtengamos la serie por el método que da la definición, para ello calculemos la fórmula de las derivadas:

$$\begin{array}{rcl} f'(z) & = & \frac{d}{dz}\,(1+z)^{-1} = (-1)^1\,1!\,(1+z)^{-2} \\ f''(z) & = & \frac{d}{dz}(-1)^1\,1!\,(1+z)^{-2} = (-1)^2\,2!\,(1+z)^{-3} \\ f'''(z) & = & \frac{d}{dz}(-1)^2\,2!\,(1+z)^{-3} = (-1)^3\,3!\,(1+z)^{-4} \end{array}$$

en general,

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k\,k!\,(1+z)^{-(k+1)}$$

y por tanto,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k\,k! \to a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^k\,k!}{k!} = (-1)^k$$

Por tanto,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^k = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots$$

Y su radio de convergencia se obtiene de:

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(-1)^k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1} = 1$$

por tanto $R = 1$

Otra forma de obtener la serie es recordando que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Como

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)}$$

Basta usar el desarrollo de $\frac{1}{1-z}$ para sustituir z por $-z$ y obtener:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$$

Otra manera para calcular el radio de convergencia de la serie de Maclaurin que representa a $f(z) = 1/(1+z)$ es la siguiente: como Maclaurin tiene como centro $z_o = 0$ y el único punto de indefinición de $1/(1+z)$ es $z_1 = -1$ entonces el radio se puede calcular obteniendo la distancia de $z_o = 0$ a $z_1 = -1$:

$$R = d(z_o, z_1) = |z_o - z_1| = |0 - (-1)| = |1| = 1$$

Observe que si se tratara de desarrollar en serie de Maclaurin

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-1/2)}$$

entonces se debe buscar en qué puntos hay indefinición ($z_1 = 1$ y $z_2 = 1/2$) y se debe obtener la menor distancia a ellos (de $z_o = 0$ a z_1, que es 1, y de $z_o = 0$ a z_2 que es $1/2$). En este caso sería

$$R = \mathrm{Min}\,\{d(z_o, z_1), d(z_o, z_2)\} = \mathrm{Min}\,\{1, 1/2\} = 1/2$$

Ejemplo 2

Determine la serie de Maclaurin y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Tenemos que:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2},$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, z^{k-1}$$

Los radios de convergencia de ambas series son iguales; es decir, $R = 1$.

Ejemplo 3

Determine la serie de Maclaurin y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula:

$$f(z) = \frac{z}{1+z}$$

Tenemos que

$$f(z) = \frac{z}{1+z} = z \cdot \frac{1}{1+z} = z \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \right)$$

Por lo tanto:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{k+1}$$

El radio de convergencia es el de la serie de $1/(1+z)$, que es $R = 1$

Ejemplo 4

Determine la serie de Maclaurin y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula:

$$f(z) = \frac{1}{4 - 2\,z}$$

Tenemos que

$$f(z) = \frac{1}{4\left(1 - \frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k \right)$$

Por lo tanto:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^k}\, z^k$$

El radio de convergencia es doble del radio de la serie de $1/(1 - z)$, que es 1; por tanto, el radio de nuestra serie de Macluarin es 2.

Ejemplo 5

Determine la serie de Taylor en $z_o = 1$ y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula:

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Primero obtengamos la serie usando la definición.

$$\begin{array}{rcl} f'(z) & = & \frac{d}{dz} z^{-1} = (-1)^1\, 1!\, z^{-2} \\ f''(z) & = & \frac{d}{dz} (-1)^1\, 1!\, z^{-2} = (-1)^2\, 2!\, z^{-3} \\ f'''(z) & = & \frac{d}{dz} (-1)^2\, 2!\, z^{-3} = (-1)^3\, 3!\, z^{-4} \end{array}$$

en general,

$$f^{(k)}(z) = (-1)^k\, k! z^{-(k+1)}$$

y por tanto,

$$f^{(k)}(z_o = 1) = (-1)^k\, k! \to a_k = \frac{f^{(k)}(z_o)}{k!} = \frac{(-1)^k\, k!}{k!} = (-1)^k$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(z-z_o)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,(z-1)^k \\ &= 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+(z-1)^4+\cdots \end{aligned}$$

Y su radio de convergencia se obtiene de:

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|(-1)^k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{1} = 1$$

por tanto, $R = 1$

Una forma alternativa es la siguiente:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_o + (z - z_o)} = \frac{1}{z_o\left(1 + \frac{z - z_o}{z_o}\right)} = \frac{1}{z_o} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{z - z_o}{z_o}} \right)$$

Así

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_o} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z - z_o}{z_o} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{z_o^{k+1}} (z - z_o)^k$$

El radio de convergencia se obtiene al calcular:

$$\frac{1}{R} = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\left| \frac{(-1)^k}{z_o^{k+1}} \right|} = \frac{1}{|z_o|}$$

por tanto,

$$R = |z_o|$$

que corresponde a la distancia de z_o al polo de $1/z$ que es $z_1 = 0$.

Ejemplo 6

Determine la serie de Taylor en z_o y su radio de convergencia para la función dada por la fórmula:

$$f(z) = \frac{1}{a-z} \;,\; a \neq z_o$$

Tenemos que

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{(a-z_o)-(z-z_o)} = \frac{1}{(a-z_o)} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_o}{a-z_o}\right)}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{(a-z_o)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_o}{a-z_o}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a-z_o)^{k+1}} \cdot (z-z_o)^k$$

y el radio de convergencia es $R = |a-z_o|$.