ÁLGEBRA SUPERIOR

Pedro Ferreira Herrejón

Presentación

Estas notas sobre Álgebra Superior están diseñadas para un curso del primer nivel de una licenciatura en Ingeniería y se intenta que al final del programa, los estudiantes dominen los principales conceptos algebráicos tratados aqui : las matrices , los sistemas de ecuaciones lineales , los polinomios , los números complejos etc. , asi como las principales aplicaciones de ésta herramienta matemática fundamental .

Se incluyen las demostraciones de los teoremas, por la completez del curso, más que por interés matemático, con el fin de no dejar en el estudiante una sensación de vacío, la cual probablemente surgiría si solamente se le dan las fórmulas y se le dice cómo aplicarlas .

A lo largo del texto se proponen numerosos ejercicios por resolver, para la mayoría de los cuales se incluye la respuesta, con el propósito de motivar al lector a obtenerla.

Es muy importante señalar que la solución de los ejercicios propuestos es prácticamente obligatoria para quien realmente esté interesado en aprender y aplicar los conceptos aqui presentados .

Atentamente el autor :

Pedro Ferreira Herrejón.

Índice

Capítulo 0 Teoría Elemental de Conjuntos

Capítulo I Números Reales . Desigualdades

Capítulo II Números Complejos

Capítulo III Polinomios

Capítulo IV Fracciones Parciales

Capítulo V Sistemas de Ecuaciones Lineales

Capítulo VI Matrices

Capítulo VII Determinantes

Capítulo 0
Teoría Elemental de Conjuntos

1.1 ***Definición y notación***.

En su forma más simple. . .

> *un conjunto es una colección, clase o agrupación de objetos bien definidos y diferenciables entre si, llamados* ***elementos*** *del conjunto.*

Frecuentemente se utilizan las letras mayúsculas para denotar los conjuntos, mientras que sus elementos se representan por letras minúsculas, aunque se puede utilizar también otra clase de símbolos.
Los elementos de un conjunto . . .

- se colocan dentro de las llaves: { } y se separan por comas
- no pueden repetirse, aunque si pueden intercambiar de lugar, de modo que el orden de los elementos no es importante para describir al conjunto

Asi por ejemplo, el conjunto de las letras que tiene la palabra "hipermoderno" es . . .

$L = \{ h, i, p, e, r, m, o, d, n \}$ ó equivalentemente: $L = \{ p, r, o, m, e, d, h, i, n \}$

Se puede *definir* un conjunto:

- por ***extensión***, o ***enumeración***, enlistando todos y cada uno de sus elementos.
- por ***comprensión***, o ***descripción*** , diciendo cuál es la propiedad ó propiedades, que caracterizan a sus elementos y les permite agruparse en un conjunto.

Por ejemplo:

$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

es un conjunto definido por extensión ; pero éste mismo conjunto se puede definir por comprensión de la siguiente manera:

$A = \{ \textit{números enteros pares positivos menores que } 12 \}$

Dentro de las llaves { }, suele usarse también el símbolo | que se lee: "tal que" , para indicar las propiedades que tienen en común los elementos *x* de un conjunto dado . Asi por ejemplo, el conjunto anterior quedaría descrito usando ésta notación como :

$A = \{ x \mid x \text{ es un entero par positivo menor que } 12 \}$

ó en general, si los elementos *x* del conjunto satisfacen alguna propiedad *p(x)* , se escribe . . .

$A = \{ x \mid p(x) \}$ " *A es el conjunto de elementos x que satisfacen la propiedad p(x)* "

1. 2 ***Conjunto vacío***

Es el conjunto que no tiene elementos . Su símbolo es $\varnothing$ ó { }. Asi por ejemplo, los conjuntos . . .

M = { *vacas verdes que pastan en la Luna* }
N = { *seres vivos de más de 100 metros de longitud* }
P = { *números enteros pares comprendidos entre* 0 *y* 2 }
Q = { *seres humanos vivos que no respiran oxígeno* }

carecen de elementos y cada uno de ellos es el conjunto vacío, es decir $M = \varnothing$, $N = \varnothing$ etc.

1.3 ***Pertenencia*** .

Para expresar que x es un elemento de un conjunto A , se usa el símbolo $\in$ que se lee como : "*es un elemento de*" , "*pertenece a* " o también como : "*está en* " :

$x \in A$ significa : " *x es un elemento del conjunto A* "
" *x pertenece a A* "
" *x está en A* "

El símbolo $\notin$ es la negación de $\in$, es decir. . .

$x \notin A$ significa : " *x <u>no</u> es un elemento del conjunto A* "
" *x <u>no</u> pertenece a A* "
" *x <u>no</u> está en A* "

Ejemplos :

Aunque los conjuntos pueden estar conformados por entidades de cualquier naturaleza, para el desarrollo matemático son de especial interés los siguientes conjuntos de números:

NOMBRE	*SIMBOLO*	*REPRESENTACIÓN*
Números naturales	***N***	$N=\{1,2,3,4,\ldots.\ \infty\}$
Números enteros negativos	***Z-***	$Z^-=\{-\infty,\ldots.,-3,-2,-1.\}$
Números enteros	***Z***	$Z=\{-\infty,\ldots.,-3,-2,-1,\ 0,1,2,\ldots\ldots\infty\}$
Números racionales	***Q***	$Q=\{x \mid x=\frac{p}{q}\ ,(p,q\in Z),\ q\neq 0.\}$
Números irracionales	***I***	$I=\{x \mid x\notin Q.\}$
Números Reales	***R***	$R=\{x \mid x\in Q\ \text{ ó }\ x\in I\ .\}$ *ó también* $R=\{x \mid x^2\geq 0\ .\}$
Números imaginarios	***Im***	$Im=\{x \mid x^2\leq 0\ .\}$
Números complejos	***C***	$C=\{(a+b) \mid a\in R\ \text{ y }\ b\in Im\ .\}$

Como se ilustra en éstos ejemplos, para conjuntos con muchos elementos puede abreviarse la enumeración de los mismos mediante la elipsis " . . . " . Por ejemplo el conjunto de los primeros 1000 números enteros positivos puede definirse por extensión como:

$$N_{1000} = \{ 1, 2, 3, \ldots , 999, 1000 \}$$

donde la elipsis (" . . . ") indica que la lista continúa de la manera obvia.
La elipsis también se usa para definir los conjuntos con un número infinito de elementos, asi por ejemplo, el conjunto de los números pares positivos puede escribirse como:

$$\{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$$

En los ejemplos anteriores, también se ha usado el símbolo " ∞ " para denotar el infinito.

Ejemplos :
A continuación se definen algunos conjuntos por enumeración (extensión) y por descripción

POR ENUMERACION	POR DESCRIPCIÓN
$A = \{ 1, 3, 5, 7, 11 \}$	$A = \{$ *números primos positivos menores que* 12 $\}$
$B = \{ a, e, i, o, u \}$	$B = \{ x \mid x$ *es una vocal minúscula del alfabeto latino* $\}$
$C = \{ 0, 2, 4, 6, 8, 10 \}$	$C = \{ y \mid y$ *es un número par positivo menor que* 12 $\}$
$D = \{$ Luna $\}$	$D = \{ x \mid x$ *es un satélite natural de la Tierra* $\}$
$E = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \}$	$E = \{ z \mid z$ *es un número entero positivo* $\}$
$F = \{ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \}$	$F = \{ x \mid x \in \square \; ; \; -3 \leq x \leq 4. \}$
$G = \{ 4, 9, 16, 25, 36 \}$	$G = \{ y \mid y = x^2 \; ; \; x \in \square \; . \}$
$H = \{ \}$	$H = \{ x \mid x^2 < 0 \; ; \; x \in \square \; . \}$

1.4 ***<u>Cardinalidad.</u>***
La cardinalidad de un conjunto S , denotada por |S| , es el número de elementos que tiene el conjunto S.
Por ejemplo

- el conjunto $A = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 \}$ tiene un valor cardinal de 7, es decir $|A| = 7$
- el conjunto vacío { } , tiene cardinalidad cero, es decir $|\varnothing| = 0$
- el conjunto $\boldsymbol{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$ tiene cardinalidad infinita, que se denota por . $|\boldsymbol{N}| = \aleph_o$

Algunas cardinalidades infinitas son mayores que otras, por ejemplo, el conjunto de los números reales ***R*** tiene mayor cardinalidad que el conjunto de números naturales ***N*** . Sin embargo, la cardinalidad de los puntos sobre una línea recta, es la misma que la cardinalidad de cualquier segmento de esa recta, de un plano completo o de cualquier espacio Euclideano de dimensión finita.

Al respecto, existe una famosa ilustración llamada "*la paradoja de Galileo*" , que es una demostración de una de las sorprendentes propiedades de los conjuntos infinitos.

<u>*Paradoja de Galileo*</u> : En su trabajo final denominado "*Dos Nuevas Ciencias*" , Galileo Galilei hizo dos afirmaciones aparentemente contradictorias respeto a los números enteros positivos.

Primero, algunos números son ***cuadrados perfectos*** (*es decir, son el cuadrado de algún entero*, que en adelante llamaremos simplemente ***cuadrados***) mientras que otros no lo son; por eso, todos los números incluyendo cuadrados y no cuadrados ***deben ser más numerosos que sólo los cuadrados***. Sin embargo, para todo cuadrado hay exactamente un número que es su raíz cuadrada y para cada número hay exactamente un cuadrado, por lo tanto, ***no puede haber más de unos que de otros*** .

Galileo concluyó que las ideas de "*mayor que*" , "*igual a*" y "*menor que*" se aplican a conjuntos finitos, pero no a los conjuntos infinitos.
Posteriormente, en el siglo XIX el matemático alemán *Georg Cantor* (1845-1918), mostró que algunos conjuntos infinitos son mayores que otros puesto que no es posible colocar a sus elementos en una correspondencia uno a uno.

1.5 ***Inclusión*** .

Si todo elemento de un conjunto A es también un elemento de otro conjunto B entonces se dice que A es un *subconjunto* de B y se escribe :

$A \subseteq B$ que se lee: " *A es un subonjunto de B* "
ó " *A está contenido en B* "
ó " *A está incluido en B* "

Equivalentemente se puede escribir :

$B \supseteq A$ que se lee: " *B es un superconjunto de A* " .
ó " *B contiene a A* " .
ó " *B incluye a A* " .

La relación que establece $\subseteq$ entre los conjuntos A y B es llamada inclusión o contención.

Si A es un subconjunto de B pero no es igual a B, entonces A se llama *subconjunto propio* de B , escrito . . .

$A \subset B$ " *A es un subconjunto propio de B* "

ó bién:

$B \supset A$ " *B es un superconjunto propio de A* "

la negación de éstas relaciones son :

$A \nsubseteq B$ (*A no está incluido en B*)

y $A \not\subset B$ (*A no es un subconjunto propio de B*) .

Ejemplos :

- $A \subseteq A$ " *todo conjunto es subconjunto de si mismo; pero no es un subconjunto propio* "
- $\varnothing \subset A$ " *el conjunto vacío es un subconjunto propio de todo conjunto, excepto de sí mismo*"
- Si $A = \{a, e, i, o, u\}$ y $B = \{$*alfabeto latino*$\}$ entonces claramente $A \subset B$
- Si $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{ x \mid x$ es real y $0 < x < 12 \}$ y $C = \{ 8, 9, 10, 11 \}$ entonces claramente $A \subset B$ y también $C \subset B$; pero $C \not\subset A$ puesto que el elemento 11 de C no está contenido en el conjunto A . Igualmente $B \not\subset A$ puesto no todos los números reales son enteros.
- *El conjunto de todos los hombres es un subconjunto propio de toda la gente* .
- El conjunto { 1, 2 } es un subconjunto propio de { 1, 2, 3 }
- { x | *x es un número primo mayor que* 2000 } es un subconjunto propio del conjunto { x | *x es un número impar mayor que* 1000 }
- $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$
- El conjunto de puntos en un segmento de recta es un subconjunto propio del conjunto de puntos en la línea recta. La parte y el todo son infinitos y la parte tiene el mismo número de elementos que el todo.

1.6 ***Conjunto potencia***.

Es el conjunto *P(A)* de subconjuntos que tiene un conjunto A dado con n elementos. La cardinalidad de *P(A)* es 2^n como se puede inducir de los siguientes ejemplos. . .

Número de elementos	*Conjunto A*	*Conjunto potencia P(A)*	*Cardinalidad de P(A)*
2	$A = \{a, b\}$	$P(A) = \{ \{a\}, \{b\},$ $\{a, b\}, \varnothing \}$	$4 = 2^2$
3	$A = \{a, b, c\}$	$P(A) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\},$ $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$ $\{a, b, c\}, \varnothing \}$	$8 = 2^3$
4	$A = \{a, b, c, d\}$	$P(A) = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\},$ $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\},$ $\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\},$ $\{a, b, c, d\}, \varnothing \}$	$16 = 2^4$

etc.

Si A es un conjunto infinito (contable o incontable), entonces el conjunto potencia *P(A)* es siempre incontable. El conjunto potencia *P(A)* es siempre estrictamente " mayor " que A .

1.7 ***Conjunto Universal***.

Es el conjunto que contiene a todos los subconjuntos de interés bajo el contexto de un problema particular, se representa por la letra **U** .

La definición de un conjunto universal es arbitraria, de modo que un conjunto que es universal para un problema particular, puede no ser el conjunto universo para otro problema distinto.

Ejemplos .

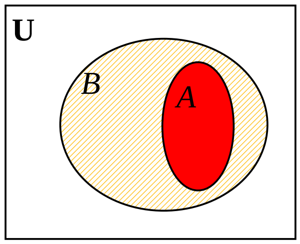
CONJUNTOS	ALGUNOS POSIBLES CONJUNTOS UNIVERSO
$A = \{ 1, 3, 5, 7, 11 \}$ $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$	$\mathbf{U} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$ $\mathbf{U} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \} = \mathbb{N}$ $\mathbf{U} = \square = \{-\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \infty\}$ $\mathbf{U} = \mathbb{R}$ *etc.*
$A = \{ a, b, c, d, e \}$ $B = \{ a, E, I, O, u \}$	$\mathbf{U} = \{$*alfabeto latino*$\}$ $\mathbf{U} = \{a, b, c, d, e, E, I, O, u, f, B \}$
$A = \{$ *hombres* $\}$ $B = \{$ *mujeres* $\}$ $C = \{$ *niños y niñas* $\}$	$\mathbf{U} = \{$ *seres humanos* $\}$ $\mathbf{U} = \{$ *seres vivos* $\}$

1. 8 ***Represenación gráfica de conjuntos***.

Los conjuntos se dibujan en forma abstracta por medio de un diagrama de Venn-Euler , que consiste en un rectángulo cuyos puntos interiores representan el conjunto universo y cualquier curva cerrada interior al rectángulo encierra puntos de un conjunto cualquiera.

Los puntos interiores al rectángulo pueden ser solo unos cuantos (conjunto finito y contable) o puede ser un número infinito (conjunto infinito) .

Por ejemplo un dibujo para la relación de inclusión : $A \subset B$ sería :



1. 9 ***Operaciones entre conjuntos***.

Definidos dos o más conjuntos respecto a cierto conjunto Universo, es posible construir nuevos conjuntos mediante las siguientes operaciones básicas:

INTERSECCIÓN.

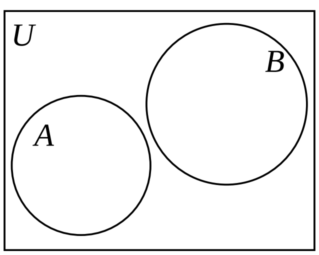
Al considerar los elementos que son miembros de un conjunto A y a la vez también lo son de otro conjunto distinto B se forma el ***conjunto intersección*** :

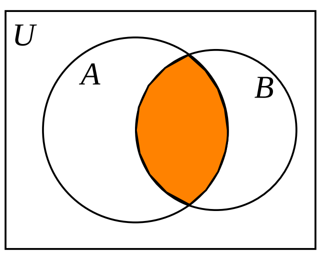
$A \cap B$ que se lee: *" la intersección de A con B "*

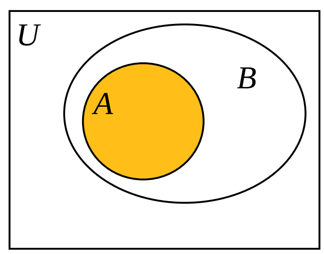
Este conjunto se define de manera descriptiva como:

$$\boldsymbol{A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \}}$$

Asi, el conjunto intersección de A y B se forma con los elementos que tienen en común el conjunto A y el conjunto B y sus tres posibles representaciones gráficas son:







Conjuntos disjuntos *conjuntos con inclusión*

$A \cap B = \Phi$ $A \subset B$

En cada uno de estos tres casos, la región sombreada representa los elementos del conjunto intersección $A \cap B$.

Como se ilustra en la primera figura, los conjuntos no tienen elementos comunes y por eso se les llama *ajenos* o *disjuntos* . En cambio, en la tercera figura se presenta el otro caso extremo cuando todos los elementos de un conjunto son también comunes a otro conjunto.

Ejemplo :

Consideremos los conjuntos:

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$B = \{ 1, 3, 7 \}$ entonces. . . $A \cap B = \{ 1, 3 \}$

pues sólo los elementos 1 *y* 3 *son comúnes a los conjuntos* A *y* B .

Ejemplo .
Sean los conjuntos

$A = \{ 1, 2, verde \}$

$B = \{ verde , blanco , rojo \}$ entonces. . . $A \cap B = \{verde \}$

pues sólo éste elemento es común a los conjuntos A *y* B .

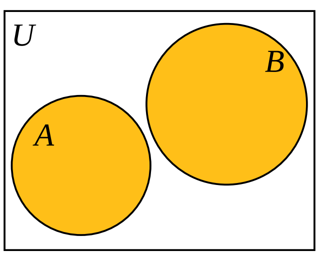
UNIÓN.
Al "juntar" los elementos que son miembros de un conjunto A con los elementos que pertenecen a otro conjunto B se forma el ***conjunto union*** :

$A \cup B$ que se lee: *" la unión de A con B "*

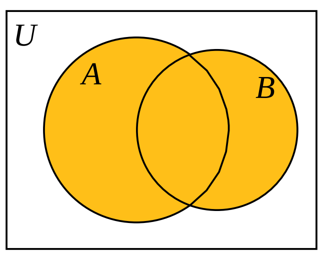
Este conjunto se define de manera descriptiva como:

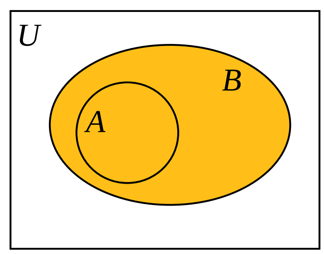
$$\boldsymbol{A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ ó } x \in B \}}$$

Asi, el conjunto unión de A y B se forma con los elementos que están en el conjunto A ó que están en el conjunto B (ó en ambos) y sus tres posibles representaciones gráficas son:



Conjuntos disjuntos
$A \cap B = \Phi$





conjuntos con inclusión
$A \subset B$

En cada uno de estos tres casos, la región sombreada representa los elementos del conjunto unión $A \cup B$.

Ejemplo .
Sean los conjuntos

$A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$B = \{ a, 2, 3, 7 \}$ entonces. . . $A \cup B = \{ a, 1, 2, 3, 4, 7 \}$

Ejemplo .
Sean los conjuntos

$A = \{ 1, 2, verde \}$

$B = \{ verde , blanco , rojo \}$ entonces. . . $A \cup B = \{ 1, 2, verde , blanco , rojo \}$

COMPLEMENTO.

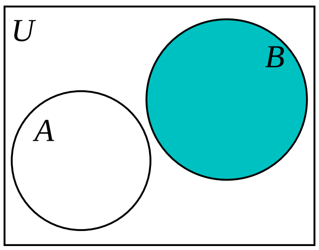
También es posible "restar" dos conjuntos. El **complemento relativo** de A en B, denotado por $B \setminus A$ (o también por $B - A$) es el conjunto de todos loe elementos que están en el conjunto B pero que no están en el conjunto A.

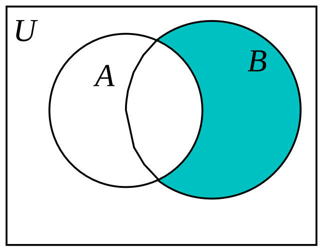
$B \setminus A = B - A$ que se lee: *" el complemento relativo de A en B "*

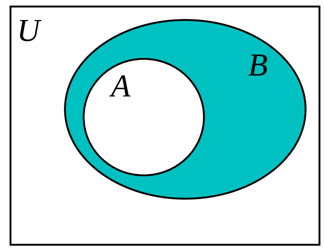
Este conjunto se define de manera descriptiva como:

$$B \setminus A = \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \ \textbf{y} \ \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A} \}$$

Asi, el conjunto *complemento relativo de A en B* se forma con los elementos que están en el conjunto B pero que no están en el conjunto A y sus tres posibles representaciones gráficas son:







Conjuntos disjuntos *conjuntos con inclusión*

$A \cap B = \Phi$ $A \subset B$

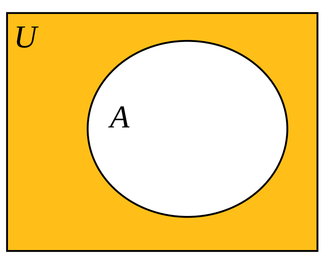
El **complemento absoluto** de un conjunto A en cierto conjunto universal $\mathbf{U}$, denotado por $\mathbf{U} \setminus A$ (o también como $\mathbf{U} - A$, A^C ó simplemente A') es el conjunto de todos loe elementos que están en el conjunto $\mathbf{U}$ pero que no están en el conjunto A.

$\mathbf{U} \setminus A = (\mathbf{U} - A) = A^C = A'$ que se lee: *" el conjunto complemento de A "*

Este conjunto se define de manera descriptiva como:

$$A^C = \{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A} \}$$

Asi, el conjunto *complemento de A* se forma con los elementos que no están en el conjunto A y su representación gráfica es :



Ejemplos .

$\{1, 2\} \setminus \{ \textit{rojo, blanco} \} = \{1, 2 \}$

$\{1, 2, \textit{verde} \} \setminus \{\textit{verde, blanco, rojo} \} = \{1, 2 \}$

$\{1, 2 \} \setminus \{1, 2 \} = \varnothing$

Si $\mathbf{U} = \mathbb{Z}$ y $A = \{$ *enteros pares* $\}$ entonces $A^C = \{$*números impares* $\}$

$\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3\} = \{2, 4\}$

1. 10 ***Leyes fundamentales del álgebra de conjuntos*** .

Las operaciones de suma (" + ") y de multiplicación (" x ") para los números, obedecen las muy familiares leyes ***asociativa, conmutativa y distributiva***, mientras que las relaciones de desigualdad (" $\leq$ " ó " $\geq$ ") satisfacen las leyes ***reflexiva, antisimetrica y transitiva*** . Estas leyes son herramientas que nos facilitan el cálculo numérico y que describen la naturaleza fundamental de los números.

Pues bién, el álgebra de los conjuntos bajo las operaciones de ***intersección*** (" $\cap$ "), ***unión*** (" $\cup$ ") y ***complemento*** (" \ "), asi como las relaciones de ***igualdad e inclusión***, (" = ", " $\subset$ ") es el análogo teórico del álgebra de los números.

Para cualesquiera conjuntos A , B y C se satisfacen las siguientes identidades:

leyes conmutativas.

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

leyes asociativas

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

leyes distributivas

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Nótese la asombrosa analogía entre la unión e intersección de conjuntos con la suma y la multiplicación de números. Al igual que la suma y la multiplicación, la unión y la intersección son conmutativas y distributivas y la intersección se distribuye en la unión :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Sin embargo,la distribución de la unión en la intersección :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

no tiene análogo en el álgebra de los números, pues se obtendrían expresiones tales como:

$$3 + (5 \times 4) = (3 + 5) \times (3 + 4)$$
$$3 + 20 = 8 \times 7$$

que obviamente es falsa.

leyes de identidad

- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap \mathbf{U} = A$

leyes de complemento

- $A \cup A^C = \mathbf{U}$
- $A \cap A^C = \varnothing$

Las leyes de identidad, establecen que al igual que el 0 y el 1 son los elementos identidad para la suma y la multiplicación de números, asi también $\varnothing$ y $\mathbf{U}$ son los elementos identidad para la unión y al intersección respectivamente. Sin embargo, a diferencia de la suma y la multiplicación, para las operaciones $\cup$ y $\cap$ no existen elementos inversos; aunque las leyes de complemento son en cieto sentido operaciones de inverso unitarias.

Los cinco pares de leyes anteriores constituyen el álgebra de conjuntos en el sentido de que toda proposición válida para conjuntos puede ser obtenida de ellas.

1.11 ***El principio de dualidad***.

Los cinco pares de leyes anteriores exiben un patrón de simetría muy interesante. Nótese que de cada par de leyes, una puede ser obtenida de la otra simplemente intercambiando $\cup$ con $\cap$ y también $\mathbf{U}$ con $\varnothing$.

Ese patrón no es una casualidad, pues se origina de una propiedad extremadamente importante y poderosa del álgebra de conjuntos, llamada el ***principio de dualidad*** , el cual establece que

> *por cada proposición verdadera entre conjuntos, existe una proposición dual que también es verdadera y que se obtiene:*
> - *intercambiando uniones por intersecciones.*
> - *intercambiando $\mathbf{U}$ con $\varnothing$.*
> - *invirtiendo las inclusiones.*

las proposiciones que permanecen inalteradas bajo estos intercambios se llaman autoduales .

Enseguida se enlistan algunas leyes adicionales del álgebra de conjuntos, que también obedecen el principio de dualidad:

leyes idempotentes:

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

leyes de dominación

- $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$

leyes de absorción

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

y como ya se dijo antes, toda proposición verdadera puede ser derivada de los 5 pares de leyes fundamentales. Consideremos una prueba para la ley idempotente de la unión: $A \cup A = A$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
A \cup A &= (A \cup A) \cap \mathbf{U} && \textit{(aplicando la ley de identidad para la intersección)}\\
&= (A \cup A) \cap (A \cup A^C) && \textit{(aplicando la ley de complemento para la unión)}\\
&= A \cup (A \cap A^C) && \textit{(ley distributiva de la unión sobre la intersección)}\\
&= A \cup \varnothing && \textit{(por la ley de complemento para intersección)}\\
&= A && \textit{(por la ley de identidad para la unión)}
\end{aligned}
$$

y ahora la demostración de la proposición dual $A \cap A = A$ se obtiene de ésta demostración simplemente intercambiando $\cup$ con $\cap$ y también $\mathbf{U}$ con $\varnothing$, como sigue :

Demostración:

$$
\begin{aligned}
A \cap A &= (A \cap A) \cup \varnothing && \textit{(aplicando la ley de identidad para la unión)}\\
&= (A \cap A) \cup (A \cap A^C) && \textit{(por la ley de complemento para la intersección)}\\
&= A \cap (A \cup A^C) && \textit{(ley distributiva de la intersección sobre la unión)}\\
&= A \cap \mathbf{U} && \textit{(por la ley de complemento para la unión)}\\
&= A && \textit{(aplicando la ley de identidad para la intersección)}
\end{aligned}
$$

Consideremos una prueba para la ley de dominación de la unión: $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$

Demostración:

$$
\begin{aligned}
A \cup \mathbf{U} &= A \cup (A \cup A^C) && \textit{(aplicando la ley de complemento } A \cup A^C = \mathbf{U} \textit{)}\\
&= (A \cup A) \cup A^C && \textit{(aplicando la ley asociativa para la unión)}
\end{aligned}
$$

$= \quad A \cup A^C$ (*por la ley* $A \cup A = A$ *demostrada antes*)

$= \quad \mathbf{U}$ (*por la ley de complemento* $A \cup A^C = \mathbf{U}$)

La demostración de la propiedad dual $A \cap \varnothing = \varnothing$ se obtiene ahora de manera evidente.

1.12 ***Algunas leyes adicionales para complementos*** .

leyes De Morgan

- $(A \cup B)^C = (A^C \cap B^C)$
- $(A \cap B)^C = (A^C \cup B^C)$

leyes de involución o doble compemento

$(A^C)^C = A$

leyes de compemento para $\mathbf{U}$ ***y*** $\varnothing$

$\varnothing^C = \mathbf{U}$
$\mathbf{U}^C = \varnothing$

Nótese que la ley de doble complemento es autodual, asi como también lo es la siguiente proposición:

Si $(A \cup B) = \mathbf{U}$ y $(A \cap B) = \varnothing$ *entonces* $B = A^C$

Nótese que la ley de doble complemento es autodual, asi como también lo es la siguiente proposición:

1. 13 ***El álgebra de la inclusión***.
La inclusión tiene las siguientes propiedades

propiedad reflexiva

- $A \subseteq A$

propiedad antisimétrica

- $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$ *si y solo si* $A = B$

Cuando esta propiedad se lee de derecha a izquierda, se usa para demostrar la igualdad entre dos conjuntos. es decir: $A = B$ si y solo si $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq A$.

propiedad transitiva

Si $A \subseteq B$ *y* $B \subseteq C$ *entonces* $A \subseteq C$

La inclusión satisface también las siguientes propiedades:

$(A \cap B) \subseteq A$ ó $(A \cap B) \subseteq B$
$(A \cup B) \supseteq A$ ó $(A \cup B) \supseteq B$

y la siguientes proposiciones son equivalentes entre si:

$A \subseteq B$
$A \cap B = A$
$A \cup B = B$
$A \setminus \mathrm{B} = \varnothing$
$B^C \subseteq A^C$
esta última equivalencia muestra que la relación de inclusión puede ser definida en términos de la unión o la intersección entre conjuntos, lo cual implica que ésta relación es aximáticamente superflua.

<u>*Ejercicio*</u> . Demostrar las siguientes proposiciones entre conjuntos

1. $B \setminus A = B \cap A^C$
   $(B \setminus A)^C = A \cup B^C$

2. $\varnothing \setminus A = \varnothing$
   $\mathbf{U} \setminus A = A^C$

3. $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$
   $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$

4. $C \setminus (B \setminus A) = (A \cap C) \cup (C \setminus B)$
   $(B \cup A) \setminus (A \cap B) = (\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \cup (A \setminus B)$

5. $(B \setminus A) \cap C = (B \cap C) \setminus A$
   $(B \setminus A) \cup C = (B \cup C) \setminus (A \setminus C)$

6. $A \setminus B = B^C \setminus A^C$

7. a) $A \subseteq B \longleftrightarrow A \cap B = A$
   b) $A \subseteq B \longleftrightarrow A \cup B = B$
   c) $A \subseteq B \longleftrightarrow A - B = \varnothing$

8. $(A \cap B) = \varnothing \longleftrightarrow A - B = A$ *ó* $B - A = B$

9. $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$

Algunas soluciones:

1. Por definición :

$$B \setminus A = \{ x \mid x \in B \ \text{ y } \ x \notin A \}$$

pero si $x \notin A$ entonces $x \in A^C$ puesto que $A \cup A^C = \mathbf{U} = \{ x \mid x \in A \ \text{ ó } \ x \in A^C \}$. Asi que se puede escribir . . .

$$B \setminus A = \{ x \mid x \in B \ \text{ y } \ x \in A^C \}$$

que es precisamente la definición de la intersección de los conjuntos B y A^C , esto es . . .

$$B \setminus A = B \cap A^C$$

2. La demostración es evidente si se aplica el resultado del problema anterior, tomando $B = \varnothing$, como sigue:

$$\varnothing \setminus A = \varnothing \cap A^C = \varnothing$$

puesto que la intersección del vacío con cualquier otro conjunto, es el vacío (ley de dominación).

3. Aplicando el resultado del problema 1 a los conjuntos C y $(A \cap B)$ queda . . .

$$C \setminus (A \cap B) = C \cap (A \cap B)^C$$

$$= C \cap (A^C \cup B^C) \qquad \text{(\textit{por la Ley De Morgan} .)}$$

y de la distribución de la intersección sobre la unión se obtiene :

$$= (C \cap A^C) \cup (C \cap B^C)$$

pero aplicando nuevamente el resultado del problema 1 . . .

$$C \setminus A = (C \cap A^C) \qquad \text{y} \qquad C \setminus B = (C \cap B^C)$$

y finalmente resulta . . .

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

7. Demostremos primero la implicación $A \subseteq B \longrightarrow A \cap B = A$.
Supongamos que $A \subseteq B$ es verdad, entonces:

(*) $(A \cap B) \subseteq A$ (*por una de las propiedades de la inclusión*) e intersectando ambos miembros de $A \subseteq B$ con A resulta :

$$(A \cap A) \subseteq (A \cap B) \text{ es decir :}$$

(**) $A \subseteq (A \cap B)$

Por lo tanto, de (*) y (**) se deduce que $A = A \cap B$.

Demostremos ahora la implicación . $A \subseteq B \longleftarrow A \cap B = A$
Supongamos que $(A \cap B) = A$ es verdad, entonces:

(***) $(A \cap B) \subseteq B$ (*por una de las propiedades de la inclusión*)

pero $(A \cap B) = A$ por hipótesis, asi que la relación (***) queda $A \subseteq B$

1. 14 ***El producto cartesiano***.

Para dos conjuntos A y B , el ***conjunto producto*** $A \times B$ ó producto cartesiano de A y B se define como el conjunto de todas las posibles parejas ordenadas (a, b) cuya primera componente es un elemento del conjunto A y cuya segunda componente es un elemento del conjunto B .

En forma descriptiva:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \quad \text{y} \quad b \in B \}$$

El producto cartesiano de dos conjuntos finitos puede representarse por medio de una tabla, con los elementos de un conjunto como un renglón y los elementos del otro conjunto como una columna y formando los pares ordenados, las celdas de la tabla, escogiendo los elementos de la columna y el renglón correspondientes.

Ejemplo 1. el producto caresiano del conjunto de 13 elementos de un juego de cartas ordinario :

{ *As*, *Rey*, *Reina*, *Jack*, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 }

y el conjunto de 4 figuras

{ ♣ , ♦ , ♥ , ♠ }

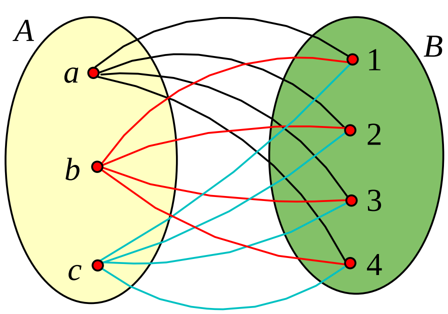
es un conjunto de $13 \times 4 = 52$ elementos formados por todas las posibles combinaciones de pares entre el primer conunto y el segundo {(*As*, ♣) , (*As*, ♦) , . . . , (2 , ♥), (2 , ♥) } , como se ilustra enseguida .
. .

	♥	♣	♦	♠
1	(1, ♥)	(1, ♣)	(1, ♦)	(1, ♠)
K	(*K*, ♥)	(*K*, ♣)	(*K*, ♦)	(*K*, ♠)
Q	(*Q*, ♥)	(*Q*, ♣)	(*Q*, ♦)	(*Q*, ♠)
J	(*J*, ♥)	(*J*, ♣)	(*J*, ♦)	(*J*, ♠)
10	(10,♥)	(10, ♣)	(10,♦)	(10, ♠)
9	(9, ♥)	(9, ♣)	(9, ♦)	(9, ♠)
8	(8, ♥)	(8, ♣)	(8, ♦)	(8, ♠)
7	(7, ♥)	(7, ♣)	(7, ♦)	(7, ♠)
6	(6, ♥)	(6, ♣)	(6, ♦)	(6, ♠)
5	(5, ♥)	(5, ♣)	(5, ♦)	(5, ♠)
4	(4, ♥)	(4, ♣)	(4, ♦)	(4, ♠)
3	(3, ♥)	(3, ♣)	(3, ♦)	(3, ♠)
2	(2, ♥)	(2, ♣)	(2, ♦)	(2, ♠)

Ejemplo 2. El producto cartesiano $A \times B$ de los conjuntos:

A = { a, b, c } y B = { 1, 2, 3, 4)

queda representado gráficamente como . . .

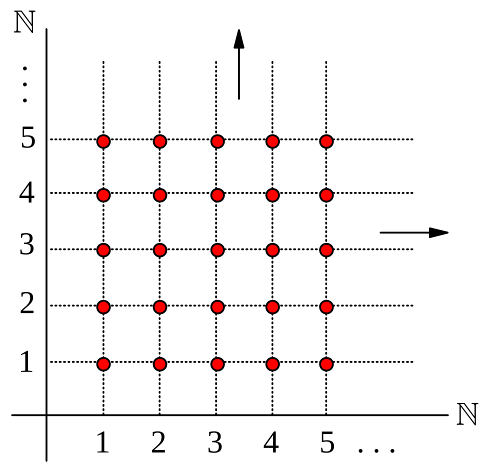


donde las líneas conectan cada una de las 12 parejas que constituyen el conjunto producto :

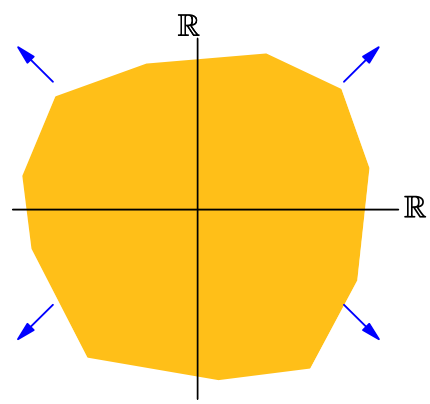
	1	2	3	4
a	(*a* , 1)	(*a* , 2)	(*a* , 3)	(*a* , 4)
b	(*b* , 1)	(*b* , 2)	(*b* , 3)	(*b* , 4)
c	(*c* , 1)	(*c* , 2)	(*c* , 3)	(*c* , 4)

Si un conjunto A tiene n elementos y un conjunto B tiene m elementos, entonces el conjunto producto $A \times B$ tiene $n \cdot m$ productos.

El producto cartesiano también se define para conjuntos infinitos. Asi por ejemplo el producto del conjunto de números naturales $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, \ldots \}$ por si mismo : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$, (llamado también *producto cuadrado*) puede ser represenado por un conjunto infinito de puntos en un plano como sigue . . .



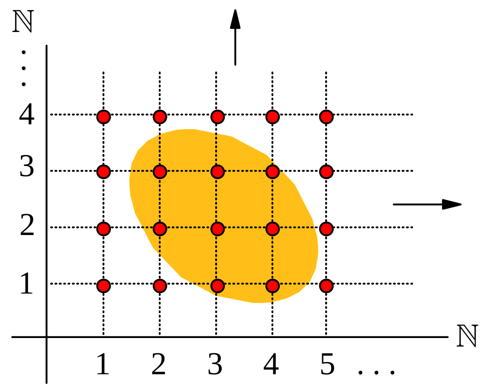
Si en vez de $\mathbb{N}$, se considera el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, ó el conjunto de números reales $\mathbb{R}$,entonces es evidente que el conjunto de puntos en el plano que representa al conjuto producto $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ó a $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ***se hace cada vez más denso*** , de tal manera que se puede imaginar que $\mathbb{R}^2$ representa un continuo infinito de puntos (sin espacios vacíos entre ellos), en el plano .



Una relación $\boldsymbol{R}$ definida del conjunto A al conjunto B y denotada por $\boldsymbol{R} : A \longrightarrow B$, ***es un subconjunto del producto cartesiano*** $A \times B$, asi por ejemplo, una relación definida en $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$ podría ser el subconjunto de parejas ordenadas .

$$\boldsymbol{R} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} = \{ (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3) \}$$

indicado en la siguiente figura :



1. 15 ***Función*** .

Una función f definida del conjunto A al conjunto B y denotada por $f: A \longrightarrow B$, ***es una relación de A a B*** que satisface además la condición:

Si $(a, b) \in f$ y $(a, d) \in f$ entonces $b = d$

es decir, una función no puede tener dos (ó mas) parejas ordenadas con el mismo primer elemento y diferente segundo elemento.

Los elementos de los conjuntos A y B que forman las parejas ordenadas que pertenecen a una función se llaman ***dominio*** y ***codominio*** (o rango) respectivamente .

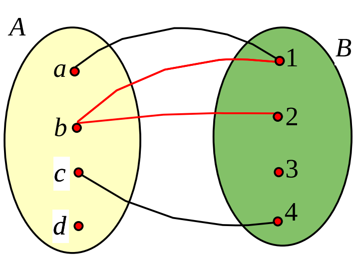
Ejemplos.

Determinar cuales de las siguientes relaciones entre los conjuntos

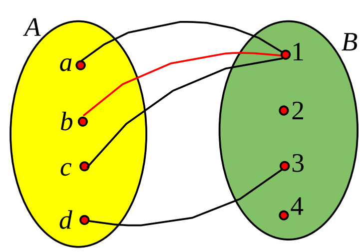
$$A = \{ a, b, c, d \} \text{ y } \qquad B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$$

ilustradas en las siguientes figuras, son funciones.

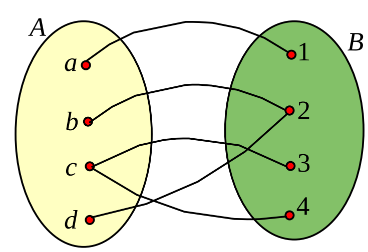
a)



b)



c)



Solución :

a) $R: A \longrightarrow B = \{ (a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 4) \}$.

Ésta relación no es una función de A a B dado que dos parejas ordenadas $(b, 1)$ y $(b, 2)$ tienen el mismo primer elemento y distinto segundo elemento :

b) $R : A \longrightarrow B = \{ (a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 3) \}$.

Ésta relación es una función de A a B , dado no existen dos o más parejas ordenadas que tengan el mismo primer elemento y distinto segundo elemento.
Nótese que si se considera :

$$R : B \longrightarrow A = \{ (1, a), (1, b), (1, c), (3, d) \}$$

ésta relación de B a A , no es una función puesto que hay tres parejas ordenadas a las que se asigna el mismo primer elemento pero distinto segundo elemento : $(1, a), (1, b), (1, c)$.

c) $R : A \longrightarrow B = \{ (a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 4)\ (d, 2) \}$.

Ésta relación de A a B , no es una función puesto que hay dos parejas ordenadas a las que se asigna el mismo primer elemento pero distinto segundo elemento : $(c, 3), (c, 4)$.

EJERCICIOS

1. Define por extensión los siguientes conjuntos . . .

a) tres primeros meses del año b) dias de la semana que principian con la letra C. c) cinco vocales
d) estudiantes mayores de 125 años e) los meses del año cuyo nombre empieza con M.

2. Enuncia por descripción en la forma más adecuada los siguientes conjuntos:

F = $\{ x, y, z \}$, G = $\{ \textit{Abril, Agosto} \}$, H = $\{ 2, 4, 6 \}$, I = $\{ -1, 0, 1, 2, 3 \}$

3. Dados los conjuntos: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$, $C = \{x \mid \frac{x}{3} \in \mathbb{N}\}$, $D = \{1, 2, 3\}$,

$E = \{ a, b, d \}$ escribe en el espacio correspondiente el símbolo $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$ que convenga:

a A	0 B	7 D	E A	g A	2 B
18 C	B D	2 C	f E	10 C	D C

¿Cuáles conjuntos son iguales?. ¿Cuál es subconjunto de otro?. ¿Cuáles son los subconjuntos propios de D ?

4. Dados los conjuntos : A = $\{1, 2, 3, 4\}$, D = $\{6, 7, 8\}$, E = $\{7\}$, G = $\{5, 9, 0\}$ obtener:

$A \cup D =$	$D \cup A =$	$D \cup E =$	$E \cup G =$
$G \cup A =$	$D \cup D =$	$E \cup \Phi =$	

5. Si $\mathbf{U} = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 10\}$, $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 7\}$ representar los siguientes conjuntos y determinar sus elementos. . .

$B \subset A$ $A \cup B$ $B \cap C$ A^C B^C C^C

$(A \cup C)^C$ $A - B$

6. Con los conjuntos del ejercicio anterior, comprobar que . . .

$(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

7. Con los conjuntos del ejercicio 5 anterior, obtener :

$A \cup \Phi$	$(A')'$	$A \cap A'$	$A \cup A'$	$A \cup \mathbf{U}'$
$A \cap \mathbf{U}$	$A - A$	$A \cap B'$	$A - C$	$B \cup C'$
$A \times A$	$B \times C$	$B \times A$		

8. Si $\mathbf{U} = \{ a, b, c, d, e, \ldots, w, x, y, z \}$, sean los conjuntos:

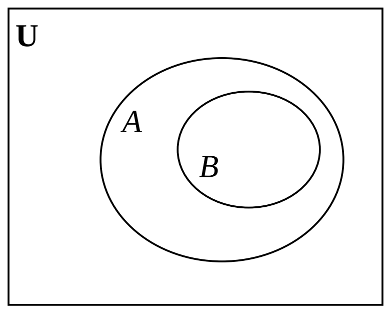
A = {letras que forman la palabra ***zoología*** }
B = {letras que forman la palabra ***extinción*** }

a) Hallar las letras que pertenecen al conjunto: $(B \cup A) \setminus (A \cap B)$

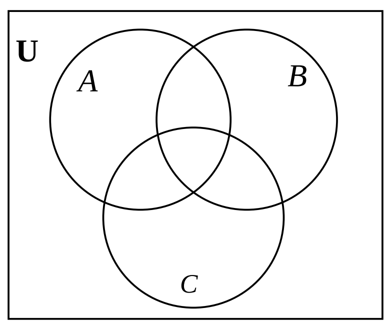
b) Hallar las letras que pertenecen al conjunto: $A^C - B^C$
(*Sugerencia*: usar alguna relación que simplifique la solución)

9. En el siguiente diagrama de Venn-Euler, sombrear el área correspondiente al conjunto indicado:

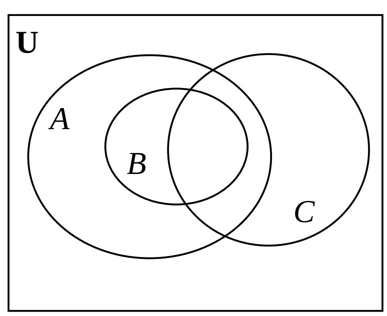
a) $(A \setminus B)^c - (A \cap B)^c$



b) $(A \cap B) \setminus C) \cup ((A \cup B)^c \cap C)$



c) $(C \setminus (C \setminus A)) \cap B^C$



Capítulo I
Números Reales. Desigualdades

1.1 ***El sistema de números reales***

Los números reales describen cantidades numéricas que representamos mediante *diversos símbolos* tales como:

1	-7	$sen(\pi)$	π (*pi* = 3.1415926...)	$\sqrt{3}$
$(3 \div 2)$	$\sqrt[3]{3^2}$	2.735	e (= 2.718281...)	$log_3(2.43)$

Si partimos del conjunto básico de ***números naturales*** :

$$\{ \mathrm{N} \} = \{ \mathbf{1, 2, 3, 4}, \ \ldots \}$$

y las 4 *operaciones fundamentales* entre *dos* números a y b:

I . *Suma o adición* , *representada por* : $a + b$

II. *Resta o substracción* , *representada por* : $a - b$

III. *Multiplicación o producto* , *representada por* : $a \cdot b$, $a \times b$, $(a)\ (b)$ *ó simplemente* $a\ b$.

IV. *División ó cociente* , *representada por* : $a \div b$, $\dfrac{a}{b}$, o por $a \,/\, b$.

de inmediato observamos que *al sumar o multiplicar dos números naturales siempre se obtiene como resultado otro número que también es natural* .
Sin embargo, ésto no siempre sucede con la resta y solo se cumple en un caso muy especial en la división, (*cuando el divisor es el número* 1) .
Asi que para cualquier par de números α y β que están en el conjunto $\{ \mathrm{N} \}$, los números $\alpha + \beta$ y $\alpha \cdot \beta$ *también son naturales* (es decir, están en el conjunto $\{ \mathrm{N} \}$) . Por ejemplo: $24 + 18 = 42$ ó $(14) \times (39) = 546$ etc.
Pero en cambio no todas las operaciones de resta o división de números naturales generan como resultado números que también sean naturales, por ejemplo $(5 - 8)$ ó $(5 \div 8)$ no son números naturales (*no están contenidos en* $\{ \mathrm{N} \}$)
De modo que el conjunto de números naturales $\{ \mathrm{N} \}$ *es cerrado* únicamente bajo las operaciones de suma y producto ; pero no bajo la resta o la división .

Definición de Cerradura : *Se dice que un conjunto es cerrado bajo cierta operación binaria, si al aplicar tal operación a un par de elementos del conjunto se obtiene como resultado otro elemento que también está contenido en el conjunto .*

Si al conjunto de números naturales $\{ \mathrm{N} \}$ **se agregan los *enteros negativos y el cero*** , se obtiene el conjuto de ***número enteros:***

$$\{ \mathrm{Z} \} = \{ \ldots \mathbf{-3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 ,} \ldots \}$$

Éste nuevo conjunto si es cerrado bajo las operaciones de la suma, la resta y el producto, puesto que con cualquiera de ésas operaciones aplicadas a un par de enteros se obtiene como resultado otro número entero.

Sin embargo, éste conjunto tampoco es cerrado bajo la división (por ejemplo $(-3) \div 7$ no es entero).
Para lograr también la cerradura para la división, es necesario aumentar el conjunto **{ Z }** anterior, añadiéndole todos aquéllos números que resultan de la división de dos enteros y cuyo divisor no es 0 ni 1 , es decir, las *fracciones*.

El conjunto asi formado se llama conjunto de ***números racionales*** **{ Q }** . Este conjunto *es cerrado bajo las cuatro operaciones fundamentales* porque de la suma , resta , producto o división de dos números racionales se obtendrá siempre otro número que es racional .

{ Q } = $\Big\{$ Números que son el cociente de *dos enteros* p y q (con $q \neq 0$) ; $\left(\dfrac{p}{q}\right)$ $\Big\}$

Por ejemplo : $\dfrac{-3}{2}$, $\dfrac{16273}{-3876}$, 4 , $-\left(\dfrac{1}{7}\right)$ son todos números racionales.
Sin embargo, *no todos los números son racionales*, es decir no todos se pueden escribir como la razón de dos enteros . Algunos de ellos se obtienen mediante la 5ª operación matemática : *las raices* .
Son números irracionales la mayoría de las raices de los números enteros primos , por ejemplo :

$$\sqrt{2} = 1.4142135623731... \quad ; \quad \sqrt{7} = 2.64575131106459\,... \quad ; \quad \sqrt[3]{3} = 1.44224957030741\,...$$

A los números que no son racionales se les llama por contraposición ***irracionales*** y se representan por el conjunto **{ I_r }.**
Se puede demostrar analíticamente que éstos números *no son el cociente de dos enteros*; pero baste decir por ahora que *todo número racional tiene una representación decimal que* :

i) *termina* (es finita)

o bién

ii) *es infinita pero presenta un patrón de repetición.*

observemos por ejemplo la forma decimal de algunos números racionales :

$$\frac{8}{5} = 1.6 \quad , \quad \frac{1}{4} = 0.25 \quad , \quad \frac{1}{7} = 0.1428571428571428... \quad , \quad \frac{25}{11} = 2.272727272727272...$$

En los dos primeros la parte decimal termina (*es finita*) mientras que en los dos últimos la parte decimal es infinita *(lo cual se indica por los puntos suspensivos*) ; pero hay cierto conjunto de cifras que se repite una y otra vez (*es una sucesión períodica*)

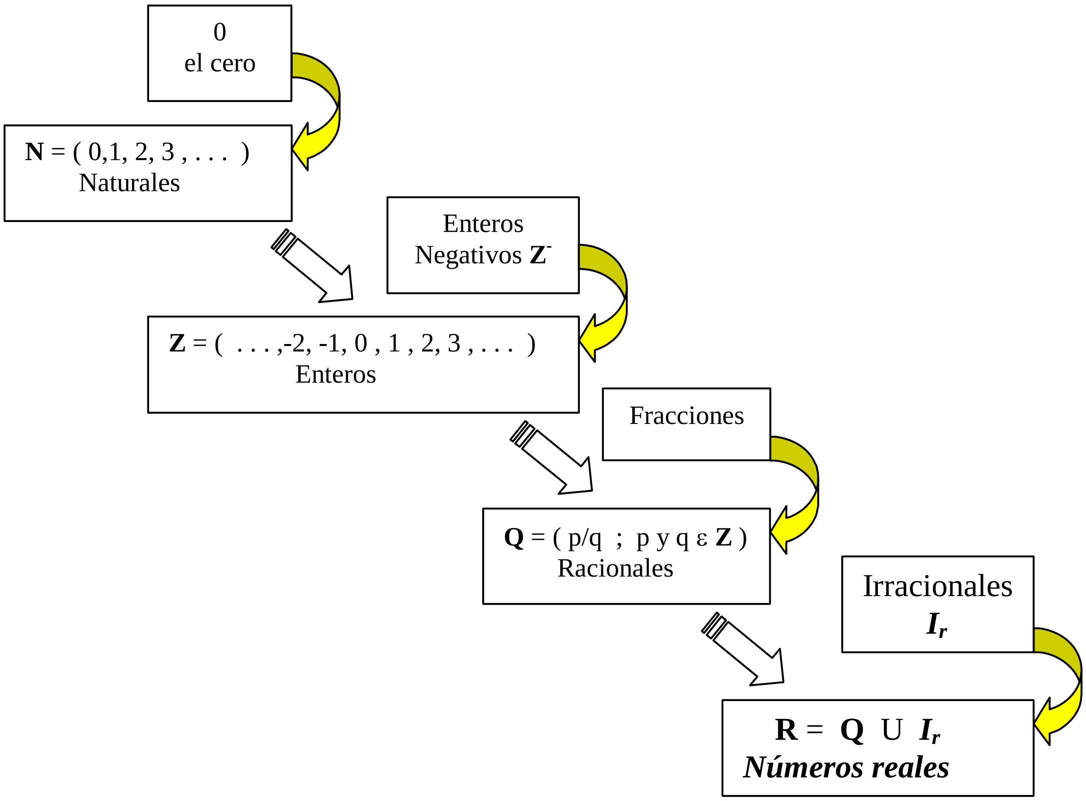
En los números irracionales en cambio se cumple todo lo opuesto : *la parte decimal nunca termina y no es periódica.*
Como puede verse en los ejemplos de las raices anteriores o en los famosos números :

$$\pi = 3.14159265358979.\,.\,.\,.\,. \qquad , \qquad e = 2.718281828459.\,.\,.\,.\,.\,.\,.$$

El primero π (*pi*) es *la razón de la circunferencia al diámetro de un círculo* y el segundo es el número *e* , que aparece por ejemplo al considerar problemas de crecimiento o decrecimiento de poblaciones, cultivos o materiales rediactivos.

De ésta manera, el conjunto de los ***números reales*** **{ R }** es un gran conjunto que se obtiene al unir el conjunto de números racionales con el conjunto de números irracionales, **{ R } = { Q } + { I_r }**

Éste conjunto es cerrado bajo las cuatro operaciones elementales .
En resumen: *los números reales se forman con la* *unión* *de otros conjuntos de números* de acuerdo al esquema siguiente:



Sin embargo ***¡ no todos los números que aparecen en las matemáticas son números reales !*** .

Todo elemento del conjunto **{ R }** anterior tiene la interesante propiedad de que si se eleva al cuadrado resulta una cantidad positiva. Pues bién, si ahora agregamos al conjunto **{ R }** los números que tengan *la propiedad opuesta* es decir, que *elevados al cuadrado sean negativos* (los asi llamados *números imaginarios*) , entonces se obtiene el conjunto de los ***números complejos*** **{ C }** cuyos elementos tienen la forma:

$$z = x + j \cdot y$$

donde x e y representan números reales y el símbolo j representa al número $\sqrt{-1}$, que es la base de los números imaginarios.

Como podemos ver, *los nuevos conjuntos de números se forman al agregar al conjunto numérico anterior otros elementos que tienen nuevas propiedades y que el conjunto inicial no poseía* .

Además de la cerradura, los números reales poseen las siguientes importantes propiedades:

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Si a, b, c representan números reales, entonces . . .

	PROPIEDAD	EN LA SUMA	EN LA MULTIPLICACION
I	***Cerradura***	La suma de dos números reales : *(a + b) es otro número real*	El producto de dos números reales : *(a)(b) es otro número real*
II	***Conmutativa***	*El orden de los sumandos no altera la suma (a + b) = (b + a)*	*El orden de los factores no altera el producto ab = ba*
III	***Asociativa***	*El resultado de una suma no depende del orden en que se realice (a + b) + c = a + (b + c)*	*El resultado de un producto no depende del orden en que se realice (ab) c = a (bc)*
IV	***Identidad***	*0* (*el cero*) es el elemento identidad para la suma porque $(0 + a) = (a + 0) = a$ para *cualquier número a*	1 (*el uno*) es el elemento identidad para la multiplicación porque $(1) a = a (1) = a$ para *cualquier número a*
V	***Inverso***	Todo número real *a* tiene un inverso aditivo denotado por : $-a$ tal que sumado con *a* : $a + (-a) = 0$ genera el elemento identidad para la suma .	Todo número real *a* (***distinto de cero***) tiene un inverso multiplicativo denotado por : $\frac{1}{a}$ ó por a^{-1} tal que multiplicado por *a* : $a\cdot\left(\frac{1}{a}\right) = \left(a\cdot a^{-1}\right) = 1$ genera el elemento identidad para el producto
VI	***Distributiva***	La suma se distribuye en el producto : $(a + b)c = ac + bc$	El producto se distribuye en la suma : $a(b + c) = ab + ac$

De la propiedad de inverso se sigue que , *la resta y la división de números reales son solo casos especiales de la suma y el producto* dado que *:*

$$(a - b) = a + (-b)$$ *(restar el número b equivale a sumar su inverso aditivo)*

$$\left(\frac{a}{b}\right) = a \times \left(\frac{1}{b}\right)$$ *(dividir por el número b equivale a multiplicar por su inverso multiplicativo)*

Debemos notar también que :

" ***la división por cero no está definida*** "

puesto que el 0 es *el único número real que no tiene inverso multiplicativo*.

Ignorar esta regla, puede dar a cualquier persona distraido una desagradable sorpresa, como se ilustra en la siguiente comedia donde se *"demuestra"* que $1 = 2$, como sigue . . .

1° *Partimos del supuesto de que dos números reales diferentes de cero ,* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$ *, son iguales .* $a = b$

2° *Pero una igualdad no se altera si sus dos miembros se multiplican o se dividen por la misma cantidad , asi que multiplicamos la igualdad anterior por el número* b *:* $a\cdot b = b\cdot b$

3° *Una igualdad tampoco se altera sumando a ambos miembros la misma cantidad , asi que sumamos* $-a^2$ $a\cdot b - a^2 = b^2 - a^2$

4° *y factorizando ambos miembros se pueden escribir como:* $a\cdot(b-a) = (b-a)\cdot(b+a)$

5° *Una igualdad tampoco se altera cuando sus miembros se dividen por la misma cantidad .* *Dividamos entonces entre* $(b-a)$ *:*
$$\frac{a(b-a)}{(b-a)} = \frac{(b+a)\cdot(b-a)}{(b-a)}$$

6° *El factor* $(b-a)$ *se anula y la igualdad se simplifica a :* $a = b + a$

7° *Por la hipótesis inicial* $a = b$*, y entonces se sigue que :* $a = (a+a) = 2\cdot a$

8° *Dividiendo la igualdad resultante entre* a *(que es distinto de cero), se obtiene . . .*
$$\frac{a}{a} = \frac{2\cdot a}{a} \longrightarrow \boxed{1 = 2}$$

¡ Pero todos sabemos que $1 \neq 2$ *!! . ¿En donde está el error en el procedimiento anterior?*

Un lector atento habrá notado que la división por $(b-a)$ está prohibida porque $(b-a) = 0$ dado que $a = b$.

Con una comedia tan trágica como la anterior, se puede *"demostrar"* que $2 \times 2 = 5$, veamos . . .

1° *La primera escena comienza con una igualdad indiscutible :* $(16-36) = (25-45)$

2° *Continuando el drama, se suma la misma cantidad a los dos miembros de la igualdad anterior (lo cual es perfectamente válido):*
$$16 - 36 + \left(\frac{81}{4}\right) = 25 - 45 + \left(\frac{81}{4}\right)$$

3° *La igualdad se transforma entonces en :*
$$4^2 - (2)\cdot(4)\cdot\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - (2)\cdot(5)\cdot\left(\frac{9}{2}\right) + \left(\frac{9}{4}\right)^2$$

4° *Y como ambos miembros de la igualdad son trinomios cuadrados perfectos, se factorizan en el cuadrado de un binomio :*
$$\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$$

5° *Tomando ahora la raiz cuadrada en ambos lados se obtiene :*
$$\left(4 - \frac{9}{2}\right) = \left(5 - \frac{9}{2}\right)$$

6° *Sumando* $\frac{9}{2}$ *en ambos miembros de la igualdad anterior se llega al absurdo resultado :*

$$4 = 5$$

$$2 \times 2 = 5$$

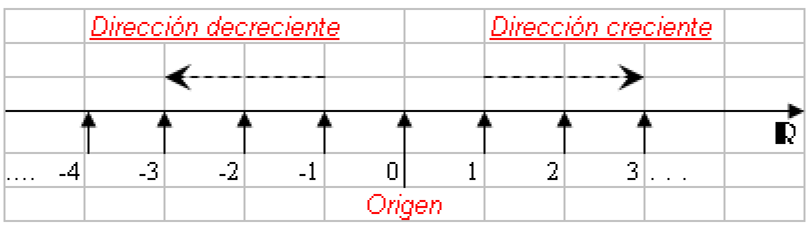
Estos ejemplos ilustran el hecho de que una actitud descuidada hacia las ecuaciones o el desconocimiento de las propiedades de los números reales, puede conducirnos a resultados ilógicos y por supuesto, incorrectos.

¿ Dónde está el error en el ejemplo anterior ? . Consiste en <u>*no utilizar la regla*</u> : $\sqrt{x^2} = |x|$, que dá siempre un número positivo.

1.2 <u>*La recta numérica*</u> , <u>*Desigualdades*</u> , <u>*Intervalos*</u> *y* <u>*Valor Absoluto*</u> .

Los números reales se representan geométricamente por medio de un modelo llamado *recta numérica* , el cual consiste en una línea recta con un punto escogido arbitrariamente como el origen, el cual representa al número 0 (*el cero*) .

Los números positivos se ubican entonces a la derecha del cero y los negativos a su izquierda, *a una distancia proporcional a su valor numérico* (*creciente* para los positivos , *decreciente* para los negativos) .



La gran utilidad del modelo radica en que :

Los números reales quedan ordenados. y además, a cada punto sobre la recta corresponde un único número real y a cada número real corresponde uno y solamente un punto sobre la recta.

Un número x es positivo ***si está a la derecha del origen***, lo cual se denota por el símbolo : $x > 0$

y si x es negativo, entonces ***está a la izquierda del origen*** , lo cual se denota por el símbolo : $x < 0$.

Se puede afirmar entonces de manera general que *si un número* x *está a la izquierda respecto a otro número* y sobre la recta numérica real, entonces " x *es menor que* y ", lo cual se denota por el símbolo :

$$x < y$$

Similarmente , *si un número* z *está a la derecha respecto a otro número* w sobre la recta numérica real, entonces " z *es mayor que* w ", lo cual se denota por el símbolo :

$$z > w$$

Para decidir cuando un número real a es mayor ó menor que otro número b se establece entonces el siguiente criterio :

El número a es menor que el número b si y sólo si su diferencia $(a-b)$ es negativa .

$$a < b \longleftrightarrow (a-b) < 0$$

El número a es mayor que el número b si y sólo si su diferencia $(a-b)$ es positiva .

$$a > b \longleftrightarrow (a-b) > 0 \qquad (1.1)$$

Ejemplo 1 . De $\frac{11}{12}$ y $\frac{10}{11}$ ¿ qué número es mayor ?

Solución : Sean $a = \frac{11}{12}$ y $b = \frac{10}{11}$ y calculemos su diferencia :

$$a - b = \left(\frac{10}{11}\right) - \left(\frac{11}{12}\right)$$

$$= \left[\frac{(10)\cdot(12) - (11)^2}{(11)\cdot(12)}\right] \qquad \textit{(Sumando las fracciones)}$$

$$= \left(\frac{120-121}{132}\right) = \frac{-1}{132}$$

dado que se ha obtenido un número negativo, del criterio anterior se concluye que $\frac{10}{11} < \frac{11}{12}$

Frecuentemente los ***símbolos de desigualdad*** : $<$ *"menor que"* y $>$ *"mayor que"* se combinan con el símbolo de igualdad : $=$ y se leen como sigue. . .

$x \le y$: *" x es menor o igual que y "* ó también : *" x es a lo más igual a y "*
$x \ge y$: *" x es mayor o igual que y "* ó también : *" x es por lo menos igual a y "*

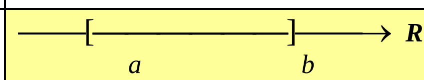
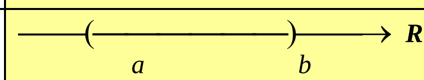
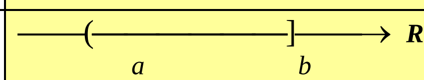
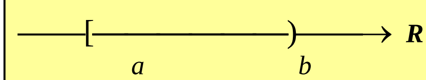
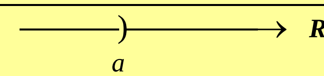
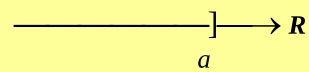
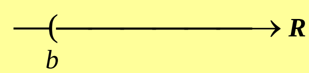
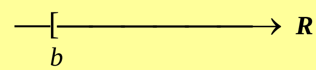
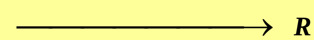
Las desigualdades numéricas sirven para representar subconjuntos de números reales , es decir "partes" de la recta numérica, llamados *intervalos* .

Por ejemplo . . .

$x \le 2$ Son todos los puntos x que están a la izquierda del punto que representa al número 2 sobre la recta numérica (*incluyendo al* 2) .
O podríamos leer también ésta desigualdad como: *" x es a lo más igual a 2 "* .

$-4 \le x < 2$	Representa los puntos x de la recta numérica que están comprendidos entre el punto -4 y el punto 2 (*incluyéndo al* -4 pero no al 2). Ésta desigualdad se puede leer también diciendo: *" x es por lo menos -4 pero siempre menor que 2 " .*
$x \le 2 ,\ \ 5 \le x$	Equivale a todos los puntos de la recta numérica que no están entre 2 y 5 (incluyéndo al 2 y al 5) . También se puede leer ésta desigualdad diciendo: *" x es a lo más igual a 2 ó por lo menos 5 " .*
$x > -6$	Son los números x de la recta numérica que están a la derecha del número -6 .
$-5 < y < x < -3$	Representa a los números x que son mayores que los números y, con ambos x e y comprendidos entre -5 y -3
$c \le 2 \ ;\ 2 < b < 3$	Se traduce como los números c que a lo más son iguales a 2 y los números b comprendidos entre 2 y 3 .

La siguiente es la ***equivalencia entre desigualdades e intervalos***

TIPO DE INTERVALO	*NOTACIÓN*	*DESIGUALDAD EQUIVALENTE*	*REPRESENTACIÓN GRÁFICA*
CERRADO : (***se incluyen*** *los extremos)*	$[\,a\ ,\ b\,]$	$a \le x \le b$	
ABIERTO : (***No se incluyen*** *los extremos)*	$(\,a\ ,\ b\,)$	$a < x < b$	
SEMIABIERTO **(*o* SEMICERRADO) :** (***sólo*** *se incluye uno de los extremos)*	$(\,a\ ,\ b\,]$ $[\,a\ ,\ b\,)$	$a < x \le b$ $a \le x < b$	
INFINITOS : *(El intervalo* ***no está limitado*** *en uno ó en ambos extremos)*	$(-\infty\ ,\ a\ )$ $(-\infty\ ,\ a\ ]$ $(\ b\ ,\ \infty)$ $[\ b\ ,\ \infty)$ $(-\infty\ ,\ \infty)$	$-\infty < x < a$ ó $x < a$ $-\infty < x \le a$ ó $x \le a$ $b < x < \infty$ ó $x > b$ $b \le x < \infty$ ó $x \ge b$ $-\infty < x < \infty$	*(todos los números reales)*

Ejemplo 2. Equivalencia entre intervalos y desigualdades

el intervalo $(-2\ ,\ 5\ ]$ corresponde a la desigualdad : $-2 < x \le 5$

el intervalo $[3\ ,\ 8]$ corresponde a la desigualdad : $3 \le x \le 8$

el intervalo $(-\infty,\ -4)$ corresponde a la desigualdad : $x < 4$

el intervalo $(-1\ ,\ \infty)$ corresponde a la desigualdad : $-1 < x < \infty$

a no es negativo corresponde a la desigualdad : $0 \le a$ ó $a \ge 0$

x es positivo pero no más de 6 corresponde a : $0 < x \le 6$

ψ es negativo y por lo menos igual a -3 se traduce: $-3 \le \psi < 0$

ω es negativo y a lo más igual a -3 es la desigualdad: $-\infty < \omega \le -3$

1.2 a) ***Propiedades de las desigualdades***

Las propiedades que cumple toda desigualdad son las siguientes :

	PROPIEDAD	*Ejemplo*
I ***Transitiva***	***Si*** $a < b$ ***y*** $b < c$ ***entonces*** $a < c$ " Si a está a la izquierda de b y b está a la izquierda de c , entonces a está también a la izquierda de c "	$-4 < -2$ y $-2 < -1$ Así que $-4 < -1$
II ***Aditiva***	***Si*** $a < b$ ***y*** $c < d$ ***entonces*** $(a + c) < (b + d)$ " Se pueden sumar miembro a miembro dos desigualdades *siempre y cuando tengan el mismo sentido* "	$-5 < 3$ y $-2 < -1$ Así que $(-5-2) < (3-1)$ $(-7) < (2)$
III ***Suma***	***Si*** $a < b$ ***entonces*** $(a + c) < (b + c)$ "Una desigualdad no se altera si se suma a ambos miembros cualquier cantidad real c, positiva ó no "	$-5 < 3$ Así que sumado -2 en ambos miembros se obtiene : $(-5-2) < (3-2)$ $-7 < 1$
IV ***Multiplicación***	***Si*** $a < b$ ***entonces :*** $ac < bc$ ***si*** $c > 0$ $ac > bc$ ***si*** $c < 0$ " Si una desigualdad se multiplica por una cantidad negativa *INVIERTE* su sentido ; si se multiplica por una cantidad es positiva *CONSERVA* su sentido "	$-3 < -2$ Entonces multiplicando ambos miembros por 2 queda : $-6 < -4$ En cambio multiplicándola por -2 se obtiene : $6 > 4$
V ***Inverso***	***Si*** $0 < a < b$ ***entonces*** $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ***Si*** $a < b < 0$ ***entonces*** " Para dos números, ambos positivos o ambos negativos el recíproco de su desigualdad *INVIERTE* su sentido "	$-3 < -2$ Entonces $-\left(\frac{1}{3}\right) > -\left(\frac{1}{2}\right)$ y $3 > 2$ entonces $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Obsérve que estas propiedades son igualmente válidas si en todas ellas se cambia el símbolo : " < " por el símbolo: " > "
Es muy fácil demostrarlas. Como ejemplo demostremos las propiedades IV y V (se deja como ejercicio la prueba de las otras propiedades).

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD IV .

Supongamos que $a < b$, entonces $(a - b)$ es por definición un número negativo, es decir

$$(a - b) < 0 \quad .$$

Si éste número se multiplica por otro número negativo, digamos $c < 0$, entonces el producto será positivo . En otras palabras :

$$c \cdot (a - b) > 0$$

es decir
$$c \cdot a - c \cdot b > 0$$

De ésta desigualdad se deduce que el número $(c \cdot a)$ *es mayor que* el número $(c \cdot b)$ puesto que su diferencia es positiva, esto es

$$c \cdot a > c \cdot b .$$

De éste modo la desigualdad original $a < b$, *ha invertido su sentido* y ha quedado como $c \cdot a > c \cdot b$.

En el otro caso, si el número c es positivo : $c > 0$ entonces el producto $c \cdot (a - b)$ será negativo, es decir $c \cdot (a - b) < 0$ de donde se sigue que $c \cdot a < c \cdot b$ (*la desigualdad original no cambió su sentido*) .

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD V .

Supongamos que $0 < a < b$, entonces el producto $(a \cdot b)$ es un número positivo puesto que ambos a y b son positivos y por lo tanto su inverso también lo es :

$$0 < \frac{1}{a \cdot b}$$

Como se domostró en la propiedad anterior, la desigualdad $a < b$ no cambiará su sentido si se multiplica por un número positivo, digamos $\frac{1}{a \cdot b} > 0$, asi que . . .

$$a \cdot \left(\frac{1}{a \cdot b} \right) < b \cdot \left(\frac{1}{a \cdot b} \right) \qquad \textit{es decir} \qquad \left(\frac{a}{a} \right) \cdot \frac{1}{b} < \left(\frac{b}{b} \right) \cdot \frac{1}{a}$$

Simplificando ésta expresión resulta finalmente : $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Cuando $a < b < 0$, el producto $(a \cdot b)$ de dos números negativos también es un número positivo asi que su inverso también lo es: $0 < \frac{1}{a \cdot b}$. Por lo tanto la prueba se desarrolla igual que en el caso anterior.

1.2 b) ***Solución de desigualdades***.

Resolver una desigualdad significa determinar el intervalo (o intervalos) de números reales para los cuales la desigualdad es cierta.

A diferencia de una igualdad ó *ecuación*, cuya solución normalmente es un número *finito* de números reales, la solución de una desigualdad por lo general es un *un conjunto infinito* de números.

Para determinar la solución de una desigualdad, se pueden emplear las mismas reglas y técnicas algebráicas usadas para resolver una ecuación; y usando además las propiedades I , II , III , IV y V para las desigualdades.
Podemos clasificar a las desigualdades de acuerdo a las expresiones que involucren, como desigualdades entre :

1 . Polinomios,
2 . Funciones Racionales
3 . Valores absolutos
4 . Diversas funciones matemáticas

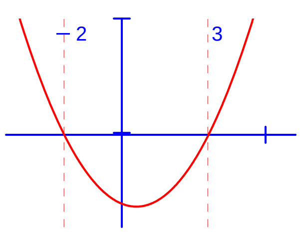
1.2 c) ***Desigualdades con polinomios***.

Para reolver una desigualdad que sólamente tiene polinomios, se utiliza el siguiente principio:

Un polinomio no cambia de signo entre dos raices consecutivas. (1.2)

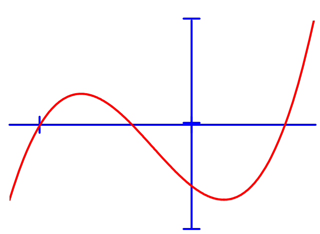
Las raices de un polinomio $P(x)$ son los valores x para los cuales el polinomio vale cero, esto es $P(x) = 0$ y se interpretan geométricamente como los puntos donde la gráfica del polinomio cruza por la recta numérica real X . Por ejemplo . . .

$P(x) := x^2 - x - 6$



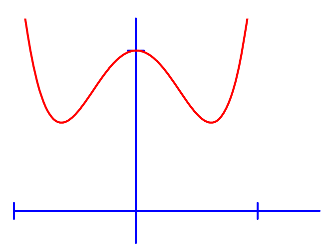
De 2° grado con 2 raices

$p(x) := \left(x^2 - x - 6\right)\cdot(x + 5)$



De 3er grado con 3 raices

$Q(x) := x^4 - 3\cdot x^2 + 5$



De 4° grado sin raices reales

Un polinomio de grado n cruza n veces como máximo al eje horizontal X ; pero como podemos observar en la gráfica del último ejemplo, puede ser que no lo cruce ni una sola vez.
Si la gráfica del polinomio cruza el eje X entonces cambia de signo, asi que para volver a cambiar de signo debe cruzar necesariamente una vez más el eje horizontal.

Por lo anterior, se concluye que para resolver una desigualdad de la forma $P(x) < 0$ ó $P(x) < 0$ donde $P(x)$ es un polinomio, se debe seguir el siguiente procedimiento . . .

SOLUCIÓN DE DESIGUALDADES CON POLINOMIOS

1. *Escribir todos los términos de la desigualdad en un solo miembro para que tome la forma :*
$$P(x) < 0 \quad ó \quad P(x) > 0$$
2. *Factorizar para determinar las raices reales del polinomio* $P(x)$.
3. *Localizar las* ***raices*** *sobre la recta numérica real y determinar los intervalos (en los cuales el polinomio será positivo o negativo)*
4. *Hacer una "prueba de signos" , esto es, averiguar cual es el signo de cada uno de los factores determinados en el paso 2 anterior, en cada uno de los intervalos en los que quedó dividida la recta numérica real por las raices del polinomio.*
5. *Verificar si la desigualdad (escrita en la forma factorizada) se cumple o no en cada intervalo.*

(1.3)

OBSERVACIÓN # 1 :
Cuando un polinomio sólo tiene raices complejas y ninguna raiz real, significa que no corta al eje X en ningún punto y por lo tanto su gráfica está totalmente por encima (si $P(x) > 0$) o totalmente por debajo (si $P(x) < 0$) del eje *X*. En éstos casos . . .

una de las dos desigualdades : $P(x) < 0$ ***ó*** $P(x) > 0$ ***se cumplirá siempre y la otra no***

Esto significa que una desigualdad es verdadera para cualquier número real x y la otra no tiene solución.

Por ejemplo, no existe algún número real que satisfaga a la desigualdad : $x^2 + 1 < 0$ puesto que todo número real elevado al cuadrado es positivo, de modo que es imposible que la suma $x^2 + 1$ sea negativa.

En cambio la desigualdad : $x^2 + 1 \geq 0$ se cumple para cualquier valor numérico de x .

OBSERVACIÓN # 2 :
En consecuencia :

los factores de un polinomio que no generen raices reales,
no cambian la solución determinada por las raice reales del polinomio
y pueden ser ignorados en el procedimiento de solución

Por ejemplo, la desigualdad : $\left(x^2 + 4\right)\cdot(x - 3) < 0$ se cumple igual si sólo se considera la solución de $(x - 3) < 0$

Ejemplo 3. Resolver la desigualdad : $(5\cdot x - 7) < (-3\cdot x + 1)$

Solución : Primero procedemos a escribir todos los términos de la desigualdad en un solo miembro. Para ello usemos la propiedad de ***suma*** de las desigualdades y sumemos la cantidad $-(-3\cdot x + 1)$, que es el inverso aditivo del número $(-3\cdot x + 1)$.

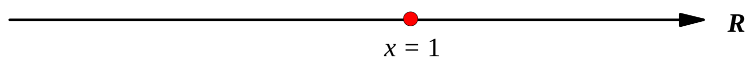
Como ya se sabe, con ésta operación no se cambia el sentido de la desigualdad (*sólo se transforma en otra desigualdad equivalente*) y se obtiene :

$$\left[(5\cdot x-7)-(-3\cdot x+1)\right] < \left[(-3\cdot x+1)-(-3\cdot x+1)\right]$$

$$(5\cdot x-7)+3\cdot x-1 < 0$$

$$8\cdot(x-1) < 0 \qquad \textit{(simplificando y factorizando)}$$

En éste momento el polinomio queda factorizado. Por ser de 1 er grado, su única raiz se obtiene al resolver la ecuación : $8\cdot(x-1)=0$ y es $x=1$, con lo cual la recta numérica queda dividida en dos intervalos: $(-\infty,1)$ y $(1,\infty)$.
Procediendo a averiguar el signo de éste único factor, se tiene que . . .



	(− ∞ , 1)	(1 , ∞)
(x − 1)	(−)	(+)
(8 x − 1)	(−)	(+)

Entonces la desigualdad : $8\cdot(x-1) < 0$ se satisface solo en el intervalo $(-\infty, 1)$, es decir la solución es el conjunto de números reales x que están a la izquierda del número 1: $x < 1$.
De ésta manera , hemos transformado la desigualdad inicial en otra equivalente pero más simple : $x < 1$, la cual representa la solución de la desigualdad inicial y equivale al intervalo infinito $(-\infty, 1)$.

En las desigualdades que solo tienen polinomios de primer grado, la solución también se puede determinar rápidamente al "*despejar* " la variable x una vez que se han simplificado todos los téminos en un solo miembro de la desigualdad.
Asi por ejemplo en el ejercicio anterior, a partir de $8\cdot(x-1) < 0$ se tiene . . .

$$8\cdot x-8 < 0$$

$$8\cdot x-8+(8) < 0+(8) \qquad \textit{(Sumado + 8 en ambos miembros)}$$

$$8\cdot x < 8 \qquad \textit{(simplificando)}$$

$\left(\frac{1}{8}\right)\cdot(8\cdot x) < \left(\frac{1}{8}\right)\cdot(8)$ *(Multiplicando por la cantidad positiva* $\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}\right)$ *,*

la desigualdad no se altera ni cambia de sentido)

$x < 1$ *(simplificando)*

$=======) \longrightarrow$ **R** *la solución gráfica es el intervalo infinito abierto* $(-\infty\ ,\ 1)$

1

Substituyendo valores para la variable x que estén a la derecha del número 1 se puede comprobar que la desigualdad inicial no se cumple, mientras que para *cualquier valor* a la izquierda del 1 , la desigualdad es verdadera . *(hágalo !)*

Ejemplo 4. Hallar los intervalos solución de : $\left(1-\frac{3}{2}\cdot x\right) \geq (x-4)$

Solución : Sumando el inverso aditivo de $(x-4)$ en ambos miembros se obtiene :

$$\left[\left(1-\frac{3}{2}\cdot x\right)-(x-4)\right] \geq [(x-4)-(x-4)]$$

$$\left(5-\frac{5}{2}\cdot x\right) \geq 0 \qquad \textit{(simplificando)}$$

$$\left[\left(5-\frac{5}{2}\cdot x\right)-5\right] \geq (0-5) \qquad \textit{(Sumando } -5 \textit{ en ambos miembros)}$$

$$\left(\frac{-5}{2}\cdot x\right) \geq (-5)$$

$$\left[-\left(\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\cdot x\right)\right] \leq (-5)\cdot\left[-\left(\frac{2}{5}\right)\right]$$

(Multiplicando por el inverso del

coeficiente de x , que es un número negativo, se invierte el sentido de la desigualdad que cambia de "≥" a "≤")

$x \leq 2$ *(La solución buscada)*

Entonces, cualquier número real que esté a la izquierda de 2 (incluso éste), satisface la desigualdad. En otras palabras la solución es el intervalo infinito semicerrado $(-\infty\ ,\ 2]$, ó gráficamente :

$=============] \longrightarrow$ **R**

2

Ejemplo 5. Hallar los números x que satisfacen : $(-3\cdot x+4) \le \left(-\frac{3}{4}\cdot x+1\right) < (-3\cdot x+5)$

Solución : En éste caso debemos resolver *simultáneamente* dos desigualdades :

$(-3\cdot x+4) \le \left(-\frac{3}{4}\cdot x+1\right)$ y $\left(-\frac{3}{4}\cdot x+1\right) < (-3\cdot x+5)$

En la primera desigualdad sumamos el inverso aditivo de $(-3\cdot x+4)$:

$$(-3\cdot x+4)-(-3\cdot x+4) \le \left(-\frac{3}{4}\cdot x+1\right)-(-3\cdot x+4)$$

$$0 \le \frac{9}{4}\cdot x-3 \qquad \textit{(simplificando)}$$

$$3 \le \frac{9}{4}\cdot x \qquad \textit{(sumado el inverso de } -3 \textit{)}$$

Multiplicando ahora ambos miembros por el inverso de $\frac{9}{4}$, que es $\left(\frac{4}{9}\right) > 0$ una cantidad positiva, la desigualdad no cambiará su sentido :

$$\left(\frac{4}{9}\right)\cdot 3 \le \left(\frac{4}{9}\right)\cdot\left(\frac{9}{4}\cdot x\right)$$

$$\left(\frac{4}{3}\right) \le x$$

Esta la solución de la primera desigualdad .

Para la segunda desigualdad sumemos el inverso aditivo de $\left(-\frac{3}{4}\cdot x+1\right)$:

$$\left[\left(-\frac{3}{4}\cdot x+1\right)-\left(-\frac{3}{4}\cdot x+1\right)\right] < \left[(-3\cdot x+5)-\left(-\frac{3}{4}\cdot x+1\right)\right]$$

$$0 < \frac{-9}{4}\cdot x+4 \qquad \textit{(simplificando)}$$

$$-4 < \left(-\frac{9}{4}\right)\cdot x \qquad \textit{(Se ha sumado el inverso de } 4 \textit{)}$$

Multiplicando ahora ambos miembros por el inverso de $\frac{-9}{4}$ que es $\frac{-4}{9}$ una cantidad negativa, la desigualdad *invierte su sentido* **:**

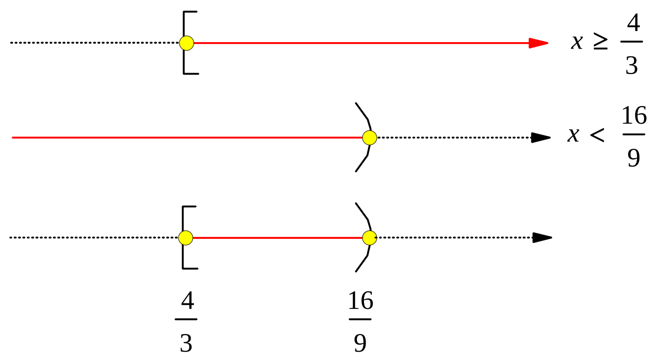
$$\left(\frac{-4}{9}\right)\cdot(-4) > \left(\frac{-4}{9}\right)\cdot\left(-\frac{9}{4}\cdot x\right)$$

$$\left(\frac{16}{9}\right) > x$$

Esta es la solución de la 2ª desigualdad.

La solución final es el conjunto de valores comunes a ambas soluciones parciales, esto es, la intersección de los dos intervalos solución, porque sólo cuando x tome un valor numérico en esa interseción común , podrá satisfacer simultáneamente las dos desigualdades iniciales .

Gráficamente vemos que la parte común de los intervalos :



es el intervalo semiabierto: $\left(\frac{4}{3}\right) \leq x < \left(\frac{16}{9}\right)$ o también : $[\frac{4}{3}, \frac{16}{9})$

Ejemplo 6. Resolver la desigualdad : $2\cdot x^3 + 5\cdot x^2 \geq 12\cdot x$

Solución : Aqui ***sería un error dividir ambos lados de la desigualdad por*** x con el fin de simplificarla . . .

$$\frac{\left(2\cdot x^3 + 5\cdot x^2\right)}{x} \geq \frac{(12\cdot x)}{x}$$

$$2\cdot x^2 + 5\cdot x \geq 12 \qquad \textit{(Eliminando asi el factor } x \textit{)}$$

porque *no se conoce aún que valores toma* x *y tampoco se sabe todavía si es un número positivo o negativo.*
Por lo tanto, al dividir la desigualdad entre x*, su sentido queda indeterminado.*

El camino correcto es *transformar la desigualdad inicial en una más simple ; pero equivalente , usando las propiedades de las desigualdades y aplicando el procedimiento* (1. 3) .

1° *Sumar* $-12\cdot x$ *en ambos miembros de la desigualdad para tener todos los términos en un solo miembro.*

$$2\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - (12\cdot x) \geq 12\cdot x - (12\cdot x)$$

$$2\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 12\cdot x \geq 0$$

2° *Factorizar el polinomio obtenido*

$$x\cdot\left(2\cdot x^2 + 5\cdot x - 12\right) \geq 0$$

$$x\cdot(x+4)\cdot(2\cdot x - 3) \geq 0$$

3° *Las raices del polinomio se obtienen al resolver la igualdad correspondiente* $x\cdot(x+4)\cdot(2\cdot x-3) = 0$. *Los números que satisfacen esta condición son:*

$x = -4$, $x = 0$ y $x = \frac{3}{2}$

Asi que la recta numérica real queda dividida en 4 subintervalos :

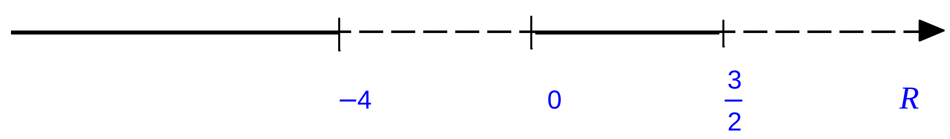
$(-\infty , -4)$, $(-4 , 0)$, $(0 , 3/2)$, $(3/2 , \infty)$

La desigualdad se cumplirá dependiendo del signo que tenga cada uno de sus factores en cada uno de los subintervalos anteriores.

Cada factor lineal de la forma $(a\cdot x - b)$ es un polinomio de grado 1, que no cambia de signo en cada uno de los dos intervalos en que su única raiz $x = \frac{b}{a}$ divide a la recta numérica.

Por lo tanto, los signos de los factores se determinan asignando <u>*arbitrariamente*</u> un valor numérico a la variable x en cada uno de los intervalos y substituyéndolo en cada factor para obtener un número positivo ó negativo, según se muestra en la siguiente tabla de "prueba de signos" .

	$(-\infty , -4)$	$(-4 , 0)$	$(0 , 3/2)$	$(3/2 , \infty)$
$(x + 4)$	(−)	(+)	(+)	(+)
x	(−)	(−)	(+)	(+)
$(2x - 3)$	(−)	(−)	(−)	(+)
$(x - 4)(x)(2x - 3)$	**(−)**	**(+)**	**(−)**	**(+)**



Otra forma de calcular el signo de cada factor consiste en verificar si el valor arbitrario escogido para x se localiza a la izquierda o a la derecha de la raiz correspondiente a tal factor y usar el siguiente criterio :

Si x queda a la izquierda de una raiz entonces el factor $(x-a)$ será negativo

$$(x-a) < 0 \longrightarrow x < a$$

Si x queda a la derecha de una raiz entonces el factor $(x-a)$ será positivo

$$x - a > 0 \longrightarrow x > a$$

Como se puede observar en la tabla anterior, el producto de los tres factores : x, $(x-4)$ y $(2 \cdot x - 3)$ será positivo, sólo cuando la variable x asuma un valor numérico dentro de los intervalos:

$$[-4\,,0\,] \quad \text{y} \quad [\,3/2\,,\ \infty\,)$$

y éstos son por lo tanto la solución de la desigualdad. *Compruébelo !*

(Nótese que se incluyen los extremos en los intervalos solución debido al signo $\geq$)

1.2 d) *Desigualdades con fracciones*.

Una fracción es el cociente de dos polinomios. Consideraremos la solución de desigualdades que tienen la forma general :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \qquad (1.4)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios en x .

Dado que se involucran polinomios, para determinar la solución de (1.4) se sigue aplicando el principio (1.2) y por lo tanto el procedimiento (1.3) , excepto que primero se deben sumar en un solo miembro todas la fracciones involucradas en la desigualdad para poder escribirla en la forma "normal" (1.4), es decir :

PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN PARA DESIGUALDADES CON FRACCIONES

1. *Sumar las fracciones en un solo miembro de la desigualdad.*
2. *Factorizar el numerador y el denominador , con el fin de obtener todas sus raices reales y dividir la recta numérica en intervalos con las raices obtenidas.*
3. *Evaluar cada factor de la desigualdad en cada intervalo para determinar su signo.*
4. *Comprobar si la desigualdad factorizada en el paso 2 se cumple o no, siguiendo la regla de los signos para la multiplicación .*

(1.5)

Ejemplo 7. Resolver la desigualdad : $\left(\frac{2\cdot x-7}{x-5}\right) \le 3$

Solución : Aqui ***sería un error multiplicar ambos lados de la desigualdad por el factor*** $(x-5)$ con el fin de simplificarla como sigue. . .

$$\left(\frac{2\cdot x-7}{x-5}\right)\cdot(x-5) \le (3)\cdot(x-5)$$

$$(2\cdot x-7) \le (3\cdot x-15) \qquad \textit{(Eliminando asi el factor } (x-5) \textit{)}$$

Esto es debido a que, como ya se dijo antes, no se conoce aún el signo de la cantidad variable $(x-5)$, la cual podría ser positiva o negativa , de manera que al multiplicar la desigualdad por esa cantidad, no sabríamos que sentido adquirió finalmente .

No se debe multiplicar una desigualdad por una cantidad variable de la cual se desconoce el signo

La forma correcta de resolver cualquier desigualdad con fracciones es *transformarla en una más simple, equivalente a uno o varios intervalos , usando las propiedades de las desigualdades* , y siguiendo el método (1.5) indicado antes .

$$\left(\frac{2\cdot x-7}{x-5}-3\right) \le (3-3) \qquad \textit{(se ha sumado } -3 \textit{ en ambos miembros)}$$

$$\frac{-(x-8)}{(x-5)} \le 0 \qquad \textit{(sumando la fracción)}$$

$$\frac{(x-8)}{(x-5)} \ge 0 \qquad \textit{(al multiplicar por } -1, \textit{ se cambió de sentido)}$$

Quedan solo dos factores lineales y sus raices se obtienen al resolver las ecuaciones :

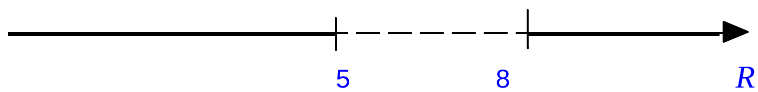
$$(x-8) = 0 \quad \text{y} \quad (x-5) = 0$$

de las que resulta: $x = 8$ y $x = 5$.
Estos números dividen entonces a la recta numérica en tres intervalos:

$$(-\infty, 5), \quad (5, 8), \quad (8, \infty)$$

Los signos de los factores en cada uno de éstos intervalos se indican en la siguiente tabla :

	$(-\infty\ ,\ 5)$	$(5\ ,\ 8)$	$(8\ ,\ \infty)$
$(x-5)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x-8)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\dfrac{(x-8)}{(x-5)}$	$\dfrac{(-)}{(-)} = (+)$	$\dfrac{(+)}{(-)} = (-)$	$\dfrac{(+)}{(+)} = (+)$



Asi que la fracción $\left(\dfrac{x-8}{x-5}\right)$ será positivo sólo si x toma un valor numérico comprendido en los intervalos : $(-\infty\ ,\ 5)$ y $(8\ ,\ \infty)$

Además, como la desigualdad no es estricta, se puede incluir el extremo $x = 8$ de modo que la solución final es : $(-\infty\ ,\ 5)$ y $[8\ ,\ \infty)$ ó en forma equivalente :

$$x < 5 \quad ; \quad 8 \le x$$

(¿Por qué no se incluye también el extremo $x = 5$ como parte de la solución? , pues sencillamente porque implicaría una división por cero en la desigualdad inicial)

Ejemplo 8. Resolver la desigualdad : $\left(\dfrac{7}{x-1}\right) \le \left(5 + \dfrac{6}{x^2-1}\right)$

Solución : Como ya hicimos notar antes, *no se debe multiplicar una desigualdad por un factor variable cuyo signo se desconoce , pues el sentido de la desigualdad quedaría indeterminado.*

Asi que evitemos la tentación de multiplicar la desigualdad por $\left(x^2-1\right)$.
Sumando el inverso aditivo del miembro derecho, se obtiene . . .

$$\frac{7}{x-1} - \left(5 + \frac{6}{x^2-1}\right) \le \left[\left(5 + \frac{6}{x^2-1}\right) - \left(5 + \frac{6}{x^2-1}\right)\right]$$

$$\frac{7}{x-1} - 5 - \frac{6}{x^2-1} \le 0$$

$$\frac{-\left(5\cdot x^2 - 7\cdot x - 6\right)}{\left(x^2-1\right)} \le 0 \qquad \textit{(sumando la fracción)}$$

$$\frac{5\cdot x^2 - 7\cdot x - 6}{x^2 - 1} \geq 0 \qquad \textit{(se ha multiplicado por } -1 \textit{)}$$

Nótemos que <u>se ha invertido el sentido</u> de la desigualdad. Factoricemos ahora el numerador y el denominador de ésta fracción.

$$\frac{(5\cdot x + 3)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)} \geq 0$$

Las raices de los polinomios en el numerador y en el denominador se obtienen al resolver $(5\cdot x + 3)\cdot(x-2) = 0$ *y* $(x-1)\cdot(x+1) = 0$ y resulta:

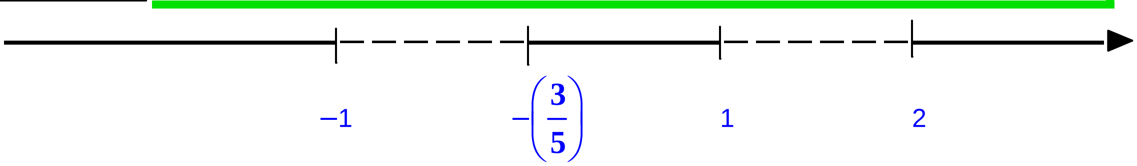
$$x = \frac{-3}{5} \;, \quad x = 2 \;, \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = -1$$

La recta numérica queda asi dividida en 5 partes o subintervalos:

$$(-\infty\,,-1)\,,\quad \left(-1\,,-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\right)\,,\quad \left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\,,1\right)\,,\quad (1,\;2)\;,\;(2\;,\;\infty)$$

Determinemos el signo de cada factor en cada intervalo:

	$(-\infty\,,-1)$	$(-1\,,-3/5)$	$(-3/5\,,1)$	$(1\,,2)$	$(2\;,\;\infty)$
$(x+1)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$(5x+3)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(+)$
$(x-1)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x-2)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$\frac{(5\cdot x+3)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)}$	$\frac{(-)(-)}{(-)(-)} = \mathbf{(+)}$	$\frac{(-)(-)}{(-)(+)} = \mathbf{(-)}$	$\frac{(+)(-)}{(-)(+)} = \mathbf{(+)}$	$\frac{(+)(-)}{(+)(+)} = \mathbf{(-)}$	$\frac{(+)(+)}{(+)(+)} = \mathbf{(+)}$



*<u>**Sugerencia**</u>: Si se escriben los factores en la primera columna en <u>el mismo orden en que aparecen sus raices sobre la recta numérica</u>, entonces sus signos quedarán ordenados en un arreglo triangular resultando así mucho más fácil determinarlos.*

Entonces la desigualdad inicial $\left(\frac{7}{x-1}\right) < \left(5 + \frac{6}{x^2-1}\right)$ o también $\frac{(5\cdot x+3)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)} > 0$ se cumple solamente en los intervalos :

$$(-\infty\,,-1)\;,\qquad [-3/5\,,1) \quad \text{y} \quad [2\,,\;\infty)$$

Otra manera de escribir ésta solución es : $x < -1$, $\frac{-3}{5} \le x < 1$ y $2 \le x$

Obsérvese que se incluyen los extremos $\frac{-3}{5}$ y 2 como parte de la solución; pero no los extremos -1 y 1 ¿por qué?

