1 Repaso de álgebra básica

1.1 El sistema de los números reales

1.2 Aritmética y propiedades de los números reales

1.3 Exponentes

1.4 Notación científica

1.5 Resolución de ecuaciones

1.6 Uso de ecuaciones para resolver problemas

1.7 Más aplicaciones de ecuaciones

Proyectos

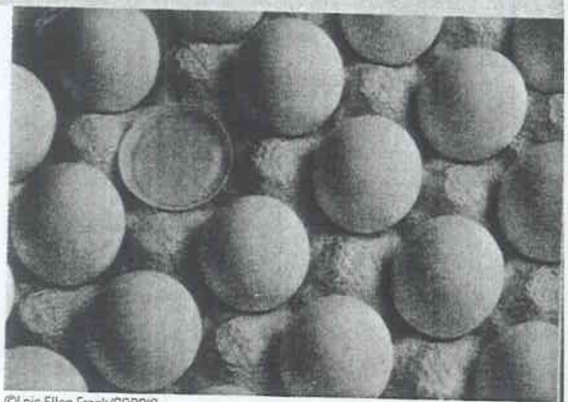
Resumen del capítulo

Examen del capítulo

Problema inicial

Un fabricante desea hacer 12.6 onzas de una mezcla de aceite de linaza, aceite de oliva y aceite de coco. Usará 2.2 onzas de aceite de coco que cuesta $1.56 por onza. ¿Cuánto aceite de linaza a $0.46 por onza y aceite de oliva a $0.78 por onza debe agregar para que la mezcla final cueste $11?

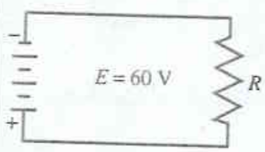
Termine este problema después de estudiar la sección 1.7.



©Lois Ellen Frank/CORBIS

Conjunto de ejercicios 1.5 Problema 116

Matemáticas en electrónica



El dibujo de la izquierda es un diagrama esquemático de un resistor conectado a una fuente de voltaje de 60 volts. En consecuencia, el resistor disipa potencia en forma de calor. La potencia P que se pierde cuando se conecta un voltaje V a través de una resistencia R está dada por la fórmula

$$P = \frac{E^2}{R}$$

Resuelva la fórmula para R. Si P es 4.8 watts y E es 60 volts, encuentre R.

*El lenguaje de las matemáticas es el álgebra. La palabra **álgebra** proviene del título de un libro escrito hacia el año 800 d.C. por el matemático árabe Al-Juarizmi. Su título, **Ihmal-jabr wa'l muqabalah**, significa restauración y reducción, un proceso empleado entonces para resolver ecuaciones.*

En álgebra, trabajaremos con expresiones que contienen números y letras. Las letras que representan números se llaman **variables.** Algunos ejemplos de expresiones algebraicas son

$$x + 45, \qquad \frac{8x}{3} - \frac{y}{2}, \qquad \frac{1}{2}bh, \qquad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \qquad \text{y} \qquad 3x + 2y - 12$$

El uso de variables es lo que distingue al álgebra de la aritmética.

1.1 El sistema de los números reales

- Conjuntos de números
- Símbolos de desigualdad
- Gráficas de números reales
- Valor absoluto de un número

Para comenzar

1. Mencione algunas clases diferentes de números.
2. ¿Existe un número que sea el más grande?

Comenzaremos el estudio del álgebra con un repaso de varios subconjuntos de los números reales. También mostraremos la forma de graficar estos conjuntos sobre una recta numérica.

Conjuntos de números

Un **conjunto** es una colección de objetos. Para denotar un conjunto, con frecuencia encerramos entre llaves una lista de sus **elementos.** Por ejemplo,

$\{1, 2, 3, 4\}$ denota el conjunto con los elementos 1, 2, 3 y 4.

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\}$ denota el conjunto con los elementos $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.

Tres conjuntos de números que se emplean en álgebra son los siguientes:

Números naturales

El conjunto de los **números naturales** incluye los números que usamos para contar:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

Números enteros no negativos

El conjunto de los **números enteros no negativos** incluye los números naturales junto con el 0:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

Enteros

El conjunto de los **enteros** incluye los números naturales, el 0 y los negativos de los números naturales:

$$\{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Cada grupo de tres puntos, llamado **puntos suspensivos,** indica que los números continúan indefinidamente.

En la figura 1.1 graficamos cada uno de estos conjuntos de -6 a 6 sobre una recta numérica.

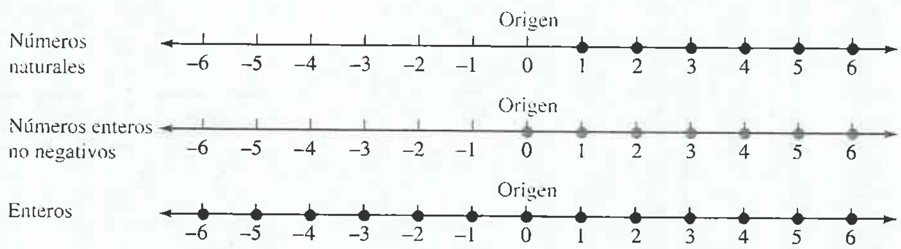


Figura 1-1

Puesto que todo número natural es también un número entero no negativo, decimos que el conjunto de números naturales es un **subconjunto** del conjunto de los números enteros no negativos. Observe que el conjunto de números naturales y el conjunto de números enteros no negativos también son subconjuntos de los enteros.

A cada número x en la figura 1-1 le corresponde un punto sobre la recta numérica llamado su **gráfica,** y a cada punto le corresponde un número x llamado su **coordenada.** Los números situados a la izquierda del 0 son **números negativos,** y los números a la derecha del 0 son **números positivos.**

Comentario El 0 no es positivo ni negativo.

Hay dos subconjuntos importantes de los números naturales.