1.2 e) ***Desigualdades con valores absolutos***.

El valor absoluto de un número real x se denota por $|x|$ y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es positivo} \\ -x & \text{si } x \text{ es negativo} \end{cases} \qquad (1.6)$$

El valor absoluto de un número real x nunca es negativo. Cuando x es negativo entonces $-x$ es positivo. Por ejemplo: $|-4| = -(-4) = 4$

Geométricamente, $|x|$ *representa la distancia que hay desde el origen (el cero) de la recta numérica hasta el punto que representa al número* x.

Similarmente, la ***distancia*** que hay sobre la recta numérica entre dos números reales a y b se define como :

$$|a-b| \quad \text{o también} \quad |b-a|$$

Por ejemplo la separación entre los números -3 y -7 es 4 unidades porque :

$$|(-3)-(-7)| = |-3+7| = |4| = 4 \quad \text{ó bién :} \quad |(-7)-(-3)| = |-7+3| = |-4| = 4$$

Dado que el cuadrado de todo número real x es positivo y la raiz cuadrada de todo número positivo es un número positivo, entonces una *definición alternativa* para el valor absoluto es :

$$|x| = \sqrt{(x)^2} \qquad (1.7)$$

Por lo anterior se tiene que . . .

$$|a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(b-a)^2} = |b-a|$$

Ejemplo 9. Hallar los valores de y que satisfacen la ecuación : $|3\cdot y+2| = 5$

Solución : $(3\cdot y+2)$ representa un número real, asi que aplicando la definición de valor absoluto se tiene . . .

Si $(3\cdot y+2) > 0$ entonces $|3\cdot y+2| = 3\cdot y+2$ y por lo tanto $|3\cdot y+2| = 5$ equivale a la ecuación $3\cdot y+2 = 5$ cuya solución es

$$y = \frac{(5-2)}{3} = 1$$

Si $(3\cdot y+2) < 0$ entonces $|3\cdot y+2| = -(3\cdot y+2)$ y por lo tanto $|3\cdot y+2| = 5$ equivale a la ecuación $-(3\cdot y+2) = 5$ cuya solución es

$$y = \frac{(5+2)}{-3} = -\left(\frac{7}{3}\right)$$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Si a y b son dos números reales cualesquiera entonces . . .

I	$-a \le \lvert a \rvert$ y $a \le \lvert a \rvert$
II	$\lvert -a \rvert = \lvert a \rvert$
III	Si $\lvert a \rvert = \lvert b \rvert$ entonces $a = b$ ó $a = -b$
IV	$\lvert a\, b \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$
V	$\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$
VI	$\lvert a+b \rvert \le \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ $\lvert a-b \rvert \ge \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ *Las desigualdades " del triángulo"*

(1.8)

Éstas propiedades se pueden demostrar a partir de la definición (1.6) del valor absoluto. Demostremos las propiedades IV y VI. *(queda como ejercicio para el lector la demostración de las demás propiedades.)*

<u>DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD</u> IV

CASO I : Sean dos números reales positivos: $a > 0$ y $b > 0$, entonces sus valores absolutos son:

$$|a| = a \qquad |b| = b$$

Además su producto es positivo $a\cdot b > 0$ *(el producto de dos números positivos es positivo)* , asi que su valor absoluto es

$$|a\cdot b| = ab$$

substituyendo $|a| = a$ y $|b| = b$ resulta $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

CASO II : Supongamos ahora que se dan dos números reales de diferente signo $a > 0$ y $b < 0$, entonces sus valores absolutos son:

$$|a| = a \qquad |b| = -b$$

Además su producto es negativo $a \cdot b < 0$ *(el producto de dos números de distinto signo es negativo)* , asi que su valor absoluto es por definición:

$$|a \cdot b| = -(ab) = a \cdot (-b)$$

substituyendo $|a| = a$ y $|b| = -b$ resulta $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

CASO III : Sean ahora dos números reales negativos $a < 0$ y $b < 0$, entonces sus valores absolutos son por definición:

$$|a| = -a \qquad |b| = -b$$

Su producto es positivo $a \cdot b > 0$ *(el producto de dos números de igual signo es positivo)* , asi que su valor absoluto es :

$$|a \cdot b| = ab = (-a) \cdot (-b)$$

substituyendo $|a| = -a$ y $|b| = -b$ resulta nuevamente $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD VI.

CASO I . Sea $(a+b)$ un número negativo $(a+b) < 0$ entonces, por la definición de valor absoluto . . .

$$(\,*\,) \qquad |a+b| = -(a+b) = -a-b$$

Además, por la propiedad I , se tiene que :

$$-a \le |a| \quad ; \quad -b \le |b|$$

Si se suman éstas dos desigualdades miembro a miembro, se obtiene:

$$-a-b \le |a| + |b|$$

Pero $-a-b = |a+b|$ de acuerdo a (*) asi que substituyendo se obtiene. . .

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

CASO II . Si $(a+b)$ es un número positivo, $(a+b) > 0$, por la definición de valor absoluto . . .

$$(\,*\,) \qquad |a+b| = (a+b)$$

Además, por la propiedad I , se tiene que :

$$a \le |a| \quad ; \quad b \le |b|$$

Si se suman éstas dos desigualdades miembro a miembro, se obtiene:

$$a + b \leq |a| + |b|$$

Pero $a + b = |a + b|$ de acuerdo a (*) asi que substituyendo se obtiene. . .

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

y se ha demostrado asi la "desigualdad deltriángulo" :

"el valor absoluto de la suma de dos números reales, es menor que la suma de sus valores absolutos "

Para probar la 2ª parte de ésta propiedad, basta substituir al número a por una diferencia cualquiera de dos números reales: $(x - y)$ y al número b por un número y en la desigualdad anterior :

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

quedando :

$$|(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

$$|x| \leq |x - y| + |y|$$

$$|x| - |y| \leq |x - y| \qquad \textit{(Sumando } -|y| \textit{ en ambos miembros)}$$

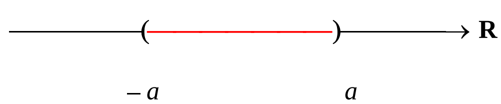
Para resolver desigualdades que involucren valores absolutos, se usará el siguiente importante teorema. . .

TEOREMA I. *Si* a *es un número positivo* $(a > 0)$ *entonces para todo número real* z *se cumple que :*

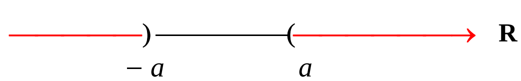
$$|z| < a \quad \text{si y sólo si} \quad -a < z < a$$

$$|z| > a \quad \text{si y sólo si} \quad z > -a \quad \text{ó} \quad z > a \qquad (1.9)$$

En otras palabras, si $|z| < a$ entonces z es un número real que necesariamente está dentro del intervalo abierto $(-a\,,a)$



y si $|z| > a$, entonces z es un número real que necesariamente está comprendido en alguno de los intervalos abiertos $(-\infty, -a)$ o $(a\,, \infty)$



DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA I .

CASO I : $|z| < a$:

Si $z > 0$ su valor absoluto es $|z| = z$ y por lo tanto la desigualdad $|z| < a$ equivale a $z < a$

Si $z < 0$ su valor absoluto es $|z| = -z$ y por lo tanto $|z| < a$ equivale a $-z < a$ ó $z > -a$

Reuniendo éstos dos resultados queda demostrado que : $-a < z < a$.

CASO I : $|z| > a$:

Si $z > 0$ su valor absoluto es $|z| = z$ y por lo tanto la desigualdad $|z| > a$ equivale a $z > a$

Si $z < 0$ su valor absoluto es $|z| = -z$ y la desigualdad $|z| > a$ equivale a $-z > a$ ó $z < -a$

Reuniendo éstos dos resultados queda demostrado que : $z < -a$ ó $a < z$

Es obvio que éste teorema vale también para las formas: $|z| \leq a$ ó $|z| \geq a$

Algunas desigualdades cuadráticas que no se pueden factorizar rápidamente se resuelven fácilmente *completando su trinomio cuadrado perfecto*, basándose en el siguiente corolario derivado del teorema I :

TEOREMA II *Si z es un número real y $a > 0$ entonces:*

$$z^2 < a \quad \text{si y solo si} \quad -\sqrt{a} < z < \sqrt{a}$$
$$z^2 > a \quad \text{si y solo si} \quad z < -\sqrt{a} \text{ ó } \sqrt{a} < z$$

DEMOSTRACIÓN :

CASO I : $z^2 < a$:

Tomando la raiz cuadrada a ambos lados de ésta desigualdad y aplicando la definición alternativa del valor absoluto se obtiene :

$$\sqrt{z^2} < \sqrt{a} \quad \text{es decir :} \quad |z| < \sqrt{a}$$

desigualdad que tiene la solución dada por el teorema I : $-\sqrt{a} < z < \sqrt{a}$

CASO II : $z^2 > a$:

Tomando la raiz cuadrada a ambos lados de ésta desigualdad y aplicando la definición alternativa del valor absoluto se obtiene :

$$\sqrt{z^2} > \sqrt{a} \quad \text{es decir :} \quad |z| > \sqrt{a}$$

y por el teorema I , la solución es : $z < -\sqrt{a}$ ó $\sqrt{a} > z$

Ejemplo 90. Hallar la solución de $\left(4\cdot x^2 + 3\cdot x - 1\right) < 0$ completando el trinomio cuadrado perfecto

Solución : Del álgebra elemental se tiene el siguiente ***procedimiento para completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP)*** de todo trinomio $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$:

1°. *Factorizar* el coeficiente de x^2 : $a\cdot\left(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x\right) + c$

2° *Sumar y restar el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x y escribirlo inmediatamente después del término que contine a x:

$$a\cdot\left[x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right] + c$$

3° Los tres primeros términos del paréntesis recto forman un trinomio cuadrado perfecto porque *provienen del cuadrado de un binomo:*

$$a\cdot\left[\left(x + \frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2\cdot a}\right)^2\right] + c$$

4° Desarrollando el producto, finalmente se obtiene:

$$a\cdot\left(x + \frac{b}{2\cdot a}\right)^2 - \frac{b^2}{4\cdot a} + c$$

Aplicando éste procedimiento al problema resulta :

$$4\cdot\left(x^2 + \frac{3}{4}\cdot x - \frac{1}{4}\right) < 0 \quad \textit{(factorizando el coeficiente de } x^2 \textit{)}$$

Sumando y restando ahora el cuadrado de la mitad del coeficiente de x queda:

$$4\cdot\left[x^2 + \frac{3}{4}\cdot x + \left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{2}\right]^2 - \left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}\right] < 0$$

Multiplicando la desigualdad por el inverso de 4 y simplificando resulta:

$$\left(x^2 + \frac{3}{4}\cdot x + \frac{9}{64}\right) - \left(\frac{9}{64} + \frac{1}{4}\right) < 0$$

Los tres primeros términos en el lado izquierdo son ahora los de un trinomio cuadrado perfecto es decir, provienen del resultado de elevar al cuadrado un binomio:

$$\left(x-\frac{3}{8}\right)^2-\left(\frac{25}{64}\right)<0$$

$$\left(x-\frac{3}{8}\right)^2<\left(\frac{25}{64}\right) \qquad \textit{(Se ha sumado el inverso de } \frac{25}{64}\textit{)}$$

Tomado ahora la raiz cuadrada en ambos miembros: $\left|x-\frac{3}{8}\right|<\sqrt{\frac{25}{64}}$ y aplicando el teorema II resulta . . .

$$-\left(\frac{5}{8}\right)<\left(x+\frac{3}{8}\right)<\left(\frac{5}{8}\right)$$

Sumando el inverso de $\frac{3}{8}$ a cada desigualdad, se obtiene la solución . . .

$$\left(-\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)<x<\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\right)$$

$$\boxed{-1<x<\frac{1}{4}}$$

Ejemplo 11. Resolver $3\cdot x^2-6\cdot x\le 8$ completando el trinomio cuadrado perfecto.

Solución : Apliquemos el procedimiento TCP :

1°. *Factoriczando* el coeficiente de x^2 : $3\cdot\left(x^2-2\cdot x\right)\le 8$

2° *Sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de* x *:*

$$3\cdot\left[x^2-2\cdot x+\left(\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]\le 8$$

3° Los tres primeros términos del paréntesis recto *provienen del cuadrado de un binomo:*

$$3\cdot\left[(x-1)^2-1\right]\le 8$$

Multiplicando por el inverso de 3 y sumando el inverso de -1 queda:

$$(x-1)^2\le 1+\left(\frac{8}{3}\right)$$

Tomando la raiz cuadrada en ambos miembros de la desigualdad y aplicando la definición alternativa del valor absoluto queda:

$$|x-1| \le \sqrt{\frac{11}{3}}$$

Aplicando ahora el teorema II se obtiene :

$$-\sqrt{\frac{11}{3}} \le (x-1) \le \sqrt{\frac{11}{3}}$$

$$\boxed{\left(1-\sqrt{\frac{11}{3}}\right) \le x \le \left(\sqrt{\frac{11}{3}}+1\right)} \qquad \textit{(sumando el inverso de } -1 \textit{)}$$

Este intervalo es la solución buscada .

Mediante la aplicación del Teorema I , es posible también resolver ***desigualdades con valores absolutos de fracciones racionales*** de la forma . . .

$$\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| < a \qquad \text{ó} \qquad \left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| > a$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

La aplicación directa del teorema I con $z = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ transforma éstas desigualdades en:

$$-a < \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) < a \qquad \text{ó} \qquad \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) < -a \;\; ; \;\; a < \left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$$

que se resuelven aplicando el método para desigualdades con fracciones

Ejemplo 12. Resolver la desigualdad : $|x-2| \le |4 \cdot x - 1|$

Solución : La cantidad $4 \cdot x - 1$ es variable y de signo desconocido por ahora, sin embargo sabemos que el número $|4 \cdot x + 1|$ es *siempre positivo por ser un valor absoluto.* El hecho de que conozcamos el signo de ésta cantidad, nos permite usarla para multiplicar la desigualdad *sin que cambie el sentido de la desigualdad* .

Entonces, dado que $\dfrac{1}{|4 \cdot x + 1|}$ es positivo, queda . . .

$$\left(\frac{1}{|4 \cdot x+1|}\right) \cdot |x-2| \le |4 \cdot x+1| \cdot \left(\frac{1}{|4 \cdot x+1|}\right)$$

Usando ahora las propiedades del valor absoluto resulta . . . $\left|\dfrac{x-2}{4\cdot x+1}\right| \le 1$

Aplicando el teorema I con $z = \left(\dfrac{x-2}{4\cdot x+1}\right)$ y $a = 1$, se obtiene :

$$-1 \le \left(\frac{x-2}{4\cdot x+1}\right) \le 1$$

Lo cual equivale a dos desigualdades con fracciones :

$$-1 \le \frac{x-2}{4\cdot x+1} \qquad \text{y} \qquad \frac{x-2}{4\cdot x+1} \le 1$$

Resolviéndolas por el método usual. . .

$$0 \le \left(1 + \frac{x-2}{4\cdot x+1}\right) \quad ; \quad \left(\frac{x-2}{4\cdot x+1} - 1\right) \le 0$$

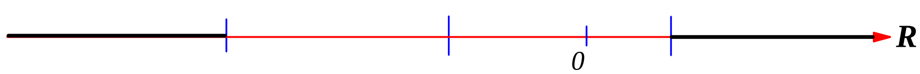
$$0 \le \frac{(5\cdot x-1)}{(4\cdot x+1)} \quad ; \quad -3\cdot\frac{(x+1)}{(4\cdot x+1)} \le 0$$

Las raices de ambas desigualdades son entonces : $x = -1$, $x = \dfrac{-1}{4}$ y $x = \dfrac{1}{5}$.

La recta numérica queda asi dividida en 4 intervalos.

Para encontrar la solución, *se debe verificar la desigualdad inicial en cada intervalo, escogiendo valores arbitrarios para* x *en cada uno de ellos y substituyéndolos en la desigualdad inicial* como se muestra en la siguiente ***tabla de prueba*** :

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < -(1/4)$	$-(1/4) < x < 1/5$	$1/5 < x < \infty$
Valor para x	$x = -2$	$x = -1/2$	$x = 0$	$x = 1$
$\lvert x-2 \rvert$	$\lvert -2-2 \rvert = 4$	$\lvert -1/2-2 \rvert = 5/2$	$\lvert 0-2 \rvert = 2$	$\lvert 1-2 \rvert = 1$
$\lvert 4\cdot x+1 \rvert$	$\lvert 4\cdot(-2)+1 \rvert = 7$	$\lvert 4\cdot(-1/2)+1 \rvert = 1$	$\lvert 4\cdot(0)+1 \rvert = 1$	$\lvert 4\cdot(1)+1 \rvert = 5$
$\lvert x-2 \rvert \le \lvert 4x+1 \rvert$?	$4 \le 7$ *Cierto*	$5/2 \le 1$ *Falso*	$2 \le 1$ *Falso*	$1 \le 5$ *Cierto*



Entonces la desigualdad se cumple solamente para los valores de x que estén dentro de alguno de los intervalos $-\infty < x \leq -1$ y $\frac{1}{5} \leq x < \infty$.

(*Nótese que se incluyen los extremos* $x = -1$ *y* $x = 1/5$ *porque ambos valores satisfacen también la desigualdad inicial*)

Otra forma de resolver desigualdades con valores absolutos que tengan la forma general :

$$|A| > |B| \qquad \text{ó} \qquad |A| < |B|$$

donde y son expresiones algebráicas, consiste en ***elevar al cuadrado ambos miembros para eliminar los valores absolutos*** , pues de la definición alternativa de valor absoluto : $|x| = \sqrt{x^2}$ se sigue que. . .

$$(|x|)^2 = \left(\sqrt{x^2}\right)^2 \qquad \text{esto es} \qquad (|x|)^2 = x^2$$

de manera que el cuadrado del valor absoluto de un número es igual al cuadrado de ese número.

Al final, se tendrá que resolver una desigualdad que contiene polinomios o fracciones.
La dificultad principal de éste método es que *se eleva el grado de los polinomios* involucrados en la desigualdad y por cada vez que se eleva al cuadrado, será más laborioso determinar sus raices.

Ejemplo 13 . Resolver la desigualdad : $\dfrac{|2\cdot x - 1|}{|3\cdot x - 2|} \leq 1$

Solución : Multipicando primero por $|3\cdot x - 2|$ (*que es un número positivo*) para transformar la desigualdad a la forma general $|A| \leq |B|$, queda:

$$\left(\frac{|2\cdot x - 1|}{|3\cdot x - 2|}\cdot|3\cdot x - 2|\right) \leq 1\cdot(|3\cdot x - 2|)$$

$$|2\cdot x - 1| \leq |3\cdot x - 2|$$

Elevando al cuadrado ambos miembros para cancelar el valor absoluto se obtiene:

$$(2\cdot x - 1)^2 \leq (3\cdot x - 2)^2$$

$$\left(4\cdot x^2 - 4\cdot x + 1\right) - \left(9\cdot x^2 - 12\cdot x + 4\right) \leq 0 \qquad \textit{(desarrollando los binomios)}$$

$$-5\cdot x^2 + 8\cdot x - 3 \leq 0 \qquad \textit{(simplificando)}$$

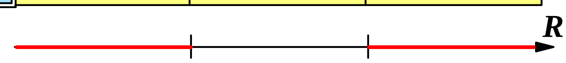
$$-(5\cdot x - 3)\cdot(x-1) \le 0 \qquad \textit{(factorizando)}$$

$$(5\cdot x - 3)\cdot(x-1) \ge 0 \qquad \textit{(multiplicando por } -1 \textit{)}$$

Las raices se obtienen de $-(5\cdot x - 3) = 0$ y $(x-1) = 0$ y son : $x = \frac{3}{5}$, $x = 1$.

Hacemos ahora la tabla de prueba de signos :

	$(-\infty, 3/5)$	$(3/5, 1)$	$(1, \infty)$
$(5x-3)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$
$(x-1)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$
$(5x-3)(x-1) \ge 0$	$(+)$	$(-)$	$(+)$



Asi que la solución consiste en los intervalos : $-\infty < x \le \frac{3}{5}$ y $1 \le x < \infty$

Nótese que se incluyen los extremos 3/5 y 1 como parte de la solución.

La solución de ésta misma desigualdad por el método del teorema I

$$\text{" } \textit{Si} \ |z| < a \ \textit{ entonces } -a < z < a \text{ "}$$

Haciendo $z = \frac{|2\cdot x - 1|}{|3\cdot x - 2|} = \left|\frac{2\cdot x - 1}{3\cdot x - 2}\right|$ y $a = 1$ es . . .

$$\textit{Si} \ \left|\frac{2\cdot x - 1}{3\cdot x - 2}\right| \le 1 \ \textit{ entonces } -1 \le \frac{2\cdot x - 1}{3\cdot x - 2} \le 1$$

Separando ésta última expresión en dos desigualdades con fracciones resulta . . .

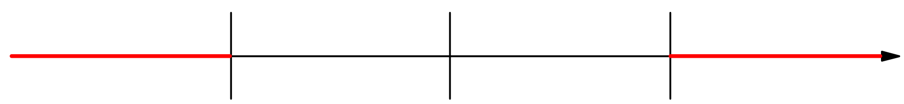
$$-1 \le \frac{2\cdot x - 1}{3\cdot x - 2} \quad ; \quad \frac{2\cdot x - 1}{3\cdot x - 2} \le 1$$

$$0 \le 1 + \frac{2\cdot x - 1}{3\cdot x - 2} \quad ; \quad \frac{2\cdot x - 1}{3\cdot x - 2} - 1 \le 0$$

$$0 \le \frac{(5\cdot x - 3)}{(3\cdot x - 2)} \quad ; \quad \frac{-(x-1)}{(3\cdot x - 2)} \le 0$$

Asi que las raices obtenidas de $(5 \cdot x - 3) = 0$, $(3 \cdot x - 2) = 0$; $-(x - 1) = 0$ son $x = \frac{3}{5}$, $x = \frac{2}{3}$; $x = 1$ y la tabla de prueba de signos es . . .

	$(-\infty, 3/5)$	$(3/5, 2/3)$	$(2/3, 1)$	$(1, \infty)$
Valor de x	0	$\frac{19}{30}$	$\frac{5}{6}$	2
$\lvert 2x - 1 \rvert$	$\lvert 0 - 1 \rvert = 1$	$\left\lvert 2 \cdot \frac{19}{30} - 1 \right\rvert = \frac{4}{15}$	$\left\lvert 2 \cdot \frac{5}{6} - 1 \right\rvert = \frac{2}{3}$	$\lvert 2(2) - 1 \rvert = 3$
$\lvert 3x - 2 \rvert$	$\lvert 0 - 2 \rvert = 2$	$\left\lvert 3 \cdot \frac{19}{30} - 2 \right\rvert = \frac{1}{10}$	$\left\lvert 3 \cdot \frac{5}{6} - 2 \right\rvert = \frac{1}{2}$	$\lvert 3(2) - 1 \rvert = 4$
$\lvert 2x - 1 \rvert \le \lvert 3x - 2 \rvert$	$1 \le 2$ *Cierto*	$\frac{4}{15} \le \frac{1}{10}$ *Falso*	$\frac{3}{2} \le \frac{1}{2}$ *Falso*	$3 \le 4$ *Cierto*



Obteniéndose la misma solución : $x \le \frac{3}{5}$ y $1 \le x$ como era de esperarse.

Desigualdades con valores absolutos de la forma general :

$$|P(x)| + |Q(x)| + |R(x)| \, .. \, T(x) > a$$

ó

$$|P(x)| + |Q(x)| + |R(x)| \, .. \, T(x) < a$$

donde $|P(x)|$, $|Q(x)|$, $|R(x)|$ . . . $T(x)$ son polinomios y a es una constante, se pueden resolver aplicando el principio de *establecer casos* y el siguiente procedimiento :

1° En cada término de la forma $|P(x)|$, usar la definición de valor absoluto:

$$|P(x)| = \begin{pmatrix} P(x) & si & P(x \ge 0) \\ -P(x) & si & P(x) < 0 \end{pmatrix}$$

para determinar las condiciones en las que se cumple cada uno de esos valores absolutos

2° Combinar todas las condiciones determinadas en el paso anterior para establecer un conjunto final de intervalos de prueba .

3° Hacer una tabla de prueba en la desigualdad inicial para verificar en qué intervalos del conjunto final se satisface la desigualdad

Como se ilustra en los siguientes ejemplos sencillos que sólo implican polinomios de primer grado.

Ejemplo 14 . Resolver la desigualdad : $|3 \cdot x - 1| - |2 \cdot x + 5| > 3$

Solución : De la definición de valor absoluto: $|x| = \begin{pmatrix} x & si & x \geq 0 \\ -x & si & x < 0 \end{pmatrix}$

Se concluye que : $|3 \cdot x - 1| = \begin{bmatrix} (3 \cdot x - 1) & si & 3 \cdot x - 1 \geq 0 \\ -(3 \cdot x - 1) & si & 3 \cdot x - 1 < 0 \end{bmatrix}$

es decir. . . $|3 \cdot x - 1| = \begin{pmatrix} 3 \cdot x - 1 & si & x \geq \frac{1}{3} \\ -3 \cdot x + 1 & si & x < \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ (*)

y también : $|2 \cdot x + 5| = \begin{bmatrix} (2 \cdot x + 5) & si & 2 \cdot x + 5 \geq 0 \\ -(2 \cdot x + 5) & si & 2 \cdot x + 5 < 0 \end{bmatrix}$

es decir. . . $|2 \cdot x + 5| = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + 5 & si & x \geq \frac{-5}{2} \\ -2 \cdot x - 5 & si & x < \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$ (**)

Estas condiciones indican que debemos considerar tres intervalos :

$$x < \frac{-5}{2} \qquad \frac{-5}{2} \leq x < \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{3} \leq x$$

CASO I . Si $x < \frac{-5}{2}$, entonces $|3 \cdot x - 1| = -(3 \cdot x - 1)$; $|2 \cdot x + 5| = -(2 \cdot x + 5)$ son negativos debido a las condiciones (*) y (**) , y la desigualdad inicial queda :

$$|3 \cdot x - 1| - |2 \cdot x + 5| > 3$$

$$(-3 \cdot x + 1) - (-2 \cdot x - 5) > 3$$

$$-x + 6 > 3 \quad \text{con solución} \quad x < 3$$

CASO II . Si $\frac{-5}{2} \leq x < \frac{1}{3}$, entonces, por las condiciones (*) y (**) , los términos con valor absoluto tienen los signos : $|3 \cdot x - 1| = -(3 \cdot x - 1)$ y $|2 \cdot x + 5| = 2 \cdot x + 5$
y la desigualdad queda :

$$|3\cdot x-1| - |2\cdot x+5| > 3$$

$$-(3\cdot x-1)-(2\cdot x+5) > 3$$

$$-5\cdot x-4 > 3 \quad \text{con solución:} \quad x < \frac{-7}{5}$$

CASO III . Si $\frac{1}{3} \le x$, entonces $|3\cdot x-1| = 3\cdot x-1$; $|2\cdot x+5| = 2\cdot x+5$

y la desigualdad inicial queda :

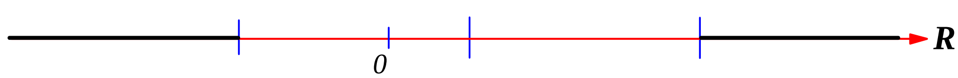
$$|3\cdot x-1| - |2\cdot x+5| > 3$$

$$(3\cdot x-1)-(2\cdot x+5) > 3$$

$$x-6 > 3 \qquad \text{cuya solución es :} \quad x > 9$$

Para determinar finalmente en cuales de éstos intervalos se satisface la desigualdad inicial, debemos hacer una ***tabla de prueba***, asignando valores a x en cada uno de los intervalos y verificando si la desigualdad se satisface.

	$(-\infty, -7/5)$	$(-7/5, 3)$	$(3, 9)$	$(9, \infty)$
Valor para x	$x=-2$	$x=0$	$x=4$	$x=10$
$\|3x-1\|$	$\|3(-2)-1\|=7$	$\|3(0)-1\|=1$	$\|3(4)-1\|=11$	$\|3(10)-1\|=29$
$\|2x+5\|$	$\|2(-2)+5\|=1$	$\|2(0)+5\|=5$	$\|2(4)+5\|=13$	$\|2(10)+5\|=25$
$\|3x-1\|-\|2x+5\|>3$?	$7-1>3$ *Cierto*	$1-5>3$ *Falso*	$11-13>3$ *Falso*	$29-25>3$ *Cierto*



Por lo tanto, la desigualdad se cumple solo si x está en alguno de los intervalos : $x < \frac{-7}{5}$ ó $9 < x$

Ejemplo 15 . ***No toda desigualdad que involucra valores absolutos tiene una solución*** .

Resolver la desigualdad $|x-1| - |x-3| \geq 5$

Solución : De la definición de valor absoluto se concluye que :

$$|x-1| = \begin{bmatrix} x-1 & si \;\; x-1 \geq 0 \;\; es \;\; decir \;\; si \;\; x \geq 1 \\ -(x-1) & si \;\; x-1 < 0 \;\; es \;\; decir \;\; si \;\; x < 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$|x-3| = \begin{bmatrix} (x-3) & si \;\; x-3 \geq 0 \;\; es \;\; decir \;\; si \;\; x \geq 3 \\ -(x-3) & si \;\; x-3 < 0 \;\; es \;\; decir \;\; si \;\; x < 3 \end{bmatrix} \quad (**)$$

Estas condiciones implican que se deben considerar tres intervalos:

$$x < 1 \quad , \quad 1 \leq x < 3 \quad , \quad 3 \leq x$$

CASO I . Cuando x toma un valor numérico dentro del intervalo: $x < 1$, entonces, las condiciones (*) y (**) implican que : $|x-1| = -(x-1)$ y $|x-3| = -(x-3)$ y la desigualdad inicial $|x-1| - |x-3| \geq 5$ queda . . .

$$-(x-1) - [-(x-3)] \geq 5$$

$$-2 \geq 5$$

que es una contradicción. Ésto significa que x no puede tomar valores en el intervalo $(-\infty , 1)$

CASO II . Si consideramos los valores reales en el intervalo $1 \leq x < 3$, entonces las condiciones (*) y (**) hacen que . . . $|x-1| = x-1$ y $|x-3| = -(x-3)$ y la desigualdad inicial $|x-1| - |x-3| \geq 5$ queda . . .

$$(x-1) - [-(x-3)] \geq 5$$

$$2 \cdot x - 4 \geq 5 \quad \text{es decir} \quad x \geq \frac{9}{2}$$

CASO III . Cuando se consideran los valores de x en el intervalo $3 \leq x$, entonces $|x-1| = x-1$ y $|x-3| = x-3$ y queda . . .

$$(x-1) - (x-3) \geq 5$$

$$2 \geq 5$$

otra contradicción, lo cual significa que x no está en el intervalo $[3 , \infty)$ y por lo tanto tampoco es verdad el caso II puesto que $x \geq \frac{9}{2}$ queda comprendido en el intervalo $[3 , \infty)$

En resumen, no existe ningún numero real que pueda satisfacer a ésta desigualdad.

Ejemplo 16. Resolver la desigualdad : $\left|x^2+3\cdot x-2\right| - \left|2\cdot x+3\right| \geq 3$

Solución : Aplicando la definición de valor absoluto se tiene que :

$$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = \begin{bmatrix} x^2+3\cdot x-2 & cuando & x^2+3\cdot x-2 \geq 0 \\ . & . & . \\ -\left(x^2+3\cdot x-2\right) & cuando & x^2+3\cdot x-2 < 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo las desigualdades cuadráticas. . .

$$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = \begin{bmatrix} x^2+3\cdot x-2 & si & \left(x \leq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\right) & ó & \left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \leq x\right) \\ . & . & . & . & . \\ -\left(x^2+3\cdot x-2\right) & si & \left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right) & . & . \end{bmatrix} \quad (*)$$

De manera similar, de la definición de valor absoluto:

$$\left|2\cdot x+3\right| = \begin{bmatrix} (2\cdot x+3) & cuando & 2\cdot x+3 \geq 0 & es & decir & si & \frac{-3}{2} \leq x \\ -(2\cdot x+3) & cuando & 2\cdot x+3 < 0 & es & decir & si & x < \frac{-3}{2} \end{bmatrix} \quad (**)$$

Las condiciones (*) y (**) indican que debemos considerar los intervalos particulares:

$$x \leq \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \;;\quad \frac{-3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-3}{2} \;;\quad \frac{-3}{2} \leq x < \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \;;\quad \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \leq x$$

CASO I . Si $x \leq \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$, entonces $\left|x^2+3\cdot x-2\right| = x^2+3\cdot x-2$; $\left|2\cdot x+3\right| = -(2\cdot x+3)$

y la desigualdad $\left|x^2+3\cdot x-2\right| - \left|2\cdot x+3\right| \geq 3$ se escribe en éste caso como :

$$\left(x^2+3\cdot x-2\right) - (-2\cdot x-3) \geq 3$$

$$x^2+5\cdot x+1 \geq 3$$

cuya solución es: $x \leq \frac{-5-\sqrt{33}}{2}$ ó $\frac{-5+\sqrt{33}}{2} \leq x$

CASO II . Si $\frac{-3-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{-3}{2}$, de las condiciones (*), (**) se tiene que :

$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = -x^2-3\cdot x+2$; $\left|2\cdot x+3\right| = -(2\cdot x+3)$ y la desigualdad queda:

$$-x^2-3\cdot x+2+(2\cdot x+3) \geq 3$$

$$-x^2-x+5 \geq 3$$

cuya solución es : $-2 \leq x \leq 1$

CASO III . Si $\frac{-3}{2} \leq x < \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$, de las condiciones (*) y (**) se tiene que :

$\left|x^2+3\cdot x-2\right| = -x^2-3\cdot x+2$ y $\left|2\cdot x+3\right| = 2\cdot x+3$ y la desigualdad queda :

$$-x^2-3\cdot x+2-(2\cdot x+3) \geq 3$$

$$-x^2-5\cdot x-1 \geq 3$$

cuya solución es : $-4 \leq x \leq -1$

CASO IV . Si $\frac{-3+\sqrt{17}}{2} \leq x$, entonces $\left|x^2+3\cdot x-2\right| = x^2+3\cdot x-2$ y

$\left|2\cdot x+3\right| = 2\cdot x+3$ de modo que en éste caso, la desigualdad inicial queda :

$$x^2+3\cdot x-2-(2\cdot x+3) \geq 3$$
$$x^2+x-5 \geq 3$$

cuya solución es : $x \leq \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$ ó $\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \leq x$

Denotando las raices como :

$r_1 = \frac{-5-\sqrt{33}}{2} = -5.372$, $r_3 = \frac{-5+\sqrt{33}}{2} = 0.372$

$r_2 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2} = -3.372$ $r_4 = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} = 2.372$

y dado que :

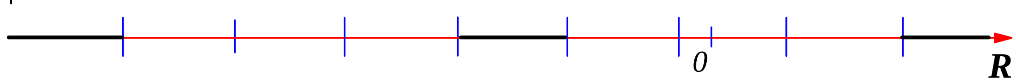
$r_1 < (-4) < r_3 < (-2) < (-1) < r_2 < (1) < r_4$

la recta numérica queda asi dividida en los 9 intervalos de prueba siguientes . . .

$$(-\infty, r_4)\ ,\ (r_1, -4)\ ,\ (-4, r_3)\ ,\ (r_3, -2)\ ,\ (-2, -1)\ ,\ (-1, r_2)\ ,\ (r_2, 1)\ ,\ (1, r_4),\ (r_4, \infty)$$

Para determinar finalmente en cuales de éstos intervalos se satisface la desigualdad inicial, debemos hacer una ***tabla de prueba***, considerando valores para x en cada uno de esos intervalos y *verificando si la desigualdad inicial* se cumple

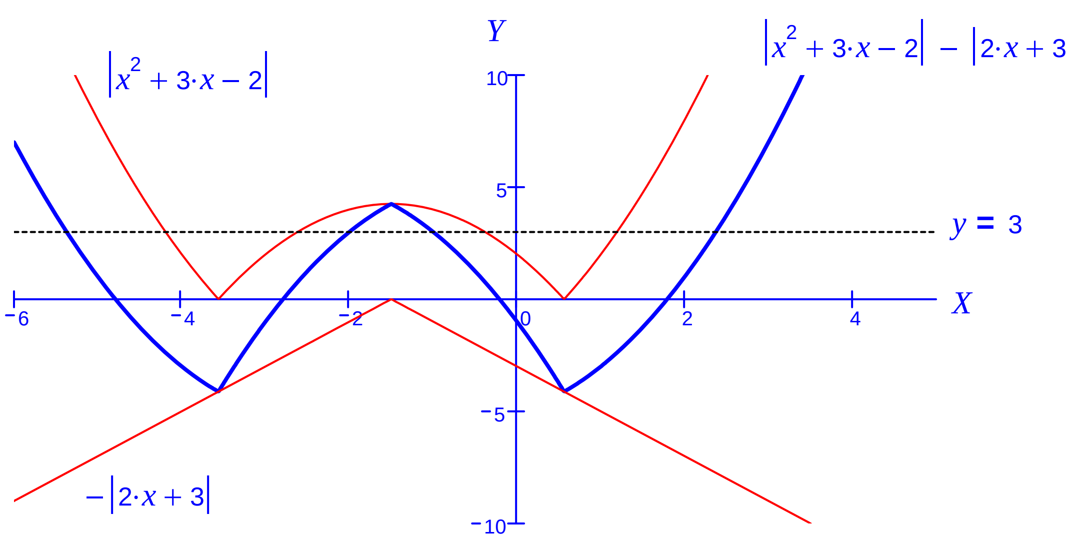
	$(-\infty, r_1)$	$(r_1, -4)$	$(-4, r_2)$	$(r_2, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, r_3)$	$(r_3, 1)$	$(1, r)$	(r_4, ∞)
valor escogido para x	$x = -6$	$x = -5$	$x = \frac{-7}{2}$	$x = -3$	$x = \frac{-3}{2}$	$x = 0$	$x = \frac{1}{2}$	$x = 2$	$x = 3$
$\lvert x^2 + 3x - 2 \rvert$	16	8	1 / 4	2	17 / 4	2	1 / 4	8	16
$\lvert 2x + 3 \rvert$	9	7	4	3	0	3	4	7	9
¿ se cumple ? $\lvert x^2 + 3x - 2\rvert - \lvert 2x + 3\rvert \geq 3$	$16 - 9 \geq 3$ *Cierto*	$8 - 7 \geq 3$ *Falso*	$1/4 - 4 \geq 3$ *Falso*	$2 - 3 \geq 3$ *Falso*	$4.25 \geq 3$ *Cierto*	$2 - 3 \geq 3$ *Falso*	$1/4 - 4 \geq 3$ *Falso*	$8 - 7 \geq 3$ *Falso*	$16 - 9 \geq 3$ *Cierto*



Vemos asi que la desigualdad se cumple solo si x toma un valor en alguno de los intervalos :

$$x \leq \frac{-5 - \sqrt{33}}{2} \quad ; \quad -2 \leq x \leq -1 \quad ; \quad \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \leq x$$

como se ilustra en la siguiente gráfica . . .



<u>*EJERCICIOS*</u> 1.1

1. Si m y n reperesentan dos números enteros, entonces $2 \cdot m$ y $2 \cdot n$ son *enteros pares* *(es decir, que son divisibles entre* 2 *)* , mientras que $(2 \cdot m + 1)$ y $(2 \cdot n + 1)$ son *enteros impares* *(que no son divisibles por* 2*, es decir que si se dividen por* 2 *el residuo no es cero)* .
   Mostrar que :
   - *La suma de dos números enteros pares es par*
   - *La suma de dos números enteros impares es par*
   - *El producto de un número entero par con cualquier otro entero es par*

2. Si $x = -x$ para un número real x demostrar entonces que $x = 0$.
   (Sugerencia: usar las propiedades de los números reales)

3. Si un trabajador puede realizar su labor en 7 dias y otro trabajador puede hacer la misma faena en 5 dias, entonces ¿ qué fracción de la labor realizarán si trabajan juntos por 2 dias ?

4. Si un metro de alambre de Cobre pesa 35 *g* ¿ qué longitud tiene un rollo de 1540 *kg* ? *(1 kg = 1000 g)*

5. Encontrar la forma decimal de los siguientes números racionales.
   a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{41}{333}$ d) $\frac{6}{11}$ e) $\frac{85}{750}$

6. Convertir los siguientes números decimales periódicos en números racionales

   a) $0.454545454...$ b) $0.151515151....$ c) $0.1428571428....$
   d) $12.234343434....$ e) $1.327272727.....$ f) $3.49686868686....$

   <u>*Ejemplo*</u> :
   Sea el número $x = 1.851851851...$. Notemos que el patrón de repetición tiene *tres* cifras: 851, asi que multipliquemos ambos lados de ésta igualdad por la potencia de 10^n donde n es el número de cifras del patrón de repetición, es decir $10^3 = 1000$

   $$1000 \cdot x = 1851.851851....$$

   restemos x : $$-x = -1.851851851...$$

   resulta . . . $$999 \cdot x = 1850$$

   resolviendo para x queda $x = \frac{1850}{999}$. Simplificando ésta fracción se obtiene : $x = \frac{50}{27}$

7. El número $\left(\frac{5}{n^2}\right)$ no está definido para $n = 0$ pues implica una división por cero. Completar la siguiente tabla para ver como éste número aumenta sin límite (*tiende a infinito :* ∞) cuando n se aproxima a cero:

n	10	1	0.5	0.01	0.000 01	0.000 005	0.000 000 1
$\frac{5}{n^2}$	0.05	5	20				

8. Cuando $h = 0$, la expresión : $\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$ no está definida . Completar la siguiente tabla para determinar a que valor se aproxima éste número cuando h se aproxima a cero:

h	12	1	0.5	0.01	0.000 1	0.000 01
$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$	0.16667	0.23607				

9. *Sumar* las dos desigualdades dadas para combinarlas en una sola :
   a) $-3 < 4$, $5 > 3$ b) $-1 > -2$, $-1 < 2$ c) $-2 < x$, $6 < y$

10. *Multiplicar* cada desigualdad por la constante de la derecha :
    a) $-6 < 3$, 2 b) $-6 > -10$, -3 c) $x > -5$, -6

11. *Traducir* las siguientes expresiones en español al lenguaje algebráicao de las desigualdades
    a) x es negativa
    b) y es menor que 5 **ó** mayor o igual que 12
    c) la edad x de Juan es por lo menos 30 años
    d) la ganancia G será de no menos de 45 por ciento
    e) la razón de inflación ζ será al menos del 1% y a lo más del 5% mensual
    f) el aumento esperado no está entre -4 y 2

12. *Calcular la distancia* entre el par de de números dado .
    a) -1 , 3 b) -4 , $\frac{-3}{2}$ c) $\frac{-5}{2}$, $\frac{13}{4}$ d) $\frac{16}{5}$, $\frac{112}{75}$

13. Usar la notación del valor absoluto para representar las siguientes expresiones:
    a) La separción entre x y 5 no es más de 3
    b) La distancia entre z y -10 es por lo menos de 6
    c) ψ está más cerca de 0 que de 8
    d) λ queda a lo más a dos unidades del número a

Hallar la solución de las siguientes desigualdades: (*Comprobar la solución*)

Desigualdades lineales :

14. $5 - x > 7$

15. $4 \cdot x + 1 < 2 \cdot x$

16. $3 \cdot x + 1 > 2 \cdot x + 7$

17. $-4 \le \dfrac{3 - 2 \cdot x}{3} < 4$

18. $\left(-\dfrac{2}{3} \cdot x - \dfrac{5}{3}\right) \le \left(\dfrac{3}{2} \cdot x + \dfrac{1}{4}\right)$

19. $\dfrac{3}{4} \cdot x - \dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{5} \cdot x + \dfrac{1}{4}$

Resolver completando el trinomio cuadrado perfecto .

20. $(x - 3)^2 \ge 1$

21. $x^2 + 2 \cdot x - 3 > 0$

22. $6 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 18 \le 0$

23. $12 \cdot x^2 + 34 \cdot x + 10 \ge 0$

24. $20 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18 > 0$

25. $12 \cdot x^2 - 19 \cdot x + 4 < 0$

Desigualdades con polinomios .

26. $5 \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - 3) > 0$

27. $3 \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3) > 0$

28. $-5 \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot (x + 4) \cdot x < 0$

29. $-3 \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 - 3 \cdot x \ge \dfrac{1}{3} \cdot x^3 - \dfrac{1}{3} \cdot x^2 + x$

30. $\left(12 \cdot x^2 + 34 \cdot x + 10\right) \cdot \left(20 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 18\right) \ge 0$

31. $12 \cdot x^2 - 19 \cdot x + 4 < 0$

32. $x^4 - 5 \cdot x^2 + 6 \ge 0$

33. $-3 \cdot (x - 1)^4 \le 0$

34. $\left(6 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 18\right) \cdot \left(12 \cdot x^2 - 19 \cdot x + 4\right) \ge 0$.

35. $\dfrac{3 \cdot x - 5}{x - 5} > 4$

36. $\dfrac{4}{x + 2} > \dfrac{1}{x - 1}$

37. $\dfrac{4}{x + 5} > \dfrac{1}{2 \cdot x + 3}$

38. $\dfrac{-4}{x - 1} \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{15}{2 \cdot (2 \cdot x - 3)}$

39. $\dfrac{-60}{3 \cdot x - 4} \le 11 + \dfrac{15}{(2 \cdot x + 1)}$

40. $\left(\dfrac{4 \cdot x^2 - 9}{9 \cdot x^2 - 1}\right) > 0$

41. $\dfrac{6}{x + 3} > 2 - \dfrac{1}{x - 2}$

42. $\dfrac{3}{x + 4} < -1 - \dfrac{x + 1}{x - 5}$

43. $\left(\dfrac{8}{29} \cdot \dfrac{x}{5 \cdot x - 6}\right) < \left(\dfrac{\dfrac{17}{29} \cdot x + 1}{7 \cdot x + 9}\right)$

Desigualdades con valores absolutos .

44. $\left|\dfrac{x}{2}\right| \le 3$

45. $|2 \cdot x + 5| \le 1$

46. $\left|\dfrac{x - 3}{2}\right| \ge 5$

47. $|1 - x| \le |x + 2|$

48. $|2 \cdot x + 3| > \dfrac{2}{3} \cdot |3 \cdot x + 4|$

49. $\left|3 \cdot x + \dfrac{1}{2}\right| < \left|2 \cdot x - \dfrac{1}{3}\right|$

50. $\left|3 \cdot x - \dfrac{4}{3}\right| \ge \left|5 \cdot x - \dfrac{1}{3}\right|$

51. $\left|3 \cdot x - \dfrac{1}{2}\right| \ge \left|\dfrac{2}{3} \cdot x + 1\right|$

52. $|x + 6| > |2 \cdot x - 5|$

53. $|x-2| + |x-1| > 4$ 54. $|x+6| - |2\cdot x-5| < 2$

55. $|(3\cdot x+6)\cdot(x-2)| - |2\cdot x-5| < 2$

Hallar los números que están:

56. *al menos a* 3 *unidades del* -1

57. *cuando mucho a* 2 *unidades del* -3

58. *más cerca de* -2 *que de* 4

59. *más cerca de* $\frac{2}{3}$ *que de* -3 .

60 *más lejos de* 2 *que de* -3

61. *más lejos de* $\frac{-1}{4}$ *que de* $\frac{3}{5}$.

Respuestas .

1. i) *La suma de dos números enteros pares es par*.

Sean n y m enteros, entonces $2\cdot n$ y $2\cdot m$ son números pares porque se pueden dividir entre 2 exactamente y además:

$$2\cdot n + 2\cdot m = 2\cdot(m+n)$$

Por la propiedad de cerradura, $(m+n)$ es otro entero y por lo tanto, $2\cdot(m+n)$ es un entero par porque tiene a 2 como factor ..

ii) *La suma de dos números enteros impares es par*

Sean n y m números enteros, entonces $2\cdot n+1$ y $2\cdot m+1$ son números impares porque no se pueden dividir exactamente entre 2 . Por otra parte, su suma es . . .

$$(2\cdot n+1) + (2\cdot m+1) = 2\cdot(n+m)+2$$
$$= 2\cdot(m+n+1)$$

Pero $(m+n+1)$ es otro número entero y $2\cdot(m+n+1)$ es par porque tiene un 2 como factor .

iii) *El producto de un número entero par con cualquier otro entero es par*

Sean n y x dos números enteros, entonces $2\cdot n$ es un número par y su producto es ...

$$(2\cdot n)\cdot x = 2\cdot(n\cdot x) \qquad \textit{(factorizando)}$$

Pero por la propiedad de cerradura en los enteros, $n\cdot x$ es otro número entero y $2\cdot(n\cdot x)$ es par porque tiene un 2 como factor.

2. Supóngase que $x = -x$ para un número real cualquiera x entonces :

$$x + (-x) = 0 \qquad \textit{(por la propiedad de inverso aditivo)}$$
$$x + (x) = 0 \qquad \textit{(por la hipótesis } x = -x \textit{)}$$
$$2\cdot x = 0$$
$$x = 0 \qquad \textit{(Si el producto de dos números es cero, uno de los dos es cero)}$$

3. En un dia de labor, uno de los trabajadores hace $\frac{1}{7}$ de la faena puesto que termina su trabajo en 7 dias (*Suponiendo que trabaja al mismo ritmo todos los días*) . Similarmente el otro trabajador hace $\frac{1}{5}$ del trabajo en un dia. Por lo tanto en dos dias habrán hecho juntos la cantidad de trabajo:

$$(2\cdot dias)\cdot\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{trabajo}{dias}+\frac{1}{5}\cdot\frac{trabajo}{dias}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\right)\cdot trabajo$$

$$= \left(\frac{24}{35}\right)\cdot trabajo = 68.57\%\cdot trabajo$$

4. Del problema se deduce que la *densidad lineal (la masa por unidad de longitud)* de éste alambre es: $\delta = \frac{0.035\cdot kg}{1\cdot metro}$. Por lo tanto, si se pide que la longitud buscada x debe pesar $1540\cdot kg$, se tiene :

$x\cdot\delta = 1540\cdot kg$ de donde se deduce que :

$$x = \frac{1540\cdot kg}{\left(\frac{0.035\cdot kg}{1\cdot metro}\right)} = 44000\cdot metros = 44\cdot km$$

5. a) $\frac{5}{8}$ = 0.625 *finito*

b) $\frac{8}{3}$ = 2.666 666 6 ... *infinito. Patrón de repetición : 6*

c) $\frac{41}{333}$ = 0.123 123 123 *infinito. Patrón de repetición : 123*

d) $\frac{6}{11}$ = 0.545 454 545... *infinito. Patrón de repetición: 54*

e) $\frac{85}{750}$ = 0.113 333 333 ... *infinito. Patrón de repetición: 3*

6. a) $\frac{45}{99} = \frac{5}{11}$ b) $\frac{15}{99} = \frac{5}{33}$ c) $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$ d) $\frac{6056}{495}$ e) $\frac{73}{55}$ f) $\frac{34619}{9900}$

7.

n	10	1	0.5	0.01	0.000 01	0.000 005	0.000 000 1
$\frac{5}{n^2}$	0.05	5	20	50 000	5×10^{10}	2×10^{11}	5×10^{14}

8.

h	12	1	0.5	0.01	0.000 1	0.000 01
$\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{h}$	0.16667	0.23607	0.242 641	0.249 844	0.249 998 4	0.249 999 8

tiende a 0.25 , es decir a 1/4

9. Dos desigualdades se pueden sumar miembro a miembro solo si tienen el mismo sentido.

a) $(-3<4) + (3<5) \longrightarrow (-3+3)<(4+5) \longrightarrow 0<9$

b) $(-1>-2) + (2>-1) \longrightarrow (-1+2)<(-2-1) \longrightarrow 1>-3$

c) $(-2<x) + (y<6) \longrightarrow (-2+y)<(x+6)$

10. Una desigualdad *invierte* su sentido si se multiplica por un número negativo

a) $-6<3 \longrightarrow -(6)(2) < 3(2) \longrightarrow -12 < 6$

b) $-6>-10 \longrightarrow -(6)(-3) < (-10)(-3) \longrightarrow 18 < 30$

c) $x>-5 \longrightarrow -(6)(x) < (-6)(-5) \longrightarrow -6x < 30$

11. Las traducciones son . . .

a) $x<0$

b) $y<5,\quad 12<y$

c) $x \geq 30$

d) $0.45 \leq G$

e) $0.01 \leq \zeta \leq 0.05$

f) $x<-4;\ 2<x$

12. a) $|-1-3| = 4$

b) $\left|-4-\left(-\frac{3}{2}\right)\right| = \frac{5}{2}$

c) $\left|-\frac{5}{2}-\frac{13}{4}\right| = \frac{23}{4}$

d) $\left|\frac{16}{5}-\frac{112}{75}\right| = \frac{128}{75}$

13. a) $|x-5| \leq 3$

b) $|z+10| \geq 6$

c) $|\psi| < |\psi-8|$

d) $|\lambda-a| \leq 2$

14. $x < -2$ 15. $x < \frac{-1}{2}$ 16. $6 < x$

17. $\frac{-9}{2} < x \le \frac{15}{2}$ 18. $\frac{-23}{26} \le x$ 19. $x < \frac{5}{3}$

20. $x \le 2$ ó $4 \le x$ 21. $x < -3$ ó $1 < x$ 22. $-2 \le x \le \frac{3}{2}$

23. $x \le \frac{-5}{2}$ ó $\frac{-1}{3} \le x$ 24. $x < \frac{-3}{2}$ ó $\frac{3}{5} < x$ 25. $\frac{1}{4} < x < \frac{4}{3}$

26. $3 < x$ 27. $-2 < x < -1$; $3 < x$ 28. $-4 < x < 0$; $\frac{1}{2} < x$

29. $x \le 0$ ó $\frac{2}{5} \le x \le 3$ 30. $x \le \frac{-5}{2}$, $\left(\frac{-3}{2} \le x \le \frac{-1}{3}\right)$, $\frac{3}{5} \le x$

31. $\frac{1}{4} < x < \frac{4}{3}$ 32. $x \le -\sqrt{3}$, $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$, $\sqrt{3} \le x$

33. *Ningún número real* 34. $x \le -2$, $\frac{1}{4} \le x \le \frac{4}{3}$, $\frac{3}{2} \le x$.

35. $5 < x < 15$ 36. $-2 < x < 1$, $2 < x$ 37. $-5 < x < \frac{-3}{2}$, $-1 < x$

38. $x \le -1$, $1 < x < \frac{3}{2}$, $3 \le x$ 39. $x \le -2$, $\frac{-1}{2} < x \le \frac{1}{3}$, $\frac{4}{3} < x$

40. $x < \frac{-3}{2}$, $\frac{-1}{3} < x < \frac{1}{3}$, $\frac{3}{2} < x$ 41. $-3 < x < \frac{-1}{2}$, $2 < x < 3$

42. $\frac{-7 - 3\cdot\sqrt{33}}{4} < x < -4$, $\frac{-7 + 3\cdot\sqrt{33}}{4} < x < 5$ 43. $x < -2$, $\frac{-9}{7} < x < \frac{6}{5}$, $3 < x$

44. $-6 \le x \le 6$ 45. $-3 \le x \le -2$ 46. $x \le -7$, $13 \le x$

47. $\frac{-1}{2} \le x$ 48. $\frac{-17}{12} < x$ 49. $\frac{-5}{6} < x < \frac{-1}{30}$

50. $\frac{-1}{2} \le x \le \frac{5}{24}$ 51. $x \le \frac{-3}{22}$, $\frac{9}{14} \le x$ 52. $\frac{-1}{3} < x < 11$

53. $x < \frac{-1}{2}$ ó $\frac{7}{2} < x$

54. $x < \frac{1}{3}$ ó $9 < x$

55. $\frac{-1-\sqrt{58}}{3} < x < -1$; $\frac{5}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{58}}{3}$

56. $|x-(-1)| \geq 3$ y son $2 \leq x$ ó $x \leq -4$

57. $|x-(-3)| \leq 2$ y son $-5 \leq x \leq -1$

58. $|x-(-2)| < |x-4|$ y son $x < 1$

59. $\left|x-\frac{2}{3}\right| < |x+3|$ y son $\frac{-7}{6} < x$

60 $|x-2| > |x+3|$ y son $x < \frac{-1}{2}$

61. $\left|x+\frac{1}{4}\right| > \left|x-\frac{3}{5}\right|$ y son $\frac{7}{40} < x$

Capítulo II
Números Complejos

2.1 ***Números imaginarios***.

El conjunto de números reales tiene la propiedad única de que cualquier número real *(positivo o negativo)* elevado al cuadrado, es un número positivo .
Los números que tienen la propiedad opuesta, es decir que elevados al cuadrado dan como resultado un número negativo, generan un nuevo conjunto que por contraposición a los números reales, se llama *conjunto de números imaginarios* .
Sin embargo, los nombres *"real"* e *"imaginario"* no significan que un número real existe y un número imaginario no existe; antes bién, los números imaginarios tienen tanta importancia en matemáticas como la tienen los números reales y sólo se distinguen de éstos en la propiedad mencionada anteriormente .

Entonces, si w representa un número imaginario, elevándolo al cuadrado resulta . . .

$$w^2 = -x$$

donde x es un número real positivo. Por lo tanto, *todo número imaginario tiene la forma general :*

$$w = \sqrt{-x} \qquad \text{ó} \qquad -w = -\sqrt{-x}$$

considerando ambos signos de una raíz cuadrada .

Se define ***la base de los números imaginarios*** como la raiz cuadrada del número -1 y se representa simbólicamente por la letra j

$$\mathrm{j} = \sqrt{-1} \tag{2.1}$$

(*Algunas veces se utiliza tambièn el símbolo* i *en vez de* j *para representar ésta base de los números imaginarios ; sin embargo , en algunas aplicaciones , como en el análisis de circuitos , el símbolo* i *se utiliza para representar una corriente eléctrica . Es por eso que usaremos* j) .

En consecuencia , ***todo número imaginario es un múltiplo de*** j, puesto que siempre es posible escribirlo como. . .

$$\sqrt{-x} = \sqrt{(x)\cdot(-1)} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{x}\cdot\mathrm{j}$$

Para cualquier número real x positivo.

Ejemplo 1 Los siguientes son números imaginarios. . .

i) $\sqrt{-16} = \sqrt{(16)\cdot(-1)} = \sqrt{(4)^2}\cdot\sqrt{-1} = 4\cdot\mathrm{j}$

ii) $\sqrt{-81} = \sqrt{(81)\cdot(-1)} = \sqrt{(9)^2}\cdot\sqrt{-1} = 9\cdot\mathrm{j}$

iii) $\sqrt{-32} = \sqrt{(16)\cdot(2)\cdot(-1)} = \sqrt{(4)^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} = 4\cdot\sqrt{2}\cdot j$

iv) $\sqrt{-\left(\frac{8}{9}\right)} = \sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)\cdot(-1)} = \sqrt{\frac{(2)^2\cdot 2}{(3)^2}\cdot(-1)} = \frac{\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3^2}}\cdot\sqrt{-1} = \left(\frac{2\cdot\sqrt{2}}{3}\right)\cdot j$

v) $\sqrt{-\left(\frac{24}{50}\right)} = \sqrt{\left(\frac{24}{50}\right)\cdot(-1)} = \sqrt{\frac{(6)\cdot(4)}{(2)\cdot(25)}}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{6}{2}}\cdot\sqrt{\frac{4}{25}}\cdot j = \sqrt{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)\cdot j$

etc.

Asi que la raíz cuadrada de cualquier número real negativo es un número imaginario .
Más adelante, cuando analizemos las raíces de los números complejos, podremos considerar las raíces de orden mayor a dos de los números negativos .

2.2 Números complejos .

Definición : Un número complejo z ***es un par ordenado*** *de números reales* x *e* y *que se representa en la forma:*

$$z = x + j\cdot y \qquad (2.2)$$

ó por :

$$z = (x, y)$$

llamada ***forma rectangular***, donde :

x : se llama la ***parte real*** del número complejo z . Se denota como: $x = Re(z)$

y : se llama la ***parte imaginaria*** del número complejo z . Se denota como: $y = Im(z)$

j : es la base de los ***números imaginarios*** y representa el número: $j = \sqrt{-1}$

De éste modo , puede decirse que un número complejo es una combinación de un número real (*un número cuyo cuadrado es positivo*) y un número imaginario (*un número cuyo cuadrado es negativo*)

Los números complejos forman un conjunto que tiene propiedades únicas, siendo algunas de ellas completamente distintas a las propiedades que tienen los números reales .
Éste nuevo conjunto de números se aplica extensamente en distintas áreas, por ejemplo en :

- la Ingeniería (*en el análisis de circuitos lineales*)
- la Física (*en la mecánica cuántica*)
- las Matemáticas . (*en el cálculo integral y diferencial para variables complejas*)

Ejemplo 2 . Los siguientes son números complejos :

i) $z = 3 + 2\cdot j$

parte real : $Re(z) = 3$

parte imaginaria : $Im(z) = 2$.

ii) $z = -\sqrt{2} + \left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}\right)\cdot j$

parte real : $Re(z) = -\sqrt{2}$

parte imaginaria : $Im(z) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$

iii) $\sqrt{-8} = \sqrt{\left(2^2\right)\cdot 2\cdot(-1)} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1} = 2\cdot\sqrt{2}\cdot j = 0 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot j$

parte real : $Re(z) = 0$

parte imaginaria : $Im(z) = 2\cdot\sqrt{2}$

iv) $z = \dfrac{2}{3} = \left(\dfrac{2}{3}\right) + 0\cdot j$

parte real : $Re(z) = \dfrac{2}{3}$

parte imaginaria : $Im(z) = 0$

En éstos dos últimos ejemplos, se muestra que *todo numero real es un número complejo con parte imaginaria cero*, y *todo número imaginario es un número complejo con parte real nula* .

2.3 ***Potencias enteras del número*** j .

Basándonos en su definición, es fácil comprobar que algunas de las primeras potencias del númerc $j = \sqrt{-1}$ son :

$(j)^0 = (\sqrt{-1})^2 = 1$ (*todo número (excepto cero) elevado a la potencia cero es la unidad*)

$(j)^1 = (\sqrt{-1})^1 = j$ (*por definición de la unidad imaginaria*)

$(j)^2 = j\cdot j = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \left[\sqrt{(-1)}\right]^2 = -1$

(*Aquí es importante notar que no podemos usar la ley de multiplicación de radicales:*

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{(1)^2} = 1$$

pues ésta propiedad ($\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{(x)\cdot(y)}$ *) es válida para números reales; no para la nueva clase de números que estamos considerando)*

$(j)^3 = (j)^2\cdot j = (-1)\cdot j = -j$ (*puesto que* $(j)^2 = -1$)

$(j)^4 = (j)^2\cdot(j)^2 = (-1)\cdot(-1) = 1$ (*puesto que* $(j)^2 = -1$)

$(j)^5 = (j)\cdot(j)^4 = j\cdot(1) = j$ (*puesto que* $(j)^4 = 1$)

$(j)^6 = (j)\cdot(j)^5 = j\cdot(j) = j^2 = -1$ (*puesto que* $(j)^5 = j$ *y además* $(j)^2 = -1$)

etc. etc.

De ésta manera, todas las potencias enteras positivas de j generan sólamente 4 cantidades distintas : j , -1 , $-j$ y 1 las cuales se obtenen además *en orden cíclico* de acuerdo al orden creciente de la potencia entera respectiva .

Sucede algo parecido para las potencias negativas enteras de j, como podemos ver en la sucesión. . .

$$(j)^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{1}{j}\cdot\left(\frac{j}{j}\right) \quad \left(\textit{ multiplicando la fracción por la unidad } \frac{j}{j}\right)$$

$$= \frac{j}{(j)^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

$$(j)^{-2} = (j)^{-1}\cdot(j)^{-1} = (-j)\cdot(-j) = (j)^2 = -1 \qquad \left(\textit{ya que } (j)^{-1} = -j \textit{ y } j^2 = -1\right)$$

$$(j)^{-3} = (j)^{-2}\cdot(j)^{-1} = (-1)\cdot(-j) = j \qquad \left(\textit{ya que } (j)^{-2} = -1 \textit{ y } j^{-1} = -j\right)$$

$$(j)^{-4} = (j)^{-2}\cdot(j)^{-2} = (-1)\cdot(-1) = 1 \qquad \left(\textit{puesto que } (j)^{-2} = -1\right)$$

$$(j)^{-5} = (j)^{-4}\cdot(j)^{-1} = (1)\cdot(-j) = -j \qquad \left(\textit{puesto que } (j)^{-4} = 1 \textit{ y } j^{-1} = -j\right)$$

etc. etc.

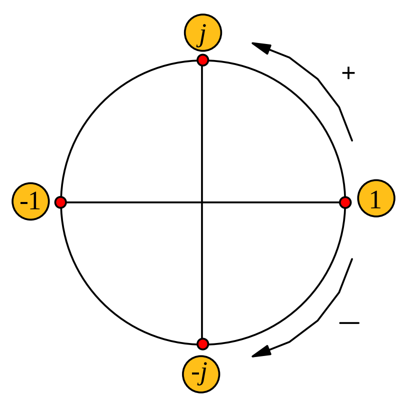
Una forma sencilla para reconocer a cual de las cuatro cantidades básicas : j , -1 , $-j$ o 1 corresponde cualquier potencia entera de j , es imaginar que éstos cuatro números se colocan equidistantes sobre una circunferencia de radio unitario.

Partiendo entonces del punto 1, si se recorre la circunferencia en sentido positivo (*el contrario al giro de las manecillas de un reloj*) se obtendrán sucesivamente en orden cíclico los resultados de las potencias enteras positivas de ***j*** :

$$(j)^0 \ ,(j)^1 \ , (j)^2, \ (j)^3 \ , \ (j)^4 \ldots$$

Mientras que , cuando se recorra en sentido negativo (*el giro de las manecillas del reloj*) , se obtendrán en forma cíclica y sucesiva los resultados de las correspondientes potencias negativas de ***j*** :

$$(j)^{-1} \ , (j)^{-2}, \ (j)^{-3} \ , \ (j)^{-4} \ldots$$



Asi que: $(j)^0, (j)^4, (j)^8, (j)^{12}$, *etc.* valen $\boxed{1}$; $(j)^0, (j)^{-4}, (j)^{-8}, (j)^{-12}$, *etc.* valen $\boxed{1}$

$(j)^1, (j)^5, (j)^9, (j)^{13}$, *etc.* valen $\boxed{j}$; $(j)^{-1}, (j)^{-5}, (j)^{-9}, (j)^{-13}$, *etc.* valen $\boxed{-j}$

$(j)^2, (j)^6, (j)^{10}, (j)^{14}$, *etc.* valen $\boxed{-1}$; $(j)^{-2}, (j)^{-6}, (j)^{-10}$, , *etc.* valen $\boxed{-1}$

$(j)^3, (j)^7, (j)^{11}, (j)^{15}$, *etc.* valen $\boxed{-j}$; $(j)^{-3}, (j)^{-7}, (j)^{-11}$, , *etc.* valen $\boxed{j}$

Ejemplo 3. Evaluación de algunas potencias de números imaginarios :

i) $$(\sqrt{-4})^3 = \left[\sqrt{(-1)\cdot(2^2)}\right]^3 = (\sqrt{-1})^3\cdot\left(\sqrt{2^2}\right)^3 = (j)^3\cdot 2^3 = (-j)\cdot(8) = -8\cdot j$$

ii) $$\left(\frac{1}{\sqrt{-3}}\right)^5 = \left[\frac{1}{\sqrt{(-1)\cdot(3)}}\right]^3 = \frac{1}{(\sqrt{-1}\cdot\sqrt{3})^5} = \frac{1}{(j)^5\cdot\left(\sqrt{3^5}\right)}$$

$$= \frac{(j)^{-5}}{\sqrt{\left(3^4\right)\cdot(3)}} = \frac{-j}{\left(3^2\right)\cdot\sqrt{3}} = -\left(\frac{1}{9\cdot\sqrt{3}}\right)\cdot j$$

iii) $$\left(\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^{11} = \frac{1}{(j)^{11}} = \frac{1}{-j} = -\left(\frac{1}{j}\right) = -(-j) = j$$

2.4 *Operaciones elementales* .

Dados los números complejos :

$$z_1 = x_1 + j\cdot y_1$$
$$z_2 = x_2 + j\cdot y_2$$

se definen las siguientes operaciones :

I. ***Igualdad***

Dos números complejos son iguales si y solo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales .

$$z_1 = z_2 \quad \textbf{si y sólo si} \quad x_1 = x_2 \ ; \ y_1 = y_2 \qquad (2.3)$$

II. ***Suma***

Para sumar números complejos se suman sus partes reales y sus partes imaginarias respectivas separadamente .

$$z_1 + z_2 = \left(x_1 + j\cdot y_1\right) + \left(x_2 + j\cdot y_2\right) = \left(x_1 + x_2\right) + j\cdot\left(y_1 + y_2\right) \qquad (2.4)$$

III. **Multiplicación por un número real**

Cuando un número complejo se multiplica por un número real k, sus partes real e imaginaria quedan multiplicadas por el número k.

$$k\cdot z = k\cdot(x + j\cdot y) = k\cdot x + j\cdot y \qquad (2.5)$$

IV. **Producto**

La parte real del producto de dos números complejos es el producto de sus partes reales menos el producto de sus partes imaginarias .
La parte imaginaria del producto de dos números complejos es la suma de los productos cruzados entre sus partes reales e imaginarias respectivas .

$$z_1\cdot z_2 = (x_1\cdot x_2 - y_1\cdot y_2) + j\cdot(x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1) \qquad (2.6)$$

Este último resultado se obtiene también multiplicando directamente z_1 por z_2 término por término igual que en el producto típico de dos binomios :

$$x_1 + j\cdot y_1$$

$$x_2 + j\cdot y_2$$

$$x_1\cdot x_2 + j\cdot x_2\cdot y_1$$

$$j\cdot x_1\cdot y_2 + (j^2)\cdot y_1\cdot y_2$$

$$x_1\cdot x_2 + j\cdot(x_1\cdot y_2 + x_2\cdot y_1) - y_1\cdot y_2$$ (*Puesto que* $j^2 = -1$)

Ejemplo 4. Determinar los valores de x y de y en las siguientes igualdades:

i) $(x - 2) + (4\cdot y)\cdot j = 3 + 12\cdot j$

ii) $(2\cdot x - 1) + (y - 3)\cdot j = (x + y) - (3\cdot y - 1)\cdot j$

Solución : Dos números complejos son iguales sólo si sus partes reales e imaginarias respectivas son iguales entre si. Igualando entonces éstas partes, se obtienen las ecuaciones:

i) $$Re[\,(x - 2) + (4\cdot y)\cdot j\,] = Re(3 + 12\cdot j)$$

$$(x - 2) = 3$$

$$Im[\,(x - 2) + (4\cdot y)\cdot j\,] = Im(3 + 12\cdot j)$$

$$4\cdot y = 12$$

Estas ecuaciones se cumplen solo si $x = 5$ e $y = 3$

Similarmente en el segundo ejemplo . . .

ii) $$Re[\,(2\cdot x-1)+(y-3)\cdot j\,] = Re[\,(x+y)-(3\cdot y-1)\cdot j\,]$$

$$(2\cdot x-1) = (x+y) \qquad (*)$$

$$Im[\,(2\cdot x-1)+(y-3)\cdot j\,] = Im[\,(x+y)-(3\cdot y-1)\cdot j\,]$$

$$(y-3) = -(3\cdot y-1) \qquad (**)$$

resolviendo simultáneamente el sistema de ecuaciones lineales (*) y (**) , se obtiene. . .

$$x = 2 \;;\quad y = 1$$

Ejemplo 5. Operaciones elementales con números complejos

i) sumar: $(3-4\cdot j)+(-5+3\cdot j)$

ii) sumar: $\left[-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{(-4)}}{3}\right]-\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{(-25)}}{6}\right]$

iii) multiplicar: $(-2+3\cdot j)\cdot(1-2\cdot j)$

iv) multipicar: $-\sqrt{(-3)}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{(-3)}}{2}\right]$

Solución : Al sumar algebraicamente dos ó más números complejos, se suman separadamente sus partes reales y sus partes imaginarias, asi que . . .

i) $$(3-4\cdot j)+(-5+3\cdot j) = [3+(-5)]+(-4+3)\cdot j$$
$$= -2-j$$

ii) *Convirtiendo primero el número a la forma rectangular queda:*

$$\left[-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{(-4)}}{3}\right]-\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{(-25)}}{6}\right] = \left[-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{(2^2)\cdot(-1)}}{3}\right]-\left[-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{(5^2)\cdot(-1)}}{6}\right]$$

$$= \left(-\frac{3}{4}-\frac{2\cdot j}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{5\cdot j}{6}\right)$$

$$= \left[-\left(\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[-\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{6}\right]\cdot j$$

$$= -\left(\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)\cdot j$$

iii) El producto de dos números complejos es otro número complejo cuya parte real es *el producto de las partes reales menos el producto de las partes imaginarias* . y cuya parte imaginaria es *la suma de los productos cruzados entre las partes reales e imaginarias* iniciales:

$$(-2+3\cdot j)\cdot(1-2\cdot j) = [\,(-2)\cdot(1)-(3)\cdot(-2)\,]+[\,(-2)\cdot(-2)+(1)\cdot(3)\,]\cdot j$$

$$= (-2+6)+(4+3)\cdot j$$

$$= 4+7\cdot j$$

iv) *Convirtiendo primero el número a la forma rectangular queda:*

$$-\sqrt{(-3)}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{(-3)}}{2}\right] = \left[-\sqrt{(3)\cdot(-1)}\right]\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{(3)\cdot(-1)}}{2}\right]$$

$$= \left(-\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2}\right)$$

$$= \left(0-\sqrt{3}\cdot j\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot j\right)$$

$$= \left[(0)\cdot\frac{1}{2}-\left[-\sqrt{3}\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right]\right]+\left[0\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{3})\right]\cdot j$$

$$= -\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot j$$

2.5 Forma trigonométrica o polar para un número complejo .

Las operaciones elementales definidas para los números complejos, hacen que éste conjunto de números tenga una estructura matemática prácticamente igual que la de los vectores en un plano.
Por esta razón podemos representarlos gráficamente como puntos sobre un plano de coordenadas rectangulares, donde el eje X representa el conjunto de los números reales y el eje Y representa el conjunto de los números imaginarios .

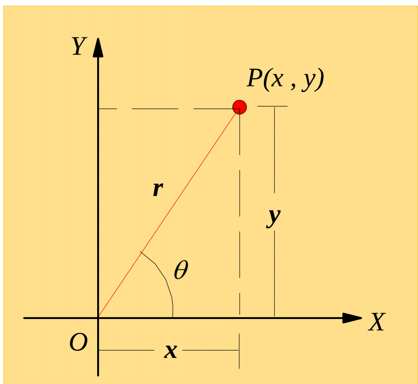
En otras palabras, el eje X está formado por los números complejos cuya parte imaginaria es cero y tienen la forma :

$$z = x+0\cdot j \qquad \textit{(números reales)} .$$

mientras que el eje Y se forma con los números complejos cuya parte real es cero y que tienen la forma general:

$$z = 0+y\cdot j \qquad \textit{(números imaginarios)}.$$

De éste modo, cualquier número complejo $z = x+y\cdot j$, *queda representado por un solo punto en el plano XY , y todo punto* (x, y) *del plano representa un solo número complejo* z .



Geométricamente, la distancia r medida desde el origen O hasta el punto P del plano que representa a un número complejo dado z , es la *magnitud*, *valor absoluto* ó *módulo* de tal número, y se le denota por $|z|$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo representado en la figura anterior se deduce que :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

o dado que x e y son las partes real e imaginaria del número complejo z , en forma general se puede escribir también que :

$$r = |z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} \qquad (2.7)$$

Por otra parte, de la trigonometría elemental aplicada al triángulo rectángulo de la figura anterior es obvio que las coordenadas (x, y) del punto P se calculan como. . .

$$x = r\cdot cos(\theta) = |z|\cdot cos(\theta)$$
$$y = r\cdot sen(\theta) = |z|\cdot sen(\theta) \qquad (2.8)$$

donde θ es el ángulo que forma el segmento de recta r con el eje de los números reales X . Se llama *argumento o fase* del número complejo y se denota por $\theta = arg(z)$.

Por lo tanto, dado un número complejo z cuya *forma algebráica o rectangular* sea $z = x + j\cdot y$, es también posible representarlo en la forma :

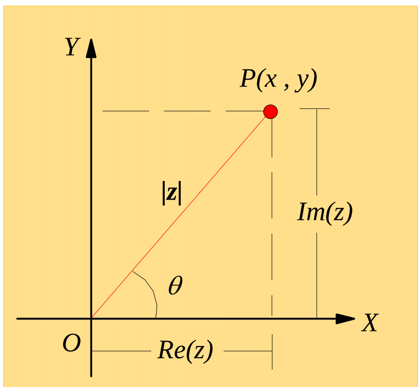
$$z = x + j\cdot y$$

$$= |z|\cdot cos(\theta) + j\cdot(|z|\cdot sen(\theta))$$

$$= |z|\cdot(cos(\theta) + j\cdot sen(\theta)) \qquad (2.9)$$

Llamada *forma polar o trigonométrica* de un número complejo .

El *argumento* θ o *fase* de un número complejo se puede calcular fácilmente a partir de la definición de la función tangente para un triángulo recto :



$$tan(\theta) = \left(\frac{y}{x}\right) = \frac{Im(z)}{Re(z)}$$

y de su función inversa se obtiene . . .

$$\theta = arc\_tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) \qquad (2.10)$$

Las expresiones (2.7) y (2.10) nos permiten *transformar* un número complejo de *la forma algebráica o rectangular* $z = x + j\cdot y$ *a la forma polar o trigonométrica* $z = |z|\cdot(cos(\theta) + j\cdot sen(\theta))$

y mediante las relaciones (2.8) es posible transformar un número complejo *de forma polar a la forma algebráica*, puesto que se dan el módulo $|z|$ y el argumento θ para tal número.

OBSERVACIÓN 1
Notemos que el módulo de un número complejo siempre es positivo

$$|z| = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \geq 0$$

y por lo tanto es único . En cambio su argumento θ *puede ser cualquiera de los números :*

$$\theta\,,\quad \theta + 2\cdot\pi\,,\quad \theta + 4\cdot\pi\,,\quad \theta + 6\cdot\pi\ \ldots etc$$
$$\theta - 2\cdot\pi\,,\quad \theta - 4\cdot\pi\,,\quad \theta - 6\cdot\pi\ \ldots etc$$

debido a que una vuelta completa (que equivalente a un ángulo de $2\cdot\pi$ *radianes ó varias vueltas completas alrededor del origen (en sentido positivo o negativo), no cambian la localización del punto* $P(x,y)$ *sobre el plano complejo .*
Por convención , se escoge siempre el menor valor del argumento, el cual se suele llamar valor principal del argumento y siempre será un ángulo θ *comprendido entre 0º y 360º .*

Valor Principal de arg(z) : $0 \leq \theta \leq 2\cdot\pi$ (2. 11)

OBSERVACIÓN 2
A veces se utiliza la siguiente notación abreviada para escribir la forma polar o trigonométrica de un número complejo :

$$z = |\,z\,|\ \angle\ \theta \qquad (\ 2.12\ )$$

que por supuesto equivale a $z = |z|\cdot\left(cos(\theta) + j\cdot sen(\theta)\right)$

Ejemplo 6. Determinar el módulo y el argumento de los siguientes números complejos :

i) $z = 1 - \sqrt{3}\cdot j$ ii) $z = -1 - j$

iii) $z = \sqrt{3} + j$ iv) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot j$

v) $z = -j$ vi) $z = -3$

Solución : Antes que nada, *se debe determinar el cuadrante del plano en el cual se localiza un número complejo.* Ésto facilitará el cálculo de su argumento θ .

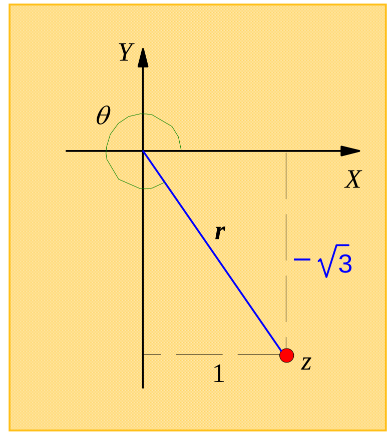
i) $z = 1 - \sqrt{3}\cdot j$

La parte real de éste número complejo ($x = 1$) es positiva y su parte imaginaria ($y = -\sqrt{3}$) es negativa.

Por lo tanto, éste número se localiza en el 4º cuadrante del plano complejo. Su módulo es :

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

y su argumento es. . .



$$\theta = arg(z) = arc\_tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$$

$$= arctan\left(\frac{y}{x}\right) = arc\_tan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right)$$

$$= \frac{5}{3}\cdot\pi = 300°$$

(Al calcular el valor de ésta funcion, se ha tomado en cuenta que z se localiza en el 4º cuadrante , asi como también la equivalencia entre radianes y grados).

La forma polar para éste número complejo es entonces :

$$z = 2 \angle 300º$$

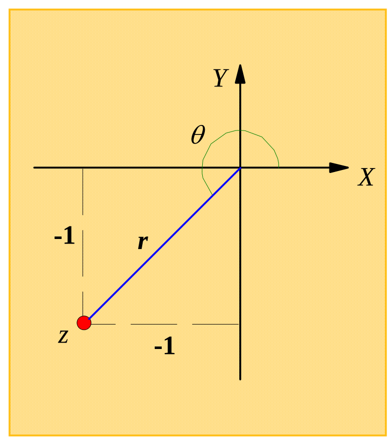
ii) $z = -1 - j$

La parte real es negativa ($x = -1$) y también la parte imaginaria ($y = -1$) por lo cual éste número se localiza en el 3er cuadrante del plano complejo. Su módulo es. . .

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{2}$$



y su argumento es. . .

$$\theta = arc\_tan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right) = arc\_tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{5}{4}\cdot\pi = 225°$$

(Aqui se ha tomando en consideración que z se localiza en el 3er cuadrante , asi como la equivalencia entre radianes y grados).

De éste modo, la forma polar para éste número complejo es :

$$z = \sqrt{2} \angle 225º$$

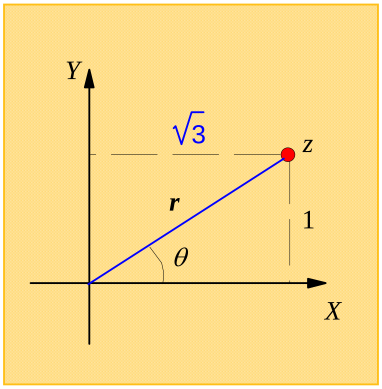
iii) $z = \sqrt{3} + j$

Se tiene que $Re(z) = \sqrt{3}$ e $Im(z) = 1$, por lo tanto éste número complejo se localiza en el primer cuadrante *(ambas partes real e imaginaria son positivas)* y su módulo es :

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$$

$$= 2$$



y su argumento vale . .

$$\theta = arc\_tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= arc\_tan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6}\cdot\pi = 30°$$

la forma polar para z es entonces :

$$z = 2 \angle 30°$$

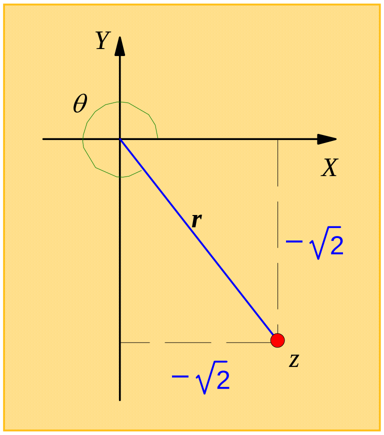
iv) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}\cdot j$

Las partes real e imaginaria de éste número complejo son: $Re(z) = \sqrt{2}$, $Im(z) = -\sqrt{2}$, por lo tanto z se localiza en el 4° cuadrante y su módulo vale :

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^2 + (Im(z))^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4}$$

$$= 2$$



el argumento es . .

$$\theta = arc\_tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= arc\_tan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = arc\_tan(-1)$$

$$= \frac{7}{4}\cdot\pi = 315°$$

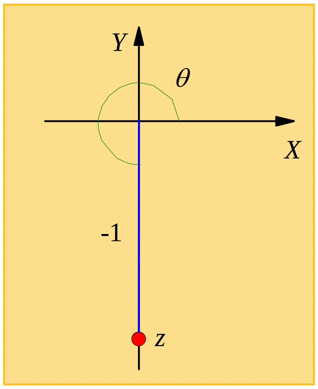
la forma polar para z queda entonces : $z = 2 \angle 315°$

v) $z = -j$

Este es un número imaginario puro, que escrito en forma compleja es : $z = 0 - j$, su parte real es cero y su parte imaginaria vale -1.
Debido a ésto, se localiza entre el 3° y el 4° cuadrante del plano complejo. Su módulo vale:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1$$



y su argumento es . .

$$\theta = arc\_tan\left(\frac{-1}{0}\right)$$

$$= arc\_tan(-\infty) = \frac{3}{2}\cdot\pi = 270°$$

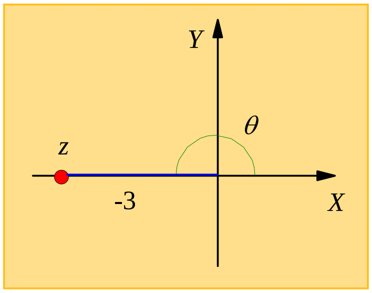
la forma polar para z es entonces : $z = 1 \angle \dfrac{3\cdot\pi}{2}$

vi) $z = -3$

Este es un número real puro, que escrito en forma compleja es $z = -3 + 0\cdot j$, su parte real es -3 y su parte imaginaria vale 0. Se localiza entre el 2° y el 3er cuadrante del plano complejo. Su módulo es . . .

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = 3$$



y su argumento vale . .

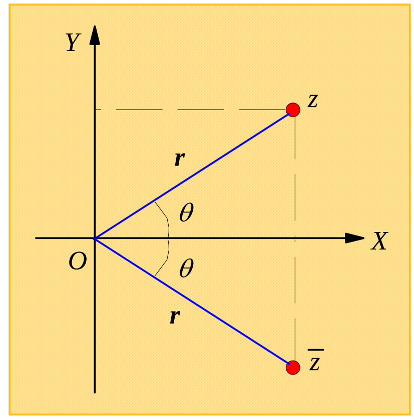
$$\theta = arc\_tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= arc\_tan\left(\frac{0}{-3}\right) = arc\_tan(0) = \pi = 180°$$

La forma polar para z es entonces : $z = 3 \angle \pi$ o también $z = 3 \angle 180°$

2.6 *Números complejos conjugados* .

Dos números complejos son conjugados si sobre el plano complejo representan puntos que son *simétricos* respecto al eje real X . En otras palabras, dos números complejos conjugados tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria ; pero sólo difieren en el signo de su parte imaginaria.



De éste modo, el conjugado del número complejo

$$z = x + j\cdot y$$

se denota por $\bar{z}$ y se define como. . .

$$\bar{z} = \overline{(x + j\cdot y)} = x - j\cdot y \qquad (2.13)$$

En consecuencia, todo punto en el semiplano superior complejo tiene un punto imagen conjugado en el semiplano inferior .

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS CONJUGADOS :

Si z , z_1 y z_2 son números complejos distintos de cero entonces valen las siguientes propiedades . . .

I) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *" El conjugado de una suma es la suma de los conjugados "*

II) $\overline{(z_1\cdot z_2)} = (\overline{z_1})\cdot(\overline{z_2})$ *" El conjugado de un producto es el producto de los conjugados "*

III) $\overline{(\bar{z})} = z$ *" El conjugado de un conjugado es el número complejo inicial "*

IV) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{(\bar{z})}$ *" El conjugado de un recíproco es el recíproco del conjugado "*

Todas éstas propiedades se pueden demostrar a partir de la definición del conjugado de un número complejo Por ejemplo si

$$z_1 = x_1 + j\cdot y_1 \quad ; \quad z_2 = x_2 + j\cdot y_2$$

son dos números complejos, entonces el conjugado de su suma es . . .

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + j\cdot(y_1 + y_2)} \qquad \textit{(Sumando los números complejos)}$$

$$= (x_1 + x_2) - j\cdot(y_1 + y_2) \qquad \textit{(Por la definición de conjugado)}$$

$$= (x_1 - j\cdot y_1) + (x_2 - j\cdot y_2) \qquad \textit{(Asociando)}$$

pero éstos dos últimos términos representan precisamente los complejos conjugados de los números z_1 y z_2 respectivamente. En consecuencia, se ha demostrado que . . .

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{(z_1)} + \overline{(z_2)}$$

Al considerar el producto de un número complejo z por su complejo conjugado, es posible calcular el módulo ó magnitud $|z|$ de tal número, como sigue :

$$(z)\cdot\overline{(z)} = (x + j\cdot y)\cdot\overline{(x + j\cdot y)}$$

$$= (x + j\cdot y)\cdot(x - j\cdot y)$$

$$= [\, x\cdot x - y\cdot(-y)\,] + j\cdot[x\cdot(-y) + y\cdot x] \quad \textit{(Por la definición del producto)}$$

$$= x^2 + y^2$$

$$= (\,|z|\,)^2$$

entonces. . .

$$|z| = \sqrt{(z)\cdot\overline{(z)}} \qquad (\,2.14\,)$$

esto significa que ***el módulo de un número complejo es la raíz cuadrada del producto de ese número por su complejo conjugado.***

Tomando en cuenta el resultado anterior, el cociente de dos números complejos $\frac{z_1}{z_2}$ con $z_2 \neq 0$, se calcula ahora *multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por el complejo conjugado del denominador* como sigue . . .

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)\cdot\left(\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}\right) = \frac{(z_1)\cdot\left(\overline{z_2}\right)}{(z_2)\cdot\left(\overline{z_2}\right)} = \frac{(z_1)\cdot\left(\overline{z_2}\right)}{(\,|z_2|\,)^2}$$

(*dado que de (2.14) , z_2 por su conjugado es su magnitud al cuadrado)*

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{(x_1 + j\cdot y_1)\cdot(x_2 - j\cdot y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2}$$

y realizando la multiplicación en el numerador finalmente se obtiene finalmente. . .

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{(x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2) + j\cdot(x_2\cdot y_1 - x_1\cdot y_2)}{(x_2)^2 + (y_2)^2} \qquad (\,2.15\,)$$

Este último resultado es la expresión general para dividir dos números complejos .
Nótese que el denominador es un *número real* (el módulo de z_2) que divide a un *número complejo* (el producto de z_1 por el conjugado de z_2)

Ejemplo 7. Realizar las siguientes divisiones de números complejos :

i) $\dfrac{-1-j}{2+3\cdot j}$ ii) $\dfrac{3-2\cdot j}{1-3\cdot j}$ iii) $\dfrac{-1+j}{1-j}$

Solución : Multiplicando cada fracción por el complejo conjugado de su denominador se obtiene :

i) $$\frac{(-1-j)\cdot\overline{(2+3\cdot j)}}{(2+3\cdot j)\cdot\overline{(2+3\cdot j)}} = \frac{(-1-j)\cdot(2-3\cdot j)}{(2+3\cdot j)\cdot(2-3\cdot j)}$$

$$= \frac{[\,(-1)\cdot(2)-(-1)\cdot(-3)\,]+[\,(-1)\cdot(-3)+(2)\cdot(-1)\,]\cdot j}{(2)^2+(3)^2}$$

$$= \frac{(-2-3)+(3-2)\cdot j}{(2)^2+(3)^2} = \frac{-5}{13}+\frac{1}{13}\cdot j$$

ii) $$\frac{(3-2\cdot j)\cdot\overline{(1-3\cdot j)}}{(1-3\cdot j)\cdot\overline{(1-3\cdot j)}} = \frac{(3-2\cdot j)\cdot(1+3\cdot j)}{(1-3\cdot j)\cdot(1+3\cdot j)}$$

$$= \frac{[\,(3)\cdot(1)-(-2)\cdot(3)\,]+[\,(3)\cdot(3)+(-2)\cdot(1)\,]\cdot j}{(1)^2+(3)^2}$$

$$= \frac{(3+6)+(9-2)\cdot j}{(1)^2+(3)^2} = \frac{9+7\cdot j}{10} = \frac{9}{10}+\frac{7}{10}\cdot j$$

iii) $$\frac{(-1+j)\cdot\overline{(1-j)}}{(1-j)\cdot\overline{(1-j)}} = \frac{(-1+j)\cdot(1+j)}{(1-j)\cdot(1+j)}$$

$$= \frac{(-1-1)+(0)\cdot j}{(1)^2+(1)^2} = \frac{-2+0\cdot j}{2} = -1$$

EJERCICIOS 2.1

I Efectúense las siguientes operaciones con números complejos :

1. $(5-6\cdot j)+(4+2\cdot j)$ 2. $(6+3\cdot j)-(2-4\cdot j)$ 3. $(3+7\cdot j)-(5-3\cdot j)-(-2+9\cdot j)$

4. $(3+4\cdot j)\cdot(5+2\cdot j)$ 5. $(2-3\cdot j)\cdot(3+5\cdot j)$ 6. $(3+2\cdot j)\cdot(2-j)\cdot(1-j)$

7. $\left(\dfrac{3-j}{3+2\cdot j}\right)$ 8. $\dfrac{\overline{(2+j)}\cdot(1+j)}{(4-3\cdot j)}$ 9. $\overline{(2-3\cdot j)}\cdot\overline{(3-4\cdot j)}$

10. $\overline{(4+j)\cdot(-1-3\cdot j)}$ 11. $\overline{\dfrac{(7-2\cdot j)}{(2+7\cdot j)}}$ 12. $\left(\dfrac{3+2\cdot j}{1-j}\right)+\left(\dfrac{6+2\cdot j}{1+j}\right)$

13. $\dfrac{\overline{(4-2\cdot j)}}{(3+2\cdot j)}+\dfrac{(2-5\cdot j)}{(-2+3\cdot j)}$ 14. $\dfrac{\overline{(1+\sqrt{-1})}}{(1-\sqrt{-1})}$ 15. $[(-1)+\sqrt{-3}]^2+2\cdot[(-1)+\sqrt{-3}]+4$

16. $\left(\dfrac{\sqrt{-2}-1}{1-\sqrt{-4}}\right)\cdot\left[\dfrac{(-1)+\sqrt{-9}}{1-\sqrt{-2}}\right]$

II. Usando la propiedad de igualdad entre dos números complejos, determinar los posibles valores para las variables x e y en las siguientes expresiones :

17. $x+3\cdot j=y+x\cdot j$ 18. $x-y\cdot j=1+x\cdot j$

19. $(3\cdot x\cdot j+2\cdot x)=(2\cdot y\cdot j+y+1)$ 20. $(x+y\cdot j)\cdot(1+2\cdot j)=(-1+8\cdot j)$

21. $(x+y\cdot j)\cdot(x-3\cdot j)=10$ 22. $x^2+(1+2\cdot j)\cdot x-\left(\dfrac{3}{4}+j\right)=0$

23. $(sen(x))^2+j\cdot(cos(y))^2=\left(1+\dfrac{j}{2}\right)$

III. Expresar en forma polar los siguientes números complejos :

24. $(1-j)$ 25. $(-1+\sqrt{3}\cdot j)$ 26. $(-1-\sqrt{3}\cdot j)$

27. $(-3-4\cdot j)$ 28. $3\cdot j$ 29. $(8-15\cdot j)$

30. -2 31. $(-1-j)$

Respuestas a los Ejercicios 2.1

1. $9 - 4\cdot i$
2. $4 + 7\cdot i$
3. i
4. $7 + 26\cdot i$
5. $21 + i$
6. $9 - 7\cdot i$
7. $\frac{7}{13} - \frac{9}{13}\cdot i$
8. $\frac{9}{25} + \frac{13}{25}\cdot i$
9. $-6 + 17\cdot i$
10. $-1 + 13\cdot i$
11. i
12. $\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\cdot i$
13. $\frac{-3}{13} + \frac{2}{13}\cdot i$
14. $-i$
15. 0
16. $\frac{7}{5} - \frac{1}{5}\cdot i$
17. $x = 3,\ y = 3$
18. $x = 1,\ y = -1$
19. $x = 2,\ y = 3$
20. $x = 3,\ y = 2$
21. $\begin{pmatrix} x = 0 & y = \frac{10}{3} \\ x = 1 & y = 3 \\ x = -1 & y = 3 \end{pmatrix}$
22. $x = \frac{1}{2}\ ,\ x = \frac{-3}{2} - 2\cdot i$
23. $x = \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{-\pi}{2}\ ;\ y = \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{3\cdot\pi}{4}$
24. $\sqrt{2}\ \angle\ 45°$
25. $2\ \angle\ \left(\frac{2\cdot\pi}{3}\right)$
26. $2\ \angle\ \left(\frac{-2\cdot\pi}{3}\right)$
27. $5\ \angle\ 233.13°$
28. $3\ \angle\ \frac{\pi}{2}$
29. $17\ \angle\ (298.072)^{\circ}$
30. $2\ \angle\ \pi$
31. $\sqrt{2}\ \angle\ \frac{5\cdot\pi}{4}$ ó también $\sqrt{2}\ \angle\ \frac{-3\cdot\pi}{4}$

2.7 Interpretación geométrica para la suma y el producto de números complejos .

La suma de los dos números complejos :

$$z_1 = x_1 + j \cdot y_1$$
$$z_2 = x_2 + j \cdot y_2$$

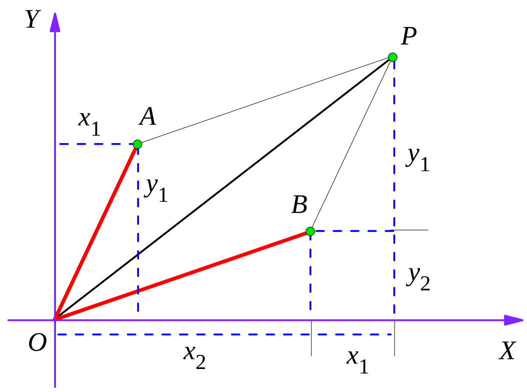
se puede interpretar gráficamente si z_1 y z_2 se representan como " *vectores* " en el plano complejo, los cuales se suman conforme a la " *regla del paralelogramo* " usada en el álgebra de vectores :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j \cdot (y_1 + y_2)$$

En la figura de la derecha , la recta OA representa la magnitud del número complejo $z_1 = x_1 + j \cdot y_1$ y es paralela a la recta BP
La recta OB representa la magnitud del número complejo $z_2 = x_2 + j \cdot y_2$ y es paralela al segmento AP .
Es claro que el número complejo . . .

$$z = z_1 + z_2$$

queda representado por el punto P , porque su parte real (*la proyección de la recta OP sobre el eje X*)

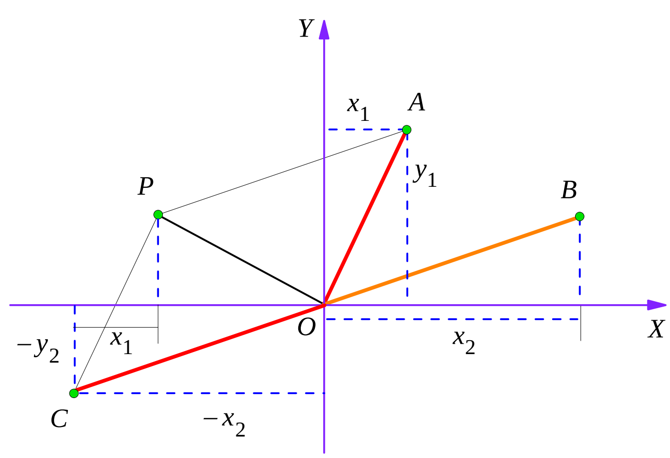


coincide con la suma de las " *componentes horizontales* " $x_1 + x_2$ y su parte imaginaria (*la proyección de la recta OP sobre el eje Y*) es la suma de las "*componentes verticales* " $y_1 + y_2$ de los números complejos z_1 y z_2 respectivamente .

A una conclusión semejante se llega si se representa geométricamente en el plano complejo la diferencia:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j \cdot (y_1 - y_2)$$

En la figura de la derecha , la recta OA representa la magnitud del número complejo $z_1 = x_1 + j \cdot y_1$, y es paralela a la recta CP
El punto B representa el número $z_2 = x_2 + j \cdot y_2$ el cual es simétrico respecto al origen con el punto C , asi que la recta OC representa la magnitud del número complejo $-z_2 = -x_2 - j \cdot y_2$



y es paralela al segmento AP . El número complejo $z = z_1 - z_2$ queda representado por el punto P, porque su parte real *(la proyección de la recta OP sobre el eje X)* coincide con la diferencia de las "*componentes horizontales*" $(x_1 - x_2)$, y su parte imaginaria *(la proyección de la recta OP sobre el eje Y)* es la resta de las "*componentes verticales* " $(y_1 - y_2)$ de los números complejos.

Si consideramoa ahora la forma polar de dos números complejos:

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + j \cdot sen(\theta)) \quad \text{y} \qquad w = |w| \cdot (\cos(\phi) + j \cdot sen(\phi))$$

calculando su producto, se obtiene. . .

$$z \cdot w = [\,|z| \cdot (\cos(\theta) + j \cdot sen(\theta))\,] \cdot [\,|w| \cdot (\cos(\phi) + j \cdot sen(\phi))\,]$$

$$= |z| \cdot |w| \cdot [(\cos(\theta) \cdot \cos(\phi) + j \cdot \cos(\theta) \cdot sen(\phi) + j \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\phi)) + j^2 \cdot sen(\theta) \cdot sen(\phi)]$$

pero dado que $j^2 = -1$, y usando las identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta) \cdot \cos(\phi) - sen(\theta) \cdot sen(\phi) = \cos(\theta + \phi)$$
$$\cos(\theta) \cdot sen(\phi) + sen(\theta) \cdot \cos(\phi) = sen(\theta + \phi)$$

resulta que . . .

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\theta + \phi) + j \cdot sen(\theta + \phi))$$

resultado que podemos escribir también en la notación abreviada como:

$$z \cdot w = [\,|z| \angle \theta\,] \cdot [\,|w| \angle \phi\,]$$

$$= |z| \cdot |w| \angle (\theta + \phi) \qquad (2.16)$$

Asi que en la forma polar, multiplicar números complejos es tan sencillo como :

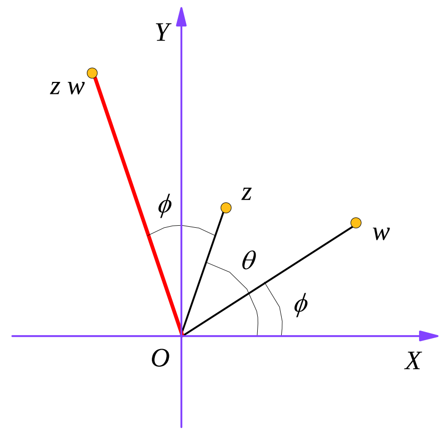
" multiplicar sus magnitudes y sumar sus argumentos ."

Geométricamente, cuando un número complejo z se multiplica por otro número complejo w, es como si el número z *se hiciese girar en sentido positivo un ángulo* ϕ (el argumento de *w*) *y su magnitud cambiase por el factor* $|w|$ (la magnitud de *w*) .

De ésta manera, si deseamos que un número complejo z gire un ángulo φ en el sentido positivo *(contrario al giro de las manecillas de un reloj)* sobre el plano complejo , sólo tenemos que *multiplicarlo por un número complejo cuyo argumento sea exactamente igual a ese ángulo* φ .

Además, si se desea conservar inalterada la magnitud del número complejo inicial , entonces la magnitud del número por w el cual se multiplique debe ser 1 , $|w| = 1$.

Asi por ejemplo, si se desea que el número $z = x + j \cdot y$ $= |z| \angle \theta$ sin cambiar su módulo, . . .



a) gire en $30°$ entonces se debe multiplicar por

$|1| \angle 30°$ es decir por :

$$w = 1 \cdot (cos(30°) + j \cdot sen(30°))$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + j \cdot \frac{1}{2}$$

b) gire en $45°$ entonces se debe multiplicar por

$|1| \angle 45°$ es decir por :

$$w = 1 \cdot (cos(45°) + j \cdot sen(45°)) = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) gire en $60°$ entonces se debe multiplicar por $|1| \angle 60°$ es decir :

$$w = 1 \cdot (cos(60°) + j \cdot sen(60°)) = \frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) gire en $90°$ entonces se debe multiplicar por $|1| \angle 90°$ es decir por:

$$w = 1 \cdot (cos(90°) + j \cdot sen(90°)) = (0 + j \cdot 1) = j$$

e) gire en $180°$ entonces se debe multiplicar por $|1| \angle 180°$ es decir por :

$$w = 1 \cdot (cos(180°) + j \cdot sen(180°)) = (-1 + j \cdot 0) = -1$$

etc. etc..

Ejemplo 8. Multiplicar el número complejo $z = 1 + \sqrt{3} \cdot j$ de modo que tenga magnitud 3 y su argumento sea $210° = \frac{7 \cdot \pi}{6}$

Solución : La magnitud y el argumento de z son :

$$|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \qquad ; \qquad \theta = arc\_tan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3} = 60°$$

y por lo tanto puede escribirse en forma polar como : $z = 2 \angle 60°$

Para cambiar la magnitud y argumento de z a los valores pedidos en el problema, se debe multiplicar por un número complejo $w = |w| \angle \theta$ tal que :

$$z \cdot w = 3 \angle 210°$$

es decir . . .

$$(2 \angle 60°)(|w| \angle \theta) = 3 \angle 210°$$

y por la regla de multiplicación para números complejos en forma polar, se obtiene . . .

$$2 \cdot |w| \angle (\theta + 60°) = 3 \angle 210°$$

Dado que *dos números complejos son iguales sólo si sus módulos y argumentos respectivos son iguales* , de la ecuación anterior se deduce que :

$$2 \cdot |w| = 3 \qquad \text{y} \qquad \theta + 60° = 210°$$

esto es . . .

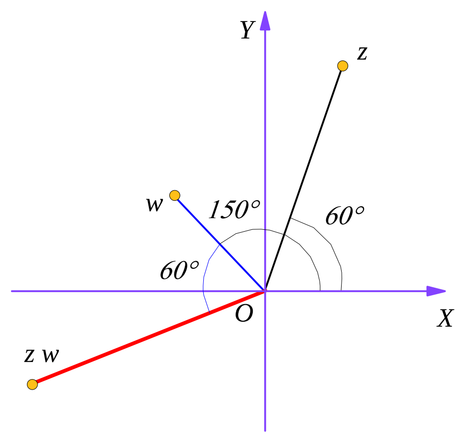
$$|w| = \frac{3}{2} \quad ; \quad \theta = 150°$$

Entonces expresado en forma polar, el número buscado es :

$$w = \frac{3}{2} \angle 150°$$

$$w = \frac{3}{2} \cdot (cos(150°) + j \cdot sen(150°))$$

$$w = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3 + j \cdot 3\sqrt{3}}{4}$$



Calculemos ahora el cociente de dos números complejos z y w dados en forma polar, recordando que la división de dos números complejos se realiza multiplicando por el complejo conjugado del divisor :

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot (\overline{w})}{w \cdot (\overline{w})} = \frac{z \cdot (\overline{w})}{(|w|)^2}$$

(dado que para todo número complejo $|w| = \sqrt{w \cdot (\overline{w})}$ *)*

y queda. . .

$$\frac{z}{w} = \frac{\left[|z|\cdot(\cos(\theta)+j\cdot sen(\theta))\right]\cdot\left(\overline{|w|\cdot(\cos(\phi)+j\cdot sen(\phi))}\right)}{(|w|)^2}$$

$$= \left[\frac{|z|\cdot|w|}{(|w|)^2}\right]\cdot(\cos(\theta)+j\cdot sen(\theta))\cdot(\cos(\phi)-j\cdot sen(\phi))$$

$$= \frac{|z|}{|w|}\cdot(\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)-j\cdot\cos(\theta)\cdot sen(\phi)+j\cdot sen(\theta)\cdot\cos(\phi)+sen(\theta)\cdot sen(\phi))$$

$$= \frac{|z|}{|w|}\cdot(\cos(\theta-\phi)+j\cdot sen(\theta-\phi))$$

dado que $j^2 = -1$, y usando las identidades trigonométricas:

$$\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)+sen(\theta)\cdot sen(\phi) = \cos(\theta-\phi)$$
$$sen(\theta)\cdot\cos(\phi)-\cos(\theta)\cdot sen(\phi) = sen(\theta-\phi)$$

Este resultado, escrito en notación abreviada es . . .

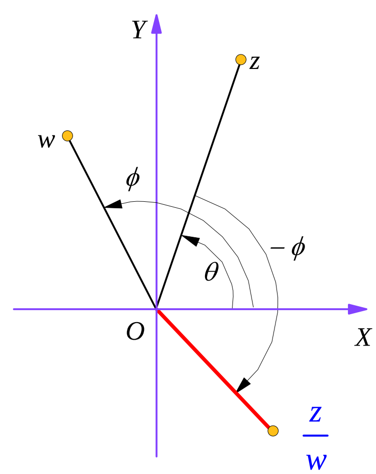
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|\angle\theta}{|w|\angle\phi} = \frac{|z|}{|w|}\angle(\theta-\phi) \qquad (2.17)$$

Asi que dividir dos números complejos en la forma polar, es tan sencillo como :

" dividir sus magnitudes y restar sus argumentos "

Interpretando geométricamente la división, podemos apreciar que cuando un número complejo z se divide por otro número w, el número z

- *gira en sentido negativo* un ángulo ϕ *(el argumento de w)*
- su magnitud cambia por el factor $\frac{1}{|w|}$ *(el inverso de la magnitud de w)* .



De éste modo, si se desa girar sobre el plano complejo a un número z un ángulo ϕ en el sentido negativo (*el sentido del giro de las manecillas de un reloj*) , conservando inalterada su magnitud, sólo hay que dividirlo por un número complejo cuyo argumento sea precisamente igual a ese ángulo ϕ y cuyo módulo sea 1 .

Asi por ejemplo, si se desea que el número $z = x + j\cdot y = |z| \angle \theta$ sin cambiar su módulo . . .

a) gire en $-30°$ entonces se debe dividir por

$$|1| \angle 30° = 1\cdot(cos(30°) + j\cdot sen(30°)) = \frac{\sqrt{3}}{2} + j\cdot\frac{1}{2}$$

b) gire en $-45°$, se debe dividir por

$$|1| \angle 45° = 1\cdot(cos(30°) + j\cdot sen(30°)) = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) gire en $-60°$, se debe dividir por

$$|1| \angle 60° = 1\cdot(cos(60°) + j\cdot sen(60°)) = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) gire en $-90°$, se debe dividir entre

$$|1| \angle 90° = 1\cdot(cos(90°) + j\cdot sen(90°)) = 0 + j\cdot 1 = j$$

e) gire en $-180°$, se debe dividir entre

$$|1| \angle 180° = 1\cdot(cos(180°) + j\cdot sen(180°)) = -1 + j\cdot 0 = -1$$

etc. , etc.

Ejemplo 9. Realizar en forma polar las operaciones indicadas en los siguientes ejercicios:

a) $\left(\sqrt{3} + j\right)\cdot(-1 + j)\cdot\left(-1 - \sqrt{3}\cdot j\right)$

b) $\dfrac{-\sqrt{3} - j}{1 - \sqrt{3}\cdot j}$

c) $(3 \angle 22^o)(2 \angle 8^o)$

d) $\dfrac{(3 \angle 26^o)(2 \angle 38^o)}{(6 \angle 4^o)}$

e) $\dfrac{(24 \angle 268^o)}{(3 \angle 34^o)(2 \angle 9^o)}$

Solución :

a) Primero debemos transformar *a la forma polar* cada uno de los números complejos :

número	*módulo*	*argumento*	*forma polar*
$z_1 = \sqrt{3} + j$	$\lvert z_1 \rvert = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = 2$	$\theta_1 = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$	$2 \angle 30°$
$z_2 = -1 + j$	$\lvert z_2 \rvert = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$	$\theta_2 = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = 135°$	$\sqrt{2} \angle 135°$
$z_3 = -1 - j\cdot\sqrt{3}$	$\lvert z_3 \rvert = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$	$\theta_3 = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = 240°$	$2 \angle 240°$

Ahora realicemos el producto de éstos números complejos en forma polar, simplemente *multiplicando sus módulos y sumamos sus argumentos* . . .

$$\left(\sqrt{3} + j\right)\cdot(-1 + j)\cdot\left(-1 - \sqrt{3}\cdot j\right) = (\,2 \angle 30°\,)(\,\sqrt{2} \angle 135°\,)(\,2 \angle 240°)$$

$$= (2)\cdot(\sqrt{2})\cdot(2) \angle (30° + 135° + 240°)$$

$$= 4\cdot\sqrt{2} \angle 405°$$

El ángulo $405°$ es mayor que $360°$ (*una vuelta completa*) : $405° = 360° + 45°$ de modo que *el argumento principal* del resultado es $45°$ y se puede escribir :

$$\left(\sqrt{3} + j\right)\cdot(-1 + j)\cdot\left(-1 - \sqrt{3}\cdot j\right) = 4\cdot\sqrt{2} \angle 45°$$

$$= 4\cdot\sqrt{2}\cdot(\cos(45°) + j\cdot \mathrm{sen}(45°)\,)$$

$$= 4\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 4\cdot(1 + j)$$

que es la forma algebráica o rectangular equivalente de la forma polar inicial.

El lector debe comprobar éste resultado, *multiplicando directamente los números iniciales en la forma rectangular* .

b) Transformemos los números complejos involucrados en el problema *a la forma polar* :

número	*módulo*	*argumento*	*forma polar*
$z_1 = -\sqrt{3} - j$	$\lvert z_1\rvert = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$	$\theta_1 = arctan\left(\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right) = 210°$	$2 \angle 210°$
$z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot j$	$\lvert z_2\rvert = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$	$\theta_2 = arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = 300°$	$2 \angle 300°$

Ahora realicemos el cociente de éstos números complejos en forma polar, simplemente *dividiendo sus módulos y restando sus argumentos* . . .

$$\frac{-\sqrt{3} - j}{1 - \sqrt{3} \cdot j} = \frac{2 \angle 210°}{2 \angle 300°} = \frac{2}{2} \angle (210° - 300°) = 1 \angle -90°$$

El ángulo negativo: $-90°$, equivale al positivo: $360° - 90° = 270°$, por lo cual el resultado de ésta división expresado en forma rectangular es :

$$\frac{z_1}{z_2} = 1 \angle -90° = 1 \cdot (cos(270°) + j \cdot sen(270°))$$

$$= 1 \cdot [\, 0 + j \cdot (-1) \,]$$

$$= -j$$

El lector debe *comprobar* este resultado, dividiendo directamente los números iniciales en la forma rectangular .

Los números complejos involucrados en los problemas c) , d) y e) ya tienen *la forma polar* , asi que su producto o cociente, es directo . . .

c) $(3 \angle 22°)(2 \angle 8°) = (3) \cdot (2) \angle (22° + 8°) = 6 \angle 30°$

$$= 6 \cdot (cos(30°) + j \cdot sen(30°))$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$= 3 \cdot (\sqrt{3} + j)$$ *(La forma rectangular del resultado)*

d) En la multiplicación los argumentos se suman ; pero en la división se restan

$$\frac{(3\angle 26^\circ)(2\angle 38^\circ)}{(6\angle 4^\circ)} = 1\angle(26^\circ+38^\circ-4^\circ) = 1\angle 60^\circ$$

$$= 1\cdot(\cos(60^\circ)+j\cdot sen(60^\circ))$$

$$= \left(\frac{1}{2}+j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$ *(El resultado escrito en forma rectangular)*

e) Debido a que hay dos divisores, se restan sus argumentos del correspondiente al numerador

$$\frac{(24\angle 268^\circ)}{(3\angle 34^\circ)(2\angle 9^\circ)} = \frac{24}{6}\angle(268^\circ-34^\circ-9^\circ) = 4\angle 225^\circ$$

$$= 4\cdot(\cos(225^\circ)+j\cdot sen(225^\circ))$$

$$= 4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-j\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot(-1-j)$$ *(El resultado escrito en forma rectangular)*

EJERCICIOS 2.2

I Realizar *en forma polar* las siguientes operaciones con los números complejos y expresar el resultado tanto en la forma polar : $z = |z| \angle \theta$, como en la forma rectangular : $z = x + j\cdot y$

(Trate de no usar calculadora)

1. $(2\angle 43^\circ)(1/2\angle 17^\circ)$
2. $(4\angle 29^\circ)(1/2\angle 16^\circ)$
3. $(5\angle 73^\circ)(2\angle 47^\circ)$
4. $(2\angle 13^\circ)(3\angle 11^\circ)(2\angle 6^\circ)$
5. $\dfrac{(6\angle 51^\circ)}{(2\angle 21^\circ)}$
6. $\dfrac{(18\angle 13^\circ)}{(3\angle 34^\circ)(2\angle 9^\circ)}$
7. $\dfrac{6\,[\,\cos(199^\circ)+\boldsymbol{j}\,sen(199^\circ)\,]}{3\,[\,\cos(19^\circ)+\boldsymbol{j}\,sen(19^\circ)\,]}$
8. $\dfrac{(32\angle 17^\circ)(2\angle 13^\circ)}{(4\angle 33^\circ)(2\angle 27^\circ)}$

II . Calcular en forma polar las siguientes operaciones y comprobar el resultado haciendo directamente la operación en forma rectangular .

9. $(1+j)\cdot(1-\sqrt{3}\cdot j)$

10. $(-\sqrt{3}-j)\cdot(-1-j)$

11. $(-\sqrt{3}-j)\cdot(1-j)\cdot(1+\sqrt{3}\cdot j)$

12. $(\sqrt{3}-j)\cdot(1+j)\cdot(-1+\sqrt{3}\cdot j)$

13. $(-1-j)^5$

14. $\dfrac{1+\sqrt{3}\cdot j}{\sqrt{3}+j}$

15. $\dfrac{(1+\sqrt{3}\cdot j)\cdot(\sqrt{3}+j)}{1+j}$

16. $\dfrac{(-1+\sqrt{3}\cdot j)\cdot j}{1+\sqrt{3}\cdot j}$

17. $\dfrac{-\sqrt{3}+j}{(1+\sqrt{3}\cdot j)\cdot(\sqrt{3}+j)}$

18. $\dfrac{-1-j}{(1+\sqrt{3}\cdot j)\cdot(1-\sqrt{3}\cdot j)}$

<u>*Respuestas a los Ejercicios 2.1*</u>

1. $1\angle 60^{o} = \dfrac{1}{2}+j\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. $2\angle 45^{o} = \sqrt{2}\cdot(1+j)$

3. $10\angle 120^{o} = 5\cdot\left(-\dfrac{1}{2}+j\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $12\angle 30^{o} = 6\cdot(\sqrt{3}+j)$

5. $3\angle 30^{o} = 3\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+j\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

6. $3\angle -30^{o} = 3\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-j\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

7. $2\angle 180^{o} = -2$

8. $8\angle -30^{o} = 4\cdot(\sqrt{3}-j)$

9. $2\cdot\sqrt{2}\angle 345^{o}$

10. $2\cdot\sqrt{2}\angle 75^{o}$

11. $4\cdot\sqrt{2}\angle 225^{o}$

12. $4\cdot\sqrt{2}\angle 135^{o}$

13. $4\cdot\sqrt{2}\angle 45^{o}$

14. $1\angle 30^{o}$

15. $2\cdot\sqrt{2}\angle 45^{o}$

16. $1\angle 150^{o}$

17. $\dfrac{1}{2}\angle 60^{o}$

18. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\angle 225^{o}$

2.8 *La fórmula de De Moivre* .

Cuando dos números complejos escritos en forma polar se multiplican, sus argumentos se suman y se multiplican sus módulos.
Consideremos ahora el producto repetido de un número complejo por si mismo, es decir sus potencias enteras positivas . Sea el número complejo $z = |z| \angle \theta$, entonces . . .

$$z^2 = z \cdot z = (|z| \angle \theta)(|z| \angle \theta)$$

$$= |z| \cdot |z| \angle (\theta + \theta)$$

$$= (|z|)^2 \angle 2 \cdot \theta \qquad \textit{(por la regla de multiplicación en forma polar)}$$

de manera similar. . .

$$z^3 = z^2 \cdot z = ((|z|)^2 \angle 2 \cdot \theta)(|z| \angle \theta) \qquad \textit{(Usando el resultado anterior)}$$

$$= (|z|)^2 \cdot |z| \angle (2 \cdot \theta + \theta)$$

$$= (|z|)^3 \angle 3 \cdot \theta$$

y también . . .

$$z^4 = z^3 \cdot z = ((|z|)^3 \angle 3 \cdot \theta)(|z| \angle \theta) \qquad \textit{(Usando el resultado anterior)}$$

$$= (|z|)^3 \cdot |z| \angle (3 \cdot \theta + \theta)$$

$$= (|z|)^4 \angle 4 \cdot \theta$$

De éstos resultados, es fácil inducir que *la potencia n-ésima* de un número complejo está dada por la expresión . . .

$$z^n = (|z|)^n \angle n \cdot \theta$$

$$= (|z|)^n \cdot (\cos(n \cdot \theta) + j \cdot \operatorname{sen}(n \cdot \theta)) \qquad (2.18)$$

La potencia n-ésima de un número complejo z *, es otro número complejo cuyo módulo es el módulo de* z ***elevado a la potencia*** n *y cuyo argumento es el argumento* θ *de* z ***multiplicado por*** n

Este resultado se conoce como la *fórmula de De Moivre* y sirve, entre otras cosas, para calcular las raíces de un número complejo ó para obtener algunas identidades trigonométricas para el seno ó el coseno de un múltiplo entero de un ángulo $(n\theta)$, en función del seno y el coseno para ese ángulo θ.

Asi por ejemplo, si

$$z = |z|\cdot(\cos(\theta) + j\cdot sen(\theta))$$

su cuadrado es . . .

$$z^2 = \left[|z|\cdot(\cos(\theta) + j\cdot sen(\theta))\right]^2$$

$$= (|z|)^2\cdot\left[\cos^2\cdot(\theta) + 2\cdot j\cdot\cos(\theta)\cdot sen(\theta) - sen^2\cdot(\theta)\right]$$

Pero por otra parte, en la fórmula de *De Moivre* con $n = 2$ se obtiene :

$$z^2 = (|z|)^2 \angle 2\cdot\theta$$

$$= (|z|)^2\cdot(\cos(2\cdot\theta) + j\cdot sen(2\cdot\theta))$$

Éstas dos expresiones complejas para z^2 deben ser iguales, es decir sus partes reales y sus partes imaginarias deben ser iguales entre sí.

Igualando las partes reales queda . . .

$$(|z|)^2\cdot\left[\cos^2\cdot(\theta) - sen^2\cdot(\theta)\right] = (|z|)^2\cdot\cos(2\cdot\theta)$$

es decir $\cos(2\cdot\theta) = \cos^2\cdot(\theta) - sen^2\cdot(\theta)$, que es una identidad trigonométrica.

Igualando las partes imaginarias queda . . .

$$(|z|)^2\cdot 2\cdot\cos(\theta)\cdot sen(\theta) = (|z|)^2\cdot sen(2\cdot\theta)$$

es decir $sen(2\cdot\theta) = 2\cdot\cos(\theta)\cdot sen(\theta)$, que es otra identidad trigonométrica para el doble de un ángulo.

De manera semejante. . .

$$z^3 = \left[|z|\cdot(\cos(\theta) + j\cdot sen(\theta))\right]^3$$

$$= (|z|)^3\cdot\left(\cos(\theta)^3 + 3\cdot j\cdot\cos(\theta)^2\cdot sen(\theta) - 3\cdot\cos(\theta)\cdot sen(\theta)^2 - j\cdot sen(\theta)^3\right)$$

y con $n = 3$ en la fórmula de *De Moivre* , se obtiene :

$$z^3 = (|z|)^3 \angle 3\cdot\theta = (|z|)^3\cdot(\cos(3\cdot\theta) + j\cdot sen(3\cdot\theta))$$

Igualando ambas expresiones para z^3 y comparando sus partes reales e imaginarias, se obtiene que :

$$\cos(3\cdot\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cdot\cos(\theta)\cdot\text{sen}^2(\theta)$$
$$\text{sen}(3\cdot\theta) = 3\cdot\cos^2(\theta) - \text{sen}^3(\theta)$$

dos identidades trigonométricas muy útiles para el seno y el cosenode un ángulo triple .

Tomado otros valores mayores para n en la fórnula de *De Moivre* y siguiendo un procedimiento similar al mostrado en los ejemplos anteriores, se pueden deducir más identidades trigonométricas para los múltiplos enteros de un ángulo .

2.9 ***Raices de números complejos*** .

Otra aplicacion de la fórmula de *De Moivre* es el cálculo de *las n raíces n-ésimas* de un número complejo, que en general, también serán números complejos .

Consideremos el número :

$$z = |z|\cdot(\cos(\theta) + \text{j}\cdot\text{sen}(\theta))$$

y supongamos que una de sus raices *n*-ésimas es el número complejo :

$$w = |w|\cdot(\cos(\phi) + \text{j}\cdot\text{sen}(\phi))$$

lo cual significa que $w^n = z$ es decir . . .

$$[|w|\cdot(\cos(\phi) + \text{j}\cdot\text{sen}(\phi))]^n = |z|\cdot(\cos(\theta) + \text{j}\cdot\text{sen}(\theta))$$

y por la fórmula de *De Moivre*. . .

$$(|w|)^n\cdot(\cos(n\cdot\phi) + \text{j}\cdot\text{sen}(n\cdot\phi)) = |z|\cdot(\cos(\theta) + \text{j}\cdot\text{sen}(\theta))$$

que se puede escribir en notación abreviada como . . .

$$(|w|)^n \angle\, n\cdot\phi = |z| \angle\, \theta$$

Estos dos números complejos serán iguales entre si *solamente cuando sus módulos sean iguales y sus argumentos difieran a lo más en un múltiplo entero de 360º (2π radianes)* .

Esto significa que $(|w|)^n = |z|$ y $n\cdot\phi = \theta + (2\cdot\pi)\cdot k$ donde k es un número entero (positivo o negativo).

En consecuencia, el módulo y el argumento de una raiz *n-ésim*a del número complejo z tienen la forma:

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}$$

(El módulo de la raíz n-ésima de z es igual a la raíz n-ésima del módulo de z)

$$\phi = \frac{\theta + (2\cdot\pi)\cdot k}{n}$$

(El argumento de la raíz n-ésima de z es igual a la n-ésima parte de la suma del argumento de z y un múltiplo entero de 360º).

Por otra parte, debido a que las funciones trigonométricas seno y coseno que determinan la forma polar de un número complejo, ***son periódicas*** *(su periodo es 2π)* , resulta que las raíces de z se repiten si $k \geq n$ puesto que el ángulo ϕ se incrementa precisamente en un múltiplo entero de $2\cdot\pi$ cuando $k = n$.
Por ejemplo si k toma el valor $n+3$, entonces el argumento de la raiz sería . . .

$$\phi = \frac{\theta + (2\cdot\pi)\cdot(n+3)}{n} = \left[\frac{\theta + (2\cdot\pi)\cdot 3}{n}\right] + \left(\frac{2\cdot\pi\cdot n}{n}\right) = \left[\frac{\theta + 3\cdot(2\cdot\pi)}{n}\right] + 2\cdot\pi$$

el mismo que el obtenido con $k = 3$.

Por lo tanto, *k está limitado a los n valores posibles* :

$$k = 0\,,\ 1,\ 2\ ,\ 3, \ldots, (n-1)$$

y para cada uno de ellos se obtendrá una de las raices *n*-ésimas de z .

En resumen, la *n*-ésima raíz de un número complejo z escrito en forma polar, es otro número complejo w dado por :

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\cdot\left(cos\left(\frac{\theta + 2\cdot\pi\cdot k}{n}\right) + j\cdot sen\left(\frac{\theta + 2\cdot\pi\cdot k}{n}\right)\right)$$

ó en forma polar. . .

$$w = \sqrt[n]{|z|}\ \angle\left(\frac{\theta + 2\cdot\pi\cdot k}{n}\right) \qquad (2.19)$$

donde . . . la primera raiz se obtiene haciendo $k = 0$ y es : $w_0 = \sqrt[n]{|z|}\ \angle\left(\frac{\theta + 0}{n}\right)$

la segunda raiz se obtiene haciendo $k = 1$ y es : $w_1 = \sqrt[n]{|z|}\ \angle\left(\frac{\theta + 2\cdot\pi}{n}\right)$

la tercera raiz se obtiene haciendo $k = 2$ y es : $w_2 = \sqrt[n]{|z|} \angle \left(\frac{\theta + 4\cdot\pi}{n}\right)$

la cuarta raiz se obtiene haciendo $k = 3$ y es : $w_3 = \sqrt[n]{|z|} \angle \left(\frac{\theta + 6\cdot\pi}{n}\right)$

etc. etc.

Ejemplo 10. Calcular las raíces cúbicas de -1 .

Solución :

a) Primero debemos transformar *a la forma polar* el número $z = (-1) = (-1 + j\cdot 0)$:

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$$

$$\theta = arg(z) = arctan\left(\frac{0}{-1}\right) = \pi = 180°$$

Asi que la forma polar de -1 es : $z = 1 \angle 180°$ ó $z = 1 \angle \pi$.

Aplicando ahora (2.19) con $|z| = 1$ y para $n = 3$, se obtiene . . .

$$w = \sqrt[3]{(-1)} = \sqrt[3]{1}\cdot\left(cos\left(\frac{\theta + 2\cdot\pi\cdot k}{3}\right) + j\cdot sen\left(\frac{\theta + 2\cdot\pi\cdot k}{3}\right)\right) \quad ; \quad k = 0, 1, 2$$

con $k = 0$ queda:

$$w_0 = 1\cdot\left[cos\left[\frac{\pi + 2\cdot\pi\cdot(0)}{3}\right] + j\cdot sen\left[\frac{\pi + 2\cdot\pi\cdot(0)}{3}\right]\right]$$

$$= cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + j\cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \angle 60°$$

$$= cos(60°) + j\cdot sen(60°)$$

$$= \frac{1}{2} + j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

con $k = 1$ queda:

$$w_1 = 1\cdot\left[\cos\left[\frac{\pi + 2\cdot\pi\cdot(1)}{3}\right] + j\cdot sen\left[\frac{\pi + 2\cdot\pi\cdot(1)}{3}\right]\right]$$

$$= \cos(\pi) + j\cdot sen(\pi)$$

$$= \cos(180°) + j\cdot sen(180°) \quad = \quad 1 \angle 180°$$

$$= -1 + j\cdot(0) = -1$$

y finalmente, con $k = 2$ resulta :

$$w_2 = 1\cdot\left[\cos\left[\frac{\pi + 2\cdot\pi\cdot(2)}{3}\right] + j\cdot sen\left[\frac{\pi + 2\cdot\pi\cdot(2)}{3}\right]\right]$$

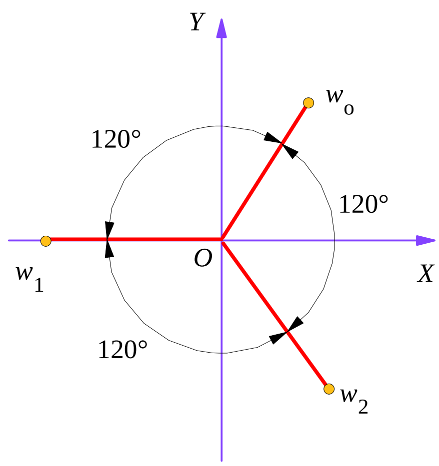
$$= \cos\left(\frac{5\cdot\pi}{3}\right) + j\cdot sen\left(\frac{5\cdot\pi}{3}\right)$$

$$= \cos(300°) + j\cdot sen(300°) \quad = \quad 1 \angle 300°$$

$$= \cos(270° + 30°) + j\cdot sen(270° + 30°) = sen(30°) + j\cdot(-\cos(30°))$$

$$= \frac{1}{2} - j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Estas tres raices están simétricamente distribuidas dividiendo al plano complejo en tres partes iguales.



Ésto no es una casualidad puesto que, de la fórmula general (2.19) para las raices n-ésimas de un número complejo, el ángulo entre dos raíces consecutivas, por ejemplo la número m y la $m + 1$ es la diferencia entre sus argumentos :

$$\Delta\theta = \left[\frac{\theta + 2\cdot\pi\cdot(m+1)}{n}\right] - \left(\frac{\theta + 2\cdot\pi\cdot m}{n}\right)$$

$$= \frac{2\cdot\pi}{n}$$

de modo que una vuelta completa queda dividida en n sectores iguales. Por esta razón, las tres raíces cúbicas de -1 están separadas entre si por un ángulo de : 360° / 3 = 120°

Las n raíces de un número complejo siempre dividirán al plano en n partes iguales y por lo tanto, el ángulo entre dos raíces consecutivas será $\dfrac{360°}{n}$.

Este aspecto geométrico puede ser últil para calcular todas las raíces de un número complejo, a partir de una de sus raíces. Esto es, si se conoce una de las raices de un número complejo, sólo tenemos que aumentar (*ó disminuir*) su argumento en múltiplos de $\dfrac{2\cdot\pi}{n}$ para encontrar sus otras raices, puesto que todas ellas tienen el mismo módulo: $\sqrt[n]{|z|}$.

Ejemplo 11. Hallar las raíces cuartas del número j .

Solución : Primero debemos transformar *a la forma polar* el número $z = (j) = (0 + j\cdot 1)$:

$$|z| = \sqrt{(0)^2 + 1^2} = 1$$

$$\theta = arg(z) = arctan\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2} = 90° \ .$$

Asi que la forma polar de j es : $z = 1 \angle 90º$ ó $z = 1 \angle \dfrac{\pi}{2}$, ó explícitamente :

$$z = 1\cdot\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + j\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

De acuerdo con la fórmula (2.19) , con $k = 0$ se obtiene una de las raíces buscadas y es :

$$w_0 = \sqrt[4]{(1)}\cdot\left[cos\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cdot\pi\cdot(0)}{4}\right] + j\cdot sen\left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cdot\pi\cdot(0)}{4}\right]\right]$$

$$= 1\cdot\left(cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + j\cdot sen\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\cdot\sqrt{2}}} + j\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\cdot\sqrt{2}}}$$

(se han usado las identidades : $cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+cos(\theta)}{2}}$ *y* $sen\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-cos(\theta)}{2}}$ *)*

$$= 0.9239 + 0.3827\cdot j$$

Las otras tres raíces de éste número se pueden obtener por lo tanto, sumando múltiplos de $\frac{360°}{4} = 90° = \frac{\pi}{2}$ al argumento de ésta primera raiz , obteniéndose asi :

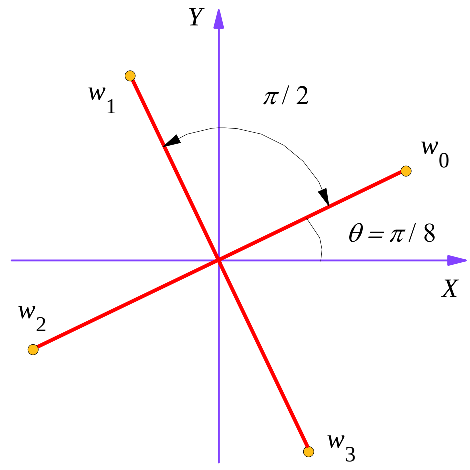
$$w_1 = 1\angle\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+j\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{8}\right)+j\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$= -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\cdot\sqrt{2}}}+j\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\cdot\sqrt{2}}}$$

y de manera similar . . .

$$w_2 = 1\angle\left(\frac{\pi}{8}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\cdot\sqrt{2}}}-j\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\cdot\sqrt{2}}}$$

$$w_3 = 1\angle\left(\frac{\pi}{8}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\cdot\sqrt{2}}}-j\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\cdot\sqrt{2}}}$$



Estas 4 raices dividen a una circunferencia de radio $r = 1$ *(el módulo de z)* , en cuatro partes iguales

Ejemplo 12. Resolver la ecuación : $z^4 - (8+\sqrt{-192}) = 0$.

Solución : Primero escribamos la ecuación en la forma :

$$z^4 = 8+\sqrt{(-1)\cdot(8)^2\cdot(3)} = 8\cdot\left(1+j\cdot\sqrt{3}\right) :$$

Ahora escribamos el número complejo de la derecha en la forma polar calculando su módulo y su argumento . . .

$$\left|8\cdot\left(1+j\cdot\sqrt{3}\right)\right| = 8\cdot\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = 16$$

$$\theta = arg\left[8\cdot\left(1+j\cdot\sqrt{3}\right)\right] = \arctan\left(\frac{8\cdot\sqrt{3}}{8}\right) = 60°$$

asi que la forma polar de este número es $16\ \angle\ 60°$ y la ecuación queda . . .

$$z^4 = 16\ \angle\ 60°$$

Por lo tanto , extrayendo la raíz cuarta en ambos miembros de ésta igualdad se obtiene :

$$z = \sqrt[4]{z^4} = \sqrt[4]{16} \angle \frac{60° + 2\cdot\pi\cdot k}{4} \qquad ; \quad k = 0,1,2,3$$

para $k = 0$ resulta . . .

$$z_0 = 2 \angle \frac{60° + 2\cdot\pi\cdot(0)}{4} = 2\cdot\left(cos\left(\frac{30°}{2}\right) + j\cdot sen\left(\frac{30°}{2}\right)\right)$$

$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + j\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$$

$$= 1.9319 + 0.5176\cdot j$$

para $k = 1$ . . .

$$z_1 = 2 \angle \frac{60° + 2\cdot\pi\cdot(1)}{4} = 2\cdot\left(cos\left(\frac{30°}{2} + 90°\right) + j\cdot sen\left(\frac{30°}{2} + 90°\right)\right)$$

$$= 2\cdot\left(-sen\left(\frac{30\cdot°}{2}\right) + j\cdot cos\left(\frac{30°}{2}\right)\right) = 2\cdot\left[-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + j\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)\right]$$

$$= -0.5176 + 1.9319\cdot j$$

para $k = 2$ . . .

$$z_2 = 2 \angle \frac{60° + 2\cdot\pi\cdot(2)}{4} = 2\cdot\left(cos\left(\frac{30°}{2} + 180°\right) + j\cdot sen\left(\frac{30°}{2} + 180°\right)\right)$$

$$= 2\cdot\left(-cos\left(\frac{30\cdot°}{2}\right) - j\cdot sen\left(\frac{30°}{2}\right)\right) = 2\cdot\left[-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - j\cdot\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)\right]$$

$$= -1.9319 - 0.5176\cdot j$$

para $k = 3$ . . .

$$z_2 = 2 \angle \frac{60° + 2\cdot\pi\cdot(3)}{4} = 2\cdot\left(cos\left(\frac{30°}{2} + 270°\right) + j\cdot sen\left(\frac{30°}{2} + 270°\right)\right)$$

$$= 2\cdot\left(sen\left(\frac{30\cdot°}{2}\right) - j\cdot cos\left(\frac{30°}{2}\right)\right) = 2\cdot\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - j\cdot\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)\right]$$

$$= 0.5176 - 1.9319\cdot j$$

(NOTA . En éste ejercicio se han usando las identidades trigonométricas :

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}} \quad y \quad sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$$

con $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $sen(30°) = \frac{1}{2}$; *asi como las identidades trigonométricas :*

$$sen(\theta+\varphi) = sen(\theta)\cdot\cos(\varphi) + \cos(\theta)\cdot sen(\varphi)$$
$$\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\cdot\cos(\varphi) - sen(\theta)\cdot sen(\varphi)$$

con $\theta = 15°$ *y* $\varphi = 90°$ *, 180º y 270º .*

cos (90º) = 0 ; sen (90º) = 1
cos (180º) = –1 ; sen (180º) = 0
cos (270º) = 0 ; sen (270º) = –1)

Por lo tanto los cuatro números complejos. . .

$$z_0 = \sqrt{2+\sqrt{3}} + j\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = 1.9319 + 0.5176\cdot j$$

$$z_1 = -\sqrt{2-\sqrt{3}} + j\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = -0.5176 + 1.9319\cdot j$$

$$z_2 = -\sqrt{2+\sqrt{3}} - j\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = -1.9319 - 0.5176\cdot j$$

$$z_4 = \sqrt{2-\sqrt{3}} - j\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = 0.5176 - 1.9319\cdot j$$

satisfacen la ecuación inicial *(son sus raíces)* .

EJERCICIOS 2.3

I Elevar a la potencia indicada cada número complejo , y expresar el resultado tanto en la forma polar como en la rectangular .

1. $(1+j)^3$
2. $(-1-j)^2$
3. $(-1+j)^5$
4. $\left(1+\sqrt{3}\cdot j\right)^3$
5. $\left(1+\sqrt{3}\cdot j\right)^4$
6. $(j)^9$
7. $\left(1-\sqrt{3}\cdot j\right)^5$.

II. Extraer las raíces indicadas :

8. raíces cúbicas de $(1+j)$
9. raíces cúbicas de -64
10. raíces cúbicas de $-\sqrt{3}+j$
11. raíces sextas de -1
12. raíces cuartas de -1

III. Resolver las ecuaciones :

13. $z^5 = j$
14. $z^4 = 16$
15. $x^3 = -27\cdot j$
16. $x^2 = 25\cdot j$

Respuestas Ejercicio 2.3

1. $2\cdot\sqrt{2}\ \angle\ 135^\circ = -2+2\cdot j$ 2. $2\ \angle\ 90^\circ = 2\cdot j$ 3. $4\cdot\sqrt{2}\ \angle\ 315^\circ = 4-4\cdot j$

4. $8\ \angle\ 180^\circ = -8$ 5. $16\ \angle\ \frac{4\cdot\pi}{3} = -8-8\cdot j\cdot\sqrt{3}$ 6. $1\ \angle\ 90^\circ = j$

7. $32\ \angle\ \frac{\pi}{3} = 16+16\cdot j\cdot\sqrt{3}$ 8. $\sqrt[6]{2}\ \angle\ \frac{\pi}{12}\ ,\ \sqrt[6]{2}\ \angle\ \frac{3\cdot\pi}{4}\ ,\ \sqrt[6]{2}\ \angle\ \frac{17\cdot\pi}{12}$

.
9.
$$4\ \angle\ \frac{\pi}{3} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}+j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$4\ \angle\ \pi = -4$$
$$4\ \angle\ \frac{5\cdot\pi}{3} = 4\cdot\left(\frac{1}{2}-j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

10
$$\sqrt[3]{2}\ \angle\ \frac{5\cdot\pi}{18} = 0.8099+0.9652\cdot j$$
$$\sqrt[3]{2}\ \angle\ \frac{17\cdot\pi}{18} = -1.2408+0.9652\cdot j$$
$$\sqrt[3]{2}\ \angle\ \frac{29\cdot\pi}{18} = 0.4309-1.1839\cdot j$$

11.
$$1\ \angle\ \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+j}{2}$$
$$1\ \angle\ \frac{\pi}{2} = j$$
$$1\ \angle\ \frac{5\cdot\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}+j}{2}$$
$$1\ \angle\ \frac{7\cdot\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}-j}{2}$$
$$1\ \angle\ \frac{3\cdot\pi}{2} = -j$$
$$1\ \angle\ \frac{11\cdot\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}-j}{2}$$

12.
$$1\ \angle\ \frac{\pi}{4} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$$
$$1\ \angle\ \frac{3\cdot\pi}{4} = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$$
$$1\ \angle\ \frac{5\cdot\pi}{4} = \frac{-1-j}{\sqrt{2}}$$
$$1\ \angle\ \frac{7\cdot\pi}{4} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$$

13.
$$1\ \angle\ \frac{\pi}{10} = 0.9511+0.309\cdot j$$
$$1\ \angle\ \frac{\pi}{2} = j$$
$$1\ \angle\ \frac{9\cdot\pi}{10} = -0.9511+0.309\cdot j$$
$$1\ \angle\ \frac{13\cdot\pi}{10} = -0.5878-0.809\cdot j$$
$$1\ \angle\ \frac{17\cdot\pi}{10} = 0.5878-0.809\cdot j$$

14.
$$2\ \angle\ 0 = 2$$
$$2\ \angle\ \frac{\pi}{2} = 2\cdot j$$
$$2\ \angle\ \pi = -2$$
$$1\ \angle\ \frac{3\cdot\pi}{2} = -2\cdot j$$

15
$$3\ \angle\ \frac{\pi}{2} = 3\cdot j$$
$$3\ \angle\ \frac{7\cdot\pi}{6} = \frac{3}{2}\cdot(-\sqrt{3}-j)$$
.
$$3\ \angle\ \frac{11\cdot\pi}{6} = \frac{3}{2}\cdot(\sqrt{3}-j)$$

Capítulo III
Polinomios

3.1 ***Definición*** .

La forma más general de una función polinomio es

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots\ldots + a_n \cdot x^n \qquad (3.1)$$

expresión en la que . . .

- x es la *variable independiente* a la cual se asignan valores numéricos
- los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 , . . . a_n , son *números constantes*
- a_n se llama *coeficiente líder*
- a_0 es *el término constante*
- n es un número *entero positivo* llamado el *grado* del polinomio. Es la máxima potencia a la que se eleva la variable independiente x .

Por ejemplo son polinomios las siguientes expresiones algebráicas :

$$\boxed{P(x) = -3 + 2 \cdot x - 3 \cdot x^2 - x^3}$$

- *grado* : $n = 3$
- *coeficientes* : $a_0 = -3$, $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = -1$
- *coeficiente líder* : $a_3 = -1$
- *término constante* : $a_0 = -3$

$$\boxed{P(x) = 4 \cdot x^5 - x^2 - 6 \cdot x + 3 \cdot x^3}$$

- *grado* : $n = 5$
- *coeficientes* : $a_0 = 0$, $a_1 = -6$, $a_2 = -1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 0$, $a_5 = 4$
- *coeficiente líder* : $a_5 = 4$
- *término constante* : $a_0 = 0$

$$\boxed{P(x) = \sqrt{2} + (3 \cdot \pi) \cdot x^4}$$

- *grado* : $n = 4$
- *coeficientes* : $a_0 = \sqrt{2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 3 \cdot \pi$

- *coeficiente líder* : $a_4 = 3 \cdot \pi$
- *término constante* : $a_0 = \sqrt{2}$

$$\boxed{P(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{x^{-2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x^3}$$

- *grado* : $n = 3$
- *coeficientes* : $a_0 = \frac{2}{3}$, $a_1 = 0$, $a_2 = -4$, $a_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
- *coeficiente líder* : $a_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
- *término constante* : $a_0 = \frac{2}{3}$

En cambio, no son polinomios los siguientes multinomios :

$2 + 4 \cdot x^{-2} + 5 \cdot x^3$: porque tiene una potencia entera pero negativa en el 2º término.

$\frac{1}{3} + 2 \cdot x - \sqrt{3 \cdot x} + x^4$: porque tiene una potencia fraccionaria en el 3er término.

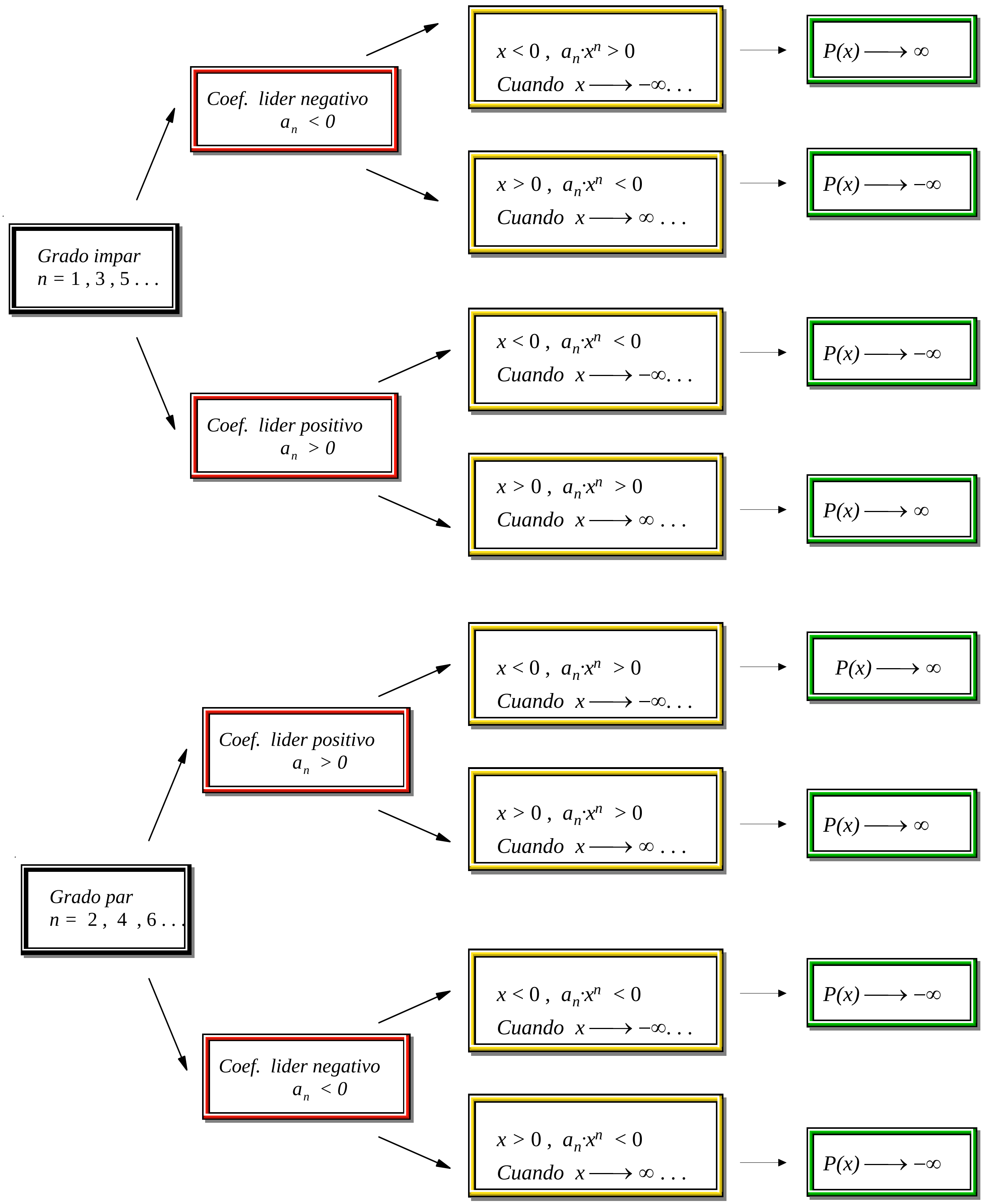
$1 + \frac{1}{x} + 4 \cdot x^2 - \frac{3}{8} \cdot \sqrt{x^3}$: tiene una potencia fraccionaria en el 4º término y una potencia entera negativa en el 2º término.

Observemos que ***un polinomio sólo tiene potencias enteras y positivas de su variable independiente*** .

3.2 ***Comportamiento extremo de un polinomio*** .

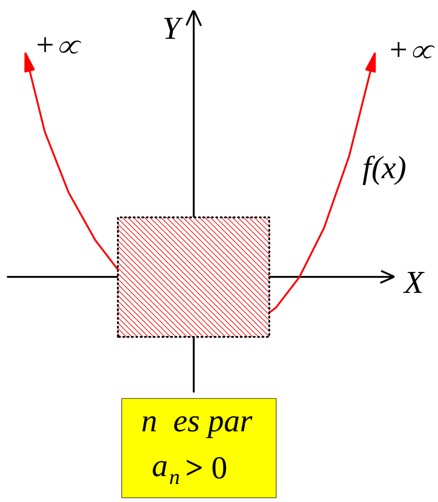
Cuando la variable independiente x de un polinomio $P(x)$ toma valores cada vez más grandes y positivos, decimos que tal variable "*tiende al infinito*" y denotamos tal comportamiento por el símbolo : $x \longrightarrow \infty$.
Simiarmente, cuando la variable independiente x de un polinomio $P(x)$ toma valores cada vez más grandes pero negativos, decimos que tal variable "*tiende a menos infinito*" y denotamos tal comportamiento con el símbolo : $x \longrightarrow -\infty$.

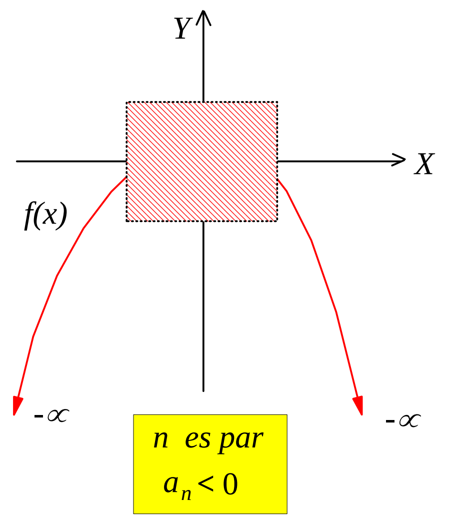
En éstos casos, *el término de mayor valor numérico en el polinomio es el término del coeficiente líder :* $a_n \cdot x^n$ debido a que en él aparece la mayor potencia de x . En otras palabras, el comportamiento extremo del polinomio está determinado por el valor del término líder cuando : $x \longrightarrow \infty$ ó cuando $x \longrightarrow -\infty$.
El signo algebráico del polinomio en los valores extremos estará determinado por el signo algebráico del coeficiente líder a_n y el grado n (par o impar) del polinomio.


Grado impar
n = 1 , 3 , 5 . . .
Coef. lider negativo
an < 0
x < 0 , an·xn > 0
Cuando x ⟶ −∞. . .
P(x) ⟶ ∞
x > 0 , an·xn < 0
Cuando x ⟶ ∞ . . .
P(x) ⟶ −∞
Coef. lider positivo
an > 0
x < 0 , an·xn < 0
Cuando x ⟶ −∞. . .
P(x) ⟶ −∞
x > 0 , an·xn > 0
Cuando x ⟶ ∞ . . .
P(x) ⟶ ∞
Grado par
n = 2 , 4 , 6 . . .
Coef. lider positivo
an > 0
x < 0 , an·xn > 0
Cuando x ⟶ −∞. . .
P(x) ⟶ ∞
x > 0 , an·xn > 0
Cuando x ⟶ ∞ . . .
P(x) ⟶ ∞
Coef. lider negativo
an < 0
x < 0 , an·xn < 0
Cuando x ⟶ −∞. . .
P(x) ⟶ −∞
x > 0 , an·xn < 0
Cuando x ⟶ ∞ . . .
P(x) ⟶ −∞

De éste modo, omitiendo los detalles que tenga la gráfica de un polinomio cerca del origen de coordenadas, (es decir para valores de x que no sean extremos) , es posible predecir como será en general la gráfica de un polinomio a la izquierda y a la derecha sobre el eje X a partir del origen, en base solamente a su grado n y el signo de su coeficiente líder a_n , como sigue :

- ***Si el grado*** n ***del polinomio es par*** , entonces x^n es un número positivo, dado que las potencias pares de números reales positivos o negativos son siempre números positivos, asi que *el signo de* $a_n \cdot x^n$ *queda determinado en este caso solo por el signo del coeficiente líder*.





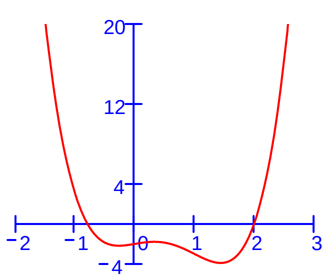
El coeficiente líder es positivo. Cuando la variable independiente x *toma valores muy grandes negativos o positivos, el polinomio tiende al infinito positivo dado que* $a_n \cdot x^n > 0$

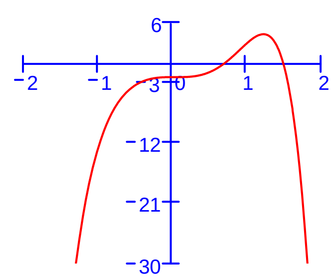
El coeficiente líder es negativo. Cuando la variable independiente x *toma valores muy grandes negativos o positivos, el polinomio tiende al infinito negativo dado que* $a_n \cdot x^n < 0$

Considérese por ejemplo las gráficas de los polinomios . . .

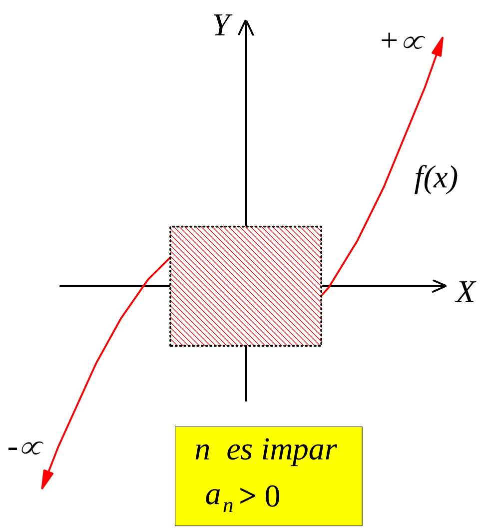
$$f(x) := 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 + x - 2$$

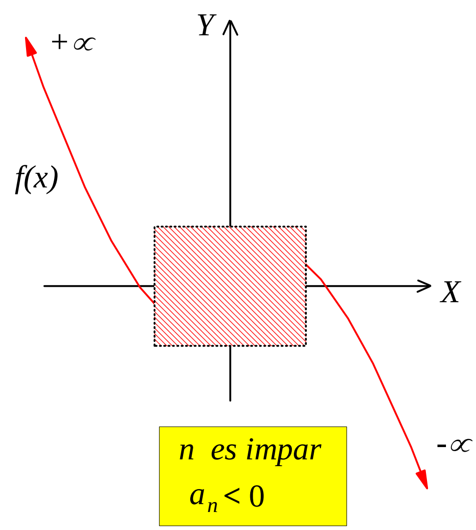
$$g(x) := -2 \cdot x^6 + 8 \cdot x^3 - x^2 - 2$$





- ***Si el grado n del polinomio es impar***, entonces x^n será un número que tiene el mismo signo que x, dado que las potencias impares de números reales positivos son números positivos y las potencias impares de números negativos son números negativos asi que *el signo de $a_n \cdot x^n$ queda determinado en este caso por la combinación de signos del coeficiente líder a_n y de x^n*



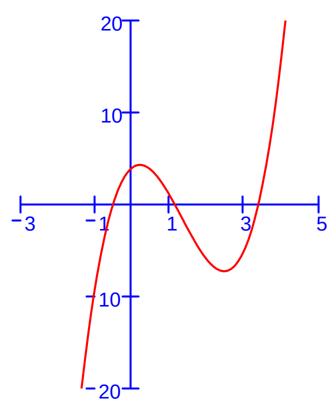


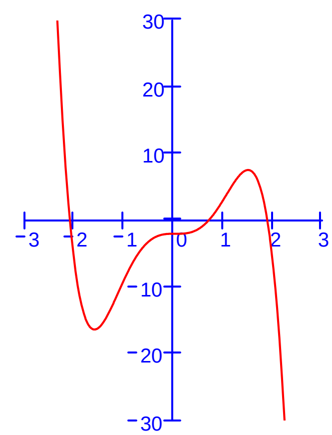
El coeficiente líder es positivo. El polinomio tiende al infinito positivo si x es un valor positivo muy grande dado que x^n es positivo y $a_n \cdot x^n > 0$ .El polinomio tiende al infinito negativo si x es un valor negativo muy grande dado que $x^n < 0$ y entonces $a_n \cdot x^n < 0$

El coeficiente líder es negativo. El polinomio tiende al infinito negativo si x es un valor positivo muy grande dado que x^n es positivo y $a_n \cdot x^n < 0$ .El polinomio tiende al infinito positivo si x es un valor negativo muy grande dado que $x^n < 0$ y entonces $a_n \cdot x^n > 0$

Considérese por ejemplo las gráficas de los polinomios . . .

$f(x) := 2 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4$ $\qquad$ $g(x) := -2 \cdot x^5 + 8 \cdot x^3 - x^2 - 2$



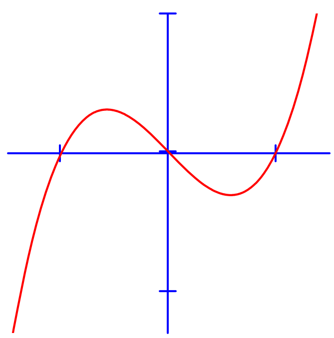


Los detalles que tenga la gráfica del polinomio en la región cercana al origen de coordenadas *(la región sombreada en los esquemas generales anteriores)* , dependen de como sean los demás términos del polinomio distintos al término líder.
De hecho, uno de los problemas más importantes del Álgebra, es determinar la forma precisa de la gráfica en esa región, asi como conocer los puntos por los que la gráfica del polinomio cruza al el eje *X*, lo que equivale a hallar las *raíces* del polinomio es decir, resolver la ecuación $f(x) = 0$.

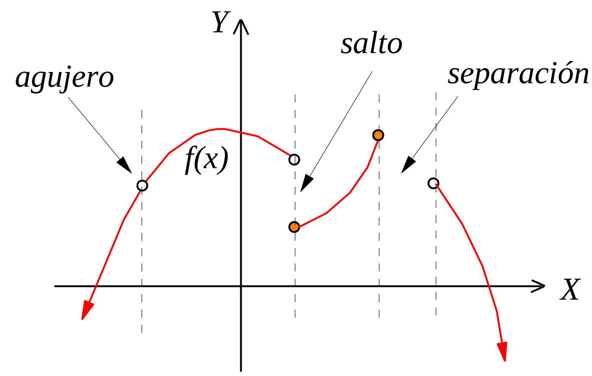
Aunque ésta sea una manera poco precisa para determinar la gráfica de un polinomio, proporciona información *inmediata* sobre la forma general de la curva. Por ejemplo, del análisis anterior se deduce que:

- *todo polinomio de grado impar necesariamente cruza al menos una vez por el eje X , lo cual significa que tiene por lo menos una raíz real*
- *un polinomio de grado par podría no tener ninguna raiz real*.

Otras características generales de los polinomios son las siguientes . . .
la gráfica de una función polinomio es ***continua*** . Esto significa que no tiene *"saltos" , " agujeros" o separaciones"* como los tiene por ejemplo una función definida por partes.

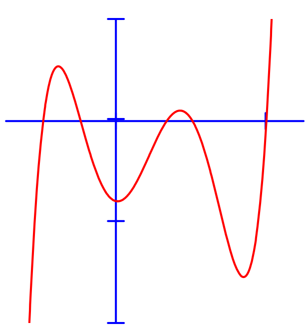


las funciones polinomiales tienen gráficas continuas

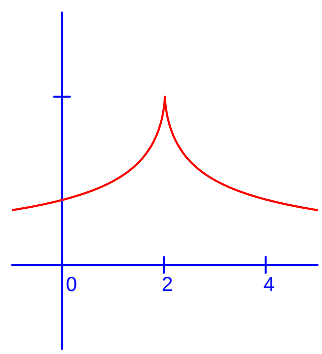


función no polinomial, definida por partes

- la gráfica de una función polinomio solo tiene cambios suaves, es decir, de un punto a otro la gráfica no puede variar bruscamente de dirección.



Las graficas de las funciones polinomiales tienen cambios suaves. No tienen "picos"



Esta función cambia en forma abrupta en $x = 2$. *No puede representar un polinomio.*

Ejemplo 1. Describir el comportamiento extremo de los siguientes polinomios:

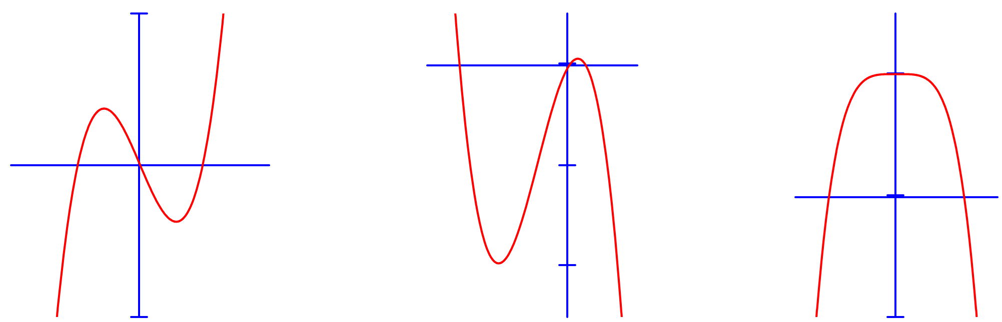
a) $P(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 5 \cdot x$ b) $f(s) = \frac{-7}{8} \cdot \left(s^3 + 5 \cdot s^2 - 7 \cdot s + 1\right)$ c) $Q(x) = 1 - x^4$

Solución :

a) como el grado es *impar* y *el coeficiente líder es positivo*, la gráfica de ése polinomio "sube" a la derecha (tiende al $+\infty$) y "baja" hacia la izquierda (tiende a $-\infty$)

b) como el grado es *impar* y *el coeficiente líder es negativo*, la gráfica de ése polinomio "sube" a la izquierda (tiende al $+\infty$) y "baja" hacia la derecha (tiende a $-\infty$) .

c) como el grado es *par* y *el coeficiente líder es negativo*, la gráfica de ése polinomio "baja" a la derecha (tiende al $-\infty$) y "baja" hacia la izquierda (tiende a $-\infty$)



(a) (b) (c)

La prueba del coeficiente líder para determinar el comportamiento extremo de la gráfica de un polinomio solo indica que la gráfica a veces sube o baja a la izquierda o la derecha; pero otros detalles más finos como intersecciones o puntos mínimos y máximos se deben determinar con otros procedimientos y dependen de como sean los términos siguientes al término con el coeficiente líder.

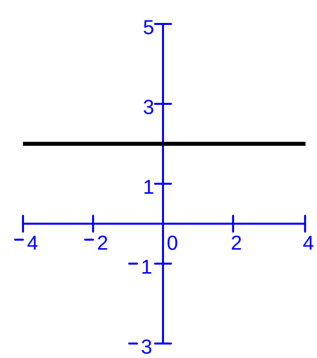
3.3 ***Primeros polinomios*** .

Consideremos ahora algunos de los primeros grados de los polinomios:

Polinomio de grado cero ó función constante .

$$P(x) = a_0$$

Puesto que para cualquier valor de x ésta función siempre tiene el mismo valor a_0, se concluye que representa una *línea recta horizontal* en el plano XY .

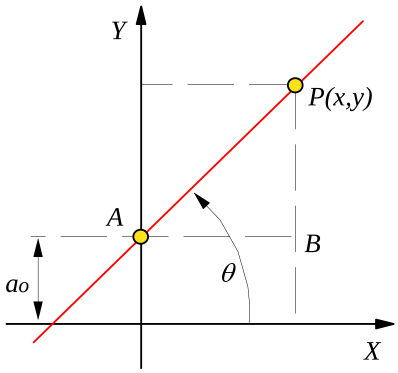


Por ejemplo en la gráfica de la derecha se muestra el polinomio $f(x) = 2$

Polinomio de primer grado ó función lineal .

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x \qquad (3.2)$$

Representa una línea recta en el plano XY.



La constante a_0 se llama *intercepto al origen* .

Es el punto A donde la recta corta al eje Y , es decir es el valor del polinomio en $x = 0$: $f(0) = a_0 + a_1 \cdot (0) = a_0$.

La constante a_1 se llama *pendiente* y representa *una medida de la inclinación de la línea recta respecto al eje horizontal* X .

Se define como . . .

$$a_1 = \frac{f(x) - a_0}{x} = \frac{BP}{AB} = \tan(\theta)$$

Puesto que $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x$ *es un polinomio de grado impar*, su gráfica tiene un comportamiento extremo tal que se extiende de $-\infty$ a ∞ si $a_1 > 0$ ó se extiende de ∞ a $-\infty$ si $a_1 < 0$.

De éste modo, en el plano XY,

las líneas rectas con pendiente positiva están inclinadas a la derecha mientras que las de pendiente negativa están inclinadas hacia la izquierda

Una recta vertical tiene una pendiente infinita puesto que $\tan(90°) = \infty$ y su ecuación es :

$$x = k$$

donde k es una constante (el intercepto de la recta sobre el eje X) .

Si $a_0 = 0$, entonces la recta queda: $P(x) = a_1 \cdot x$ y pasa por el origen de coordenadas debido a que $P(0) = a_1 \cdot (0) = 0$. Se dice en este caso que las variables x y $y = P(x)$ son ***directamente proporcionales*** .

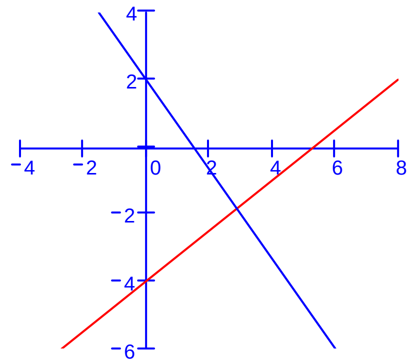
Cuando dos rectas : $y = m_1 \cdot x + b_1$, $y = m_2 \cdot x + b_2$ *son perpendiculares entre si* , sus pendientes se relacionan como :

$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \qquad (3.3)$$

Por ejemplo en las rectas :

$$y = -4 + \frac{3}{4} \cdot x \qquad ; \qquad y = 2 - \frac{4}{3} \cdot x$$

la pendiente de la primera recta es $\frac{3}{4}$, que es el inverso negativo de la pendiente de la segunda recta: $\frac{-4}{3}$, por lo cual éstas dos rectas son en efecto perpendiculares entre si como se muestra en la figura de la derecha .
Nótese además que sus interceptos al origen son -4 y 2 .



Si dos rectas son paralelas , tienen la misma pendiente, es decir : $m_1 = m_2$.

<u>Ejemplo</u> 2. Si se sabe que $P(x)$ es una función lineal y que $P(1) = 1$; $P(-2) = -8$, hallar su ecuación.

<u>Solución</u> :
A partir de la forma general : $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x$ para un polinomio de primer grado, se deben determinar los coeficientes a_1 y a_0 que cumplan con las condiciones del problema, esto es. . .

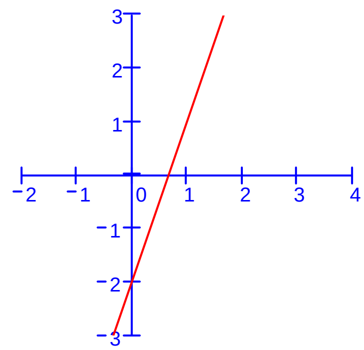
$P(1) = 1$ que en la forma general significa . . . $1 = a_0 + (1) \cdot a_1$

$P(-2) = -8$ que en la forma general significa . . . $-8 = a_0 - 2 \cdot a_1$

Estas son dos ecuaciones simultáneas en las incógnitas a_1 y a_0 .
Resolviendo este sistema , se obtiene : $a_1 = 3$ y $a_0 = -2$, por lo cual la función lineal buscada es:

$$P(x) = 3 \cdot x - 2$$

que representa una línea recta que corta al eje Y en el punto $(0,-2)$ y tiene una pendiente de 3, lo que significa que éste recta se inclina hacia la derecha.

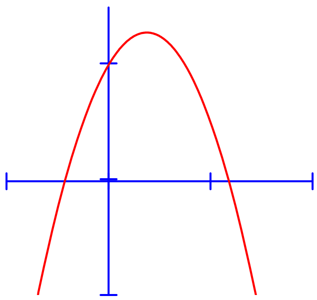


<u>*Polinomio de segundo grado ó función cuadrática*</u> .

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \qquad (3.4)$$

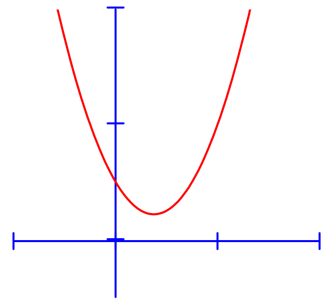
Representa una parábola vertical en el plano XY .

Éste es un polinomio de grado par, su gráfica se extiende "hacia arriba" si su coeficiente líder es positivo $a_2 > 0$ ó "hacia abajo" si tal coeficiente es negativo $a_2 < 0$, como se muestra en los siguientes ejemplos :



$f(x) = 2 + 3 \cdot x - 4 \cdot x^2$

El coeficiente líder (-4) *es negativo, la parábola se extiende desde el infinito negativo (* $-\infty$ *) a la izquierda hasta el infinito negativo (* $-\infty$ *) a la derecha.*
El vértice de la parábola representa el valor máximo de la función



$g(x) = 1 - 3 \cdot x + 4 \cdot x^2$

El coeficiente líder (4) *es positivo, la parábola se extiende desde el infinito positivo (* ∞ *) a la izquierda hasta el infinito positivo (* ∞ *) a la derecha.*
El vértice de la parábola representa el valor mínimo de la función

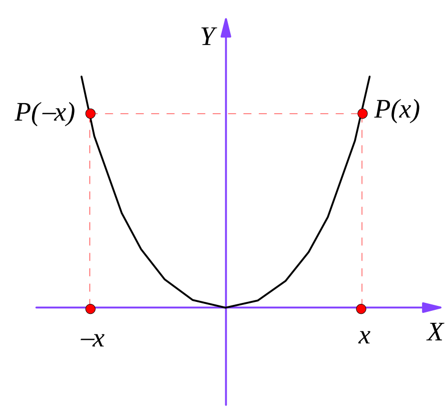
Los puntos donde la parábola corta al eje *X* son las soluciones de la ecuación :

$P(x) = 0$ es decir. . . $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0$

y se llaman *raices reales de la ecuacion cuadrática* . *(puede suceder que la curva nunca corte al eje X y en tal caso ninguna raiz será real , como se muestra en la segunda gráfica de la figura anerior)* .

La sencilla ecuación cuadrática $y = a \cdot x^2$, es la gráfica de una parábola vertical que pasa por el origen de coordenadas .
Esta curva es *simétrica respecto al eje* *Y* porque a igual distancia hacia la izquierda ó hacia la derecha del origen , el polinomio vale lo mismo, en otras palabras

$$P(-x) = a \cdot (-x)^2 = a \cdot x^2 = P(x)$$



Además el *vértice* de la parábola *(el punto donde la curva toma su valor mínimo ó su valor máximo)* se encuentra en el punto $(0, 0)$ porque . . .

$$P(0) = 0$$

Por otra parte , la ecuación $y = a \cdot x^2$ se puede convertir en la forma más general :

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

mediante una *translación* del origen de coordendas (*es decir, del vértice de la parábola*) a un punto dado (x_0, y_0), esto es . . .

$$y = a\cdot x^2 \qquad \text{se transforma en . . .} \qquad (y - y_0) = a\cdot(x - x_0)^2$$

y se obtiene :

$$y = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0$$

que representa un *desplazamiento* de la curva sobre el plano hacia :

- la derecha si la constante x_0 es positiva .
- la izquierda si la constante x_0 es negativa .
- arriba si la constante y_0 es positiva.
- abajo si la constante y_0 es negativa.

Desarrollando la ecuación anterior e igualando con $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ se obtiene :

$$a\cdot(x - x_0)^2 + y_0 = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

$$a\cdot x^2 - 2\cdot a\cdot x\cdot x_0 + a\cdot(x_0)^2 + y_0 = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

los coeficientes para x^2 , x y el término constante *deben ser los mismos en ambas expresiones*, asi que . . .

$$-2\cdot a\cdot x_0 = b$$

$$a\cdot(x_0)^2 + y_0 = c$$

cuya solución es . . . $x_0 = \dfrac{-b}{2\cdot a}$; $y_0 = \dfrac{-b^2}{4\cdot a} + c$ (3.5)

De modo que la recta vertical $x_0 = \dfrac{-b}{2\cdot a}$ es ahora *el nuevo eje de simetría* para la gráfica de la parábola, la cual además tiene *su nuevo vértice en el punto* (x_0, y_0).

Ejemplo 3. Graficar el polinomio de 2º grado : $P(x) = 3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32$

Solución :

Se trata de escribir esta función cuadrática en la forma : $P(x) = a\cdot(x - x_0)^2 + y_0$, para lo cual se completa el trinomio cuadrado perfecto de la función cuadrática dada :

1° Factorizando el coeficiente de x^2 :

$$3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32 = 3\cdot\left(x^2 - 6\cdot x\right) + 32$$

2° Sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x :

$$3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32 = 3\cdot\left[x^2 - 6\cdot x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] + 32$$

3° Los primeros tres términos del parénteis recto son el cuadrado perfecto de un binomio . . .

$$3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32 = 3\cdot\left[(x-3)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] + 32$$

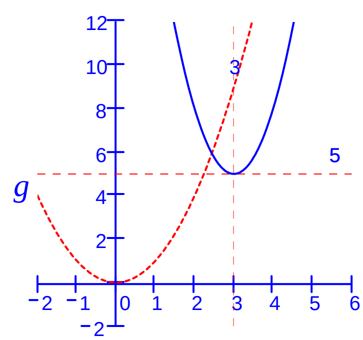
4° y finalmente :

$$3\cdot x^2 - 18\cdot x + 32 = 3\cdot(x-3)^2 - 3\cdot(3)^2 + 32$$

$$= 3\cdot(x-3)^2 + 5$$

Si ahora comparamos esta ecuación con la función básica $g(x) = 3\cdot x^2$, concluimos que la gráfica de $f(x) = 3\cdot(x-3)^2 + 5$ es idéntica a la gráfica de la parábola $g(x)$ excepto que . . .

- *está desplazada* <u>*hacia la derecha 3 unidades*</u> *porque* $a = 3$. (es decir tiene su eje de simetría en $x = 3$)
- *está desplazada hacia arriba en 5 unidades porque* $b = 5$ *(por lo tanto tiene su vértice en el punto* $(3,5)$
- *como el coeficiente líder* (3) *es positivo, se concluye también que la parábola desplazada se extiende "hacia arriba" y no corta al eje* X *en ningún punto es decir,* <u>*no tiene raices reales*</u> .
- *la gráfica de* $f(x)$ *está "alargada" en la dirección vertical, debido al valor del coeficiente líder.*



<u>Ejemplo</u> 4. Graficar el polinomio de 2º grado : $P(x) = -4\cdot x^2 - 40\cdot x - 97$

<u>Solución</u> :

Reescribamos ésta función cuadrática en la forma : $P(x) = a\cdot\left(x - x_0\right)^2 + y_0$ completando el trinomio cuadrado perfecto en la ecuación cuadrática dada :

1° Factorizando el coeficiente de x^2 :

$$-4\cdot x^2 - 40\cdot x - 97 = -4\cdot\left(x^2 + 10\cdot x\right) - 97$$

2° Sumando y restando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

$$-4\cdot x^2 - 40\cdot x - 97 = -4\cdot\left[x^2 + 10\cdot x + \left(\frac{10}{2}\right)^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2\right] - 97$$

3° Los primeros tres términos del parénteis recto son el cuadrado perfecto de un binomio . . .

$$-4\cdot x^2 - 40\cdot x - 97 = -4\cdot\left[(x+5)^2 - (5)^2\right] - 97$$

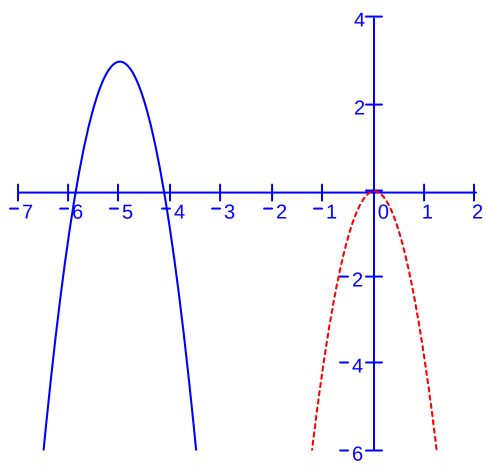
4° y finalmente :

$$-4\cdot x^2 - 40\cdot x - 97 = -4\cdot(x+5)^2 + 4\cdot(25) - 97$$

$$= -4\cdot[x - (-5)]^2 + 3$$

Si ahora comparamos esta ecuación con la función básica $g(x) = -4\cdot x^2$, concluimos que la gráfica de $f(x) = -4\cdot(x+5)^2 + 3$ es idéntica a la gráfica de la parábola $g(x)$ excepto que . . .

- *se extiende hacia abajo, porque el coeficiente líder es negativo:* $a_n = -4$
- tiene su *eje de simetría* en $x = -5$, la parábola está desplazada *hacia la izquierda* porque $x_0 = -5$.
- tiene su vértice en el punto $(-5, 3)$, porque *la parábola está desplazada hacia arriba* $y_0 = 3$.
- La parábola desplazada *corta al eje X en dos puntos* es decir, tiene dos raices reales.



Ejemplo 5. Si $P(x)$ es una función cuadrática y se sabe además que $P(0) = 9$, $P(-1) = 0$ y $P(-2) = -3$, hallar su ecuación .

Solución :

El problema consiste en determinar los coeficientes a_0, a_1 y a_2 en la expresión general para un polinomio de grado dos $P(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2$.

Al substituir los valores conocidos para x y $P(x)$, se tiene que . . .

$P(0) = 9$ implica que : $a_0 + a_1 \cdot (0) + a_2 \cdot (0)^2 = 9$

$P(-1) = 0$ implica que : $a_0 + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 = 0$

$P(-2) = -3$ implica que : $a_0 + a_1 \cdot (-2) + a_2 \cdot (-2)^2 = -3$

obteniéndose asi el sistema de ecuaciones lineales simultáneas :

$a_0 + 0 + 0 = 9$ (I)

$a_0 - a_1 + a_2 = 0$ (II)

$a_0 - 2 \cdot a_1 + 4 \cdot a_2 = -3$ (III)

que tiene como solución : $a_0 = 9$, $a_1 = 12$ y $a_2 = 3$.

Por lo tanto, la ecuación buscada es :

$$P(x) = 9 + 12 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

que podemos reescribir completando su trinomio cuadrado perfecto, en la forma :

$$P(x) = 3 \cdot (x + 2)^2 - 3$$

ó bién . . .

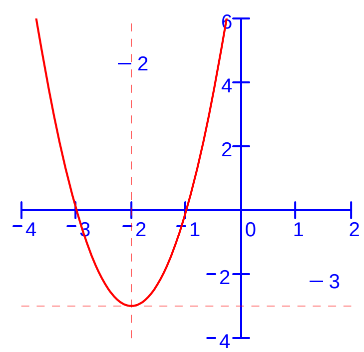
$$y - (-3) = 3 \cdot (x + 2)$$

que al ser comparada con la forma general $\left(y - y_0\right) = a \cdot \left(x - x_0\right)^2$ se concluye que la gráfica de $P(x)$ es idéntica a la gráfica de la parábola $y = 3 \cdot x^2$ excepto que está desplazada en . . .

$x_0 = -2$ unidades hacia la izquierda

$y_0 = -3$ unidades hacia abajo

como se muestra en la gráfica de la derecha



Ejemplo 6. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por $(-1, -4)$ y tiene su vértice en $(1, 8)$..

Solución :

El eje de simetria de la parábola $P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$, es la recta vertical $x = x_0$ que pasa además por el vértice : $\left(x_0, y_0\right)$.

Pero además, la ecuación general de una parábola que tiene su vértice vértice en $\left(x_0 , y_0\right)$ es :

$$y = a\cdot\left(x - x_0\right)^2 + y_0$$

donde a es una constante.

Por lo tanto, si el vértice es el punto $(1 , 8)$ entonces . . . $y = a\cdot(x - 1)^2 + 8$.

Debido además a que la parábola pasa por el punto $(-1 , -4)$, éste punto debe satisfacer a la ecuación de la parábola es decir :

$$-4 = a\cdot[(-1) - 1]^2 + 8$$

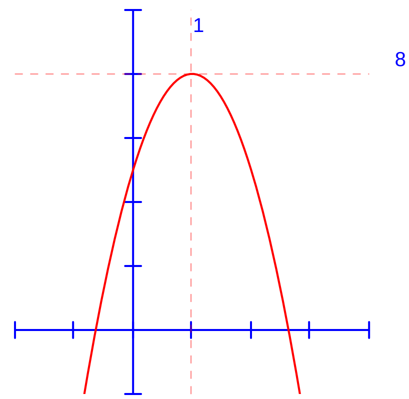
de donde se obtiene que $a = -3$ y por lo tanto, la ecuación buscada es . . .

$$y = -3\cdot(x - 1)^2 + 8$$

la cual representa la curva parabólica $y = -3\cdot x^2$ sólo que desplazada :

$x_0 = 1$ unidad *(hacia la derecha)*

$y_0 = 8$ unidades *(hacia arriba)* .



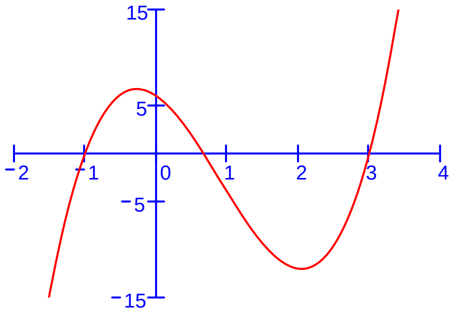
Polinomio de tercer grado ó función cúbica .

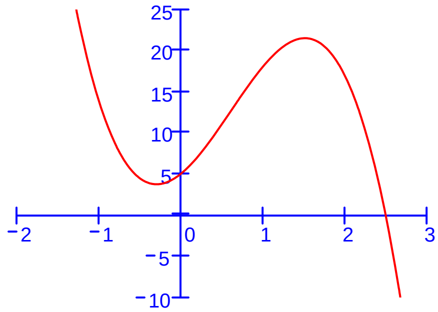
$$P(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + a_3\cdot x^3 \qquad (3.6)$$

llamado también *parábola cúbica* .
Éste es un polinomio de grado impar, lo cual significa que su comportamiento extremo y su gráfica se extienden desde $-\infty$ a la izquierda hasta ∞ a la derecha si $a_3 > 0$, ó desde ∞ hasta $-\infty$ si $a_3 < 0$.

También por ser de grado impar, $P(x)$ tiene *por lo menos una raiz real* porque su gráfica cruza el eje X al menos una vez es decir, la ecuación $P(x) = 0$ tiene en éste caso, al menos una solución en los números reales

Ejemplo 7. Consideremos las gráficas de los polinomios $P(x)_1 = 3\cdot x^3 - 8\cdot x^2 - 5\cdot x + 6$ y $P(x)_2 = 11\cdot x^2 + 8\cdot x + 5 - 6\cdot x^3$ que se muestran enseguida . . .





Tiene 3 raices reales y como el coeficiente líder es positivo, su gráfica se extiende desde $-\infty$ a la izquierda hasta $+\infty$ a la derecha)

Tiene una sola raiz real , y como el coeficiente líder es negativo su gráfica se extiende desde $+\infty$ a la izquierda hasta $-\infty$ a la derecha)

EJERCICIO 3.1

I . Determinar el comportamiento extremo de los polinomios en los ejercicios 1 a 8 .

1. $P(x) = -5\cdot x^3 + 3\cdot x^2 - 1$
2. $P(x) = -4\cdot x^6 + 2\cdot x^4 + 3\cdot x + 2$
3. $P(x) = 3\cdot x^4 - 4\cdot x^3 + 2\cdot x^2 - 5\cdot x + 1$
4. $P(x) = 2\cdot x^5 + x^4 + 4\cdot x^3 - 5\cdot x^2 - x + 3$
5. $P(x) = x^7 + 3$
6. $P(x) = -x^8 - 2$
7. $P(x) = x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot x^4 + 4$
8. $P(x) = 6\cdot x^3 + x^2 + 4\cdot x^4 + 2\cdot x + 1$

II. Graficar los polinomios dados en los ejercicios 9 a 20 .

9. $P(x) = -4$
10. $P(x) = 3$
11. $P(x) = -3\cdot x + 1$
12. $P(x) = -4\cdot x - 3$
13. $P(x) = -\left(\frac{2}{3}\right)\cdot x + \frac{5}{2}$
14. $P(x) = -\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\cdot x$
15. $P(x) = -3\cdot x^2 + 1$
16. $P(x) = 2\cdot x^2 - 3$
17. $P(x) = 4\cdot x^2 - 9\cdot x + 5$
18. $P(x) = -3\cdot x^2 + 7\cdot x - 1$
19. $P(x) = 5\cdot x^2 + 2\cdot x + 2$
20. $P(x) = -4\cdot x^2 + 5\cdot x - 6$

III. Determinar la expresión algebráica del polinomio de 2° grado del cual se conocen los valores idicados.

21. $P(-1) = -2,\ P(0) = 3,\ P(1) = -2$

22. $P(-2) = -20,\ P(0) = -2,\ P(1) = -2$

23 $P(-2) = 7,\ P(1) = 2,\ P(3) = 12$

24. $P(-2) = 9,\ P(-1) = 15,\ P(1) = 3$

25. $P(-1) = \frac{19}{6},\ P(-2) = \frac{14}{3},\ P(0) = \frac{2}{3}$

26. $P(0) = 1,\ P(1) = \frac{13}{12},\ P(-2) = \frac{16}{3}$

27. $P(0) = \frac{1}{2},\ P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3},\ P\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{11}{6}$

28. $P(0) = \frac{-5}{2},\ P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-5}{2},\ P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-7}{3}$

IV En los ejercicios 29 a 34 , hallar la ecuación cuadrática que pasa por el punto A y tiene su vértice en el punto B .

29. $A(1,2)$, $B(-3,0)$

30. $A(0,-1)$, $B(4,1)$

31. $A(-3,1)$, $B\left(2,\frac{1}{2}\right)$

32. $A(5,-2)$, $B\left(\frac{4}{3},-1\right)$

33. $A\left(-\sqrt{2},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $B(1,0)$

34. $A\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},1\right)$, $B\left(\frac{-2}{\sqrt{3}},\frac{1}{2}\right)$

Respuestas 3.1

I .

1. $P(x) \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow -\infty$, $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow \infty$.

2. $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow -\infty$, $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow \infty$.

3. $P(x) \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow -\infty$, $P(x) \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow \infty$.

4. $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow -\infty$, $P(x) \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow \infty$.

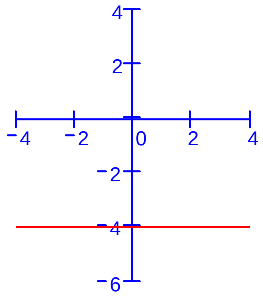
5. $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow -\infty$, $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow \infty$.

6. $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow -\infty$, $P(x) \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow \infty$.

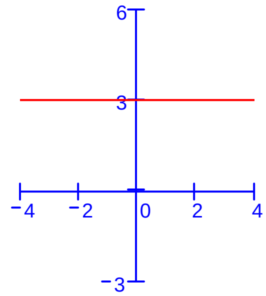
7. $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow -\infty$, $P(x) \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow \infty$.

8. $P(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \longrightarrow -\infty$, $P(x) \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow \infty$.

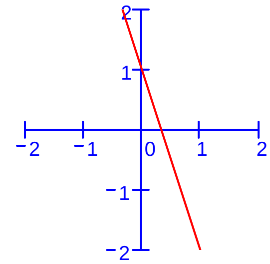
9.



10.

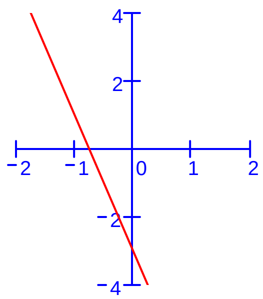


11.



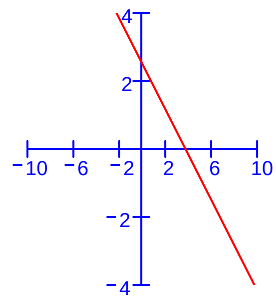
interceptos : $x = 1/3$, $y = 1$

12.



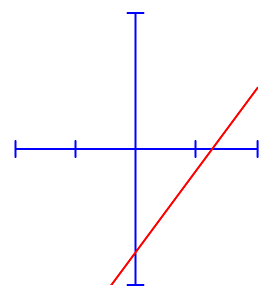
interceptos : $x = -3/4$, $y = -3$

13.



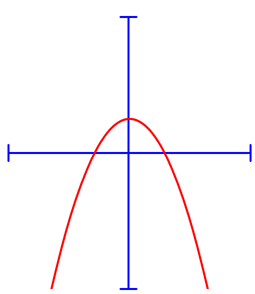
interceptos : $x = 5/2$, $y = 15/4$

14.



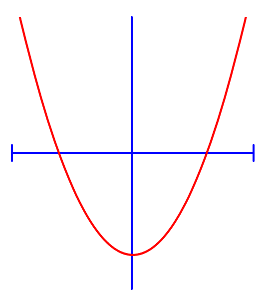
interceptos : $x = 5/4$, $y = -3/4$

15.



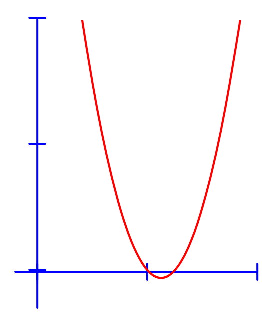
eje $x = 0$
vértice : $(0, 1)$

16.