Números primos

Los **números primos** son números naturales mayores a 1 que son divisibles solo entre 1 y entre sí mismos.

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots\}$$

Números compuestos

Los **números compuestos** son los números naturales mayores a 1 que no son primos.

$$\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, \ldots\}$$

La figura 1-2 muestra las gráficas de los números primos y compuestos que son menores o iguales a 14.

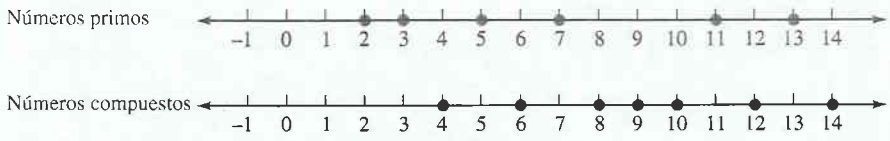


Figura 1-2

Comentario El 1 es el único número natural que no es primo ni compuesto.

Hay dos subconjuntos importantes de los enteros.

Enteros pares Los **enteros pares** son aquellos que son divisibles exactamente entre 2.

$$\{\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Enteros impares Los **enteros impares** son aquellos enteros distintos de cero que no son divisibles exactamente entre 2.

$$\{\ldots, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

La figura 1-3 muestra las gráficas de los enteros pares e impares de -6 a 6.

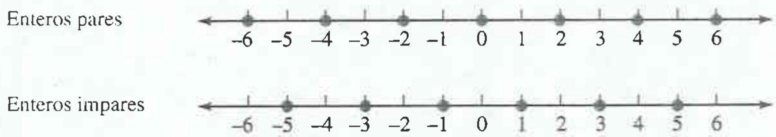


Figura 1-3

Hasta aquí, hemos escrito conjuntos delimitando sus elementos dentro de llaves. Este método se llama **método de lista.** Un conjunto también se puede escribir en **notación que define el conjunto.** En este método, escribimos una regla que describe qué elementos están en un conjunto. Por ejemplo, el conjunto de enteros pares se puede escribir en notación que define el conjunto como sigue:

$$\{x \mid x \text{ es un entero que se puede dividir exactamente entre 2.}\}$$

El conjunto de toda x tal que regla que describe la pertenencia en el conjunto.

Para hallar coordenadas de más puntos sobre la recta numérica, necesitamos los **números racionales.**

Números racionales El conjunto de **números racionales** es

$$\left\{x \,\middle|\, x \text{ se puede escribir en la forma } \frac{a}{b}\ (b \neq 0)\text{, donde } a \text{ y } b \text{ son enteros.}\right\}$$

En la siguiente lista cada elemento es un número racional.

$$\frac{8}{5},\ \frac{2}{3},\ -\frac{44}{23},\ \frac{-315}{476},\ 0 = \frac{0}{7}\ \text{ y }\ 17 = \frac{17}{1}$$

Porque cada número tiene un numerador entero y un denominador entero diferente de cero.

Comentario Note que $\frac{0}{5} = 0$, porque $5 \cdot 0 = 0$. Sin embargo, $\frac{5}{0}$ no está definido, porque no hay un número que, cuando se multiplica por 0, dé 5.

La fracción $\frac{0}{0}$ es indeterminada, porque todos los números, cuando se multiplican por 0, dan 0. Recuerde, el denominador de una fracción no puede ser 0.

EJEMPLO 1 Explique por qué cada número es racional: **a.** -7, **b.** 0.125 y **c.** $-0.666\ldots$

Solución **a.** El entero -7 es un número racional porque se puede escribir como $\frac{-7}{1}$, donde -7 y 1 son enteros y el denominador no es 0. Note que todos los enteros son números racionales.

b. El decimal 0.125 es un número racional porque se puede escribir como $\frac{1}{8}$, donde 1 y 8 son enteros y el denominador no es 0.

c. El decimal $-0.666\ldots$ es un número racional porque se puede escribir como $\frac{-2}{3}$, donde -2 y 3 son enteros y el denominador no es 0.

Autoprueba Explique por qué es racional cada número: **a.** 4 y **b.** 0.5.

El siguiente ejemplo ilustra que cada número racional se puede escribir como decimal finito o periódico, es decir, que repite un bloque de dígitos.

EJEMPLO 2 Cambie cada fracción a forma decimal y diga si el decimal es finito o periódico: **a.** $\frac{3}{4}$ y **b.** $\frac{421}{990}$.

Solución **a.** Para cambiar $\frac{3}{4}$ a decimal, divida 3 entre 4 para obtener 0.75. Éste es un decimal finito.

b. Para cambiar $\frac{421}{990}$ a decimal, dividimos 421 entre 990 para obtener $0.4252525\ldots$ Éste es un decimal periódico, porque el bloque de dígitos 25 se repite indefinidamente. Se tiene entonces un decimal que se puede escribir como $0.4\overline{25}$, donde la barra indica el bloque periódico de dígitos.

Autoprueba Cambie cada fracción a forma decimal y diga si el decimal termina o se repite: **a.** $\frac{5}{11}$ y **b.** $\frac{2}{5}$.

Los números racionales dan coordenadas para muchos puntos sobre la recta numérica que están entre los enteros (vea la figura 1-4). Note que los enteros son un subconjunto de los números racionales.

Gráficas de algunos números racionales

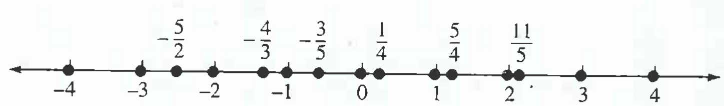


Figura 1-4

Los puntos sobre la recta numérica cuyas coordenadas sean decimales infinitos no periódicos, tienen coordenadas que se denominan **números irracionales.**

Números irracionales El conjunto de **números irracionales** es

$$\{x \mid x \text{ es un decimal infinito no periódico.}\}$$

Algunos ejemplos de números irracionales son

$0.313313331\ldots \qquad \sqrt{2} = 1.414213562\ldots \qquad \pi = 3.141592653\ldots$

Si unimos el conjunto de números racionales (los decimales finitos o periódicos) y el conjunto de números irracionales (los decimales infinitos no periódicos), obtenemos el conjunto de **números reales.**

Números reales

El conjunto de **números reales** es

$\{x \mid x$ es un decimal finito o periódico, o un decimal infinito no periódico.$\}$

La recta numérica de la figura 1-5 muestra varios puntos sobre la recta numérica y sus coordenadas de números reales. Los puntos cuyas coordenadas sean números reales llenan la recta numérica.

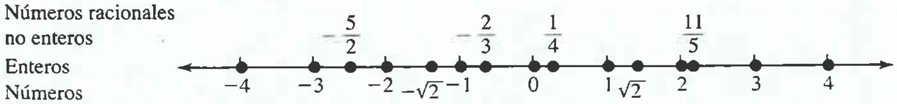


Figura 1-5

La figura 1-6 muestra cómo se relacionan varios de los anteriores conjuntos de números.

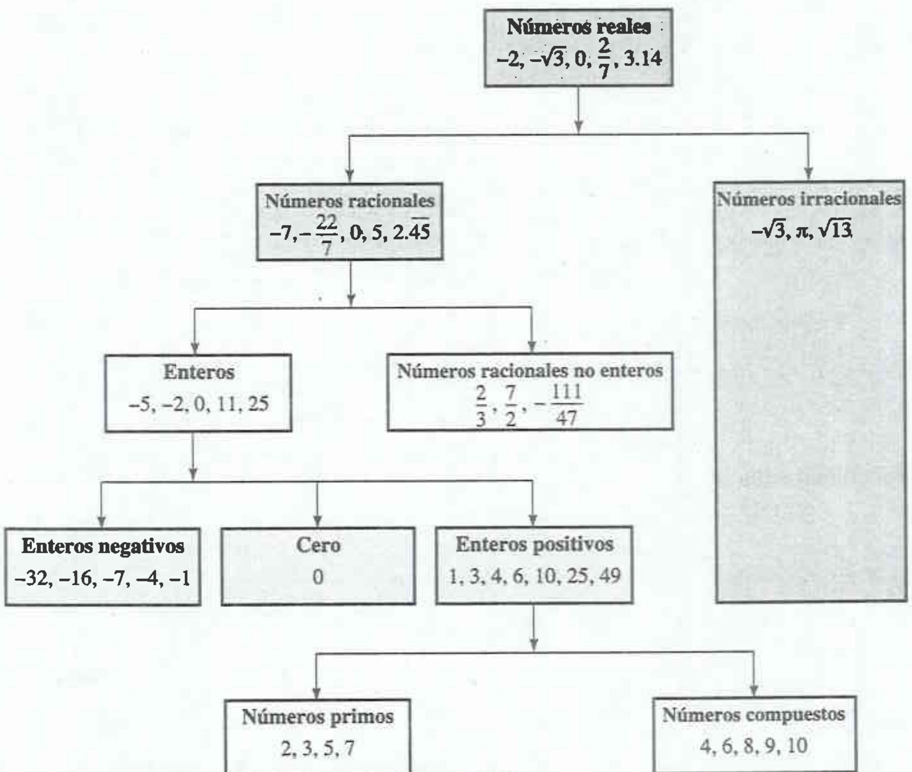


Figura 1-6

Símbolos de desigualdad

Para demostrar que dos cantidades no son iguales, podemos usar un **símbolo de desigualdad.**

Símbolo	Léase como	Ejemplos
$\neq$	"no es igual a"	$6 \neq 9$ y $0.33 \neq \frac{3}{5}$
$<$	"es menor que"	$22 < 40$ y $0.27 < 3.1$
$>$	"es mayor que"	$19 > 5$ y $\frac{1}{2} > 0.3$
$\leq$	"es menor o igual a"	$1.8 \leq 3.5$ y $35 \leq 35$
$\geq$	"es mayor o igual a"	$25.2 \geq 23.7$ y $29 \geq 29$

Siempre podemos escribir una desigualdad con el símbolo de desigualdad apuntando en la dirección opuesta. Por ejemplo.

$17 < 25$ es equivalente a $25 > 17$

$5.3 \geq -2.9$ es equivalente a $-2.9 \leq 5.3$

Sobre la recta numérica, las coordenadas de puntos aumentan a medida que nos movemos de izquierda a derecha, como se muestra en la figura 1-7. Así, si a y b son las coordenadas de dos puntos, el de la derecha es el mayor. Esto sugiere el siguiente principio general:

Si $a > b$, el punto a está a la derecha del punto b sobre la recta.

Si $a < c$, el punto a está a la izquierda del punto c sobre la recta.

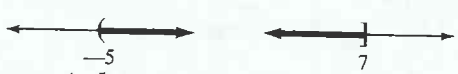
Figura 1-7

Gráficas de números reales

Es frecuente que las gráficas de conjuntos de números reales sean partes de una recta numérica llamadas **intervalos.** Por ejemplo, la gráfica que se ilustra en la figura 1-8(a) es el intervalo que incluye todos los números reales x que son mayores que -5. Como estos números hacen que la desigualdad $x > -5$ sea verdadera, decimos que satisfacen la desigualdad. El paréntesis sobre la gráfica indica que -5 no está incluido en el intervalo.

Para expresar este intervalo en **notación de intervalos,** escribimos $(-5, \infty)$. Una vez más, los paréntesis indican que los puntos finales no están incluidos.