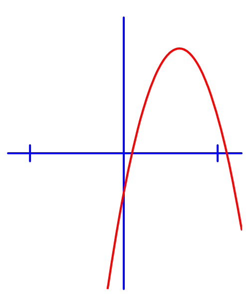
eje $x = 0$
vértice : $(0, -3)$

17.



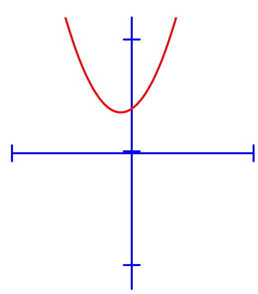
eje $x = 9/8$
vértice : $(9/8, -1/16)$

18.



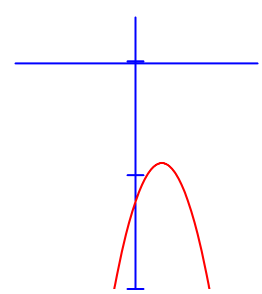
eje $x = 7/6$,
vértice : $(7/6, 37/12)$

19.



eje $x = -1/5$,
vértice : $(-1/5, 9/5)$

20.



eje $x = 5/8$,
vértice : $(5/8, -71/16)$

III.

21. $P(x) = -5\cdot x^2 + 3$

22. $P(x) = -3\cdot x^2 + 3\cdot x - 2$

23 $P(x) = \frac{4}{3}\cdot x^2 - \frac{1}{3}\cdot x + 1$

24. $P(x) = -4\cdot x^2 - 6\cdot x + 13$

25 . $P(x) = \frac{-1}{2}\cdot x^2 - 3\cdot x + \frac{2}{3}$

26. $P(x) = \frac{3}{4}\cdot x^2 - \frac{2}{3}\cdot x + 1$

27 . $P(x) = 2\cdot x^2 + \frac{2}{3}\cdot x + \frac{1}{2}$

28. $P(x) = -3\cdot x^2 + \frac{3}{2}\cdot x - \frac{5}{2}$

29. $P(x) = \frac{1}{8}\cdot (x+3)^2$

30. $P(x) = -\left(\frac{1}{8}\right)\cdot (x-4)^2 + 1$

31 . $P(x) = \frac{1}{50}\cdot (x-2)^2 + \frac{1}{2}$

32. $P(x) = -\frac{9}{121}\cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - 1$

33 . $P(x) = \frac{2}{3\cdot\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{6}}\cdot (x-1)^2$

34. $P(x) = \frac{-3}{(-11 + 4\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2})}\cdot \left(\frac{-1}{2}\cdot x + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + \frac{1}{2}$

3.4 ***División de Polinomios*** .

De todos los ejemplos anteriores y su interpretación geométrica, se deduce que si $P(x)$ es un polinomio y el número $x = a$ es una de sus raíces, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes entre si :

- $x = a$ *es una solución de la ecuación* $P(x) = 0$, *es decir se cumple que* $P(a) = 0$.
- *el punto* $(a, 0)$ *es un intercepto de la gráfica del polinomio con el eje X .*
- $(x - a)$ *es un factor del polinomio* $P(x)$ *porque* $P(a) = 0$.

En consecuencia, encontrar una raíz o cero de un polinomio equivale a determinar un factor lineal $(x - a)$ para tal polinomio .
Se puede escribir por lo tanto :

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) \qquad \text{o bién} \qquad \frac{P(x)}{x - a} = Q(x)$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de grado menor en una unidad que el grado de $P(x)$.
Determinar el polinomio cociente $Q(x)$ ó el factor lineal $(x - a)$ implica necesariamente una división entre polinomios, la cual se realiza con un procedimiento similar al usado para dividir números reales

En la división de dos polinomios :

$$\boxed{\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}}$$

- $P(x)$ se llama *polinomio dividendo* .
- $D(x)$ se llama *polinomio divisor*
- $Q(x)$ se llama *polinomio cociente* y
- $R(x)$ se llama *polinomio residuo.*

Para realizar la división de dos polinomios, se aplica el siguiente ***procedimiento***, que ilustraremos con un ejemplo. . .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-12 \cdot x^2 + 13 \cdot x^3 - 6 \cdot x^5 + 7 - 8 \cdot x}{4 - 3 \cdot x + 2 \cdot x^3}$$

- *Se ordenan los polinomios del numerador y del denominador en potencias decrecientes de la misma variable (Se insertan con coeficiente cero los términos con las potencias que no apararezcan en los polinomios dados). . .*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{-6 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 13 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 7}{2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 4}$$

- *Se divide el primer término del dividendo* $P(x)$ *entre el primer término del divisor* $D(x)$, *obteniéndose así el primer término del cociente* $\frac{-6\cdot x^5}{2\cdot x^3} = -3\cdot x^2$. *Se multiplica el divisor* $D(x)$ *por este cociente parcial y el resultado de ésta muliplicación se resta al dividendo, para obtener el primer residuo parcial* $R(x)$

$$\begin{array}{rl} & \quad -3\cdot x^2 \\ 2\cdot x^3+0\cdot x^2-3\cdot x+4 & \big/ \; -6\cdot x^5+0\cdot x^4+13\cdot x^3-12\cdot x^2-8\cdot x+7 \\ & -\left(-6\cdot x^5+0\cdot x^4+9\cdot x^3-12\cdot x^2\right) \\ \hline & \qquad\qquad 4\cdot x^3+0\cdot x^2-8\cdot x+7 \end{array}$$

- *Se repite el paso anterior considerando al polinomio residuo* $R(x) = 4\cdot x^3+0\cdot x^2-8\cdot x+7$ *como el nuevo dividendo, es decir se dividen losprimeros términos:* $\frac{4\cdot x^3}{2\cdot x^3} = 2$ *y se continúa el proceso hasta que el grado del polinomio residuo obtenido al final sea menor que el grado del polinomio divisor*

$$\begin{array}{rl} & \quad -3\cdot x^2+2 \\ 2\cdot x^3+0\cdot x^2-3\cdot x+4 & \big/ \; -6\cdot x^5+0\cdot x^4+13\cdot x^3-12\cdot x^2-8\cdot x+7 \\ & -\left(-6\cdot x^5+0\cdot x^4+9\cdot x^3-12\cdot x^2\right) \\ \hline & \qquad\qquad 4\cdot x^3+0\cdot x^2-8\cdot x+7 \\ & \qquad\quad -\left(4\cdot x^3+0\cdot x^2-6\cdot x+8\right) \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\qquad -2\cdot x-1 \end{array}$$

El polinomio residuo final : $R(x) = -2\cdot x-1$ es de grado uno, que es menor que el grado del polinomio divisor, de modo y la división anterior de polinomios genera el resultado. . .

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \left(-3\cdot x^2+2\right) + \left(\frac{-2\cdot x-1}{2\cdot x^3-3\cdot x+4}\right)$$

Cuando el polinomio residuo es nulo ($R(x) = 0$), se dice que el polinomio divisor $D(x)$ y el polinomio cociente $Q(x)$, son *factores* del polinomio dividendo $P(x)$ y se escribe :

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{0}{D(x)} \qquad \text{esto es . . .} \qquad \boxed{P(x) = D(x)\cdot Q(x)} \qquad (3.7)$$

Ejemplo 8. Dividir el polinomio $P(x) = -6\cdot x^4 + 13\cdot x^3 - 20\cdot x^2 + 11\cdot x - 4$ entre el polinomio $D(x) = 2\cdot x^2 - 3\cdot x + 4$

Solución : Con ambos polinomios ya ordenados en potencias decrecientes de la literal x, el procedimiento de división se ilustra en el siguiente esquema :

Cociente $\downarrow$

$$-3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1$$

Divisor : $\longrightarrow$ $2\cdot x^2 - 3\cdot x + 4$ $\Big|$ $-6\cdot x^4 + 13\cdot x^3 - 20\cdot x^2 + 11\cdot x - 4$ $\longleftarrow$ ***Dividendo***

$$-\left(-6\cdot x^4 + 9\cdot x^3 - 12\cdot x^2\right)$$

1^er^ residuo parcial : $\longrightarrow$ $4\cdot x^3 - 8\cdot x^2 + 11\cdot x - 4$

$$-\left(4\cdot x^3 - 6\cdot x^2 + 8\cdot x\right)$$

2º residuo parcial : $\longrightarrow$ $-2\cdot x^2 + 3\cdot x - 4$

$$-\left(-2\cdot x^2 + 3\cdot x - 4\right)$$

Residuo final : $\longrightarrow$ $0 + 0 + 0$

En éste ejemplo, la división es exacta (*el residuo final es cero*) $\dfrac{P(x)}{D(x)} = Q(x)$, esto significa que el polinomio divisor es un factor del polinomio dividendo, es decir $P(x) = D(x)\cdot Q(x)$ y es posible escribir . . .

$$\left[-6\cdot x^4 + 13\cdot (x)^3 - 20\cdot x^2 + 11\cdot x - 4\right] = \left(-3\cdot x^2 + 2\cdot x - 1\right)\cdot\left(2\cdot x^2 - 3\cdot x + 4\right)$$

Ejemplo 9. Dividir el polinomio : $P(x,y) = 2\cdot x^3 + 5\cdot y^2 - 4\cdot x^2\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 10\cdot x\cdot y^2 + x^2$ entre el polinomio $D(x,y) = x^2 + 5\cdot y^2 - 2\cdot x\cdot y$

Solución : En éste ejemplo, tanto el polinomio dividendo como el divisor son polinomios en dos valriables, asi que ordenándolos en potencia decrecientes de una de ellas, por ejemplo la variable x, podremos aplicar el procedimiento de la división para obtener. . .

Cociente

$\swarrow$

$$2\cdot x + 1$$

Divisor : $\longrightarrow$ $x^2 - 2\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2$ $\Big|$ $2\cdot x^3 + x^2 - 4\cdot x^2\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 10\cdot x\cdot y^2 + 5\cdot y^2$ $\longleftarrow$ ***Dividendo***

$$-\left(2\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - 4\cdot x^2\cdot y + 0\cdot x\cdot y + 10\cdot x\cdot y^2\right)$$

1er residuo parcial : $\longrightarrow$ $x^2 + 0\cdot x^2\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 0\cdot x\cdot y^2 + 5\cdot y^2$

$$-\left(x^2 + 0\cdot x^2\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 0\cdot x\cdot y^2 + 5\cdot y^2\right)$$

Residuo final : $\longrightarrow$ 0

Aqui la división también es exacta porque el residuo es cero, por lo tanto el dividendo es el producto del cociente por el divisor.

El lector puede comprobar que en efecto : $P(x) = D(x)\cdot Q(x)$ es decir:

$$2\cdot x^3 + x^2 - 4\cdot x^2\cdot y - 2\cdot x\cdot y + 10\cdot x\cdot y^2 + 5\cdot y^2 = (2\cdot x + 1)\cdot\left(x^2 - 2\cdot x\cdot y + 5\cdot y^2\right)$$

Ejemplo 10. Dividir el polinomio : $P(x) = 6\cdot x^3 + 3\cdot x^2\cdot b - 2\cdot x\cdot b^2 + 10\cdot b^3$ entre

$$D(x) = -2\cdot x^2 - 3\cdot x\cdot b + 4\cdot b^2$$

Solución : Los polinomios ya están ordenados en potencias decrecientes de la literal x asi que :

Cociente

$\swarrow$

$$-3\cdot x + 3\cdot b$$

Divisor : $\longrightarrow$ $-2\cdot x^2 - 3\cdot x\cdot b + 4\cdot b^2$ $\Big|$ $6\cdot x^3 + 3\cdot x^2\cdot b - 2\cdot x\cdot b^2 + 10\cdot b^3$ $\longleftarrow$ ***Dividendo***

$$-\left(6\cdot x^3 + 9\cdot x^2\cdot b - 12\cdot x\cdot b^2\right)$$

1er residuo parcial : $\longrightarrow$ $-6\cdot x^2\cdot b + 10\cdot x\cdot b^2 + 10\cdot b^3$

$$-\left(-6\cdot x^2\cdot b - 9\cdot x\cdot b^2 + 12\cdot b^3\right)$$

Residuo final : $\longrightarrow$ $19\cdot x\cdot b^2 - 2\cdot b^3$

Aqui la división no es exacta, el residuo no es cero, por lo tanto, el dividendo es el producto del cociente por el divisor más el residuo :

$$P(x) = D(x)\cdot Q(x) + R(x)$$

$$6\cdot x^3 + 3\cdot x^2\cdot b - 2\cdot x\cdot b^2 + 10\cdot b^3 = \left[-2\cdot x^2 - 3\cdot x\cdot b + 4\cdot\left(b^2\right)\right]\cdot(-3\cdot x + 3\cdot b) + \left(19\cdot x\cdot b^2 - 2\cdot b^3\right)$$

La división de polinomios queda entonces resumida en el siguiente *algoritmo* . . .

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN

Si $P(x)$ *y* $D(x)$ *son polinomios tales que* $D(x) \neq 0$ *y el grado de* $D(x)$ *es* ***menor ó igual*** *que el grado del polinomio* $P(x)$ *entonces existen dos polinomios* ***unicos*** $Q(x)$ *y* $R(x)$ *tales que :*

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \qquad (3.8)$$

donde el residuo $R(x)$ *de la división es tal que:*

$$grado(R(x)) < grado(D(x))$$

Cuando $R(x) = 0$ la división de polinomios queda : $\dfrac{P(x)}{D(x)} = Q(x)$ es decir $P(x) = Q(x)\cdot D(x)$, se dice entonces que *los polinomios* $Q(x)$ *y* $D(x)$ *son factores del polinomio* $P(x)$.

3.5 ***División sintética*** .

Este es un procedimiento muy rápido para realizar la división de polinomios pero que *se aplica únicamente cuando el divisor es un polinomio lineal* , es decir que tiene la forma $D(x) = x - a$.

Como se puede apreciar en los ejemplos anteriores, durante el procedimiento de división formal de polinomios, algunos coeficientes y variables se repiten varias veces. La idea de la división sintética es evitar ésta repetición con el fin de aumentar la rapidez para dividir .
Ilustremos ésta idea con un ejemplo :

1º *Consideremos la división :* $\dfrac{P(x)}{D(x)} = \dfrac{4\cdot x^3 - 19\cdot x^2 + 24\cdot x - 9}{x-3}$ *bajo el procedimiento formal para la división de polinomios :*

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad 4\cdot x^2 - 7\cdot x + 3 \\
\hline
x - 3 & \quad 4\cdot x^3 - 19\cdot x^2 + 24\cdot x - 9 \\
 & -\left(4\cdot x^3 - 12\cdot x^2\right) \\
 & \qquad\qquad -7\cdot x^2 + 24\cdot x - 9 \\
 & \qquad\quad -\left(-7\cdot x^2 + 21\cdot x\right) \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 3\cdot x - 9 \\
 & \qquad\qquad\quad -(3\cdot x - 9) \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

2º *Reteniendo solamente los coeficientes y dejando implícito el signo de los positivos queda. . .*

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & -7 & 3 & \\
\hline
1 \quad -3 & 4 & -19 & 24 & -9 \\
 & -4 & 12 & & \\
 & & -7 & 24 & -9 \\
 & & 7 & -21 & \\
 & & & 3 & -9 \\
 & & & -3 & +9 \\
 & & & & 0
\end{array}
$$

3º *Eliminando los coeficientes duplicados* .

El coeficiente 1 en el término x *del divisor es innecesario pues siempre es de la forma* $(x - a)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -7 & 3 & \\ \hline .-3 & 4 & -19 & 24 & -9 \\ & & 12 & 21 & 9 \\ \hline & & & & 0 \end{array}$$

4º *Moviendo el cociente al último renglón y cambiando el signo del divisor*, *se obtiene finalmente:*

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 4 & -19 & 24 & -9 \\ & & 12 & 21 & 9 \\ \hline & 4 & -7 & 3 & 0 \end{array}$$

De éste modo, en éste arreglo ordenado de números que hemos obtenido al final, *todos los coeficientes se obtienen por simples sumas y productos* .

1^er^ *renglón* Se forma con el término constante del divisor (*cambiado de signo*) y con los coeficientes del polinomio dividendo $P(x)$ *en el mismo orden en que aparecen las potencias decrecientes* de su variable independiente x.
Si falta alguna de éstas potencias, se escribe cero en el lugar correspondiente

3^er^ *renglón* Es la suma de los renglones primero y segundo .
Su primer elemento *siempre es el coeficiente líder* del primer renglón y a excepción del *último número, el cual representa el residuo de la división*, los demás números de éste renglón *son los coeficientes del polinomio cociente* $Q(x)$ *escritos en orden decrecientes de las potencias de la variable* x .

2º *renglón* Sus elementos *son el producto del coeficiente divisor por el coeficiente inmediato anterior en el 3^er^ renglón* .

Ejemplo 11. Dividir el polinomio : $P(x) = 3 \cdot x^5 + 9 \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 - x + 15$ entre el polinomio $D(x) = x + 3$

Solución : El divisor es lineal de la forma $(x - a) = x - (-3) = x + 3$, asi que es posible hacer la división sintética.
Además el primer renglón en ésta división está formado por el término constante del divisor: -3 y los coeficientes ordenados de $P(x)$: 3 , 9 , 0 , -2 , -1 y 15 de modo que queda:

$$\frac{P(x)}{D(x)} \quad :\longrightarrow \quad \begin{array}{r|cccccc} -3 & 3 & 9 & 0 & -2 & -1 & 15 \\ & & -3\cdot(3) & -3\cdot(0) & -3\cdot(0) & -3\cdot(-2) & -3\cdot(5) \\ \hline & 3 & 0 & 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

el último número del tercer renglón ***es el residuo*** de la división y vale cero . Esto indica que la división anterior es exacta .
Los demás números del renglón son los coeficientes ordenados del polinomio cociente, que es :

$$Q(x) = 3\cdot x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 - 2\cdot x + 5$$
$$= 3\cdot x^4 - 2\cdot x + 5$$

y como el residuo es cero, entonces $(x+3)$ es un factor de $P(x)$, es decir :

$$P(x) = Q(x)\cdot D(x)$$

$$\left(3\cdot x^5 + 9\cdot x^4 - 2\cdot x^2 - x + 15\right) = \left(3\cdot x^4 - 2\cdot x + 5\right)\cdot(x+3)$$

Ejemplo 12. Dividir el polinomio : $P(x) = 12\cdot x^4 - 8\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 9\cdot x - 7$ entre $D(x) = x + 3$

Solución : El divisor es lineal pero no tiene la forma $(x-a)$ porque el coeficiente de x no es 1 sin embargo es posible hacer todavía la división sintética si se factoriza tal coeficiente :

$$\frac{P(x)}{(3\cdot x - 2)} = \frac{P(x)}{3\cdot\left(x - \frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{P(x)}{\left(x - \frac{2}{3}\right)}$$

y ahora el divisor tiene la forma lijneal requerida $(x-a)$ para poder realizar la división sintética con $a = \frac{2}{3}$.

El primer renglón en la división sintética esterá entonces formado por el término constante $\frac{2}{3}$ y los coeficientes ordenados de $P(x)$, de modo que queda:

$$\frac{P(x)}{\left(x - \frac{2}{3}\right)} \quad :\longrightarrow \quad \begin{array}{r|ccccc} \frac{2}{3} & 12 & -8 & -9 & 9 & -7 \\ & & 12\cdot\left(\frac{2}{3}\right) & 0\cdot\left(\frac{2}{3}\right) & -9\cdot\left(\frac{2}{3}\right) & 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right) \\ \hline & 12 & 0 & -9 & 3 & -5 \end{array}$$

el último número del tercer renglón es el residuo de la división y no es cero, lo cual indica que ésta división no es exacta .

Los demás números del renglón son los coeficientes ordenados del polinomio cociente, por lo tanto por el algoritmo de la división, escribimos :

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$$\frac{P(x)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)} = \left[12\cdot x^3 - 9\cdot x + (3)\right] - \frac{5}{\left(x-\frac{2}{3}\right)}$$

y finalmente . . .

$$\frac{P(x)}{(3\cdot x-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{P(x)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\left[\left(12\cdot x^3 - 9\cdot x + 3\right) - \frac{5}{\left(x-\frac{2}{3}\right)}\right]$$

$$= \left(4\cdot x^3 - 3\cdot x + 1\right) - \frac{5}{(3\cdot x-2)}$$

3.6 ***El teorema del residuo*** **.**

TEOREMA DEL RESIDUO

Si $P(x)$ ***es un polinomio entonces el residuo de la división*** $\frac{P(x)}{(x-a)}$ ***es*** $P(a)$

DEMOSTRACIÓN : *Del algoritmo de la división se tiene que :*

$$\frac{P(x)}{x-a} = Q(x) + \frac{R(x)}{x-a}$$

y es posible escribir $P(x) = Q(x)\cdot(x-a) + R(x)$ *, de modo que evaluando ésta expresión en* $x = a$ *resulta . . .*

$$P(a) = Q(a)\cdot(a-a) + R(a)$$

$$= 0 + R(a)$$

y puesto que el grado del divisor es uno, entonces el grado del residuo es cero, es decir, es una constante. En resumen $P(a) = R = cte$ *.*

Ejemplo 13. Evaluar el polinomio : $P(x) = -2\cdot x^5 + 8\cdot x^3 - 9\cdot x^2 + 9\cdot x - 7$ en $x = -3$

Solución : Usando el teorema anterior, el residuo obtenido al dividir el polinomio entre el factor lineal $[x-(-3)] = x+3$, es precisamente el valor del polinomio evaluado en $x = -3$, esto es $P(-3)$. Por división sintética ese residuo es :

$$\frac{P(x)}{x+3} : \longrightarrow \quad \begin{array}{r|rrrrrr} -3 & -2 & 0 & 8 & -9 & 9 & -7 \\ & & 6 & -18 & 30 & -63 & 162 \\ \hline & -2 & 6 & -10 & 21 & -54 & 155 \end{array}$$

la respuesta es entonces $P(-3) = 155$.

La evaluación directa de éste polinomio en cambio, no es tan sencilla . . .

$$P(-3) = -2\cdot(-3)^5 + 8\cdot(-3)^3 - 9\cdot(-3)^2 + 9\cdot(-3) - 7$$

$$= -2\cdot(-243) + 8\cdot(-27) - 9\cdot(9) + 9\cdot(-3) - 7$$

$$= 486 - 216 - 81 - 27 - 7$$

$$= 486 - 331$$

$$= 155$$

Empleando el teorema del residuo *es posible evaluar rápidamente cualquier polinomio en cualquier punto* .

Ejemplo 14. Cuando el polinomio : $P(x) = x^3 - 2\cdot x^2 - k\cdot x + 1$ se divide por $x+3$, el residuo es -23 . Hallar el valor del coeficiente k .

Solución : Por la división sintética se tiene :

$$\frac{P(x)}{(x+3)} : \longrightarrow \quad \begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -2 & -k & 1 \\ & & -3 & 15 & -45+3\cdot k \\ \hline & 1 & -5 & 15-k & -44+3\cdot k \end{array}$$

de acuerdo al problema, el residuo $(-44+3\cdot k)$ debe valer -23 , asi que resolviendo la ecuación :

$$-44+3\cdot k = -23$$

resulta $k = 7$.

Comprobación : $P(x) = x^3 - 2\cdot x^2 - k\cdot x + 1$

$$P(-3) = (-3)^3 - 2\cdot(-3)^2 - 7\cdot(-3) + 1$$

$$= -27 - 18 + 21 + 1$$

$$= -23$$

Con éste ejercicio se ilustra que usando el teorema del residuo, *es posible ajustar uno o varios coeficientes de un polinomio para que éste tome un valor predeterminado de antemano* .

<u>*Ejemplo*</u> 15. ¿ Para qué valor de la constante k en el polinomio $P(x) = 2\cdot x^3 - 3\cdot k\cdot x^2 - 4\cdot x + 2$ se obtendrá el mismo valor cuando tal polinomio se evalúe, en $x = -1$ ó en $x = 3$? .

<u>*Solución*</u> : De acuerdo con el teorema del residuo :

$P(-1)$ es el residuo de la división $\dfrac{P(x)}{x-(-1)}$

$P(3)$ es el residuo de la división $\dfrac{P(x)}{x-3}$

como se desea que ambos residuos sean iguales, se podrá determinar el valor de k . . .

$$\frac{P(x)}{(x+1)} : \longrightarrow \quad \begin{array}{r|cccc} -1 & 2 & -3\cdot k & -4 & 2 \\ & & -2 & 2+3\cdot k & 2-3\cdot k \\ \hline & 2 & (-2-3\cdot k) & (-2+3\cdot k) & 4-3\cdot k \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{(x-3)} : \longrightarrow \quad \begin{array}{r|cccc} 3 & 2 & -3\cdot k & -4 & 2 \\ & & 6 & 18-9\cdot k & 42-27\cdot k \\ \hline & 2 & 6-3\cdot k & 14-9\cdot k & 44-27\cdot k \end{array}$$

Igualando ambos residuos : $4-3\cdot k = 44-27\cdot k$, de donde se obtiene que $k = \dfrac{5}{3}$ y entonces :

$$P(x) = 2\cdot x^3 - 4\cdot x^2 - 4\cdot x + 2$$

El lector puede comprobar por un cálculo directo que en efecto $P(-1) = -1$ y $P(3) = -1$

3.7 El teorema del factor .

TEOREMA DEL FACTOR

Un polinomio $P(x)$ ***tiene por factor a*** $(x-a)$ ***si y sólo si*** $P(a) = 0$

DEMOSTRACIÓN : *De la división de polinomios* $\dfrac{P(x)}{x-a} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{x-a}$ *se tiene que :*

$$P(x) = Q(x)\cdot(x-a) + R(x)$$

Dado que el divisor $(x-a)$ *es de grado uno , si el polinomio* $P(x)$ *es de grado* n*, entonces el polinomio cociente* $Q(x)$ *es de grado* $n-1$ *y el residuo* $R(x)$ *es de grado cero,*

Por otra parte, del teorema del residuo se sabe que $R = P(a)$ *y queda:*

$$P(x) = Q(x)\cdot(x-a) + P(a)$$

Entonces, si $P(a) = 0$*, queda* $P(x) = Q(x)\cdot(x-a)$ *de modo que* $(x-a)$ *es un factor de* $P(x)$.

Y si $(x-a)$ *es un factor de* $P(x)$ *entonces* $\dfrac{P(x)}{x-a}$ *dará como residuo cero y por el teorema del residuo se sigue que* $P(a) = 0$

Queda asi demostrado el teorema en sus dos sentidos.

Ejemplo 16. Trazar la gráfica del polinomio $P(x) = 6\cdot x^4 + 5\cdot x^3 - 123\cdot x^2 + 18\cdot x + 40$ sabiendo que $(x-4)$ y $(x+5)$ son factores de tal polinomio.

Solución : De acuerdo con el teorema del factor, $(x-4)$ será un factor del polinomio dado si $P(4) = 0$, y en efecto :

$$\frac{P(x)}{(x-4)} : \longrightarrow \quad \begin{array}{c|ccccc} 4 & 6 & 5 & -123 & 18 & 40 \\ & & 24 & 116 & -28 & -40 \\ \hline & 6 & 29 & -7 & -10 & 0 \end{array}$$

Los núneros de la tercera línea en ésta división sintética son los coeficientes del polinomio cociente y el último es el residuo, el cual es cero, asi que del teorema del residuo se sigue que en efecto $P(4) = 0$.

Entonces, es posible escribir al polinomio $P(x)$ en forma factorizada como:

$$P(x) = \left[6 \cdot x^3 + 29 \cdot x^2 - 7 \cdot x - (10)\right] \cdot (x-4)$$

Si el factor lineal $(x+5)$ es un factor de $Q(x)$, en consecuencia también lo será de $P(x)$:

$$\frac{Q(x)}{(x+5)} : \longrightarrow \quad \begin{array}{r|rrrr} -5 & 6 & 29 & -7 & -10 \\ & & -30 & 5 & 10 \\ \hline & 6 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

dado que el residuo es cero, se deduce que $Q(5) = 0$ y es posible escribir la factorización de los polinomios $Q(x)$ y $P(x)$ como :

$$Q(x) = \left(6 \cdot x^2 - x - 2\right) \cdot (x+5)$$

$$P(x) = Q(x) \cdot (x-4)$$

$$= \left(6 \cdot x^2 - x - 2\right) \cdot (x+5) \cdot (x-4)$$

el factor de 2º grado de $P(x)$ puede factorizarse a su vez en forma directa ó determinando las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente : $6 \cdot x^2 - x - 2 = 0$, quedando en todo caso:

$$6 \cdot x^2 - x - 2 = 6 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 3 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot 2 \cdot \left[x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= (3 \cdot x - 2) \cdot (2 \cdot x + 1)$$

para finalmente escribir el polinomio $P(x)$ completamente factorizado como :

$$P(x) = (3 \cdot x - 2) \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot (x+5) \cdot (x-4)$$

Las raíces de éste polinomio se obtienen resolviendo la ecuación : $P(x) = 0$,es decir . . .

$$(3 \cdot x - 2) \cdot (2 \cdot x + 1) \cdot (x+5) \cdot (x-4) = 0$$

Sin embargo, si el producto de dos ó más factores es cero, al menos uno de ellos es cero, por lo que se concluye que :

Si $(3\cdot x - 2) = 0$ entonces $x = \frac{2}{3}$

Si $(2\cdot x + 1) = 0$ entonces $x = \frac{-1}{2}$

Si $(x + 5) = 0$ entonces $x = -5$

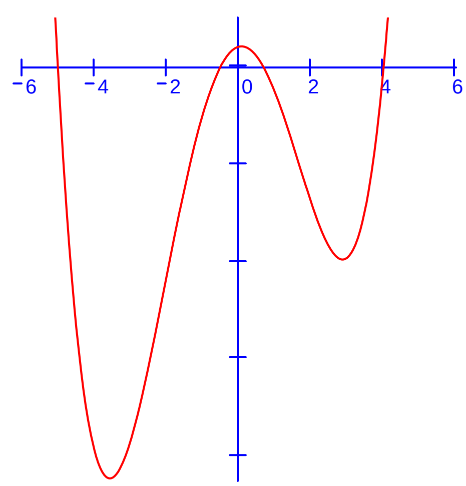
Si $(x - 4) = 0$ entonces $x = 4$

Estas raíces dividen a la recta numérica (*el eje X de un sistema de coordenadas rectangular*) en 5 intervalos. Para obtener la gráfica del polinomio debemos *investigar el signo algebráico de sus factores en todos esos intervalos* , como se muestra en la siguiente tabla .

	$(-\infty,-5)$	$\left(-5,\frac{-1}{2}\right)$	$\left(\frac{-1}{2},\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},4\right)$	$(4,\infty)$
$(x+5)$	(−)	(+)	(+)	(+)	(+)
$(2\cdot x+1)$	(−)	(−)	(+)	(+)	(+)
$(3\cdot x-2)$	(−)	(−)	(−)	(+)	(+)
$(x-4)$	(−)	(−)	(−)	(−)	(+)
$P(x) = (x + 5)(2x +1)(3x- 2)(x - 4)$	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)

(*Tómese un valor numerico arbitrario para* x *en cada uno de los intervalos y substitúyase en cada factor para determinar si tal factor es positivo ó negativo en ese intervalo*)

Entonces el polinomio $P(x)$ es positivo (*es decir, su gráfica queda por encima del eje X*) en los intervalos :



$$(-\infty,-5)\ ,\ \left(\frac{-1}{2},\frac{2}{3}\right)\ ,\ (4,\infty)$$

y es negativo (*es decir, su gráfica queda por debajo del eje X*) en los intervalos :

$$\left(-5,\frac{-1}{2}\right)\ ,\ \left(\frac{2}{3},4\right)$$

Además es un polinomio de grado par con coeficiente líder positivo, lo que implica que su gráfica se extiende desde +∞ a la izquierda hasta +∞ a la derecha .

Ejemplo 17. Para cierto polinomio $P(x)$ de tercer grado se sabe que $P(-1) = 0$, $P(1) = 0$, $P\left(\frac{-2}{3}\right) = 0$. hallar la expresión algebráica para tal polinomio .

Solución : De acuerdo con el teorema del factor . . .

si $P(-1) = 0$ entonces $P(x)$ tiene el factor : $x - (-1) = (x+1)$

si $P(1) = 0$ entonces $P(x)$ tiene el factor : $(x-1)$

si $P\left(\frac{-2}{3}\right) = 0$ entonces $P(x)$ tiene el factor : $\left[x - \left(\frac{-2}{3}\right)\right] = \left(x + \frac{2}{3}\right)$

Dado que $P(x)$ es de grado 3, sólo puede tener tres factores, por lo tanto, salvo por una constante arbitraria C , la forma general de éste polinomio tiene que ser :

$$P(x) = C\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

$$= C\cdot\left(x^3 + \frac{2}{3}\cdot x^2 - x - \frac{2}{3}\right) = \frac{C}{3}\cdot\left(3\cdot x^3 + 2\cdot x^2 - 3\cdot x - 2\right)$$

Ejemplo 18. Hallar la expresión algebráica del polinomio $P(x)$ de 4º grado que tiene las raices: $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ y los factores $\left(x+\frac{1}{2}\right)$, $(x-1)$ y además pasa por el punto (0 , −2)

Solución : Del teorema del factor se deduce que . . .

si $P(-\sqrt{2}) = 0$ entonces $x - (-\sqrt{2}) = \left(x+\sqrt{2}\right)$ es un factor de $P(x)$

si $P(\sqrt{2}) = 0$ entonces $\left(x-\sqrt{2}\right)$ es un factor de $P(x)$

Dado que $P(x)$ es de grado 4° grado sólo puede tener cuatro factores, y salvo por una constante arbitraria C , la forma general de éste polinomio tiene que ser :

$$P(x) = C\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)$$

Además, si su gráfica pasa por el punto (0 , −2) significa que $P(0) = -2$, es decir:

$$-2 = C\cdot(0+\sqrt{2})\cdot(0-\sqrt{2})\cdot\left(0+\frac{1}{2}\right)\cdot(0-1)$$

expresión de la cual se obtiene . . .

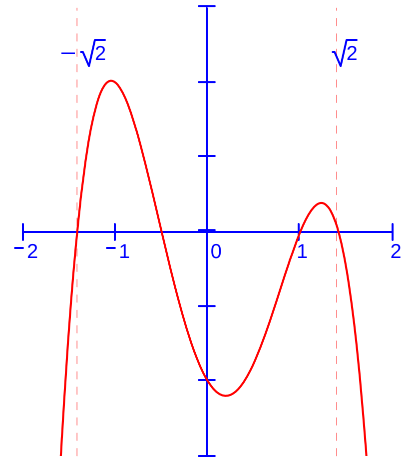
$$-2 = C\cdot(-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) \qquad \text{o} \qquad C = -2$$

De modo que el polinomio buscado es . . .

$$P(x) = -2\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)$$

$$= \left(x^2-2\right)\cdot(2\cdot x+1)\cdot(x-1)$$

$$= -2\cdot x^4 + x^3 + 5\cdot x^2 - 2\cdot x - 2$$



Este polinomio es de grado par y su coeficiente líder es negativo, lo indica que se extiende desde $-\infty$ a la izquierda hasta $-\infty$ a la derecha y tiene 4 raíces o ceros reales (*su gráfica cruza 4 veces el eje X*)

EJERCICIO 3.2

I. *Mediante la división sintética , encuentre el residuo y el cociente que se producen al dividir el primer polinomio entre el segundo en los ejercicios 1 a 18 .*

1. $x^3+5\cdot x^2-3\cdot x+1 \quad ; \quad (x+2)$
2. $2\cdot x^3+5\cdot x^2+2\cdot x-1 \quad ; \quad (x+3)$
3. $-3\cdot x^3+11\cdot x^2+3\cdot x+2 \quad ; \quad (x-4)$
4. $-2\cdot x^3+4\cdot x^2+7\cdot x-1 \quad ; \quad (x-3)$
5. $x^4+4\cdot x^3+3\cdot x^2+4\cdot x+3 \quad ; \quad x+4$
6. $3\cdot x^4+4\cdot x^3-5\cdot x^2+6\cdot x+4 \quad ; \quad x-2$
7. $x^5+3\cdot x^4-2\cdot x^3+5\cdot x^2-3\cdot x-5 \quad ; \quad x-1$
8. $-4\cdot x^5-x^4+2\cdot x^3-3\cdot x^2+4\cdot x-6 \quad ; \quad x+2$
9. $4\cdot x^3+4\cdot x+3 \quad ; \quad (x-2)$
10. $9\cdot x^4-12\cdot x^3+9\cdot x^2-28\cdot x+4 \quad ; \quad 3\cdot x+2$
11. $4\cdot x^4-x^2+2\cdot x+6 \quad ; \quad (2\cdot x+1)$
12. $4\cdot x^5-2\cdot x^4-8\cdot x^2+4\cdot x-7\cdot x \quad ; \quad 2\cdot x-1$
13. $6\cdot x^4+x^3-x^2-9\cdot x+2 \quad ; \quad 3\cdot x-1$
14. $-6\cdot x^5+4\cdot x^4+3\cdot x-6 \quad ; \quad 3\cdot x-2$
15. $x^3+2\cdot a\cdot x^2+3\cdot a^2\cdot x-3\cdot a^3 \quad ; \quad x+a$
16. $-2\cdot x^3-3\cdot a\cdot x^2+4\cdot a^2\cdot x-4\cdot a^3 \quad ; \quad x+2\cdot a$
17. $-2\cdot x^5-3\cdot a^2\cdot x^3+2\cdot a^3 \quad ; \quad x-a$
18. $3\cdot x^4\cdot a^2-10\cdot a^4\cdot x^2-a^6 \quad ; \quad x-2\cdot a$

II. *Determinar el valor de la constante* k *tal que al dividir los polinomios , el residuo sea el que se indica a la derecha .*

19. $\dfrac{-2\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 2\cdot x - 2\cdot k}{(x-1)}$; *residuo* 3

20. $\dfrac{x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot x + 4\cdot k}{(x-2)}$; *residuo* -1

21. $\dfrac{x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot k\cdot x - 1}{(x+3)}$; *residuo* -1

22. $\dfrac{x^3 + 3\cdot x^2 + k\cdot x + 2}{(x-1)}$; *residuo* 4

23. $\dfrac{x^3 + k\cdot x^2 + 2\cdot k\cdot x - 20}{(x-2)}$; *residuo* 4

24. $\dfrac{2\cdot x^3 - k\cdot x^2 - 2\cdot x + 3\cdot k}{(x+3)}$; *residuo* -3

25. $\dfrac{x^4 + (k+1)\cdot x^3 + k\cdot x^2 - k\cdot x + 3\cdot k - 4}{(x+k)}$; *residuo* 0

26. $\dfrac{2\cdot x^3 - k\cdot x^2 - \left(k^2 - k\right)\cdot x - 3\cdot k - 6}{(x-k)}$; *residuo* 4

<u>*Respuestas Ejercicio*</u> 3.2

1. $\left(x^2 + 3\cdot x - 9\right) + \dfrac{19}{(x+2)}$

2. $\left(2\cdot x^2 - x + 5\right) - \dfrac{16}{(x+3)}$

3. $\left(-3\cdot x^2 - x - 1\right) - \dfrac{2}{(x-4)}$

4. $\left(-2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1\right) + \dfrac{2}{(x-3)}$

5. $\left(x^3 + 3\cdot x - 8\right) + \dfrac{35}{(x+4)}$

6. $\left(3\cdot x^3 + 10\cdot x^2 + 15\cdot x + 36\right) + \dfrac{76}{(x-2)}$

7. $\left(x^4 + 4\cdot x^3 + 2\cdot x^2 + 7\cdot x + 4\right) - \dfrac{1}{(x-1)}$

8. $\left(-4\cdot x^4 + 7\cdot x^3 - 12\cdot x^2 + 21\cdot x - 38\right) + \dfrac{70}{(x+2)}$

9. $\left(4\cdot x^2 + 8\cdot x + 20\right) + \dfrac{43}{(x-2)}$

10. $\left(3\cdot x^3 - 6\cdot x^2 + 7\cdot x - 14\right) + \dfrac{32}{(3\cdot x+2)}$

11. $\left(2\cdot x^3 - x^2 + 1\right) + \dfrac{5}{(2\cdot x+1)}$

12. $\left(2\cdot x^4 - 4\cdot x - \dfrac{7}{2}\right) - \dfrac{7}{(4\cdot x-2)}$

13. $\left(2\cdot x^3 + x^2 - 3\right) - \dfrac{1}{(3\cdot x-1)}$

14. $\left(-2\cdot x^4 + 1\right) - \dfrac{4}{(3\cdot x-2)}$

15. $\left(2\cdot a^2 + x\cdot a + x^2\right) - \dfrac{5\cdot a^3}{(x+a)}$

16. $\left(2\cdot a^2 + x\cdot a - 2\cdot x^2\right) - \dfrac{8\cdot a^3}{(x+2\cdot a)}$

17. $-5\cdot a^4 - 5\cdot x\cdot a^3 - 5\cdot x^2\cdot a^2 - 2\cdot x^3\cdot a - 2\cdot x^4 + \dfrac{\left(2\cdot a^3 - 5\cdot a^5\right)}{x-a}$

18. $\left(4\cdot a^5 + 2\cdot x\cdot a^4 + 6\cdot x^2\cdot a^3 + 3\cdot x^3\cdot a^2\right) + \dfrac{7\cdot a^6}{(x-2\cdot a)}$

19. $k = \dfrac{-7}{2}$

20. $k = \dfrac{-7}{4}$

21. $k = -5$

22. $k = -2$

23. $k = 2$

24. $k = \dfrac{-15}{2}$

25. $k = -4$; $k = 1$

26. $k = -2$; $k = 5$

EJERCICIO 3.3

I. *Sin hacer la división , encontrar el residuo que se obtendrá al dividir los polinomios . (Usar el teorema del residuo)*

1. $\dfrac{x^3 + 2\cdot x^2 - 4\cdot x + 5}{(x-2)}$

2. $\dfrac{x^3 - 4\cdot x^2 + 6\cdot x - 3}{(x+1)}$

3. $\dfrac{2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + x - 4}{(x+3)}$

4. $\dfrac{-3\cdot x^3 + 5\cdot x^2 + 2\cdot x + 1}{(x-1)}$

5. $\dfrac{4\cdot x^3 + 2\cdot x^2 + 2\cdot x - 7}{(x-1)}$

6. $\dfrac{-2\cdot x^3 + 6\cdot x^2 - 3\cdot x + 2}{(x-3)}$

7. $\dfrac{2\cdot x^4 - 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + x - 2}{(x+2)}$

8. $\dfrac{x^5 - 2\cdot x^4 + 3\cdot x^3 - 5\cdot x^2 - 2\cdot x + 4}{(x-2)}$

9. $\dfrac{6\cdot x^5 - x^4 - 2\cdot x^3 - 9\cdot x + 4}{(-3\cdot x+2)}$

10. $\dfrac{-12\cdot x^5 - 8\cdot x^4 + 6\cdot x^2 + 13\cdot x + 1}{(3\cdot x+2)}$

II. *Determinar , usando el teorema del factor , si el segundo polinomio es un factor del primero*

11. $3\cdot x^3 - 14\cdot x^2 + 11\cdot x - 12 \quad ; \quad (x-4)$

12. $-4\cdot x^3 - 10\cdot x^2 + 7\cdot x + 3 \quad ; \quad (x+3)$

13. $5\cdot x^3 - 14\cdot x^2 + 11\cdot x - 6 \quad ; \quad (x-2)$

14. $2\cdot x^4 - 6\cdot x^3 + 2\cdot x^2 + 5\cdot x - 3 \quad ; \quad (x-1)$

15. $-2\cdot x^4 + 15\cdot x^3 - 22\cdot x^2 - 23\cdot x + 40 \quad ; \quad x-5$

16. $16\cdot x^5 + 8\cdot x^4 - 4\cdot x^3 - 2\cdot x^2 + 4\cdot x - 2 \quad ; \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)$

17. $16\cdot x^5 - 8\cdot x^3 + 4\cdot x^2 + x - 1 \quad ; \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)$

18. $3\cdot x^5 + 6\cdot x^4 + 7\cdot x^3 - 8\cdot x^2 - 7\cdot x + 5 \quad ; \quad x-1$

19. $16\cdot x^3 + 8\cdot x^2 + 2\cdot x + 1 \quad ; \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)$

20. $8\cdot x^4 - 4\cdot x^3 + 2\cdot x - 1 \quad ; \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)$

21. $3\cdot x^3 + 5\cdot a\cdot x^2 + a^2\cdot x - a^3 \quad ; \quad (x+a)$

22. $-4\cdot x^4 + \left(8\cdot a + 2\cdot a^2\right)\cdot x^3 - 4\cdot a^3\cdot x^2 - a^3\cdot x + 2\cdot a^4 \quad ; \quad (x + 2\cdot a)$

23. $x^n - a^n \quad ; \quad (x-a)$

24. $x^n - a^{3\cdot n} \quad ; \quad \left(x - a^3\right)$

25. $x^n - a^n \quad ; \quad (x+a)$ *n es par*

26. $x^n + a^n \quad ; \quad (x+a)$ *n es impar*

III. *Usando el recíproco del teorema del factor, encontrar todas las raíces de los polinomios* $P(x)$.

27. $P(x) = (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)$

28. $P(x) = (x-3)\cdot(x+5)\cdot(x-2)$

29. $P(x) = (2\cdot x - 1)\cdot(3\cdot x + 2)\cdot(2\cdot x + 3)$

30. $P(x) = \left(x^2 - x - 2\right)\cdot(x+5)$

31. $P(x) = \left(x^2 + 2\cdot x - 3\right)\cdot(3\cdot x - 1)\cdot(2\cdot x - 1)$

32. $P(x) = \left(-12\cdot x^2 - 11\cdot x + 15\right)\cdot(2\cdot x + 4)$

33. $P(x) = \left(2\cdot x^2 + 2\cdot x + 1\right)\cdot(x-3)\cdot\left(x^2 - 1\right)$

34. $P(x) = \left(3\cdot x^2 - 5\cdot x + 2\right)\cdot\left(2\cdot x^3 - 16\right)$

Respuestas Ejercicio 3.3

1. $R = P(2) = 13$
2. $R = P(-1) = -14$
3. $R = P(-3) = -88$
4. $R = P(1) = 5$
5. $R = P(1) = 1$
6. $R = P(3) = -7$
7. $R = P(-2) = 32$
8. $R = P(2) = 4$
9. $R = P\left(\frac{2}{3}\right) = -2$
10. $R = P\left(\frac{-2}{3}\right) = -5$
11. *Si porque* $P(4) = 0$
12. *Si porque* $P(-3) = 0$
13. *Si porque* $P(2) = 0$
14. *Si porque* $P(1) = 0$
15. *Si porque* $P(5) = 0$
16. *Si porque* $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
17. *Si porque* $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
18. *No porque* $P(1) \neq 0$
19. *Si porque* $P\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$
20. *No porque* $P\left(\frac{-1}{2}\right) \neq 0$
21. *Si porque* $P(-a) = 0$
22. *No porque* $P(-2 \cdot a) \neq 0$
23. *Si porque* $P(a) = 0$
24. *Si porque* $P(a) = 0$
25. *Si porque* $P(-a) = 0$
26. *Si porque* $P(-a) = 0$
27. $x = 1, -2, -1$
28. $x = -5, 2, 3$
29. $x = \left(\frac{-3}{2}\right), \left(\frac{-2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}\right)$
30. $x = -5, -1, 2$
31. $x = -3, \left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}\right), 1$
32. $x = -2, \left(\frac{-5}{3}\right), \left(\frac{3}{4}\right)$
33. $x = -1, 1, 3, \left(\frac{-1+j}{2}\right), \left(\frac{-1-j}{2}\right)$
34. $x = 1, \left(\frac{2}{3}\right), 2, (-1+\sqrt{3} \cdot j), (-1-\sqrt{3} \cdot j)$

3.8 Las raices de un polinomio .

El ***teorema fundamental del Álgebra*** (*cuya demostración está fuera del alcance de éste curso*), establece que:

> *TEOREMA 3 : TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA*
>
> ***Todo polinomio tiene por lo menos una raiz***

Asumiendo que éste teorema es verdadero, es posible demostrar el siguiente. . .

> *TEOREMA 4 : TEOREMA DE LAS n RAICES*
>
> ***Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raices***

Esto significa por ejemplo que un polinomio de grado 4 tendrá 4 raíces (*reales y/o complejas*) , que un polinomio de grado 7 tendrá exactamente 7 raíces etc.

Además, las raíces pueden repetirse o no, debido a que es posible que un polinomio tenga uno ó varios factores múltiples de la forma $(x-a)^m$ donde m es un entero positivo (*el grado de repetición de ese factor*) . Por ejemplo , el polinomio :

$$P(x) = (x-3)^3 \cdot (3\cdot x+2)^4 \cdot (-2\cdot x+1)^2$$

tiene tres raices repetidas en : $x = 3$ (*repetida dos veces*) , $x = \frac{-2}{3}$ (*repetida tres veces*) , $x = \frac{1}{2}$ (*repetida una vez*) .

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4 :

Consideremos el polinomio de grado n *:*

$$P(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + ... + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + a_n\cdot x^n$$

Por el teorema fundamental del Álgebra, el polinomio $P(x)$ *tiene por lo menos una raiz, digamos* $x = r_1$ *.*

Entonces del teorema del factor se deduce que $(x-r_1)$ *es un factor de* $P(x)$ *porque* $P(r_1) = 0$ *por ser* r_1 *una raiz de* $P(x)$. *Asi que es posible escribir:*

$$P(x) = Q_1(x)\cdot(x-r_1)$$

donde $Q_1(x)$ *es un polinomio de grado* $(n-1)$, *puesto que* $(x-r_1)$ *es de grado 1.*

Al polinomio $Q_1(x)$ *también se le puede aplicar el teorema fundamental del Álgebra, es decir,* $Q_1(x)$ *tiene al menos una raíz, digamos* $x = r_2$ *y por lo tanto* $Q_1(r_2) = 0$
Entonces, por el teorema del factor $(x - r_2)$ *es un factor de* $Q_1(x)$
De manera que el polinomio $P(x)$ *queda factorizado como :*

$$P(x) = Q_1\cdot(x)\cdot(x - r_1) = \left[Q_2\cdot(x)\cdot(x - r_2)\right]\cdot(x - r_1)$$

donde $Q_2(x)$ *es un polinomio de grado* $(n - 2)$ *, dado que* $(x - r_2)$ *es de grado 1 .*
Al polinomio $Q_2(x)$ *también se le puede aplicar el teorema fundamental del Álgebra, es decir,* $Q_2(x)$ *tiene al menos una raíz, digamos* $x = r_3$ *, es decir* $Q_2(r_3) = 0$ *.*
Por el teorema del factor, $(x - r_3)$ *es un factor de* $Q_2(x)$ *, de manera que el polinomio* $P(x)$ *queda factorizado ahora como :*

$$P(x) = \left[Q_2\cdot(x)\cdot(x - r_2)\cdot(x - r_1)\right] = \left[Q_3\cdot(x)\cdot(x - r_3)\right]\cdot(x - r_2)\cdot(x - r_1)$$

donde $Q_3(x)$ *es un polinomio de grado* $(n - 3)$ *, dado que* $(x - r_3)$ *es de grado 1 .*

Se puede continuar aplicando repetidamente el teorema fundamental a cada uno de los polinomios cociente, hasta llegar a la expresión :

$$P(x) = Q_n(x)\cdot(x - r_n)\cdot(x - r_{n-1})\cdot.......\cdot(x - r_2)\cdot(x - r_1)$$

donde $Q_n(x)$ *es un polinomio de grado* $(n - n) = 0$ *es decir, se trata de una constante que es muy fácil identificar con el coeficiente líder de* $P(x)$ *para escribir finalmente :*

$$P(x) = a_n\cdot(x - r_n)\cdot(x - r_{n-1})\cdot.......\cdot(x - r_2)\cdot(x - r_1)$$

Del teorema del factor se deduce que $P(r_1) = 0$ *,* $P(r_2) = 0$ *,* $P(r_3) = 0$ *, . . . ,* $P(r_{n-1}) = 0$ *,* $P(r_n) = 0$ *y por lo tanto los números* r_1 *,* r_2 *,* r_3 *, . . . ,* r_{n-1} *,* r_n *son* n *raices de polinomio* $P(x)$ *, el cual no tiene más factores y por lo mismo ya no tiene más raíces .*

Se ha demostrado que si un polinomio es de grado n entonces tiene exactamente n raíces (*repetidas o no*) . Sin embargo, determinar tales raices es en general un problema bastante difícil .

Con el siguiente teorema se pueden *localizar las raíces* de un polinomio en un intervalo de la recta numérica.

3.9 Las raices reales de un polinomio .

Llamaremos a un número real :

- *límite superior :* si tal número es *mayor o igual que la mayor de las raíces reales* de un polinomio.
- *límite inferior :* si tal número es *menor o igual que la menor de las raíces reales* de un polinomio.

TEOREMA 5 : TEOREMA SOBRE LOS LÍMITES DE LAS RAICES REALES

Si en un polinomio $P(x)$ el coeficiente líder a_n es positivo y al hacer la división sintética de $\dfrac{P(x)}{(x-k)}$, donde $k > 0$, . . .

- ***no hay términos negativos en la 3ª línea, entonces , la constante k es un límite superior de las raíces reales de $P(x)$*** (*es decir , el polinomio no tiene raíces mayores que k*)

Si en un polinomio $P(x)$ el coeficiente líder a_n es positivo y al hacer la división sintética de $\dfrac{P(x)}{[x-(-k)]}$, donde $k > 0$, . . .

- ***los términos en la 3ª línea son alternativamente positivos y negativos , entonces la constante $-k$ es un límite inferior de las raíces reales de $P(x)$*** (*es decir , el polinomio no tiene raíces menores que $-k$*)

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5 :

Por el algoritmo de la división de polinomios : $\dfrac{P(x)}{(x-k)} = Q(x) + \dfrac{R}{(x-k)}$ *, se tiene que :*

$$P(x) = Q(x)\cdot(x-k) + R \qquad (*)$$

donde R es una constante que queda determinada por el último número de la 3ª línea en la división sintética de $\dfrac{P(x)}{(x-k)}$.

Por otra parte, los demás números en esa 3ª línea son los coeficientes ordenados del polinomio cociente $Q(x)$. Si todos esos números son positivos entonces $R > 0$ y por consiguiente también $Q(k) > 0$, puesto que $k > 0$.

Además paara un valor x tal que $0 < k < x$, entonces $(x-k) > 0$ por lo cual $P(x) > 0$ de acuerdo con la ecuación (*) . En otras palabras el polinomio $P(x)$ jamás volverá a cruzar el eje X cuando x tome valores a la derecha del número k.

En consecuencia $x = k$ es un límite superior para las raíces reales de $P(x)$.

Ahora supongamos que al hacer la división sintética de $\frac{P(x)}{x-(-k)} = \frac{P(x)}{x+k}$ resulta que los números de la 3ª línea son alternativamente positivos y negativos comenzando con el primero positivo, entonces por el algoritmo de la división:

$$P(x) = Q(x)\cdot(x+k) + R \qquad (**)$$

y se sigue que :

- *el coeficiente líder de* $Q(x)$ *es igual al de* $P(x)$ *y es positivo.*
- *el grado de* $Q(x)$ *es* $n-1$ *porque el grado de* $P(x)$ *es* n *.*
- *hay* $(n+1)$ *números en la* 3^a *línea de la división sintética .*

por lo tanto :

- el signo de R *es negativo* cuando $(n+1)$ es par, es decir *cuando* n *es impar*
- el signo de R *es positivo* cuando $(n+1)$ es impar, es decir *cuando* n *es par.*

De ésta manera si x es un número negativo: $x < -k < 0$ y . . .

- $P(x)$ es de grado impar entonces $R < 0$ y $Q(x)$ es par con todos sus términos positivos (*puesto que sus coeficientes negativos quedan multiplicados por potencias impares de* x*, dando como producto un número positivo*) . Entonces, siendo $Q(x) > 0$, $(x+k) < 0$ y $R < 0$ se sigue de (**) que $P(x) < 0$.

- $P(x)$ es par entonces $R > 0$ y $Q(x)$ es impar y todos sus términos son negativos (*puesto que sus coeficientes positivos quedan multiplicados por potencias impares de* x *, dando como resultado un número negativo*) . Entonces, siendo $Q(x) < 0$, $(x+k) < 0$ y $R > 0$ se sigue de (**) que $P(x) > 0$.

En cualquiera de los dos casos, el polinomio $P(x)$ jamás vuelve a cruzar el eje X cuando x toma un valor a la izquierda del número $-k$. Por lo tanto $x = -k$ *es un límite inferior para las raíces reales de* $P(x)$.

Ejemplo 19. Determinar un intervalo donde se localizen todas las raices reales del polinomio

$$P(x) = x^3 - 2\cdot x^2 + 3\cdot x + 3$$

Solución : Al hacer la división sintética de $P(x)$ entre un factor lineal arbitrario, por ejemplo $(x-3)$ se obtiene . . .

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ & & 3 & 3 & 18 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 21 \end{array}$$

Observemos que todos los números de la tercera línea son positivos y por el teorema 5 anterior, se sigue que $x = 3$ *podría tomarse como un límite superior* para las raíces reales de $P(x)$.

Similarmente, al dividir $P(x)$ entre $(x+1)$ se obtiene . . .

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & 3 & 3 \\ & & -1 & 3 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -3 \end{array}$$

Notamos que los números de la tercera línea son alternativamente positivos y negativos, asi que por el teorema 5, se sigue que $x = -1$ *puede tomarse como un límite inferior* para las raíces reales de $P(x)$.

En conclusión, si el polinomio $P(x)$ tiene alguna raíz real, ésta se localiza en el intervalo $(-1, 3)$.

3.10 *Las raices reales positivas y negativas de un polinomio* .

Otro resultado muy útil para determinar el número máximo de raíces reales que podría tener un polinomio, se obtiene del siguiente . . .

TEOREMA 6 : REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES

- ***El número máximo de raíces reales positivas del polinomio*** $P(x)$ ***no es mayor que el número de variaciones de signo de*** $P(x)$ **.**

- ***El número máximo de raíces negativas del polinomio*** $P(x)$ ***no es mayor que el número de variaciones de signo de*** $P(x)$.

En un polinomio $P(x)$ que está ordenado de acuerdo con las potencias decrecientes de su variable x, se dice que *ocurre una variación de signo cuando son diferentes los signos algebráicos de dos términos consecutivos* , asi por ejemplo :

- en el polinomio ordenado en potencias decrecientes: $P(x) = -3\cdot x^3 + 4\cdot x^2 - 2\cdot x + 5$, los signos de sus términos son : $-\ \ +\ \ -\ \ +$ y cuando esa secuencia de signos se lee de izquierda a derecha, hay tres variaciones de signo. Este polinomio podría tener como máximo 3 raices reales positivas.

- el polinomio ordenado $P(x) = 2\cdot x^5 + 3\cdot x^4 + 4\cdot x^3 - x^2 - 2\cdot x - 5$, tiene en sus términos la siguiente secuencia de signos : $+ \quad + \quad + \quad - \quad - \quad -$ y por lo tanto sólamente hay una variacion de signo. Éste polinomio sólo podría tener una raiz real positiva.

- el polinomio $P(x) = -2\cdot x^4 - 2\cdot x - 3$, tiene en sus términos la secuencia de signos : $- \quad - \quad -$ y por lo tanto no existe una sola variacion de signo. (*Nótese que no importa que no aparezcan los términos con* x^3 *y* x^2) . Éste polinomio no tiene raices reales positivas.

Ejemplo 20. Encontrar el máximo número de raíces positivas ó negativas que podría tener el polinomio :

$$P(x) = -2\cdot x^5 + 3\cdot x^4 + 6\cdot x^3 + 4\cdot x^2 + 2\cdot x - 1$$

Solución : Los términos del polinomio $P(x)$ ya están ordenados en potencias decrecienes y generan la siguiente secuencia de signos : $- \quad + \quad + \quad + \quad + \quad -$ asi que hay dos variaciones de signo y por lo tanto *el polinomio tiene a lo más dos raíces reales positivas* .

Por otra parte $P(-x)$ es . . .

$$P(-x) = -2\cdot(-x)^5 + 3\cdot(-x)^4 + 6\cdot(-x)^3 + 4\cdot(-x)^2 + 2\cdot(-x) - 1$$

$$= 2\cdot x^5 + 3\cdot x^4 - 6\cdot x^3 + 4\cdot x^2 - 2\cdot x - 1$$

y la secuencia de signos que generan sus términos ordenados es : $+ \quad + \quad - \quad + \quad - \quad -$ asi que hay tres variaciones de signo y por lo tanto, el polinomio podría tener *a lo más tres raíces reales negativas* .

DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LOS SIGNOS

Probaremos primero que si $P(x)$ *tiene* m *variaciones de signo y si* $k > 0$ *, entonces* $P(x)\cdot(x-k)$ *tiene al menos* $m+1$ *variaciones.*

Considerando únicamente los signos de los términos en el producto $P(x)\cdot(x-k)$ *, se tendrá un esquema semejante el siguiente . . .*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
+ & + & - & + & + & - & - & + & - & + & + & + & \\
 & & & & & & & & & & & + & - \\
\hline
+ & + & - & + & + & - & - & + & - & + & + & + & \\
 & - & - & + & - & - & + & + & - & + & - & - & - \\
\hline
+ & \pm & - & + & \pm & - & \pm & + & - & + & \pm & \pm & -
\end{array}$$

donde los signos de $P(x)$ aparecen en el primer renglón y los signos de $(x-k)$ en el segundo renglón .
La tercera y cuarta fila son los signos de los productos $x \cdot P(x)$ y $(-k) \cdot P(x)$ respectivamente .
En la última fila se representan los signos de la sumas de esos productos, indicándose con el doble signo $\pm$ la suma de un término negativo y un término positivo, dado que no se puede conocer con anticipación el signo resultante de la suma si no se conocen los términos.

Asi que los únicos signos claramente definidos en el producto $P(x) \cdot (x-k)$, son el primero, el último y aquéllos donde se suman dos términos de igual signo .

Notemos ahora que :

- cada término en la quinta fila se obtiene al sumar el producto de un término de $P(x)$ por x , más el producto del término que le precede por $-k$.
- los dos productos anteriores tendrán el mismo signo, si entre los dos términos consecutivos de $P(x)$ existe una variación de signo .
- los dos productos anteriores serán positivos cuando tal variación sea de $+$ a $-$ y serán negativos si la variación es de $-$ a $+$.

Por lo tanto, además de los signos del primero y el último término del producto, habrá tantos signos claramente definidos como cambios de signo tenga el polinomio $P(x)$.
En otras palabras, *cuando aparece un signo doble en la quinta fila es porque el polinomio no tuvo un cambio de signo en ese término, asi que si se reemplaza cada signo doble por el signo que precede a la secuencia, no se incrementará por ello el número de variaciones de signo en la quinta fila*.
De éste modo, a excepción del último, los signos de la quinta fila serán exactamente los mismos que los de $P(x)$ y es claro que el producto del último término de $P(x)$ por $-k$ será de distinto signo al de ese término. Asi que en el resultado final, *se tiene por lo menos una variación más de signo que en* $P(x)$.

Probado lo anterior, consideremos ahora que k_1 , k_2 , k_3 , . . . , k_m son las raices positivas de $P(x)$. Del teorema del factor se sigue entonces que :

$$P(x) = Q(x) \cdot (x-k_1) \cdot (x-k_2) \cdot (x-k_3) \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot (x-k_m)$$

Pero por lo demostrado antes :

- $Q(x) \cdot (x-k_1)$ *tiene por lo menos una variación más de signo que* $Q(x)$.
- $Q(x) \cdot (x-k_1) \cdot (x-k_2)$ *tiene por lo menos una variación más de signo que* $Q(x) \cdot (x-k_1)$ *y en consecuencia al menos dos más que* $Q(x)$
- $Q(x) \cdot (x-k_1) \cdot (x-k_2) \cdot (x-k_3)$ *tiene al menos una variación de signo más que el polinomio* $Q(x) \cdot (x-k_1) \cdot (x-k_2)$ *y en consecuencia al menos tres variaciones más que* $Q(x)$

continuando este razonamiento, se concluye que $P(x)$ tiene al menos m veces más variaciones de signo que $Q(x)$ y si $Q(x)$ no tiene variaciones de signo entonces el mínimo número de variaciones de signo en $P(x)$ será m , esto es , el número de raíces positivas de $P(x)$ no es mayor que el número de sus cambios de signo .
La otra parte del teorema resulta evidente ahora, considerando que las raices negativas de $P(x)$ son las raices positivas de $P(-x)$.

Ejemplo 21. Encontrar el máximo número de raíces reales positivas ó negativas del polinomio :

$$P(x) = x^4 + 4\cdot x^3 - 7\cdot x^2 - 4\cdot x + 1$$

Encontrar luego los números enteros más pequeños que sean límites superior e inferior de las raices y finalmente, localizar cada raíz entre dos enteros consecutivos si es posible.

Solución :
Los términos ordenados del polinomio $P(x)$ generan la secuencia de signos : + + − − + .
Hay dos variaciones de signo .
En $P(x)$ la secuencia de signos es : + − − + + . Hay también dos variaciones .
Por lo tanto, $P(x)$ podría tener a lo más dos raices reales positivas y dos negativas (*regla de los signos de Descartes*)

Ahora evaluemos por división sintética al polinomio en varios puntos usando el teorema del residuo.
En $x = 1$ se obtiene :

$$\frac{P(x)}{(x-1)} : \qquad \begin{array}{c|ccccc} 1 & 1 & 4 & -7 & -4 & 1 \\ & & 1 & 5 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & -2 & -6 & -5 \end{array}$$

Asi que $P(1) = -5$, por lo tanto $x = 1$, no es raíz y tampoco es un límite superior o inferior de las raices . (*teorema 5*) .

$$\frac{P(x)}{(x-2)} : \qquad \begin{array}{c|ccccc} 2 & 1 & 4 & -7 & -4 & 1 \\ & & 2 & 12 & 10 & 12 \\ \hline & 1 & 6 & 5 & 6 & 13 \end{array}$$

del teorema del residuo se concluye que $P(2) = 13$, por lo tanto entre $x = 2$ y $x = 1$ el polinomio tiene al menos una raiz real dado que cambia de signo: $P(1) < 0$ y $P(2) > 0$.
Además aunque $x = 2$ no es raíz, *si es un límite superior* porque todos los números de la tercera línea de la división sintética son positivos (*teorema 5*), por lo tanto $P(x)$ ya no tiene raíces reales mayores que 2 .

Evaluemos ahora $P(-5)$:

$$\frac{P(x)}{(x+5)} \; : \qquad \begin{array}{r|rrrrr} -5 & 1 & 4 & -7 & -4 & 1 \\ & & -5 & 5 & 10 & -30 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 6 & -29 \end{array}$$

entonces $P(-5) = -29$ pero $x = -5$ *no es raíz ni límite*.

Evaluemos ahora $P(-6)$:

$$\frac{P(x)}{(x+5)} \; : \qquad \begin{array}{r|rrrrr} -6 & 1 & 4 & -7 & -4 & 1 \\ & & -6 & 12 & -30 & 204 \\ \hline & 1 & -2 & 5 & -34 & 205 \end{array}$$

entonces $P(-6) = 205$ y $P(x)$ tiene al menos una raiz real comprendida entre -5 y -6 porque cambia de signo: $P(-5) < 0$; $P(-6) > 0$.

Además $x = -6$ *es un límite inferior* para las raices de $P(x)$ porque los números de la tercera línea de la división sintética son alternativamente positivos y negativos .

Ahora podemos deducir que si el polinomio tiene otras raices reales, una de ellas debe ser positiva y otra negativa y ambas deben estar comprendidas entre los límites : $x = -5$ y $x = 2$.

Por inspección se encuentra que : $p(-1) = -5$, $P(0) = 1$ y $P(1) = -5$, asi que en efecto, existen otras raices reales en los intervalos $(-1, 0)$ y $(0, 1)$ dado que $P(x)$ cambia de signo en ellos .

<u>*EJERCICIO*</u> 3.4

I. *Determinar el grado del polinomio y encontrar todas sus raices indicando su multiplicidad* .

1. $P(x) = (x-3)^2 \cdot (x+2)^3$
2. $P(x) = (x-3) \cdot (x+1) \cdot (x-2)^3$
3. $P(x) = (x+3)^3 \cdot (x-1) \cdot (2 \cdot x+3)^4$
4. $P(x) = (3 \cdot x+2)^2 \cdot (4 \cdot x-1)^3 \cdot (2 \cdot x+5)^4$
5. $P(x) = (x+5)^7 \cdot (3 \cdot x+1)^5 \cdot (4 \cdot x+6)^3$
6. $P(x) = (5 \cdot x-2)^4 \cdot (x-3)^3 \cdot (3 \cdot x-12)^2$

II. *Encontrar los números enteros más pequeños que sean límites superior e inferior de las raices del polinomio. Determinar el máximo número de raices reales positivas ó negativas. Localizar además cada raíz entre dos enteros consecutivos siempre que sea posible.*

7. $P(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 3$

8. $P(x) = 3 \cdot x^3 + x^2 - 6 \cdot x + 1$

9. $P(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 - x + 2$

10. $P(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 8$

11. $P(x) = 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 30 \cdot x - 28$

12. $P(x) = 2 \cdot x^3 - 14 \cdot x^2 + 29 \cdot x - 16$

13. $P(x) = 3 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 - 16 \cdot x + 12$

14. $P(x) = x^4 - 2 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 10 \cdot x + 5$

15. $P(x) = x^4 - 7 \cdot x^3 + 8 \cdot x^2 + 18 \cdot x - 12$

16. $P(x) = 8 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 2$

17. $P(x) = 2 \cdot x^4 - 4 \cdot x^3 - 79 \cdot x^2 - 94 \cdot x + 21$

18. $P(x) = 6 \cdot x^4 + 18 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 - 26 \cdot x + 10$

19. $P(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1$

20. $P(x) = 3 \cdot x^3 - 13 \cdot x^2 + 21 \cdot x - 12$

21. $P(x) = x^4 - 4 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 2$

22. $P(x) = x^4 - 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 1$

23. $P(x) = x^4 - 5 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 2$

24. $P(x) = x^4 - 3 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - x - 1$

III. *Los polinomios de los siguientes problemas , tienen dos raices reales comprendidas entre dos enteros consecutivos . Localizar esas raices, usando un valor intermedio entre esos dos enteros .*

25. $P(x) = 3 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 3$

26. $P(x) = 4 \cdot x^3 - x^2 - 34 \cdot x - 35$

27. $P(x) = 6 \cdot x^3 - 40 \cdot x^2 + 57 \cdot x + 33$

28. $P(x) = 3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1$

29. $P(x) = 9 \cdot x^3 - 30 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 8$

30. $P(x) = 8 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1$

31. $P(x) = 9 \cdot x^3 + 24 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 5$

32. $P(x) = 12 \cdot x^3 - 44 \cdot x^2 - x + 84$

<u>Respuestas</u> . *(Ejercicio 3.4)*

1. $\begin{pmatrix} grado & raiz & multiplicidad \\ 5 & x = 3 & 2 \\ . & x = -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} grado & raiz & multiplicidad \\ 5 & x = 3 & 1 \\ . & x = -1 & 1 \\ . & x = 2 & 3 \end{pmatrix}$

3. $$\begin{pmatrix} grado & raiz & multiplicidad \\ 8 & x = -3 & 3 \\ . & x = 1 & 1 \\ . & x = \frac{-3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} grado & raiz & multiplicidad \\ 9 & x = \frac{-2}{3} & 2 \\ . & x = \frac{1}{4} & 3 \\ . & x = \frac{-5}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} grado & raiz & multiplicidad \\ 15 & x = -5 & 7 \\ . & x = \frac{-1}{3} & 5 \\ . & x = \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

6. $$\begin{pmatrix} grado & raiz & multiplicidad \\ 9 & x = \frac{2}{5} & 4 \\ . & x = 3 & 3 \\ . & x = 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio Nº	*límite inferior*	*límite superior*	*máximo número de raices positivas*	*máximo número de raices negativas*
7.	–2	2	2 *raices en los intervalos* (0 , 1) *y* (1 , 2)	1 *raiz en el intervalo* (–2 , –1)
8.	–2	2	2 *raices en los intervalos* (0 , 1) *y* (1 , 2)	1 *raiz en el intervalo* (–2 , –1)
9.	–1	4	2 *raices en los intervalos* (0 , 1) *y* (3 , 4)	1 *raiz en el intervalo* (–1 , 0)
10.	–2	5	2 *raices en los intervalos* (1 , 2) *y* (4 , 5)	1 *raiz en el intervalo* (–2 , –1)
11.	–3	4	1 *raiz en el intervalo* (3 , 4)	2 *raices en los intervalos* (–1 , 0) *y* (–3 , –2)
12.	–1	4	3 *raices en los intervalos* (0 , 1) , (2 ,3) *y* (3 , 4)	*no tiene raices negativas*

Ejercicio Nº	límite inferior	límite superior	máximo número de raices positivas	máximo número de raices negativas
13.	–2	5	2 *raices en los intervalos* (0 , 1) *y* (4 , 5)	1 *raiz en el intervalo* (–2 , –1)
14.	–3	4	2 *raices en los intervalos* (1 , 2) *y* (3 , 4)	2 *raices en los intervalos* (–1 , 0) *y* (–3 , –2)
15.	–2	5	3 *raices en los intervalos* (0 , 1) , (3 , 4) *y* (4 , 5)	1 *raiz en el intervalo* (–2 , –1)
16.	–1	1	3 *raices en el intervalo* (0 , 1)	1 *raiz en el intervalo* (–1 , 0)
17.	–5	8	2 *raices en los intervalos* (0 , 1) *y* (7 , 8)	2 *raices en los intervalos* (–2 , –1) *y* (–5 , –4)
18.	–4	2	2 *raices en los intervalos* (0 , 1) *y* (1 , 2)	2 *raices en los intervalos* (–4 , –3) *y* (–2 , –1)

19.	–1	1	3 *hay una en* (0 , 1)	*no tiene raices negativas*
20.	1	5	3 *hay una raiz real en* (1 , 2)	*no tiene raices negativas*
21.	–1	3	3 *hay una raiz real en* (2 , 3)	1 *en* (–1 , 0)
22.	–1	4	3 *hay una raiz real en* (3 , 4)	1 *en* (–1 , 0)
23.	–1	4	3 *hay una raiz real en* (3 , 4)	1 *en* (–1 , 0)
24.	–1	3	3 *hay una raiz real en* (2 , 3)	1 *en* (–1 , 0)

25. *En* (–1 , 0) , *una de ellas en* (–0.5 , 0)

26. *En* (–2 , –1) , *una de ellas en* (–2 , –1.5)

27. *En* (3 , 4) , *una de ellas en* (3 , 3.5)

28. *En* (–1 , 0) , *una de ellas en* (–1 , –0..5)

29. *En* (1 , 2) , *una de ellas en* (1 , 1.5)

30. *En* (–1 , 0) *una de ellas en* (–1 , – 0..5)

31. *En* (–2 , –1) , *una de ellas en* (–2 , –1.5)

32. *En* (2 , 3) , *una de ellas en* (2 , 2.5)

3.11 ***Las raices complejas de un polinomio*** .

No todos los polinomios tienen raíces reales . No todas las raices de un polinomio son números reales. Por ejemplo, se puede comprobar fácilmente que el polinomio :

$$P(x) = x^2 + 2\cdot x + 3$$

no tiene raices reales porque aplicando la fórmula general para la solución de la ecuación cuadrática $x^2 + 2\cdot x + 3 = 0$, se obtiene . . .

$$x_1 = \frac{-2+\sqrt{4-12}}{2} = -1+\sqrt{2}\cdot \mathrm{j} \qquad ; \qquad x_2 = \frac{-2-\sqrt{4-12}}{2} = -1-\sqrt{2}\cdot \mathrm{j}$$

que son dos raices complejas .

De acuerdo con el teorema del factor, es posible escribir por lo tanto en forma factorizada al polinomio como :

$$P(x) = (x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

$$= \left[x-(-1+\sqrt{2}\cdot \mathrm{j})\right]\cdot\left[x-(-1-\sqrt{2}\cdot \mathrm{j})\right]$$

No es una coincidencia que las raices complejas de éste polinomio sean un par de números complejos conjugados . Demostraremos que eso ocurre siempre . . . .

> *TEOREMA 7 . (SOBRE LAS RAICES COMPLEJAS)*
>
> ***Las raices complejas de un polinomio siempre ocurren en pares conjugados***

Este teorema establece que no es posible que un polinomio $P(x)$ tenga una raiz compleja $x = a + b\cdot \mathrm{j}$ aislada sin que su correspondiente complejo conjugado $\bar{x} = a - b\cdot \mathrm{j}$ *sea también una raiz* del polinomio , es decir, si se cumple que $P(x) = 0$ entonces también es cierto que $P(\bar{x}) = 0$.

Si las raices complejas de un polinomio se presentan siempre por pares conjugados, entonces *cuando un polinomio sea de grado impar necesariamente tendrá una raiz real* puesto que tal polinomio se factoriza en un número impar de factores y al menos uno de ellos no tendrá " pareja conjugada" .

DEMOSTRACION DEL TEOREMA 7

Si el número complejo $(a + b\cdot \mathrm{j})$ *es una raíz de un polinomio* $P(x)$ *, significa que el polinomio evaluado en tal número vale cero :*

$$P(a + b\cdot \mathrm{j}) = 0$$

Considérese ahora un polinomio $D(x)$ *cuyas únicas raices sean los números complejos* *conjugados* $(a + b\cdot j)$ *y* $(a - b\cdot j)$ *. Por el teorema del factor se obtiene entonces que . . .*

$$D(x) = [x - (a + b\cdot j)]\cdot[x - (a - b\cdot j)]$$

desarrollando éste producto queda . . .

$$D(x) = x^2 - 2\cdot a\cdot x + \left(a^2 + b^2\right)$$

Por el algoritmo de la división de polinomios : $\dfrac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{D(x)}$ *, es posible escribir:.*

$$P(x) = Q(x)\cdot D(x) + R(x) \qquad\qquad (*)$$

donde $Q(x)$ *es el polinomio cociente.*

Además, debido a que el divisor $D(x)$ *es de segundo grado, el polinomio residuo* $R(x)$ *tiene que ser de grado uno, es decir debe ser una función lineal de la forma :*

$$R(x) = A\cdot x + B$$

donde A *y* B *son constantes.*

Ahora bién, $(a + b\cdot j)$ *es una raiz de* $P(x)$ *, y también lo es de* $D(x)$ *, lo que significa que* $P(a + b\cdot j) = 0$ *;* $D(a + b\cdot j) = 0$ *, y la ecuación (*) queda . . .*

$$P(a + b\cdot j) = Q(a + b\cdot j)\cdot D(a + b\cdot j) + R(a + b\cdot j)$$

$$0 = Q(a + b\cdot j)\cdot(0) + R(a + b\cdot j)$$

esto es . . .

$$0 = R(a + b\cdot j)$$

$$(0 + 0\cdot j) = A\cdot(a + b\cdot j) + B$$

pero dos números complejos son iguales solo si sus partes reales e imaginarias respectivas son iguales , entonces. . .

$$0 = A\cdot a + B \qquad\qquad (I)$$

$$0 = A\cdot b \qquad\qquad (II)$$

pero como $b \neq 0$*, de la ecuación (II) se obtiene que* $A = 0$ *y como* $a \neq 0$ *, de la ecuación (I) se obtiene entonces que* $B = 0$*. Esto significa que el residuo de la división* $R(x) = (A\cdot x + B) = (0\cdot x + 0) = 0$ *es cero y que la división es exacta por lo que podemos escribir :*

$$P(x) = Q(x)\cdot D(x) = Q(x)\cdot[\,[x - (a + b\cdot j)]\cdot[x - (a - b\cdot j)]\,]$$

Por consiguiente si $x = (a - b\cdot j)$ *entonces . . .*

$$P(a - b\cdot j) = Q(a - b\cdot j)\cdot[(a - b\cdot j) - (a + b\cdot j)]\cdot(0) = 0$$

comprobándose asi que el número complejo conjugado de la raiz inicial también es raiz del polinomio $P(x)$.

Una consecuencia muy importante del teorema 7 es el . . .

TEOREMA 8 (TIPOS DE FACTORES DE UN POLINOMIO)

Todo polinomio con coeficientes reales sólo tiene dos tipos de factores:

- ***lineales*** de la forma $(a\cdot x + b)$
- ***cuadráticos*** de la forma $\left(a\cdot x^2 + b\cdot x + c\right)$

los factores cuadráticos generan raices complejas conjugadas y no raíces reales, por ello se les llama también *factores irreducibles en los reales.*

Ejemplo 22. Encontrar todas las raíces del polinomio : $P(x) = 6\cdot x^4 + x^3 + 40\cdot x^2 + 118\cdot x + 60$ sabiendo que $x = (1 + 3\cdot j)$ es una raiz .

Solución :

Las raices complejas ocurren por pares conjugados, por lo cual si $x = (1 + 3\cdot j)$ es raiz del polinomio, entonces también debe ser raiz el número complejo conjugado: $x = (1 - 3\cdot j)$ y por lo tanto $P(x)$ tiene como factor el producto de los dos factores asociados a éstas raices :

$$[x - (1 + 3\cdot j)]\cdot[x - (1 - 3\cdot j)] = \left(x^2 - 2\cdot x + 10\right)$$

es decir. . . $P(x) = Q(x)\cdot\left(x^2 - 2\cdot x + 10\right)$

Por división se encuentra que . . . $\dfrac{P(x)}{\left(x^2 - 2\cdot x + 10\right)} = Q(x) = \left(6\cdot x^2 + 13\cdot x + 6\right)$

y entonces . . . $P(x) = \left(6\cdot x^2 + 13\cdot x + 6\right)\cdot\left(x^2 - 2\cdot x + 10\right)$

el 2º factor cuadrático es irreducible en los reales , pero el primero no lo es . . .

$$P(x) = \left(6\cdot x^2 + 13\cdot x + 6\right)\cdot\left(x^2 - 2\cdot x + 10\right)$$
$$= (2\cdot x + 3)\cdot(3\cdot x + 2)\cdot\left(x^2 - 2\cdot x + 10\right)$$

De modo que $P(x)$ tiene dos raices reales negativas y dos raices complejas :

$$x_1 = \frac{-3}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{-2}{3} \quad , \quad x_3 = (1+3\cdot j) \ , \quad x_4 = (1-3\cdot j)$$

Comprobación :
Por división sintética se tiene que :

$$\frac{P(x)}{[x-(1+3\cdot j)]} : \qquad \begin{array}{c|ccccc} (1+3\cdot j) & 6 & 1 & 40 & 118 & 60 \\ & & 6+18\cdot j & -47+39\cdot j & -124+18\cdot j & -60 \\ \hline & 6 & 7+18\cdot j & -7+39\cdot j & -6+18\cdot j & 0 \end{array}$$

lo que comprueba que en efecto el número $(1+3\cdot j)$ es raiz de $P(x)$ porque el residuo de la división sintética es cero. Los otros números de la tercera línea son los coeficientes del polinomio cociente $Q(x)$. Ahora :

$$\frac{Q(x)}{[x-(1-3\cdot j)]} : \qquad \begin{array}{c|cccc} 1-3\cdot j & 6 & 7+18\cdot j & -7+39\cdot j & -6+18\cdot j \\ & & 6-18\cdot j & 13-39\cdot j & 6-18\cdot j \\ \hline & 6 & 13 & 6 & 0 \end{array}$$

lo que comprueba que en efecto el número $(1-3\cdot j)$ es raiz de $Q(x)$ (*y también de P(x)*) ya que el residuo en la tercera línea de la división sintética es cero. Los otros números de esa línea son los coeficientes del polinomio cociente $Q_1(x) = 6\cdot x^2 + 13\cdot x + 6$. Entonces se puede escribir :

$$P(x) = Q(x)\cdot[x-(1+3\cdot j)]$$

$$= Q_1(x)\cdot[x-(1-3\cdot j)]\cdot[x-(1+3\cdot j)]$$

$$= \left(6\cdot x^2 + 13\cdot x + 6\right)\cdot[x-(1-3\cdot j)]\cdot[x-(1+3\cdot j)]$$

que es la misma factorización obtenida anteriormente.

Ejemplo 23. Crear un polinomio de grado 5 sabiendo que tiene, entre otras, las siguientes raíces :

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = (2-\sqrt{3}\cdot j) \quad , \quad x_3 = (1+\sqrt{2}\cdot j)$$

Solución :
Como las raices complejas se presentan por pares conjugados, se deduce que el polinomio buscado tiene cinco factores y que salvo por una constante C indefinida, tiene la forma :

$$P(x) = C\cdot(x-2)\cdot\left[x-(2-\sqrt{3}\cdot j)\right]\cdot\left[x-(2+\sqrt{3}\cdot j)\right]\cdot\left[x-(1+\sqrt{2}\cdot j)\right]\cdot\left[x-(1-\sqrt{2}\cdot j)\right]$$

es decir. . .

$$P(x) = C\cdot\left[(x-2)\cdot\left(x^2-4\cdot x+7\right)\cdot\left(x^2-2\cdot x+3\right)\right]$$

$$= C\cdot(x-2)\cdot\left(x^4-6\cdot x^3+18\cdot x^2-26\cdot x+21\right)$$

$$= C\cdot\left(x^5-8\cdot x^4+30\cdot x^3-62\cdot x^2+73\cdot x-42\right)$$

EJERCICIO 3.5

I. *Hallar el máximo número de raices positivas ó negativas de los siguientes polinomios*

1. $P(x) = 2\cdot x^3+5\cdot x^2-x+1$
2. $P(x) = 3\cdot x^3+4\cdot x^2-6\cdot x-1$
3. $P(x) = x^3-3\cdot x^2+x-2$
4. $P(x) = 4\cdot x^3-x^2-3\cdot x+2$
5. $P(x) = x^3+x+1$
6. $P(x) = x^3-x^2-1$
7. $P(x) = x^3+x-1$
8. $P(x) = x^3+x^2+1$
9. $P(x) = 3\cdot x^4+2\cdot x^3-x^2+x-2$
10. $P(x) = 8\cdot x^4-4\cdot x^3+5\cdot x^2-2\cdot x+2$
11. $P(x) = x^4+3\cdot x^3-2\cdot x^2+2\cdot x+4$
12. $P(x) = 6\cdot x^4+8\cdot x^3+2\cdot x-10$

13. Demostrar que $3\cdot x^6+2\cdot x^4+x^2+2 = 0$ tiene seis raices complejas .
14. Demostrar que $x^5+3\cdot x^3+2\cdot x+1 = 0$ tiene cuatro raices complejas .
15. Demostrar que $x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1 = 0$ tiene cuatro raices complejas .
16. Demostrar que $x^5+x^3+x^2+x+1 = 0$ tiene por lo menos dos raices complejas .

II. *Construir los polinomios de menor grado posible y con coeficientes reales, para los cuales se indican algunos de sus ceros o raices.*

17. $x_1 = (1+j)$, $x_2 = 3$
18. $x_1 = (3-2\cdot j)$, $x_2 = 1$
19. $x_1 = (2+3\cdot j)$, $x_2 = -3$
20. $x_1 = (1-4\cdot j)$, $x_2 = -1$
21. $x_1 = 2\cdot j$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$
22. $x_1 = (4-j)$, $x_2 = (1+j)$
23. $x_1 = (2+3\cdot j)$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -3$
24. $x_1 = (1+j)$, $x_2 = (2-j)$, $x_3 = 2$

Respuestas Ejercicio 3.5

Ejercicio N°	*signos de $P(x)$*	*máximo número de raices reales positivas*	*signos de $P(-x)$*	*máximo número de raices reales negativas*
1.	+ + – +	2	– + + +	1
2.	+ + – –	1	– + + –	2
3.	+ – + –	3	– – – –	*no tiene raices reales negativas*
4.	+ – – +	2	+ – – +	1
5.	+ + +	*no tiene raices reales positivas*	– – +	1
6.	+ – –	1	– – –	*no tiene raices reales negativas*
7.	+ + –	1	– – –	*no tiene raices reales negativas*
8.	+ + +	*no tiene raices reales positivas*	– + +	1
9.	+ + – + –	3	+ – – – –	1
10.	+ + + –	1	+ – – –	1
11.	+ + – + +	2	+ – – – +	2
12.	+ – + – +	4	+ + + + +	*no tiene raices reales negativas*

13. Signos en $P(x)$: + + + + . Cambios de signo : 0 , $\longrightarrow$ N° máximo de raices reales positivas : 0
Signos en $P(-x)$: + + + + . Cambios de signo : 0 , $\longrightarrow$ N° máximo de raices reales negativas : 0
En consecuencia, $P(x)$ que es de grado 6 debe tener 6 raices complejas.

14. Signos en $P(x)$: + + + + . Cambios de signo : 0 , $\longrightarrow$ N° de raices reales positivas : 0
Signos en $P(-x)$: – – – + . Cambios de signo : 1 , $\longrightarrow$ N° máximo de raices reales negativas : 1
Puesto que $P(x)$ es de grado 5, tiene cinco raices pero a lo más sólo una raiz es real, en consecuencia tiene al menos cuatro raices complejas.

15. Signos en $P(x)$: + + + + + + . Cambios de signo : 0 , $\longrightarrow$ N° de raices reales positivas : 0
Signos en $P(-x)$: – – – – – +. Cambios de signo : 1, $\longrightarrow$ máximo de raices reales negativas : 1
Puesto que $P(x)$ es de grado 7, tiene siete raices pero a lo más sólo una raiz es real, en consecuencia tiene al menos 6 raices complejas.

16. Signos en $P(x)$: + + + + + . Cambios de signo : 0 , $\longrightarrow$ N° de raices reales positivas : 0
    Signos en $P(-x)$: − − + − +. Cambios de signo : 3, $\longrightarrow$ máximo de raices reales negativas : 3
    Como que $P(x)$ es de grado 5, tiene cinco raices pero a lo más sólo tres raices son reales, en consecuencia tiene al menos 2 raices complejas.

17. $P(x) = A\cdot(x^3 - 5\cdot x^2 + 8\cdot x - 6)$

18. $P(x) = A\cdot(x^3 - 7\cdot x^2 + 19\cdot x - 13)$

19. $P(x) = A\cdot(x^3 - x^2 + x + 39)$

20. $P(x) = A\cdot(x^3 - x^2 + 15\cdot x + 17)$

21. $P(x) = A\cdot(x^4 - x^3 + 2\cdot x^2 - 4\cdot x - 8)$

22. $P(x) = A\cdot(x^4 - 10\cdot x^3 + 35\cdot x^2 - 50\cdot x + 34)$

23. $P(x) = A\cdot(x^5 - 2\cdot x^4 + 40\cdot x^2 - 41\cdot x - 78)$

24. $P(x) = A\cdot(x^5 - 8\cdot x^4 + 27\cdot x^3 - 48\cdot x^2 + 46\cdot x - 20)$

3.12 Las raices racionales de un polinomio .

Determinar las raices de un polinomio puede ser un problema muy difícil ; sin embargo auxiliándonos de los teoremas anteriores ya sabemos . . .

- *Cuántas raices tendrá ese polinomio* (*Teorema* 4)
- *Cuando tendrá por lo menos una raiz real* (*comportamiento extremo*)
- *Cual será el intervalo en el que se localizen sus raices reales* . (*Teorema* 5)
- *Cual será el máximo número de raices positivas ó negativas* (*Teorema* 6)
- *Como serán sus factores si tiene raíces complejas* (*Teorema* 7)
- *Que valor tendrá el polinomio en un punto dado* (*Teorema del residuo*)

No obstante, *ninguno de éstos resultados nos dice cómo calcular explícitamente una raíz* .

Mediante el siguiente teorema se resuelve este problema aunque sea solo de manera parcial .

TEOREMA 9 : *SOBRE LAS RAICES RACIONALES*

Si el polinomio $P(x) = a_0 + a_1\cdot x + a_2\cdot x^2 + \dots\dots + a_n\cdot x^n$ ***tiene solo coeficientes enteros , entonces cualquer raiz racional de*** $P(x)$ ***es de la forma :***

$$\left(\frac{p}{q}\right)$$

donde :

p ***es un factor del término constante*** a_0

q ***es un factor del coeficiente líder*** a_n

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9.

Supongamos que el número racional $\left(\frac{p}{q}\right)$ (*escrito en su forma más simple, es decir sin factores comunes entre los números enteros* p *y* q), sea una raiz de un polinomio $P(x)$ el cual solo tiene coeficientes ***enteros*** .

Entonces se cumple que el polinomio evaluado en esa raiz vale cero : $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, ó explícitamente. . .

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 + a_1\cdot\left(\frac{p}{q}\right) + a_2\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n$$

multiplicando ésta igualdad por q^n queda :

$$q^n\cdot\left[a_0 + a_1\cdot\left(\frac{p}{q}\right) + a_2\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_n\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n\right] = q^n\cdot(0)$$

$$q^n\cdot a_0 + q^{(n-1)}\cdot a_1\cdot p + q^{(n-2)}\cdot a_2\cdot p^2 + \ldots\ldots\ldots + q\cdot a_{n-1}\cdot p^{(n-1)} + a_n\cdot p^n = 0$$

Al factorizar p ó q , se obtienen las dos expresiones equivalentes :

$$(A) \qquad q^n\cdot a_0 + p\cdot\left[a_1\cdot q^{(n-1)} + a_2\cdot p\cdot q^{(n-2)} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\cdot p^{n-2}\cdot q + a_n\cdot p^{n-1}\right] = 0$$

$$(B) \qquad q\cdot\left[a_0\cdot q^{(n-1)} + a_1\cdot p\cdot q^{n-2} + a_2\cdot p^2\cdot q^{n-3} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}\cdot p^{n-1}\right] + a_n\cdot p^n = 0$$

Como se ha supuesto que p , q , n y todos los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 , . . . , a_n son números enteros, se concluye que *las expresiones entre paréntesis rectangulares en (A) y (B) son números enteros también* .
Llamémosles M y N respectivamente, entonces resulta :

$$(A) \qquad p\cdot M = -q^n\cdot a_0$$

$$(B) \qquad q\cdot N = -p^n\cdot a_n$$

De (A) se deduce que p es un factor del número $a_0\cdot q^n$; sin embargo dado que p y q no tienen factores en común, entonces p solo puede ser factor de a_0 .

De (B) se deduce que q es un factor del número $a_n\cdot p^n$; sin embargo dado que p y q no tienen factores en común, entonces q solo puede ser factor de a_n .
El teorema queda demostrado .

Si un polinomio $P(x)$ con coeficientes enteros tiene además un coeficiente líder igual a 1, ($a_n = 1$) , del teorema anterior se obtiene el siguiente. . .

COROLARIO : ***Las posibles raices racionales del polinomio :***

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots\ldots + a_n \cdot x^n$$

son números enteros .

Ejemplo 24. Encontrar las posibles raices racionales del polinomio :

$$P(x) = 8 \cdot x^4 - 6 \cdot x^3 - 21 \cdot x^2 - x + 6$$

Solución :

Si éste polinomio tiene alguna raíz racional, el numerador de tal raiz debe ser un factor del término constante $a_0 = 6$ y el denominador debe ser un factor del coeficiente líder $a_n = 8$.
Combinando esos factores se obtienen las posibilidades de las raíces racionales para éste polinomio :

Factores de 6

Factores de 8	± 1	±2	±3	±6
± 1	± 1	± 2	± 3	± 6
± 2	$\pm \frac{1}{2}$	± 1	$\pm \frac{3}{2}$	± 3
± 4	$\pm \frac{1}{4}$	$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{3}{4}$	$\pm \frac{3}{2}$
± 8	$\pm \frac{1}{8}$	$\pm \frac{1}{4}$	$\pm \frac{3}{8}$	$\pm \frac{3}{4}$

eliminando las posibilidades que se repiten solo queda el conjunto :

$$\pm 6 \ , \pm 3 \ , \pm 2 \ , \pm \frac{3}{2} \ , \pm 1 \ , \pm \frac{3}{4} \ , \pm \frac{1}{2} \ , \pm \frac{3}{8} \ , \pm \frac{1}{4} \ \text{y} \ \pm \frac{1}{8}$$

Mediante el teorema del residuo y del factor se puede determinar ahora cuáles de éstas posibilidades son efectivamente raices de $P(x)$. Por ejemplo si se emplea la división sintética para decidir si $x = -1$ es o no una raíz de $P(x)$ se tiene :

$$\frac{P(x)}{(x+1)} : \qquad \begin{array}{r|rrrrr} -1 & 8 & -6 & -21 & -1 & 6 \\ & & -8 & 14 & 7 & -6 \\ \hline & 8 & -14 & -7 & 6 & 0 \end{array}$$

por el teorema del residuo, se concluye que en efecto $P(-1) = 0$ y que $x = -1$ es raiz del polinomio . Entonces, por el teorema del factor se obtiene que :

$$P(x) = Q(x)\cdot[x-(-1)]$$

$$= \left(8\cdot x^3 - 14\cdot x^2 - 7\cdot x + 6\right)\cdot(x+1)$$

Ahora, *si el polinomio cociente* $Q(x)$ *tiene otra raiz racional , entonces también será raíz de* $P(x)$, por lo que podemos ensayar las posibilidades correspondientes a ese polinomio .
En éste ejemplo las posibles raices racionales de $Q(x)$ son las mismas que tiene $P(x)$ pues el coeficiente líder y el término constante son los mismos en ambos polinomios .