El intervalo que se muestra en la figura 1-8(b) es la gráfica de la desigualdad $x \leq 7$. Contiene todos los números reales que son menores o iguales a 7. El paréntesis rectangular en 7 indica que el 7 está incluido en el intervalo. Para expresar este intervalo en notación de intervalos, escribimos $(-\infty, 7]$. El paréntesis rectangular indica que 7 está en el intervalo.



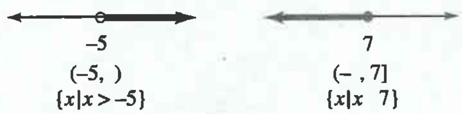
(—5,) {x|x > —5} (a)

(— , 7] {x|x † 7} (b)

Figura 1-8

Comentario El símbolo ∞ (infinito) no es un número real. Se utiliza para indicar que la gráfica de la figura 1-8(a) se extiende infinitamente a la derecha, y la gráfica de la figura 1-8(b) se extiende infinitamente a la izquierda.

Las gráficas de la figura 1-8 también se pueden trazar con el uso de círculos vacíos y llenos. Un círculo vacío indica que un punto extremo no está incluido, y un círculo lleno indica que está incluido el punto extremo.



EJEMPLO 3 Grafique cada conjunto sobre la recta numérica y luego escríbalo en notación de intervalos:

a. $\{x|x < 9\}$ y **b.** $\{x|x \geq 6\}$.

Solución **a.** $\{x|x < 9\}$ incluye todos los números reales menores a 9. La gráfica se muestra en la figura 1-9(a). Éste es el intervalo $(-\infty, 9)$.

b. $\{x|x \geq 6\}$ incluye todos los números reales mayores o iguales a 6. La gráfica se muestra en la figura 1-9(b). Éste es el intervalo $[6, \infty)$.

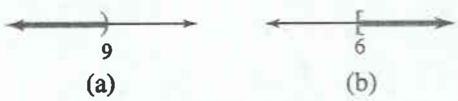


Figura 1-9

Autoprueba Grafique $\{x|x \geq 5\}$ y escríbalo en notación de intervalos.

Es frecuente que dos desigualdades se puedan escribir en una sola expresión. Por ejemplo,

$$2 < x < 15$$

es una combinación de las desigualdades $2 < x$ y $x < 15$. Se lee como "2 es menor a x, y x es menor a 15". Significa que x está entre 2 y 15. Su gráfica se muestra en la figura 1-10.

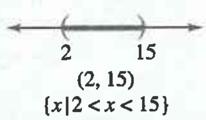


Figura 1-10

EJEMPLO 4 Grafique cada conjunto sobre la recta numérica y luego escríbalo en notación de intervalos:

a. $\{x|-5 \leq x \leq 6\}$ **b.** $\{x|2 < x \leq 8\}$ y **c.** $\{x|-4 \leq x < 3\}$.

Solución **a.** El conjunto $\{x|-5 \leq x \leq 6\}$ incluye todos los números reales de -5 a 6, como se ve en la figura 1-11(a). Éste es el intervalo $[-5, 6]$.

b. El conjunto $\{x|2 < x \leq 8\}$ incluye todos los números reales entre 2 y 8, incluyendo 8, como se ve en la figura 1-11(b). Éste es el intervalo $(2, 8]$.

c. El conjunto $\{x|-4 \leq x < 3\}$ incluye todos los números reales entre -4 y 3, incluyendo el -4, como se ve en la figura 1-11(c). Éste es el intervalo $[-4, 3)$.

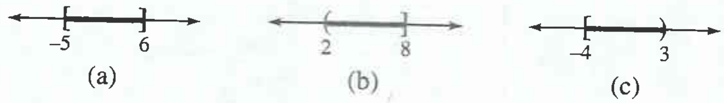


Figura 1-11

Autoprueba Grafique $\{x|-6 < x \leq 10\}$ y luego escríbalo en notación de intervalos.

La gráfica del conjunto

$\{x|x < -2 \text{ o } x \geq 3\}$ Se lee como "el conjunto de todos los números reales x, tales que x es menor que -2 o mayor o igual a 3".

se ilustra en la figura 1-12. Esta gráfica se denomina **unión** de dos intervalos y se puede escribir en notación de intervalos como

$(-\infty, -2) \cup [3, \infty)$ Léase el símbolo $\cup$ como "unión".

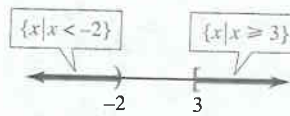


Figura 1-12

EJEMPLO 5 Grafique el conjunto sobre la recta numérica y luego escríbalo en notación de intervalos: $\{x|x \leq -4 \text{ o } x > 5\}$.

Solución El conjunto $\{x|x \leq -4 \text{ o } x > 5\}$ incluye todos los números reales menores o iguales a -4 junto con todos los números reales mayores a 5, como se ve en la figura 1-13. Éste es el intervalo $(-\infty, -4] \cup (5, \infty)$.

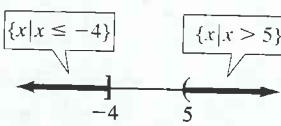


Figura 1-13

Autoprueba Grafique $\{x|x < -1 \text{ o } x > 5\}$ y luego escríbalo en notación de intervalos.

La siguiente tabla muestra tres formas de describir un intervalo.

Notación de conjunto	Gráfica	Notación de intervalos
$\{x \mid x > a\}$	a	(a, ∞)
$\{x \mid x < a\}$	a	$(-\infty, a)$
$\{x \mid x \geq a\}$	a	$[a, \infty)$
$\{x \mid x \leq a\}$	a	$(-\infty, a]$
$\{x \mid a < x < b\}$	a b	(a, b)
$\{x \mid a \leq x < b\}$	a b	$[a, b)$
$\{x \mid a < x \leq b\}$	a b	$(a, b]$
$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	a b	$[a, b]$
$\{x \mid x < a \text{ o } x > b\}$	a b	$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$

Valor absoluto de un número

El **valor absoluto** de un número real a, denotado como $|a|$, es la distancia sobre una recta numérica entre 0 y el punto con coordenada a. Por ejemplo, los puntos que se muestran en la figura 1-14 con coordenadas de 3 y -3 se encuentran ambos a 3 unidades del 0. Por lo tanto, $|3| = |-3| = 3$.

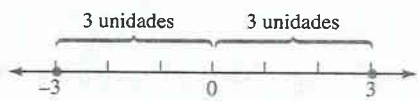


Figura 1-14

En general, para cualquier número real a, $|a| = |-a|$.

A continuación se da la definición formal de valor absoluto.

Valor absoluto

Para cualquier número real x, $\begin{cases} \text{Si } x \geq 0, \text{ entonces } |x| = x. \\ \text{Si } x < 0, \text{ entonces } |x| = -x. \end{cases}$

Si x es positivo o 0, entonces x es su propio valor absoluto. No obstante, si x es negativo, entonces $-x$ (que es un número positivo) es el valor absoluto de x. En consecuencia, $|x| \geq 0$ para todos los números reales x.

EJEMPLO 6 Encuentre cada uno de los siguientes valores absolutos:

a. $|3| = 3$

b. $|-4| = 4$

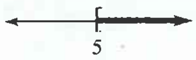
c. $|0| = 0$

d. $-|-8| = -(8) = -8$ Note que $|-8| = 8$.

Autoprueba Encuentre cada uno de los siguientes valores absolutos: **a.** $|-9|$ y **b.** $-|-12|$. ▮

Respuestas a autopruebas

1. a. $4 = \frac{4}{1}$, **b.** $0.5 = \frac{1}{2}$ **2. a.** $0.\overline{45}$, decimal periódico, **b.** 0.4, decimal finito

3.  $[5, \infty)$ **4.**  $(-6, 10]$ **5.**  $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$

6. a. 9, **b.** -12

Examen oral

1. Defina un número natural.
2. Defina un número entero no negativo.
3. Defina un entero.
4. Defina un número racional.
5. Cite los primeros cuatro números primos.
6. Cite los primeros cinco enteros pares positivos.
7. Encuentre $|-6|$.
8. Encuentre $|10|$.

1.1 EJERCICIOS

REPASO *Para simplificar una fracción, factorice el numerador y el denominador y elimine los factores comunes. Por ejemplo,* $\frac{12}{18} = \frac{6 \cdot 2}{6 \cdot 3} = \frac{\cancel{6} \cdot 2}{\cancel{6} \cdot 3} = \frac{2}{3}$. *Simplifique cada fracción.*

1. $\frac{6}{8}$ **2.** $\frac{15}{20}$

3. $\frac{32}{40}$ **4.** $\frac{56}{72}$

Para multiplicar fracciones, multiplique los numeradores y multiplique los denominadores. Para dividir fracciones, invierta el divisor y multiplique. Si es posible, siempre simplifique el resultado.

5. $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5}$ **6.** $\frac{3}{5} \cdot \frac{20}{27}$

7. $\frac{2}{3} \div \frac{3}{7}$ **8.** $\frac{3}{5} \div \frac{9}{15}$

Para sumar (o restar) fracciones, escriba cada fracción con un común denominador y sume (o reste) los numeradores y mantenga el mismo denominador. Si es posible, siempre simplifique el resultado.

9. $\frac{5}{9} + \frac{4}{9}$ **10.** $\frac{16}{7} - \frac{2}{7}$

11. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$ **12.** $\frac{7}{9} - \frac{2}{5}$

VOCABULARIO Y CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

13. Un ________ es una colección de objetos.

14. Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . forman el conjunto de números ____________.

15. Un entero ____ puede dividirse exactamente entre 2.

16. Un entero ____ no puede dividirse exactamente entre 2.

17. Un número primo es un número ______ que es mayor a __ y sólo puede dividirse exactamente entre 1 y ________.

18. Un número ________ es un número natural mayor a __ que no es ______.

19. El __ no es positivo ni negativo.

20. El denominador de una fracción nunca puede ser __.

21. Un decimal periódico representa un número _______.

22. Un decimal que no sea periódico ni finito representa un número ________.

23. El símbolo __ significa "menor que".

24. El símbolo __ significa "mayor o igual que".

25. El símbolo __ significa "es aproximadamente igual a".

26. Si x es negativo, $|x| =$ ___.

Anote los elementos del conjunto $\left\{-3, 0, \frac{2}{3}, 1, \sqrt{3}, 2, 9\right\}$ *que satisfagan la condición dada.*

27. número natural **28.** número entero no negativo

29. entero **30.** número racional

31. número irracional **32.** número real

33. número natural par **34.** entero impar

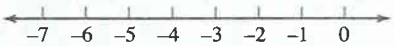
35. número primo **36.** número compuesto

37. número compuesto impar **38.** número primo par

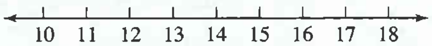
PRÁCTICA *Grafique cada conjunto sobre la recta numérica.*

39. El conjunto de números primos menores que 8

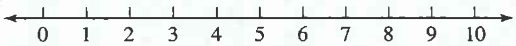
40. El conjunto de enteros entre -7 y 0



41. El conjunto de enteros impares entre 10 y 18



42. El conjunto de números compuestos menores a 10



Cambie cada fracción a decimal y clasifique el resultado como decimal finito o periódico.

43. $\frac{7}{8}$ **44.** $\frac{7}{3}$

45. $-\frac{11}{15}$ **46.** $-\frac{19}{16}$

Inserte un símbolo $<$ o un $>$ que haga verdadero al enunciado.

47. $5 \quad 9$ **48.** $9 \quad 0$

49. $-5 \quad -10$ **50.** $-3 \quad 10$

51. $-7 \quad 7$ **52.** $0 \quad -5$

53. $6 \quad -6$ **54.** $-6 \quad -2$

Escriba cada uno de los enunciados con el símbolo de desigualdad apuntando en la dirección opuesta.