Usando la división sintética para decidir si $x = 2$ es o no una raíz de $Q(x)$ se tiene :

$$\frac{Q(x)}{(x+1)} : \qquad \begin{array}{r|rrrr} 2 & 8 & -14 & -7 & 6 \\ & & 16 & 4 & -6 \\ \hline & 8 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

por el teorema del residuo, se concluye que en efecto $Q(2) = 0$ y que $x = 2$ es raiz del polinomio $Q(x)$. Por el teorema del factor se obtiene que. . .

$$Q(x) = Q_1(x)\cdot(x-2)$$

$$= \left(8\cdot x^2 + 2\cdot x - 3\right)\cdot(x-2)$$

Las raices del factor cuadrático $8\cdot x^2 + 2\cdot x - 3$ se pueden encontrar ahora por la fórmula general para la solución de una ecuación cuadrática o bién , ensayar la división sintética con las posibles raices racionales generadas por los coeficientes 8 y -3 , obteniéndose :

$$8\cdot x^2 + 2\cdot x - 3 = (4\cdot x + 3)\cdot(2\cdot x - 1)$$

De éste modo :

$$P(x) = Q(x)\cdot[x-(-1)]$$

$$= Q_1\cdot(x)\cdot(x-2)\cdot(x+1)$$

$$= (4\cdot x + 3)\cdot(2\cdot x - 1)\cdot(x-2)\cdot(x+1)$$

Del teorema del factor se deduce que $P(x) = 0$ si $x = -1, \left(\frac{-3}{4}\right), \left(\frac{1}{2}\right), 2$

Las 4 raíces de $P(x)$ en éste caso fueron todas racionales .

El procedimiento que se usó para determinar las raices racionales en el ejemplo anterior es general y puede resumirse en los siguientes pasos :

- Verificar que el polinomio dado *tenga solo coeficientes enteros* y enlistar todas las posibles raices racionales en orden de su magnitud .
- Se escoge la menor de las posibles raices enteras positivas y se usa la división sintética para decidir si es o no raiz . Se escoge luego la posible raiz entera inmediata mayor a ésta y se continúa de esta manera hasta que se agoten las posibles raices enteras positivas *ó se obtenga un límite superior*.
- Si se encuentra una raiz, se usa el polinomio cociente en cada caso para determinar las otras posibles raices racionales.
- Se ensaya ahora con las posibles raices fraccionarias que estén dentro de los límites superior o inferior, si se han encontrado éstos.
- Se aplican los pasos anteriores a las posibles raices negativas .

Ejemplo 25. Encontrar todas las raices del polinomio :

$$P(x) = 4\cdot x^5 - 17\cdot x^4 + 12\cdot x^3 + 62\cdot x^2 - 112\cdot x + 24$$

Solución :

Los términos del polinomio $P(x)$ tienen 4 variaciones de signo : + − + + − + , mientras que los términos del polinomio $P(-x)$ tienen una sola variación: − − − + + + . Por lo tanto, si éste polinomio tiene raices reales, a lo más una será negativa y 4 positivas .

Por otra parte, como todos los coeficientes son enteros, es posible que éste polinomio tenga algunas raices racionales, los numeradores de tales raices deben ser factores del término constante $a_0 = 24$ y los denominadores deben ser factores del coeficiente líder $a_n = 4$.

Las posibles combinaciones se ilustran en la siguiente tabla . . .

Factores de 24

Factores de 4	± 1	±2	±3	±4	±6	±8	±12	±24
± 1	± 1	± 2	± 3	± 4	± 6	± 8	± 12	± 24
± 2	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm\frac{3}{2}$	± 2	± 3	± 4	± 6	± 12
± 4	$\pm\frac{1}{4}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{3}{4}$	± 1	$\pm\frac{3}{3}$	± 2	± 3	± 8

eliminando las posibilidades repetidas (*las que aparecen en los cuadros sombreados*), queda el conjunto de posibles raices racionales :

$$\pm\frac{1}{4}\ ,\ \pm\frac{1}{2}\ ,\ \pm\frac{3}{4}\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm\frac{3}{2}\ ,\ \pm 2\ ,\ \pm 3\ ,\ \pm 4\ ,\ \pm 6\ ,\ \pm 8\ ,\ \pm 12\ ,\ \pm 24$$

Ahora escogemos la menor de las posibles raice enteras positivas ($+1$) y verificamos mediante el teorema del residuo y del factor si efectivamente es una raiz de $P(x)$:

$$\frac{P(x)}{x-1} : \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 4 & -17 & 12 & 62 & -112 & 24 \\ & & 4 & -13 & -1 & 61 & 51 \\ \hline & 4 & -13 & -1 & 61 & 51 & 75 \end{array}$$

asi que $P(1) = 75$ y por lo tanto $x = 1$ no es raiz del polinomio y tampoco es un límite superior o inferior para las raices reales. La siguiente posibilidad entera positiva es $x = 2$:

$$\frac{P(x)}{x-1} : \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 4 & -17 & 12 & 62 & -112 & 24 \\ & & 8 & -18 & -12 & 100 & -24 \\ \hline & 4 & -9 & -6 & 50 & -12 & 0 \end{array}$$

asi que $P(2) = 0$ y en efecto $x = 2$ es raiz del polinomio.
Del polinomio cociente $Q(x)$ descartamos ahora las posibilidades : $x = 1$, $x = \pm 24$, puesto que 1 no es raiz de $P(x)$ y el término costante de $Q(x)$ es ahora 12 .

Probando ahora con $x = 3$:

$$\frac{Q(x)}{x-3} : \qquad \begin{array}{r|rrrrr} 3 & 4 & -9 & -6 & 50 & -12 \\ & & 12 & 9 & 9 & 177 \\ \hline & 4 & 3 & 3 & 59 & 165 \end{array}$$

asi que $P(3) = 165$, por lo cual $x = 3$ no es raiz del polinomio ; sin embargo, puesto que todos los coeficientes en la tercera línea son positivos, *es un límite superior* para las raices reales de $Q(x)$ (*y en consecuencia, también para las de P(x)*) .
Quedan entonces descartadas las posibilidades : $x = 3$, 4 , 6 , 8 , 12 .

La siguiente menor posibilidad positiva y no entera es $x = \frac{1}{4}$:

$$\frac{Q(x)}{\left(x-\frac{1}{4}\right)} \quad : \quad \begin{array}{c|ccccc} \frac{1}{4} & 4 & -9 & -6 & 50 & -12 \\ & & 1 & -2 & -2 & 12 \\ \hline & 4 & -8 & -8 & 48 & 0 \end{array}$$

asi que $Q\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ y en efecto $x = \frac{1}{4}$ es una raiz de $Q(x)$ y también de $P(x)$, polinomio que se puede escribir ahora en forma semifactorizada como:

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)\cdot(x-2) \\ &= Q_1(x)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot(x-2) \\ &= \left(4\cdot x^3 - 8\cdot x^2 - 8\cdot x + 48\right)\cdot\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot(x-2)\right] \end{aligned}$$

El nuevo polinomio cociente : $Q_1(x) = 4\cdot x^3 - 8\cdot x^2 - 8\cdot x + 48$, tiene las mismas posibles raices racionales que $P(x)$, debido a sus coeficientes líder y constante.

Probemos con $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{Q_1(x)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)} \quad : \quad \begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 4 & -8 & -8 & 48 \\ & & 2 & -3 & \frac{-11}{2} \\ \hline & 4 & -6 & -11 & \frac{85}{2} \end{array}$$

entonces $Q_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{85}{2}$ y por lo tanto $x = \frac{1}{2}$ no es raiz del polinomio y tampoco es un límite superior o inferior para las raices reales. Probemos con $x = -2$:

$$\frac{Q_1(x)}{[x-(-2)]} \quad : \quad \begin{array}{c|cccc} -2 & 4 & -8 & -8 & 48 \\ & & -8 & 32 & -48 \\ \hline & 4 & -16 & 24 & 0 \end{array}$$

entonces $Q_1(-2) = 0$, por lo cual $x = -2$ es una raiz de $Q(x)$, de $Q(x)$ y también de $P(x)$ (*la única posible raiz negativa*) .
Asi que ahora es posible escribir al polinomio $P(x)$ factorizado como sigue . . .

$$P(x) = Q_1(x)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot(x-2) = \left(4\cdot x^2 - 16\cdot x + 24\right)\cdot\left[(x+2)\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot(x-2)\right]$$

donde $Q_2(x) = 4\cdot x^2 - 16\cdot x + 24$ es un factor cuadrático cuyas raices se pueden determinar de la manera usual .

$$4\cdot x^2 - 16\cdot x + 24 = 0 \longrightarrow x = \frac{4 + \sqrt{(4)^2 - 4\cdot(1)\cdot(6)}}{2} \longrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

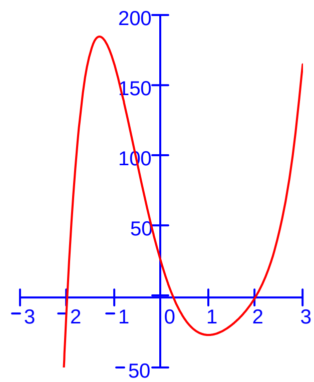
para llegar finalmente a la factorización completa de $P(x)$:

$$P(x) = \left[x - (2 + \sqrt{2}\cdot j)\right]\cdot\left[x - (2 - \sqrt{2}\cdot j)\right]\cdot(x + 2)\cdot(4\cdot x - 1)\cdot(x - 2)$$

$$= 4\cdot x^5 - 17\cdot x^4 + 12\cdot x^3 + 62\cdot x^2 - 112\cdot x + 24$$

Este polinomio tiene un par de raices complejas, una raiz racional negativa y dos raices racionales positivas .

Además, por ser de grado impar y tener su coeficiente líder positivo, se extiende de $-\infty$ a la izquierda hasta ∞ a la derecha como se puede apreciar en su gráfica .



Ejemplo 26. Encontrar todas las raices del polinomio : $P(x) = x^2 + x + 1$

Solución :

Los términos del polinomio $P(x)$ no tienen variaciones de signo : + + + , y $P(-x)$ sólo tiene una variación: − − − + . Por lo tanto, si éste polinomio tiene alguna raiz real, será negativa

Además, como todos los coeficientes son enteros y el coeficiente líder es la unidad, si tal raiz es racional sólo podría ser −1 . Sin embargo por el teorema del residuo . . .

$$\frac{P(x)}{[x - (-1)]} : \quad \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}$$

esto es : $P(-1) = -1$, asi que $x = -1$ no es una raiz de $P(x)$; pero si es un límite inferior porque *los signos de la tercera línea de la división sintética son alternativamente positivos y negativos*. Al no haber más posibles raices racionales, se concluye que la única raiz real de éste polinomio sería irracional y negativa y además estaría comprendida en el intervalo (−1 , 0) .

EJERCICIO 3.6

I. Hallar todas las ***raices racionales*** de los siguientes polinomios

1. $P(x) = x^3 - 4\cdot x^2 + x + 6$
2. $P(x) = x^3 - 4\cdot x^2 - x + 4$
3. $P(x) = x^3 - 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 12$
4. $P(x) = x^3 - 4\cdot x^2 - x + 4$
5. $P(x) = 4\cdot x^3 - 4\cdot x^2 - 11\cdot x + 6$
6. $P(x) = 6\cdot x^3 - 5\cdot x^2 - 17\cdot x + 6$
7. $P(x) = 16\cdot x^3 + 28\cdot x^2 - 9$
8. $P(x) = 6\cdot x^3 - 13\cdot x^2 - 14\cdot x - 3$
9. $P(x) = 10\cdot x^3 + 39\cdot x^2 + 44\cdot x + 12$
10. $P(x) = 12\cdot x^3 + 8\cdot x^2 - 3\cdot x - 2$
11. $P(x) = 8\cdot x^3 - 14\cdot x - 6$
12. $P(x) = 12\cdot x^3 - 4\cdot x^2 - 41\cdot x + 30$
13. $P(x) = x^4 - 6\cdot x^3 + 9\cdot x^2 + 4\cdot x - 12$
14. $P(x) = x^4 + 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 4$
15. $P(x) = x^4 + 4\cdot x^3 - 16\cdot x - 16$
16. $P(x) = x^4 + 2\cdot x^3 - 13\cdot x^2 - 14\cdot x + 24$
17. $P(x) = 6\cdot x^4 - 5\cdot x^3 - 12\cdot x^2 + 5\cdot x + 6$
18. $P(x) = 16\cdot x^4 - 60\cdot x^3 + 52\cdot x^2 - 3\cdot x - 5$
19. $P(x) = 36\cdot x^4 + 60\cdot x^3 - 23\cdot x^2 - 40\cdot x + 16$
20. $P(x) = 12\cdot x^4 + 32\cdot x^3 + 19\cdot x^2 - 7\cdot x - 6$

II. Encontrar ***todas*** las raices de los siguientes polinomios

21. $P(x) = x^3 - 3\cdot x^2 + 4\cdot x - 2$
22. $P(x) = x^3 + 2\cdot x^2 + x + 2$
23. $P(x) = 2\cdot x^3 - 5\cdot x^2 - 2\cdot x + 15$
24. $P(x) = 3\cdot x^3 - 13\cdot x^2 + 31\cdot x - 9$
25. $P(x) = 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 3\cdot x - 1$
26. $P(x) = 4\cdot x^3 + 4\cdot x^2 - 7\cdot x - 12$
27. $P(x) = 9\cdot x^3 - x + 2$
28. $P(x) = x^4 - 2\cdot x^3 + x^2 + 2\cdot x - 2$
29. $P(x) = -6\cdot x^4 + 11\cdot x^3 - 5\cdot x^2 - x + 6$
30. $P(x) = x^4 + 4\cdot x^3 + 27$
31. $P(x) = 6\cdot x^4 - 43\cdot x^3 + 98\cdot x^2 - 17\cdot x - 110$
32. $P(x) = 12\cdot x^5 + x^4 - 13\cdot x^3 - 73\cdot x^2 - 5\cdot x + 6$
33. $P(x) = x^5 - 4\cdot x^4 + 9\cdot x^3 - 14\cdot x^2 + 12\cdot x - 8$

Respuestas . (*Ejercicio 3.6*)

1. $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

3. $x = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

4. $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

5. $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

6. $x = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{3} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$

7. $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

8. $x = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$

9. $x = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{-3}{2} & -2 \end{pmatrix}$

10. $x = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

11. $x = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

12. $x = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

13. $x = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

14. $x = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. $x = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

16. $x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

17. $x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$

18. $x = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

19. $x = \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

20. $x = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

21. $x = \begin{pmatrix} 1 & 1+j & 1-j \end{pmatrix}$

22. $x = \begin{pmatrix} -2 & i & -i \end{pmatrix}$

23. $x = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} & 2+i & 2-i \end{pmatrix}$

24. $x = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 2+i\cdot\sqrt{5} & 2-i\cdot\sqrt{5} \end{pmatrix}$

25. $x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \left(\frac{1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right) & \left(\frac{1+i\cdot\sqrt{3}}{2}\right) \end{bmatrix}$

26. $x = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \left(\frac{-5+\sqrt{7}\cdot j}{4}\right) & \left(\frac{-5-\sqrt{7}\cdot j}{4}\right) \end{bmatrix}$

27. $x = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1+\sqrt{2}\cdot j}{3} & \frac{1-\sqrt{2}\cdot j}{3} \end{pmatrix}$

28. $x = \begin{bmatrix} 1 & -1 & (1+j) & (1-j) \end{bmatrix}$

29. $x = \begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{3}{2} & \left(\frac{1-\sqrt{3}\cdot j}{2}\right) & \left(\frac{1+\sqrt{3}\cdot j}{2}\right) \end{bmatrix}$

30. $x = \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2}\cdot j) & (1-\sqrt{2}\cdot j) & -3 & -3 \end{bmatrix}$

31. $x = \begin{bmatrix} \frac{-5}{6} & 2 & (3+j\cdot\sqrt{2}) & (3-j\cdot\sqrt{2}) \end{bmatrix}$

32. $x = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{4} & (-1+j\cdot\sqrt{2}) & (-1-j\cdot\sqrt{2}) \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 2 & \left(\frac{1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{7}\cdot j}{2}\right) & \left(\frac{1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right) & \left(\frac{1-\sqrt{7}\cdot j}{2}\right) \end{bmatrix}$

3.13 ***Métodos numéricos para determinar las raices de un polinomio*** **.**

Los métodos numéricos se aplican más que nada para calcular las *raices irracionales* de los polinomios con el grado de aproximación que se desee .Aunque también pueden usarse para obtener las raices reales en forma *aproximada* .

a) ***Método de Horner*** .

Se basa en *la transformación del polinomio* $P(x)$ *del cual se buscan las raices, a un nuevo polinomio que tenga las mismas raices que* $P(x)$ *pero disminuidas en una cantidad constante* h .

Sea el polinomio $P(x)$ de grado n :

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

que evaluado en $x = h + z$ es :

$$P(h+z) = a_n \cdot (h+z)^n + a_{n-1} \cdot (h+z)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_2 \cdot (h+z)^2 + a_1 \cdot (h+z) + a_0$$

$$= a_n \cdot z^n + A_{n-1} \cdot z^{n-1} + A_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + A_2 \cdot z^2 + A_1 \cdot z + A_0$$

evidentemente éste es un polinomio en la variable z : $F(z) = P(z+h)$ en el cual el coeficiente líder es el mismo que en $P(x)$ y los demás coeficientes : A_{n-1} , A_{n-2} , . . . , A_1 , A_0 *dependen* de h .

Si $x = r$ es una raiz del polinomio $P(x)$ entonces $P(r) = 0$; $r = h + z$, es decir $z = r - h$ y como $F(z) = P(z+h)$, se sigue que :

$$F(z) = F(r-h) = P(r-h+h) = P(r) = 0$$

Por lo tanto, si $x = r$ es una raiz de $P(x)$ entonces $z = (r-h)$ es una raiz de $F(z)$.
Esto significa que $F(z)$ *será un polinomio con las mismas raices que* $P(x)$ *; pero disminuidas en la cantidad constante* h .

¿Y cómo calcular los coeficientes de $F(z)$? . Pues bién, dado que $F(z)$ se obtuvo de $P(x)$ subtituyendo x por $(z+h)$, podemos obtener $P(x)$ a partir de $F(z)$ subtituyendo z por $(x-h)$:

$$F(z) = P(z+h)$$

$$F(x-h) = P[(x-h)+h] = P(x)$$

$$= a_n \cdot (x-h)^n + A_{n-1} \cdot (x-h)^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + A_2 \cdot (x-h)^2 + A_1 \cdot (x-h) + A_0$$

entonces, claramente la división sintética : $\dfrac{F(x-h)}{(x-h)}$ es decir :

$$\frac{P(x)}{(x-h)} = \frac{a_n\cdot(x-h)^n + A_{n-1}\cdot(x-h)^{n-1} + \dots\dots + A_2\cdot(x-h)^2 + A_1\cdot(x-h) + A_0}{(x-h)}$$

$$= a_n\cdot(x-h)^{n-1} + A_{n-1}\cdot(x-h)^{n-2} + \dots\dots\dots + A_2\cdot(x-h) + A_1 + \frac{A_0}{(x-h)}$$

$$= Q_1(x) + \frac{A_0}{(x-h)}$$

dará como residuo el coeficiente A_0 .

Análogamente, el coeficiente A_1 será el último número en la tercera línea de la división sintética del cociente:

$$\frac{Q_1\cdot(x)}{(x-h)} = \frac{a_n\cdot(x-h)^{n-1} + A_{n-1}\cdot(x-h)^{n-2} + \dots\dots\dots + A_2\cdot(x-h) + A_1}{(x-h)}$$

$$= Q_2\cdot(x) + \frac{A_1}{(x-h)}$$

y asi sucesivamente , pudiéndose obtener de esta manera *todos los coeficientes de* $F(z)$

El procedimiento anterior se llama *decrecimiento de las raices de un polinomio* y el polinomio transformado se llama *polinomio disminuido* .

Ejemplo 27. Obtener el polinomio disminuido $F(x)$ a partir del polinomio $P(x)$ dado, siendo el número h la disminución de sus raices.

a) $P(x) = x^3 - 7\cdot x + 6$; $h = 4$

b) $P(x) = 3\cdot x^4 + 11\cdot x^3 - x^2 - 19\cdot x + 6$; $h = -2$

c) $P(x) = 2\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 3$; $h = 0.3$

Solución :

a) Como se mostró antes, en la divisíón sintética repetida de $P(x)$ por $(x-h)$, los residuos obtenidos son los coeficientes del polinomio disminuido, por lo tanto . . .

$$\frac{P(x)}{x-4} \quad : \quad \begin{array}{l} 1^{a}\ \text{DIVISION} \\ \\ 2^{a}\ \text{DIVISION} \\ \\ 3^{a}\ \text{DIVISION} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrrl} 4 & 1 & 0 & -7 & 6 & \\ & & 4 & 16 & 36 & \\ \hline & 1 & 4 & 9 & \boxed{42} & \longleftarrow\ = A_0 \\ & & 4 & 32 & & \\ \hline & 1 & 8 & \boxed{41} & & \longleftarrow\ = A_1 \\ & & 4 & & & \\ \hline & 1 & \boxed{12} & & & \longleftarrow\ = A_2 \end{array}$$

entonces el polinomio disminuido es :

$$F(x) = a_3 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_0 \quad = x^3 + 12 \cdot x^2 + 41 \cdot x + 42$$

el lector puede comprobar que los polinomios se factorizan como. . .

$$P(x) = x^3 - 7 \cdot x + 6 \; = \; \boxed{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+3)}$$

$$F(x) = x^3 + 12 \cdot x^2 + 41 \cdot x + 42 \; = \; \boxed{(x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+7)}$$

y en efecto las raices de $P(x)$ se obtienen de las raices de $F(x)$ al disminuirlas en la cantidad constante $h = 4$.

b) $P(x) = 3 \cdot x^4 + 11 \cdot x^3 - x^2 - 19 \cdot x + 6$; $h = -2$

$$\frac{P(x)}{x-(-2)} \quad : \quad \begin{array}{l} 1^{a}\ \text{DIVISION} \\ \\ 2^{a}\ \text{DIVISION} \\ \\ 3^{a}\ \text{DIVISION} \end{array} \quad \begin{array}{r|rrrrrl} -2 & 3 & 11 & -1 & -19 & 6 & \\ & & -6 & -10 & 22 & -6 & \\ \hline & 3 & 5 & -11 & 3 & \boxed{0} & \longleftarrow\ = A_0 \\ & & -6 & 2 & 18 & & \\ \hline & 3 & -1 & -9 & \boxed{21} & & \longleftarrow\ = A_1 \\ & & -6 & 14 & & & \\ \hline & 3 & -7 & \boxed{5} & & & \longleftarrow\ = A_2 \end{array}$$

4ª DIVISION
$$\left\{\begin{array}{cc} 3 & -7 \\ & -6 \\ \hline 3 & \boxed{-13} \end{array}\right. \quad \longleftarrow = A_3$$

entonces el polinomio disminuido es :

$$F(x) = a_4 \cdot x^4 + A_3 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_0$$

$$= 3 \cdot x^4 - 13 \cdot x^3 + 5 \cdot x^2 + 21 \cdot x + 0$$

Es fácil comprobar que éstos polinomios se factorizan como . . .

$F(x) = x \cdot (x-3) \cdot (3 \cdot x - 7) \cdot (x+1)$ y $P(x) = (x+2) \cdot (x-1) \cdot (3 \cdot x - 1) \cdot (x+3)$

y en efecto, las raices disminuidas en -2 (*o equivalentemente, aumentadas en* 2) del polinomio $F(x)$ son las raices del polinomio inicial $P(x)$.

c) $P(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3$; $h = 0.3$

$\dfrac{P(x)}{x - 0.3}$:

1ª DIVISION
$$\left\{\begin{array}{c|cccc} 0.3 & 2 & -3 & -4 & 3 \\ & & 0.6 & -0.72 & -1.416 \\ \hline & 2 & -2.4 & -4.72 & \boxed{1.584} \end{array}\right. \quad \longleftarrow = A_0$$

2ª DIVISION
$$\left\{\begin{array}{ccc} & 0.6 & -0.54 \\ \hline 2 & -1.8 & \boxed{-5.26} \end{array}\right. \quad \longleftarrow = A_1$$

3ª DIVISION
$$\left\{\begin{array}{cc} & 0.6 \\ \hline 2 & \boxed{-1.2} \end{array}\right. \quad \longleftarrow = A_2$$

entonces el polinomio disminuido es . . .

$$F(x) = a_3 \cdot x^3 + A_2 \cdot x^2 + A_1 \cdot x + A_0 \quad = \quad 2 \cdot x^3 - 1.2 \cdot x^2 - 5.26 \cdot x + 1.584$$

Las raices de $P(x)$ son . . .

$$x = [\,(2.11084) \quad (-1.20202) \quad (0.59118)\,]$$

y las raices de $F(x)$ son en cambio . . .

$$x = [(1.81084) \quad (-1.50202) \quad (0.29118)]$$

que efectivamente son las raices de $P(x)$ disminuidas en 0.3 (*más adelante veremos cómo se obtuvieron estas raices*)

En el método de Horner, el cálculo que es necesario para obtener una raíz real (*racional ó irracional*) de un polinomio dado puede resultar tedioso; sin embargo el método es *simple, directo y puramente algebráico* .
Es recomendable usar el método de Horner método sólo para el cálculo de las raices irracionales . Este método consiste en la aplicación repetida de los siguientes operaciones :

- *Localizar una raiz con aproximación de la primera cifra* . Si al evaluar el polinomio en los valores $x = a$ y $x = (a + \delta)$ los números $P(a)$ y $P(a + \delta)$ tienen signos opuestos, significa que $P(x)$ tiene al menos una raiz comprendida en el intervalo $(a, a + \delta)$. Dado que $P(x)$ es una función continua, al pasar de valores negativos a positivos o viceversa, debe necesariamente valer cero $P(x) = 0$ para algún valor de x en ese intervalo. La primera de las cifras de ésta raiz es entonces el número a .
- *Transformar el polinomio para que sus raices disminuyan en la cantidad* a . La idea es hacer que el polinomio disminuido $F(x)$ tome un valor cada vez más cercano a cero en la raiz $x = 0$, raiz que corresponde a la raiz aumentada $x = r$ de $P(x)$.
- *Repetir los pasos anteriores hasta alcanzar la precisión deseada* . La serie de cifras : a , a_1 , a_2 , . . . , a_k determinadas en la aplicación repetida de los dos primeros pasos, se suman para dar el valor aproximado de la raiz r buscada :

$$r \approx a + a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_k$$

Ejemplo 28. Obtener las raices del polinomio $P(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2$

Solución :
Las posibles raices racionales de éste polinomio podrían ser : -2 , -1 , 1 y 2 . Sin embargo, por el teorema del residuo se encuentra que ninguna de ellas es una raiz de $P(x)$.
Del mismo teorema del residuo y por división sintética se puede evaluar $P(x)$ y se obtiene que :

$$P(-2) = -8 \;,\; P(-1) = 3 \;,\; P(1) = -5 \quad \text{y} \quad P(5) = 27$$

y necesariamente $P(x)$, por ser una función continua, tiene una raiz real irracional comprendida en cada uno de los intervalos :

$$(-2,-1)\ ,\quad (-1,1)\quad \text{y}\quad (1,5)$$

Calculemos con el método de Horner la raiz irracional de éste polinomio que queda en el intervalo $(-2,-1)$. Disminuyendo tal raiz en -2 , (*es decir aumentándola en* 2), la raiz correspondiente del polinomio disminuido estará en el intervalo $[\,-2-(-2)\,,-1-(-2)\,] = (0,1)$.

Primera repetición : Por división sintética el polinomio disminuido resulta :

$$F(x) = x^3 - 9\cdot x^2 + 19\cdot x - 8$$

Notando ahora que $F(0.5) = -0.625$ y $F(0.6) = 0.376$, se concluye que $F(x)$ debe tener una raiz real en el intervalo $(0.5,0.6)$.
Disminuyamos en 0.5 las raices de $F(x)$ para que la raiz del polinomio disminuido correspondiente $F_1(x)$ se localice asi en el intervalo equivalente $[(0.5-0.5),(0.6-0.5)] = (0,0.1)$.

Segunda repetición : Por división sintética el polinomio disminuido resulta :

$$F_1(x) = x^3 - 7.5\cdot x^2 + 10.75\cdot x - 0.625$$

Notando ahora que $F_1(0.06) = -0.00678$ y $F(0.07) = 0.09109$, se concluye que $F_1(x)$ debe tener una raiz real en el intervalo $(0.06,0.07)$.
Disminuyamos en 0.06 las raices de $F_1(x)$ para que la raiz del polinomio disminuido correspondiente $F_2(x)$ se localice asi en el intervalo: $[(0.06-0.06),(0.07-0.06)] = (0,0.01)$.

Por división sintética el polinomio disminuido resulta :

$$F_2(x) = x^3 - 7.32\cdot x^2 + 9.8608\cdot x - 0.006784$$

Si elegimos terminar aqui el proceso de cálculo para esa raiz, (*que ya es cercana a cero*), los términos con x^3 y x^2 serán aún más pequeños, asi que despreciándolos sería posible escribir :

$$F_2(x) \approx 9.8608\cdot x - 0.006784$$

cuya raiz es . . .

$$x_0 = \frac{0.006784}{9.8608} = 0.00068797$$

Por lo tanto el valor estimado hasta aqui para la raiz de $P(x)$ es . . .

$$r = -2 + 0.5 + 0.06 + x_0 = -1.43931203$$

Al evaluar el polinomio inicial en éste número, se obtiene : $P(-1.43931203) = -0.00000353$

valor que es ya muy cercano a cero .
Obviamente, con más repeticiones de los pasos del método de Horner se logrará mayor precisión

Todo el proceso anterior para el cálculo aproximado de ésta raiz irracional puede quedar resumido en un esquema como el siguiente : (*Los coeficientes de los polinomios disminuidos se indican en negritas*)

-2	1	-3	-5	2		$\longleftarrow$ *Coeficientes de* $P(x)$
		-2	10	-10		
	1	-5	5	$\boxed{-8}$		$\longleftarrow$ $P(-2) < 0$, $P(-1) > 0$ *raiz entre* -2 *y* -1
		-2	14			
	1	-7	$\boxed{19}$			
		-2				
0.5	1	$\boxed{-9}$	19	-8		$\longleftarrow$ *Coeficientes de* $F(x)$
		0.5	-4.25	7.325		
	1	-8.5	14.75	$\boxed{-0.625}$		$\longleftarrow$ $F(0.5) < 0$, $F(0.6) > 0$ *raiz entre* 0.5 *y* 0.6
		0.5	-4			
	1	-8	$\boxed{10.75}$			
		0.5				
0.06	1	$\boxed{-7.5}$	10.75	-0.625		$\longleftarrow$ *Coeficientes de* $F_1(x)$
		0.06	-0.4464	0.61822		
	1	-7.44	10.3036	$\boxed{-0.006784}$		$\longleftarrow$ $F_1(0.06) < 0$, $F_1(0.07) > 0$ *raiz entre* 0.06 *y* 0.07
		0.06	-0.4428			
	1	-7.38	$\boxed{9.8608}$			
		0.06				
	1	$\boxed{-7.32}$	9.8608	-0.006784		$\longleftarrow$ *Coeficientes de* $F_2(x)$

$$F_2(x) = x^3 - 7.32\cdot x^2 + 9.8608\cdot x - 0.006784 \approx 9.8608\cdot x - 0.006784 \quad \longleftarrow \; x_0$$

las otras dos raices irracionales de $P(x)$ se calculan por un procedimiento parecido y son :

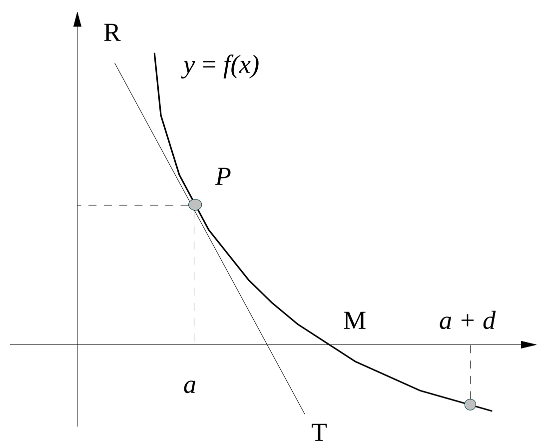
$$x \approx 0.338879... \qquad\qquad x \approx 4.100432....$$

b) ***Método de Newton*** .

Este método se aplica para calcular en forma aproximada las raices no solo de un polinomio, sino de *cualquier* función matemática $f(x)$, *siempre que ésta sea sea continua y derivable* . Además es mucho menos elaborado que el método de Horner debido a que se emplea *la función derivada* de la función $f(x)$.

Dada la función $y = f(x)$ supóngase que $f(a)$ y $f(a+d)$ tienen signos opuestos . Esto significa que, por ser continua, la función $f(x)$ cruza al menos una vez por el eje X (*tiene por lo menos una raiz real*) entre $x = a$ y $x = a + d$.

Sin perder generalidad, supongamos que $d > 0$ y sea RT la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto P del plano que tiene las coordenadas $(a, f(a))$, como se ilustra en la figura de la derecha.



Es obvio que la intersección de RT con el eje X es una aproximación al punto M donde la curva corta al eje X es decir, de la raiz $x = r$ donde $f(r) = 0$.

El método de Newton determina la abscisa de tal punto, basándose en la interpretación geométrica de la derivada de una función evaluada en $x = a$, a saber: *la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto* $(a, f(a))$.

$$\frac{d \cdot f(a)}{dx} = \textit{pendiente de } RT$$

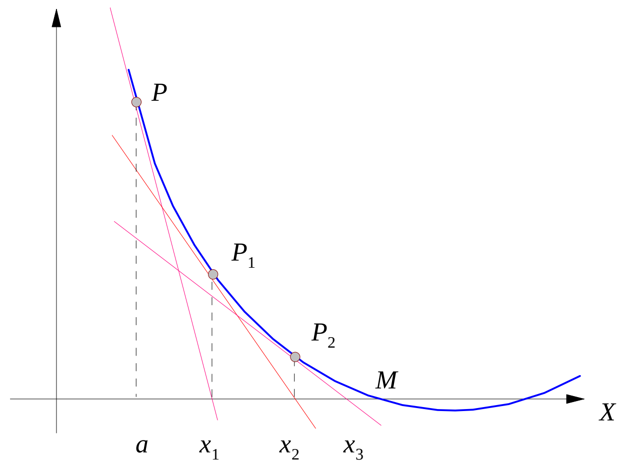
donde $\dfrac{d \cdot f(a)}{dx}$ significa evaluar la derivadade la función $f(x)$ que es $\dfrac{df(x)}{dx}$ en el punto $x = a$.

Por lo tanto, de la ecuación punto-pendiente de la recta tangente se obtiene :

$$y - f(a) = \left(\frac{df(a)}{dx}\right) \cdot (x - a)$$

El intercepto de ésta recta con el eje X se encuentra haciendo $y = 0$ y resolviendo ésta ecuación para x, obteniéndose . . .

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{\left(\frac{df(a)}{dx}\right)}$$



que representa la primera aproximación a la raiz de $f(x)$, (*la abscisa del punto M*) .
Si se repite el proceso, tomando ahora como punto inicial P_1 al punto de coordenadas $\left(x_1, f(x_1)\right)$, se obtendrá la 2ª aproximación a la raiz de $f(x)$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\left(\frac{df(x_1)}{dx}\right)}$$

El procedimiento se repite tantas veces como se desee, obteniéndose la serie de valores :

$$a \ , \ x_1 \ , \ x_2 \ , \ldots , \ x_n$$

en la cual, al aumentar el número de aproximaciones, el número :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)} \qquad (3.9)$$

se aproxima cada vez más, al valor de la raiz exacta de $f(x)$.

<u>Ejemplo</u> 29. Obtener las raices del polinomio $P(x) = x^3 - 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 2$

<u>Solución</u> :
Este es el polinomio del ejemplo 26 , para el cual :

$$P(-2) = -8 \ , \ P(-1) = 3 \ , \ P(1) = -5 \ \text{ y } \ P(5) = 27$$

que necesariamente tiene una raiz real irracional comprendida en cada uno de los intervalos :

$$(-2,-1) \ , \ (-1,1) \ \text{ y } \ (1,5)$$

Además su derivada es:

$$\frac{d\cdot P(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\cdot\left(x^3 - 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 2\right) = 3\cdot x^2 - 6\cdot x - 5$$

y tomando $a = -2$ para calcular la raiz en $(-2,-1)$, resulta el siguiente esquema de iteraciones :

Iteración n	x_n	$P(x_n)$	$\frac{dP(x_n)}{dx}$	$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{P(x_n)}{P'(x_n)}\right)$
0	$a = -2$	-8	19	$-2 - \left(\frac{-8}{19}\right) = -1.5789474$
1	-1.5789474	-1.5209218	11.9529091	$-1.578947 - \left(\frac{-1.520921}{11.952909}\right) = -1.4517046$
2	-1.4517046	-0.1232051	10.0325663	$-1.45170 - \left(\frac{-0.12320}{10.03256}\right) = -1.4394241$
3	-1.4394241	-0.0011076	9.8523698	$-1.439424 - \left(\frac{-0.00110}{9.852369}\right) = -1.4393117$

En tan solo 4 iteraciones se ha determinado un valor x para el cual $P(x)$ es prácticamente cero. . .

$$P(-1.4393117) = -2.78934 \times 10^{-7}$$

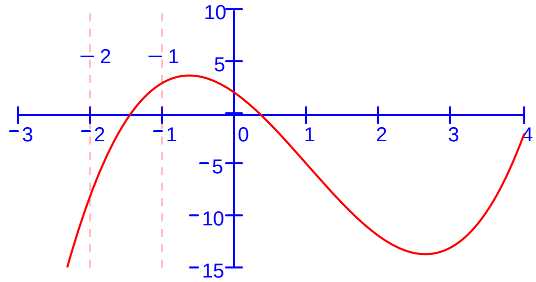
y por lo tanto $x_4 = -1.4393117$ es práctcamente la raiz real exacta del polinomio .

Es claro que ésta es una mucho mejor aproximación que la calculada antes con el método de *Horner* , y que además ha sido obtenida con menor esfuerzo .
Las otras raices de *P(x)* se pueden calcular de un modo similar, por ejemplo para la raiz comprendida en el intervalo $(-1, 1)$ se tiene :

Iteración n	x_n	$P(x_n)$	$\frac{dP(x_n)}{dx}$	$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{P(x_n)}{P'(x_n)}\right)$
0	$a = -1$	3	4	$-1 - \left(\frac{3}{4}\right) = -1.75$
1	-1.75	-3.796875	14.6875	$-1.75 - \left(\frac{-3.796875}{14.6875}\right) = -1.4914894$
2	-1.4914894	-0.5340537	10.6225583	$-1.491489 - \left(\frac{-0.5340537}{10.6225583}\right) = -1.441214$
3	-1.441214	-0.0187658	9.8785774	$-1.44121 - \left(\frac{-0.018765}{9.8785774}\right) = -1.4393144$

que nuevamente nos ha llevado a la raiz anterior comprendida en $(-2,-1)$, y no a la que se esperaba entre -1 y 1 .
Esto se debe a que *la pendiente, (la derivada de la función evaluada en el punto inicial* $P'(-1) = 4$*)* *es del mismo signo* *que en el punto inicial del intervalo anterior* $P'(-2) = 19$

Como puede apreciarse en la gráfica de la función $P(x) = x^3 - 3\cdot x^2 - 5\cdot x + 2$ ilustrada a la derecha, en el punto $x = -2$, la recta tangente al polinomio está inclinada hacia la derecha, al igual que en el punto $x = -1$. Es debido a ésto que la intersección de ambas tangentes con el eje X se aproximará a la *misma* raiz .



Pero si en vez de tomar $a = -1$ como primera aproximación de la segunda raiz, se toma el extremo derecho del intervalo : $a = 1$, se obtendrá . . .

$$x_1 = a - \frac{P(a)}{P'(a)} = \left(1 - \frac{P(1)}{P'(1)}\right) = \left[1 - \left(\frac{-5}{-8}\right)\right] = 0.375$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = \left(0.375 - \frac{P(0.375)}{P'(0.375)}\right) = \left[0.375 - \left(\frac{-0.244141}{-6.82812}\right)\right] = 0.339245$$

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)} = 0.339245 - \frac{P(0.339245)}{P'(0.339245)} = 0.3388797$$

valor para el cual el polinomio vale $P(0.3388798) = -0.00000009448$ que es prácticamente cero y en consecuencia $x = 0.3388798$ es una buena aproximación de la raiz irracional de $P(x)$.

Para la última raiz de $P(x)$ comprendida en $(1,5)$, escogemos como valor inicial $a = 5$ (por la misma razón que se indicó en la raiz anterior , no podemos escoger $a = 1$) y queda :

$$x_1 = a - \frac{P(a)}{P'(a)} = \left(5 - \frac{P(5)}{P'(5)}\right) = \left[5 - \left(\frac{27}{40}\right)\right] = 4.325$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = \left(4.325 - \frac{P(4.325)}{P'(4.325)}\right) = \left[4.325 - \left(\frac{5.15995313}{25.166875}\right)\right] = 4.1199704$$

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)} = 4.1199704 - \left(\frac{0.41070145}{21.20264683}\right) = 4.1006001$$

$$x_4 = x_3 - \frac{P(x_3)}{P'(x_3)} = 4.1006001 - \left(\frac{0.00350468}{20.84116406}\right) = 4.1004319$$

valor para el cual el polinomio vale : $P(4.1004319) = -0.0000017881$, que es muy cercano a cero

En resumen las raices del polinomio son : -1.4393117 , 0.3388798 , 4.1004319
exactas a la 6ª cifra decimal .

Ejemplo 30. Obtener por lo menos una raiz del polinomio $P(x) = x^4 + 8 \cdot x - 12$

Solución :
Por inspección se encuentra que :

$$P(-3) = 45 \ , \ P(-2) = -12 \ , \ P(1) = -3 \ , \ P(2) = 20$$

por lo tanto, $P(x)$ tiene al menos una raiz real entre comprendida entre $x = -3$ y $x = -2$ y otra entre $x = 1$ y $x = 2$. Además su derivada es:

$$\frac{d \cdot P(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \left(x^4 + 8 \cdot x - 12\right) = 4 \cdot x^3 + 8$$

y tomando $a = 3$ como punto inicial para calcular la raiz en $(-3, -2)$, resulta . . .

$$x_1 = a - \frac{P(a)}{P'(a)} = \left(-3 - \frac{P(-3)}{P'(-3)}\right) = \left[-3 - \left(\frac{45}{-100}\right)\right] = -2.55$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = \left(-2.55 - \frac{P(-2.55)}{P'(-2.55)}\right) = \left[-2.55 - \left(\frac{9.882506}{-58.3255}\right)\right] = -2.3805629$$

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)} = -2.3805629 - \left(\frac{1.0712894}{-45.9633589}\right) = -2.3572554$$

$$x_4 = x_3 - \frac{P(x_3)}{P'(x_3)} = -2.3572554 - \left(\frac{0.0183496}{-44.3938014}\right) = -2.3568421$$

En éste valor aproximado de la raiz, el valor del polinomio es $P(-2.3568421) = 0.00000733$.
Con $P(x)$ tan cercano a cero, se puede decir que $x = -2.3568421$ es prácticamente una de las raices reales del polinomio .

Ejemplo 31. Obtener por lo menos una raiz de la función $f(x) = e^x + x - 3$

Solución :

Por inspección se encuentra que : $f(0) = -2$ y $f(1) = 0.71828$

Por lo tanto, $f(x)$ tiene al menos una raiz real entre comprendida entre $x = 0$ y $x = 1$. Además su derivada es:

$$\frac{d \cdot f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \left(e^x + x - 3\right) = e^x + 1$$

asi que tomando $a = 0$ como punto inicial para calcular la raiz, resulta . . .

$$x_1 = a - \frac{P(a)}{P'(a)} = \left(0 - \frac{P(0)}{P'(0)}\right) = \left[0 - \left(\frac{-2}{2}\right)\right] = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} = \left(1 - \frac{P(1)}{P'(1)}\right) = \left[-1 - \left(\frac{0.71828183}{3.71828183}\right)\right] = 0.80682426$$

$$x_3 = x_2 - \frac{P(x_2)}{P'(x_2)} = 0.80682426 - \left(\frac{0.0476048}{0.80682426}\right) = 0.79213496$$

$$x_4 = x_3 - \frac{P(x_3)}{P'(x_3)} = 0.79213496 - \left(\frac{0.00024057}{3.20810561}\right) = 0.79205997$$

En éste valor aproximado de la raiz, el valor del polinomio es $f(0.79205997) = 0.000000005034$.
Se puede concluir entonces que $x_4 = 0.79205997$ es una buena aproximación para la solución de la ecuación : $e^x + x - 3 = 0$

EJERCICIO 3. 7

I. Determinar las raices reales de los siguientes polinomios con una precisión de dos o tres cifras decimales usando el método de Horner y el método de Newton también . Comparar los resultados .

1. $P(x) = x^3 + 2\cdot x^2 - 8$
2. $P(x) = x^3 + 3\cdot x^2 - 10$
3. $P(x) = x^3 + 2\cdot x^2 - 5\cdot x - 8$
4. $P(x) = x^4 - 4\cdot x^3 - 6\cdot x^2 + 20\cdot x + 9$
5. $P(x) = 2\cdot x^3 - 7\cdot x^2 - 3\cdot x + 1$
6. $P(x) = 4\cdot x^4 + 8\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 6\cdot x - 6$
7. $P(x) = x^4 - 3\cdot x^3 + 2\cdot x^2 - x - 1$

II. Usando el método de Horner o el método de Newton, determinar el valor de las siguientes raices con una precisión de cuatro cifras decimales. Comprobar el resultado .

8. $\sqrt[3]{5}$ *Sugerencia : resolver la ecuación:* $x^3 - 5 = 0$
9. $\sqrt[3]{6}$
10. $\sqrt[3]{9}$
11. $\sqrt[4]{3}$
12. $\sqrt[4]{5}$
13. $\sqrt[5]{2}$
14. $\sqrt[5]{8}$

Respuestas . (*Ejercicio* 3.7)

1. $x = 1.50976$
2. $x = 1.49203$
3. $x = (2.12489 \quad -2.76156 \quad -1.36333)$
4. $x = (4.162278 \quad -2.162278 \quad 2.414214 \quad -.414214)$
5. $x = (3.85542 \quad -.5793 \quad .22387)$
6. $x = (.86603 \quad -.86603)$
7. $x = \begin{pmatrix} 2.41421 \\ -0.41421 \end{pmatrix}$
8. 1.70998
9. 1.81712
10. 2.08008
11. 1.31607
12. 1.49535
13. 1.1487
14. 1.51572

Capítulo IV
Fracciones Parciales

4.1 Funciones racionales .

La razón de dos números enteros n y m define un número racional r ($r = \frac{n}{m}$; $m \neq 0$) .

De igual manera, *una función racional* $f(x)$ *se define como la razón o cociente de dos polinomios :* $P_n(x)$ *y* $Q_m(x)$ *de grados n y m :*

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \qquad ; \qquad Q_m(x) \neq 0 \qquad (4.1)$$

- la función racional se llama ***impropia*** si el grado n del polinomio numerador $P_n(x)$ *es mayor ó igual que el grado* m del polinomio denominador $Q_m(x)$
- a función racional se llama ***propia*** si el grado n del polinomio numerador $P_n(x)$ *es menor que el grado* m del polinomio denominador $Q_m(x)$

es decir, $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ es propia si $n < m$ y es impropia si $n \geq m$.

En otras palabras, si puede hacerse la división de los polinomios dando un cociente distinto de cero, entonces la función racional es impropia .

Ejemplo 1 . Determinar si las siguientes fracciones son funciones racionales propias o impropias :

a) $f(x) = \frac{15 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 2}{5 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1}$.

En ésta fracción el polinomio del numerador es $P_3(x) = 15 \cdot x^3 + 7 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 2$ de tercer grado y el polinomio del denominador es $Q_2(x) = 5 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 1$ de segundo grado, es decir $n > m$, de modo que *la función racional es impropia* y la división de los polinomios genera un polinomio cociente distinto de cero.

b) $h(x) = \frac{-43 \cdot x - 22}{6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 10}$.

El polinomio del numerador es $P_1(x) = -43 \cdot x - 22$ de primer grado y el denominador es $Q_2(x) = 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 10$ de segundo grado, es decir $n < m$, de modo que *la función racional es propia*

c) $g(x) = \dfrac{3\cdot x^3 - 5\cdot x^2 + 5\cdot x - 4}{x^3 - 4\cdot x^2 + 6\cdot x - 4}$.

Es una función racional impropia porque ambos polinomios, el numerador y el denominador son del mismo grado .

d) $k(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{-2\cdot x^2 + 3\cdot\sqrt{x}}$.

No es una fracción propia ni impropia porque sencillamente *no es una función racional* (*el denominador no es un polinomio*)

4.2 <u>La descomposición de una función racional</u> .

En el capítulo anterior se mostró que *todo polinomio tiene solamente dos tipos de factores: lineales* $(a\cdot x - b)$ *y cuadráticos irreducibles en los reales* $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, resulta entonces que cualquier función racional se puede representar en forma equivalente como una suma de fracciones parciales (propias) cuyo denominador es lineal ó cuadrático y tienen la forma general :

$$\frac{A}{p\cdot x + q} \qquad \text{y} \qquad \frac{B\cdot x + C}{a\cdot x^2 + b\cdot x + c}$$

donde las *constantes* A, B , C , a, b , c , p, q dependen del valor de los coeficientes que tengan los polinomios de una función racional .

Asi por ejemplo, las funciones racionales del ejemplo 1 *se descomponen* en las siguientes sumas :

a) $f(x) = \dfrac{15\cdot x^3 + 7\cdot x^2 - 4\cdot x - 2}{5\cdot x^2 + 4\cdot x - 1} = (3\cdot x - 1) + \dfrac{1}{(x+1)} - \dfrac{2}{(5\cdot x - 1)}$

b) $f(x) = \dfrac{-43\cdot x - 22}{6\cdot x^2 + 11\cdot x - 10} = \dfrac{-9}{(2\cdot x + 5)} - \dfrac{8}{(3\cdot x - 2)}$

c) $f(x) = \dfrac{3\cdot x^3 - 5\cdot x^2 + 5\cdot x - 4}{x^3 - 4\cdot x^2 + 6\cdot x - 4} = 3 + \dfrac{5}{(x-2)} + \dfrac{1 + 2\cdot x}{\left(x^2 - 2\cdot x + 2\right)}$

¿Cómo se calculan las constantes para la descomposición en fracciones parciales en éstos ejemplos ?

Los teoremas que veremos enseguida nos ayudarán a encontrar la respuesta; pero antes notemos la utilidad que representa la descomposición de una función racional en una suma de fracciones más simples. Por ejemplo si debemos integrar ó calcular la derivada de una función racional, es claro que sería mucho más fácil realizar éstas operaciones en una expresión equivalente de suma de fracciones simples . *(Aquí puede eaplicarse el antiguo proverbio : " Divide y vencerás ") .*

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional tal que :

- *es propia*
- *los polinomios* P *y* Q *no tienen raices en común*
- *todos sus coeficientes son números reales.*

entonces vale el siguiente. . .

TEOREMA 1

Si $x = a$ ***es una raiz múltiple de orden*** k ***del denominador de una función racional propia***

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-a)^k \cdot Q_1 \cdot (x)}$$

en donde $Q_1 \cdot (a) \neq 0$ ***, entonces*** $f(x)$ ***se puede descomponer en la suma de dos fracciones racionales :***

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1 \cdot (x)}{(x-a)^{k-1} \cdot Q_1 \cdot (x)}$$

siendo A ***es una constante distinta de cero y*** $P_1 \cdot (x)$ ***un polinomio de menor grado que el denominador*** $(x-a)^{k-1} \cdot Q_1 \cdot (x)$

DEMOSTRACIÓN :

Partimos de la identidad $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{Q(x)} + \dfrac{A}{(x-a)^k} - \dfrac{A}{(x-a)^k}$

Si $x = a$ es una raiz múltiple de orden k de $Q(x)$, significa que éste polinomio se puede factorizar como $Q(x) = (x-a)^k \cdot Q_1(x)$, donde $Q_1(x)$ es otro polinomio de grado menor en k que $Q(x)$

Entonces la identidad anterior se puede escribir también como :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \left[\frac{P(x)}{(x-a)^k \cdot Q_1 \cdot (x)} - \frac{A}{(x-a)^k} \right]$$

sumando las dos últimas fracciones queda . . .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \left[\frac{P(x) - A \cdot Q_1 \cdot (x)}{(x-a)^k \cdot Q_1 \cdot (x)} \right] \qquad \text{(I)}$$

Se escogerá la constante A de manera que el polinomio $P(x) - A \cdot Q_1 \cdot (x)$ sea divisible por $(x-a)$ esto es, se pedirá que uno de los factores de éste polinomio sea $(x-a)$ . . .

$$P(x) - A \cdot Q_1 \cdot (x) = (x-a) \cdot P_1(x) \qquad \text{(II)}$$

Dado que $f(x)$ es una fracción propia, se deduce de la expresión (I) que el grado de $P(x) - A \cdot Q_1 \cdot (x)$ es menor que el grado de $(x-a)^k \cdot Q_1 \cdot (x)$ y por lo tanto el polinomio $P_1 \cdot (x)$ es de grado menor al de $(x-a)^{k-1} \cdot Q_1 \cdot (x)$

Evaluando la expresión (II) en $x = a$, se obtiene que . . .

$$P(a) - A \cdot Q_1(a) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Se ha supuesto que el polinomio $P(x)$ no tiene raices comunes con el polinomio $Q(x)$ y por lo tanto $P(a) \neq 0$.

Además $x = a$ es una raiz de $Q(x)$ pero no de $Q_1 \cdot (a)$ asi que $Q_1 \cdot (a) \neq 0$. Por lo tanto de (III) se obtiene el valor de la constante A :

$$A = \frac{P(a)}{Q_1 \cdot (a)}$$

La identidad inicial (I) queda entonces de la siguiente forma :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\left[P_1 \cdot (x)\right] \cdot (x-a)}{(x-a)^k \cdot Q_1 \cdot (x)}$$

es decir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_1 \cdot (x)}{(x-a)^{k-1} \cdot Q_1 \cdot (x)}$$

y el teorema queda asi demostrado .

Es posible volver a aplicar el resultado de éste teorema a la función racional propia :

$$\frac{P_1 \cdot (x)}{(x-a)^{k-1} \cdot Q_1 \cdot (x)}$$

(dado que ésta tiene una raíz múltiple de orden $(k-1)$ *en el denominador)* , para obtener. . .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \left[\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \frac{P_2 \cdot (x)}{(x-a)^{k-2} \cdot Q_1 \cdot (x)} \right]$$

donde $P_2 \cdot (x)$ es un polinomio de grado menor que $(x-a)^{k-2} \cdot Q_1 \cdot (x)$.

Aplicando otra vez el teorema a la fracción racional propia : $\dfrac{P_2 \cdot (x)}{(x-a)^{k-2} \cdot Q_1 \cdot (x)}$ *(dado que ésta tiene una raíz múltiple de orden* $(k-2)$ *en el denominador)* , se obtiene :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \left[\frac{A_2}{(x-a)^{k-2}} + \frac{P_3 \cdot (x)}{(x-a)^{k-3} \cdot Q_1 \cdot (x)} \right]$$

y asi sucesivamente hasta obtener finalmente . . .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-2}} + \dots\dots\dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \left[\frac{P_k \cdot (x)}{Q_1 \cdot (x)} \right] \qquad (4.2)$$

donde la fracción $\dfrac{P_k \cdot (x)}{Q_1 \cdot (x)}$ es irreducible y se le puede volver a aplicar el teorema 1 para cada uno de los factores lineales de $Q_1 \cdot (x)$.

Analizemos ahora el caso cuando el denominador de una función racional tiene *factores cuadráticos irreducibles en los reales* es decir, tiene raices complejas .
Puesto que las raices complejas ocurren por pares conjugados, a cada uno de éstos pares le corresponde un factor cuadrático de la forma general $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ al cual siempre será posible convertir a la forma equivalente $x^2 + p \cdot x + q$ factorizando el coeficiente líder.

Se tiene entonces el siguiente . . .

TEOREMA 2

Si el denominador de una función racional propia , tiene un factor cuadrático irreducible de orden k de la forma :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^k \cdot Q_1 \cdot (x)}$$

donde el polinomio $Q_1(x)$ ***no es divisible por*** $x^2 + px + q$, ***entonces*** $f(x)$ ***se puede descomponer en la suma de dos fracciones racionales propias :***

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B\cdot x + C}{\left(x^2 + px + q\right)^k} + \frac{P_1\cdot(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^{k-1}\cdot Q_1\cdot(x)}$$

donde $P_1(x)$ ***es un polinomio de menor grado que*** $\left(x^2 + px + q\right)^{k-1}\cdot Q_1\cdot(x)$ ***y*** ***B y C son constantes.***

DEMOSTRACIÓN :

Partiendo de la identidad algebráica : $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{Q(x)} + \dfrac{B\cdot x + C}{\left(x^2 + px + q\right)^k} - \dfrac{B\cdot x + C}{\left(x^2 + px + q\right)^k}$

Si el denominador $Q(x)$ se factoriza como $\left(x^2 + px + q\right)^k\cdot Q_1(x)$ es decir, tiene un factor cuadrático irreducible, entonces la identidad anterior puede escribirse también como :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^k\cdot Q_1\cdot(x)} + \frac{B\cdot x + C}{\left(x^2 + px + q\right)^k} - \frac{B\cdot x + C}{\left(x^2 + px + q\right)^k}$$

y asociando el primero y el tercer términos, queda . . .

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B\cdot x + C}{\left(x^2 + px + q\right)^k} + \left[\frac{P(x) - (B\cdot x + C)\cdot Q_1\cdot(x)}{\left(x^2 + px + q\right)^k\cdot Q_1\cdot(x)}\right]$$

Escogeremos las constantes B y C de tal manera que el polinomio $P(x) - (B\cdot x + C)\cdot Q_1\cdot(x)$ sea divisible por $\left(x^2 + px + q\right)$ es decir, que éste trinomio sea uno de sus factores :

$$P(x) - (B\cdot x + C)\cdot Q_1\cdot(x) = \left(x^2 + px + q\right)\cdot P_1(x)$$

y por lo tanto, si $\left(x^2 + px + q\right)$ tiene las raices complejas : $r_1 = a + \mathrm{j}\cdot b$; $r_2 = a - \mathrm{j}\cdot b$ (*las raices complejas de un polinomio ocurren por pares conjugados*) , entonces también se cumplirá que $P(x) - (B\cdot x + C)\cdot Q_1\cdot(x)$ evaluado en r_1 ó en r_2 será cero, lo cual permitirá calcular las constantes B y C . De ésta manera es posible escribir la expresión :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B\cdot x + C}{\left(x^2 + px + q\right)^k} + \left[\frac{\left(x^2 + px + q\right)\cdot\left[P_1\cdot(x)\right]}{\left(x^2 + px + q\right)^k\cdot Q_1\cdot(x)}\right]$$

donde el polinomio $P_1(x)$ es de menor grado que el polinomio del denominador $\left(x^2+px+q\right)^k\cdot Q_1\cdot(x)$, por ser $f(x)$ una función racional propia. El teorema queda demostrado .

En consecuencia , a la fracción propia :

$$\frac{P_1\cdot(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}\cdot Q_1\cdot(x)}$$

se le puede aplicar nuevamente el teorema 2 , (*por tener en su denominador un factor cuadrático irreducible*) para obtener la expresión :

$$\frac{P_1\cdot(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}\cdot Q_1\cdot(x)}=\frac{B_1\cdot x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\left[\frac{P_2\cdot(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{k-2}\cdot Q_1\cdot(x)}\right]$$

Aplicando repetidamente el teorema 2 a la última fracción propia de la izquierda que se obtenga en las expresiones sucesivas se obtiene finalmente :

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B\cdot x+C}{\left(x^2+px+q\right)^{k}}+\frac{B_1\cdot x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+\frac{B_2\cdot x+C_2}{\left(x^2+px+q\right)^{k-2}}+\dots\dots\dots+\left[\frac{P_k\cdot(x)}{Q_1\cdot(x)}\right]$$

donde la fracción $\dfrac{P_k\cdot(x)}{Q_1\cdot(x)}$ es irreducible y se le puede volver a aplicar el teorema 1 ó el 2 para cada una de los factores lineales ó cuadráticos que contenga el polinomio $Q_1(x)$.

4.3 La descomposición de una función racional en una suma de fracciones parciales simples .

Los resultados de los teoremas 1 y 2 anteriores se resumen en el siguiente *procedimiento para expresar una función racional como una suma equivalente de fracciones propias* .

- Cuando la función racional $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ya es propia, aplicar el siguiente paso directamente, de lo contrario, ***se debe efectuar la división*** para obtener : $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=D(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ un polinomio cociente $D(x)$ más una *función racional propia* $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ a la cual se aplicará el siguiente paso.

- ***Factorizar el denominador*** . Expresar el polinomio denominador $Q(x)$ de la función racional, como el producto de sus factores *lineales* : $(p\cdot x+q)^n$ o *cuadráticos irreducibles* : $\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)^m$, donde a , b , c , p y q son constantes y los enteros positivos m , n representan el grado de repetición de cada factor .

- ***Factores lineales*** . Por *cada uno* de los factores lineales $(p\cdot x+q)^n$, se debe incluir en la descomposición una suma de n fracciones (*Teorema 1*) de la forma :

$$\frac{A_1}{(p\cdot x+q)}+\frac{A_2}{(p\cdot x+q)^2}+\frac{A_3}{(p\cdot x+q)^3}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{(p\cdot x+q)^n} \qquad (4.3)$$

donde A_1 , A_2 , . . ., A_n son constantes por determinar .

- ***Factores cuadráticos*** . Por *cada uno* de los factores cuadráticos $\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)^m$, se debe incluir en la descomposicón una suma de m fracciones (*Teorema 2*) de la forma :

$$\frac{B_1\cdot x+C_1}{\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)}+\frac{B_2\cdot x+C_2}{\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)^2}+\ldots\ldots+\frac{B_m\cdot x+C_m}{\left(a\cdot x^2+b\cdot x+c\right)^m} \qquad (4.4)$$

donde B_1 , B_2 , . . ., B_m y C_1 , C_2 , . . ., C_m son constantes por determinar .

4.4 Métodos de solución .

Los métodos de cálculo para las constantes de las fracciones parciales en el procedimiento anterior son diversos; algunos serán más simples que otros, dependiendo de las raices del denominador de la función racional es decir , dependiendo de que los factores del denominador $Q(x)$ de $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sean :

I . lineales y no repetidos

II . lineales repetidos

III . cuadráticos irreducibles no repetidos

IV . cuadráticos irreducibles repetidos .

ó una *combinación* de éstos casos .

4.4.1 **Caso I** : **Factores lineales no repetidos** .

Solución por substitución .

Cuando el denominador de la función racional propia $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ contiene *solamente factores lineales no repetidos* , es decir se factoriza como:

$$Q(x) = (p_1 \cdot x - q_1)\cdot(p_2 \cdot x - q_2)\cdot(p_3 \cdot x - q_3)\cdot\ldots\ldots\cdot(p_n \cdot x - q_n)$$

entonces $f(x)$ se desarrolla en la siguiente suma de fracciones parciales :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(p_1 \cdot x - q_1)} + \frac{A_2}{(p_2 \cdot x - q_2)} + \frac{A_3}{(p_3 \cdot x - q_3)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{(p_n \cdot x - q_n)}$$

siendo $r_1 = \dfrac{q_1}{p_1}$, $r_2 = \dfrac{q_2}{p_2}$, $r_3 = \dfrac{q_3}{p_3}$, . . . , $r_n = \dfrac{q_n}{p_n}$ las raices de $Q(x)$.

En éste caso es obvio que . . .

$$f(x)\cdot(p_1 \cdot x - q_1) = A_1 + A_2 \cdot \frac{(p_1 \cdot x - q_1)}{(p_2 \cdot x - q_2)} + A_3 \cdot \frac{(p_1 \cdot x - q_1)}{(p_3 \cdot x - q_3)} + \ldots\ldots\ldots + A_n \cdot \frac{(p_1 \cdot x - q_1)}{(p_n \cdot x - q_n)}$$

y dado que todas las raices son diferentes, al evaluar éste producto en $x = r_1 = \dfrac{q_1}{p_1}$, todos los términos de la derecha se anularán excepto A_1 , esto es :

$$A_1 = f(x)\cdot(p_1 \cdot x - q_1) \quad \textit{evaluado en } x = r_1 = \frac{q_1}{p_1}$$

Similarmente es obvio que . . .

$$f(x)\cdot(p_2 \cdot x - q_2) = A_1 \cdot \frac{(p_2 \cdot x - q_2)}{(p_1 \cdot x - q_1)} + A_2 + A_3 \cdot \frac{(p_2 \cdot x - q_2)}{(p_3 \cdot x - q_3)} + \ldots\ldots\ldots + A_n \cdot \frac{(p_2 \cdot x - q_2)}{(p_n \cdot x - q_n)}$$

y dado que todas las raices son diferentes, al evaluar éste producto en $x = r_2 = \dfrac{q_2}{p_2}$, todos los términos de la derecha se anularán excepto A_2 , esto es :

$$A_2 = f(x)\cdot(p_2 \cdot x - q_2) \quad \textit{evaluado en } x = r_2 = \frac{q_2}{p_2}$$

De manera general, el coeficiente k-ésimo del desarrollo se calcula entonces como :

$$A_k = f(x)\cdot\left(p_k\cdot x - q_k\right) \quad \textit{evaluado en } x = r_k = \frac{q_k}{p_k} \qquad (4.5)$$

De modo que para calcular el coeficiente A_k sólo hay que evaluar el producto de $f(x)$ por el factor lineal correspondiente $\left(p_k\cdot x - q_k\right)$ precisamente en la raiz $x = \frac{q_k}{p_k}$.

Ejemplo 2. Desarrollar la función racional : $f(x) = \dfrac{11\cdot x^2 + 26\cdot x - 57}{(x-1)\cdot(2\cdot x+3)\cdot(3\cdot x-5)}$

en fracciones parciales

Solución :

Notemos que $f(x)$ es *propia* y además tiene *tres factores lineales distintos* en el denominador siendo las raices correspondientes $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{-3}{2}$ y $r_3 = \frac{5}{3}$, por lo tanto se propone el desarrollo :

$$f(x) = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(2\cdot x+3)} + \frac{A_3}{(3\cdot x-5)}$$

y de acuerdo con (4 .5) . . .

$$A_1 = f(x)\cdot(x-1) \quad \textit{evaluado en } x = r_1 = 1$$

$$= \left[\frac{\left(11\cdot x^2 + 26\cdot x - 57\right)}{(x-1)\cdot(2\cdot x+3)\cdot(3\cdot x-5)}\right]\cdot(x-1) \quad \textit{evaluado en } x = 1$$

$$= \frac{\left(11\cdot x^2 + 26\cdot x - 57\right)}{(2\cdot x+3)\cdot(3\cdot x-5)} \quad \textit{evaluado en } x = 1$$

$$= \frac{11\cdot(1)^2 + 26\cdot(1) - 57}{[2\cdot(1)+3]\cdot[3\cdot(1)-5]} = \frac{-20}{-10} = 2$$

similarmente. . .

$$A_2 = f(x)\cdot(2\cdot x+3) \quad \textit{evaluado en } x = r_2 = \frac{-3}{2}$$

$$= \left[\frac{(11 \cdot x^2 + 26 \cdot x - 57)}{(x-1)\cdot(2\cdot x+3)\cdot(3\cdot x-5)} \right] \cdot (2\cdot x+3) \quad \textit{evaluado en } x = \frac{-3}{2}$$

$$= \frac{(11 \cdot x^2 + 26 \cdot x - 57)}{(x-1)\cdot(3\cdot x-5)} \quad \textit{evaluado en } x = \frac{-3}{2}$$

$$= \frac{11\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 26\cdot\left(\frac{-3}{2}\right) - 57}{\left(\frac{-3}{2} - 1\right)\cdot\left(3\cdot\frac{-3}{2} - 5\right)} = \frac{\left(\frac{-285}{4}\right)}{\left(\frac{95}{4}\right)} = -3$$

y finalmente. . .

$$A_3 = f(x)\cdot(3\cdot x - 5) \quad \textit{evaluado en } x = r_3 = \frac{5}{3}$$

$$= \left[\frac{(11 \cdot x^2 + 26 \cdot x - 57)}{(x-1)\cdot(2\cdot x+3)\cdot(3\cdot x-5)} \right] \cdot (3\cdot x-5) \quad \textit{evaluado en } x = \frac{5}{3}$$

$$= \frac{(11 \cdot x^2 + 26 \cdot x - 57)}{(x-1)\cdot(2\cdot x+3)} \quad \textit{evaluado en } x = \frac{5}{3}$$

$$= \frac{\left[11\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 26\cdot\left(\frac{5}{3}\right) - 57\right]}{\left(\frac{5}{3} - 1\right)\cdot\left[2\cdot\left(\frac{5}{3}\right) + 3\right]} = \frac{\left(\frac{152}{9}\right)}{\left(\frac{38}{9}\right)} = 4$$

y quedan determinados los 3 coeficientes del desarrollo, por lo cual se tiene . . .

$$\frac{11\cdot x^2 + 26\cdot x - 57}{(x-1)\cdot(2\cdot x+3)\cdot(3\cdot x-5)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2\cdot x+3} + \frac{4}{3\cdot x-5}$$

En éste ejemplo, el polinomio del denominador se dá factorizado; pero en general éste no es el caso y para obtener el desarrolo en fracciones parciales, se deben determinar primero las raices y factores del denominador de $f(x)$ por los métodos analizados en el capítulo III anterior.

4.4.2 **Solución por igualación de coeficientes**

Después de realizar la suma algebráica del lado derecho de la expresión :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(p_1\cdot x - q_1)} + \frac{A_2}{(p_2\cdot x - q_2)} + \frac{A_3}{(p_3\cdot x - q_3)} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{A_n}{(p_n\cdot x - q_n)}$$

y dado que los denominadores $Q(x)$ y $(p_1 \cdot x - q_1)\cdot(p_2 \cdot x - q_2)\cdot \ldots\ldots \cdot(p_n \cdot x - q_n)$ son iguales, entonces se pueden igualar también los polinomios de los numeradores.
La igualación de éstos polinomios genera una ecuación denominada *ecuación básica* , de la cual se genera un sistema de ecuaciones lineales simultáneas al *igualar los coeficientes de las respectivas potencias de x*, y en el cual, las incógnitas son los coeficientes del desarrollo en fracciones parciales .

Este método se aplica aún cuando los factores lineales estén repetidos ó que existan también factores cuadráticos repetidos o no .
En resumen, el método de igualación de coeficientes se puede aplicar a todos los casos de factorización de $Q(x)$. Sin embargo, el precio por ésta generalidad es la dificultad algebráica para la solución del sistema de ecuaciones correspondiente .

Ejemplo 3. Desarrollar la función racional : $f(x) = \dfrac{x^2 - 40 \cdot x + 6}{(3 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 4)\cdot(2 \cdot x + 1)}$

en fracciones parciales

Solución :
Notemos que $f(x)$ *es propia* y además tiene tres factores lineales distintos en el denominador puesto que . . .

$$(3 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 4)\cdot(2 \cdot x + 1) = [(x+4)\cdot(3 \cdot x - 1)]\cdot(2 \cdot x + 1)$$

se factoriza en dos factores lineales . Por lo tanto se propone el desarrollo :

$$f(x) = \frac{A}{3 \cdot x - 1} + \frac{B}{x + 4} + \frac{C}{2 \cdot x + 1}$$

Al sumar en el lado derecho queda : . .

$$\frac{x^2 - 40 \cdot x + 6}{(3 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 4)\cdot(2 \cdot x + 1)} = \frac{(2 \cdot A + 6 \cdot B + 3 \cdot C)\cdot x^2 + (9 \cdot A + B + 11 \cdot C)\cdot x + (4 \cdot A - B - 4 \cdot C)}{(3 \cdot x - 1)\cdot(x + 4)\cdot(2 \cdot x + 1)}$$

Al igualar los numeradores de ambos miembros se obtiene la *ecuación básica* :

$$(x^2 - 40 \cdot x + 6) = (2 \cdot A + 6 \cdot B + 3 \cdot C)\cdot x^2 + (9 \cdot A + B + 11 \cdot C)\cdot x + (4 \cdot A - B - 4 \cdot C)$$

Sin embargo, éstos dos polinomios serán iguales solo si los coeficientes de las potencias correspondientes de x en ambos son iguales, esto es . . .

Coeficientes de x^2 :	$1 = 2 \cdot A + 6 \cdot B + 3 \cdot C$	(I)
Coeficientes de x :	$-40 = 9 \cdot A + B + 11 \cdot C$	(II)
Coeficientes de x^0 :	$6 = 4 \cdot A - B - 4 \cdot C$	(III)

La solución de éste sistema de ecuaciones (*por alguno de los métodos elementales: suma-resta , substitución ó igualación*) genera los valores de los coeficientes A , B y C. Sumando miembro a miembro por ejemplo las ecuaciones (II) y (III) y las ecs. (I) y 6(III) con el fin de eliminar la incógnita B, se obtienen las ecuaciones (IV) y (V) siguientes . . .

$$\begin{array}{l} 9\cdot A + B + 11\cdot C = -40 \\ 4\cdot A - B - 4\cdot C = 6 \\ \hline 13\cdot A + 7\cdot C = -34 \qquad \text{(IV)} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2\cdot A + 6\cdot B + 3\cdot C = 1 \\ 6\cdot(4\cdot A - B - 4\cdot C = 6) \\ \hline 26\cdot A - 21\cdot C = 37 \qquad \text{(V)} \end{array}$$

Haciendo aahora la suma 3(IV) + (V) resulta . . .

$$\begin{array}{c} 3\cdot(13\cdot A + 7\cdot C = -34) \\ 26\cdot A - 21\cdot C = 37 \\ \hline 65\cdot A + 0 = -65 \end{array}$$

ecuación de la cual resulta $A = -1$.
Substituyendo éste valor para A en la ec. (IV) queda $13\cdot(-1) + 7\cdot C = -34$, de donde resulta $C = -3$. Finalmente, substituyendo éstos valores para A y C en cualquiera de las ecs. anteriores, por ejemplo en la ec (III) , resulta $4\cdot(-1) - B - 4\cdot(-3) = 6$, es decir . . . $B = 2$.
Entonces la expansión buscada para $f(x)$ es :

$$\frac{x^2 - 40\cdot x + 6}{\left(3\cdot x^2 + 11\cdot x - 4\right)\cdot(2\cdot x + 1)} = \frac{(-1)}{3\cdot x - 1} + \frac{(2)}{x + 4} + \frac{(-3)}{2\cdot x + 1}$$

<u>Caso II</u> : **<u>Factores lineales repetidos</u>** .

4.4.3 <u>Solución por derivación</u> .

Supongamos que una función racional propia tiene un factor lineal de la forma $(x - a)$ *repetido* n *veces* en el denominador, es decir . . .

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a)^n\cdot\left[Q_1\cdot(x)\right]}$$

Entonces de acuerdo con el Teorema 1, se propone el desarrollo :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \text{............} + \frac{A_{n-1}}{(x - a)^{n-1}} + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

Al multiplicar ambos miembros de ésta igualdad por $(x-a)^n$ se obtiene . . .

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(x-a)^n = A_1\cdot(x-a)^{n-1} + A_2\cdot(x-a)^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-2}\cdot(x-a)^2 + A_{n-1}\cdot(x-a) + A_n$$

al evaluar en $x = a$ es obvio que todos los términos de la derecha se anulan, excepto A_n , es decir . . .

$$A_n = \frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(x-a)^n \qquad \textit{evaluado en } x = a$$

Por otra parte, la primera derivada de éste producto es :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(x-a)^n\right] = (n-1)\cdot A_1\cdot(x-a)^{n-2} + \ldots + 3\cdot A_{n-3}\cdot(x-a)^2 + 2\cdot A_{n-2}\cdot(x-a) + A_{n-1}$$

al evaluar en $x = a$ es obvio que todos los términos de la derecha se anulan, excepto A_{n-1} , es decir . . .

$$A_{n-1} = \frac{d}{dx}\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(x-a)^n\right] \qquad \textit{evaluado en } x = a$$

De manera similar, la 2ª derivada es :

$$\frac{d^2}{dx^2}\cdot\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(x-a)^n\right] = (n-1)\cdot(n-2)\cdot A_1\cdot(x-a)^{n-3} + \ldots + (3)\cdot(2)\cdot A_{n-3}\cdot(x-a) + 2\cdot A_{n-2}$$

al evaluar en $x = a$ es obvio que todos los términos de la derecha se anulan, excepto $2\cdot A_{n-2}$, es decir . . .

$$A_{n-2} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(x-a)^n\right]\right] \qquad \textit{evaluado en } x = a$$

Repitiendo este procedimiento m veces, se llega a la expresión general :

$$A_{n-m} = \frac{1}{(m)!}\cdot\frac{d^m}{dx^m}\cdot\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(x-a)^n\right] \qquad \textit{evaluado en } x = a$$

Haciendo el cambio de índice $k = n - m$, *es decir* $m = n - k$,se obtiene la expresión general para calcular el k-ésimo coeficiente del desarrollo en fracciones parciales de $f(x)$ para el factor repetido $(x-a)^n$:

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\cdot\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(x-a)^n\right] \qquad \textit{evaluado en } x = a \qquad (4.6)$$

EJERCICIO : Demostrar que cuando el factor lineal tiene la forma : $(p\cdot x - q)^n$, siendo p y q constantes, entonces la fórmula anterior se transforma en . . .

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{p^{(n-k)}}\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\cdot\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(p\cdot x - q)^n\right] \quad \text{evaluado en } x = a \qquad (4.7)$$

Ejemplo 4. Desarrolle la función racional : $f(x) = \dfrac{5\cdot x^3 + 11\cdot x^2 + 9\cdot x + 2}{(x+1)^4}$ en fracciones parciales

Solución :

Notemos que $f(x)$ *es propia* pues el grado del numerador es 3 y el grado del denominador es 4, y que tiene un factor lineal de orden 4 en el denominador. Por lo tanto se propone el desarrollo :

$$f(x) = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{(x+1)^4}$$

Puesto que el factor $(x+1)$ genera la raiz $a = -1$ y se repite 4 veces, de la fórmula (4.6) con $n = 4$ y $k = 4, 3, 2, 1$ se obtiene. . .

$$A_4 = \frac{1}{(4-4)!}\cdot\frac{d^0}{dx^0}\cdot\left[f(x)\cdot(x+1)^4\right] \quad \text{evaluado en } x = -1$$

$$= \frac{1}{(0)!}\cdot\left(5\cdot x^3 + 11\cdot x^2 + 9\cdot x + 2\right) \quad \text{evaluado en } x = -1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\left[5\cdot(-1)^3 + 11\cdot(-1)^2 + 9\cdot(-1) + 2\right] = -5 + 11 - 9 + 2 = -1$$

$$A_3 = \frac{1}{(4-3)!}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left[f(x)\cdot(x+1)^4\right] \quad \text{evaluado en } x = -1$$

$$= \frac{1}{(1)!}\cdot\left[\frac{d}{dx}\cdot\left(5\cdot x^3 + 11\cdot x^2 + 9\cdot x + 2\right)\right] \quad \text{evaluado en } x = -1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\left(15\cdot x^2 + 22\cdot x + 9\right) \quad \text{en } x = -1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\left[15\cdot(-1)^2 + 22\cdot(-1) + 9\right] \quad = \quad 15 - 22 + 9 \quad = \quad 2$$

$$A_2 = \frac{1}{(4-2)!}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\cdot\left[f(x)\cdot(x+1)^4\right] \qquad \textit{evaluado en} \quad x = -1$$

$$= \frac{1}{(2)!}\cdot\left[\frac{d^2}{dx^2}\cdot\left(5\cdot x^3 + 11\cdot x^2 + 9\cdot x + 2\right)\right] \qquad \textit{evaluado en} \quad x = -1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(30\cdot x + 22) \qquad \textit{en} \quad x = -1$$

$$= \frac{1}{2}\cdot[30\cdot(-1) + 22] \quad = \quad 4$$

$$A_1 = \frac{1}{(4-1)!}\cdot\frac{d^3}{dx^3}\cdot\left[f(x)\cdot(x+1)^4\right] \qquad \textit{evaluado en} \quad x = -1$$

$$= \frac{1}{(3)!}\cdot\left[\frac{d^3}{dx^3}\cdot\left(5\cdot x^3 + 11\cdot x^2 + 9\cdot x + 2\right)\right] \qquad \textit{evaluado en} \quad x = -1$$

$$= \frac{1}{6}\cdot(30) = 5$$

De modo que el desarrollo en fracciones parciales de la función racional $f(x)$ es . . .

$$\frac{5\cdot x^3 + 11\cdot x^2 + 9\cdot x + 2}{(x+1)^4} = \frac{5}{(x+1)} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^4}$$

Como podemos notar en éste ejemplo, el método de derivación, es especialmente útil cuando existen factores lineales repetidos en el denominador; sin embargo también es posible combinarlo con los métodos anteriores es decir, es posible calcular algunos de los coeficientes del desarrollo por substitución, otros por derivación y otros más por igualación, como se ilustra en los siguientes ejemplos :

Ejemplo 5. Encontrar el desarrollo en fracciones parciales para la función racional :

$$f(x) = \frac{2\cdot x^5 + 15\cdot x^4 + 44\cdot x^3 + 58\cdot x^2 + 29\cdot x + 1}{(2\cdot x + 3)\cdot(x+2)^3}$$

Solución :

Notemos que $f(x)$ *es impropia* pues el grado del numerador es 5 y el grado del denominador es 4, por lo cual *se debe primero dividir antes de intentar cualquier otra cosa* .

Haciendo la división de polinomios se obtiene :

$$\frac{2\cdot x^5+15\cdot x^4+44\cdot x^3+58\cdot x^2+29\cdot x+1}{\left(2\cdot x^4+15\cdot x^3+42\cdot x^2+52\cdot x+24\right)}=x+\frac{2\cdot x^3+6\cdot x^2+5\cdot x+1}{(2\cdot x+3)\cdot(x+2)^3}$$

Ahora ya es posible desarrollar en fracciones parciales el residuo de la división, el cual es una función racional propia que tiene dos factores lineales en el denominador, uno de ellos de orden 3, el cual genera 3 fracciones parciales.

Por lo tanto, se debe proponer que :

$$\frac{2\cdot x^3+6\cdot x^2+5\cdot x+1}{(2\cdot x+3)\cdot(x+2)^3}=\left[\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3}\right]+\frac{B}{2\cdot x+3}$$

Usando él método de igualación de coeficientes, hay que sumar el lado derecho e igualar los numeradores de ambos miembros para obtener:

$$\left(2\cdot x^3+6\cdot x^2+5\cdot x+1\right)=$$

$$=A_1\cdot(x+2)^2\cdot(2\cdot x+3)+A_2\cdot(x+2)\cdot(2\cdot x+3)+A_3\cdot(2\cdot x+3)+B\cdot(x+2)^3$$

Esta es la *ecuación básica* . Al substituir el ella las raíces de los factores se obtienen de inmediato los coeficientes B y A_3 , como sigue:

para $x=-2$ . . .

$$2\cdot(-2)^3+6\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)+1=A_1\cdot(0)+A_2\cdot(0)+A_3\cdot[2\cdot(-2)+3]+B\cdot(0)^3$$

$$-1=-A_3$$

es decir $A_3=1$.

para $x=\frac{-3}{2}$ . . .

$$2\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)^3+6\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)^2+5\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)+1=A_1\cdot(0)+A_2\cdot(0)+A_3\cdot(0)+B\cdot\left(\frac{-3}{2}+2\right)^3$$

$$2\cdot\frac{-27}{8}+6\cdot\frac{9}{4}+\frac{-15}{2}+1=B\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{-3}{4}+1=\frac{B}{8}$$ es decir $B=2$

Evaluemos el coeficientes A_2 por derivación con $n = 3$, $k = 2$ y $a = -2$ en la fórmula 4.6 :

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \cdot \left[\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot (x-a)^n \right] \quad \textit{evaluada en } x = a.$$

$$A_2 = \frac{1}{(3-2)!} \cdot \frac{d}{dx} \cdot \left[\frac{2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1}{(2 \cdot x + 3) \cdot (x+2)^3} \cdot (x+2)^3 \right] \quad \textit{evaluada en } x = -2$$

$$= \left[\frac{\left(6 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 5\right)}{(2 \cdot x + 3)} - 2 \cdot \frac{\left(2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1\right)}{(2 \cdot x + 3)^2} \right] \quad \textit{en } x = -2$$

$$= \frac{\left[6 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 5\right]}{[2 \cdot (-2) + 3]} - 2 \cdot \frac{\left[2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 1\right]}{[2 \cdot (-2) + 3]^2}$$

$$= \frac{5}{(-1)} - 2 \cdot \frac{(-1)}{(-1)^2} = -3$$

Con los coeficientes A_2 , A_3 y B ya calculados, ahora es posible substituir cualquier valor para x en la ecuación básica y calcular el último coeficiente A_1 .

Para $x = 0$, por ejemplo, la ecuación básica queda . . .

$$2 \cdot (0)^3 + 6 \cdot (0)^2 + 5 \cdot (0) + 1 =$$

$$= A_1 \cdot (0+2)^2 \cdot (0+3) + (-3) \cdot (0+2) \cdot (0+3) + (1) \cdot (0+3) + (2) \cdot (0+2)^3$$

es decir $1 = 12 \cdot A_1 + 1$, de donde se obtiene que $A_1 = 0$.

Finalmente, el desarrollo de la función racional en una suma de fracciones parciales es entonces . . .

$$f(x) = x + \frac{2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1}{(2 \cdot x + 3) \cdot (x+2)^3}$$

$$= x + \left[\frac{0}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+2)^3} \right] + \frac{2}{2 \cdot x + 3}$$

Ejemplo 6. Determinar el desarrollo en fracciones parciales de : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2 \cdot x + 1}{(2 \cdot x + 1)^2 \cdot (3 \cdot x + 2)^3}$

Solución :

Notemos que $f(x)$ *es propia* pues el grado del numerador es 2 y el grado del denominador es 5 y tiene dos factores lineales repetidos en el denominador . Por lo tanto, de acuerdo al teorema 1, se propone el desarrollo :

$$f(x) = \left[\frac{A_1}{2\cdot x+1} + \frac{A_2}{(2\cdot x+1)^2}\right] + \left[\frac{B_1}{3\cdot x+2} + \frac{B_2}{(3\cdot x+2)^2} + \frac{B_3}{(3\cdot x+2)^3}\right]$$

Puesto que el factor $(2\cdot x+1)$ es de orden 2 y el factor $(3\cdot x+2)$ es de orden 3.
De la fórmula (4.7)

$$A_k = \frac{1}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{p^{n-k}}\cdot\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\cdot\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot(p\cdot x-q)^n\right] \quad \textit{evaluada en } x = \frac{q}{p}$$

con $n = 2$, $q = -1$ y $p = 2$, se pueden obtener los coeficientes A_1 y A_2 . . .

$$A_2 = \frac{1}{(2-2)!}\cdot\frac{1}{(2)^0}\cdot\left[\frac{x^2+2\cdot x+1}{(3\cdot x+2)^3}\right] \quad \textit{evaluada en } x = \frac{-1}{2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{\left[3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\right]^3} = \boxed{2}$$

$$A_1 = \frac{1}{(2-1)!}\cdot\frac{1}{(2)^1}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left[\frac{x^2+2\cdot x+1}{(3\cdot x+2)^3}\right] \quad \textit{evaluada en } x = \frac{-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(2\cdot x+2)}{(3\cdot x+2)^3} - 9\cdot\frac{\left(x^2+2\cdot x+1\right)}{(3\cdot x+2)^4}\right] \quad \textit{evaluada en } x = \frac{-1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-3\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 8\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) - 5}{\left(\frac{-3}{2}+2\right)^4}\right] = \boxed{-14}$$

Calculemos ahora por derivación también los coeficientes B_1, B_2 y B_3 asociados con el factor $(3\cdot x+2)^3$, haciendo $n = 3$, $q = -2$, $p = 3$ y $k = 1,2,3$ en la fórmula (4.7) :

$$B_3 = \frac{1}{(3-3)!}\cdot\frac{1}{(3)^0}\cdot\left[\frac{x^2+2\cdot x+1}{(2\cdot x+1)^2}\right] \qquad \textit{evaluada en } x = \frac{q}{p} = \frac{-2}{3}$$

$$= \frac{1}{(1)}\cdot\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1}{\left[2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\right]^2} = 1$$

$$B_2 = \frac{1}{(3-2)!}\cdot\frac{1}{(3)^1}\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left[\frac{x^2+2\cdot x+1}{(2\cdot x+1)^2}\right] \qquad \textit{evaluada en } x = \frac{q}{p} = \frac{-2}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left[\frac{(2\cdot x+2)}{(2\cdot x+1)^2} - 4\cdot\frac{\left(x^2+2\cdot x+1\right)}{(2\cdot x+1)^3}\right] = -\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{(x+1)}{(2\cdot x+1)^3}$$

$$= -\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\left(\frac{-2}{3}+1\right)}{\left[2\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)+1\right]^3} = 6$$

$$B_1 = \frac{1}{(3-1)!}\cdot\frac{1}{(3)^2}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\cdot\left[\frac{x^2+2\cdot x+1}{(2\cdot x+1)^2}\right] \qquad \textit{evaluada en } x = \frac{-2}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{d}{dx}\cdot\left[-2\cdot\frac{(x+1)}{(2\cdot x+1)^3}\right] = \frac{1}{18}\cdot\left[2\cdot\frac{(4\cdot x+5)}{(2\cdot x+1)^4}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{18}\right)\cdot 2\cdot\frac{\left[4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+5\right]}{\left[2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+1\right]^4} = 21$$

De este modo el desarrollo en fracciones parciales de la función racional $f(x)$ es :

$$f(x) = \left[\frac{2}{(2\cdot x+1)^2} - \frac{14}{(2\cdot x+1)}\right] + \left[\frac{1}{(3\cdot x+2)^3} + \frac{6}{(3\cdot x+2)^2} + \frac{21}{(3\cdot x+2)}\right]$$

Ejemplo 7. Desarrollar en fracciones parciales : $f(x) = \dfrac{2\cdot x^4 - 10\cdot x^3 + 22\cdot x^2 - 11\cdot x - 28}{(2\cdot x+1)\cdot(x-2)^3}$

Solución :

Notemos que $f(x)$ *es impropia* pues el grado del numerador es 4 y el grado del denominador tmbién es 4 por lo tanto , debemos dividir para obtener :

$$\frac{2\cdot x^4 - 10\cdot x^3 + 22\cdot x^2 - 11\cdot x - 28}{2\cdot x^4 - 11\cdot x^3 + 18\cdot x^2 - 4\cdot x - 8} = 1 + \left[\frac{x^3 + 4\cdot x^2 - 7\cdot x - 20}{(2\cdot x+1)\cdot(x-2)^3}\right]$$

La función racional del residuo es propia y tiene dos factores lineales en el denominador (uno de ellos de orden 3), por lo cual se debe proponer para su desarrollo la expresión :

$$\left[\frac{x^3 + 4\cdot x^2 - 7\cdot x - 20}{(2\cdot x+1)\cdot(x-2)^3}\right] = \frac{A}{2\cdot x+1} + \left[\frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_3}{(x-2)^3}\right]$$

Sumando ahora el miembro derecho e igualando los numeradores se obtiene la ecuación básica :

$$x^3 + 4\cdot x^2 - 7\cdot x - 20 =$$

$$= A\cdot(x-2)^3 + B_1\cdot(2\cdot x+1)\cdot(x-2)^2 + B_2\cdot(2\cdot x+1)\cdot(x-2) + B_3\cdot(2\cdot x+1)$$

Substituyendo las raices $x = 2$ y $x = \dfrac{-1}{2}$ se obtienen de inmediato los coeficientes A y B_3 :

$$(2)^3 + 4\cdot(2)^2 - 7\cdot(2) - 20 = A\cdot(0) + B_1\cdot(0) + B_2\cdot(0) + B_3\cdot[2\cdot(2)+1]$$

$$-10 = B_3\cdot(5)$$

es decir $B_3 = -2$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 20 = A\cdot\left[\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right]^3 + B_1\cdot(0) + B_2\cdot(0) + B_3\cdot(0)$$

$$\frac{-125}{8} = \left(\frac{-125}{8}\right)\cdot A$$

es decir $A = 1$

Con éstos coeficientes determinados, ahora se pueden *substituir* otros valores para x en la ecuación básica, por ejemplo :

Con $x = 0$ queda :

$$0^3 + 4\cdot(0)^2 - 7\cdot(0) - 20 = 1\cdot(0-2)^3 + B_1\cdot(0+1)\cdot(0-2)^2 + B_2\cdot(0+1)\cdot(0-2) + -2\cdot(0+1)$$

$$-20 = -10 + 4\cdot B_1 - 2\cdot B_2 \qquad \text{(I)}$$

y con $x = 1$ queda :

$$1^3 + 4\cdot(1)^2 - 7\cdot(1) - 20 = 1\cdot(1-2)^3 + B_1\cdot(2+1)\cdot(1-2)^2 + B_2\cdot(2+1)\cdot(1-2) + -2\cdot(2+1)$$

$$-22 = -7 + 3\cdot B_1 - 3\cdot B_2 \qquad \text{(II)}$$

de la solución simultánea de las ecuaciones (I) y (II) se obtiene : $B_1 = 0$ y $B_2 = 5$

De este modo el desarrollo en fracciones parciales de la función racional $f(x)$ es :

$$f(x) = 1 + \left[\frac{1}{2\cdot x + 1} + \frac{0}{x-2} + \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{(-2)}{(x-2)^3} \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2\cdot x + 1} + \frac{5}{(x-2)^2} - \frac{2}{(x-2)^3}$$

EJERCICIO 4.1

I. Desarrollar en una suma de fraciones parciales simples, las siguientes funciones racionales :

1. $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)\cdot(3\cdot x-2)}$

2. $f(x) = \dfrac{9}{(2\cdot x+3)\cdot(x+3)}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{(3\cdot x+7)\cdot(2\cdot x+5)}$

4. $f(x) = \dfrac{3\cdot x}{(5\cdot x-8)\cdot(3\cdot x-4)}$

5. $f(x) = \dfrac{-8\cdot x}{(3\cdot x+5)\cdot(x+3)}$

6. $f(x) = \dfrac{6\cdot x+9}{(2\cdot x-5)\cdot(2\cdot x-1)}$

7. $f(x) = \dfrac{15-7\cdot x}{(3\cdot x-7)\cdot(2\cdot x-5)}$

8. $f(x) = \dfrac{61\cdot x-1}{(3\cdot x-2)\cdot(x+5)\cdot(2\cdot x+1)}$

9. $f(x) = \dfrac{14\cdot x-106}{(x+1)\cdot(3\cdot x-5)\cdot(2\cdot x+7)}$

10. $f(x) = \dfrac{-2\cdot x^2-22\cdot x-24}{(x+6)\cdot(2\cdot x+3)\cdot(x+2)}$

11. $f(x) = \dfrac{3\cdot x^2-9\cdot x-20}{x^2-2\cdot x-3}$

12. $f(x) = \dfrac{45\cdot x^3-42\cdot x^2+20\cdot x-1}{15\cdot x^2-14\cdot x+3}$

13. $f(x) = \dfrac{2\cdot x+5}{(x+1)^2}$

14. $f(x) = \dfrac{-2\cdot x+11}{(x-4)^2}$

15. $f(x) = \dfrac{-16\cdot x^2+54\cdot x-40}{(2\cdot x-3)^3}$

16. $f(x) = \dfrac{27\cdot x^2+21\cdot x+8}{(3\cdot x+2)^3}$

17. $f(x) = \dfrac{-8\cdot x^2+35\cdot x+9}{(2\cdot x-1)\cdot(x-4)^2}$

18. $f(x) = \dfrac{-22\cdot x^2+32\cdot x+138}{(5\cdot x+2)\cdot(2\cdot x-7)^2}$

19. $f(x) = \dfrac{-5\cdot x^3-43\cdot x^2-101\cdot x-90}{(2\cdot x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+4)^2}$

20. $f(x) = \dfrac{-60\cdot x^2+164\cdot x-103}{(2\cdot x+1)\cdot(x-2)\cdot(2\cdot x-3)^2}$

21. $f(x) = \dfrac{5\cdot x^3-12\cdot x^2-6\cdot x+2}{(x+1)^2\cdot(x-2)^2}$

22. $f(x) = \dfrac{3\cdot x^3-16\cdot x+20}{(x-3)^2\cdot(x-1)}$

23. $\dfrac{72\cdot x^4+141\cdot x^3+49\cdot x^2-105\cdot x+10}{(2\cdot x+3)^2\cdot(3\cdot x-1)^3}$

24. $f(x) = \dfrac{x^5+5\cdot x^4-3\cdot x^3-4\cdot x^2+12\cdot x+39}{(x+4)^2\cdot(x-1)^3}$

Respuestas 4.1

1. $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{6}{3\cdot x-2}$

2. $\dfrac{6}{2\cdot x+3}-\dfrac{3}{x+3}$

3. $\dfrac{3}{3\cdot x+7}-\dfrac{2}{2\cdot x+5}$

4. $\dfrac{6}{(5\cdot x-8)}-\dfrac{3}{(3\cdot x-4)}$

5. $\dfrac{10}{(3\cdot x+5)}-\dfrac{6}{(x+3)}$

6. $\dfrac{6}{(2\cdot x-5)}-\dfrac{3}{(2\cdot x-1)}$

7. $\dfrac{4}{(3\cdot x-7)}-\dfrac{5}{(2\cdot x-5)}$

8. $\dfrac{3}{(3\cdot x-2)}-\dfrac{2}{(x+5)}+\dfrac{2}{(2\cdot x+1)}$

9. $\dfrac{3}{(x+1)}-\dfrac{3}{(3\cdot x-5)}-\dfrac{4}{(2\cdot x+7)}$

10. $\dfrac{1}{(x+6)}+\dfrac{2}{(2\cdot x+3)}-\dfrac{3}{(x+2)}$

11. $3+\dfrac{2}{(x+1)}-\dfrac{5}{(x-3)}$

12. $3\cdot x-\dfrac{2}{(3\cdot x-1)}+\dfrac{7}{(5\cdot x-3)}$

13. $\dfrac{3}{(x+1)^2}+\dfrac{2}{(x+1)}$

14. $\dfrac{3}{(x-4)^2}-\dfrac{2}{(x-4)}$

15. $\dfrac{5}{(2\cdot x-3)^3}+\dfrac{3}{(2\cdot x-3)^2}-\dfrac{4}{(2\cdot x-3)}$

16. $\dfrac{6}{(3\cdot x+2)^3}-\dfrac{5}{(3\cdot x+2)^2}+\dfrac{3}{(3\cdot x+2)}$

17. $\dfrac{2}{(2\cdot x-1)}+\dfrac{3}{(x-4)^2}-\dfrac{5}{(x-4)}$

18. $\dfrac{2}{(5\cdot x+2)}-\dfrac{1}{(2\cdot x-7)^2}-\dfrac{3}{(2\cdot x-7)}$

19. $\dfrac{-3}{(2\cdot x-1)}+\dfrac{1}{(x+2)}-\dfrac{3}{(x+4)^2}-\dfrac{2}{(x+4)}$

20. $\dfrac{5}{2\cdot x+1}-\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{(2\cdot x-3)^2}+\dfrac{1}{2\cdot x-3}$

21. $\dfrac{-1}{(x+1)^2}+\dfrac{3}{(x+1)}-\dfrac{2}{(x-2)^2}+\dfrac{2}{(x-2)}$

22. $3+\dfrac{53}{2\cdot(x-3)^2}+\dfrac{77}{4\cdot(x-3)}+\dfrac{7}{4\cdot(x-1)}$

23. $\dfrac{-1}{(2\cdot x+3)^2}-\dfrac{1}{(3\cdot x-1)^3}+\dfrac{2}{(3\cdot x-1)}$

24. $1-\dfrac{3}{(x+4)^2}-\dfrac{1}{x+4}+\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{x-1}$

4.4.4 **Caso III** : **Factores cuadráticos no repetidos** .

Solución por substitución

Supongase que el denominador $Q(x)$ de una función racional propia $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ contiene un factor cuadrático irreducible en los reales de la forma $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, (*el cual siempre es posible escribir como* $x^2 + p\cdot x + q$ *, factorizando el coeficiente* a) que genera dos raíces complejas conjugadas y se factoriza en la forma :

$$x^2 + p\cdot x + q = (x - \alpha)\cdot(x - \beta)$$

donde α y β son números complejos .

Del teorema II, se deduce que la función racional :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{a\cdot\left(x^2 + p\cdot x + q\right)\cdot Q_1\cdot(x)} = \frac{P(x)}{[a\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)]\cdot Q_1\cdot(x)}$$

se desarrolla en: $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{A\cdot x + B}{x^2 + p\cdot x + q} + \dfrac{P_1\cdot(x)}{a\cdot Q_1\cdot(x)}$ de donde se deduce que :

$$(x-\alpha)\cdot(x-\beta)\cdot\frac{P(x)}{Q(x)} = (A\cdot x + B) + \left[\frac{P_1\cdot(x)}{a\cdot Q_1\cdot(x)}\right]\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)$$

Por lo tanto, haciendo $x = \alpha$ (ó $x = \beta$ en su caso) , se obtendrá :

$$\left[\frac{P(\alpha)}{a\cdot Q_1\cdot(\alpha)}\right] = (A\cdot\alpha + B) + 0$$

Igualando ahora las partes reales e imaginarias respectivas de éstos números complejos en ésta ecuación, se obtendrá un sistema de dos ecuaciones simultáneas cuyas incógnitas son los coeficientes A y B de la fracción parcial asociada con tal factor cuadrático .

Repitiendo éste procedimiento con cada uno de los factores cuadráticos que contenga el denominador de la función racional, se obtendrá el desarrollo de tal función como una suma de fracciones simples .

Ejemplo 8. Desarrollar en fracciones parciales : $F(x) = \dfrac{3\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 2}{\left(x^2 + x + 2\right)\cdot\left(2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1\right)}$

Solución :

Notemos que $F(x)$ *es propia* y además contiene dos factores cuadráticos irreducibles y distintos en el denominador, cuyas raíces complejas son :

$$x^2 + x + 2 = 0 \longrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}, \frac{-1-\sqrt{7}\cdot j}{2}$$

$$2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1+j}{2}, \frac{1-j}{2}$$

y por el teorema del factor, pueden escribirse como :

$$\left(x^2 + x + 2\right) = \left[x - \left(\frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right)\right]\cdot\left[x - \left(\frac{-1-\sqrt{7}\cdot j}{2}\right)\right] = (x-\alpha)\cdot(x-\beta)$$

$$\left(2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1\right) = 2\cdot\left[x - \left(\frac{1+j}{2}\right)\right]\cdot\left[x - \left(\frac{1-j}{2}\right)\right] = (x-\gamma)\cdot(x-\delta)$$

Por el teorema II, se propone entonces que :

$$\frac{3\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 2}{\left(x^2 + x + 2\right)\cdot\left(2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1\right)} = \left(\frac{A_1\cdot x + B_1}{x^2 + x + 2}\right) + \left(\frac{A_2\cdot x + B_2}{2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1}\right) \qquad (*)$$

Multiplicando ahora por $x^2 + x + 2$ y evaluando la expresión anterior en $x = \alpha = \left(\frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right)$

queda:

$$\frac{3\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 2}{2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1} = \left(A_1\cdot x + B_1\right) + \left(\frac{A_2\cdot x + B_2}{2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1}\right)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta) \quad \text{en } x = \alpha$$

$$\frac{3\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right)^3 + 5\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right)^2 - 2}{2\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right) + 1} = A_1\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right) + B_1 + 0$$

$$\left(\frac{-2-4\cdot\sqrt{7}\cdot j}{-1-2\cdot\sqrt{7}\cdot j}\right) = \left(\frac{-A_1}{2} + B_1\right) + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot A_1\right)\cdot j$$

haciendo la división de números complejos a la izquierda e igualando las partes reales e imaginarias respectivas en ambos miembros de ésta ecuación se obtiene :

$$2 = \frac{-A_1}{2} + B_1 \text{ y} \qquad 0 = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot A_1$$

de donde resulta $A_1 = 0$ y $B_1 = 2$

Multiplicando la ecuación (*) por $\left(2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1\right)$ y evaluándola en $x = \gamma = \dfrac{1+j}{2}$ queda:

$$\frac{3\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 2}{x^2 + x + 2} = \left(\frac{A_1\cdot x + B_1}{x^2 + x + 2}\right)\cdot 2\cdot(x-\gamma)\cdot(x-\delta) + \left(A_2\cdot x + B_2\right) \quad \textit{en} \quad x = \gamma$$

$$\left[\frac{3\cdot\left(\frac{1+j}{2}\right)^3 + 5\cdot\left(\frac{1+j}{2}\right)^2 - 2}{\left(\frac{1+j}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot j}\right] = 0 + A_2\cdot\left(\frac{1+j}{2}\right) + B_2$$

$$\left(\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}\cdot j\right) = \left(\frac{A_2}{2} + B_2\right) + \left(\frac{A_2}{2}\right)\cdot j$$

Igualando las partes reales e imaginarias respectivas de ambos miembros se obtiene :

$$-\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{A_2}{2} + B_2 \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{2} = \frac{A_2}{2}$$

de donde resulta $A_2 = 3$ y $B_2 = -2$

Determinadas las constantes, el desarrollo de $F(x)$ en fracciones parciales es :

$$\frac{3\cdot x^3 + 5\cdot x^2 - 2}{\left(x^2 + x + 2\right)\cdot\left(2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1\right)} = \left(\frac{0\cdot x + 2}{x^2 + x + 2}\right) + \left[\frac{3\cdot x + (-2)}{2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1}\right]$$

$$= \frac{2}{x^2 + x + 2} + \frac{3\cdot x - 2}{2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1}$$

4.4.5 Solución por igualación

Como se mencionó antes, el método de igualación para el desarrollo en fracciones parciales de una función racional propia $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *se aplica en todos los casos de factorización de* $Q(x)$. La igualación de los coeficientes con iguales potencias de la variable x en ambos miembros la ecuación básica, conduce a un sistema de ecuaciones simultáneas, que tiene como incógnitas a los coeficientes buscados del desarrollo.

Ejemplo 9. Desarrollar en fracciones parciales : $H(x) = \dfrac{5\cdot x^3 - 13\cdot x^2 + 9\cdot x + 2}{(x^2 - x + 1)\cdot(x^2 - 3\cdot x + 3)}$

Solución :

Notemos que $H(x)$ *es propia* y contiene dos factores cuadráticos distintos en el denominador, que además son irreducibles porque sus raíces son complejas :

$$x^2 - x + 1 = 0 \longrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}\cdot j}{2}\,,\ \frac{1-\sqrt{3}\cdot j}{2}$$

$$x^2 - 3\cdot x + 3 = 0 \longrightarrow x = \frac{3+\sqrt{3}\cdot j}{2}\,,\ \frac{3-\sqrt{3}\cdot j}{2}$$

y por el teorema del factor, pueden escribirse como :

$$(x^2 + x + 2) = \left[x - \left(\frac{-1+\sqrt{7}\cdot j}{2}\right)\right]\cdot\left[x - \left(\frac{-1-\sqrt{7}\cdot j}{2}\right)\right] = (x-\alpha)\cdot(x-\beta)$$

$$(2\cdot x^2 - 2\cdot x + 1) = 2\cdot\left[x - \left(\frac{1+j}{2}\right)\right]\cdot\left[x - \left(\frac{1-j}{2}\right)\right] = (x-\gamma)\cdot(x-\delta)$$

Por el teorema II, se propone entonces que :

$$\left[\frac{5\cdot x^3 - 13\cdot x^2 + 9\cdot x + 2}{(x^2 - x + 1)\cdot(x^2 - 3\cdot x + 3)}\right] = \left(\frac{A_1\cdot x + B_1}{x^2 - x + 1}\right) + \left(\frac{A_2\cdot x + B_2}{x^2 - 3\cdot x + 3}\right) \qquad (*)$$

Al sumar el lado derecho e igualar los numeradores en ambos miembros, se obtiene la *ecuación básica*:

$$5\cdot x^3 - 13\cdot x^2 + 9\cdot x + 2 = (A_1\cdot x + B_1)\cdot(x^2 - 3\cdot x + 3) + (A_2\cdot x + B_2)\cdot(x^2 - x + 1)$$

$$= (A_1 + A_2)\cdot x^3 + (-3\cdot A_1 + B_1 + B_2 - A_2)\cdot x^2 + (-3\cdot B_1 + 3\cdot A_1 + A_2 - B_2)\cdot x + 3\cdot B_1 + B_2$$

Igualando los coeficientes de las potencias iguales de x en ambos miembros se obtiene . . .

Coeficientes de x^3 : $\quad 5 = A_1 + A_2 \quad$ (I)

Coeficientes de x^2 : $\quad -13 = -3\cdot A_1 + B_1 + B_2 - A_2 \quad$ (II)

Coeficientes de x^1 : $\quad 9 = -3\cdot B_1 + 3\cdot A_1 + A_2 - B_2 \quad$ (III)

Coeficientes de x^0 : $\quad 2 = 3\cdot B_1 + B_2 \quad$ (IV)

La solución de éste sistema de ecuaciones conduce a los valores de los coeficientes buscados .
Empleando por ejemplo los métodos elementales : suma resta, substitución e igualación queda :

(II) + (III) $\longrightarrow$

$$\begin{array}{r} -3\cdot A_1 - A_2 + B_1 + B_2 = -13 \\ 3\cdot A_1 + A_2 - 3\cdot B_1 - B_2 = 9 \\ \hline -2\cdot B_1 = -4 \end{array}$$

es decir $B_1 = 2$. Substituyendo B_1 en la ec. (IV) resulta $2 = 3\cdot(2) + B_2$, es decir $B_2 = -4$.

Substituyendo B_1 y B_2 en la ec. (II), se obtiene una ecuación para las incógnitas A_1 y A_2 , la cual se resuelve simultáneamente con la ec. (I) :

$$-3\cdot A_1 + (2) + (-4) - A_2 = -13 \qquad \text{(II)}$$

$$-3\cdot A_1 - A_2 = -11$$

$$A_1 + A_2 = 5 \qquad \text{(I)}$$

se encuentra asi que $A_1 = 3$, $A_2 = 2$.

El desarrollo buscado en fracciones parciales para $H(x)$ es entonces. . .

$$\frac{5\cdot x^3 - 13\cdot x^2 + 9\cdot x + 2}{\left(x^2 - x + 1\right)\cdot\left(x^2 - 3\cdot x + 3\right)} = \left[\frac{(3)\cdot x + (2)}{x^2 - x + 1}\right] + \left[\frac{(2)\cdot x + (-4)}{x^2 - 3\cdot x + 3}\right]$$

$$= \frac{3\cdot x + 2}{x^2 - x + 1} + 2\cdot\frac{x - 2}{x^2 - 3\cdot x + 3}$$

Ejemplo 10. Desarrollar en fracciones parciales : $f(x) = \dfrac{2\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 3\cdot x + 8}{\left(6\cdot x^2 + x - 2\right)\cdot\left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2\right)}$

Solución :

Notemos que $f(x)$ *es propia* y contiene dos factores cuadráticos distintos en el denominador, sin embargo el primer factor no es irreducible en los reales pues se factoriza como . . .

$$6\cdot x^2 + x - 2 = (3\cdot x + 2)\cdot(2\cdot x - 1)$$

y en realidad se trata de dos factores lineales, por lo tanto se propone, de acuerdo a los teoremas 1 y 2 , el desarrollo :

$$\frac{2\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 3\cdot x + 8}{\left(6\cdot x^2 + x - 2\right)\cdot\left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2\right)} = \frac{A}{3\cdot x + 2} + \frac{B}{2\cdot x - 1} + \frac{C\cdot x + D}{3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2}$$

Sumado las fracciones del miembro izquierdo e igualando los numeradores de ambos miembros, se obtiene la *ecuación básica* :

$$2\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 3\cdot x + 8 =$$
$$= A\cdot(2\cdot x - 1)\cdot\left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2\right) + B\cdot(3\cdot x + 2)\cdot\left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2\right) + (C\cdot x + D)\cdot(3\cdot x + 2)\cdot(2\cdot x - 1)$$

Substituyendo la raz $x = \frac{1}{2}$, se obtiene . . .

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 8 =$$

$$= A\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right] + B\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right) + 2\right]\cdot\left[3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 2\right] + \left[C\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + D\right]\cdot\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right]$$

es decir . . .

$$\frac{35}{4} = B\cdot\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right) \longrightarrow \boxed{B = \frac{10}{3}}$$

Substituyendo la raz $x = \frac{-2}{3}$, se obtiene . . .

$$2\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{-2}{3}\right) + 8 =$$

$$= A\cdot\left[\left(\frac{-4}{3}\right) - 1\right]\cdot\left[3\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{-2}{3}\right) + 2\right] + B\cdot(0) + \left[C\cdot\left(\frac{-2}{3}\right) + D\right]\cdot(0)$$

es decir . . .

$$\frac{98}{27} = -14\cdot A \longrightarrow \boxed{B = \frac{-7}{27}}$$

Substituyendo éstos valores en la ecuación básica y simplificando se llega a :

$$\left(2\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 3\cdot x + 8\right) = \left(\frac{-7}{27}\right)\cdot(2\cdot x - 1)\cdot\left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2\right) \ldots$$
$$+ \left(\frac{10}{3}\right)\cdot(3\cdot x + 2)\cdot\left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2\right) + (C\cdot x + D)\cdot\left(6\cdot x^2 + x - 2\right)$$

$$= \left(\frac{256}{9}\cdot x^3 - \frac{463}{27}\cdot x^2 - \frac{236}{27}\cdot x + \frac{374}{27}\right) + (C\cdot x + D)\cdot\left(6\cdot x^2 + x - 2\right)$$

desarrollando y sumando términos semejantes . . .

$$\frac{-238}{9}\cdot x^3 + \frac{355}{27}\cdot x^2 + \frac{317}{27}\cdot x - \frac{158}{27} = 6\cdot C\cdot x^3 + (6\cdot D + C)\cdot x^2 + (D - 2\cdot C)\cdot x - 2\cdot D$$

y por igualación de los coeficientes de potencias iguales de x en ambos miembros, se obtiene :

$$6\cdot C = \frac{-238}{9} \quad \longrightarrow \quad C = \frac{-119}{27}$$

$$-2\cdot D = -\left(\frac{158}{27}\right) \quad \longrightarrow \quad D = \frac{79}{27}$$

El desarrollo buscado en fracciones parciales para $f(x)$ es :

$$\frac{2\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 3\cdot x + 8}{\left(6\cdot x^2 + x - 2\right)\cdot\left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2\right)} = \frac{-7}{27\cdot(3\cdot x + 2)} + \frac{10}{3\cdot(2\cdot x - 1)} - \frac{1}{27}\cdot\frac{-79 + 119\cdot x}{\left(3\cdot x^2 - 4\cdot x + 2\right)}$$

Ejemplo 11. Desarrollar en fracciones parciales : $G(x) = \dfrac{-3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 5\cdot x}{\left(2\cdot x^2 + 4\cdot x + 1\right)\cdot\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 2\right)}$

Solución :

$G(x)$ *es una función racional propia* ; pero aunque los factores cuadráticos del denominador no son irreducibles en los reales, pues se factorizan como . . .

$$\left(2\cdot x^2 + 4\cdot x + 1\right) = 2\cdot\left[x - \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]\cdot\left[x - \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 2\right) = 3\cdot\left[x - \left(\frac{-1 + \sqrt{7}}{3}\right)\right]\cdot\left[x - \left(\frac{-1 - \sqrt{7}}{3}\right)\right]$$

no obstante, por ser raices irracionales y por sencillez para el desarrollo del cálculo, *es conveniente considerarlos como cuadráticos*.

Se propone entonces que :

$$f(x) = \frac{A\cdot x + B}{2\cdot x^2 + 4\cdot x + 1} + \frac{C\cdot x + D}{3\cdot x^2 + 2\cdot x - 2}$$

sumando las fracciones en el lado derecho e igualando los numeradores de ambos miembros se obtiene la ecuación básica :

$$\left(-3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 5\cdot x\right) = (A\cdot x + B)\cdot\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 2\right) + (C\cdot x + D)\cdot\left(2\cdot x^2 + 4\cdot x + 1\right)$$

$$= (3\cdot A + 2\cdot C)\cdot x^3 + (3\cdot B + 2\cdot A + 2\cdot D + 4\cdot C)\cdot x^2 + (2\cdot B - 2\cdot A + 4\cdot D + C)\cdot x - 2\cdot B + D$$

Igualando los coeficientes correspondientes a las mismas potencias de x se obtiene el sistema de ecuaciones :

Coeficientes de x^3 : $-3 = 3\cdot A + 2\cdot C$ (I)

Coeficientes de x^2 : $-3 = 3\cdot B + 2\cdot A + 2\cdot D + 4\cdot C$ (II)

Coeficientes de x^1 : $5 = 2\cdot B - 2\cdot A + 4\cdot D + C$ (III)

Coeficientes de x^0 : $0 = -2\cdot B + D$ (IV)

La solución de éste sistema de ecuaciones conduce a los valores de los coeficientes buscados .
Empleando por ejemplo los métodos elementales : suma resta, substitución e igualación queda :

$A = 1$, $B = 1$, $C = -3$ y $D = 2$

y la expansión en fracciones parciales para $G(x)$ es :

$$\frac{-3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 5\cdot x}{\left(2\cdot x^2 + 4\cdot x + 1\right)\cdot\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 2\right)} = \frac{1 + x}{\left(2\cdot x^2 + 4\cdot x + 1\right)} + \frac{2 - 3\cdot x}{\left(3\cdot x^2 + 2\cdot x - 2\right)}$$

4.4.6 <u>Caso IV</u> : <u>Factores cuadráticos repetidos</u> .

<u>Solución por igualación.</u>

Si algunos factores cuadráticos irreducibles aparecen repetidos en el denominador de una función racional, el método más sencillo para desarrollar ésta función en una suma de fracciones parciales es la igualación de los coeficientes de iguales potencias de x en la ecuación básica .

<u>*Ejemplo*</u> 12. Desarrollar en fracciones parciales : $f(x) = \dfrac{x^5 + 2\cdot x^4 - 5\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 8\cdot x - 8}{\left(x^2 + x - 3\right)^3}$

<u>*Solución*</u> *:*

$f(x)$ *es una función racional propia* y tiene un factor cuadrático de orden 3 en el denominador, el cual no es irreducible en los reales, dado que se puede factorizar como : . . .

$$x^2 + x - 3 = \left[x - \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}\right)\right]\cdot\left[x - \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right)\right]$$

sin embargo, por ser éstas raices irracionales y por sencillez para el desarrollo del cálculo, *es conveniente considerarlos como cuadráticos,* por lo cual se propone que :

$$f(x) = \frac{A\cdot x + B}{x^2 + x - 3} + \frac{C\cdot x + D}{\left(x^2 + x - 3\right)^2} + \frac{E\cdot x + F}{\left(x^2 + x - 3\right)^3}$$

sumando las fracciones en el miembro derecho e igualando los numeradores de ambos miembros se obtiene la *ecuación básica* :

$$x^5 + 2\cdot x^4 - 5\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 8\cdot x - 8 =$$

$$= A\cdot x^5 + (2\cdot A + B)\cdot x^4 + (-5\cdot A + 2\cdot B + C)\cdot x^3 + (-6\cdot A - 5\cdot B + C + D)\cdot x^2 \ldots$$
$$+ (9\cdot A - 6\cdot B - C + D + E)\cdot x + (9\cdot B - 3\cdot D + F)$$

Igualando los coeficientes correspondientes a las mismas potencias de x se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

Coeficientes de x^5 :	$1 = A$	(I)
Coeficientes de x^4 :	$2 = 2\cdot A + B$	(II)
Coeficientes de x^3 :	$-5 = -5\cdot A + 2\cdot B + C$	(III)
Coeficientes de x^2 :	$-4 = -6\cdot A - 5\cdot B + C + D$	(IV)
Coeficientes de x^1 :	$8 = 9\cdot A - 6\cdot B - C + D + E$	(III)
Coeficientes de x^2 :	$-8 = 9\cdot B - 3\cdot D + F$	(IV)

cuya solución por substitución es. . .

$1 = A$			$\longrightarrow$	$A = 1$
$2 = 2\cdot A + B$	$\longrightarrow$	$2\cdot(1) + B = 2$	$\longrightarrow$	$B = 0$
$-5 = -5\cdot A + 2\cdot B + C$	$\longrightarrow$	$-5\cdot(1) + 2\cdot(0) + C = -5$	$\longrightarrow$	$C = 0$
$-4 = -6\cdot A - 5\cdot B + C + D$	$\longrightarrow$	$-6\cdot(1) - 5\cdot(0) + (0) + D = -4$	$\longrightarrow$	$D = 2$
$8 = 9\cdot A - 6\cdot B - C + D + E$	$\longrightarrow$	$9\cdot(1) - 6\cdot(0) - (0) + (2) + E = 8$	$\longrightarrow$	$E = -3$
$-8 = 9\cdot B - 3\cdot D + F$	$\longrightarrow$	$9\cdot(0) - 3\cdot(2) + F = -8$	$\longrightarrow$	$F = -2$

y la expansión en fracciones parciales para $G(x)$ es :

$$\frac{x^5 + 2\cdot x^4 - 5\cdot x^3 - 4\cdot x^2 + 8\cdot x - 8}{\left(x^2 + x - 3\right)^3} = \frac{(1)\cdot x + 0}{\left(x^2 + x - 3\right)} + \frac{(0)\cdot x + 2}{\left(x^2 + x - 3\right)^2} + \frac{(-3\cdot x - 2)}{\left(x^2 + x - 3\right)^3}$$

$$= \frac{x}{\left(x^2 + x - 3\right)} + \frac{2}{\left(x^2 + x - 3\right)^2} - \frac{3\cdot x + 2}{\left(x^2 + x - 3\right)^3}$$

Ejemplo 13. Desarrollar en fracciones parciales : $g(x) = \dfrac{6\cdot x^4 + 11\cdot x^3 + 18\cdot x^2 + 14\cdot x + 6}{(x+1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)^2}$

Solución :

$g(x)$ *es una función racional propia* y tiene un factor cuadrático irreducible de orden 2 y un facor lineal no repetido en el denominador, por lo tanto se propone que . . .

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \left[\frac{B_1\cdot x + C_1}{x^2 + x + 1} + \frac{B_2\cdot x + C_2}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}\right]$$

sumando las fracciones en el miembro derecho e igualando los numeradores de ambos miembros se obtiene la *ecuación básica* :

$$6\cdot x^4 + 11\cdot x^3 + 18\cdot x^2 + 14\cdot x + 6 =$$

$$= \left(A + B_1\right)\cdot x^4 + \left(2\cdot A + 2\cdot B_1 + C_1\right)\cdot x^3 + \left(3\cdot A + 2\cdot B_1 + 2\cdot C_1 + B_2\right)\cdot x^2 \ldots$$
$$+ \left(2\cdot A + B_1 + 2\cdot C_1 + B_2 + C_2\right)\cdot x + A + C_2 + C_1$$

Igualando los coeficientes correspondientes a las mismas potencias de x se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales simultáneas:

Coeficientes de x^4 :	$6 = \left(A + B_1\right)$	(I)
Coeficientes de x^3 :	$11 = 2\cdot A + 2\cdot B_1 + C_1$	(II)
Coeficientes de x^2 :	$18 = 3\cdot A + 2\cdot B_1 + 2\cdot C_1 + B_2$	(III)
Coeficientes de x^1 :	$14 = 2\cdot A + B_1 + 2\cdot C_1 + B_2 + C_2$	(IV)
Coeficientes de x^2 :	$6 = A + C_2 + C_1$	(V)

cuya solución por es. . .

$$A = 5 \quad , \quad B_1 = 1 \; , \quad C_1 = -1 \quad , \quad B_2 = 3 \; , \quad C_2 = 2$$

y la expansión en fracciones parciales para $g(x)$ resulta :

$$\frac{6\cdot x^4 + 11\cdot x^3 + 18\cdot x^2 + 14\cdot x + 6}{(x+1)\cdot\left(x^2 + x + 1\right)^2} = \frac{5}{(x+1)} + \frac{(x-1)}{\left(x^2 + x + 1\right)} + \frac{3\cdot x + 2}{\left(x^2 + x + 1\right)^2}$$

Ejemplo 12. Desarrollar en fracciones parciales : $f(x) = \dfrac{3}{\left(x^3+1\right)^2}$

Solución :

$f(x)$ *es una función racional propia* y además el factor $\left(x^3+1\right)$ se factoriza como una suma de cubos :

$$x^3+1 = (x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)$$

por lo tanto $f(x)$ tiene en su denominador dos factores, uno lineal y otro cuadrático irreducible , ambos de orden 2 . Se propone entonces que :

$$\frac{3}{(x+1)^2\cdot\left(x^2-x+1\right)^2} = \left[\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{(x+1)^2}\right]+\left[\frac{B_1\cdot x+C_1}{x^2-x+1}+\frac{B_2\cdot x+C_2}{\left(x^2-x+1\right)^2}\right]$$

sumando las fracciones en el miembro derecho e igualando los numeradores de ambos miembros se obtiene la *ecuación básica* :

$$3 = A_1\cdot(x+1)\cdot\left(x^2-x+1\right)^2+A_2\cdot\left(x^2-x+1\right)^2+\left(B_1\cdot x+C_1\right)\cdot(x+1)^2\cdot\left(x^2-x+1\right)\ \ldots$$
$$+\left(B_2\cdot x+C_2\right)\cdot(x+1)^2$$

Dado que la raiz del factor $(x+1)$ es $x = -1$ y las raices de $\left(x^2-x+1\right)$ son $x = \dfrac{1-\sqrt{3}\cdot j}{2}$ y $\dfrac{1+\sqrt{3}\cdot j}{2}$ *evaluando* la ecuación básica en éstas raíces se obtiene :

substituyendo $x = -1$ *:*

$$3 = A_1\cdot(0)+A_2\cdot\left[(-1)^2-(-1)+1\right]^2+\left(B_1\cdot x+C_1\right)\cdot(0)^2\cdot\left(x^2-x+1\right)+\left(B_2\cdot x+C_2\right)\cdot(0)^2$$

$$3 = 0+9\cdot A_2+0+0$$

es decir . . . $A_2 = \dfrac{1}{3}$

substituyendo $x = \dfrac{1+\sqrt{3}\cdot j}{2}$ *:*

$$3 = A_1\cdot(0)+A_2\cdot(0)+\left(B_1\cdot x+C_1\right)\cdot(0)+\left[B_2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}\cdot j}{2}\right)+C_2\right]\cdot\left(\frac{1+\sqrt{3}\cdot j}{2}+1\right)^2$$

$$3 = \left(\frac{-3}{2}\cdot B_2 + \frac{3}{2}\cdot C_2\right) + \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\left(B_2 + C_2\right)\cdot j$$

Igualando las partes reales e imaginarias respectivas en ambos miembros de ésta ecuación se obtiene :

$$\left(\frac{-3}{2}\cdot B_2 + \frac{3}{2}\cdot C_2\right) = 3 \quad\longrightarrow\quad -B_2 + C_2 = 2 \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\left(B_2 + C_2\right) = 0 \quad\longrightarrow\quad B_2 + C_2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

con solución : $B_2 = -1$, $C_2 = 1$

Con éstas constantes ya determinadas, la ecuación básica se transforma en :

$$3 = A_1\cdot(x+1)\cdot\left(x^2 - x + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(x^2 - x + 1\right)^2 + \left(B_1\cdot x + C_1\right)\cdot(x+1)^2\cdot\left(x^2 - x + 1\right) \ldots$$
$$+ (-x+1)\cdot(x+1)^2$$

substituyamos ahora valores arbitrarios para x se obtendrá un sistema de ecuaciones simultáneas para los coeficientes que faltan por determinar.

substituyendo $x = 0$ *queda:*

$$3 = A_1\cdot(1)\cdot\left(0^2 - 0 + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(0^2 - 0 + 1\right)^2 + \left[B_1\cdot(0) + C_1\right]\cdot(1)^2\cdot\left(0^2 - 0 + 1\right) + (1)\cdot(1)^2$$

$$3 = A_1 + \frac{1}{3} + C_1 + 1 \qquad \text{es decir . . .} \quad \frac{5}{3} = A_1 + C_1 \qquad (*)$$

substituyendo $x = 1$ *queda:*

$$3 = A_1\cdot(2)\cdot\left(1^2 - 1 + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1^2 - 1 + 1\right)^2 + \left(B_1 + C_1\right)\cdot(2)^2\cdot\left(1^2 - 1 + 1\right) + [(-1) + 1]\cdot(2)^2$$

$$3 = 2\cdot A_1 + \frac{1}{3} + 4\cdot B_1 + 4\cdot C_1 \qquad \text{es decir . . .} \quad \frac{4}{3} = A_1 + 2\cdot B_1 + 2\cdot C_1 \qquad (**)$$

substituyendo $x = 2$ *queda:*

$$3 = A_1\cdot(3)\cdot\left(2^2 - 2 + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(2^2 - 2 + 1\right)^2 + \left[B_1\cdot(2) + C_1\right]\cdot(2+1)^2\cdot\left(2^2 - 2 + 1\right) \ldots$$
$$+ (-2+1)\cdot(2+1)^2$$

$$3 = 27\cdot A_1 - 6 + 54\cdot B_1 + 27\cdot C_1 \qquad \text{es decir . . .} \quad 1 = 3\cdot A_1 + 6\cdot B_1 + 3\cdot C_1 \qquad (***)$$

La solución de las ecuaciones simultáneas (*) , (**) , y (***) es: $A_1 = \frac{2}{3}$, $B_1 = \frac{-2}{3}$ y $C_1 = 1$.

La expansión en fracciones parciales para $f(x)$ es entonces :

$$\frac{3}{\left(x^3+1\right)^2} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{x+1} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{(x+1)^2} + \frac{\left(-\frac{2}{3}\cdot x+1\right)}{\left(x^2-x+1\right)} + \frac{(-1)\cdot x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$= \frac{2}{3\cdot(x+1)} + \frac{1}{3\cdot(x+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{(-2\cdot x+3)}{\left(x^2-x+1\right)} + \frac{-x+1}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

En éste ejemplo hemos usado únicamente el método de substitución .

EJERCICIO 4.2

I. Desarrollar en una suma de fraciones parciales simples, las siguientes funciones racionales:

1. $f(x) = \dfrac{-2\cdot x + 5}{(x-1)\cdot\left(x^2+2\right)}$

2. $f(x) = \dfrac{5\cdot x^2 + x + 2}{(x+1)\cdot\left(x^2+3\right)}$

3. $f(x) = \dfrac{3\cdot x^2 - 10\cdot x + 16}{(x-3)\cdot\left(x^2+x+1\right)}$

4. $f(x) = \dfrac{-11\cdot x^3 + 46\cdot x^2 - 28\cdot x - 1}{(3\cdot x-3)\cdot(3\cdot x-1)\cdot\left(x^2+2\right)}$

5. $f(x) = \dfrac{-8\cdot x}{\left(3\cdot x^2+5\right)\cdot(x+3)}$

6. $f(x) = \dfrac{x^3 + 11\cdot x^2 + 13\cdot x - 5}{(x-3)\cdot(3\cdot x+1)\cdot\left(x^2-x+2\right)}$

7. $f(x) = \dfrac{4\cdot x^3 - 11\cdot x^2 + 12\cdot x - 19}{(x-2)^2\cdot\left(x^2+x+1\right)}$

8. $f(x) = \dfrac{7\cdot x^4 - 11\cdot x^3 + 16\cdot x^2 + 17\cdot x + 4}{(3\cdot x-2)\cdot\left(x^2+5\right)\cdot\left(2\cdot x^2+1\right)}$

9. $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)\cdot\left(3\cdot x^2+5\right)\cdot\left(2\cdot x^2+1\right)}$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2\cdot x - 3}{\left(x^2-x+3\right)\cdot\left(2\cdot x^2+3\right)}$

11. $f(x) = \dfrac{-6\cdot x^3 + 8\cdot x^2 - 5\cdot x - 12}{\left(x^2-2\cdot x+2\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)}$

12. $f(x) = \dfrac{45\cdot x^3 - 42\cdot x^2 + 20\cdot x - 1}{5\cdot x^2 - 7\cdot x + 4}$

13. $f(x) = \dfrac{2\cdot x^2 + 5}{\left(x^2+1\right)^2}$

14. $f(x) = \dfrac{-2\cdot x^3 + 11}{\left(x^2+4\right)^2}$

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$

16. $f(x) = \dfrac{2\cdot x^5 + 12\cdot x^3 + 15\cdot x - 2}{\left(x^2+3\right)^3}$

17. $f(x) = \dfrac{-2\cdot x^5 - 8\cdot x^4 + 8\cdot x^3 + 32\cdot x^2 - 19\cdot x + 3}{x^2\cdot\left(x^2+3\cdot x-1\right)^2}$

18. $f(x) = \dfrac{-32\cdot x^3 - 38\cdot x^2 - 32\cdot x - 13}{(5\cdot x+2)\cdot\left(2\cdot x^2+x+1\right)^2}$

19. $f(x) = \dfrac{x^4 + 2\cdot x^3 - 7\cdot x^2 - 8\cdot x + 18}{\left(x^2+x-3\right)^3}$

20. $f(x) = \dfrac{x^5 + 2\cdot x^4 + 5\cdot x^3 + 2\cdot x^2 + 2\cdot x - 2}{\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2+x+2\right)^2}$

21. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\cdot x^2 - 6\cdot x + 2}{\left(x^2+1\right)^2\cdot\left(x^2+2\right)^2}$

22. $f(x) = \dfrac{3\cdot x^5 + 21\cdot x^4 + 17\cdot x^3 + 45\cdot x^2 + 4\cdot x + 8}{\left(x^2-2\cdot x+2\right)^2\cdot\left(2\cdot x^2+3\cdot x+2\right)^2}$

Respuestas 4.2

1. $\frac{1}{(x-1)} - \frac{(3+x)}{\left(x^2+2\right)}$

2. $\frac{3}{2\cdot(x+1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-5+7\cdot x)}{\left(x^2+3\right)}$

3. $\frac{1}{(x-3)} + \frac{(-5+2\cdot x)}{\left(x^2+x+1\right)}$

4. $\frac{1}{3\cdot(x-1)} + \frac{4}{3\cdot(3\cdot x-1)} - \frac{(-3+2\cdot x)}{\left(x^2+2\right)}$

5. $\frac{3}{4\cdot(x+3)} - \frac{1}{4}\cdot\frac{(5+9\cdot x)}{\left(3\cdot x^2+5\right)}$

6. $\frac{2}{x-3} + \frac{1}{3\cdot x+1} - \frac{(-1+2\cdot x)}{x^2-x+2}$

7. $\frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{3}{x-2} + \frac{(x-3)}{x^2+x+1}$

8. $\frac{2}{3\cdot x-2} + \frac{(x-2)}{x^2+5} - \frac{(x-1)}{2\cdot x^2+1}$

9. $\frac{-1}{12\cdot(x+1)} - \frac{3}{28}\cdot\frac{(1+3\cdot x)}{\left(3\cdot x^2+5\right)} + \frac{2}{21}\cdot\frac{(-1+4\cdot x)}{\left(2\cdot x^2+1\right)}$

10. $\frac{x}{x^2-x+3} - \frac{(1+2\cdot x)}{\left(2\cdot x^2+3\right)}$

11. $\frac{(x-2)}{x^2-2\cdot x+2} - \frac{(5+7\cdot x)}{x^2+x+1}$

12. $9\cdot x + \frac{21}{5} + \frac{(-89+67\cdot x)}{25\cdot x^2-35\cdot x+20}$

13. $\frac{3}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{2}{\left(x^2+1\right)}$

14. $\frac{(11+8\cdot x)}{\left(x^2+4\right)^2} - 2\cdot\frac{x}{\left(x^2+4\right)}$

15. $\frac{-1}{\left(x^2+1\right)^3} + \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$

16. $\frac{(-2-3\cdot x)}{\left(x^2+3\right)^3} + 2\cdot\frac{x}{\left(x^2+3\right)}$

17. $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{(x+2)}{x^2+3\cdot x-1} + \frac{(3+2\cdot x)}{\left(x^2+3\cdot x-1\right)^2}$

18. $\frac{-5}{5\cdot x+2} + \frac{(2\cdot x-3)}{2\cdot x^2+x+1} - \frac{1}{\left(2\cdot x^2+x+1\right)^2}$

19. $\frac{3}{\left(x^2+x-3\right)^3} - \frac{2}{\left(x^2+x-3\right)^2} + \frac{1}{x^2+x-3}$

20. $\frac{x}{x^2+x+1} - \frac{2}{\left(x^2+x+2\right)^2}$

21. $5\cdot\frac{(-2+3\cdot x)}{\left(x^2+1\right)} - \frac{(-4+7\cdot x)}{\left(x^2+1\right)^2} - 5\cdot\frac{(-2+3\cdot x)}{\left(x^2+2\right)} - 2\cdot\frac{(-3+4\cdot x)}{\left(x^2+2\right)^2}$

22. $\frac{(x+1)}{\left(x^2-2\cdot x+2\right)^2} - \frac{(x-1)}{\left(2\cdot x^2+3\cdot x+2\right)^2}$

Capítulo V

Sistemas de Ecuaciones Lineales

5.1 *Definición* .

Una ***ecuación lineal*** en las n variables : x_1 , x_2 , x_3 , . . . , x_n se define por la siguiente expresión:

$$\left[a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{(n-1)} \cdot x_{(n-1)} + a_n \cdot x_n\right] = b \qquad (5.1)$$

donde los coeficientes a_1 , a_1 , a_1 , . . . , a_1 y b, son constantes (*reales ó complejas*) .

Nótese que una ecuación es lineal solo si :

- *todas la variables aparecen elevadas a la primera potencia*
- *no contiene productos ó raíces de las variables.*
- *no contiene términos con funciones trascendentes (trigonométricas , exponenciales ó logaritmicas)*

Por ejemplo las siguientes ecuaciones son lineales. . .

$-3 \cdot x + 2 \cdot y = 5$ *(dos variables y coeficientes enteros)*

$\frac{2}{3} \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 - \frac{1}{2} \cdot x_3 = 1$ *(tres variables y coeficientes enteros y racionales)*

$y = \sqrt{2} \cdot x + 3 \cdot z + \pi \cdot w - 1$ *(cuatro variables y coeficientes enteros e irracionales)*

$\pi \cdot x_1 - \left(\frac{3}{2}\right) \cdot x_2 = 4 \cdot x_3 - \sqrt{3} \cdot x_4 + \left(\frac{5}{3}\right) \cdot x_5 - 1$ *(cuatro variables y coeficientes diversos)*

en cambio, las siguientes ecuaciones no son lineales porque . . .

$3 \cdot x - 2 \cdot y^2 = 5$ *(tiene una variable elevada a una potencia mayor a 1)*

$2 \cdot x + 4 \cdot x \cdot y - z = 2$ *(tiene un producto de variables)*

$y = sen(x) - 1$ *(contiene una expresión con funciones trascendentes)*

$\sqrt{x_1} + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 2$ *(tiene una variable elevada a una potencia fraccionaria)*

$x + \frac{3}{2} \cdot y - 5 \cdot \frac{z}{w} = -3$ *(tiene una división de variables)*

5.2 ***Solución de una ecuación lineal*** .

La solución de la ecuación lineal :

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots\dots\dots + a_n \cdot x_n = b$$

es una sucesión de n números :

$$P = \left(k_1, k_2, k_3, \dots\dots\dots, k_n\right)$$

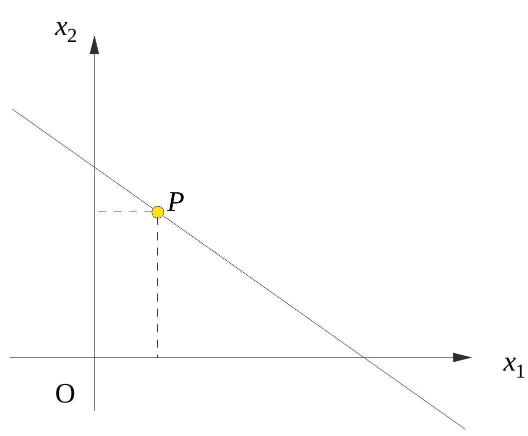
tal que al substituir las variables por éstos valores : $x_1 = k_1$, $x_2 = k_1$, $x_1 = k_1$, ... , $x_1 = k_1$, la ecuación se satisface, es decir la suma de los números . . .

$$a_1 \cdot \left(k_1\right) + a_2 \cdot \left(k_2\right) + \dots\dots\dots + a_n \cdot \left(k_n\right)$$

es igual efectivamente al número b .

La unión de todas las posibles soluciones de una ecuación lineal se llama *conjunto solución* .

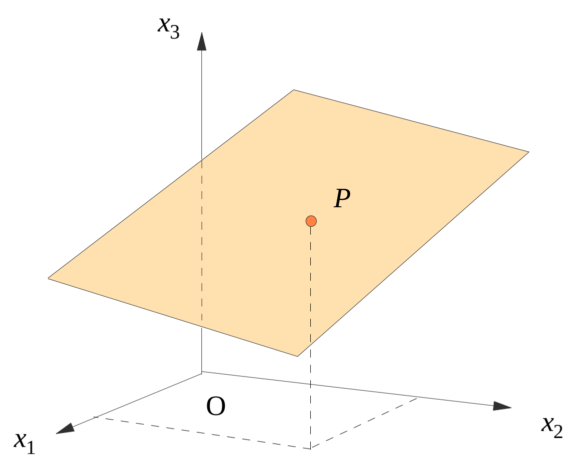
El conjunto solución de una ecuación lineal de dos variables : $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$ se puede interpretar geométricamente como el conjunto de puntos $\left(x_1, x_2\right)$ de una línea recta sobre un plano de 2 dimensiones. El conjunto solución de una ecuación lineal de tres variables : $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$ se interpreta geométricamente como todos los puntos $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ que están sobre un plano en el espacio rectangular de 3 dimensiones, como se ilustra en las siguientes figuras :



La ecuación de una linea recta en el plano x_1 , x_2 *tiene la forma general :*

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$$

(una ecuación lineal en dos variables) , cuyo conjunto solución está formado por todos los puntos $P = (x_1 , x_2)$ *del plano que están sobre la recta*



La ecuación de un plano infinito en el espacio tridimensional tiene la forma general :

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$$

(una ecuación lineal en tres variables) , cuyo conjunto solución está formado por todos los puntos $P = (x_1 , x_2 , x_3)$ *del espacio que están sobre el plano*

Por analogía con los casos anteriores de 2 y 3 dimensiones, se induce ahora que *el conjunto solución de una ecuación lineal de* n *variables debe ser el conjunto de puntos sobre una superficie plana en el hiperespacio de* n *dimensiones* .

La solución de una ecuación lineal se clasifica en general, en uno de los siguientes *tres casos* :

Caso I : ***Al menos uno de los coeficientes*** a_k ***de la ecuación lineal***

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n \cdot x_n = b$$

es distinto de cero .

En éste caso se resuelve la ecuación para la variable correspondiente a tal coeficiente, por ejemplo si $a_1 \neq 0$, entonces :

$$x_1 = \frac{1}{a_1} \cdot \left(b - a_2 \cdot x_2 - a_3 \cdot x_3 - \ldots\ldots\ldots - a_n \cdot x_n \right) \qquad (5.2)$$

Se asignan ahora valores *(ó parámetros)* numéricos arbitrarios al resto de las variables, digamos . . .

$$x_2 = c_2 \ , \quad x_3 = c_3 \ , \quad x_4 = c_4 \ , \ \ldots \ , \ x_n = c_n$$

y se calcula mediante la ecuación 5.2 el valor de x_1 .

Se habrá obtenido asi ***una*** solución numérica particular : $P = \left(c_1 , c_2 , \ldots\ldots\ldots , c_n \right)$ (*o una solución paramétrica general*) para la ecuación lineal .

Caso II : ***Todos los coeficientes*** a_k ***de la ecuación lineal son cero , excepto el término constante*** b ***:***

$$(0) \cdot x_1 + (0) \cdot x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (0) \cdot x_n = b$$

en éste caso, la ecuación no tiene solución , (se dice que es inconsistente) , pues establece una contradicción :.

$$0 = b \qquad (5.3)$$

siendo $b \neq 0$

Caso III : ***Todos los coeficientes*** a_k ***de la ecuación lineal son cero y también el término constante*** b ***:***

$$(0) \cdot x_1 + (0) \cdot x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (0) \cdot x_n = 0$$

en éste caso, cualquier n-ada de números $\left(k_1 , k_2 , \ldots\ldots\ldots , k_n \right)$ ***satisface la condición :.***

$$0 = 0 \qquad (5.4)$$

y se dice que la ecuación tiene un número infinito de soluciones .

Ejemplo 1. Hallar el conjunto solución de las ecuaciones lineales :

a) $4\cdot x - 2\cdot y = 1$ b) $x_1 - 4\cdot x_2 + 7\cdot x_3 = 5$

Solución :

a) Es posible resolver la ecuación para la variable y (*dado que su coeficiente es distinto de cero*) y luego asignar un valor paramétrico arbitrario a la variable x. Ó se puede también despejar x y elegir un valor paramétrico arbitrario para la variable y .

Despejando y queda. . . $y = \frac{-1}{2}\cdot(1 - 4\cdot x)$

Asignando a x el valor paramétrico $x = t$ resulta. . . $y = \frac{-1}{2}\cdot(1 - 4\cdot t)$

En términos del parámetro t, el conjunto solución de la ecuación lineal es : $P\left(t, 2\cdot t - \frac{1}{2}\right)$

de la cual es posible obtener soluciones numéricas particulares al substituir el parámetro t por valores numéricos específicos, por ejemplo :

con $t = 1$ *resulta . . .* $P\left[1, \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right]$ *es decir . . .* $x = 1$, $y = \frac{3}{2}$

con $t = -2$ *resulta . . .* $P\left[-2, \left(-4 - \frac{1}{2}\right)\right]$ *es decir . . .* $x = -2$, $y = \frac{-9}{2}$

con $t = \frac{1}{4}$ *resulta . . .* $P\left[\frac{1}{4}, \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]$ *es decir . . .* $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$

etc.

Despejando en cambio x queda. . . $x = \frac{1}{4}\cdot(1 + 2\cdot x)$

Asignando a y el valor paramétrico $y = s$ resulta. . . $x = \frac{1}{4}\cdot(1 + 2\cdot s)$

En términos de s, el conjunto solución de la ecuación lineal es : $P\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{s}{2}\right), s\right]$

de la cual es posible obtener *las mismas soluciones numéricas particulares* que con la otra parametrización. Por ejemplo . . .

con $s = \frac{3}{2}$ *resulta . . .* $P\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right), \frac{3}{2}\right]$ *es decir :* $x = 1$, $y = \frac{3}{2}$

con $s = \frac{-9}{2}$ *resulta . . .* $P\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-9}{2}\right), \frac{-9}{2}\right]$ *es decir:* $x = -2$, $y = \frac{-9}{2}$

con $s = 0$ *resulta . . .* $P\left[\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot 0\right), 0\right]$ *es decir . . .* $x = \frac{1}{4}$, $y = 0$

b) Es posible resolver la ecuación lineal $x_1 - 4\cdot x_2 + 7\cdot x_3 = 5$ para una cualquiera de sus tres variables (*ya que sus coeficientes son distintos de cero*) y *asignar valores arbitrarios a las otras dos variables.*

Despejando por ejemplo x_3 queda. . . $x_3 = \frac{1}{7}\cdot(5 - x_1 + 4\cdot x_2)$

Asignando los valores paramétricos $x_1 = s$, $x_2 = t$ resulta. . . $x_3 = \frac{1}{7}\cdot(5 - s + 4\cdot t)$

En términos de los parámetros s y t, la solución general de la ecuación lineal es :

$$P\left(s, t, \frac{5 - s + 4\cdot t}{7}\right)$$

de la cual es posible obtener soluciones numéricas particulares al substituir los parámetros s y t por valores numéricos específicos, por ejemplo :

con $s = 4$, $t = -2$ *resulta :* $P\left(4, -2, \frac{5-4-8}{7}\right)$ *es decir :* $x = 4$, $y = -2$, $z = -1$

con $s = 1$, $t = -1$ *resulta :* $P\left(1, -1, \frac{5-1-4}{7}\right)$ *es decir :* $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$

con $s = -5$, $t = 1$ *resulta :* $P\left(-5, 1, \frac{5+5+4}{7}\right)$ *es decir :* $x = -5$, $y = 1$, $z = 2$

etc.

Despejando en cambio x_1 queda . . . $x_1 = 5 + 4\cdot x_2 - 7\cdot x_3$

asignando los valores paramétricos $x_2 = m$, $x_3 = n$ resulta. . . $x_1 = 5 + 4\cdot m - 7\cdot n$

En términos de m y n , la solución general de la ecuación lineal es :

$$P[(5 + 4\cdot m - 7\cdot n), m, n]$$

de la cual es posible obtener *las mismas soluciones numéricas particulares anteriores* al substituir los parámetros m y n por valores numéricos específicos, por ejemplo :

con $m = -2$, $n = -1$ *resulta :* $[(5 + 4\cdot m - 7\cdot n), m, n] = (4, -2, -1)$

con $m = -1$, $n = 0$ *resulta :* $[(5 + 4\cdot m - 7\cdot n), m, n] = (1, -1, 0)$

con $m = 1$, $n = 2$ *resulta :* $[(5 + 4\cdot m - 7\cdot n), m, n] = (-5, 1, 2)$

En resumen, la parametrización de la solución general para una ecuación lineal es en principio arbitraria sin embargo, cualquiera que sea el parámetro o la parametrización obtenida, siempre se obtiene *el mismo conjunto solución* .

5.3 ***Sistemas de ecuaciones lineales*** .

Un conjunto finito de n ecuaciones lineales en las m variables x_1 , x_2 , x_3 , ... , x_m tal como :

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{1m}\cdot x_m &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{2m}\cdot x_m &= b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{3m}\cdot x_m &= b_3 \\ \dots\dots \qquad\qquad & \dots\dots\dots \\ \dots\dots \qquad\qquad & \dots\dots\dots \\ a_{n\cdot 1}\cdot x_1 + a_{n\cdot 2}\cdot x_2 + a_{n\cdot 3}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{n\,m}\cdot x_m &= b_n \end{aligned} \qquad (5.5)$$

se llama un *sistema de* n *ecuaciones lineales en* m *variables* .
Por ejemplo :

$$\begin{aligned} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + a_{14}\cdot x_4 &= b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + a_{24}\cdot x_4 &= b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + a_{34}\cdot x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

es un sistema de 3 ecuaciones lineales en 4 variables o incógnitas .

El doble subíndice ij de los coeficientes a_{ij} es una notación conveniente que sirve para *localizar* cada coeficiente en el sistema. El primer subíndice (i) , indica el número de la ecuación en la que se encuentra tal coeficiente, mientras que el segundo subíndice (j) indica la variable a la cual multiplica .
Asi por ejemplo . . .

a_{32} : *es el coeficiente que está en la 3ª ecuación y multiplica a la segunda variable* x_2 .

a_{45} : *es el coeficiente que está en la 4ª ecuación y multiplica a la quinta incógnita* x_5 .

a_{24} : *es el coeficiente de la variable* x_4 *que está en la 2ª ecuación .*

etc.

Se dice que *la sucesión de m números* :

$$u = (k_1, k_2, k_3, \dots\dots\dots, k_m)$$

es una solución del sistema de ecuaciones lineales (5.5) , si al hacer las substituciones :

$$x_1 = k_1 \;,\quad x_2 = k_2 \;,\quad x_3 = k_3 \;,\quad \dots\dots, x_m = k_m$$

se satisfacen ***todas y cada una*** *de las ecuaciones del sistema* .

Una sucesión $u = (k_1, k_2, k_3, \dots\dots\dots, k_m)$ dada no es solución del sistema de ecuaciones lineales si hay al menos una ecuación del sistema que no se satisfaga para tal sucesión de números ; *aunque todas las demás ecuaciones si sean satisfechas* . De éste modo , la solución de un sistema lineal es mucho más restrictiva que la solución de una sola ecuación lineal .

Ejemplo 2. Una solución del sistema de ecuaciones lineales :

$$-3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - x_3 + 2\cdot x_4 = 12$$
$$5\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 4\cdot x_3 - x_4 = -2$$
$$-2\cdot x_1 + x_2 - 3\cdot x_3 - 3\cdot x_4 = -2$$

es la sucesión $u = (-2, 3, 4, -1)$, porque en efecto al hacer las substituciones :

$x_1 = -2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ y $x_4 = -1$

se satisfacen las tres ecuaciones de éste sistema de cuatro variables, es decir . . .

$$[\,-3\cdot(-2) + 4\cdot(3) - (4) + 2\cdot(-1)\,] = (6 + 12 - 4 - 2) = 12$$
$$[5\cdot(-2) - 3\cdot(3) + 4\cdot(4) - (-1)] = (-10 - 9 + 16 + 1) = -2$$
$$[\,-2\cdot(-2) + (3) - 3\cdot(4) - 3\cdot(-1)\,] = (4 + 3 - 12 + 3) = -2$$

En cambio la sucesión $u = (1, -4, -1, 15)$ no es una solución del sistema, porque al hacer las substituciones

$x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = -1$ y $x_4 = 15$

se obtiene . . .

$$[\,-3\cdot(1) + 4\cdot(-4) - (-1) + 2\cdot(15)\,] = (-3 - 16 + 1 + 30) = 12$$
$$[5\cdot(1) - 3\cdot(-4) + 4\cdot(-1) - (15)] = (5 + 12 - 4 - 15) = -2$$
$$-2\cdot(1) + (-4) - 3\cdot(-1) - 3\cdot(15) = (-2 - 4 + 3 - 45) \neq -2$$

y aunque se satisfacen las dos primeras ecuaciones, no se cumple la tercera.

Sin embargo, *no todo sistema de ecuaciones lineales tiene una solución*, considérese por ejemplo el sistema. . .

$$x + 3\cdot y = 4 \qquad \text{(I)}$$
$$2\cdot x + 6\cdot y = 6 \qquad \text{(II)}$$

pero al multiplicar por 2 la primera ecuación se obtienen dos ecuaciones que se contradicen mutuaamente:

$$2\cdot x + 6\cdot y = 8$$
$$2\cdot x + 6\cdot y = 6$$

pues no es posible que la cantidad $(2\cdot x + 6\cdot y)$ sea 6 y 8 al mismo tiempo.
Ó bién al restar miembro a miembro las ecuaciones anteriores se obtiene :

$$(2\cdot x + 6\cdot y) - (2\cdot x + 6\cdot y) = (8 - 6) \qquad \text{ó} \qquad 0 = 2$$

que es una ecuación inconsistente.

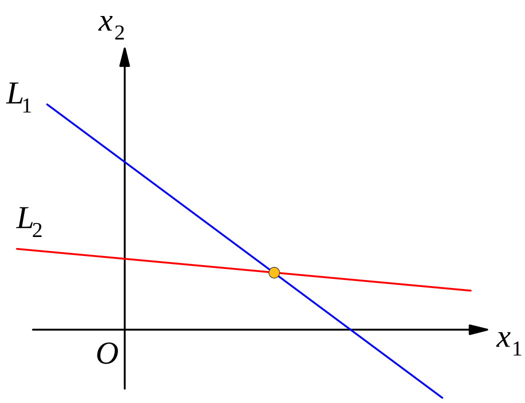
Consideremos el caso más simple : *un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas* . . .

$$L_1 : \quad a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 = b_1$$

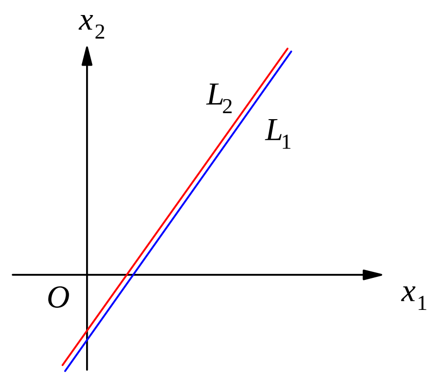
$$L_2 : \quad a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 = b_2$$

que geométricamente es un par de líneas rectas sobre el plano cartesiano. Tales rectas pueden. . .

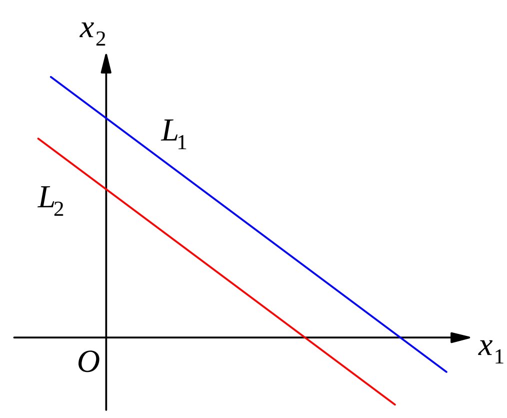
- ***intersectarse***. *Las rectas tienen un punto en común* (x_1, x_2) *(punto de intersección) que satisface a ambas ecuaciones. El sistema lineal correspondiente tiene* ***una solución única*** .



- ***coincidir*** . *En este caso existe una infinidad de puntos de intersección de ambas rectas y por lo mismo* ***una infinidad de soluciones*** *para el sistema lineal*



- ***ser paralelas*** . *En éste caso no tienen ningún punto en común (dos rectas paralelas no se cortan jamás) y por lo tanto el sistema lineal* ***no tiene solución*** *alguna* .



Estas tres posibilidades de solución, que se han ilustrado aqui solo para el caso dos ecuaciones con dos incógnitas, prevalecen para el caso más general de un sistema con n ecuaciones lineales y m incógnitas, es decir . . .

La solución de todo sistema de ecuaciones lineales se clasifica en una de las tres posibilidades siguientes :

i) la solución es <u>única</u> .
ii) <u>no existe</u> solución
iii) existe un número <u>infinito</u> de soluciones .

(*Más adelante demostraremos ése resultado*).

Una notación conveniente y abreviada para escribir un sistema de n ecuaciones lineales m variables tal como el (5.5) es mediante *un arreglo rectangular de números llamado matriz aumentada* del sistema :

$$\begin{matrix} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{1m}\cdot x_m = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{2m}\cdot x_m = b_2 \\ a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{3m}\cdot x_m = b_3 \\ \dots\dots \qquad \dots\dots\dots \\ \dots\dots \qquad \dots\dots\dots \\ a_{n\cdot 1}\cdot x_1 + a_{n\cdot 2}\cdot x_2 + a_{n\cdot 3}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{n\,m}\cdot x_m = b_n \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{3m} & b_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Una matriz es en general, cualquier arreglo rectangular de números que contiene una cantidad determinada de renglones y de columnas.

Cuando se suprime la última columna de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales (*la columna formada por los términos constantes*) , entonces se llama simplemente *matriz de coeficientes* .

Debe notarse que al construir éstas matrices, se colocan los coeficientes a_{ij} *en el mismo orden en que aparecen en el sistema de ecuaciones* . Si alguna incógnita no aparece en alguna ecuación, significa que su respectivo coeficiente es cero .

Por ejemplo el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + x_3 &= -9 \\ 5\cdot x_1 + 4\cdot x_3 &= 6 \\ x_2 - 2\cdot x_3 &= -5 \end{aligned}$$

tiene la siguiente representación matricial :

Matriz de coeficientes : $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ *Matriz aumrntada :* $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -9 \\ 5 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

5.4 Solución de un sistema de ecuaciones lineales .

El método básico para determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales consiste en *transformar el sistema inicial en otro equivalente* que tenga el mismo conjunto solución, pero que sea más fácil de resolver.
Tal sistema equivalente se obtiene al aplicar al sistema de ecuacines inicial alguna(s) de las siguientes tres *operaciones elementales* :

- ***Multiplicación*** *de una de las ecuaciones del sistema por una constante distinta de cero.*
- ***Adición*** *de un múltiplo de una ecuación del sistema a otra de las ecuaciones del sistema .*
- ***Intercambio*** *de la posición de dos ecuaciones del sistema*

Estas operaciones elementales, no alteran el conjunto solución del sistema inicial porque se basan en las propiedades de la igualdad, a saber :

(I) ***Una igualdad permanece inalterada si sus dos miembros se multiplican por una misma cantidad que sea distinta de cero.***

Si $x = y$ *y además* $b \neq 0$ *entonces* $\boxed{b \cdot x = b \cdot y}$

(II) ***Una igualdad no se altera si a sus dos miembros se les suma una misma cantidad arbitraria*** c **.**

Si $x = y$ *entonces* $\boxed{(x + c) = (y + c)}$

(III) ***Dos igualdades se pueden sumar miembro a miembro, generándose asi una nueva igualdad***

Si $x = y$ *y además* $z = w$ *entonces* $\boxed{(x + z) = (y + w)}$

Básicamente una ecuación lineal es una igualdad, por lo tanto, ninguna de las tres operaciones elementales le cambiará su conjunto solución, simplemente la transformará en otra ecuación equivalente .

Ahora bién, puesto que los renglones de una matriz aumentada representan los coeficientes de cada una de las ecuaciones de un sistema de ecuaciones lineales, cuando las operaciones elementales anteriores se aplican a ésta matriz, generan una *matriz aumentada equivalente* y se traducen en :

- ***Multiplicación*** *de un renglon de la matriz aumentada por una constante distinta de cero.*
- ***Adición*** *de un múltiplo de un renglón a otro .*
- ***Intercambio*** *de la posición de dos renglones*

y se llaman ahora : *operaciones elementales entre filas o renglones* .

Usaremos la notación . . .

$$R_j \longrightarrow O(R_j)$$

para indicar que el renglón j-ésimo R_j de una matriz aumentada cambió a $O(R_j)$ mediante la aplicación de alguna operación elemental O .

Con ésta notación, las *operaciones elementales entre filas* quedan expresadas como :

Multiplicación : $R_i \longrightarrow k\cdot R_i$

El renglón R_i *quedó multiplicado por una constante* $k \neq 0$.

Adición : $R_k \longrightarrow R_k + k\cdot R_i$

Al renglón R_k *se le sumó el renglón* R_i *multiplicado por la constante* $k \neq 0$.

Intercambio : $R_i \longrightarrow R_j$

El renglón R_i *se intercambió con el renglón* R_j

La idea básica en el método de solución de un sistema de ecuaciones lineales es transformar la matriz aumentada del sistema :

de la forma $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2m} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n\cdot 1} & a_{n\cdot 2} & a_{n\cdot 3} & . & . & . & a_{n\cdot m} & b_n \end{pmatrix}$ a la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & c_2 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & c_n \end{pmatrix}$

llamada *forma escalonada reducida* y que corresponde al sencillo sistema de ecuaciones lineales equivalente :

$$\begin{array}{lcl} x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 0\cdot x_n = c_1 & & x_1 = c_1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 0\cdot x_n = c_2 & & x_2 = c_2 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 0\cdot x_n = c_3 & \text{es decir :} & x_3 = c_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_n = c_n & & x_n = c_n \end{array}$$

evidentemente, ésta es la solución que se busca para las variables del sistema de ecuaciones inicial.

Este es el método de solución para un sistema de ecuaciones lineales que se conoce con el nombre de ***método de Gauss - Jordan*** .

Ahora bién, para lograr que una matriz tenga la *forma escalonada reducida* se deben cumplir las siguientes condiciones . . .

- *El primer número distinto de cero en cada renglón es un* 1 *(uno), llamado uno principal "*

- *El* 1 *principal de un reglón inferior siempre está más a la derecha que el* 1 *principal de un renglón superior.*

- *Toda columna que contiene un* 1 *principal tiene sólo ceros en todas las demás posiciones, es decir solo hay ceros encima ó debajo de un* 1 *principal .*

- *Los renglones que constan completamente de ceros se agrupan en la parte inferior de la matriz .*

Cuando una matriz satisface las condiciones anteriores pero *no tiene solo ceros encima de los 1´s principales*, se llama simplemente *matriz escalonada*

Ejemplo 3. Las siguientes matrices tienen la forma escalonada reducida . . .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mientras que las siguientes no la tienen . . . ¿ por qué ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las siguientes matrices tienen solo la forma escalonada . . .

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & -8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuando una matriz tiene la forma escalonada reducida, es muy sencillo determinar la solución del sistema de ecuaciones lineales correspondiente a tal matriz, pues basta una simple inspección como se muestra en los siguientes ejemplos :

Ejemplo 4. Dadas las siguientes matrices en la forma escalonada reducida, resolver el sistema correspondiente de ecuaciones lineales .

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución :

a) El sistema de ecuaciones lineales asociado a ésta matriz es :

$$\begin{aligned} x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 &= 5 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 &= -2 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \text{y se deduce que :} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= -2 \\ x_3 &= 4 \end{aligned}$$

asi que éste sistema tiene *una solución única* : $u = (5, .2, 4)$.

b) El sistema de ecuaciones lineales correspondiente a ésta matriz es :

$$\begin{aligned} x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 4\cdot x_4 &= -1 \\ 0\cdot x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 + 2\cdot x_4 &= 6 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 + 3\cdot x_4 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{y se deduce que :} \qquad \begin{aligned} x_1 + 4\cdot x_4 &= -1 \\ x_2 + 2\cdot x_4 &= 6 \\ x_3 + 3\cdot x_4 &= 2 \end{aligned}$$

La variable x_4 no está asociada a ningún 1 principal, asi que se le puede asignar arbitrariamente un valor arbitrario digamos $x_4 = t$.
Entonces el sistema anterior tienen una *infinidad de soluciones dadas en forma paramétrica* por . . .

$$x_1 = (-1 - 4\cdot t) \quad ; \quad x_2 = (6 - 2\cdot t) \quad ; \quad x_3 = (2 - 3\cdot t) \quad ; \quad x_4 = t$$

c) El sistema de ecuaciones lineales correspondiente a ésta matriz es :

$$\begin{aligned} x_1 + 6\cdot x_2 + 4\cdot x_5 &= -2 \\ x_3 + 3\cdot x_5 &= 1 \\ x_4 + 5\cdot x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Las variables x_2 y x_5 no están asociadas con ningún 1 principal en la matriz, asi que se les puede asignar un valor paramétrico arbitrario, digamos $x_2 = r$; $x_5 = s$ obteniéndose asi *el conjunto infinito de soluciones* :

$$x_1 = (2 - 6\cdot r - 4\cdot s) \ ; \quad x_2 = r \ ; \quad x_3 = (1 - 3\cdot s) ; \quad x_4 = (2 - 5\cdot s) ; \quad x_5 = s$$

d) El último renglón de la matriz corresponde a una ecuación lineal *inconsistente* :

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1 \qquad \text{es decir} \qquad 0 = 1$$

La ecuación no tiene solución y *tampoco* la tiene el sistema del cual forma parte.
En ése caso se dice que *el sistema no tiene solución .*

Aplicando las operaciones elementales a los renglones de una matriz aumentada, es posible transformarla a la forma escalonada reducida, de la cual por simple inspección, se determina la solución del correpondiente sistema de ecuaciones lineales, como se ilustró en los ejemplos anteriores .

Éste es el *método de eliminación de Gauss - Jordan* para hallar la solución de un sistema lineal de ecuaciones. Ahora se ilustrarán cada uno de los pasos de éste procedimiento resolviendo un ejemplo :

Ejemplo 5. Resolver el sistema de ecuaciones lineales :

$$-2 \cdot x_3 + 7 \cdot x_5 = 12$$
$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 + 12 \cdot x_5 = 28$$
$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 + 6 \cdot x_4 - 5 \cdot x_5 = -1$$

paso # 1 . *Formar la matriz aumentada que corresponde al sistema de ecuaciones .*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & (-2) & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Nótese que se escriben ceros para los coeficientes de las variables que no aparecen en el sistema de ecuaciones inicial

paso # 2 . *Localizar la columna de la matriz que quede más a la izquierda y que no conste completamente de ceros .*

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & (-2) & 0 & 7 & 12 \\ \boxed{2} & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ \boxed{2} & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

paso # 3 . *Si en la parte superior de tal columna existe un cero, entonces se intercambia el renglón correspondiente con cualquier otro renglón de la matriz cuyo primer elemento en la columna elegida, no sea cero .*

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & (-2) & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \qquad R_1 \longrightarrow R_2 \; : \; \begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -(2) & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Se intercambió el primer renglón con el segundo

<u>paso</u> # 4 . *El elemento que está ahora en la parte superior de la columna más a la izquierda es un número* $k \neq 0$. *Se multiplica entonces todo el renglón por* $\dfrac{1}{k}$ *, con el fin de convertir a tal elemento en un* 1 *principal :*

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -(2) & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \qquad R_1 \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\cdot R_1 \; : \; \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -(2) & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Se multiplicó el primer renglón por el recíproco de 2

<u>paso</u> # 5 . *Múltiplos adecuados del renglón que contiene a ese* 1 *principal se suman ahora a los renglones inferiores con el fin de* <u>*convertir en ceros todos los elementos debajo del*</u> 1 <u>*principal*</u> .

$$R_3 \longrightarrow R_3 - 2\cdot R_1 \; :$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -(2) & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -(2) & 0 & 7 & 12 \\ (2-2) & (4-4) & (-5+10) & (6-6) & (-5-12) & (-1-28) \end{bmatrix}$$

Se restó al tercer renglón el doble del primer renglón, generando la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -(2) & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

<u>paso</u> # 6 . *Se vuelven a aplicar los pasos anteriores a partir del # 2, a la submatriz que queda al ignorar el renglón con el* 1 *principal formado anteriormente .*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Se ignora el primer renglón y se localiza en la submatriz resultante la columna más a la izquierda que no sea nula (en éste caso, la 3ª columna).

$$R_2 \longrightarrow \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot R_2 \ : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & (-5) & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Se ha multiplicado el segundo renglón por $\dfrac{-1}{2}$ *con el fin de obtener otro* 1 *principal* .

$$R_3 \longrightarrow R_3 - 5 \cdot R_2 \ :$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & (-5) & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ (0-0) & (0-0) & (5-5) & (0-0) & \left(-17+\dfrac{35}{2}\right) & (-29+30) \end{bmatrix}$$

Se ha sumado al tercer renglón -5 *veces el segundo renglón para formar un cero debajo del* 1 *principal del 2º renglón. generando la matriz*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{(-7)}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Se ignoran ahora el primero y el segundo renglones y se localiza en la submatriz resultante la columna más a la izquierda que no sea nula (en éste caso, la 5ª columna).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{\dfrac{1}{2}} & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando el segundo tercer por 2 *con el fin de obtener otro* 1 *principal queda :*

$$R_2 \longrightarrow \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot R_2 \ : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{(-7)}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En éste momento la matriz ha tomado la forma escalonada.

paso # 7 . *Formar ceros encima de los* 1´s *principales sumando múltiplos convenientes de los reglones inferiores a los superiores, empezando con el* 1 *principal más inferior* .

$$R_1 \longrightarrow R_1 - 6 \cdot R_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longrightarrow R_2 + \frac{7}{2} \cdot R_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \longrightarrow R_1 + 5 \cdot R_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En éste momento la matriz ha tomado la forma escalonada reducida .

El sistema inicial de ecuaciones se ha transformado asi en el siguiente sistema equivalente. . .

$$\begin{aligned} x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_4 &= 2 \\ x_3 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

las variables x_2 y x_4 no están asociadas a ningún 1 principal, por lo cual se consideran parámetros, de manera que el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones dadas en forma paramétrica por :

$$x_1 = (2 - 2 \cdot t - 3 \cdot u) \quad ; \quad x_2 = t \quad ; \quad x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = u \quad \text{y} \quad x_5 = 2$$

Ejemplo 6. Resolveremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método matricial de Gauss-Jordan, indicando la transformación respetiva del sistema en cada paso :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -(3) & 1 \\ 3 & 6 & -(5) & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x + y + 2 \cdot z &= 9 \\ 2 \cdot x + 4 \cdot y - 3 \cdot z &= 1 \\ 3 \cdot x + 6 \cdot y - 5 \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \longrightarrow R_2 - 2 \cdot R_1 : \\ R_3 \longrightarrow R_3 - 3 \cdot R_1 : \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -(7) & -(17) \\ 0 & 3 & -(11) & -(27) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} x + y + 2 \cdot z = 9 \\ 2 \cdot y - 7 \cdot z = -17 \\ 3 \cdot y - 11 \cdot z = -27 \end{array}$$

$$R_2 \longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \cdot R_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\left(\frac{7}{2}\right) & -\left(\frac{17}{2}\right) \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} x + y + 2 \cdot z = 9 \\ y - \frac{7}{2} \cdot z = \frac{-17}{2} \\ 3 \cdot y - 11 \cdot z = -27 \end{array}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - 3 \cdot R_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\left(\frac{7}{2}\right) & -\left(\frac{17}{2}\right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} x + y + 2 \cdot z = 9 \\ y - \frac{7}{2} \cdot z = \frac{-17}{2} \\ \frac{-1}{2} \cdot z = \frac{-3}{2} \end{array}$$

$$R_3 \longrightarrow (-2) \cdot R_3 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\left(\frac{7}{2}\right) & -\left(\frac{17}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} x + y + 2 \cdot z = 9 \\ y - \frac{7}{2} \cdot z = \frac{-17}{2} \\ z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \longrightarrow R_1 - 2 \cdot R_3 : \\ R_2 \longrightarrow R_2 + \frac{7}{2} \cdot R_3 : \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & (9-6) \\ 0 & 1 & 0 & \left(\frac{4}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} x + y = 3 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$$

y finalmente . . .

$$R_1 \longrightarrow R_1 - R_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (1) \\ 0 & 1 & 0 & (2) \\ 0 & 0 & 1 & (3) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{array}$$

Que es la solución buscada para el sistema inicial de ecuaciones lineales.

Algunas veces es más conveniente resolver un sistema de ecuaciones lineales transformando la matriz aumentada solamente a la forma esclonada, (*sin llegar a la forma escalonada reducida*) y proceder luego con ***la substitución hacia atrás*** .

Asi por ejemplo en el problema anterior , a partir de la matriz aumentada :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -(3) & 1 \\ 3 & 6 & -(5) & 0 \end{bmatrix}$$ se obtuvo la forma escalonada . . . $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\left(\frac{7}{2}\right) & -\left(\frac{17}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

la cual corresponde al sistema de ecuaciones :

$$\begin{aligned} x + y + 2\cdot z &= 9 \\ y - \frac{7}{2}\cdot z &= \frac{-17}{2} \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Se procede entonces como sigue :

paso # 1 : *Se despejan las variables principales* *(aquéllas que tienen como coeficiente un* 1 *principal) :*

$$\begin{aligned} x &= 9 - (y + 2\cdot z) \\ y &= \frac{-17}{2} + \frac{7}{2}\cdot z \\ z &= 3 \end{aligned}$$

paso # 2 : *Empezando desde la ecuación más inferior hacia las ecuaciones superiores, se substituye sucesivamente cada ecuación en todas las que están por encima de ella .*

Substituyendo z *en las ecuaciones superiores se obtiene :*

$$\begin{aligned} x &= 9 - [\, y + 2\cdot(3)\,] \\ y &= \frac{-17}{2} + \frac{7}{2}\cdot(3) \\ z &= 3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3 - y \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

y substituyendo z *e* y *en la primera ecuación se obtiene :* $x = 1$

paso # 3 : *Se asignan valores arbitrarios ó paramétricos a las variables libres* *(las que no tienen como coeficiente a un 1 principal)* *si es que existen algunas .*

Usualmente se le conoce a éste procedimiento como *el método de Gauss* .

- *OBSERVACIÓN* : La forma en que hemos establecido los métodos de Gauss y de Gauss-Jordan es apropiada para el cálculo computacional ; sin embargo éste procedimiento introduce a veces fracciones, las que se pueden evitar si se modifican apropiadamente los pasos del método, una vez que se haya dominado el procedimiento básico .

Un hecho importante es que *la forma escalonada reducida de una matriz es única ; pero la forma escalonada no lo es* .

Esto significa que no importa el orden ni las operaciones que se realicen sobre una matriz para transformarla en escalonada reducida, siempre se llegará al mismo resultado final mientras que el orden y las operaciones efectuadas sobre la matriz determinan la forma final de la matriz escalonada .
En otras palabras, *una matriz cualquiera puede transformarse en muchas formas escalonadas ; pero sólo a una forma escalonada reducida*.

Ejemplo 7. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss y de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 4\cdot x_2 - x_3 + x_4 &= 12 \\ 3\cdot x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 - x_4 &= -4 \\ -x_1 + x_2 - 3\cdot x_3 - 2\cdot x_4 &= -2 \\ x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 + 3\cdot x_4 &= 15 \end{aligned}$$

Solución : (Por el método de *Gauss-Jordan*) . Formando la matriz aumentada e intercambiando los renglones 1 y 2 queda . . .

$$R_1 \longrightarrow R_2 : \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Formando ceros bajo el primer elemento principal (*el* 3 *del primer renglón) :*

$$R_3 \longrightarrow 3\cdot R_3 + R_1 : \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & -10 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \longrightarrow 3\cdot R_4 - R_1 : \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & -10 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & -10 \\ 0 & 7 & -5 & 10 & 49 \end{pmatrix}$$

(Con el objeto de evitar las operaciones con fracciones, no se dividió el primer renglón entre 3)

Formemos ahora ceros bajo el segundo elemento principal (*el* 4 *del segundo renglón) :*

$$\begin{aligned} R_3 &\longrightarrow 2\cdot R_3 - R_2 : \\ R_4 &\longrightarrow 4\cdot R_4 - 7\cdot R_2 : \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & -10 \\ 0 & 7 & -5 & 10 & 49 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & -15 & -32 \\ 0 & 0 & -13 & 33 & 112 \end{pmatrix}$$

(Con el fin de evitar las operaciones con fracciones, tampoco no se dividió el segundo renglón entre 4)

Formemos ceros bajo el tercer elemento principal (*el* -13 *del tercer renglón) :*

$$R_4 \longrightarrow R_4 - R_3 : \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & -15 & -32 \\ 0 & 0 & -13 & 33 & 112 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & -15 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 144 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \longrightarrow \frac{R_4}{48} : \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & -15 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 48 & 144 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & -15 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Formando ahora ceros *por encima* de ése 1 principal . . .

$$\begin{matrix} R_1 \longrightarrow R_1 + R_4 : \\ R_2 \longrightarrow R_2 - R_4 : \\ R_3 \longrightarrow R_3 + 15 \cdot R_4 : \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & -15 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Formando un principal en el tercer renglón . . .

$$R_3 \longrightarrow \frac{R_3}{-13} : \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y ceros por encima de él . . .

$$\begin{matrix} R_1 \longrightarrow R_1 - 2 \cdot R_3 : \\ R_2 \longrightarrow R_2 + R_3 : \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Formando un principal en el segundo renglón . . .

$$R_2 \longrightarrow \frac{R_2}{4} : \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y ceros por encima de él . . .

$$R_1 \longrightarrow R_1 + R_2 : \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la forma escalonada reducida es . . .

$$R_1 \longrightarrow \frac{R_1}{3} : \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema de ecuaciones es entonces : $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$

Resolviendo éste sistema por el método de la *substitución hacia atrás (método de Gauss)* , si partimos de la matriz "casi escalonada" que obtuvimos en uno de los pasos anteriores :

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -13 & -15 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} 3\cdot x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 - x_4 &= -4 \\ 4\cdot x_2 - x_3 + x_4 &= 12 \\ -13\cdot x_3 - 15\cdot x_4 &= -32 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Es obvio que los números de la diagonal 3 , 4 , -13 y 1 están relacionados con las variables principales, asi que resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente para tales variables se obtiene :

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 &= -4 + x_2 - 2\cdot x_3 + x_4 \\ 4\cdot x_2 &= 12 + x_3 - x_4 \\ -13\cdot x_3 &= -32 + 15\cdot x_4 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

substituyendo x_4 en las ecuaciones superiores queda :

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 &= -4 + x_2 - 2\cdot x_3 + (3) \\ 4\cdot x_2 &= 12 + x_3 - (3) \\ -13\cdot x_3 &= -32 + 15\cdot(3) \\ x_4 &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 3\cdot x_1 &= -1 + x_2 - 2\cdot x_3 \\ 4\cdot x_2 &= 9 + x_3 \\ -13\cdot x_3 &= 13 \\ x_4 &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 3\cdot x_1 &= -1 + x_2 - 2\cdot x_3 \\ 4\cdot x_2 &= 9 + x_3 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

substituyendo ahora x_3 en las ecuaciones superiores . . .

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 &= -1 + x_2 - 2\cdot(-1) \\ 4\cdot x_2 &= 9 + (-1) \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 3\cdot x_1 &= 1 + x_2 \\ 4\cdot x_2 &= 8 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 3 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 3\cdot x_1 &= 1 + x_2 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

finalmente substituyendo x_2 en la primera ecuación se obtiene la solución final : $u = (1, 2, -1, 3)$

Ejemplo 8. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + 2\cdot y - 3\cdot z &= 6 \\ 2\cdot x - y + 4\cdot z &= 2 \\ 4\cdot x + 3\cdot y - 2\cdot z &= 15 \end{aligned}$$

Solución : La matriz aumentada de éste sistema es : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 15 \end{pmatrix}$

Hagamos algunas operaciones elementales entre renglones para formar 1´s principales :

$$\begin{aligned} R_2 &\longrightarrow R_2 - 2\cdot R_1 : \\ R_3 &\longrightarrow R_3 - 4\cdot R_1 : \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -(5) & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -9 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -(5) & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -(5) & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \longrightarrow \left(\frac{-1}{5}\right)\cdot R_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -(5) & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & (-2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este momento, se ha transformado la matriz del sistema a la *forma escalonada* .

$$R_1 \longrightarrow R_1 - 2\cdot R_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & (-2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & (-2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \longrightarrow R_1 - 2\cdot R_3 : \quad R_2 \longrightarrow R_2 - 2\cdot R_3 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & (-2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & (-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En este momento, se transformado la matriz del sistema a la *forma escalonada reducida*, Sin embargo la tercera ecuación de este sistema es inconsistente *(porque tiene la forma* $0 = 1$ *)*, por lo cual no tiene solución, y tampoco tiene solución el sistema del cual forma parte .

Ejemplo 9. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$x - y + 2\cdot z - w = -1$$
$$2\cdot x + y - 2\cdot z - 2\cdot w = -2$$
$$-x + 2\cdot y - 4\cdot z + w = 1$$
$$3\cdot x - 3\cdot w = -3$$

Solución : La matriz aumentada de éste sistema es : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

Transformemos ahora ésta matriz a la forma escalonada reducida mediante algunas operaciones elementales entre renglones :

$$R_2 \longrightarrow R_2 - 2\cdot R_1 : \quad R_3 \longrightarrow R_3 + R_1 : \quad R_4 \longrightarrow R_4 - 3\cdot R_1 : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nótese que los renglones R_2 y R_4 ahora son idénticos asi que :

$$R_4 \longrightarrow R_4 - R_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longrightarrow \frac{R_2}{3} : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora los renglones R_2 y R_3 han quedado idénticos por lo que :

$$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En este momento, se ha transformado la matriz del sistema a la *forma escalonada* .

$$R_1 \longrightarrow R_1 + R_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora la matriz ha tomado la *forma escalonada reducida* .

Este sistema tiene dos variables principales (x e y) y dos libres (z y w) , que pueden tomarse como parámetros.
En consecuencia existe una infinidad de soluciones, que en forma paramética están dadas por :

$$x = -1 + t \; ; \quad y = 2 \cdot u \; ; \quad z = u \; ; \; w = t$$

Ejemplo 10. ¿ Para qué valores de la constante k tiene el sistema :

$$\begin{aligned} x + 2 \cdot y - 3 \cdot z &= 4 \\ 3 \cdot x - y + 5 \cdot z &= -2 \\ 4 \cdot x + y + \left(k^2 - 14\right) \cdot z &= k + 2 \end{aligned}$$

a) una solución ?
b) una infinidad de soluciones ?
c) ninguna solución ?

Solución : La matriz aumentada de éste sistema es :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \left(k^2 - 14\right) & (k + 2) \end{bmatrix}$$

Transformemos ésta matriz, mediante operaciones elementales entre renglones, a la forma escalonada :

$$\begin{aligned} R_2 &\longrightarrow R_2 - 3 \cdot R_1 : \\ R_4 &\longrightarrow R_4 - 4 \cdot R_1 : \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & \left(k^2 - 14\right) & (k + 2) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & \left(k^2 - 2\right) & (k - 14) \end{bmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & \left(k^2 - 2\right) & (k - 14) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & \left(k^2 - 16\right) & (k - 4) \end{bmatrix}$$

Ahora es posible ver que si el tercer renglón es de la forma :

$0 = 0$: *el sistema tendrá una infinidad de soluciones*

$0 = constante$: *el sistema será inconsistente y no tendrá solución .*

$constante_1 = constante_2$: *el sistema tendrá una solución única .*

Pero $\left(k^2 - 16\right) = 0$ significa que $k = \pm 4$, y $(k - 4) = 0$ significa que $k = 4$.
Por lo tanto el 3er renglón :

equivale a $0 = 0$ sólo si $k = 4$

equivale a $0 = constante$. sólo si $k = -4$

equivale a $constante_1 = constante_2$ sólo si $k \neq 4,\ k \neq -4$

Entonces el sistema será inconsistente si $k = -4$, o tendrá una infinidad de soluciones si $k = 4$,o tendrá una solución única si $k \neq 4,\ k \neq -4$ que además estará dada por :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & \left(k^2 - 16\right) & (k - 4) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x + 2\cdot y - 3\cdot z = 4 \\ -7\cdot y + 14\cdot z = -10 \\ \left(k^2 - 16\right)\cdot z = (k - 4) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{k - 4}{k^2 - 16} + \dfrac{48}{7} \\ y = 2\cdot\dfrac{k - 4}{k^2 - 16} - \dfrac{10}{7} \\ z = \dfrac{k - 4}{k^2 - 16} \end{array}$$

(Se ha usado la substitución hacia atrás) .

EJERCICIO 5.1

I. ¿Cuáles de las siguientes son ecuaciones lineales ?

1. $x_1 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x_3 = 2$

2. $x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot \sqrt[3]{x_3} = 4$

3. $x_1 + (x_2)^{-1} - 3 \cdot x_3 = 5$

4. $x_1 + x_2 + x_3 = sen(k)$; (k = constante)

5. $x_1 = \sqrt{2} \cdot x_3 - x_2 - 7$

6. $x_1 = x_3$

II. ¿Cuál es el conjunto solución de las ecuaciones lineales siguientes ?

7. $6 \cdot x - 7 \cdot y = 3$

8. $2 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 = 8$

9. $-3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 = 5$

10. $2 \cdot v - w + 3 \cdot x + y - 4 \cdot z = 0$

11. $-\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \alpha + 3 \cdot \beta - \sqrt{3} \cdot \gamma = 2$

12. $2 \cdot a - \frac{3}{5} \cdot b + \frac{1}{3} \cdot c = -\frac{1}{2} \cdot a - 2 \cdot b + 3 \cdot c$

III. Hallar un sistema de ecuaciones lineales que corresponda a cada una de las matrices aumentadas siguientes :

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

IV. ¿Cuáles de las siguientes matrices están en forma escalonada y cuales en forma escalonada reducida ?

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

V. Suponga que por operaciones elementales se ha transformado una matriz aumentada a la forma indicada . Hallar la solución del sistema de ecuaciones correspondiente .

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

VI. ¿Para qué valor(es) de la constante k , los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen :

i) más de una solución ?
ii) ninguna solución ?
iii) una única solución ?

33. $x - y = 3$
$2\cdot x - 3\cdot y = k$

34. $x - 3\cdot z = -3$
$2\cdot x + k\cdot y - z = -2$
$x + 2\cdot y + k\cdot z = 1$

35. $x + y + k\cdot z = 2$
$3\cdot x + 4\cdot y + 2\cdot z = k$
$2\cdot x + 3\cdot y - 2\cdot z = 1$

36. $x - 2\cdot y - 3\cdot z = -2$
$3\cdot x - 2\cdot y - 4\cdot z = -3$
$4\cdot x - 8\cdot y + \left(4\cdot k^2 - 9\cdot k - 12\right)\cdot z = 2\cdot k - 5$

VII. Determinar la(s) condicion(es) sobre las constantes a , b , c para que los sistemas de ecuaciones lineales siguientes tengan una solución única :

37. $x + 2\cdot y - 3\cdot z = a$
$3\cdot x - y + 2\cdot z = b$
$x - 5\cdot y + 8\cdot z = c$

38. $x - 2\cdot y + 4\cdot z = a$
$2\cdot x + 3\cdot y - z = b$
$3\cdot x + y + 2\cdot z = c$

39. $x + y + 2\cdot z = a$
$x + z = b$
$2\cdot x + y + 3\cdot z = c$

VIII. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan

40. $2\cdot x + 3\cdot y = 1$
$5\cdot x + 7\cdot y = 3$

41. $2\cdot x + 4\cdot y = 10$
$3\cdot x + 6\cdot y = 15$

42. $4\cdot x - 2\cdot y = 5$
$-6\cdot x + 3\cdot y = 1$

43. $5\cdot x - 4\cdot y - 3\cdot z = 6$
$-4\cdot x - y + 2\cdot z = -5$
$-3\cdot x - 6\cdot y + z = 7$

44. $2\cdot x - y - z + 2\cdot w = -15$
$3\cdot x + y + 3\cdot z - 3\cdot w = -8$
$-5\cdot x - y - 3\cdot z - w = -4$
$4\cdot x + 2\cdot y + 2\cdot z - w = -13$

45. $3\cdot x - y - z + 2\cdot w = 6$
$2\cdot x + y + 3\cdot z - 3\cdot w = 2$
$x - y - z - w = 4$
$4\cdot x + 2\cdot y + 2\cdot z - w = 4$

46. $3\cdot x-2\cdot y+z=17$
$-5\cdot x+3\cdot y+2\cdot z=-12$
$-4\cdot x-y+3\cdot z=13$

47. $3\cdot x-2\cdot y+z=-4$
$5\cdot x-3\cdot y-2\cdot z=7$
$4\cdot x+y-3\cdot z=1$

48. $2\cdot x-3\cdot y-z=15$
$3\cdot x+y+3\cdot z=-8$
$5\cdot x-2\cdot y+2\cdot z=7$

49. $x+2\cdot y+2\cdot z=2$
$3\cdot x-2\cdot y-z=5$
$2\cdot x-5\cdot y+3\cdot z=-4$
$x+4\cdot y+6\cdot z=0$

50. $x+5\cdot y+4\cdot z-13\cdot w=3$
$3\cdot x-y+2\cdot z+5\cdot w=2$
$2\cdot x+2\cdot y+3\cdot z-4\cdot w=1$

51. $2\cdot x+y+z+2\cdot w=-1$
$5\cdot x-2\cdot y+z-3\cdot w=0$
$-x+3\cdot y+2\cdot z+2\cdot w=1$
$3\cdot x+2\cdot y+3\cdot z-5\cdot w=12$

52. $x+y+z+w=6$
$2\cdot x+3\cdot y-w=0$
$-3\cdot x+4\cdot y+z+2\cdot w=4$
$x+2\cdot y-z+w=0$

53. $2\cdot x_1+2\cdot x_2+2\cdot x_3=0$
$-2\cdot x_1+5\cdot x_2+2\cdot x_3=0$
$-7\cdot x_1+7\cdot x_2+x_3=0$

54. $-3\cdot x_1+2\cdot x_2-x_3=-15$
$5\cdot x_1+3\cdot x_2-2\cdot x_3=0$
$3\cdot x_1+x_2+3\cdot x_3=11$
$11\cdot x_1+7\cdot x_2=-30$

IX. Encontrar al menos dos formas escalonadas diferentes para las matrices siguientes y transformarlas a su única forma escalonada reducida .

55. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 56. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 57. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ 58. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

X. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales transformándolos primero en sistemas lineales .

59. $2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)-3\cdot\left(\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{z}\right)=-1$
$\left(\frac{1}{x}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{y}\right)-3\cdot\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{2}{3}$
$-5\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+4\cdot\left(\frac{1}{y}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{z}\right)=3$

60. $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot sen(\alpha)+cos(\beta)-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot cos(\gamma)=\frac{7}{4}$
$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\cdot sen(\alpha)+2\cdot cos(\beta)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot cos(\gamma)=2$
$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot sen(\alpha)-3\cdot cos(\beta)-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot cos(\gamma)=0$

Respuestas . Ejercicio 5.1

1. No 2. No 3. No 4. Si 5. Si 6. Si

7. $x = \frac{7 \cdot t + 3}{6}$, $y = t$

8. $x_1 = 2 \cdot t + \frac{7}{2} \cdot s + 4$, $x_2 = t$, $x_3 = s$

9. $x_1 = \frac{-5 + 4 \cdot t - 7 \cdot s + 8 \cdot u}{3}$, $x_2 = t$, $x_3 = s$, $x_4 = u$

13. $x_1 - x_3 = 2$, $2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 3$, $-x_2 + 2 \cdot x_3 = 4$

14. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 1$

15. $x + 2 \cdot y + 3 \cdot z + 4 \cdot w = 5$, $5 \cdot x + 6 \cdot y + 7 \cdot z + 8 \cdot w = 9$

16. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$

17. *Ninguna* 18. *Ninguna* 19. *Escalonada* 20. *Escalonada reducida*

21. *Escalonada reducida* 22. *Ambas* 23. *Ninguna* 24. *Ninguna*

25. $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$

26. $x_1 = 2 - 3 \cdot t$, $x_2 = 4 + t$, $x_3 = 2 - t$, $x_4 = t$

27. $x_1 = -1 - 5 \cdot t - 5 \cdot u$, $x_2 = t$, $x_3 = 1 - 3 \cdot u$, $x_4 = 2 - 4 \cdot u$, $x_5 = u$

28. $x_1 = 4 - 5 \cdot t$, $x_2 = 3 - t$, $x_3 = 2 - t$, $x_4 = t$

29. $x_1 = 2 - 3 \cdot t$, $x_2 = 4 + t$, $x_3 = 2 - t$, $x_4 = t$

30. *No tiene solución .*

31. $x_1 = -1 - 5 \cdot t - 5 \cdot u$, $x_2 = t$, $x_3 = 1 - 3 \cdot u$, $x_4 = 2 - 4 \cdot u$, $x_5 = u$

32. $x_1 = \frac{-1}{12}$, $x_2 = \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{3}$

33. *Tiene solución para todo valor de* k *.*

34. *Inconsistente si* $k = -5$*. Muchas soluciones si* $k = 2$*. Una solución si* $k \neq 2, -5$

35. *Inconsistente si* $k = 4$*. Una solución si* $k \neq 4$.