55. $19 > 12$ **56.** $-3 \geq -5$

57. $-6 \leq -5$ **58.** $-10 < 13$

59. $5 \geq -3$ **60.** $0 \leq 12$

61. $-10 < 0$ **62.** $-4 > -8$

Grafique cada conjunto sobre la recta numérica.

63. $\{x | x > 3\}$ **64.** $\{x | x < 0\}$

65. $\{x | x \leq 7\}$ **66.** $\{x | x \geq -2\}$

67. $[-5, \infty)$ **68.** $(-\infty, 9]$

69. $\{x | 2 < x < 5\}$ **70.** $[0, 5)$

71. $[-6, 9]$ **72.** $\{x | -1 < x \leq 3\}$

73. $\{x | x < -3 \text{ o } x > 3\}$ **74.** $(-\infty, -4] \cup (2, \infty)$

75. $(-\infty, -6] \cup [5, \infty)$ **76.** $\{x | x < -2 \text{ o } x \geq 3\}$

Escriba cada una de las siguientes expresiones sin usar símbolos de valor absoluto. Siempre que sea posible, simplifique el resultado.

77. $|20|$ **78.** $|-20|$

79. $-|-6|$ **80.** $-|8|$

81. $|-5| + |-2|$ **82.** $|12| + |-4|$

83. $|-5| \cdot |4|$ **84.** $|-6| \cdot |-3|$

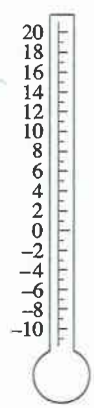
85. Encuentre x si $|x| = 3$. **86.** Encuentre x si $|x| = 7$.

87. ¿Qué números x son iguales a sus propios valores absolutos?

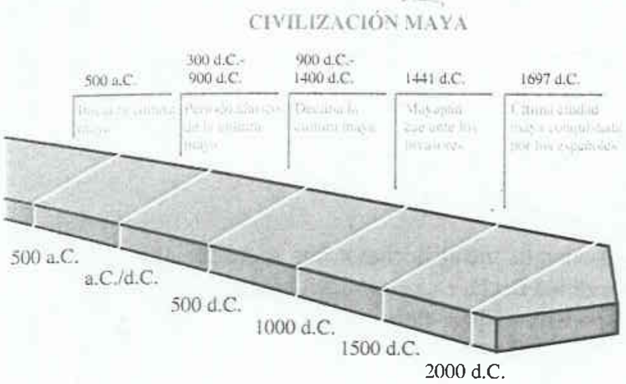
88. ¿Qué números x, cuando se suman a sus propios valores absolutos, dan una suma de 0?

APLICACIONES

89. En el termómetro de la ilustración, grafique cada una de las siguientes lecturas de temperatura: 12°, 8°, 0°, -6°.



90. Sobre la recta numérica de la ilustración, el origen está en el punto a.C/d.C.
   a. ¿Qué sucedió en el año 1441?
   b. ¿Qué sucedió en el año -500?



Datos basados en People in Time and Place, Western Hemisphere (Silver Burdett & Ginn Inc., 1991), p. 129

EXAMEN ESCRITO

91. Explique por qué los enteros son un subconjunto de los números racionales.

92. Explique por qué todo entero es un número racional, pero no todo número racional es un entero.

93. Explique por qué el conjunto de primos junto con el conjunto de compuestos no es el conjunto de números naturales.

94. ¿Es siempre positivo el valor absoluto de un número? Explique.

ALGO PARA PENSAR

95. ¿Cuántos enteros tienen un valor absoluto menor a 50?

96. ¿Cuántos enteros impares tienen un valor absoluto entre 20 y 40?

97. La **propiedad de tricotomía** de números reales indica que

Si a y b son dos números reales, entonces

$$a < b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a > b$$

Explique por qué es esto verdadero.

98. De los siguientes enunciados, ¿cuáles son siempre verdaderos?
   a. $|a + b| = |a| + |b|$
   b. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
   c. $|a + b| \leq |a| + |b|$

1.2 Aritmética y propiedades de los números reales

- Adición de números reales
- Sustracción de números reales
- Multiplicación de números reales
- División de números reales
- Orden de las operaciones
- Medidas de tendencia central
- Evaluación de expresiones algebraicas
- Propiedades de los números reales

Para comenzar *Efectúe cada una de las operaciones siguientes.*

1. $5 + 4$	**2.** $4 + 5$	**3.** $3 \cdot 4$	**4.** $4 \cdot 3$
5. $12 - 7$	**6.** $15 \div 3$	**7.** $21 \div 7$	**8.** $25 - 19$

En esta sección demostraremos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir números reales. A continuación estudiaremos varias propiedades de los números reales.

Adición de números reales

Cuando se efectúa la adición de dos números, el resultado se denomina **suma.** Para hallar la suma de $+2$ y $+3$, podemos usar la recta numérica y representar los números con flechas, como se muestra en la figura 1-15(a). Como el punto final de la segunda flecha está en $+5$, tenemos $+2 + (+3) = +5$.

Para sumar -2 y -3, podemos trazar flechas como se ve en la figura 1-15(b). Como el punto final de la segunda flecha está en -5, tenemos $(-2) + (-3) = -5$.

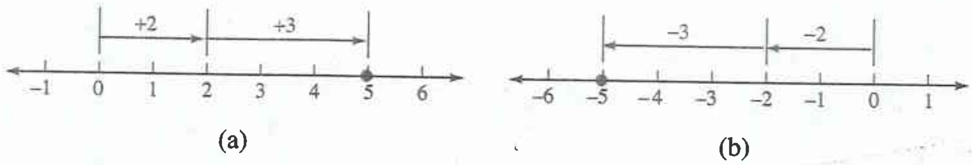


Figura 1-15

Para sumar -6 y $+2$, podemos trazar flechas como se ve en la figura 1-16(a). Como el punto final de la segunda flecha está en -4, tenemos $(-6) + (+2) = -4$.

Para sumar $+7$ y -4, podemos trazar flechas como se ve en la figura 1-16(b). Como el extremo de la flecha final está en $+3$, tenemos $(+7) + (-4) = +3$.

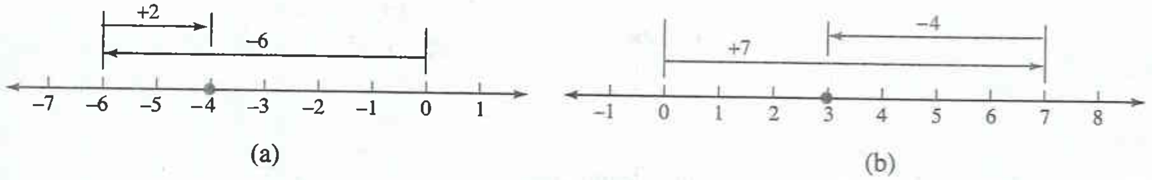


Figura 1-16

Estos ejemplos sugieren las siguientes reglas.

Adición de números reales

Con signos iguales: Sumar los valores absolutos de los números y mantener el signo común.

Con signos diferentes: Restar los valores absolutos de los números (del mayor, restar el menor) y mantener el signo del número con mayor valor absoluto.

EJEMPLO 1 Sume los números:

a. $+4 + (+6) = +10$ Sumar los valores absolutos y usar el signo común: $4 + 6 = +10$.

b. $-5 + (-3) = -8$ Sumar los valores absolutos y usar el signo común: $-(5 + 3) = -8$.

c. $+9 + (-5) = +4$ Restar los valores absolutos y usar un signo $+$: $+(9 - 5) = +4$.

d. $-12 + (+5) = -7$ Restar los valores absolutos y usar un signo $-$: $-(12 - 5) = -7$.

Autoprueba Sumar: **a.** $-7 + (-2)$, **b.** $-7 + 2$, **c.** $7 + 2$ y **d.** $7 + (-2)$. ∎

Sustracción de números reales

Cuando un número se resta de otro número, el resultado se denomina **diferencia.** Para hallar una diferencia, podemos convertir la resta en una suma equivalente. Por ejemplo, la resta de $7 - 4$ es equivalente a la suma de $7 + (-4)$, porque tienen el mismo resultado:

$$7 - 4 = 3 \quad \text{y} \quad 7 + (-4) = 3$$

Esto sugiere que, para restar dos números, cambiamos el signo del número que se resta y sumamos.

Sustracción de números reales Si a y b son números reales, entonces $a - b = a + (-b)$.

EJEMPLO 2 Reste:

a. $12 - 4 = 12 + (-4)$ Cambie el signo del 4 y sume.
$= 8$

b. $-13 - 5 = -13 + (-5)$ Cambie el signo del 5 y sume.
$= -18$

c. $-14 - (-6) = -14 + (+6)$ Cambie el signo del -6 y sume.
$= -8$

Autoprueba Reste: **a.** $-15 - 4$, **b.** $8 - 5$ y **c.** $-12 - (-7)$.

Multiplicación de números reales

Cuando se multiplican dos números, el resultado se llama **producto.** Podemos hallar el producto de 5 y 4 si usamos el 4 cinco veces en una suma:

$$5(4) = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

El producto de 5 y -4 lo hallamos al usar -4 cinco veces en una suma:

$$5(-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20$$

Puesto que la multiplicación por un número negativo se puede definir como resta repetida, podemos hallar el producto de -5 y 4 si usamos el 4 cinco veces en una resta:

$$-5(4) = -4 - 4 - 4 - 4 - 4$$
$$= -4 + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) \quad \text{Cambie el signo de cada 4 y sume.}$$
$$= -20$$

El producto de -5 y -4 lo hallamos al usar -4 cinco veces en una resta:

$$-5(-4) = -(-4) - (-4) - (-4) - (-4) - (-4)$$
$$= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \quad \text{Cambie el signo de cada } -4 \text{ y sume.}$$
$$= 20$$

Los productos $5(4)$ y $-5(-4)$ son ambos iguales a $+20$, y los productos $5(-4)$ y $-5(4)$ son ambos iguales a -20. Estos resultados sugieren la primera de las dos reglas siguientes.

Multiplicación de números reales

Con signos iguales: Multiplique sus valores absolutos. El producto es positivo.

Con signos diferentes: Multiplique sus valores absolutos. El producto es negativo.

Multiplicación por 0: Si x es cualquier número real, entonces $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

EJEMPLO 3 Multiplique:

a. $4(-7) = -28$ Multiplique los valores absolutos: $4 \cdot 7 = 28$. Como los signos son diferentes, el producto es negativo.

b. $-5(-6) = +30$ Multiplique los valores absolutos: $5 \cdot 6 = 30$. Como los signos son iguales, el producto es positivo.

c. $-7(6) = -42$ Multiplique los valores absolutos: $7 \cdot 6 = 42$. Como los signos son diferentes, el producto es negativo.

d. $8(6) = +48$ Multiplique los valores absolutos: $8 \cdot 6 = 48$. Como los signos son iguales, el producto es positivo.

Autoprueba Multiplique: **a.** $(-6)(5)$, **b.** $(-4)(-8)$, **c.** $(17)(-2)$ y **d.** $(12)(6)$.