36. *Inconsistente si* $k = \frac{3}{2}$ *. Muchas soluciones si* $k = \frac{-3}{2}$ *. Una solución si* $k \neq \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}$

37. *Inconsistente si* $2 \cdot a - b + c \neq 0$ *. Muchas soluciones si* $2 \cdot a - b + c = 0$ *. No existe una solución única .*

38. *Una solución única para cualesquiera valores de* a , b *y* c .

39. *Inconsistente si* $c - b - a \neq 0$*. Muchas soluciones si* $c - b - a = 0$ *. No existe una solución única ..*

40. $\begin{pmatrix} x = 2 \\ y = -1 \end{pmatrix}$ 41. $\begin{pmatrix} x = 5 - 2\cdot t \\ y = t \end{pmatrix}$ 42. inconsistente . 43. inconsistente .

44. $\begin{pmatrix} x = -8 \\ y = 1 \\ z = 12 \\ w = 7 \end{pmatrix}$ 45. $\begin{pmatrix} x = \frac{7}{4} \\ y = \frac{-9}{8} \\ z = \frac{-5}{8} \\ w = \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ 46. $\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{pmatrix}$ 47. $\begin{pmatrix} x = -2 \\ y = -3 \\ z = -4 \end{pmatrix}$

48. inconsistente . 49. $\begin{pmatrix} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{pmatrix}$ 50. inconsistente 51. $\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 4 \\ z = -3 \\ w = -2 \end{pmatrix}$

52 $\begin{pmatrix} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ w = 2 \end{pmatrix}$ 53. $\begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}$ 54. inconsistente

55. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 56. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

59. $\begin{pmatrix} x = \frac{3}{5} \\ y = 2 \\ z = \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ 60. $\begin{pmatrix} sen(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ cos(\beta) = \frac{1}{2} \\ cos(\gamma) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

5.5 ***Sistemas lineales homogéneos*** .

Cuando en un sistema de ecuaciones lineales *todos los términos constantes son nulos*, el sistema se denomina ***homogéneo*** y tiene la forma general :

$$
\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1m}\cdot x_m &= 0 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2m}\cdot x_m &= 0 \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3m}\cdot x_m &= 0 \\
\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots & \\
a_{n\cdot 1}\cdot x_1 + a_{n\cdot 2}\cdot x_2 + a_{n\cdot 3}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n\,m}\cdot x_m &= 0
\end{aligned}
\qquad (5.6)
$$

Cualquier sistema como éste jamás será inconsistente , puesto que al menos tiene la solución trivial :

$$x_1 = 0\ , \quad x_2 = 0\ , \quad x_3 = 0\ , \ \ldots\ldots \ x_m = 0$$

asi que cuando el sistema es homogéneo, de las tres posibilidades de solución para un sistema de ecuaciones lineales, sólo quedan dos :

i) Existe *una solución única* (la trivial)
ii) Existe *una infinidad de soluciones*

Para un sistema homogéneo se cumple por lo general la siguiente regla :

- *Si el número de variables principales es igual al número de incógnitas , la solución será única .*
- *Si existen menos variables principales que incógnitas (es decir si hay variables libres) , el sistema tendrá una infinidad de soluciones (la solución será paramétrica) .*

Por lo tanto, para saber cuál de las dos posibilidades de solución anteriores vale para un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, sólo tenemos que transformar la matriz aumentada del sistema a la forma escalonada reducida y contar los 1´s principales (*asociados a las variables principales*) .

Ejemplo 10. Resolver el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2\cdot x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 0 \\
-x_1 - x_2 + 2\cdot x_3 - 3\cdot x_4 + x_5 &= 0 \\
x_1 + x_2 - 2\cdot x_3 - x_5 &= 0 \\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Solución : Transformemos la matriz aumentada del sistema a la forma escalonada reducida , mediante las operaciones elementales entre filas :

$$R_2 \longrightarrow 2\cdot R_2 + R_1$$
$$R_3 \longrightarrow 2\cdot R_3 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longrightarrow \frac{R_2}{3}$$
$$R_3 \longrightarrow \frac{R_3}{3}$$
$$R_3 \longrightarrow R_3 + R_2$$
$$R_4 \longrightarrow R_4 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow \frac{R_3}{-2}$$
$$R_4 \longrightarrow \frac{R_4}{3}$$
$$R_4 \longrightarrow R_4 - R_3$$
$$R_2 \longrightarrow R_2 + 2\cdot R_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \longrightarrow R_1 + R_2$$
$$R_1 \longrightarrow \frac{R_1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De manera que éste sistema de 5 variables sólo tiene tres 1´s principales : los asociados con las variables x_1 , x_3 y x_4 y dos variables libres o parámetros : x_2 y x_5 .

Este sistema tiene, por lo tanto, un número infinito de soluciones, que en forma paramétrica están dadas por :

$$x_2 = t \qquad x_1 = t - s$$
$$x_5 = s \qquad x_3 = -s$$
$$x_4 = 0$$

Ejemplo 12. Resolver el sistema de ecuaciones

$$2\cdot x + 3\cdot y - 2\cdot z = 0$$
$$2\cdot x - 3\cdot y + z = 0$$
$$3\cdot x - 2\cdot y + 2\cdot z = 0$$

Solución : Transformando la matriz aumentada del sistema a la forma escalonada reducida . . .

$$\begin{array}{l} R_2 \longrightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \longrightarrow 2\cdot R_3 - 3\cdot R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 \longrightarrow \dfrac{R_2}{-6} \\ R_3 \longrightarrow R_3 + 13\cdot R_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -13 & 10 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Con algunas simples operaciones más entre los renglones, es claro que se llegará a la forma escalonada recucida $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que tiene tres 1´s principales, el mismo número de variables o incógnitas del sistema, por lo que la única solución es la trivial : (0 , 0 , 0)

Ejemplo 13. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} x - 2\cdot y + 2\cdot z = 0 \\ 2\cdot x + y - 2\cdot z = 0 \\ 3\cdot x + 4\cdot y - 6\cdot z = 0 \\ 3\cdot x - 11\cdot y + 12\cdot z = 0 \end{array}$$

Solución : La matriz aumentada del sistema es : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & -11 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ entonces . . .

$$\begin{array}{l} R_2 \longrightarrow R_2 - 2\cdot R_1 : \\ R_3 \longrightarrow R_3 - 3\cdot R_1 : \\ R_4 \longrightarrow R_4 - 3\cdot R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -6 & 0 \\ 3 & -11 & 12 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -12 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_3 \longrightarrow R_3 - 2\cdot R_2 : \\ R_4 \longrightarrow R_4 + R_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 10 & -12 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene la forma escalonada reducida : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De ésta manera,aunque el sistema inicial tiene más ecuaciones que incógnitas, en realidad sólo 2 ecuaciones son independientes y sólo dos variables son principales (x e y), por lo tanto, el sistema tiene una infinidad de soluciones .
En general, siempre que un sistema de ecuaciones lineales homogéneo tenga más incógnitas que ecuaciones independientes, tendrá una infinidad de soluciones .

EJERCICIO 5.2

I. ¿Tienen los siguientes sistemas homogéneos otra solución que no sea la trivial ?

1. $$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 &= 0 \\ x_1 + 2\cdot x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x + 2\cdot y - 5\cdot z + 4\cdot w &= 0 \\ 2\cdot x - 3\cdot y + 2\cdot z + 3\cdot w &= 0 \\ 4\cdot x - 7\cdot y + z - 6\cdot w &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - 4\cdot x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 5\cdot x_2 + 2\cdot x_3 &= 0 \\ -2\cdot x_2 - 2\cdot x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 3\cdot x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2\cdot x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ 2\cdot x + 3\cdot y - w &= 0 \\ -3\cdot x + 4\cdot y + z + 2\cdot w &= 0 \\ x + 2\cdot y - z + w &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x + 6\cdot y - 2\cdot z &= 0 \\ 2\cdot x - 4\cdot y + z &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x + 3\cdot y - 2\cdot z &= 0 \\ x - 8\cdot y + 8\cdot z &= 0 \\ 3\cdot x - 2\cdot y + 4\cdot z &= 0 \end{aligned}$$

II. ¿Para qué valores de λ tiene soluciones no triviales el siguiente sistema de ecuaciones ?

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)\cdot x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)\cdot y &= 0 \end{aligned}$$

III. Considérese el sistema homogéneo de ecuaciones lineales :

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1m}\cdot x_m = 0 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2m}\cdot x_m = 0 \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3m}\cdot x_m = 0 \\
\quad \cdots\cdots \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\quad \cdots\cdots \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
a_{n\cdot 1}\cdot x_1 + a_{n\cdot 2}\cdot x_2 + a_{n\cdot 3}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{n\,m}\cdot x_m = 0
\end{array}
$$

Si $X_0 = \left(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots\ldots, x_{0m}\right)$, $X_1 = \left(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots\ldots, x_{1m}\right)$ son dos soluciones diferentes del sistema, demostrar entonces que también son soluciones del sistema :

i) $k\cdot X_0$ donde k es cualquier constante.

ii) $\left(X_0 + X_1\right) = \left[\left(x_{01}+x_{11}\right), \left(x_{02}+x_{12}\right), \left(x_{03}+x_{13}\right), \ldots\ldots, \left(x_{0m}+x_{1m}\right)\right]$

IV. Considérese los sistemas de ecuaciones lineales :

A: No homogéneo ***B: Homogéneo***

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots\ldots + a_{1m}\cdot x_m = b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots\ldots + a_{2m}\cdot x_m = b_2 \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + \ldots\ldots + a_{3m}\cdot x_m = b_3 \\
\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
a_{n\cdot 1}\cdot x_1 + a_{n\cdot 2}\cdot x_2 + \ldots\ldots + a_{n\,m}\cdot x_m = b_n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots\ldots + a_{1m}\cdot x_m = 0 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots\ldots + a_{2m}\cdot x_m = 0 \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + \ldots\ldots + a_{3m}\cdot x_m = 0 \\
\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\quad \cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\
a_{n\cdot 1}\cdot x_1 + a_{n\cdot 2}\cdot x_2 + \ldots\ldots + a_{n\,m}\cdot x_m = 0
\end{array}
$$

Si $X_0 = \left(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots\ldots, x_{0m}\right)$, $X_1 = \left(x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots\ldots, x_{1m}\right)$ son dos soluciones diferentes del sistema A demostrar entonces que :

i) $\left(X_0 - X_1\right) = \left[\left(x_{01}-x_{11}\right), \left(x_{02}-x_{12}\right), \left(x_{03}-x_{13}\right), \ldots\ldots, \left(x_{0m}-x_{1m}\right)\right]$

es una solución del sistema B .

Si X_0 es una solución del sistema A y X_1 es una solución del sistema B , demostrar entonces que

ii) $\left(X_0 + X_1\right) = \left[\left(x_{01}+x_{11}\right), \left(x_{02}+x_{12}\right), \left(x_{03}+x_{13}\right), \ldots\ldots, \left(x_{0m}+x_{1m}\right)\right]$

es también una solución del sistema A .

5.6 Métodos numéricos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales .

Aunque el método de Gauss-Jordan es el procedimiento formal y correcto para determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales ; no obstante , algunas veces , sobre todo cuando el número de ecuaciones es muy grande , es conveniente usar un método numérico que mediante aproximaciones sucesivas , genere la solución del sistema con cierto grado de precisión .

Analizaremos dos métodos numéricos *iterativos (es decir , repetitivos)* para obtener una solución aproximada de un sistema de ecuaciones lineales, el método de *Jacobi* y el de método de *Gauss-Seidel* .

Sin embargo, éstos métodos *se aplican solamente a sistemas de ecuaciones lineales que tengan exactamente n ecuaciones y n variables principales* es decir, a sistemas que contengan *igual* número de ecuaciones que de incógnitas y en los cuales además *ninguno de los coeficientes de la diagonal principal* : a_{11} , a_{22} , a_{33} , ... , a_{nn} en . . .

$$\begin{aligned}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}\cdot x_n &= b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{3n}\cdot x_n &= b_3 \\
\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad & \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots \qquad\qquad\qquad & \ldots\ldots\ldots \\
a_{n\cdot 1}\cdot x_1 + a_{n\cdot 2}\cdot x_2 + a_{n\cdot 3}\cdot x_3 + \ldots\ldots + a_{n\,n}\cdot x_n &= b_n
\end{aligned}$$

es cero .

Por otra parte, éstos métodos *no siempre funcionan*, uno o ambos pueden resultar inefectivos para obtener una aproximación cercana a la solución real de un sistema de ecuaciones sin importar el número de iteraciones *(repeticiones)* que se apliquen al mismo . Cuando ésto sucede se dice que l*as aproximaciones generadas por el método divergen (los valores numéricos calculados para las variables crecen sin límite)* .

Por el contrario, cuando en cada iteración se obtiene una solución cada vez más próxima a la solución real, se dice que *las aproximaciones convergen (en éste caso , los valores numéricos obtenidos para las variables tienden a un límite finito)*

Una condición que *asegura* la convergencia de las aproximaciones en ambos métodos es que . . .

La diagonal principal de la matriz del sistema , debe ser dominante .

esto significa que en la matriz *de los coeficientes :*

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn}
\end{pmatrix}$$

el valor absoluto de cada elemento en la diagonal principal debe ser mayor que la suma de los valores absolutos de los elementos restantes del mismo renglón , esto es :

$$\begin{aligned}
&|a_{11}| > \left(|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \dots\dots\dots + |a_{1n}| \right) \\
&|a_{22}| > \left(|a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| + \dots\dots\dots + |a_{2n}| \right) \\
&|a_{33}| > \left(|a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| + \dots\dots\dots + |a_{2n}| \right) \qquad (5.7) \\
&\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&|a_{nn}| > \left(|a_{n\cdot 1}| + |a_{n\cdot 2}| + |a_{n\cdot 3}| + \dots\dots\dots + |a_{n,n-1}| \right)
\end{aligned}$$

Por ejemplo, la matriz . . .

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

No tiene una diagonal principal dominante puesto que en el segundo renglón, el elemento $|a_{22}| = |1|$ no es mayor que la suma : $|a_{21}| + |a_{23}| + |a_{24}| = |-1| + |5| + |-2| = 8$ y en el tercer renglón, el elemento $|a_{33}| = |0|$ no es mayor que la suma : $|a_{31}| + |a_{32}| + |a_{34}| = |3| + |6| + |2| = 11$.
Sin embargo, si se intercambian los renglones 2º y 3º , la matriz queda :

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

y ahora su diagonal principal es dominante porque :

$$\begin{aligned}
|7| &> |2| + |-1| + |-1| \\
|6| &> |3| + |0| + |2| \\
|5| &> |-1| + |1| + |-2| \\
|8| &> |0| + |-2| + |3|
\end{aligned}$$

La condición de tener una diagonal principal dominante *no es una condición necesaria* para que los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel generen una sucesión convergente ; sin embargo *si es una condición suficiente*, es decir toda matriz con una diagonal principal dominante *seguramente* tendrá una solución por éstos métodos; pero ésto no significa éstos métodos no generen una solución aproximada para alguna matriz sin una diagonal principal dominante .

Un sistema de ecuaciones que por el método de Jacobi genere una sucesión divergente, podría sin embargo tener una solución convergente, si antes de aplicar el método se transforma la matriz del sistema por medio de algunas operaciones elementales entre filas, de manera que algunos de los coeficientes en ésta diagonal sean del máximo valor posible. (*aunque no se obtenga una diagonal principal dominante*) . *Las iteraciones de Jacobi o de Gauss-Seidel convergen o no hacia la solución del sistema de ecuaciones dependiendo del mayor o menor valor de los coeficientes de la diagonal principal*

5.6 a) ***Iteración de Jacobi ó método de las substituciones simultáneas*** **.**

El precedimiento en éste método consiste en :

paso # 1 *Reescribir la matriz de coeficientes del sistema de manera que contenga una diagonal principal dominante siempre que sea posible.*

paso # 2 *De la 1ª ecuación se despeja* x_1, *de la 2ª ecuación se despeja* x_2 , *de la 3ª ecuación se despeja* x_3 , *etc. etc. hasta la n-ésima ecuación de la cual se despeja* x_n .

El sistema de ecuaciones tomará ahora la forma :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left[(b_1) - a_{12} \cdot x_2 - a_{13} \cdot x_3 - \dots\dots\dots - a_{1n} \cdot x_n \right]$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left[(b_2) - a_{21} \cdot x_1 - a_{23} \cdot x_3 - \dots\dots\dots - a_{2n} \cdot x_n \right] \qquad (5.8)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} \cdot \left[(b_3) - a_{31} \cdot x_1 - a_{32} \cdot x_2 - \dots\dots\dots - a_{3n} \cdot x_n \right]$$

. . . .

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}} \cdot \left[(b_n) - a_{n \cdot 2} \cdot x_1 - a_{n \cdot 3} \cdot x_2 - \dots\dots\dots - a_{n,n-1} \cdot x_{n-1} \right]$$

paso # 3 *Se substituye en el segundo miembro de las ecuaciones anteriores una aproximación para los valores de las incógnitas en caso de conocerse alguna, de lo contrario, se puede hacer la aproximación inicial* :

$$x_1 = 0 \ , \quad x_2 = 0 \ , \quad x_3 = 0 \ , \ \dots\dots , \ x_n = 0 \ .$$

Los valores calculados usando (5.8) para x_1 , x_2 , x_3 , . . . , x_n *serán una mejor aproximación a sus valores reales .*

paso # 4 *Se repite el paso anterior hasta lograr la precisión deseada . (Estas repeticiones se llaman **iteraciones**)*

<u>*Ejemplo*</u> 14. Resolver por iteraciones de Jacobi, el sistema de ecuaciones lineales :

$$5 \cdot x + y + 2 \cdot z = 1$$

$$-7 \cdot y + 12 \cdot z + w = -34$$

$$x + y + 2 \cdot z - 8 \cdot w = 5$$

$$3 \cdot x - 9 \cdot y + 2 \cdot z + w = 33$$

Solución : La matriz aumentada del sistema es :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 12 & 1 & -34 \\ 1 & 1 & 2 & -8 & 5 \\ 3 & -9 & 2 & 1 & 33 \end{pmatrix}$$

paso # 1 la cual no tiene una diagonal principal dominante ; sin embargo, intercambiando los renglones 2º 3º y 4º se *transforma* en :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 2 & 1 & 33 \\ 0 & -7 & 12 & 1 & -34 \\ 1 & 1 & 2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

matriz en la cual la diagonal principal es dominante y por lo tanto, al aplicar el método de Jácobi seguramente se generará una sucesión de aproximaciones convergentes hacia la solución real del sistema .

paso # 2 Resolviendo para las incógnitas de la diagonal principal se obtiene :

$$x = \frac{1}{5}\cdot(1 - y - 2\cdot z)$$

$$y = \frac{1}{-9}\cdot(33 - 3\cdot x - 2\cdot z - w)$$

$$z = \frac{1}{12}\cdot(-34 + 7\cdot y - w) \qquad (*)$$

$$w = \frac{1}{-8}\cdot(5 - x - y - 2\cdot z)$$

paso # 3 . Substituyamos los valores de aproximación inicial : $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$ en el segundo miembro de las ecuaciones (*)

$$x = \frac{1}{5}\cdot[\,1 - 0 - 2\cdot(0)\,] = 0.2$$

$$y = \frac{1}{-9}\cdot[33 - 3\cdot(0) - 2\cdot(0) - (0)] = -3.6667$$

$$z = \frac{1}{12}\cdot[-34 + 7\cdot(0) - (0)] = -2.8333$$

$$w = \frac{1}{-8}\cdot[\,5 - (0) - (0) - 2\cdot(0)\,] = -0.625$$

se substituyen ahora éstos nuevos valores para las incógnitas en el segundo miembro de las ecuaciones (*) con el fin de obtener una nueva y mejor aproximación :

$$x = \frac{1}{5}\cdot[\,1 - (-3.6667) - 2\cdot(-2.8333)\,] = 2.0667$$

$$y = \frac{1}{-9}\cdot[33 - 3\cdot(0.2) - 2\cdot(-2.8333) - (-0.625)] = -4.2991$$

$$z = \frac{1}{12}\cdot[-34 + 7\cdot(-3.6667) - (-0.625)] = -4.9202$$

$$w = \frac{1}{-8}\cdot[\,5 - (0.2) - (-3.6667) - 2\cdot(-2.8333)\,] = -1.7667$$

Se substituyen nuevamente éstos resultados para las variables en las ecs. (*)
Iterando tantas veces como se desee, se genera una sucesión de aproximaciones que tiende a ser la solución exacta del sistema .
En la siguiente tabla se resumen los resultados de las 8 primeras iteraciones sucesivas de Jacobi para éste sistema de ecuaciones lineales :

	aproxima-ción inicial	1ª aproxi-mación	2ª aproxi-mación	3ª aproxi-mación	4ª aproxi-mación	5ª aproxi-mación	6ª aproxi-mación	7ª aproxi-mación	8ª aproxi-mación
x	0	0.2	2.0667	3.0279	3.1310	3.0677	3.0082	2.9955	2.9959
y	0	-3.6667	-4.2991	-4.2674	-4.0487	-3.9972	-3.9852	-3.9961	-3.9992
z	0	-2.8333	-4.9201	-5.1939	-5.1448	-5.0219	-4.9962	-4.9916	-4.9980
w	0	-0.625	-1.7667	-2.1341	-2.0784	-2.0259	-1.9967	-1.9962	-1.9980

Es obvio que las secuencias de valores que toman las variables se acercan cada vez más a la solución :

$$x = 3\ ,\quad y = -4\ , z = -5\ ,\quad w = -2$$

El lector puede comprobar que substituyendo los valores para las incógnitas de la 8ª iteración , el sistema inicial de ecuaciones queda :

$$5\cdot x + y + 2\cdot z \ = \ 5\cdot(2.9959) + (-3.9992) + 2\cdot(-4.9980) \ = \ 0.9843$$
$$-7\cdot y + 12\cdot z + w \ = \ -7\cdot(-3.9992) + 12\cdot(-4.9980) + (-1.9980) \ = \ -33.9796$$
$$x + y + 2\cdot z - 8\cdot w \ = \ 2.9959 + (-3.9992) + 2\cdot(-4.9980) - 8\cdot(-1.9980) \ = \ 4.9847$$
$$3\cdot x - 9\cdot y + 2\cdot z + w \ = \ 3\cdot(2.9959) - 9\cdot(-3.9992) + 2\cdot(-4.9980) + (-1.9980) \ = \ 32.9865$$

que casi coinciden con los términos constantes originales : 1 , -34 , 5 y 33

Ejemplo 15. Considérese la solución del sistema de ecuaciones lineales por el método de Jacobi :

$$2 \cdot x + y + 2 \cdot z = -1$$
$$3 \cdot x + y + 2 \cdot z = -2$$
$$-4 \cdot x - y + z = -6$$

Solución : No es sencillo transformar la matriz aumentada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

de modo que tenga una diagonal principal dominante . Por lo tanto, el método de Jacobi aplicado directamente a ésta matriz, no garantiza que se obtenga una secuencia de valores convergentes para las incógnitas . . .

Iteración n°	x :	y :	z :
(0)	(0)	(0)	(0)
1	−0.5	−2	−6
2	6.5	11.5	−10
3	3.75	−1.5	31.5
4	−31.25	−76.25	7.5
5	30.125	76.75	−207.25
6	168.375	322.125	191.25
7	−352.8125	−889.625	989.625
8	−545.3125	−922.8125	−2306.875
9	2767.78125	6247.6875	−3110.0625

Se observa que con cada iteración, los valores de las incógnitas x , y , z se hacen cada vez más grandes (*divergen*) .
El método de Jacobi falla en éste caso y no conduce a la solución del sistema .

Sin embargo, si se transforma primero la matriz inicial mediante operaciones elementales . . .

$$\begin{array}{l} R_1 \longrightarrow R_1 + R_3 : \\ R_3 \longrightarrow R_3 + R_2 : \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -7 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

y se aplica ahora el método de Jacobi,se obtiene aunque muy lentamente, la secuencia convergente hacia la solución real del sistema : $x = -1$, $y = 7$, $z = -3$, como se muestra en la siguiente ilustración :

Iteración n°	x :	y :	z :
(0)	−0.75	−0.0833333	−2.25
1	0.125	4.75	−2.9166667
2	−0.875	3.4583333	−2.625
3	−0.4375	5.875	−2.9583333
4	−0.9375	5.2291667	−2.8125
5	−0.71875	6.4375	−2.9791667
6	−0.96875	6.1145833	−2.90625
7	−0.859375	6.71875	−2.9895833
8	−0.984375	6.5572917	−2.953125
9	−0.9296875	6.859375	−2.9947917
10	−0.9921875	6.7786458	−2.9765625

	sexta aprox.	décima aprox.	15ava aprox.	20ava aprox.	22ava aprox.	23ava aprox.	24ava aprox.	25ava aprox.
x	−0.9687	−0.9921	−0.9648	−0.9990	−0.9995	−0.9978	−0.9997	−0.9989
y	6.1145	6.7786	6.9296	6.9723	6.9861	6.9956	6.9930	6.9978
z	−2.9062	−2.9765	−2.9973	−2.9970	−2.9985	−2.9998	−2.9992	−2.9999

5.6 b) ***Iteración de Gauss-Seidel ó método de las substituciones sucesivas*** **.**

Esta es una modificación del método de Jacobi que frecuentemente reduce el número de iteraciones para obtener una buena aproximación a la solución de un sistema lineal .

En el método de Jacobi los valores de las incógnitas se calculan *independientemente* en cada iteración ; pero dado que los nuevos valores obtenidos en cada cálculo en general están más proximos a la solución exacta , ésto suguiere que *se podrían utilizar inmediatamente* en las ecuaciones inferiores siguientes .

El método de Gauss-Seidel es básicamente el mismo que el de Jacobi y consiste entonces en . . .

- *En un sistema como el de las ecuaciones (5.8), hacer la substitución inicial* $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, . . . , $x_n = 0$ *en la primera de las ecuaciones y substituir de inmediato el valor calculado para* x_1 *en el resto de las ecuaciones.*

- *De la segunda ecuación calcular el valor para* x_2 *y substituirlo de inmediato en el resto de las ecuaciones del sistema.*

- *De la tercera ecuación calcular el valor para* x_3 *y substituir de inmediato en el resto de las ecuaciones del sistema.*

- *Continuar asi hasta la última de las ecuaciones y con los valores calculados para* x_1 , x_2 ,. . . x_n *comenzar de nuevo en la primera ecuación para realizar las siguiente iteración.*

Ejemplo 16. Resolver el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 14 por el método de Gauss-Seidel .

Solución : Resolviendo para las incógnitas de la diagonal principal queda :

$$x = \frac{1}{5}\cdot(1 - y - 2\cdot z)$$

$$y = \frac{1}{-9}\cdot(33 - 3\cdot x - 2\cdot z - w)$$

$$z = \frac{1}{12}\cdot(-34 + 7\cdot y - w) \qquad (\,*\,)$$

$$w = \frac{1}{-8}\cdot(5 - x - y - 2\cdot z)$$

Haciendo la substitución inicial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$ en la 1ª ecuación resulta:

$$x = \frac{1}{5}\cdot(1 - y - 2\cdot z) = \frac{1}{5}\cdot[\,1 - (0) - 2\cdot(0)\,] = 0.2$$

Substituyendo ahora la secuencia : $x = 0.2$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$ en la 2ª ecuación:

$$y = \frac{1}{-9}\cdot(33 - 3\cdot x - 2\cdot z - w) \;=\; \frac{1}{-9}\cdot[33 - 3\cdot(0.2) - 2\cdot(0) - (0)] \;=\; -3.6$$

Substituyendo ahora la secuencia : $x = 0.2$, $y = -3.6$, $z = 0$, $w = 0$ en la 3ª ecuación:

$$z = \frac{1}{12}\cdot(-34 + 7\cdot y - w) \;=\; \frac{1}{12}\cdot[-34 + 7\cdot(-3.6) - (0)] \;=\; -4.93333$$

Al substituir la secuencia : $x = 0.2$, $y = -3.6$, $z = -4.93333$, $w = 0$ en la 4ª ecuación se obtiene :

$$w = \frac{1}{-8}\cdot(5 - x - y - 2\cdot z) \;=\; \frac{1}{-8}\cdot[\,5 - (0.2) - (-3.6) - 2\cdot(-4.93333)\,] \;=\; -2.28333$$

De éste modo, en la primera iteración se han obtenido los valores . . .

$$x = 0.2,\quad y = -3.6\ ,\quad z = -4.93333\ ,\quad w = -2.28333$$

Considerando ahora ésta secuencia como los valores iniciales, se substituyen en la 1ª ecuación y se repite el procedimiento anterior para generar en la 2ª iteración los valores:

$$x = 2.89333 \quad , \quad y = -4.05222 \quad , \quad z = -5.00685 \quad , \quad w = -2.02157$$

De modo que *con una sola iteración*, ya se encuentra cerca de la solución exacta:

$$x = 3\ ,\quad y = -4\ ,\quad z = -5\ ,\quad w = -2$$

En la siguiente tabla se resumen los resultados de 5 iteraciones sucesivas :

	aproximació-n inicial	1ª aproximación	2ª aproximación	3ª aproximación	4ª aproximación	5ª aproximación
x	0	0.2	2.89333	3.01319	2.99907	2.99990
y	0	−3.6	−4.05222	−3.9996	−3.9996	−4.00003
z	0	−4.93333	−5.00685	−4.99792	−4.99995	−5.00001
w	0	−2.28333	−2.02157	−1.99777	−2.00005	−2.00002

Vemos asi que con menos iteraciones se logró mayor precisión y una convergencia más rápida que con el método de *Jacobi* hacia la solución real
Comunmente el método de *Gauss-Seidel* conduce más rápidamente a la solución que el método de Jacobi ; sin embargo no debe concluirse por éste ejemplo, que el método de Gauss-Seidel es simpre mejor que el de Jacobi, pues aunque parezca sorprendente, algunas veces el método de Jacobi es el más rápido .

Ejemplo 17. Resolver el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 15 por el método de Gauss-Seidel .

Solución : Resolviendo para las incógnitas de la diagonal principal queda :

$$x = -\frac{1}{2}\cdot(-7 - 3\cdot z)$$
$$y = -2 - 3\cdot x - 2\cdot z$$
$$z = \frac{1}{3}\cdot(-8 + x)$$

Haciendo la substitución inicial $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$ en la 1ª ecuación resulta:

$$x = -\frac{1}{2}\cdot(-7 - 3\cdot z) = -\frac{1}{2}\cdot[-7 - 3\cdot(0)] = 3.5$$

Substituyendo ahora la secuencia : $x = 3.5$, $y = 0$, $z = 0$ en la 2ª ecuación:

$$y = -2 - 3\cdot x - 2\cdot z = -2 - 3\cdot(3.5) - 2\cdot(0) = -12.5$$

Substituyendo ahora la secuencia : $x = 3.5$, $y = -12.5$, $z = 0$ en la 3ª ecuación:

$$z = \frac{1}{3}\cdot(-8 + x) = \frac{1}{3}\cdot(-8 + 3.5) = -1.5$$

De éste modo, en la primera iteración se han obtenido los valores . . .

$$x = 3.5, \quad y = -12.5 , \quad z = -1.5$$

En la siguiente tabla se resumen los resultados de algunas iteraciones . . .

	1ª aprox.	2ª aprox.	3ª aprox.	4ª aprox.	5ª aprox.	6ª aprox.	7ava aprox.	8ava aprox.
x	3.5	1.25	0.125	−0.4375	−0.71875	−0.85937	−0.92968	−0.96484
y	−12.5	−2.75	2.125	4.5625	5.78125	6.39062	6.69531	6.87109
z	−1.5	−2.25	−2.625	−2.8125	−2.90625	−2.95312	−2.9765	−2.98828

De manera que casi con la mitad de iteraciones que se realizaron en el método de Jacobi , se obtiene incluso una mejor aproximación a la solución real : $x = -1$, $y = 7$, $z = -3$, aunque éste sistema no tenga una matriz con una diagonal principal dominante .

EJERCICIO 5.3

Calcular una solución aproximada para los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, por iteracion de Jacobi, hasta tres cifras exactas. Comparar con la solución real .

1. $-3 \cdot x + 2 \cdot y = -15$
   $2 \cdot x - 4 \cdot y = 2$

2. $5 \cdot x + 2 \cdot y = -5$
   $3 \cdot x - 15 \cdot y = 7$

3. $4 \cdot x + 2 \cdot y - z = -1$
   $-x + 5 \cdot y - 3 \cdot z = 2$
   $3 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z = -3$

4. $-12 \cdot x + 2 \cdot y - 4 \cdot z = 3$
   $3 \cdot x + 12 \cdot y + z = -4$
   $-2 \cdot x - 3 \cdot y + 12 \cdot z = 6$

5. $-15 \cdot x + 2 \cdot y - z + w = -2$
   $4 \cdot x - 15 \cdot y + 2 \cdot z - 3 \cdot w = 1$
   $2 \cdot x - 4 \cdot y - 10 \cdot z + 3 \cdot w = -3$
   $-5 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z + 12 \cdot w = 4$

6. $25 \cdot x + 3 \cdot z = 20$
   $3 \cdot z - 30 \cdot y = -13$
   $20 \cdot w - 4 \cdot x = -5$
   $-6 \cdot y + 32 \cdot w = 6$

Respuestas : Ejercicio 5.3

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7530864 \\ -0.617284 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.378378 \\ -0.081081 \\ -0.675676 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4152632 \\ -0.26 \\ 0.3657895 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1202104 \\ -0.040571 \\ 0.4365139 \\ 0.3208114 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.807018 \\ -0.405848 \\ -8.391813 \\ 0.111404 \end{pmatrix}$

Capítulo VI

Matrices

6.1 Definiciones básicas.

Definición 1 . Se llama **matriz** a *cualquier arreglo rectangular de números*. Los números del arreglo se llaman ***elementos*** de la matriz .

Definición 2 . Una matriz con m filas horizontales *(renglones)* y n filas verticales *(columnas)* se llama matriz de ***tamaño*** $[\, m \times n \,]$.

El elemento que esté en la fila *i-ésima* y en la columna *j-ésima* se denota por a_{ij} y se llama ***componente*** ij .

Ejemplo 1. Los siguientes arreglos de números son matrices :

a) $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\pi}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0.15 & (-0.675) & 2 \end{bmatrix}$ *es una matriz de tamaño* $[\, 2 \times 3 \,]$ *en la que el elemento* a_{13} *vale* $\frac{-3}{4}$

b) $\begin{bmatrix} (-3) & 1.2 & 0.5 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *es una matriz de tamaño* $[\, 1 \times 4 \,]$ *en la que el elemento* a_{12} *vale* 1.2

c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 4 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$ *es una matriz de tamaño* $[\, 3 \times 2 \,]$ *en la que el elemento* a_{21} *vale* 7

d) $\begin{bmatrix} \pi \\ 2 \\ -\left(\frac{3}{2}\right) \end{bmatrix}$ *es una matriz de tamaño* $[\, 3 \times 1 \,]$ *en la que el elemento* a_{11} *vale* π

d) $\begin{bmatrix} (2+j) & \frac{1}{3} & -j \\ \sqrt{-3} & 4 & (4-\sqrt{2}\cdot j) \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ *es una matriz de tamaño* $[\, 4 \times 3 \,]$ *en la que el elemento* a_{42} *vale* 3

e) $[\, 4 \,]$ *es una matriz de tamaño* $[\, 1 \times 1 \,]$ *con un solo elemento, el* a_{11} *que vale* 4

Como se puede ver en éstos ejemplos, una matriz puede tener diferentes formas y contener distintos elementos .
Además cualquier número simple se puede interpretar como una matriz de tamaño [1×1] , esto significa que *las matrices son objetos matemáticos más generales que los números, que contienen como caso especial a cualquier sistema numérico* .

Definición 3 . En el caso especial cuando el número n de renglones es igual que el número m de columnas, se obtiene una *matriz cuadrada de tamaño n* , y los elementos :

$$a_{11} \,,\; a_{22} \,,\; a_{33} \,, \ldots \,,\; a_{nn}$$

se llaman *componentes de la diagonal principal* .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

Matriz cuadrada [$n \times n$]

Si además en una matriz cuadrada son nulos todos los elementos que están encima o debajo de la diagonal principal entonces se llama *matriz triangular inferior* o *matriz triangular superior*, respectivamente .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior [$n \times n$]

Matriz triangular superior [$n \times n$]

Cuando solo en la diagonal principal existen elementos distintos de cero, la matriz se llama *matriz diagonal*. (y por supuesto que algunos de los elementos de la diagonal principal también pueden ser cero)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal [$n \times n$]

Nótese que *una matriz es triangular ó diagonal sólo si es cuadrada* .

Usaremos las letras mayúsculas (A , B , Y , Φ , etc.) para representar matrices y letras minúsculas (a , b , y , φ etc.) para denotar sus respectivos elementos .

Asi por ejemplo una matriz A de tamaño [$m \times n$] se representa por . . .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

en tanto que una matriz Z de tamaño [$p \times q$] está representada por :

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & . & . & . & z_{1q} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & . & . & . & z_{2q} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ z_{p1} & z_{p2} & z_{p3} & . & . & . & z_{pq} \end{pmatrix}$$

Definición 4 . Para una matriz B de tamaño [$m \times n$] , los m arreglos horizontales :

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots\ldots & b_{1n} \end{pmatrix}$$
$$B_2 = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} & \ldots\ldots & b_{2n} \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots\ldots & b_{3n} \end{pmatrix}$$

....

$$B_m = \begin{pmatrix} b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \ldots\ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

se llaman ***vectores fila*** (o simplemente *renglones*) de la matriz B , en tanto que los n arreglos verticales :

$$B^1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ . \\ . \\ b_{m1} \end{pmatrix} , \quad B^2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ . \\ . \\ . \\ b_{m2} \end{pmatrix} , \quad B^3 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ . \\ . \\ . \\ b_{m3} \end{pmatrix} , \ldots\ldots , \quad B^n = \begin{pmatrix} b_{1\cdot n} \\ b_{2\cdot n} \\ . \\ . \\ . \\ b_{mn} \end{pmatrix}$$

se llaman ***vectores columna*** (o simplemente *columnas*) de la matriz B . (*Nótese que un subíndice indica una fila , un superíndice indica una columna*) .
De éste modo , los vectores son también un caso especial de matrices .

Ejemplo 2. La matriz : $A = \begin{pmatrix} -1 & -0.5 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 0.75 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

es de tamaño $[\,3 \times 4\,]$. Sus vectores fila son . . .

$$A_1 = (1 \;\; 0.5 \;\; 4 \;\; 3)$$
$$A_2 = (0 \;\; -2 \;\; 0.75 \;\; -1)$$
$$A_3 = (3 \;\; 5 \;\; -2 \;\; 6)$$

y tiene los siguientes vectores columna . . .

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad A^2 = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} , \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0.75 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad A^4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

además el elemento . . .

a_{23} es 0.75 porque está en la 2ª fila y la 3ª columna

a_{14} es 3 porque está en la 1ª fila y la 4ª columna

a_{32} es 5 dado que está en la 3ª fila y la 2ª columna *etc. etc.*

Ejemplo 3. Sean las matrices :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz B es *triangular superior* porque es cuadrada (de tamaño $[4 \times 4]$) y todos sus elementos debajo de la diagonal principal son cero .

La matriz X es *diagonal* porque es cuadrada (de la forma $[5 \times 5]$ y todos los elementos fuera de su diagonal principal son nulos.

La matriz P es *triangular inferior* porque es cuadrada (de tamaño $[3 \times 3]$) y todos sus elementos por encima de la diagonal principal son cero .

Por si solas las matrices tienen propiedades muy interesantes y además tienen sus propias reglas aritméticas (*suma , producto , inverso , etc.*) y pueden usarse en *modelos que representan sistemas físicos ó matemáticos* como son por ejemplo *los sistemas de ecuaciones lineales , la programación lineal , algunos procesos aleatorios (procesos de Markov) , la representación matricial de la mecánica cuántica , y muchos otros más.*

6.2 ***Aritmética matricial.***

I . ***Igualdad*** .

Dos matrices A y B son iguales si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes. . .

1° *tienen la misma forma o tamaño*

2° *todos sus elementos correspondientes son iguales* $\quad a_{ij} = b_{ij} \qquad$ (6.1)

De éste modo, la igualdad entre dos matrices de tamaño $[n \times m]$ equivale a $n \times m$ igualdades (*una para cada uno de los elemento matriciales correspondientes*) .

Ejemplo 4. Determinar los valores de las variables x, y , z si las matrices A y B son iguales :

$$A = \begin{pmatrix} 3\cdot x - 2\cdot y & 19 \\ 3\cdot z + 2 & x + 3\cdot y \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} z + 4 & 4\cdot x + 3\cdot z \\ 2\cdot x - 5\cdot y & y - z \end{pmatrix}$$

Solución :

Dado que A y B son del mismo tamaño, éstas matrices serán iguales si sus elementos correspondientes son iguales es decir . . .

$$a_{11} = b_{11} \longrightarrow (3\cdot x - 2\cdot y) = (z+4)$$
$$a_{12} = b_{12} \longrightarrow 19 = (4\cdot x + 3\cdot z)$$
$$a_{21} = b_{21} \longrightarrow (3\cdot z + 2) = (2\cdot x - 5\cdot y)$$
$$a_{22} = b_{22} \longrightarrow (x + 3\cdot y) = (y - z)$$

y de la solución de éste sistema de ecuaciones se obtiene que : $x = 1$, $y = -3$, $z = 5$

Ejemplo 5. Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Las matrices A y B son del mismo tamaño ; pero aunque todos sus elementos correspondientes son iguales excepto $a_{32} \neq b_{32}$, éstas matrices ***no son iguales*** .

Asimismo, la matriz A no es igual a la C pues aunque todos los elementos de C están en A , son matrices de distinto tamaño . Por la misma razón B y C son también matrices diferentes .

II . ***Suma*** **.**

Dos matrices A y B se pueden sumar si y solo si son del mismo tamaño.

La matriz suma se denota por $(A+B)$,tiene el mismo tamaño que las matrices iniciales y se obtiene sumando los elementos de A con los correspondientes elementos y de B.

En otras palabaras, al sumar dos matrices A *y* B de la forma $[\, m \times n \,]$ resulta una matriz $C = (A+B)$ de tamaño $[\, m \times n \,]$ también cuyos elementos se calculan como . . .

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (6.2)$$

$$C = (A+B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & . & . & . & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & . & . & . & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & . & . & . & b_{mn} \end{pmatrix}$$

esto es . . .

$$C = (A+B) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & . \ . \ . & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & . \ . \ . & a_{2n}+b_{2n} \\ . & . & . & . \ . \ . & . \\ . & . & . & . \ . \ . & . \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & . \ . \ . & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 6. Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 & 8 \\ 1.25 & 0 & -3 & -5 \\ -1 & 5 & -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -8 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0.57 & -4 \\ 2 & \pi & -2 \\ 3 & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

Las sumas $(A+C)$ y $(C+B)$ *no existen* porque A y B son de tamaño $[3\times 4]$ en tanto que C es de tamaño $[3\times 3]$.

En cambio la suma $(A+B)$ si está definida y vale . . .

$$A+B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 & 8 \\ 1.25 & 0 & -3 & -5 \\ -1 & 5 & -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & 7 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -8 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4+2 & 2+3 & 7+\frac{1}{4} & 8+0 \\ 1.25-3 & 0+7 & -3+1 & -5+2 \\ -1+\frac{1}{2} & 5-8 & -2-1 & \frac{2}{3}+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & \frac{29}{4} & 8 \\ -1.75 & 7 & -2 & -3 \\ \frac{-1}{2} & -3 & -3 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

III. ***Multiplicación de una matriz por una constante .***

Si A es una matriz de tamaño $[n\times m]$ y k es cualquier número, entonces el producto $k\cdot A$ es otra matriz C cuyos elementos *se obtienen al multiplicar cada uno de los elementos de la matriz A por la constante k* .

$$c_{ij} = k\cdot a_{ij} \tag{6.3}$$

es decir . . .

$$k\cdot A = k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & . & . & . & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & . & . & . & k\cdot a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ k\cdot a_{m2} & k\cdot a_{m2} & . & . & . & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7. Sea la matriz : $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -5 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Entonces las matrices que se obtienen al multiplicar por ejemplo por -3 y por $\frac{1}{3}$ a la matriz A son :

$$(-3)\cdot A = \begin{bmatrix} (-3)\cdot(-8) & (-3)\cdot 0 & (-3)\cdot(-5) \\ (-3)\cdot 3 & (-3)\cdot 7 & (-3)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 0 & 15 \\ -9 & -21 & -9 \end{pmatrix}$$

y

$$\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)\cdot(-8) & \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 0 & \left(\frac{1}{3}\right)\cdot(-5) \\ \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 3 & \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 7 & \left(\frac{1}{3}\right)\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{3} & 0 & \frac{-5}{3} \\ 1 & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Observación : El producto de un número por una matriz permite definir la *resta de matrices* del mismo tamaño como una suma de matrices :

$$A - B = A + (-1)\cdot B$$

en la cual la matriz B primero se multiplica por el número (-1) y luego se suma a la matriz A .

Ejemplo 8. Sean: $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -3 & 12 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$. Calcular $A - B$; $2\cdot A - 3\cdot B$

Solución :
Por la observación anterior se tiene que :

$$A - B = A + (-1)\cdot B$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -3 & 12 \\ 6 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 3 & -12 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 13 \\ 5 & -17 \\ -9 & 21 \end{pmatrix}$$

y también . . .

$$2\cdot A - 3\cdot B = (2)\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ -3 & 12 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 4 & -10 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 27 \\ 9 & -36 \\ -18 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 35 \\ 13 & -46 \\ -24 & 57 \end{pmatrix}$$

IV. ***Multiplicación de matrices .***

El producto de dos matrices A y B se denota por $A\cdot B$ y es una matriz que *está definida solamente cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz .*

Es decir el producto $C = A\cdot B$ existe solo si A es de tamaño $[n \times p]$ y B es de tamaño $[p \times m]$. La matriz producto C tendrá el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B, es decir es de tamaño $[n \times m]$ *cuya componente* kj *se obtiene multiplicando los elementos del k-ésimo renglón de* A *por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de* B , de acuerdo al siguiente esquema . . .

$$c_{kj} = A_k\cdot B^j = \begin{pmatrix} a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & . & . & . & a_{kp} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1\cdot j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ b_{pj} \end{pmatrix}$$

$$= a_{k1}\cdot b_{1\cdot j} + a_{k2}\cdot b_{2j} + a_{k3}\cdot b_{3j} + \ldots\ldots + a_{kp}\cdot b_{pj}$$

o en forma abreviada . . .

$$c_{kj} = \sum_{i =} a_{ki}\cdot b_{ij} \qquad (6.4)$$

De éste modo, el producto $A{\cdot}B$ se obtiene *multiplicando componente a componente cada una de los renglones de la matriz A, por cada una de las columnas de la matriz B, en ese orden* como sigue . . .

<u>*columna j-ésima de B*</u> <u>*elemento kj del producto A·B*</u>

<u>*renglón k-ésimo de A*</u>

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{kj} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{bmatrix}$$

Aqui debe hacerse notar que si la matriz A es de la forma $[\,r \times p\,]$ y B es de la forma $[\,p \times t\,]$, entonces el producto $A{\cdot}B$ está bién definido y es de la forma $[\,r \times t\,]$; en tanto que el producto $B{\cdot}A$ *no existe* puesto que el número t de columnas del primer factor (*la matriz* B) es distinto al número r de renglones del segundo factor (*la matriz* A)

En otras palabras , por regla general *el producto de matrices no es conmutativo:* $A{\cdot}B \neq B{\cdot}A$.

Aún en el caso de matrices cuadradas, cuando sea posible realizar los dos productos AB y $B{\cdot}A$ éstos generalmente son matrices distintas porque tienen diferentes elementos .

<u>*Ejemplo*</u> 9. Sean: $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Calcular $A{\cdot}B$ y $B{\cdot}A$

<u>*Solución*</u> *:*

El producto $A{\cdot}B$ existe porque el número de columnas de A es igual al número de renglones de B y es una matriz de tamaño $[\,2 \times 4\,]$.

Por otra parte, el producto $B{\cdot}A$ no está definido porque el número de columnas de B no es igual al número de renglones de A .

La multiplicación $A{\cdot}B$ genera la matriz C cuyos elementos c_{ij} se obtienen multiplicando el renglón *i*-ésimo A_i de A por la columna *j*-ésima B^j de B , es decir $c_{ij} = A_i{\cdot}B^j$. Algunos de esos elementos son por ejemplo . . .

$$c_{11} = A_1 \cdot B^1 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3)\cdot(2) + (7)\cdot(6) + (0)\cdot(3) = 36$$

$$c_{23} = A_2 \cdot B^3 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = (5)\cdot(-2) + (1)\cdot(0) + (-1)\cdot(5) = -15$$

$$c_{14} = A_1 \cdot B^4 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = (-3)\cdot(3) + (7)\cdot(-4) + (0)\cdot(7) = -37$$

etc.
Calculando el resto de las componentes de éste mismo modo la matriz producto es . . .

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 & A_1 \cdot B^3 & A_1 \cdot B^4 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 & A_2 \cdot B^3 & A_2 \cdot B^4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 10 & 6 & -37 \\ 13 & -1 & -15 & 4 \end{pmatrix}$$

Es fácil determinar si existe el producto de dos matrices cualesquiera pues basta con escribir sus tamaños uno al lado del otro. *El producto existe si los números interiores son iguales* .

$$A \times B = C$$

$[\,m \times r\,]$ $\qquad$ $[\,r \times p\,]$ $\qquad$ $[\,m \times p\,]$

números exteriores = tamaño del producto

números interiores iguales

Ejemplo 10. Seanlas matrices: A de tamaño $[3 \times 4]$
B de tamaño $[4 \times 7]$
C de tamaño $[7 \times 3]$

Entonces el producto $A \cdot B$ existe porque el número de columnas de A es igual al número de renglones de B y es una matriz de la forma $[3 \times 7]$

$$\underset{[3\times 4]}{A} \times \underset{[4\times 7]}{B} = \underset{[3\times 7]}{AB}$$

De la misma forma, el producto $C \cdot A$ existe porque el número de columnas de C es igual al número de renglones de A y es una matriz de tamaño $[7 \times 4]$

$$\underset{[7\times 3]}{C} \times \underset{[3\times 4]}{A} = \underset{[7\times 4]}{CA}$$

El producto $B \cdot C$ existe porque el número de columnas de B es igual al número de renglones de C y es una matriz de la forma $[4 \times 3]$

$$\underset{[4\times 7]}{B} \times \underset{[7\times 3]}{C} = \underset{[4\times 3]}{BC}$$

Todos los demás productos posibles : $C \cdot B$, $A \cdot C$, $B \cdot A$ no existen .

Ejemplo 11. Si es posible, eEncontrar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$ dadas las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Solución :

a) El producto $A \cdot B$ existe porque el número de columnas de A es igual al número de renglones de B y tiene la forma: $[2 \times 2]\,[2 \times 3]$, es decir es una matriz de tamaño $[2 \times 3]$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} & (-2 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & (-2 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \\ (1 \;\; -4)\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} & (1 \;\; -4)\cdot\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & (1 \;\; -4)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2\cdot(1)+3\cdot(-4) & -2\cdot(0)+3\cdot(2) & -2\cdot(3)+3\cdot(-1) \\ 1\cdot(1)+(-4)\cdot(-4) & 1\cdot(0)+(-4)\cdot(2) & 1\cdot(3)+(-4)\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & 6 & -9 \\ 17 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

En cambio, el producto $B\cdot A$ de la forma $[2\times 3][2\times 2]$ no existe porque la matriz B tiene 3 columnas y la matriz A sólo tiene 2 renglones .

b) El producto $A\cdot B$ tiene la forma: $[3\times 2][2\times 3]$ y existe porque el número de columnas de A es igual al número de renglones de B , es decir es una matriz de tamaño $[3\times 3]$.

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (-2 \;\; 0)\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} & (-2 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & (-2 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \\ (3 \;\; -3)\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} & (3 \;\; -3)\cdot\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & (3 \;\; -3)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \\ (1 \;\; 4)\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix} & (1 \;\; 4)\cdot\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} & (1 \;\; 4)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1+0\cdot(-4) & (-2)\cdot 0+0\cdot(2) & (-2)\cdot 3+0\cdot(-1) \\ (3)\cdot 1+(-3)\cdot(-4) & (3)\cdot 0+(-3)\cdot 2 & (3)\cdot 3+(-3)\cdot(-1) \\ (1)\cdot 1+(4)\cdot(-4) & (1)\cdot 0+(4)\cdot 2 & (1)\cdot 3+(4)\cdot(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 15 & -6 & 12 \\ -15 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

En éste caso también existe el producto $B\cdot A$, y tiene la forma $[2\times 3][3\times 2]$ donde el número de columnas de B es igual al número de renglones de A , es decir es una matriz de tamaño $[2\times 2]$; sin embargo el resultado es distinto al del producto $A\cdot B$ como se muestra enseguida:

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1\ \ 0\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} & (1\ \ 0\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ (4\ \ 2\ \ -1)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} & (4\ \ 2\ \ -1)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot(-2) + 0\cdot(3) + 3\cdot(1) & 1\cdot(0) + 0\cdot(-3) + 3\cdot(4) \\ (-4)\cdot(-2) + 2\cdot(3) + (-1)\cdot 1 & (-4)\cdot(0) + 2\cdot(-3) + (-1)\cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 13 & -10 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 12. Hallar los elementos c_{23} , c_{14} y c_{21} de la matriz producto $C = A\cdot B$ si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución :

El producto $A\cdot B$ tiene la forma: $[\,2\times 3\,]\,[\,3\times 4\,]$ y existe porque el número de columnas de A es igual al número de renglones de B , es decir es una matriz de tamaño $[\,2\times 4\,]$.

Los elementos de la matriz producto $A\cdot B$ se obtienen multiplicando las filas de A por las columnas de B, asi que . . .

$$c_{23} = A_2\cdot B^3 = (-1\ \ 0\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -1\cdot(-2) + 0\cdot(0) + 3\cdot(3) = 11$$

$$c_{14} = A_1\cdot B^4 = (1\ \ 2\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\cdot(1) + 2\cdot(4) + 0\cdot(5) = 9$$

$$c_{21} = A_2\cdot B^1 = (-1\ \ 0\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(2) + (0)\cdot(-3) + (3)\cdot(1) = 1$$

6.3 Reglas de la aritmética matricial.

Casi todas las reglas aritméticas que valen para los números se cumplen también para las matrices, sin embargo, existen algunas excepciones .

Una de esas reglas es la *ley conmutativa para la multiplicación*: $A \cdot B = B \cdot A$ que siempre se cumple para los números reales ó complejos ; pero no siempre se cumple para las matrices, como ya se ha visto en algunos ejemplos anteriores .

Esto se debe principalmente a que si el producto $A \cdot B$ de dos matrices A y B está definido, entonces el producto $B \cdot A$ . . .

- *puede no existir porque las matrices del producto tengan tamaños incompatibles con la multiplicación .*
- *aunque exista, puede ser de distinto tamaño que el producto* $A \cdot B$ *.*
- *aunque exista y sea del mismo tamaño que* $A \cdot B$*, puede tener distintos elementos que* $A \cdot B$

Consideremos por ejemplo las matrices :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad G = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los dos productos $P \cdot G$ y $G \cdot P$ están definidos, sin embargo :

$P \cdot G$ de la forma: $[3 \times 4][4 \times 3]$ genera una matriz de tamaño $[3 \times 3]$

$G \cdot P$ de la forma: $[4 \times 3][3 \times 4]$ genera una matriz de tamaño $[4 \times 4]$

y podemos comprobar que los productos también son diferentes en sus elementos . . .

$$G \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 9 & 14 & 3 \\ -3 & 5 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P \cdot G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 11 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

Otras leyes de los números *que no son válidas* para las matrices son :

a) ***Ley de la cancelación*** *: Si* $a \cdot b = a \cdot c$ *entonces* $b = c$ *siempre que* $a \neq 0$

b) ***Ley del factor cero*** *: Si* $a \cdot b = 0$ *entonces* $a = 0$ *y/o* $b \neq 0$

como se ilustra en los siguientes ejemplos :

Ejemplo 13. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \; , \; B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \; , \; C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \; , \; D = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Haciendo los produtos . . .

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} & (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} & (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} & (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -2 \\ 12 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} & (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} & (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -2 \\ 12 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

y *ambos productos* $A \cdot B$ *y* $A \cdot C$ *son iguales siendo* $A \neq 0$, *sin embargo las matrices* B *y* C *no son iguales* . Además :

$$A \cdot D = \begin{bmatrix} (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \;\; 1)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \;\; 2)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \;\; 3)\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot A = \begin{bmatrix} (-1 \;\; -7 \;\; 5)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \;\; 0 \;\; 0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ (-1 \;\; -7 \;\; 5)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & (0 \;\; 0 \;\; 0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto $A \cdot D$ genera una matriz *cero* de tamaño [3×3] y el producto $D \cdot A$ genera también una matriz *cero distinta* de tamaño [2×2] . *Sin embargo, ni la matriz A ni la matriz D son cero* .

Las reglas que son válidas para la aritmética de matrices son las siguientes . . .

LEYES DE LA ARITMÉTICA DE MATRICES.

Sean A , B y C matrices que tienen el tamaño necesario para definir su suma y su producto, entonces se cumplen las siguientes propiedades

I. ***Ley conmutativa para la suma*** : $A + B = B + A$

II. ***Ley asociativa para la suma*** : $A + (B + C) = (A + B) + C$

III. ***Ley asociativa para el producto*** : $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

IV. ***Leyes distributivas***: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Si además k y λ son números cualesquiera entonces . . .

V. $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$

VI. $k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$

VII. $(k + \lambda) \cdot A = k \cdot A + \lambda \cdot A$

Para demostrar cualquiera de éstas reglas, es necesario probar dos cosas :

- *que la matriz del miembro izquierdo tiene el mismo tamaño que la matriz del miembro derecho*
- *que los elementos correspondientes de la matriz del miembro izquierdo y la matriz del miembro derecho, son iguales .*

Ejemplo 14. Demostrar la propiedad asociativa para la multiplicación de matrices: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

Solución :

Definamos las matrices:

A de la forma: [$p \times m$]

B de la forma: [$m \times n$]

C de la forma: [$n \times q$]

de modo que existen los productos :

$A \cdot B$ de la forma: [$p \times n$]

$B \cdot C$ de la forma: [$m \times q$]

$(A \cdot B) \cdot C$ de la forma: [$p \times q$]

$A \cdot (B \cdot C)$ de la forma: [$p \times q$]

De éste modo las dos matrices $A\cdot(B\cdot C)$ y $(A\cdot B)\cdot C$ son del mismo tamaño .
Ahora probemos que sus elementos correspondientes son iguales . . .

Por definición el elemento ik del producto $(A\cdot B)$ es el producto de la fila A_i de la matriz A por la columna B^k de la matriz B y está dado por :

$$(A\cdot B)_{ik} = A_i\cdot B^{k} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \ldots\ldots & a_{im}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ . \\ . \\ b_{mk}\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot b_{jk}$$

mientras que el elemento jh del producto $(B\cdot C)$ está dado por :

$$(B\cdot C)_{jh} = B_j\cdot C^{h} = \begin{pmatrix} b_{j1} & b_{j2} & b_{j3} & \ldots\ldots & b_{jn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_{1\cdot h} \\ c_{2h} \\ c_{3h} \\ . \\ . \\ c_{nh}\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\cdot c_{kh}$$

por lo tanto el elemento ih del producto $(A\cdot B)\cdot C$ es :

$$[(A\cdot B)\cdot C]_{ih} = (A\cdot B)_i\cdot C^{h} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik}\cdot c_{kh} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot b_{jk}\right)\cdot c_{kh}$$

y el elemento ih de $A\cdot(B\cdot C)$ es :

$$[A\cdot(B\cdot C)]_{ih} = (A)_i\cdot(B\cdot C)^{h} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot(B\cdot C)_{jh} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\cdot c_{kh}\right)$$

Comparando éstos dos resultados y tomando en cuenta que las sumas son conmutativas, se concluye que $[(A\cdot B)\cdot C]_{ih} = [A\cdot(B\cdot C)]_{ih}$.

Cuando dos matrices tienen el mismo tamaño y los mismos elementos respectivos entonces son iguales, por lo tanto se concluye que $(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$.

De éste modo, la ley asociativa de la multiplicación de matrices ha quedado demostrada .

Ejemplo 15. Demostrar la propiedad distributiva para las matrices: $A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$

Solución :

Si B una matriz de tamaño $[\, s\times n\,]$, entonces para que la matriz suma $(B+C)$ exista es necesario que C sea del mismo tamaño que B . y la suma será de la forma $[\, s\times n\,]$.

Por consiguiente, para que el producto $A\cdot(B+C)$ exista , es necesrio que el número de columnas de A sea igual al número de renglones de $(B+C)$, esto es, debe ser de la forma $[\, m\times s\,]$.
El producto será entonces de tamaño : $[\, m\times s\,]\,[\, s\times n\,]$ es decir $[\, m\times n\,]$

Por otra parte el producto:

$A\cdot B$ es de tamaño $[\, m\times s\,]\,[\, s\times n\,]$ es decir $[\, m\times n\,]$
$A\cdot C$ es de tamaño $[\, m\times s\,]\,[\, s\times n\,]$ es decir $[\, m\times n\,]$

por lo tanto la matriz suma $A\cdot B + A\cdot C$ existe y es del mismo tamaño que $A\cdot(B+C)$

El elemento **ij** de $A\cdot(B+C)$ es :

$$[A\cdot(B+C)]_{ij} = A_i\cdot(B+C)^j = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{is}\end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix}(b+c)_{1\cdot j}\\ (b+c)_{2j}\\ (b+c)_{3j}\\ \cdot\\ \cdot\\ (b+c)_{sj}\end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\cdot(b+c)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\cdot\left(b_{kj}+c_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{s}\left(a_{ik}\cdot b_{kj} + a_{ik}\cdot c_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\cdot b_{kj} + \sum_{k=1}^{s} a_{ik}\cdot c_{kj}$$

sin embargo, éstas dos últimas sumatorias son por definición, los elementos **ij** de los productos de las matrices : $A\cdot B$ y $A\cdot C$, es decir . . .

$$[A\cdot(B+C)]_{ij} = (A\cdot B)_{ij} + (A\cdot C)_{ij} = (A\cdot B + A\cdot C)_{ij}$$

Hemos probado asi que las matrices $A\cdot(B+C)$ y $A\cdot B + A\cdot C$ tienen los mismos elementos y son del mismo tamaño por lo cual son iguales .

Ejemplo 16. Como ilustración de la ley asociativa, consideremos el producto de las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (A\cdot B)\cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 46 \\ 8 & 34 \\ 16 & 72 \end{pmatrix}$$

y por otra parte. . .

$$B\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 46 \\ 8 & 34 \\ 16 & 72 \end{pmatrix}$$

asi que ambos productos $(A\cdot B)\cdot C$ y $A\cdot(B\cdot C)$ dan *el mismo resultado* .
Además . . .

$$B + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\cdot(B + C) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 6 & 15 \\ 16 & 28 \end{pmatrix}$$

y por otra parte. . .

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \; ; \; A\cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\cdot B + A\cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 5 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 17 \\ 6 & 15 \\ 16 & 28 \end{pmatrix}$$

asi que ambas expresiones $A\cdot(B + C)$ y $A\cdot B + A\cdot C$ dan *el mismo resultado* .

DEFINICIÓN :

Se define la ***matriz cero*** de tamaño $[\,n \times m\,]$ como un arreglo de n renglones y m columnas de ceros y se denota por . . .

$$0_{n\times m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

Algunas de las propiedades de la matriz cero son muy parecidas a las propìedades correspondientes del cero en los números reales y son . . .

TEOREMA 1.

Si A *es una matriz* $[\,n \times m\,]$ *y* 0 *es la matriz cero entonces valen las siguientes propiedades :*

I . $(A + 0) = (0 + A) = A$; *(* 0 *es del mismo tamaño que* A *)*

II . $A - A = 0$; *(* 0 *es del mismo tamaño que* A *)*

III . $0 - A = -A$; *(* 0 *es del mismo tamaño que* A *)*

IV . $A \cdot 0_{m\times p} = 0_{n\times p}$; $0_{q\times n} \cdot A = 0_{q\times m}$

Asi que no necesariamente $A \cdot 0 = 0 \cdot A$ *puesto que se pueden obtener matrices cero de distintos tamaños .*

EJERCICIO 6.1

I. Sean las matrices de tamaños : $A : [\,4\times 5\,]$, $B : [\,4\times 5\,]$, $C : [\,5\times 2\,]$, $D : [\,4\times 2\,]$, $E : [\,5\times 4\,]$.
Determinar si existen las siguientes operaciones matriciales :

1. $B \cdot A$
2. $A \cdot C + D$
3. $A \cdot E + B$
4. $A \cdot B + B$
5. $E \cdot (A + B)$
6. $E \cdot (A \cdot C)$
7. $B \cdot (E \cdot A)$

y dar el tamaño de la matriz resultante en caso afirmativo .

8. Hallar a , b , c y d en la igualdad de matrices . . . $\begin{bmatrix} a - b & b + c \\ 3 \cdot d + c & 2 \cdot (a - 2 \cdot d) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

II. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;;\quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \;;\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \;;\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \;;\quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcular . . .

9. $A \cdot B$
10. $A \cdot D - C$
11. $D - E$
12. $E \cdot D$
13. $D \cdot E$
14. $C \cdot A - 3 \cdot B$
15. $2 \cdot C \cdot D - C$
16. $3 \cdot C - D$

17. $(3 \cdot D) \cdot C$ 18. $D + E^2$ 19. $A \cdot (B \cdot C)$ 20. $4 \cdot B \cdot C + 2 \cdot C$

21. *Realizando la menor cantidad de cálculos posibles, determine el elemento del renglón* 2 *y columna* 3 *del producto* $X = C \cdot (D \cdot E)$.

22. *Demostrar que el producto de matrices diagonales es una matriz diagonal . Enunciar entonces una regla para multiplicar matrices diagonales.*

III. Sean . . .

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \;;\quad G = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \;;\quad H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \;;\quad a = -3 \;;\quad b = 2$$

Comprobar con estas cantidades las siguientes propiedades matriciales :

23. $F + (G + H) = (F + G) + H$

24. $(F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H)$

25. $(a + b) \cdot H = a \cdot H + b \cdot H$

26. $a \cdot (G - H) = a \cdot G - a \cdot H$

27. $F \cdot (G - H) = F \cdot G - F \cdot H$

28. $a \cdot (F \cdot G) = (a \cdot F) \cdot G = F \cdot (a \cdot G)$

IV. Sean A y B matrices. ¿ Bajo qué condiciones es cierto que . . .

29. $(A \cdot B)^2 = A^2 \cdot B^2$?

30. $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$?

Respuestas *(Ejercicio 6.1)*

1. *no existe*
2. *existe, es una matriz* $[4 \times 2]$
3. *existe* $A \cdot E$ *pero no* $A \cdot E + B$
4. *no existe*
5. *existe, es una matriz* $[5 \times 5]$
6. *existe, es una matriz* $[5 \times 2]$
7. *existe, es una matriz* $[4 \times 5]$
8. $a = -19$, $b = -27$, $c = 34$, $d = -11$.

9. $\begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -4 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

10. *no existe*

11. $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 14 & 36 & 25 \\ 4 & -1 & 7 \\ 12 & 26 & 21 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 19 \\ -2 & 0 & 0 \\ 32 & 9 & 25 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} -11 & 13 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 5 & 14 & 26 \\ 31 & 49 & 49 \end{pmatrix}$

16. *no existe*

17. *no existe*

18. $\begin{pmatrix} 48 & 15 & 31 \\ 0 & 2 & 6 \\ 38 & 10 & 27 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 6 & 68 & 16 \\ 30 & 10 & 50 \end{pmatrix}$

21. $$x_{23} = C_2\cdot(D\cdot E)^3 = C_2\cdot\begin{pmatrix} D_1\cdot E^3 \\ D_2\cdot E^3 \\ D_3\cdot E^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix} = 182$$

22. *El producto de matrices diagonales es una matriz diagonal cuyos elementos son los productos de los elementos diagonales correspondientes en las matrices iniciales.*

23. $$F+(G+H) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = (F+G)+H$$

24. $$(F\cdot G)\cdot H = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ -1 & 15 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 40 & 46 \\ 60 & 91 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 20 & 29 \end{pmatrix} = F\cdot(G\cdot H)$$

25. $$(a+b)\cdot H = -1\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -12 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} = a\cdot H + b\cdot H$$

26. $$a\cdot(G-H) = -3\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -12 & -3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -3 & -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -12 & -18 \end{pmatrix} = a\cdot G - a\cdot H$$

27. $$F\cdot(G-H) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ -1 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 19 \end{pmatrix} = F\cdot G - F\cdot H$$

28. $$a\cdot(F\cdot G) = -3\cdot\begin{pmatrix} 14 & 10 \\ -1 & 15 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -42 & -30 \\ 3 & -45 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (a\cdot F)\cdot G$$

y también $$F\cdot(a\cdot G) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -3 & -15 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -42 & -30 \\ 3 & -45 \end{pmatrix}}$$

29, 30 . *Sólo si* A *y* B *son matrices cuadradas del mismo tamaño y además* $A\cdot B = B\cdot A$

6.4 ***La matriz inversa*** .

Definición . *La matriz identidad es una matriz diagonal unitaria* , denotada por I_n (*el índice denota el tamaño de ésta matriz que, por ser diagonal, también es cuadrada*) por ejemplo . . .

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \textit{etc.}$$

Si A es una matriz $[\, n \times m \,]$ entonces se cumple que . . .

$$A \cdot I_m = A \qquad \text{y} \qquad I_n \cdot A = A$$

Por ejemplo si A es una matriz $[\, 2 \times 3 \,]$ entonces. . .

$$A \cdot I_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{13}) & (0 \cdot a_{11} + 1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{13}) & (0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{13}) \\ (1 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{23}) & (0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{22} + 0 \cdot a_{23}) & (0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + 1 \cdot a_{23}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = A$$

y similarmente . . .

$$I_2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21}) & (1 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22}) & (1 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23}) \\ (0 \cdot a_{21} + 1 \cdot a_{21}) & (0 \cdot a_{12} + 1 \cdot a_{22}) & (0 \cdot a_{13} + 1 \cdot a_{23}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = A$$

De ésta manera, la matriz identidad desempeña una función semejante a la del número 1 en la aritmética de los números reales : $a \times 1 = 1 \times a = a$

Un caso especial de la multiplicación de matrices se presenta cuando A es una *matriz cuadrada* y se puede hallar *otra matriz cuadrada* B , tal que . . .

$$A \cdot B = I_n \qquad \text{y} \qquad B \cdot A = I_n$$

en tal caso se dice que la matriz A es ***inversible*** y que la matriz B es la ***matriz inversa*** de A , la cual se denota por A^{-1}. (*Por definición , si una matriz no es cuadrada entonces no tiene inversa .*)

Esta definición se basa en la propiedad análoga para los números reales : $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ que es válida siempre y cuando $a \neq 0$.

Ejemplo 17. Sean las matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 & 5 \\ -1 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & -12 & -9 \\ -3 & -5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

Es fácil comprobar que al multiplicarlas se obtiene . . .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 & 5 \\ -1 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & -12 & -9 \\ -3 & -5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-1-1+3+0) & (-4-3+7+0) & (7+5-12+0) & (5+4-9+0) \\ (-3+0+12-9) & (-12+0+28-15) & (21+0-48+27) & (15+0-36+21) \\ (-2+2+3-3) & (-8+6+7-5) & (14-10-12+9) & (10-8-9+7) \\ (0-3+6-3) & (0-9+14-5) & (0+15-24+9) & (0+12-18+7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

y similarmente . . .

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 7 & 5 \\ -1 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & -12 & -9 \\ -3 & -5 & 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Por lo tanto, la matriz A es inversible y su inversa es B (*ó también se puede decir que* B *es inversible y su inversa es* A) .

Sin embargo *no toda matriz cuadrada tiene necesariamente una inversa* .
Cuando una matriz cuadrada no tiene inversa se dice que tal matriz es *singular* .
Por ejemplo. . .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz singular porque no tiene inversa. Para comprobarlo, supongamos que existe su inversa y denotémosla por B. Entonces se debe cumplir que $A \cdot B = I_3$, es decir . . .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot b_{11} + 2 \cdot b_{21} & 2 \cdot b_{12} + 2 \cdot b_{22} & 2 \cdot b_{13} + 2 \cdot b_{23} \\ b_{11} - 2 \cdot b_{21} + 3 \cdot b_{31} & b_{12} - 2 \cdot b_{22} + 3 \cdot b_{32} & b_{13} - 2 \cdot b_{23} + 3 \cdot b_{33} \\ 3 \cdot b_{11} + 2 \cdot b_{21} + b_{31} & 3 \cdot b_{12} + 2 \cdot b_{22} + b_{32} & 3 \cdot b_{13} + 2 \cdot b_{23} + b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes éstas dos matrices, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas :

I) $2 \cdot b_{11} + 2 \cdot b_{21} = 1$ IV) $2 \cdot b_{12} + 2 \cdot b_{22} = 0$ VII) $2 \cdot b_{13} + 2 \cdot b_{23} = 0$

II) $b_{11} - 2 \cdot b_{21} + 3 \cdot b_{31} = 0$ V) $b_{12} - 2 \cdot b_{22} + 3 \cdot b_{32} = 1$ VIII) $\left(b_{13} - 2 \cdot b_{23} + 3 \cdot b_{33}\right) 23 = 0$

III) $\left(3 \cdot b_{11} + 2 \cdot b_{21} + b_{31}\right) 31 = 0$ VI) $3 \cdot b_{12} + 2 \cdot b_{22} + b_{32} = 0$ IX) $3 \cdot b_{13} + 2 \cdot b_{23} + b_{33} = 1$

Sin embargo, se puede comprobar rápidamente que éstos tres conjuntos de ecuaciones son *inconsistentes* , pues no hay valores reales para las incógnitas :

b_{11} , b_{21} y b_{31} en las ecuaciones I) , II) y III)

b_{12} , b_{22} y b_{32} en las ecuaciones IV) , V) y VI)

b_{13} , b_{23} y b_{33} en las ecuaciones VII) , VIII) y IX)

que las satisfagan simultáneamente.

Comprobar de esta manera si una matriz cuadrada tiene o no matriz inversa, es un procedimiento largo y laborioso. Afortunadamente, existe una manera más general y simple para determinar la inversa de una matriz dada o verificar si tiene inversa, como veremos más adelante .

Por lo pronto , demostremos el siguiente teorema . . .

TEOREMA 2.

Si una matriz tiene inversa , ésta es única .

DEMOSTRACIÓN .

Supongamos que C *y* B *son dos matrices inversas diferentes para la matriz cuadrada* A. *Entonces se debe cumplir por definición que . . .*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n \qquad y \qquad A \cdot C = C \cdot A = I_n$$

pero por la propiedad asociativa del producto de matrices se tiene que . . .

$$C \cdot (A \cdot B) = (C \cdot A) \cdot B$$

sin embargo, $A \cdot B = I_{\mathbf{n}}$ *y también* $C \cdot A = I_{\mathbf{n}}$ *, de modo que la expresión anterior se reduce a :*

$$C \cdot I_n = I_n \cdot B$$

y como toda matriz cuadrada multiplicada por la identidad es la misma matriz, se concluye que:

$$C = B$$

por lo tanto, si C *y* B *son inversas de* A, *no pueden ser diferentes, es decir la inversa de la matriz* A *es una sola.*

La inversa de una matriz cuadrada A de tamaño $[\, n \times n \,]$ se denota por A^{-1} y satisface las **dos** condiciones siguientes . . .

$$A \cdot A^{-1} = I_n \qquad \text{y} \qquad A^{-1} \cdot A = I_n \qquad (6.5)$$

(*Nótese que ambas condiciones son necesarias, dado que el producto de matrices no es conmutativo*)

Demostremos ahora el siguiente teorema . . .

TEOREMA 3.

Si A *y* B *son matrices inversibles del mismo tamaño, entonces. . .*

- * $A \cdot B$ *también es inversible*
- * *la inversa de* $A \cdot B$ *es* $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

DEMOSTRACIÓN .

Por ser la matriz A *inversible, se debe cumplir por definición que . . .*

$$A \cdot A^{-1} = I \qquad y \qquad A^{-1} \cdot A = I$$

sin embargo, $A \cdot I = A$ *y también* $A^{-1} \cdot I = A^{-1}$ *, por ser* I *la matriz identidad, de modo que las expresiones anteriores quedan como :*

$$(A \cdot I) \cdot A^{-1} = I \qquad y \qquad \left(A^{-1} \cdot I\right) \cdot A = I$$

Además, por ser la matriz B *inversible también, se cumple que* $I = B \cdot B^{-1}$ *y* $B^{-1} \cdot B = I$ *asi que substituyéndo estas expresiones resulta . . .*

$$\left[A \cdot \left(B \cdot B^{-1}\right)\right] \cdot A^{-1} = I \qquad y \qquad \left[A^{-1} \cdot \left(B^{-1} \cdot B\right)\right] \cdot A = I$$

por la propiedad asociativa del producto se deduce que . . .

$$(A \cdot B) \cdot \left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right) = I \qquad y \qquad \left(A^{-1} \cdot B^{-1}\right) \cdot (B \cdot A) = I$$

Se conluye asi que al multiplicar a la matriz $(A \cdot B)$ *por la matriz* $\left(B^{-1} \cdot A^{-1}\right)$ *por la izquieda o por la derecha, se obtiene la matriz identidad.*
Pero ésta es precisamente la propiedad que define a la matriz inversa, de modo que $B^{-1} \cdot A^{-1}$ *es la inversa de* $(A \cdot B)$.

Este resultado se puede generalizar al producto de 3 o más matrices inversibles y se expresa como sigue:

$$(A \cdot B \cdot C \cdot .... \cdot X \cdot Y)^{-1} = (Y)^{-1} \cdot (X)^{-1} \cdot .... \cdot (C)^{-1} \cdot (B)^{-1} \cdot (A)^{-1}$$

Ejemplo 18. Sean las matrices : $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & -10 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Entonces . . . $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 4 & -10 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 43 & 5 \\ 24 & -62 & -5 \\ -11 & 28 & 3 \end{pmatrix}$ y dadas sus inversas

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -10 \\ -4 & 1 & 8 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -46 & 11 & 95 \\ -17 & 4 & 35 \\ -10 & 3 & 22 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que . . .

$$B^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 & -10 \\ -4 & 1 & 8 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 & 11 & 95 \\ -17 & 4 & 35 \\ -10 & 3 & 22 \end{pmatrix} = (A\cdot B)^{-1}$$

tal como se establece en el teorema 2 .

El siguiente problema que debemos resolver ahora es: *Dada una matriz cuadrada, ¿cómo determinar su matriz inversa ?*

Para ello, consideremos las siguientes definiciones . . .

Para una matriz A cuadrada e inversible de tamaño $[n \times n]$ se definen :

I. *La potencia n-ésima de la matriz* A *o de su inversa es el producto de* n *factores*

- $A^n = A\cdot A\cdot A\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot A$
- $\left(A^{-1}\right)^n = A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot A^{-1}\cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot A^{-1}$

II. *La potencia cero de la matriz* A *es la matriz identidad del mismo tamaño.*

- $A^0 = I_{\mathbf{n}}$

Ley de los exponentes para la multiplicación matricial

- $A^n\cdot A^m = A^{(n+m)}$

<u>*TEOREMA*</u> 4.

Si A *es una matriz inversible entonces . . .*

* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

* A^n *es inversible y su inversa es* $\left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$

<u>*DEMOSTRACIÓN*</u> .

Por definición, si A *es inversible su inversa es* A^{-1} *y se cumple que :*

$$A\cdot A^{-1} = I \qquad y \qquad A^{-1}\cdot A = I \qquad (*)$$

Pero de éstas igualdades, también se puede concluir que la matriz inversa de A^{-1} *es* A*,de donde se deduce que la matriz* $(A)^{-1}$ <u>*también*</u> *es inversible*

Denotando a la inversa de A^{-1} *por* $\left(A^{-1}\right)^{-1}$ *se cumplen entonces las siguientes condiciones :*

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} \cdot A^{-1} = I \qquad y \qquad A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^{-1} = I \qquad (**)$$

Al comparar las expresiones (*) y (**) y recordar que la matriz inversa de una matriz dada es ***única*** *,* *sólo se puede concluir que* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$

Ahora, obsérvese la secuencia . . .

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$A \cdot I \cdot A^{-1} = I \qquad \textit{puesto que} \quad A \cdot I = A$$

$$A \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot A^{-1} = I \qquad \textit{puesto que} \quad A \cdot A^{-1} = I$$

$$(A \cdot A) \cdot I \cdot \left(A^{-1} \cdot A^{-1}\right) = I$$

$$A^2 \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot \left(A^{-1}\right)^2 = I$$

$$A^3 \cdot I \cdot \left(A^{-1}\right)^3 = I$$

$$A^3 \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot \left(A^{-1}\right)^3 = I$$

$$A^4 \cdot I \cdot \left(A^{-1}\right)^4 = I$$

etc. etc. . . . .

$$A^n \cdot \left(A^{-1}\right)^n = I$$

y por lo tanto, la inversa de A^n *es* $\left(A^{-1}\right)^n$

6.5 Matrices elementales . Cálculo de la matriz inversa .

DEFINICIÓN : *Una matriz es elemental si :*

- *es cuadrada*
- *se obtiene de la matriz identidad* $I_{\mathbf{n}}$ *, realizando una sola operación elemental*

Ejemplo 19. Las siguientes son matrices elementales:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$. Esta matriz se obtuvo de I_2 multiplicando el segundo renglón por -2 :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$. Esta matriz se obtuvo de I_3 sumado al primer renglón , el tercero multiplicado por 3

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$. Esta matriz se obtuvo de I_4 intercambiando los renglones 2° y 3°

Si E es una matriz elemental y A es una matriz de tamaño $[n \times m]$, entonces la multiplicación $E \cdot A$ *realiza la misma operación sobre* A *que la operación hecha sobre* I_n *para obtener* E .
Para ilustrar ésta afirmación, consideremos por ejemplo las matrices. . .

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz E se obtuvo de I_3 sumado al segundo renglón -4 veces el tercer renglón .
Esta es la misma operación que se realizará sobre A si se multiplica por E , comprobémoslo. . .

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 3 \\ -8 & -6 & -19 & -10 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

El resultado es una matriz que se puede obtener de A sumando al 2° renglón -4 veces el tercer renglón .

Si una matriz elemental E se obtiene de I_n mediante una sola operación elemental, entonces es posible obtener I_n mediante *la operación inversa aplicada a la matriz* E . Esto es, existe una matriz E^{-1} (*que se obtiene aplicándo a* I_n *una operación elemental*) tal que . . .

$$E^{-1} \cdot E = I_n \quad \text{y} \quad E \cdot E^{-1} = I_n$$

Por lo tanto, *toda matriz elemental* E *es inversible y su inversa* E_0 *también es una matriz elemental*

Ejemplo 20. Las inversas de las matrices elementales del ejemplo 19 se obtienen aplicándole a I_n la operación inversa mediante la cual fueron obtenidas de la matriz identidad y son :

E_1 se obtuvo *multiplicando* el segundo renglón de I_2 por -2 , entonces $(E_1)^{-1}$ se obtiene *dividiendo* el segundo renglón de I_2 por -2 .

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (E_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De ésta manera . . .

$$E_1 \cdot (E_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) \\ 0\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-2)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$(E_1)^{-1} \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-2) \\ 0\cdot 0 + \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot 0 & 0\cdot 0 + \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

- E_2 se obtuvo de I_3 *sumando al primer renglón 3 veces el tercer renglón*, entonces $(E_2)^{-1}$ se obtiene de I_3 *restandole al primer renglón 3 veces al tercer renglón* :

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y se puede comprobar que . . .

$$E_2 \cdot (E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$(E_2)^{-1} \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

E_3 se obtuvo *intercambiando* slos renglones segundo y tercero de I_4 por lo tanto, $(E_3)^{-1}$ se obtiene igual, *intercambiando* los renglones tercero y segundo de I_4 :

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (E_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y puede comprobarse fácilmente que . . .

$$E_2 \cdot (E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

$$E_2 \cdot (E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

Supongamos ahora que una matriz cuadrada A de tamaño $[n \times n]$ se obtiene aplicando sucesivamente k operaciones elementales a la matriz I_n es decir. . .

$$A = E_k \cdot E_{k-1} \cdot E_{k-2} \cdot .... E_2 \cdot E_1 \cdot (I_n)$$

Entonces, dado que cada matriz elemental es inversible, es posible *multiplicar por la inversa de cada una de ellas en el orden inverso* los dos miembros de la igualdad anterior , para obtener . . .

$$\left[(E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot ..... \cdot (E_k)^{-1} \right] \cdot A = \left[(E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot ..... \cdot (E_k)^{-1} \right] \cdot E_k \cdot E_{k-1} \cdot .... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot (I_n)$$

aplicando la propiedad conmutativa del producto al miembro izquierdo queda . . .

$$(E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot ..... \cdot (E_k)^{-1} \cdot A = \left[(E_1)^{-1} \cdot E_1 \right] \cdot \left[(E_2)^{-1} \cdot E_2 \right] \cdot .... \cdot \left[(E_k)^{-1} \cdot E_k \right] \cdot I_n$$

pero cada matriz elemental multiplicada por su inversa en el miembro izquierdo, es la identidad :

$$(E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot ..... \cdot (E_k)^{-1} \cdot A = (I_n) \cdot (I_n) \cdot .... \cdot (I_n) \cdot I_n$$

$$= I_n$$

Se concluye asi que la matriz A será inversible y su inversa está dada por . . .

$$A^{-1} = (E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot (E_3)^{-1} \cdot ..... \cdot (E_k)^{-1} \cdot I_n \qquad (6.6)$$

CONCLUSIÓN :

La inversa A^{-1} de una matriz A cuadrada $[n \times n]$ e inversible, es el producto de operaciones elementales inversas (aplicadas en el orden inverso) mediante las que se obtuvo la matriz A a partir de I_n .

De ésta manera, hallar la inversa de una matriz cuadrada se reduce a *encontrar una sucesión de operaciones elementales en los renglones* $(E_1)^{-1} \cdot (E_2)^{-1} \cdot (E_3)^{-1} \cdot ..... \cdot (E_k)^{-1}$ *que transformen la matriz* A *a la identidad* I_n .

Tal sucesión aplicada a I_n *será la inversa buscada* A^{-1} .

Ejemplo 21. Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Solución :

Ya que se van a hacer *las mismas operaciones elementales sobre* A *que sobre* I_3 , escribamos la matriz aumentada $[\,A : I_3\,]$ para realizar tales operaciones simultáneamente en ambas matrices.

$$[\,A : I_3\,] = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 & . & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación realizemos operaciones elementales en los renglones para transformar a la matriz A en la matriz identidad I_3 .

En el lado izquierdo de ésta matriz aumentada se obtendrá automáticamente la matriz inversa A^{-1}.

Primero intercambiemos el primer renglón con el segundo . . .

$$R_1 \longleftrightarrow R_2 : \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 & . & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con el fin de transformar en ceros los elementos debajo del 1 en la primera columna, sumemos ahora 2 veces el actual primer renglón al segundo :

$$R_2 \longrightarrow R_2 + 2{\cdot}R_1 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & . & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intercambiando ahora el 2º renglon con el 3º ; pero multiplicando antes éste último por -1 se obtiene la matriz :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & . & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 9 & . & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Con el fin de transformar en ceros los elementos debajo del 1 en la segunda columna, sumemos -5 veces el 2º renglón al 3º .

$$R_3 \longrightarrow R_3 - 5{\cdot}R_2 : \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & . & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 9 & . & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & . & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & . & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A continuación procediendo de izquierda a derecha, formemos ceros encima de los 1´s de la diagonal pricipal de A . (multiplicando antes al tercer renglón por -1)

$$\begin{aligned} R_2 &\longrightarrow R_2 - 2 \cdot R_3 \ : \\ R_1 &\longrightarrow R_1 - 2 \cdot R_3 \ : \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & . & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & . & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & . & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & . & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & . & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & . & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

y finalmente . . .

$$R_1 \longrightarrow R_1 - 4 \cdot R_2 \ : \ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & . & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & . & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & . & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & -6 & -11 & -26 \\ 0 & 1 & 0 & . & 2 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & . & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

De ésta manera, en el lado izquierdo se ha obtenido la matriz identidad I_3 y en el lado derecho ha quedado la matriz inversa buscada :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -11 & -26 \\ 2 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que en efecto . . .

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -11 & -26 \\ 2 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & -11 & -26 \\ 2 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con frecuencia no se sabe de antemano si una matriz cuadrada es inversible o es *singular* ; pero mediante el procedimiento ilustrado en el ejemplo anterior, cuando una matriz no tiene inversa, en alguna parte del cálculo ***aparecerá un renglón de ceros en el lado izquierdo de la matriz aumentada*** . Esto significará que tal matriz no tiene inversa porque no se puede obtener de I_n por medio de operaciones elementales .

Ejemplo 22. Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

<u>*Solución :*</u>

Escribamos la matriz aumentada $[\,A : I_4\,]$ y transformemos el lado izquierdo en la matriz identidad mediante operaciones elementales en los renglones.

$$[\,A : I_4\,] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el lado izquierdo de ésta matriz aumentada se obtendrá automáticamente la matriz inversa A^{-1}.

$$\begin{matrix} R_3 \longrightarrow R_3 + 2\cdot R_1 : \\ R_4 \longrightarrow R_4 - 3\cdot R_1 : \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 & 1 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 10 & . & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & -14 & . & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \longrightarrow 3\cdot R_3 - 8\cdot R_2 : \\ R_4 \longrightarrow 3\cdot R_4 + 7\cdot R_2 : \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 & 1 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 10 & . & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & -14 & . & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 & 1 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 6 & . & 6 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & -21 & . & -9 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \longrightarrow 8\cdot R_4 + 28\cdot R_3 : \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 & 1 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 6 & . & 6 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & -21 & . & -9 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 & 1 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 6 & . & 6 & -8 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 96 & -168 & 84 & 24 \end{pmatrix}$$

Se obtiene entonces una fila de ceros en el lado izquierdo, lo cual indica que es imposible obtener la matriz A^{-1} a partir de operaciones elementales aplicadas la matriz identidad . En otras palabras, la matriz A no tiene inversa (es singular) .

EJERCICIO 6.2

1. Demostrar que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ está dada por $A^{-1} = \frac{1}{x \cdot w - y \cdot z} \cdot \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$

2. Usando la fórmula del problema 1 anterior, hallar la matriz inversa de :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

y verificar que . . . $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ $\quad (A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$

3. Sea A una matriz inversible cuya inversa es $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Encontrar entonces la matriz A .

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Demostrar que $(A - I)^2 = A^2 - 2 \cdot A + I$ y que $(A + I)^2 = A^2 + 2 \cdot A + I$.

6. Demostrar que una matriz cuadrada que contiene un renglón o una columna de ceros, no tiene inversa

7. De las siguientes matrices , ¿cuáles son elementales ?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. Realizar la operación elemental sobre los renglones que transforme a la matriz dada en la matriz identidad

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Sean las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

Encontrar las matices elementales E_1 , E_2 , E_3 y E_4 tales que :

$$E_1 \cdot A = B \quad ; \quad E_2 \cdot B = A \quad ; \quad E_3 \cdot A = C \quad ; \quad E_4 \cdot C = A$$

¿ Es posible hallar una matriz elemental E tal que $E \cdot B = C$?

10. Mediante operaciones elementales en los renglones, hallar la inversa de cada una de las siguientes matrices :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ n) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ o) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ p) $\begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Respuestas. Ejercicio 6.2

1. Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, entonces . . . $A \cdot A^{-1} = I_2$ es decir . . .

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ó} \qquad \begin{pmatrix} x \cdot a + y \cdot b & x \cdot c + y \cdot d \\ z \cdot a + w \cdot b & z \cdot c + w \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

igualando los elementos correspondientes de éstas matrices, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x \cdot a + y \cdot b = 1$$
$$x \cdot c + y \cdot d = 0$$
$$z \cdot a + w \cdot b = 0$$
$$z \cdot c + w \cdot d = 1$$

del cual se obtiene la solución:

$$a = \frac{w}{w \cdot x - z \cdot y} \quad ; \quad b = \frac{-z}{w \cdot x - z \cdot y} \quad ; \quad c = \frac{-y}{w \cdot x - z \cdot y} \quad ; \quad d = \frac{x}{w \cdot x - z \cdot y}$$

asi que la matriz inversa de A es: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{w}{w \cdot x - z \cdot y} & \frac{-y}{w \cdot x - y \cdot z} \\ \frac{-z}{w \cdot x - y \cdot z} & \frac{x}{w \cdot x - y \cdot z} \end{pmatrix} = \frac{1}{w \cdot x - y \cdot z} \cdot \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix}$

la cual existe siempre que $(w \cdot x - y \cdot z) \neq 0$.

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

por lo tanto . . .

$$(A \cdot B)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

y por otra parte . . .

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

lo cual comprueba que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Además . . .

$$(A\cdot B\cdot C)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & -31 \\ 30 & -49 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 49 & -31 \\ 30 & -19 \end{pmatrix}$$

y por otra parte . . .

$$C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & -31 \\ 30 & -19 \end{pmatrix}$$

lo cual comprueba que $(A\cdot B\cdot C)^{-1} = C^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A^{-1}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{4}{3} \\ 2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$

5. $(A-I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

y por otra parte :

$$A^2 - 2\cdot A + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^2 - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

La comprobación de $(A+I)^2 = A^2 + 2\cdot A + I$ es muy similar.

7. a) elemental b) elemental c) no elemental d) elemental

e) no elemental f) elemental g) elemental

8. a) $R_2 \longrightarrow R_2 + 5\cdot R_1 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ b) $R_1 \longleftrightarrow R_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $R_2 \longrightarrow 8\cdot R_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $R_2 \longrightarrow R_2 - 3\cdot R_3 : I_3 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Nótese que la matriz B se obtiene de la matriz A intercambiando los renglones 1º y 3º . Por eso, ésta es la misma operación que se debe hacer en la matriz unitaria :

$$E_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = B$$

$$E_2 \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A$$

Nótese que la matriz C se obtiene de A sumándo a su 3er renglón el doble del primer renglón . Por eso ésta es la misma operación que se hace en la matriz unitaria.

$$E_3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} = C$$

Nótese que la matriz C se obtiene de A restándole a su 3er renglón el doble del primer renglón . Por eso ésta es la misma operación que se hace en la matriz unitaria.

$$E_4 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = A$$

Para obtener la matriz a partir de la matriz multiplicándola por matrices elementales, es necesario:
1° intercambiar los renglones primero y tercero .
2° agregar al tercer rnglón el doble del segundo
en ese orden, es decir . . .

$$E_3 \cdot E_1 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} = C$$

sin embargo $E_3 \cdot E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ no es elemental pues implica <u>dos</u> operaciones elementales entre filas.

10. a) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ c) *matriz singular*

d) $\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix} 15 & -11 & -12 \\ -10 & 10 & 10 \\ -5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ e) *matriz singular* f) $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ h) $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ i) $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 17 & -5 & 6 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

j) $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ k) $\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ l) *matriz singular*

m) $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ n) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ o) $\frac{1}{a^4}\cdot\begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 & 0 \\ -a^2 & a^3 & 0 & 0 \\ a & -a^2 & a^3 & 0 \\ -1 & a & -a^2 & a^3 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.6 *Aplicación de las matrices a los sistemas de ecuaciones lineales* .

La multiplicación de matrices puede usarse para representar un sistema de ecuaciones lineales .
Consideremos un sistema de n ecuaciones con m incógnitas . . .

$$\begin{array}{l}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1m}\cdot x_m = b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2m}\cdot x_m = b_2 \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3m}\cdot x_m = b_3 \\
\qquad \ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\
\qquad \ldots\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + a_{n3}\cdot x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nm}\cdot x_m = b_n
\end{array}$$

Estas n ecuaciones *se pueden interpretar como la igualdad entre dos matrices de tamaño* $[\,n\times 1\,]$ *con* n *renglones y una sola columna :*

$$\begin{pmatrix}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + . \quad . \quad . \quad a_{1m}\cdot x_m \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + . \quad . \quad . \quad a_{2m}\cdot x_m \\
. \qquad\qquad . \quad . \qquad . \\
. \qquad\qquad . \quad . \qquad . \\
a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + . \quad . \quad . \quad a_{nm}\cdot x_m
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nótese ahora que la matriz $[\,n\times 1\,]$ de la izquierda se puede reemplazar por el producto de dos matrices de tamaños $[\,n\times m\,]$ y $[\,m\times 1\,]$ y que son precisamente la matriz de los coeficientes del sistema y la matriz de las incógnitas . . .

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2m} \\
. & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . \\
a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nm}
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

O en forma simbólica . . .

$$A\cdot X = B \qquad (\,6.\,7\,)$$

donde A representa la matriz de coeficientes del sistema lineal , X representa la matriz de las incógnitas y B es la matriz de los términos constantes .

Con ésta representación matricial se pueden usar las propiedades de las matrices para establecer nuevos métodos de solución para un sistema de ecuaciones lineales y también para demostrar algunos de sus más importantes resultados . Por ejemplo . . .

Ejemplo 23. Consideremos los sistemas lineales de ecuaciones lineales representados en forma matricial .

I) $A \cdot X = 0$ (homogéneo)

II) $A \cdot X = B$ (no homogéneo)

Demostrar que :

a) Si el sistema II) tiene dos soluciones diferentes X_1 , X_2 entonces $\left(X_1 - X_2\right)$ es otra solución del sistema homogéneo.

b) Si X_2 es una solución del sistema II) y X_1 es una solución del sistema I) entonces $\left(X_1 + X_2\right)$ es también una solución del sistema no homogéneo

DEMOSTRACIÓN :

a) Si X_1 *y* X_2 *son soluciones del sistema no homogéneo entonces se cumplen las siguientes igualdades matriciales. . .*

$$A \cdot X_1 = B \qquad y \qquad A \cdot X_2 = B$$

Restando miembro a miembro estas igualdades y usando la propiedad distributiva de las matrices se obtiene . . .

$$A \cdot X_1 - A \cdot X_2 = B - B$$
$$A \cdot \left(X_1 - X_2\right) = 0$$

Es decir se satisface el sistema homogéneo y $\left(X_1 - X_2\right)$ *es en efecto una de sus soluciónes.*

b) *Si* X_2 *es una solución del sistema no homogéneo entonces se cumple la igualdad matricial :*

$$A \cdot X_2 = B$$

Si X_1 *es una solución del sistema homogéneo entonces se cumple la igualdad matricial :*

$$A \cdot X_1 = 0$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades, usando la propiedad distributiva de las matrices y una de las propiedades de la matriz cero resulta . . .

$$A \cdot X_2 + A \cdot X_1 = B + 0$$
$$A \cdot \left(X_2 + X_1\right) = B$$

en efecto $\left(X_2 + X_1\right)$ *es una solución del sistema II) .*

Ejemplo 24. Demostrar que si un sistema de ecuaciones no homogéneo tiene más de una solución, entonces tiene una infinidad de soluciones .

DEMOSTRACIÓN :

Si X_1 *y* X_2 *son soluciones diferentes del sistema no homogéneo* $A\cdot X = B$ *entonces se cumplen las siguientes igualdades matriciales. . .*

$$A\cdot X_1 = B \qquad y \qquad A\cdot X_2 = B$$

Definamos ahora la matriz $X_0 = \left(X_1 - X_2\right)$ *que es distinta de cero puesto que las dos soluciones* X_1 *y* X_2 *son diferentes . Sea* k *cualquier número real, entonces :*

$$\begin{aligned} A\cdot\left(X_1 + k\cdot X_0\right) &= A\cdot X_1 + A\cdot\left(k\cdot X_0\right) \\ &= B + k\cdot\left(A\cdot X_0\right) \\ &= B + k\cdot A\cdot\left(X_1 - X_2\right) \end{aligned}$$

pero $A\cdot X_1 = B$ *y* $A\cdot X_2 = B$*, asi que queda*

$$\begin{aligned} A\cdot\left(X_1 + k\cdot X_0\right) &= B + k\cdot(B - B) \\ &= B \end{aligned}$$

de manera que $\left(X_1 + k\cdot X_0\right)$ *es también una solución del sistema:* $A\cdot X = B$

Dado que K *es cualquier constante , existen tantas soluciones como valores posibles tenga* k *y por lo tanto el teorema queda demostrado .*

Se deduce de éste resultado que si un sistema de ecuaciones lineales es soluble, entonces tiene :

- ***exactamente una solución única .***
- ***una infinidad de soluciones.***

Notemos la facilidad con la que se han demostrado estos importantes resultados para los sistemas de ecuaciones lineales usando el enfoque matricial .

TEOREMA 5.

Si A *es una matriz inversible* $[\,n\times n\,]$ *entonces para cada matriz* B *de tamaño* $[\,n\times 1\,]$ *, el sistema de ecuaciones lineales :*

$$* \quad A\cdot X = B$$

tiene exactamente una solución dada por :

$$* \quad X = A^{-1}\cdot B$$

DEMOSTRACIÓN :

Supongamos que $X = A^{-1} \cdot B$ *y substituyamos en el sistema de ecuaciones lineales* $A \cdot X = B$ *:*

$$A \cdot \left(A^{-1} \cdot B\right) = B$$
$$\left(A \cdot A^{-1}\right) \cdot B = B$$
$$I_{\mathbf{n}} \cdot B = B$$

El sistema se satisface y por lo tanto $A^{-1} \cdot B$ *es en efecto una solución del sistema .*

Supongamos ahora que X_1 *es otra solución del sistema pero distinta a* X *, entonces . . .*

$$A \cdot X_1 = B$$

Multiplicando ambos miembros por la inversa de A *queda . . .*

$$A^{-1} \cdot \left(A \cdot X_1\right) = A^{-1} \cdot B$$
$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X_1 = A^{-1} \cdot B$$

pero $A^{-1} \cdot A = I_{\mathbf{n}}$ *y* $I_{\mathbf{n}} \cdot X_1 = X_1$ *de modo que resulta . . .* $X_1 = A^{-1} \cdot B$

Se concluye por lo tanto que $X_1 = X$ *es decir, la solución es única .*

Ejemplo 25. Hallar la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales por medio de su matriz inversa .

$$x_1 + 2 \cdot x_2 = 1$$
$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 6$$
$$-x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 5$$

Solución : Usando la matriz de coeficientes , escribamos el sistema en la forma matricial $A \cdot X = B$ es decir . . .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

la solución es entonces . . . $X = A^{-1} \cdot B$ es decir . . .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calculando la matriz inversa se obtiene :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -8 & 6 \\ -11 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los valores para las variables son : $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

Debemos notar que ésta técnica de solución para un sisema de ecuaciones lineales *se aplica solamente si la matriz de coeficientes es cuadrada, debido a que una matriz no cuadrada no tiene inversa* y es particulamente útil cuando es necesario resolver *una serie de sistemas de ecuaciones* en los que solo cambian los términos constantes . . .

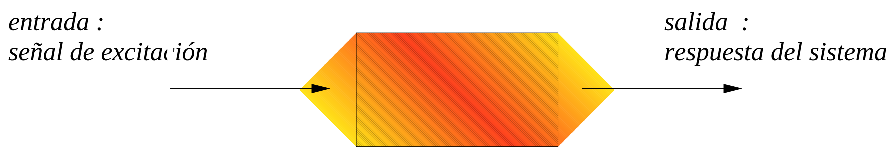
$$A\cdot X = B_1 \ , \quad A\cdot X = B_2 \ , \quad A\cdot X = B_3 \ , \ldots , \ A\cdot X = B_n \ .$$

dado que las soluciones se obtienen fácilmente multiplicando todas las diferentes matrices B de términos constantes por *la misma matriz inversa* : A^{-1} :

$$X_1 = A^{-1}\cdot B_1 \ , \quad X_2 = A^{-1}\cdot B_2 \ , \ X_3 = A^{-1}\cdot B_3 \ , \ldots , \ X_n = A^{-1}\cdot B_n \ .$$

Este es un procedimiento mucho más eficaz que el de aplicar por separado una reducción de *Gauss-Jordan* a cada uno de los sistemas lineales .

Esta situación surge muy a menudo en aplicaciones de la Ciencia o de la Ingeniería , en las cuales se considera que ciertos sistemas físicos (*circuitos* , *mecanismos* etc.) responden como una *caja negra* es decir un sistema del cual no es importante conocer los detalles internos de funcionamiento sino únicamente cuáles son sus respuestas correspondientes a cierto conjunto de señales de entrada .



Caja Negra
(Un Sistema Físico)

Si el sistema físico que se considera es *lineal* , dará *una sola respuesta para cada señal de entrada , que además será proporcional a la intensidad* de tal señal .

Por ejemplo si se trata de un circuito eléctrico al cual se excita con un voltaje de entrada incial , la salida podría ser la corriente eléctica que el circuito genera en los alambres terminales de salida . O bién , si la entrada es una matríz X de tamaño [$n \times 1$] de voltajes , la respuesta del circuito será otra matriz B de tamaño [$n \times 1$] respuestas de salida y ambas matrices estarán relacionadas entre si por medio de una ecuación matricial de la forma :

$$A \cdot X = B$$

en la cual A es una matriz $[\, n \times n \,]$ cuyos elementos son parámetros físicos, los cuales están *determinados por el funcionamiento interno del sistema* considerado .

Ahora bién, si se tiene una sucesión de matrices de salida B_1 , B_2 , B_3 , . . . , B_n diferentes y se desea conocer las entradas correspondientes X_1 , X_2 , X_3 , . . . , X_n que produjeron tales salidas, se debe resolver entonces los n sistema lineales : $X_1 = A^{-1} \cdot B_1$, $X_2 = A^{-1} \cdot B_2$, . . . , $X_n = A^{-1} \cdot B_n$ cada uno de ellos con la misma matriz A de coeficientes . El método de la matiz inversa resulta ideal en estos casos .

Ejemplo 26. Hallar la solución del sistema de ecuaciones lineales :

$$7 \cdot x - 5 \cdot y + z + 5 \cdot w = b_1$$
$$4 \cdot x - 3 \cdot y + z + 3 \cdot w = b_2$$
$$-x + y - w = 5 = b_3$$
$$-7 \cdot x + 6 \cdot y - z - 7 \cdot w = b_4$$

cuando . . .

a) $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 2$, $b_4 = 4$

b) $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $b_4 = 1$

c) $b_1 = -2$, $b_2 = -1$, $b_3 = 0$, $b_4 = 1$

Solución : Usando la matriz A de coeficientes y su inversa, la forma matricial del sistema es $A \cdot X = B_j$ y sus soluciones son :

$$X_1 = A^{-1} \cdot B_1 \ , \quad X_2 = A^{-1} \cdot B_2 \ , \ X_3 = A^{-1} \cdot B_3$$

siendo las matrices correspondientes . . .

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -7 & 6 & -1 & -7 \end{pmatrix} , \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad B_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $X_1 = A^{-1} \cdot B_1$ implica que . . .

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1)\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + (2)\cdot 2 + (0)\cdot 4 \\ (1)\cdot 1 + (-2)\cdot 3 + (6)\cdot 2 + (-1)\cdot 4 \\ (-1)\cdot 1 + (2)\cdot 3 + (1)\cdot 2 + (0)\cdot 4 \\ (0)\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + (3)\cdot 2 + (-1)\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es decir $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $z_1 = 7$, $w_1 = -1$

$X_2 = A^{-1} \cdot B_2$ implica que . . .

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (1)\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + (2)\cdot 2 + (0)\cdot 1 \\ (1)\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + (6)\cdot 2 + (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 0 + (2)\cdot 1 + (1)\cdot 2 + (0)\cdot 1 \\ (0)\cdot 0 + (-1)\cdot 1 + (3)\cdot 2 + (-1)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

es decir $x_2 = 3$, $y_2 = 9$, $z_2 = 4$, $w_2 = 4$

y $X_3 = A^{-1} \cdot B_3$ implica que . . .

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) + (2)\cdot 0 + (0)\cdot 1 \\ 1\cdot(-2) + (-2)\cdot(-1) + (6)\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \\ -1\cdot(-2) + (2)\cdot(-1) + (1)\cdot 0 + (0)\cdot 1 \\ 0\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) + (3)\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir $x_3 = -1$, $y_3 = -1$, $z_3 = 0$, $w_3 = 0$

Prácticamente hemos resuelto tres sistemas diferentes de ecuaciones simultáneas al mismo tiempo.

Si se hubiese usado el método de Gauss-Jordan , se tendría que calcular la matriz escalonada reducida para cada uno de los tres sistemas de ecuaciones anteriores, lo cual es proceso más laborioso.

6.7 *La matriz transpuesta* .

La transpuesta de una matriz A de tamaño $[\,m \times n\,]$ se representa por A^T y es una matriz que tiene por columnas los renglones de A , es decir A^T es una matriz de tamaño $[\,n \times m\,]$:

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & a_{m2} \\ . & . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 27. Las matrices transpuestas de . . .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;,\quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

son :

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \;,\quad B^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;,\quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz transpuesta :

I) $\left(A^T\right)^T = A$ II) $(A+B)^T = A^T + B^T$

III) $(k\cdot A)^T = k\cdot A^T \;;\; k = const$ IV) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

DEMOSTRACION .

I) $\left(A^T\right)^T = A$

Las *columnas* de $\left(A^T\right)^T$ son los renglones de A^T y éstos a su vez son las *columnas* de A .

Los *renglones* de $\left(A^T\right)^T$ son las columnas de A^T y éstas a su vez son los *renglones* de A .

Asi que $\left(A^T\right)^T$ y A son del mismo tamaño y tienen los mismos elementos .

IV) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Si A es de la forma $[\, r \times m \,]$ entonces para que exista el producto $A \cdot B$, la matriz B debe ser de la forma $[\, m \times s \,]$. y se sigue que $A \cdot B$ es de la forma $[\, r \times s \,]$
Al transponer éstas matrices se obtiene :

A^T es de la forma $[\, m \times r \,]$

B^T es de la forma $[\, s \times m \,]$

$(A \cdot B)^T$ es de la forma $[\, s \times r \,]$.

Si $s \neq r$ el único modo de multiplicar A^T y B^T es $\left(B^T \cdot A^T\right)$, obteniéndose una matriz de tamaño $[\, s \times r \,]$. Asi que $(A \cdot B)^T$ y $\left(B^T \cdot A^T\right)$ son del mismo tamaño.

Por otra parte, el elemento ij del producto $A \cdot B$ se obtiene al multiplicar el *i-ésimo renglón* de A :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & . & . & . & a_{im} \end{pmatrix}$$

por la *j-ésima columna* de B :
$$\begin{pmatrix} b_{1 \cdot j} \\ b_{2j} \\ . \\ . \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

obteniéndose :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1 \cdot j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots\dots\dots + a_{im} \cdot b_{mj}$$

Al trasponer el producto $A \cdot B$, este elemento se encontrará ahora en la *i-ésima columna y el j-ésimo renglón de la matriz transpuesta* A^T .

Por otra parte, la columna i de A^T es renglón i de A y el renglón j de B^T es la columna j de B . Por lo tanto el producto del renglón j de B^T y la columna i de A^T generan el mismo elemento ji que está en *el renglón* j *y la columna* i *de la matriz transpuesta* $(A \cdot B)^T$.

Se concluye que las matrices $(A \cdot B)^T$ y $\left(B^T \cdot A^T\right)$ tienen los mismos elementos y son del mismo tamaño, por lo tanto son iguales .

Ejemplo 28. Consideremos las matrices . . .

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

comprobar que : i) $(B+C)^T = B^T + C^T$ ii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Solución : Las matrices transpuestas son . . .

$$A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

por lo tanto . . .

$$B^T + C^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

y

$$(B+C)^T = \left[\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Además . . .

$$(A \cdot B)^T = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -9 \\ 10 & 3 & 19 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \\ -9 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

y

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ -3 & 3 & 3 \\ -9 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

y se cumplen las dos propiedades pedidas de la matriz transpuesta

EJERCICIO 6.3

I. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando la matriz inversa .

1 $x_1 + 2 \cdot x_2 = 8$
$2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = -5$

2. $3 \cdot x_1 - 6 \cdot x_2 = -12$
$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = 19$

3. $x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0$
$x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 7$
$x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 3$

4. $2 \cdot x + y + z = -15$
$3 \cdot x + 2 \cdot y + z = -23$
$y + z = -5$

5. $3 \cdot x + y + 7 \cdot z + 9 \cdot w = 4$
$x + y + 4 \cdot z + 4 \cdot w = 0$
$-x - 2 \cdot z - 3 \cdot w = -3$
$-2 \cdot x - y - 4 \cdot z - 6 \cdot w = -3$

6. $x - 2 \cdot y - 5 \cdot z + w = 15$
$2 \cdot x + y + 2 \cdot w = -5$
$-x - 2 \cdot y + 2 \cdot z - 3 \cdot w = -5$
$3 \cdot x + 2 \cdot y - 3 \cdot z + 5 \cdot w = 5$

7. Una caja contiene monedas de \$ 5 , \$ 1 y \$ 10 . Si en total son 13 monedas con valor de \$ 86 ¿ cuántas monedas de cada tipo hay en la caja ?

8. Resolver el sistema de ecuaciones lineales :

$$x - 4 \cdot y - 6 \cdot z = b_1$$
$$-7 \cdot x + 10 \cdot y + 17 \cdot z = b_2$$
$$-2 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z = b_3$$

cuando :

a) $b_1 = 19$, $b_2 = -29$, $b_3 = -9$.
b) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$
c) $b_1 = -3$, $b_2 = 7$, $b_3 = 17$
d) $b_1 = -12$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$

¿ Qué condiciones deben satisfacer los términos constantes para que los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sean consistentes ?

9. $x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 = b_1$
$3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = b_2$
$-2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 - 6 \cdot x_3 = b_3$

10. $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 + x_4 = b_1$
$x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 - 2 \cdot x_4 = b_2$
$-x_1 + 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 = b_3$
$3 \cdot x_1 + x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = b_4$

Considere las matrices : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

11. Demuestre que $A \cdot X = X$ se puede escribir como $\left(A - I_3\right) \cdot X = 0$ y resuelva para la matiz X .

12. Resuelva $A \cdot X = 3 \cdot X$

13. Sin usar lápiz y papel determine si las siguientes matrices son inversibles o no .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz cuadrada. Demuestre que . . .

14. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + A^4$ si $A^5 = 0$

15. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + ... + A^n$ si $A^{n+1} = 0$

<u>*Respuestas*</u> *. (Ejercicio 6.3)*

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ -23 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 20 & -10 & -15 \\ 4 & 18 & -20 & -20 \\ -4 & -8 & 10 & 10 \\ -7 & -24 & 20 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

7. Sean x = Número de monedas de \$ 1 , y = Número de monedas de \$ 5, z = Número de monedas de \$10 entonces, dado que hay 13 monedas en total . . .

$$x + y + z = 13 \text{ , ó bién } \quad x + y = 13 - z \qquad \text{(I)}$$

y dado que la cantidad de dinero es \$ 86, entonces . . .

$$1 \cdot x + 5 \cdot y + 10 \cdot z = 86 \quad \text{, ó bién } \quad x + 5 \cdot y = 86 - 10 \cdot z \qquad \text{(II)}$$

Escrito en forma matricial, el sistema de ecuaciones (I) y (II) es . . . $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 - z \\ 86 - 10 \cdot z \end{pmatrix}$

y resolviéndolo por la matriz inversa queda :

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 - z \\ 86 - 10 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-21}{4} + \frac{5}{4} \cdot z \\ \frac{73}{4} - \frac{9}{4} \cdot z \end{pmatrix}$$

sin embargo, x , y , z han de ser enteros positivos , y por lo tanto se tienen las condiciones:

$\left(\frac{-21}{4} + \frac{5}{4} \cdot z \right) > 0$ que implica $\frac{21}{5} < z$ es decir $5 \le z$

$\left(\frac{73}{4} - \frac{9}{4} \cdot z \right) > 0$ que implica $z < \frac{73}{9}$ es decir $z \le 8$

Asi que z debe ser un número entero comprendido entre 5 y 8 . Probemos . . .

Si $z = 5$, entonces . . . $x = \frac{-21}{4} + \frac{5}{4} \cdot (5) = 1$; $y = \frac{73}{4} - \frac{9}{4} \cdot (5) = 7$

Se puede comprobar fácilmente que con las otros posibles valores para z : 6 , 7 y 8 , no se obtienen soluciones enteras para x e y .

Asi que $x = 1$, $y = 7$ y $z = 5$ es la solución del problema es decir , en la caja hay una moneda de \$ 1 , 7 monedas de \$ 5 y 5 monedas de \$ 10 , para un total de \$ 86 .

8. Escribiendo el sistema en la forma matricial $A \cdot X = B$: $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 \\ -7 & 10 & 17 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Calculando la matiz inversa de los coeficientes del sistema : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 \\ -7 & 10 & 17 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & 25 \\ -1 & 5 & -18 \end{pmatrix}$

la solución general es : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & 25 \\ -1 & 5 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Asi que . . .

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & 25 \\ -1 & 5 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ -29 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & 25 \\ -1 & 5 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -119 \\ 373 \\ -268 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & 25 \\ -1 & 5 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ -29 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & 25 \\ -1 & 5 & -18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. La matriz de coeficientes del sistema $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 9 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ es singular, por lo tanto, el sistema no tiene solución, excepto la trivial si $X = 0$ y entonces todas las constantes también valen cero.

10. Infinidad de soluciones.

11. La matriz $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es singular.

12. La matriz $A - 3 \cdot I_3$ tiene la inversa $\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{6} \\ 1 & \frac{-2}{3} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$

14. $I = I + (A - A) + \left(A^2 - A^2\right) + \left(A^3 - A^3\right) + \left(A^4 - A^4\right)$

$= \left(I + A + A^2 + A^3 + A^4\right) - A \cdot \left(I + A + A^2 + A^3 + A^4\right)$ siempre que $A^5 = 0$

$= (I - A) \cdot \left(I + A + A^2 + A^3 + A^4\right)$

y comparando con : $(I - A) \cdot (I - A)^{-1} = I$ se sigue que : $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + A^4$

El ejercicio 15 se demuestra en forma muy parecida .

Capítulo VII

Determinantes

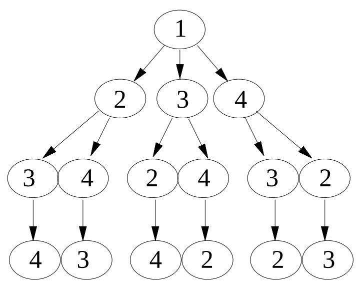
7.1 ***Permutaciones*** .

Se llama *permutación* a un arreglo ordenado de números enteros, colocados uno tras otro a lo largo de un renglón o de una columna .

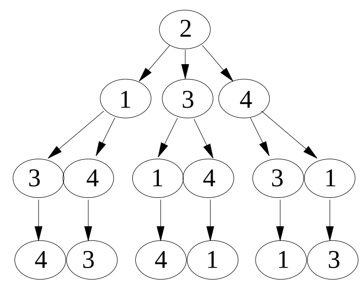
Por ejemplo si consideraramos los números enteros { 1 , 2 , 3 , 4 }, entonces las posibles permutaciones o maneras de ordenar éste conjunto son 24 , como se muestra en el siguiente esquema, dado que existen . . .

- *cuatro* posibilidades (1 , 2 , 3 ó 4) para elegir el primer número de cualquiera de éstas permutaciones
- *tres* posibilidades para el número que va en segundo lugar
- *dos* posibilidades para el número que va en tercer lugar y
- *una* posibilidad para el último numero, el total de posibilidades es :

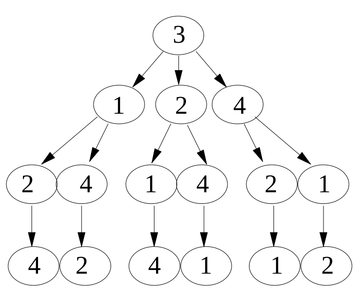
$$(4) \times (3) \times (2) \times (1) = 24 = (4)!$$



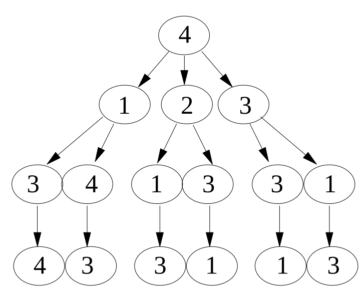
1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	4	4
3	4	2	4	3	2
4	3	4	2	2	3



2	2	2	2	2	2
1	1	3	3	4	4
3	4	1	4	3	1
4	3	4	1	1	3



3	3	3	3	3	3
1	1	2	2	4	4
2	4	1	4	2	1
4	2	4	1	1	2



4	4	4	4	4	4
1	1	2	2	3	3
3	4	1	3	2	1
4	3	3	1	1	2

De igual manera, el total de permutaciones para un conjunto de 5 números enteros es :

$$(5)\times(4)\times(3)\times(2)\times(1) = 120 = (5)!$$

Se puede demostrar por inducción , que el total de permutaciones posibles para un conjunto de n objetos es el factorial $(n)!$ de tal número.

Se dice también que en una permutación hay una *inversión* cuando *un entero mayor precede a un entero menor* y *una permutación es par o impar* si el número de inversiones en ella es respectivamente par o impar . Para determinar ésto simplemente se cuentan las inversiones de cada elemento en la permutación , por ejemplo en . . .

$(4\ \ 2\ \ 1\ \ 3)$ el 4 tiene *tres* inversiones porque $4>3$, $4>2$, $4>1$
el 2 tiene *una* inversión porque $2>1$
el 1 tiene *cero* inversiones porque a la derecha no hay enteros menores que él .
total de inversiones: $(3+1+0) = 4$, por lo tanto, ésta permutación es *par* .

$(3\ \ 4\ \ 2\ \ 1)$ el 3 tiene *dos* inversiones porque $3>2$, $3>1$
el 4 tiene *dos* inversiónes porque $4>2$, $4>1$
el 2 tiene *una* inversión porque $2>1$
total de inversiones: $(2+2+1) = 5$, por lo tanto, ésta permutación es *impar* .

7.2 Determinantes

Definición :

Toda matriz *cuadrada* A tiene asociado *un número* denotado por $|A|$ que se llama *determinante* el cual se calcula como :

$$|A| = \pm \sum_{k_j} \left[(a_{1\cdot k_1})\cdot(a_{2\cdot k_2})\cdot(a_{3\cdot k_3})\cdot ....\cdot(a_{n\cdot k_n}) \right]$$

donde el simbolo $\sum_{.}$. significa que se deben sumar estos productos sobre todas las permutaciones posibles del conjunto $\{ k_1\ ,\ k_2\ ,\ k_3\ ,\ .\ .\ .\ .\ ,\ k_n \}$ los cuales representan el número de columnas de la matriz A , es decir cada uno de los productos

$$(a_{1\cdot k_1})\cdot(a_{2\cdot k_2})\cdot(a_{3\cdot k_3})\cdot ....\cdot(a_{n\cdot k_n})$$

contiene *un solo elemento de cada columna* de la matriz A .

Se selecciona el signo $+$ ó el signo $-$ si la permutación es par ó impar respectivamente .

Observemos la suma está formada por términos que son el producto de las componentes a_{ij} de la matriz A ; pero que cada uno de ellos tiene un solo elemento de cada columna y de cada renglón es decir, una vez que se escoge una factor a_{ij} para el producto, ya no se puede escoger otro componente que esté en el renglón i ó en la columna j .

De acuerdo con ésta definición, en el determinante de una matriz $[2 \times 2]$, dado que sólo hay dos columnas , las posibles permutaciones de los números 1 y 2 son :

$(1 \quad 2)$ que es par y $(2 \quad 1)$ que es impar

por lo tanto los únicos productos permitidos para formar el determinante de la matriz : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

son $a_{11} \cdot a_{22}$ y $-a_{12} \cdot a_{21}$, éste último producto es negativo porque la permutación de sus segundos índices es impar. De éste modo el determinante es . . .

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = \pm \sum_{k_j} \left[\left(a_{1 \cdot k_1} \right) \cdot \left(a_{2 \cdot k_2} \right) \right] = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo 1 . Calcular los determinantes de las matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Solución : De la expresión general para el determinante de una matriz $[2 \times 2]$:

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

queda :

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right| = (-4) \cdot (1) - (3) \cdot (-2) = 2$$

$$|B| = \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right| = (-1) \cdot (0) - (5) \cdot (0) = 0$$

$$|C| = \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \right| = \left(\frac{1}{2} \right) \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) - \left(-\frac{3}{4} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{-3}{4}$$

De la definición general para un determinante, es posible obtener también la forma explícita del determinante de una matriz cuadrada de tamaño $[3 \times 3]$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ como sigue . . .

- Existen 3 columnas, luego las permutaciones posibles del conjunto { 1 , 2 , 3 } son :

$(1\ \ 2\ \ 3)$ que es par $(2\ \ 3\ \ 1)$ que es par
$(1\ \ 3\ \ 2)$ que es impar $(3\ \ 1\ \ 2)$ que es par
$(2\ \ 1\ \ 3)$ que es impar $(3\ \ 2\ \ 1)$ que es impar

- Para formar uno de los productos del determinante, se debe escoger de la matriz *un solo elemento de cada renglón* , asi que todos los productos tienen la forma: $\left(a_{1\cdot k_1}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_2}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_3}\right)$ donde $\left(k_1\ \ k_2\ \ k_3\right)$ es una posible permutación del número de columnas . Por lo tanto el determinante de ésta matriz contiene 6 productos :

$\left(a_{11}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\right)$ $\left(a_{12}\ \ a_{13}\ \ a_{11}\right)$
$-\left(a_{11}\ \ a_{13}\ \ a_{12}\right)$ $\left(a_{13}\ \ a_{11}\ \ a_{12}\right)$
$-\left(a_{12}\ \ a_{11}\ \ a_{13}\right)$ $-\left(a_{13}\ \ a_{12}\ \ a_{11}\right)$

- a éstos términos se les ha antepuesto un signo $+$ ó un signo $-$ dependiendo de que la permutación correspondiente de las columnas sea par ó impar .

Finalmente se obtiene . . .

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right) - \left(a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} + a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}\right)$$

Ejemplo 2 . Calcular los determinantes de la matriz : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Solución : De la expresión general para el determinante de una matriz $[3 \times 3]$ se obtiene . . .

$$A = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = \left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right) \ldots$$
$$+\left(-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}\right)$$

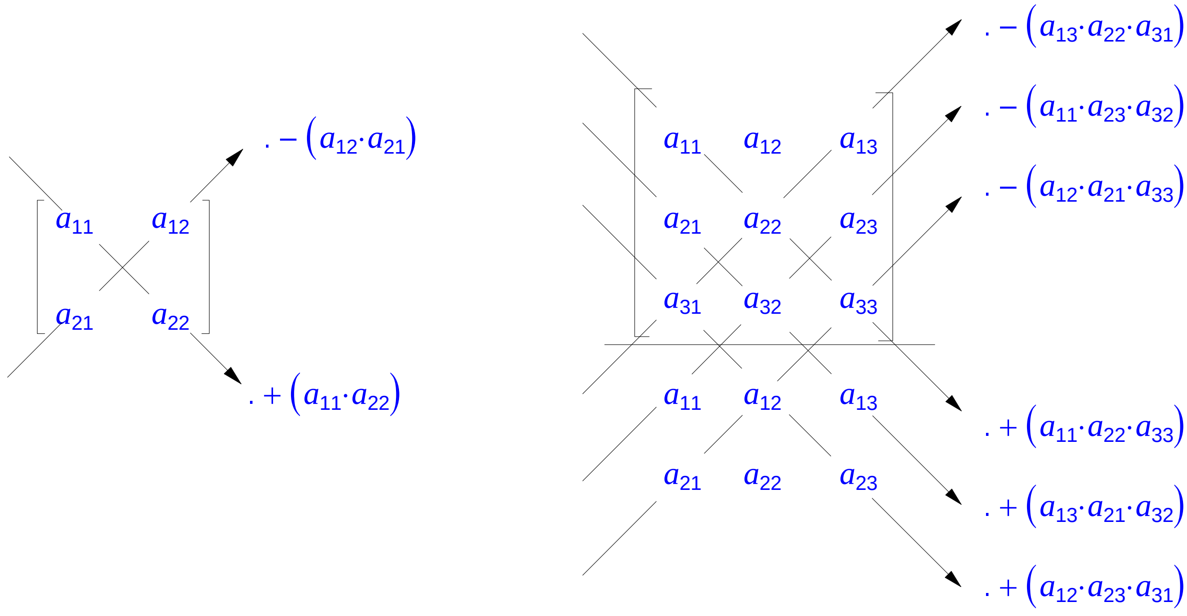
queda :

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -6 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}\right| = (0)\cdot(-1)\cdot(-3) + [(2)\cdot(5)\cdot(1)] + [(3)\cdot(-6)\cdot(4)] \ldots$$
$$+[-(0)\cdot(5)\cdot(4) - (2)\cdot(-6)\cdot(-3) - (3)\cdot(-1)\cdot(1)]$$

$$= [0 + 10 + (-72)] - [0 + 36 + (-3)]$$

$$= -95$$

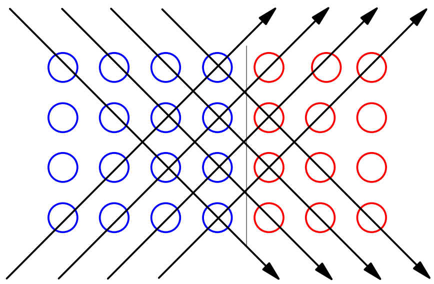
Es muy fácil recordar como se calcula el determinante de las matrices $[2\times 2]$ ó $[3\times 3]$ mediante los siguientes esquemas :

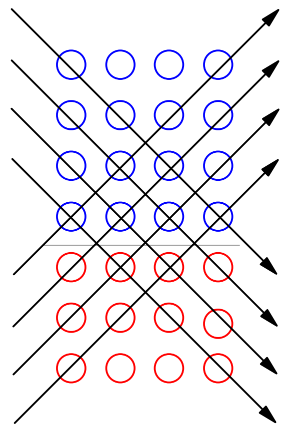


- Los elementos de la matriz se unen por lineas rectas diagonales y todos los elementos sobre una misma diagonal se multiplican .
- El signo del producto es positivo si la diagonal es descendente y es negativo si tal diagonal es ascendente .
- Para una matriz $[3\times 3]$ se deben duplicar los dos primeros renglones y escribirlos debajo del tercero con el fin de formar los productos de 3 elementos . Ó también se pueden duplicar las dos primeras columnas y escribirlas a la derecha de la tercera columna.
- El determinante es la suma de los productos obtenidos en cada diagonal

Es importante reconocer que éstos esquemas para el cálculo de determinantes *tienen validez sólamente para matrices de tamaño* $[2 \times 2]$ ó $[3 \times 3]$, es decir *no se pueden generalizar para calcular determinantes de matrices de mayor tamaño*.

Por ejemplo, para una matriz $[4 \times 4]$, existen $(4)\cdot(3)\cdot(2)\cdot(1) = (4)! = 24$ permutaciones posibles de sus columnas y por lo tanto hay 24 términos en la expresión de su determinante . Sin embargo, con el esquema de diagonales anterior, solo se podrían formar 8 diagonales que involucren 4 términos , como se puede apreciar en los siguientes esquemas :





De ésta manera, la evaluación directa del determinante de una matriz $[n \times n]$ a partir de la definición general, resulta ser una tarea bastante laboriosa. Por ejemplo tan solo para una matriz $[5 \times 5]$ habría que hacer $(5)! = 120$ productos elementales y para una matriz de $[10 \times 10]$ el número de productos sería la asombrosa cantidad de . . .

$$(10)! = 3628800$$

Afortunadamente, los determinantes tienen propiedades que nos ayudan a evitar ésos laboriosos cálculos de manera que se puedan evaluar de una manera más rápida y sencilla .

EJERCICIO 7.1

1. Determinar si son pares ó impares las siguientes permutaciones de los primeros 5 números enteros.

i) $(1 \ \ 5 \ \ 2 \ \ 4 \ \ 3)$ iv) $(3 \ \ 5 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 2)$

ii) $(3 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 5)$ iv) $(3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 2 \ \ 1)$

iii) $(4 \ \ 1 \ \ 5 \ \ 2 \ \ 3)$ v) $(2 \ \ 4 \ \ 3 \ \ 5 \ \ 1)$

2. Evaluar los siguientes determinantes :

i) $\left|\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right|$ ii) $\left|\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right|$ iii) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}\right|$ iv) $\left|\begin{pmatrix} k-4 & -2 \\ 3 & k+3 \end{pmatrix}\right|$

v) $\left|\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right|$ vi) $\left|\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ -8 & -7 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right|$ vii) $\left|\begin{pmatrix} k & 1 & k+2 \\ -2 & k & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}\right|$

3. Calcular todos los posibles valores de la constante λ para los cuales $|A| = 0$, si

i) $A = \begin{pmatrix} \lambda + 3 & 3 \\ -2 & \lambda - 4 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{bmatrix} (\lambda - 6) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & (\lambda - 4) \end{bmatrix}$ iii) $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 4 \\ (-2) & \lambda & (\lambda - 2) \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. Aplicar la definición general para evaluar directamente los determinantes de las siguientes matrices :

i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Respuestas 7.1

1. i) par ii) impar iii) impar iv) par
   iv) par v) impar

2. i) -19 ii) 20 iii) -51 iv) $k^2 - k - 6$
   v) 55 vi) -179 vii) $6 \cdot k^2 - 20 \cdot k + 6$

3. i) $\lambda = -2, 3$ ii) $\lambda = 2, 6$ iii) $\lambda = -6, 3$

4. i) 120 ii) -120 iii) 0

7.3 ***Propiedades de los determinantes*** .

Si $|A|$ representa el determinante de una matriz cuadrada A de tamaño $[n \times n]$, entonces valen las siguientes propiedades :

Propiedades de los determinantes.

- (I) *Si se intercambian dos renglones de la matriz* A *, su determinante* $|A|$ *cambia de signo pero no de valor* .
- (II) *Si se multiplican los elementos de un solo renglón de la matriz* A *por una constante* k *, entonces su determinante es* $k \cdot |A|$.
- (III) *Si dos renglones de la matiz* A *son iguales entonces* $|A| = 0$.
- (IV) *Si la matriz* A *tiene un renglón de ceros entonces* $|A| = 0$.
- (V) *Si un renglón de la matriz* A *es un múltiplo de otro renglón entonces* $|A| = 0$.
- (VI) *Si se suma un múltiplo de un renglón de la matriz* A *a otro renglón, entonces* $|A|$ *no cambia de valor* .

DEMOSTRACIÓNES .

(I) *El intercambio de renglones de la matriz* A *cambia el signo de su determinante*.

Dado que los términos del determinante de A tienen la forma :

$$\pm\left(a_{1\cdot k_1}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_2}\right)\cdot\left(a_{3\cdot k_3}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(a_{n\cdot k_n}\right)$$

(*donde los números enteros* k_1 , k_2 , k_3 , ... , k_n *representan el número de columnas*) , si consideramos dos renglones adyacentes i y j de la matriz A y suponemos que los números de columna son $k_j > k_i$, entonces el determinante $|A|$ contiene términos de la forma :

$$\pm\left(a_{1\cdot k_1}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(a_{i\cdot k_i}\right)\cdot\left(a_{j\cdot k_j}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(a_{n\cdot k_n}\right)$$

Supongamos que los renglones i y j se intercambian, los productos serán ahora :

$$-\left[\pm\left(a_{1\cdot k_1}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(a_{j\cdot k_j}\right)\cdot\left(a_{i\cdot k_i}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(a_{n\cdot k_n}\right)\right]$$

negativos, porque ahora la permuntación correspondiente:

$$k_1 \ k_2 \ .\ .\ .\ .\ k_j \ k_i \ \ .\ .\ .\ k_n$$

contiene una inversión más dado que $k_j > k_i$.
En consecuencia todos los términos que forman al determinante cambian de signo.

Cuando los renglones i y j no son adyacentes, el número p de inversiones que genera el índice k_i al pasar al lugar k_j, es el mismo que genera el índice k_j al pasar a lugar k_i. Además se genera otra inversión entre los propios índices k_i y k_j, por lo cual el total de inversiones es impar : $2 \cdot p + 1$. Asi que al intercambiar los dos renglones de la matriz las permutaciones del determinante que eran pares, ahora son impares y viceversa .

II) *El determinante de una matriz* A *se multiplica por una constante* k *cuando uno de los renglones de la matriz (ó una de sus columnas) se multiplica por esa constante* .

Dado que los términos del determinante de A : $\pm\left(a_{1 \cdot k_1}\right) \cdot \left(a_{2 \cdot k_2}\right) \cdot \left(a_{3 \cdot k_3}\right) \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \cdot \left(a_{n \cdot k_n}\right)$ contienen solo un elemento de cada renglón, si se multiplican todos los elementos de un renglón de la matriz por una constante k, entonces todos los términos del determinante contendrán como factor esa misma constante porque todos ellos contienen un solo elemento del renglón que fué multiplicado por k.
Asi que el determinante completo tiene como factor a ese número k.

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ k \cdot a_{i1} & k \cdot a_{i2} & . & . & . & k \cdot a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = k \cdot \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

III) *Si dos renglones de una matiz* A *son iguales entonces su determinante vale cero* .

Consideremos una matriz en la cual los renglones i y j son iguales, esto es . . .

$$a_{i1} = a_{j1} \ , \ a_{i2} = a_{j2} \ , \ a_{i3} = a_{j3} , \ .\ .\ .\ . , \ a_{in} = a_{jn}$$

Entonces de acuerdo con la *propiedad I)* , el intercambio de los renglones i y j genera un cambio de signo del determinante . . .

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & a_{jn} \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right| \quad \begin{matrix} \longleftarrow \textit{filas} \\ \longleftarrow \textit{iguales} \end{matrix} \qquad -|A| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

Sin embargo, debido a que los renglones contienen exactamente los mismos números, se tiene que . . .

$$|A| = -|A|$$

es decir . . .

$$|A| + |A| = 0$$

$$2\cdot|A| = 0$$

por lo cual se sigue que $|A| = 0$.

IV) *Si la matriz A tiene un renglón de ceros entonces su determinante vale cero* .

Por definición, los términos del determinante de A tienen la forma :

$$\pm\left(a_{1\cdot k_1}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_2}\right)\cdot\left(a_{3\cdot k_3}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(a_{n\cdot k_n}\right)$$

que contienen necesariamente un elemento de cada renglón.
Si existe un renglón de ceros en la matriz, entonces todos los términos del determinante contendrán como factor un cero de tal renglón y por lo tanto todos ellos valen cero .
Asi que el determinante completo es una suma de ceros y vale cero .

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = 0$$

V) *Si un renglon de una matriz es un múltiplo de otro renglón entonces su determinante vale cero* .

Consideremos una matriz A que tenga el renglón j igual renglón i multiplicado por una constante k .

Entonces por la *propiedad II)* se tiene . . .

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{-ésimo renglón} \longrightarrow \\ \\ j\text{-ésimo renglón} \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ k\cdot a_{i1} & k\cdot a_{i2} & . & . & . & k\cdot a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right| = k\cdot \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \\ \textit{filas iguales} \\ \longleftarrow \\ \\ \\ \end{array}$$

y ahora se tiene un determinante que tiene dos renglones iguales, el cual por la *propiedad III)* vale cero.

VI) *El determinante de una matriz no cambia de valor si se suma un múltiplo de un renglón a otro.*

Consideremos una matriz transformada A_c cuyo renglón j sea la suma del renglón i multiplicado por una constante c más el renglón j, esto es . . .

$$A_c = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . \; . \; . & a_{1n} \\ . & . & . \; . \; . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . \; . \; . & a_{in} \\ . & . & . \; . \; . & . \\ (a_{j1} + k\cdot a_{i1}) & (a_{j2} + k\cdot a_{i2}) & . \; . \; . & (a_{jn} + k\cdot a_{in}) \\ . & . & . \; . \; . & . \\ a_{n1} & . & . \; . \; . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por definición, los términos del determinante de ésta matriz serán los productos formados que contengan un solo elemento de cada renglón y de cada columna :

$$\pm\left(a_{1\cdot k_1}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_2}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(a_{jk_j} + c\cdot a_{i\cdot k_i}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(a_{n\cdot k_n}\right)$$

los cuales se dividen en los dos productos :

$$\pm\left(a_{1\cdot k_1}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_2}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(a_{jk_j}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(a_{n\cdot k_n}\right) \quad \pm\left(a_{1\cdot k_1}\right)\cdot\left(a_{2\cdot k_2}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(c\cdot a_{i\cdot k_i}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(a_{n\cdot k_n}\right)$$

en consecuencia . . .

$$|A_c| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ c\cdot a_{i1} & c\cdot a_{i2} & . & . & . & c\cdot a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

y si usamos ahora la propiedad II) ,se sigue que . . .

$$|A_c| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right| + c\cdot\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

pero el último determinante tiene dos renglones iguales que, por la propiedad III), vale cero .Por lo tanto . . .

$$|A_c| = |A| + c\cdot(0)$$

y $|A_c| = |A|$, es decir los determinantes de ambas matrices son iguales .

TEOREMA 1 .

El determinante de una matriz A es igual al determinante la su matriz transpuesta A^T

$$|A| = |A^T|$$

DEMOSTRACIÓN :

La matriz transpuesta A^T de la matriz A se obtiene escribiendo los renglones de A como columnas . Sin embargo, $|A|$ se forma con la suma de todos los productos de elementos de A que conatengan un solo elemento de cada renglón y de cada columna, por lo tanto, $|A^T|$ se forma con la suma de productos idénticos .

Como consecuencia de éste teorema, todos los enunciados y propiedades acerca de los determinantes que contengan la palabra *"renglón"* , son igualmente válidos para la palabra *"columna"* , dado que basta con transponer la matriz A correspondiente para convertir una proposición acerca de los renglones en su equivalente proposición para las columnas. Por ejemplo . . .

Si decimos . . .

- *(I) " El intercambio de dos renglones de la matriz A cambia el signo de su determinante "*
- *(II) " Al multiplicar por k los elementos de un solo renglón de la matriz A su determinante queda multiplicado por k y es $k \cdot |A|$ "*
- *(III) " Cuando dos renglones de la matriz A son iguales entonces $|A| = 0$ "*
- *(IV) " Si una matriz A tiene un renglón de ceros entonces $|A| = 0$ "*
- *(V) " Si un renglon de una matriz es un múltiplo de otro entonces $|A| = 0$ "*
- *(VI) " El determinante de una matriz no cambia de valor si se suma un múltiplo de un renglón a otro " .*

etcétera

tambien es cierto que . . .

- *(I) " El intercambio de dos columnas de la matriz A cambia el signo de su determinante "*
- *(II) " Al multiplicar por k los elementos de una sola columna de la matriz A , su determinante queda multiplicado por k y es $k \cdot |A|$ "*
- *(III) " Cuando dos columnas de la matriz A son iguales entonces $|A| = 0$ "*
- *(IV) " Si una matriz A tiene una columna de ceros entonces $|A| = 0$ "*
- *(V) " Si una columna de una matriz es un múltiplo de otra entonces $|A| = 0$ "*
- *(VI) " El determinante de una matriz no cambia de valor si se suma un múltiplo de una columna a otra " .*

etcétera

<u>TEOREMA</u> 2 .

El determinante de una matriz triangular A es el producto de los elementos de la diagonal principal

$$|A| = (a_{11}) \cdot (a_{22}) \cdot (a_{33}) \cdot \ldots\ldots \cdot (a_{nn})$$

<u>*DEMOSTRACIÓN*</u> :

El único producto que podemos formar que contenga exactamente un elemento diferente de cada renglón y exactamente un elemento diferente de cada columna en la matriz tirangular . . .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & . & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & . & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

tal que que no contenga un cero es precisamente $(a_{11})\cdot(a_{22})\cdot(a_{33})\cdot......\cdot(a_{nn})$ porque . . .

- el único elemento distinto de cero que podemos escoger del primer renglón es a_{11} y dado que también está en la primera columna, en el producto ya no se puede escoger ningún otro elemento de la primera columna . En consecuencia . . .

- del 2º renglón sólo podemos escoger para el producto el elemento a_{22}, porque es el único elemento distinto de cero que no está en la 1ª columna . De la 2ª columna ya no se puede escoger entonces ningún otro elemento . En consecuencia . . .

- del 3º renglón sólo podemos escoger para el producto el elemento a_{33} , porque es el único elemento no nulo que no está sobre la primera o la segunda columna . De la 3ª columna ya no se puede escoger entonces ningún otro elemento . y así sucesivamente . . .

- del último renglón sólo podremos seleccionar a_{nn}, porque ya se habrán escogido elementos en todas las demás columnas .

Ejemplo 3 . Calcular el determinante de la matriz : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Solución :

Dado que A es una matriz diagonal $[\,5 \times 5\,]$, su determinante se obtiene como el producto de los elementos en la diagonal principal . . .

$$|A| = (3)\cdot(-2)\cdot(5)\cdot(1)\cdot(4) = -120$$

Conociendo las propiedades de los determinantes y los resultados de los teoremas 1 y 2, ahora es posible calcularlos de una manera más sencilla y eficiente que mediante la aplicación directa de la definición general .

La idea es ***aplicar las operaciones elementales sobre los renglones (ó las columnas) de una matriz cuadrada , para transformarla en triangular y aplicar entonces el resultado del teorema 2*** .

Ejemplo 4 . Calcular el determinante de la matriz : $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -3 & 9 & -6 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Solución :
Usemos las propiedades de los determinantes y las operaciones elementales para transformar la matriz a una forma triangular .

Notando que el 2º renglón se puede factorizar y en consecuencia, de la propiedad II) . . .

$$|A| = \left|\begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot(3) & 3\cdot(-2) \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right| = 3\cdot\left|\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

Intercambiando dos renglones, el determinante cambió de signo, asi que escribimos . . .

$$|A| = (-1)\cdot(3)\cdot\left|\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

Sumando ahora 4 veces el primer renglón al tercero, el determinante no cambia su valor . . .

$$|A| = (-3)\cdot\left|\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 15 & -7 \end{pmatrix}\right|$$

Sumando ahora -3 veces el segundo renglón al tercero, el determinante tampoco cambia su valor . . .

$$|A| = (-3)\cdot\left|\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}\right|$$

Ahora la matriz es triangular y por el teorema 2, su deteminante es . . .

$$|A| = -3\cdot[(-1)\cdot(5)\cdot(-10)] = -150$$

Ejemplo 5 . Calcular el determinante de la matriz : $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & -8 & 1 & 1 \\ -5 & 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Solución :
Transformemos la matriz a una forma triangular, usando las propiedades de los determinantes y las operaciones elementales.

Notando que la 2ª columna es un múltiplo de la 1ª , se puede factorizar queda . . . , de la propiedad v) se deduce que | A | = 0 .

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & -8 & 1 & 1 \\ -5 & 10 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{bmatrix} -2 & (-2)\cdot(-2) & 3 & -5 \\ 1 & (-2)\cdot(1) & 0 & 2 \\ 4 & (-2)\cdot(4) & 1 & 1 \\ -5 & (-2)\cdot(-5) & 4 & 3 \end{bmatrix}\right| = -2\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ -5 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\right|$$

la 2ª columna es ahora igual a la primera, asi que por la propiedad (III) , el determinante es cero.
$|A| = 0$

Las siguientes matrices también tienen un determinante nulo . (*Trate de averiguar por qué razón antes de ver las respuestas*)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 4 & \frac{2}{3} \\ 2 & -3 & 1 \\ \frac{7}{2} & -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 21 & 9 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & 12 \\ -5 & 10 & 15 & -15 \end{pmatrix}$$

Respuestas : En A los renglones R_1 y R_2 son proporcionales : $R_1 = -3\cdot R_2$.
En B los renglones R_1 y R_3 son proporcionales : $R_1 = -2\cdot R_3$.
En C las columnas C_1 y C_4 son proporcionales : $C_4 = 3\cdot C_1$.

Es importante no perder de vista las operaciones entre columnas. Haciéndolo se pueden acortar los cálculos que de otra forma serían más largos realizando solamente operaciones entre renglones, como se muestra en el siguiente ejemplo, en el cual en un solo paso se obtiene la forma triangular y de inmediato el determinante de la matriz .

$$C_4 \longrightarrow C_4 - 3\cdot C_1 : \quad \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}\right| \longrightarrow \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -12 \end{pmatrix}\right| = (1)\cdot(7)\cdot(3)\cdot(-12) = -252$$

donde $C_4 \longrightarrow C_4 - 3\cdot C_1$: significa que la 4ª columna se reemplazó por la suma de ella misma más la primera columna multiplicada por -3 .

EJERCICIO 7.2

I) Evaluar los determinantes de las siguientes matrices por simple inspección .

1. $\begin{pmatrix} 2 & -53 & 27 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -1 & 0 & 0 \\ 43 & 7 & 8 & 0 \\ 19 & 5 & 12 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 11 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} -3 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & -10 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 6 & 12 & 12 \\ 8 & 9 & 16 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 8 \\ 5 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ 7. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 8. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

II) Evaluar los determinantes de las siguientes matrices reduciéndolas primero a la forma triangular :

9. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ 12. $\begin{pmatrix} 1.35 & 3.027 & 0 \\ -2.01 & 4.28 & -2.75 \\ 0.123 & -1 & 1.7 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ -4 & 8 & 2 & 2 \\ 1 & 9 & 5 & -9 \end{pmatrix}$ 14. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 16. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

III) Si $\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right| = 5$ encontrar entonces el valor de . . .

17. $\left|\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{pmatrix}\right|$ 18. $\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}\right|$ 19. $\left|\begin{pmatrix} a & b & c \\ d-3\cdot a & e-3\cdot b & f-3\cdot c \\ 2\cdot g & 2\cdot h & 2\cdot i \end{pmatrix}\right|$

20. $\left|\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2\cdot d & 2\cdot e & 2\cdot f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix}\right|$ 21. $\left|\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right|$ 22. $\begin{pmatrix} 3\cdot a & 3\cdot b & 3\cdot c \\ d-3\cdot a & e-3\cdot b & f-3\cdot c \\ 2\cdot g+3\cdot d & 2\cdot h+3\cdot e & 2\cdot i+3\cdot f \end{pmatrix}$

IV) Aplicar las operaciones elementales para demostrar que. . .

23. $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}\right| = -(a-b)\cdot(a-c)\cdot(b-c)$

24. $\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = a_{14}\cdot a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{41}$

25. $\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}\right| = -(a-b)\cdot(a-c)\cdot(b-c)\cdot(a+b+c)$

26. $\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = -\left(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}\right)$

<u>Respuestas</u> Ejercicio 7.2

1. 6
2. 48
3. 0
4. 0
5. 0
6. 0
7. 12
8. 0
9. 8
10. -5
11. -7
12. 15.429
13. 400
14. 43
15. $\frac{1}{2}$
16. 2
17. $(-1)\cdot(-1)\cdot 5 = 5$
18. 0
19. $2\cdot(5) = 10$
20. $(-1)\cdot(2)\cdot(-1)\cdot 5 = 10$
21. 5
22. $(3)\cdot(2)\cdot 5 = 30$

7.4 ***El determinante de la matriz inversa*** .

TEOREMA 3 .

Si A *y* B *son matrices* $[\,n \times n\,]$ *y* k *es una constante entonces . . .*

I) $|k\cdot A| = k^n \cdot |A|$

II) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

DEMOSTRACIÓN :

I) $|k\cdot A| = k\cdot|A|$

De cualquier renglón ó columna se puede extraer un factor común en un determinante y entonces éste queda multiplicado por tal factor .
Por otra parte la matriz kA se obtiene multiplicando cada renglón de la matriz A por el número k .
Asi que si k tiene n renglones, el factor común k se puede extraer n veces del determinante $|A|$ y por lo tanto quedará multiplicado por si mismo n veces .

II) $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$

Demostrar que el determinante de un producto es el producto de los determinantes no es fácil .Aquí solamente se ilustrará el caso de matrices $[\,2 \times 2\,]$.

Sean las matrices : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, entonces . . .

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Asi que su determinante es . . .

$$\begin{aligned} |A\cdot B| &= (a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21})\cdot(a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22}) - (a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21})\cdot(a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22}) \\ &= a_{11}\cdot b_{11}\cdot a_{22}\cdot b_{22} + a_{12}\cdot b_{21}\cdot a_{21}\cdot b_{12} - a_{21}\cdot b_{11}\cdot a_{12}\cdot b_{22} - a_{22}\cdot b_{21}\cdot a_{11}\cdot b_{12} \\ &= a_{11}\cdot a_{22}\cdot(b_{11}\cdot b_{22} - b_{12}\cdot b_{21}) - a_{12}\cdot a_{21}\cdot(b_{11}\cdot b_{22} - b_{12}\cdot b_{21}) \\ &= (a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21})\cdot(b_{11}\cdot b_{22} - b_{12}\cdot b_{21}) \end{aligned}$$

Pero por otra parte . . .

$$|A|\cdot|B| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right| = \left(a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}\right)\cdot\left(b_{11}\cdot b_{22} - b_{12}\cdot b_{21}\right)$$

Asi que en efecto $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$ y la propiedad se cumple para matrices de tamaño $[2\times 2]$.

Ejemplo 6 . Considerese las matrices : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculando sus determinantes se encuentra que . . .

$$|A| = -3 \qquad ; \qquad |B| = 11$$

Se deja como ejercicio verificar que en efecto . . .

$$3\cdot B = 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 3 & 9 & -6 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad |3\cdot B| = 297 = 3^3\cdot(11) = 3^3\cdot|B|$$

$$4\cdot A = 4\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 12 & 4 \\ 4 & 0 & -8 \\ -4 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad ; \quad |4\cdot A| = -192 = 4^3\cdot(-3) = 4^3\cdot|A|$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -5 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad |A\cdot B| = -33 = (-3)\cdot 11 = |A|\cdot|B|$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & -11 \\ -6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad |B\cdot A| = -33 = 11\cdot(-3) = |B|\cdot|A|$$

TEOREMA 4 .

Una matriz A es inversible si y solo si su determinante no es cero .

DEMOSTRACIÓN :

Si A es una matriz inversible de tamaño $[\, n \times n \,]$ entonces se cumple que :

$A \cdot A^{-1} = I_n$.

Por lo tanto, aplicando el resultado del teorema 3 , se obtiene que . . .

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I_n|$$

pero $|I_n|$ es el determinante de una matriz diagonal que tiene solamente 1´s en tal diagonal, asi que su determinante es $1^n = 1$ y queda . . .

$$|A| \cdot |A^{-1}| = 1$$

El producto $|A| \cdot |A^{-1}|$ es distinto de cero, asi que sus factores no pueden ser cero , es decir $|A^{-1}| \neq 0$ y también $|A| \neq 0$.

Como consecuencia de éste teorema se tiene que . . .

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

" el determinante de la matriz inversa A^{-1} es el inverso del determinante de A " .

Ejemplo 7 . Determinar si la matriz : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa.

Solución : Calculando el determinante de la matriz se encuentra que . . .

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -2 & 3 & (-2)\cdot(-2) \\ 1 & 1 & (-2)\cdot(1) \\ -1 & 0 & (-2)\cdot(-1) \end{bmatrix} \right|$$

Entonces $|A| = 0$ pues la 3ª columna es un múltiplo de la primera. Por lo tanto ésta matriz es singular .

Ejemplo 8 . Dada la matriz : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ comprobar que $|B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$

Solución : Calculemos primero la matriz inversa de B . . .

$$\begin{array}{l} R_2 \longrightarrow R_2 - 2\cdot R_1 : \\ R_3 \longrightarrow R_3 - 3\cdot R_1 : \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -3 & . & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & . & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow 2\cdot R_3 - R_2 : \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & . & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & . & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_1 \longrightarrow 3\cdot R_1 + 2\cdot R_3 : \\ R_2 \longrightarrow 3\cdot R_2 - 7\cdot R_3 : \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & . & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & . & -5 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & 0 & . & 22 & 10 & -14 \\ 0 & 0 & -3 & . & -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y finalmente, dividiendo los renglones R_1 , R_2 y R_3 entre 3 , -6 y 3 respectivamente queda . . .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & \dfrac{-5}{3} & \dfrac{-2}{3} & \dfrac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & . & \dfrac{22}{6} & \dfrac{10}{6} & \dfrac{-14}{6} \\ 0 & 0 & 1 & . & \dfrac{-4}{-3} & \dfrac{-1}{-3} & \dfrac{2}{-3} \end{pmatrix}$$

por lo tanto, la inversa es . . . $B^{-1} = \dfrac{1}{3}\cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -11 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Por otra parte, los determinantes de éstas matrices son :

$$|B| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 3 \qquad \text{y} \qquad |B^{-1}| = \left|\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ -11 & -5 & 7 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right| = \frac{9}{3^3} = \frac{1}{3}$$

y por lo tanto se cumple que . . . $|B^{-1}| = \frac{1}{3} = \frac{1}{|B|}$

EJERCICIO 7.3

I) Comprobar que $|A| = |A^T|$ para las siguientes matrices :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

II) Comprobar que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ para los siguientes pares de matrices :

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

III) ¿ Cuales de las siguientes matrices son inversibles ?

6. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

IV) ¿ Para qué valores de la constante k la matriz A será singular ?

10. $A = \begin{bmatrix} (k-2) & 1 \\ 4 & (k+1) \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & k & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} (k+1) & 2 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \\ k & 1 & k \end{bmatrix}$

V) Sean las matrices $B = \begin{pmatrix} b_{11} & x & y & z & . & w \\ x & b_{22} & r & s & . & t \\ y & r & b_{33} & . & . & . \\ z & s & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ w & t & . & . & . & b_{nn} \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} d_{11} & x & y & z & . & w \\ -x & d_{22} & r & s & . & t \\ -y & -r & d_{33} & . & . & . \\ -z & -s & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ -w & -t & . & . & . & d_{nn} \end{pmatrix}$

Observe que los elementos de B situados simétricamente respecto a la diagonal principal son iguales, mientras que los elementos de D también presentan ésta simetría pero son de signo opuesto.
Se dice entonces que:

- la matriz B es ***simétrica*** porque es igual a su transpuesta $B = B^T$
- la matriz D es ***antisimétrica*** porque es igual al negativo de su transpuesta $D = -D^T$

Además para que una matriz pueda ser simétrica o antisimétrica, es necesario que sea cuadrada.

Demostrar entonces que para cualquier matriz A que sea cuadrada se cumple. . .

13. las matrices $A \cdot A^T$ y $A + A^T$ son simétricas.

14. la matriz $A - A^T$ es antisimétrica.

Calcular por lo menos una matriz simétrica y otra antisimétrica de tamaño $[3 \times 3]$

<u>Respuestas</u> Ejercicio 7.3

1. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; $|A| = -3$; $|A^T| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}\right| = -3$

2. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; $|A| = 0$; $|A^T| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = 0$

3. $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $|A| = -56$; $|A^T| = -56$

4. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}$; $|A| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right| = -2$; $|B| = \left|\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right| = -2$

$$|A \cdot B| = \left|\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}\right| = 4 = (-2)\cdot(-2) = |A| \cdot |B|$$

5. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 9 & 19 & 4 \end{pmatrix}$; $|A| = -6$; $|B| = -4$

$$|A \cdot B| = \left|\begin{pmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 9 & 19 & 4 \end{pmatrix}\right| = 24 = (-6)\cdot(-4) = |A| \cdot |B|$$

6. $\left|\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right| = 0$ A es singular

7. $\left|\begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}\right| = 0$ A es singular

8. $\left|\begin{pmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}\right| = 0$ A es singular

9. $\left|\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right| = 0$ A es singular

10. $|A| = k^2 - k - 6$ y $|A| = 0$ si $k = 3, -2$

11. $|A| = -11 \cdot k - 22$ y $|A| = 0$ si $k = -2$

12. $|A| = 3 \cdot k^2 + 5 \cdot k - 8$ y $|A| = 0$ si $k = 1, \frac{-8}{3}$

13. $\left(A \cdot A^T\right)^T = \left(A^T\right)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$

es decir la matriz $A \cdot A^T$ es simétrica porque es igual a su transpuesta $\left(A \cdot A^T\right)^T$

$$\left(A + A^T\right)^T = A^T + \left(A^T\right)^T = A^T + A$$

es decir la matriz $A + A^T$ es simétrica porque es igual a su transpuesta $\left(A + A^T\right)^T$.

14. La matriz $\left(A - A^T\right)$ es antisimétrica porque . . .

$$\left(A - A^T\right)^T = A^T - \left(A^T\right)^T = A^T - A = -\left(A - A^T\right)$$

es decir la matriz transpuesta $\left(A - A^T\right)^T$ es el negativo de la matriz $\left(A - A^T\right)$

Obtengamos una matriz simétrica y otra antisimétrica a partir de una matriz cualquiera: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 2 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -10 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix}$$

7.5 ***Desarrollo de un determinante por cofactores*** .

Desarrollaremoa ahora dos aplicaciones importantes de los determinantes :

- *una fórmula para calcular una matriz inversa*
- *la obtención directa de la solución de un sistema de ecuaciones lineales*

DEFINICIÓN 1.

Si A es una matriz $[n \times n]$, se define *el menor* M_{ij} correspondiente al elemento a_{ij} de la matriz , como el determinante de la submatriz que se obtiene de A al eliminar el renglón i-ésimo y la columna j-ésima , es decir , el renglón y la columna donde se encuentra a_{ij} .

Se define también el número . . .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

llamado *cofactor* del elemento matricial a_{ij} .

De ésta manera , el menor M_{ij} y el cofactor A_{ij} asociados al elemento a_{ij} de una matriz cuadrada A difieren solamente en signo , de acuerdo al siguiente esquema general . . .

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & - & + & - & + & . & . & . \\ + & - & + & - & + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & - & + & - & + & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9 . Dada la matriz : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ hallar sus menores y cofactores

Solución : La aplicación directa de la definición de menores y cofactores es :

para el elemento a_{11} . . .

$$M_{11} = \left|\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 2 \quad \text{y} \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (1)\cdot(2) = 2$$

para el elemento a_{12} . . .

$$M_{12} = \left|\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 4 \quad \text{y} \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)\cdot(4) = -4$$

para el elemento a_{13} . . .

$$M_{13} = \left|\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 1 \quad \text{y} \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (1)\cdot(1) = 1$$

para el elemento a_{21} . . .

$$M_{21} = \left|\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 6 \quad \text{y} \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)\cdot(6) = 6$$

para el elemento a_{22} . . .

$$M_{22} = \left|\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 0 \quad \text{y} \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (1)\cdot(0) = 0$$

etc. etc.

Consideremos ahora la expresión general para obtener el determinante de una matriz $[3 \times 3]$:

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = \left(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}\right) \ldots \\ + \left(-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}\right)$$

La cual se puede escribir de varias maneras si en la expresión de la derecha se factorizan los elementos que estén e una misma columna ó en un mismo renglón. Por ejemplo . . .

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = a_{11}\cdot\left(a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\right) - a_{21}\cdot\left(a_{12}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{32}\right) + a_{31}\cdot\left(a_{12}\cdot a_{23} - a_{13}\cdot a_{22}\right)$$

La expresión de la derecha es el producto de los elementos de la primera columna de la matriz A por los cofacto correspondientes a esos elementos, es decir . . .

$$|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31}$$

O también se puede escribir . . .

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = -a_{21}\cdot\left(a_{12}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{32}\right) + a_{22}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{33} - a_{31}\cdot a_{13}\right) - a_{23}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{12}\right)$$

que es la suma de los productos de los elementos del segundo renglón de la matriz, por sus correspondientes cofactores, esto es . . .

$$|A| = a_{21}\cdot A_{21} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{23}\cdot A_{23}$$

... o bién :

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\right| = a_{13}\cdot\left(a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\right) - a_{23}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{12}\right) + a_{33}\cdot\left(a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}\right)$$

que es la suma de los productos de los elementos de la tercera columna de la matriz, por sus correspondientes cofactores, es decir . . .

$$|A| = a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33}$$

De modo que *el determinante se obtiene siempre si se desarrolla la suma de productos de los elementos en cualquier fila o en cualquier columna de la matriz, por sus correspondientes cofactores* .

Este resultado que se acaba de ilustrar para matrices $[3 \times 3]$, es válido también para matrices cuadradas de cualquier otro tamaño :

" El determinante de una matriz $[n \times n]$ se obtiene sumando los productos de los elementos que estén en cualquier renglón o en cualquier columna de la matriz , por sus respectivos cofactores "

En símbolos, el desarrollo del determinante de una matriz A a lo largo de cualquier columna es :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{k\cdot j}\cdot A_{k\cdot j} = a_{1.j}\cdot A_{1.j} + a_{2j}\cdot A_{2j} + \ldots\ldots + a_{nj}\cdot A_{nj}$$

o también, el desarrollo del determinante de la matriz a lo largo de cualquier fila es:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{i\cdot k}\cdot A_{i\cdot k} = a_{i\cdot 1}\cdot A_{i\cdot 1} + a_{i\cdot 2}\cdot A_{i\cdot 2} + \ldots\ldots\ldots + a_{i\cdot n}\cdot A_{i\cdot n}$$

La mejor estrategia para evaluar un determinante por cofactores es a lo largo de un renglón ó de una columna que contenga muchos ceros, transformando primero esa fila o esa columna por medio de las operaciones elementales para que contenga tantos ceros como sea posible.

Ejemplo 10 . Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ por cofactores .

Solución : Al sumar múltiplos del tercer renglón a los demás renglones, se obtiene la matriz :

$$\begin{matrix} R_1 \longrightarrow R_1 - 3\cdot R_3 : \\ R_2 \longrightarrow R_2 + 2\cdot R_3 : \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -17 & 0 & 10 & -9 \\ 13 & 0 & 3 & 11 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

y ahora desarrollamos el determinante por los cofactores a lo largo de la segunda columna . . .

$$|A| = a_{12}\cdot A_{12} + a_{22}\cdot A_{22} + a_{32}\cdot A_{32} + a_{42}\cdot A_{42}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -17 & 0 & 10 & -9 \\ 13 & 0 & 3 & 11 \\ 5 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = (0)\cdot A_{12} + (0)\cdot A_{22} + (1)\cdot A_{32} + (0)\cdot A_{42} = A_{32}$$

de ésta manera, el cálculo del determinante se reduce a obtener un solo cofactor.

$$|A| = A_{32} = (-1)^{3+2}\cdot M_{32} = (-1)^5\cdot \left|\begin{pmatrix} -17 & 10 & -9 \\ 13 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right|$$

Al sumar múltiplos del tercer renglón a los demás renglones, se obtiene la matriz :

$$\begin{array}{l} R_1 \longrightarrow R_1 - 17\cdot R_3 : \\ R_2 \longrightarrow R_2 + 13\cdot R_3 : \end{array} \quad \begin{pmatrix} -17 & 10 & -9 \\ 13 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -24 & -60 \\ 0 & 29 & 50 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ahora desarrollamos el determinante por cofactores de la primera columna :

$$|A| = (-1)^5\cdot \left|\begin{pmatrix} -17 & 10 & -9 \\ 13 & 3 & 11 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = -\left|\begin{pmatrix} 0 & -24 & -60 \\ 0 & 29 & 50 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= -\left[0\cdot C_{11} + 0\cdot C_{21} + (-1)\cdot C_{31}\right]$$

$$= C_{31}$$

$$= (-1)^{3+1}\cdot M_{31}$$

$$= \left|\begin{pmatrix} -24 & -60 \\ 29 & 50 \end{pmatrix}\right| = (-24)\cdot(50) - (29)\cdot(-60) = 540$$

Si éste determinante se hubiese calculado directamente a partir de la definiicón, se habría tenido que hacer la suma de 24 productos, cada uno con 4 elementos de la matriz como factores.
Con el método presentado sólo se han calculado dos productos de dos elementos.

7.6 *La matriz adjunta* .

DEFINICIÓN 2

Si A es una matriz de tamaño $[\, n \times n\,]$ y A_{ij} es el cofactor del elemento a_{ij} ,

entonces la matriz que tiene por elementos los cofactores respectivos de A . . .

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & A_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

se llama ***matriz de cofactores*** .

La transpuesta de ésta matriz , se llama ***matriz adjunta*** de A :

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 11 . Calcular la matriz adjunta de la matriz $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución : Los cofactores de B son . . . :

$$B_{11} = (-1)^2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right| = 5 \; ; \quad B_{12} = (-1)^3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right| = -3 \; ; \quad B_{13} = (-1)^4 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right| = -7$$

$$B_{21} = (-1)^3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \right| = 10 \; ; \quad B_{22} = (-1)^4 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \right| = -6 \; ; \quad B_{23} = (-1)^5 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right| = 13$$

$$B_{31} = (-1)^4 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right| = -9 \; ; \quad B_{32} = (-1)^5 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = 0 \; ; \quad B_{33} = (-1)^6 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right| = -9$$

De manera que la matriz de cofactores es :

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -7 \\ 10 & -6 & 13 \\ -9 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto la adjunta de B es la tanspuesta de ésta matriz :

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -9 \\ -3 & -6 & 0 \\ -7 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

7.7 La matriz inversa . Regla de Cramer .

Sea A una matriz $[n \times n]$ y sea B la matriz obtenida de A escribiendo el renglón j idéntico al renglón i :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{j1} & a_{j2} & . & . & . & a_{jn} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \text{renglón } i \\ \\ \longleftarrow \text{renglón } j \\ \\ \\ \end{array}$$

es decir. . . $a_{ik} = b_{jk}$ todos los elementos del renglón *j-ésimo* de B son iguales a los elementos del renglón *i-ésimo* de A.

entonces se deduce que . . .

- $A_{jk} = B_{jk}$: *los cofactores del renglón j de B son iguales a los cofactores del renglón j de A* , dado que todos los demás renglones de A y B son idénticos .
- $|B| = 0$; *el determinante de la matriz B es cero por tener la matriz dos renglones iguales.*

El determinante de B desarrollado por cofactores a lo largo del renglón j es :

$$|B| = b_{j1} \cdot B_{j1} + b_{j2} \cdot B_{j2} + b_{j3} \cdot B_{j3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{jn} \cdot B_{jn}$$

pero por ser $a_{ik} = b_{jk}$, $|B| = 0$ y $A_{jk} = B_{jk}$ se obtiene que . . .

$$0 = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + a_{i3} \cdot A_{j3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in} \cdot A_{jn}$$

lo cual significa que *en toda matriz cuadrada, al multiplicar los elementos de un renglón por los cofactores correspondientes de cualquier otro renglón , el resultado es siempre cero* .

Consideremos ahora el producto de una matriz cuadrada A por su adjunta $adj(A)$

$$A\cdot(adj(A)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & . & . & . & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & . & . & A_{j1} & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & . & A_{j2} & . & . & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & . & . & A_{j3} & . & . & A_{n3} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & . & A_{jn} & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

El elemento ij de éste producto se obtiene multiplicando el renglón i de A por la columna j de $adj(A)$. y es . . .

$$a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + a_{i3}\cdot A_{j3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\cdot A_{jn}$$

pero según el resultado demostrado anteriormente, éste elemento vale cero cuando $i \neq j$ y cuando $i = j$ es precisamente el desarrollo por cofactores del determinante de la matriz A, es decir:

$$a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + a_{i3}\cdot A_{j3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\cdot A_{jn} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$a_{i1}\cdot A_{j1} + a_{i2}\cdot A_{j2} + a_{i3}\cdot A_{j3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\cdot A_{jn} = |A| \quad \text{si} \quad i = j$$

De ésta manera todos los términos del producto $A\cdot(adj(A))$ valen cero a excepción de los elementos de la diagonal principal que son todos iguales y valen $|A|$, es decir :

$$A\cdot adj(A) = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & |A| & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & |A| & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & |A| \end{pmatrix} = |A|\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto :

$$A\cdot adj(A) = |A|\cdot I_n$$

Si la matriz A es inversible, entonces $|A| \neq 0$ y por ser $|A|$ un número real, se puede escribir que . . .

$$\frac{1}{|A|}\cdot(A\cdot adj(A)) = I_n$$

pero al multiplicar éste resultado por ambos lados por la matriz inversa de la matriz A queda . . .

$$A^{-1}\cdot A\cdot\left(\frac{1}{|A|}\cdot adj(A)\right) = A^{-1}\cdot I_n$$

Por definición $A^{-1}\cdot A = I_{\mathbf{n}}$ y también $A^{-1}\cdot I_{\mathbf{n}} = A^{-1}$, asi que resulta . . .

$$I_{\mathrm{n}}\cdot\left(\frac{1}{|A|}\cdot adj(A)\right) = A^{-1}$$

Se tiene asi una *fórmula analítica* para calcular la inversa de una matriz cuadrada :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj(A)$$

<u>*Ejemplo*</u> 12 . Calcular la matriz inversa de la matriz $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>*Solución*</u> : Los cofactores de B son . . . :

$$B_{11} = (-1)^2\cdot\left|\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\right| = 31 \;;\quad B_{12} = (-1)^3\cdot\left|\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = 5 \;;\quad B_{13} = (-1)^4\cdot\left|\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right| = 25$$

$$B_{21} = (-1)^3\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\right| = 16 \;;\quad B_{22} = (-1)^4\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right| = 2 \;;\quad B_{23} = (-1)^5\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right| = 10$$

$$B_{31} = (-1)^4\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\right| = -19 \;;\quad B_{32} = (-1)^5\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\right| = 1 \;;\quad B_{33} = (-1)^6\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\right| = -13$$

De manera que la matriz de cofactores es : $\begin{pmatrix} 31 & 5 & 25 \\ 16 & 2 & 10 \\ -19 & 1 & -13 \end{pmatrix}$ la adjunta de B es la tanspuesta de ésta matriz :

$$adj(B) = \begin{pmatrix} 31 & 16 & -19 \\ 5 & 2 & 1 \\ 25 & 10 & -13 \end{pmatrix}$$

además , el determinante $|B|$ desarrollado por ejemplo por los cofatores de la 3^{a} columna vale . . .

$$|B| = b_{13}\cdot B_{13} + b_{23}\cdot B_{23} + b_{33}\cdot B_{33}$$

$$= (3)\cdot(25) + (-7)\cdot(10) + (-1)\cdot(-13) = 18$$

por lo tanto, la matriz inversa de B es :

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot adj(B) = \frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 31 & 16 & -19 \\ 5 & 2 & 1 \\ 25 & 10 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{18} & \frac{8}{9} & \frac{-19}{18} \\ \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{25}{18} & \frac{5}{9} & \frac{-13}{18} \end{pmatrix}$$

Comprobación :

$$B^{-1}\cdot B = \frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 31 & 16 & -19 \\ 5 & 2 & 1 \\ 25 & 10 & -13 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TEOREMA 5 .
(Regla de Cramer)

Si $A\cdot X = B$ *es la forma matricial de un sistema de* n *ecuaciones lineales en exactamente* n *incógnitas de la forma :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

tal que $|A| \neq 0$, *entonces el sistema tiene una solución única dada por* :

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|} \quad , \quad x_2 = \frac{|B_2|}{|A|} \quad , \ldots , \quad x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

donde B_k *es la matriz que se obtiene al reemplazar la* ***k-ésima columna*** *de la matriz* A *por la matriz* B *de términos constantes*

DEMOSTRACIÓN :

Si $\left|A^{-1}\right| \neq 0$, entonces la matriz A es inversible y la solución del sistema lineal $A \cdot X = B$, como ya se ha visto antes, es :

$$X = A^{-1} \cdot B$$

y dado que la inversa de A se obtiene dividiendo su adjunta entre su determinante se tiene :

$$X = \left(\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)\right) \cdot B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & . & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & . & . & A_{n2} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & . & . & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si se desarrolla el producto $(adj(A)) \cdot (B)$, ésta expresión se puede escribir también como :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + ... + b_n \cdot A_{n1} \\ b_1 \cdot A_{12} + b_2 \cdot A_{22} + ... + b_n \cdot A_{n2} \\ . \\ . \\ b_1 \cdot A_{1n} + b_2 \cdot A_{2n} + ... + b_n \cdot A_{nn} \end{pmatrix}$$

La igualdad entre éstas dos matrices de tamaño $[n \times 1]$ implica que el elemento j-ésimo de X es :

$$x_{\mathbf{j}} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(b_1 \cdot A_{1 \cdot j} + b_2 \cdot A_{2j} + ... + b_n \cdot A_{nj}\right) \qquad (*)$$

Pero por otra parte, si la matriz $B_{\mathbf{j}}$ se obtiene reemplazando la columna j-ésima de A por la matriz B :

$$B_{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces , es claro que los cofactores de los elementos b_1 , b_2 , . . . , b_n son iguales a los cofactores de los elementos de A : a_{1j} , a_{2j} , a_{3j} , . . . , a_{nj} que están sobre la misma columna. Por lo tanto, de acuerdo al desarrollo de un determinante por cofactores se tiene :

$$|B_j| = b_1 \cdot A_{1 \cdot j} + b_2 \cdot A_{2j} + \ldots\ldots + b_n \cdot A_{nj} \qquad (**)$$

Comparando las expresiones (*) y (**) se concluye que . . .

$$x_j = \frac{|B_j|}{|A|}$$

para $j = 1 , 2 , \ldots , n$ tal como se quería demostrar .

OBSERVACIONES :

- La regla de Cramer se puede aplicar solamente a sistemas de ecuaciones lineales que tienen *exactamente* el mismo número de incógnitas que de ecuaciones.

- Para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas por la regla de Cramer, es necesario calcular $(n+1)$ determinantes de matrices de tamaño $[n \times n]$. Entonces para sistemas de más de 3 ecuaciones, los cálculos se hacen cada vez más laboriosos y en este sentido el método de Gauss es superior dado que implica transformar solamente *una* matriz $[n \times (n+1)]$ a la forma escalonada.

- No obstante , la regla de Cramer *es una fórmula analítica* para la solución de un especial sistema de ecuaciones lineales y su principal ventaja es que se puede obtener el valor de *cualquiera* de las n incógnitas del sistema *sin conocer el valor de las demás* . En el método de Gauss ésto no es posible .

Ejemplo 13 . Calcular el valor de las incógnitas en el sistema lineal :

$$2 \cdot x + 3 \cdot y + 2 \cdot z = 0$$
$$-x + 4 \cdot y + 3 \cdot z = 3$$
$$5 \cdot x - 6 \cdot y - 7 \cdot z = -3$$

Solución : La forma matricial del sistema es :

$$A \cdot X = B \qquad \text{es decir . . .} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -6 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Transformemos un poco la matriz A con el fin de calcular su determinante más fácilmente :

$$\begin{array}{l} R_1 \longrightarrow R_1 + 2\cdot R_2 : \\ R_3 \longrightarrow R_3 + 5\cdot R_2 : \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -6 & -7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 11 & 8 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

Calculando su determinante $|A|$ por desarrollo de cofactores a lo largo de la primera columna, se obtiene . . .

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + a_{31}\cdot A_{31} \\ &= 0\cdot A_{11} + a_{21}\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} \\ &= a_{21}\cdot(-1)^{2+1}\cdot M_{21} \\ &= (-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot \left|\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}\right| \\ &= -24 \end{aligned}$$

Además . . .

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y por lo tanto . . .} \quad |B_1| = \left|\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix}\right| = 24$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{y por lo tanto . . .} \quad |B_2| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}\right| = -48$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -6 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y por lo tanto . . .} \quad |B_3| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & -6 & -3 \end{pmatrix}\right| = 48$$

y de la regla de Cramer, se obtiene la solución . . .

$$x = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{24}{-24} = -1 \qquad y = \frac{|B_2|}{|A|} = \frac{-48}{-24} = 2 \qquad z = \frac{|B_3|}{|A|} = \frac{48}{-24} = -2$$

Ejemplo 14 . Hallar la matriz inversa de la matriz de coeficientes del siguiente sistema de ecuaciones lineales y determinar su solución :

$$5\cdot x + 3\cdot y + z = -10$$
$$-2\cdot x + y + 4\cdot z = 4$$
$$2\cdot x - 7\cdot y - 8\cdot z = 0$$

Solución : La forma matricial del sistema es :

$$A\cdot X = B \qquad \text{es decir . . .} \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y como ya sabemos, su solución es $X = A^{-1}\cdot B$ en donde la matriz de coeficientes del sistema es A y su inversa se calcula por . . .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj(A)$$

siendo $|A|$ su determinante y $adj(A)$ la matriz de cofactores transpuesta de A .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & -8 \end{pmatrix} \qquad ; \quad adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

calculando los cofactores . . .

$$A_{11} = \left|\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}\right| = 20 \quad A_{12} = (-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\right| = -8 \quad A_{13} = \left|\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\right| = 12$$

$$A_{21} = (-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}\right| = 17 \quad A_{22} = \left|\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}\right| = -42 \quad A_{23} = (-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\right| = 41$$

$$A_{31} = \left|\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\right| = 11 \quad A_{32} = (-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\right| = -22 \quad A_{33} = \left|\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 11$$

Además, el determinante de $|A|$ vale :

$$|A| = \left|\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & -8 \end{pmatrix}\right| = a_{13}\cdot A_{13} + a_{23}\cdot A_{23} + a_{33}\cdot A_{33}$$

$$= (1)\cdot(12) + (4)\cdot(41) + (-8)\cdot(11)$$

$$= 88$$

Por lo tanto, su matriz inversa es :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj(A) = \frac{1}{88}\cdot\begin{pmatrix} 20 & 17 & 11 \\ -8 & -42 & -22 \\ 12 & 41 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & \frac{17}{88} & \frac{1}{8} \\ \frac{-1}{11} & \frac{-21}{44} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{22} & \frac{41}{88} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

y puede comprobarse que $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I_3$.
Finalmente, la solución del sistema de ecuaciones es :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{88}\cdot\begin{pmatrix} 20 & 17 & 11 \\ -8 & -42 & -22 \\ 12 & 41 & 11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{88}\cdot\begin{pmatrix} -132 \\ -88 \\ 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es decir, $x = \frac{-3}{2}$, $y = -1$, $z = \frac{1}{2}$.

Comprobación :

$$5\cdot x + 3\cdot y + z = 5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 3\cdot(-1) + \left(\frac{1}{2}\right) = -10$$

$$-2\cdot x + y + 4\cdot z = -2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + (-1) + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$2\cdot x - 7\cdot y - 8\cdot z = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 7\cdot(-1) - 8\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

y en efecto el sistema se satisface.

El cálculo de una matriz inversa por medio de cofactores es un procedimiento alternativo al proceso de calcular la inversa por medio de la transformación de la matriz identidad con operaciones elementales .

EJERCICIO 7.4

1. De la matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ calcular M_{13} , M_{23} , M_{32} , M_{14} y A_{13} , A_{23} , A_{32} , A_{14}

2. Calcular el determinante $|A|$ del problema anterior por medio de un desarrollo por cofactores a lo largo de :
   i) el primer renglón ii) la segunda columna iii) el tercer renglón

3. Calcular la inversa de de la matriz A del problema anterior por medio de la matriz adjunta.

4. Evaluar el determinante de las siguientes matrices usando un desarrollo por cofactores a lo largo de cualquier renglón o de cualquier columna que se elija .

   i) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & -3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} k & k & -k \\ k^2 & -k^2 & k^2 \\ -k^3 & k^3 & k^3 \end{pmatrix}$

   iv) $\begin{pmatrix} k+1 & -1 & 2 \\ 1 & k+2 & -3 \\ -2 & 3 & k+3 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 9 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

5. Evaluar el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ por cofactores y por operacione elementales entre filas. ¿Cuál de los dos métodos implica menos cálculos? . ¿Cuál es más simple?

6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer siempre que sea posible .

   i) $2\cdot x - 5\cdot y = 8$
   $6\cdot x - 4\cdot y = 2$

   ii) $4\cdot x + 5\cdot y = -14$
   $11\cdot x + y + 2\cdot z = -19$
   $x + 5\cdot y + 2\cdot z = -17$

   iii) $-3\cdot x + y - z = 4$
   $4 + x + 5\cdot y - 8\cdot z = 17$
   $2\cdot x + 3\cdot y - 4\cdot z = 4$

   iv) $2\cdot x + 3\cdot y + z + w = 6$
   $-5\cdot x - 2\cdot y + 4\cdot z + 2\cdot w = 4$
   $-2\cdot x - 3\cdot y - 2\cdot z + 5\cdot w = 2$
   $5\cdot x + 4\cdot y + z - w = -3$

   v) $3\cdot x + 2\cdot y + 5\cdot z = -12$
   $-6\cdot x - 3\cdot y + 2\cdot z = 5$
   $2\cdot x + 2\cdot y + 8\cdot z = -14$

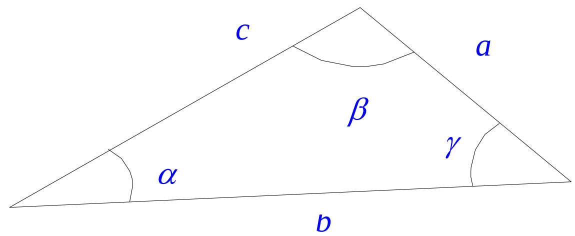
   vi) $x - 3\cdot z = 2$
   $x + y + z = -1$
   $y - 2\cdot z = 9$

7. Aplicar la regla de Cramer para expresar x' e y' en términos de x e y en la transformación siguiente:

$$x = x'\cdot cos(\theta) - y'\cdot sen(\theta)$$
$$y = x'\cdot sen(\theta) + y'\cdot cos(\theta)$$

8. Aplicar la trigonometria al siguiente triángulo para demostrar que :

$$b\cdot cos(\gamma) + c\cdot cos(\beta) = a$$
$$c\cdot cos(\alpha) + a\cdot cos(\gamma) = b$$
$$b\cdot cos(\alpha) + a\cdot cos(\beta) = c$$



y aplicando la regla de Cramer, mostrar que :

$$cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cdot b\cdot c} \quad ; \quad cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\cdot a\cdot c} \quad ; \quad cos(\gamma) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cdot a\cdot b}$$

9. Usando la regla de Cramer, calcular el valor de la variable z sin calcular antes x ni y en el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$3\cdot x + 4\cdot y - 2\cdot z + w = 13$$
$$-2\cdot x - y + z - w = 0$$
$$4\cdot x + 2\cdot y - 3\cdot z - 2\cdot w = -2$$
$$-x + y - 4\cdot z + 3\cdot w = 20$$

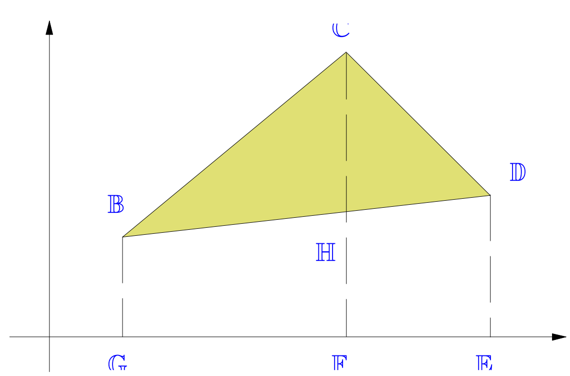
10. Probar que la ecuación de la recta que pasa por los puntos (a_1, b_1) , (a_2, b_2) se puede representar por:

$$\left|\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0$$

11. Probar que el área S de un triángulo se puede calcular según suguiere la siguiente figura, por :

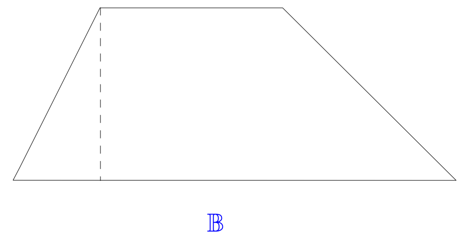
$$S = \frac{1}{2}\cdot \left|\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

donde (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) son las coordenadas de los puntos B , C y D respectivamente



(<u>*Sugerencia*</u> : *Considere el área del polígono BCDEFG dividida en partes y aplique que el área de un trapecio es igual a la altura* h *multiplicada por la semi-suma de sus bases*)

$$h\cdot\left(\frac{B+b}{2}\right)$$



<u>*Respuestas*</u> . *Ejercicio* 7.4

1. $M_{13} = -59$, $M_{23} = -43$, $M_{32} = 5$, $M_{14} = 20$

   $A_{13} = -59$, $A_{23} = 43$, $A_{32} = -5$, $A_{14} = -20$

2. i) $|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} + a_{14}\cdot A_{14}$

$$= (-3)\cdot\left|\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| + (-6)\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| + (-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| + (-1)\cdot\left|\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-3)\cdot 71 + (-6)\cdot -31 + (-1)\cdot -59 + (-1)\cdot 20$$

$$= 12$$

etc. etc.

3.

$$A_{11} = \left|\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 71 \qquad A_{12} = -\left|\begin{pmatrix} -2 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = 31 \qquad A_{13} = \left|\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = -59$$

$$A_{14} = -\left|\begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = -20 \qquad A_{21} = -\left|\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = -55 \qquad A_{22} = \left|\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = -23$$

$$A_{23} = -\left|\begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 43 \qquad A_{24} = \left|\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 16 \qquad A_{31} = \left|\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = -13$$

$$A_{32} = -\left|\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = -5 \qquad A_{33} = \left|\begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right| = 13 \qquad A_{34} = -\left|\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$A_{41} = -\left|\begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = 115 \qquad A_{42} = \left|\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = 47 \qquad A_{43} = -\left|\begin{pmatrix} -3 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}\right| = -91$$

$$A_{44} = \left|\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}\right| = -28$$

Matriz de cofactores : $\begin{pmatrix} 71 & 31 & -59 & -20 \\ -55 & -23 & 43 & 16 \\ -13 & -5 & 13 & 4 \\ 115 & 47 & -91 & -28 \end{pmatrix}$. Matriz adjunta : $adj(A) = \begin{pmatrix} 71 & -55 & -13 & 115 \\ 31 & -23 & -5 & 47 \\ -59 & 43 & 13 & -91 \\ -20 & 16 & 4 & -28 \end{pmatrix}$

y puesto que el determinante de A es 12 , se sigue que. . .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj(A) = \frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 71 & -55 & -13 & 115 \\ 31 & -23 & -5 & 47 \\ -59 & 43 & 13 & -91 \\ -20 & 16 & 4 & -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{71}{12} & \frac{-55}{12} & \frac{-13}{12} & \frac{115}{12} \\ \frac{31}{12} & \frac{-23}{12} & \frac{-5}{12} & \frac{47}{12} \\ \frac{-59}{12} & \frac{43}{12} & \frac{13}{12} & \frac{-91}{12} \\ \frac{-5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-7}{3} \end{pmatrix}$$

Comprobación :

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{12}\cdot\left[\begin{pmatrix} 71 & -55 & -13 & 115 \\ 31 & -23 & -5 & 47 \\ -59 & 43 & 13 & -91 \\ -20 & 16 & 4 & -28 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. i) 42 ii) -5

iii) $-4\cdot k^6$ iv) $k^3 + 6\cdot k^2 + 25\cdot k + 26$

v) 100 vi) -60

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} R_2 \longrightarrow -R_2 + 2\cdot R_1 : \\ R_3 \longrightarrow -R_3 + 3\cdot R_1 : \\ R_4 \longrightarrow R_4 + R_1 : \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el determinante de $|A|$ es . . .

$$|A| = 1\cdot A_{11} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} = A_{11}$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 5 & 7 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right| = (-1)^{1+3}\cdot(6)\cdot\left|\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}\right| = 6\cdot(42) = 252$$

6. i) $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|A| = 22$

$$x = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\right|}{22} = \frac{-22}{22} = -1 \quad ;$$

$$y = \frac{|B_2|}{|A|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}\right|}{22} = \frac{-44}{22} = -2$$

ii) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -14 \\ -19 \\ -17 \end{pmatrix}$; $|A| = -132$

$$x = \frac{|B_1|}{|A|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -14 & 5 & 0 \\ -19 & 1 & 2 \\ -17 & 5 & 2 \end{pmatrix}\right|}{-132} = \frac{132}{-132} = -1 \quad ;$$

$$y = \frac{|B_2|}{|A|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 & -14 & 0 \\ 11 & -19 & 2 \\ 1 & -17 & 2 \end{pmatrix}\right|}{-132} = \frac{-2\cdot\left|\begin{pmatrix} 4 & -14 \\ 1 & -17 \end{pmatrix}\right| + 2\cdot\left|\begin{pmatrix} 4 & -14 \\ 11 & -19 \end{pmatrix}\right|}{-132} = \frac{264}{-132} = -2$$

$$z = \frac{|B_3|}{|A|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 & 5 & -14 \\ 11 & 1 & -19 \\ 1 & 5 & -17 \end{pmatrix}\right|}{-132} = \frac{396}{-132} = -3$$

y continuando asi. resulta que la solución de iv) , v) y vi) es $x = -4$, $y = 5$, $z = -2$, $w = 1$.

7. $$x' = \frac{\left|\begin{pmatrix} x & -sen(\theta) \\ y & cos(\theta) \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}\right|} = \frac{x\cdot cos(\theta) + y\cdot sen(\theta)}{1} = x\cdot cos(\theta) + y\cdot sen(\theta)$$

$$y' = \frac{\left|\begin{pmatrix} cos(\theta) & x \\ sen(\theta) & y \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}\right|} = \frac{y\cdot cos(\theta) - x\cdot sen(\theta)}{1} = y\cdot cos(\theta) - x\cdot sen(\theta)$$

9. $z = -2$

11. $$Area = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)\cdot(x_2 - x_1) + \left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right)\cdot(x_3 - x_2) - \left(\frac{y_3 + y_1}{2}\right)\cdot(x_3 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\, y_1\cdot(x_2 - x_3) - y_2\cdot(x_1 - x_3) + y_3\cdot(x_1 - x_2) \,\right] = \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}\right|$$