División de números reales

Cuando se dividen dos números, al resultado lo llamamos **cociente.** En la división $\frac{x}{y} = q$ $(y \neq 0)$, el cociente q es un número tal que $y \cdot q = x$. Podemos usar esta relación para hallar reglas que determinan la división entre números reales. Consideremos cuatro divisiones:

$$\frac{+10}{+2} = +5, \text{ porque } +2(+5) = +10 \qquad \frac{-10}{-2} = +5, \text{ porque } -2(+5) = -10$$

$$\frac{-10}{+2} = -5, \text{ porque } +2(-5) = -10 \qquad \frac{+10}{-2} = -5, \text{ porque } -2(-5) = +10$$

Estos resultados sugieren las primeras dos reglas para dividir números reales.

División de números reales

Con signos iguales: Divida sus valores absolutos. El cociente es positivo.

Con signos diferentes: Divida sus valores absolutos. El cociente es negativo.

División entre 0: La división entre 0 no está definida.

Comentario Si $x \neq 0$, entonces $\frac{0}{x} = 0$. Sin embargo, $\frac{x}{0}$ no está definido para ningún valor de x.

EJEMPLO 4 Divida:

a. $\frac{36}{18} = +2$ Divida los valores absolutos: $\frac{36}{18} = 2$. Como Los signos son iguales, el cociente es positivo.

b. $\frac{-44}{11} = -4$ Divida los valores absolutos: $\frac{44}{11} = 4$. Como los signos son diferentes, el cociente es negativo.

c. $\frac{27}{-9} = -3$ Divida los valores absolutos: $\frac{27}{9} = 3$. Como los signos son diferentes, el cociente es negativo.

d. $\frac{-64}{-8} = +8$ Divida los valores absolutos: $\frac{64}{8} = 8$. Como los signos son iguales, el cociente es positivo.

Autoprueba Divida: **a.** $\frac{55}{-5}$, **b.** $\frac{-72}{-6}$, **c.** $\frac{-100}{10}$, **d.** $\frac{50}{25}$.

Orden de las operaciones

Supongamos que al lector se le pide se comunique con un amigo si encuentra un tapete a la venta durante un viaje que realizará a Turquía. Después de localizar un tapete bonito, envía el siguiente mensaje a su amigo.

E-Mail
HALLÉ UN TAPETE TURCO DE SEDA HECHO EN TURQUÍA, \$5,700. ¿DEBO COMPRARLO?

Al día siguiente, recibe esta respuesta.

E-Mail
¡NO, EL PRECIO ES DEMASIADO ALTO! ¡NO! REPITO, ¡NO LO COMPRES! EL PRECIO ES MUY ELEVADO.

El primer enunciado en el mensaje de su amigo pregunta la compra del tapete a cualquier precio. El segundo dice que no lo compre, porque es demasiado costoso. El lugar del signo de admiración hace que estos enunciados se lean diferentes, lo que resulta en diferentes interpretaciones.

Cuando se lean enunciados matemáticos, es posible que haya la misma clase de confusión. Para ilustrar lo anterior, consideremos la expresión $5 + 3 \cdot 7$, que contiene las operaciones de la adición y multiplicación. Podemos calcular esta expresión en dos formas diferentes, pero obtendremos resultados diferentes.

Método 1: sumar primero		***Método 2: multiplicar primero***	
$5 + 3 \cdot 7 = 8 \cdot 7$	Sumar 5 y 3.	$5 + 3 \cdot 7 = 5 + 21$	Multiplicar 3 y 7.
$= 56$	Multiplicar 8 y 7.	$= 26$	Sumar 5 y 21.

Resultados diferentes

Para eliminar la posibilidad de obtener respuestas diferentes, convenimos en hacer las multiplicaciones antes que las sumas. En consecuencia, el método 1 antes mencionado es incorrecto. El cálculo correcto de $5 + 3 \cdot 7$ es

$$\begin{aligned} 5 + 3 \cdot 7 &= 5 + 21 && \text{Haga primero la multiplicación.} \\ &= 26 && \text{Después realice la adición.} \end{aligned}$$

Para indicar que las sumas deben hacerse antes que las multiplicaciones, debemos usar **símbolos de agrupación** como son los paréntesis ( ), paréntesis rectangulares [ ] o llaves { }. En la expresión $(5 + 3)7$, los paréntesis indican que la adición debe hacerse primero:

$$\begin{aligned} (5 + 3)7 &= 8 \cdot 7 \\ &= 56 \end{aligned}$$

Para garantizar que los cálculos tendrán un resultado correcto, los realizaremos en el orden siguiente.

Reglas para el orden de operaciones para expresiones sin exponentes

Use los pasos siguientes para hacer todos los cálculos dentro de cada par de símbolos de agrupación; trabaje del par más interno al más externo.

1. Realice todas las multiplicaciones y divisiones, trabajando de izquierda a derecha.
2. Realice todas las adiciones y sustracciones, trabajando de izquierda a derecha.

Cuando se hayan eliminado todos los símbolos de agrupación, repita las reglas antes mencionadas para terminar el cálculo.

En una fracción, simplifique el numerador y el denominador por separado. Siempre que sea posible, simplifique la fracción.

EJEMPLO 5 Evalúe cada expresión:

a. $4 + 2 \cdot 3 = 4 + 6$ — Realice primero la multiplicación.

$= 10$ — Después efectúe la adición.

b. $2(3 + 4) = 2 \cdot 7$ — Debido al paréntesis, realice primero la adición.

$= 14$

Luego efectúe la multiplicación.

c. $5(3 - 6) \div 3 + 1 = 5(-3) \div 3 + 1$ — Realice la resta dentro del paréntesis.

$= -15 \div 3 + 1$ — Luego efectúe la multiplicación: $5(-3) = -15$.

$= -5 + 1$ — Luego realice la división: $-15 \div 3 = -5$.

$= -4$ — Finalmente, efectúe la adición.

d. $5[3 - 2(6 \div 3 + 1)] = 5[3 - 2(2 + 1)]$ — Realice la división dentro del paréntesis: $6 \div 3 = 2$.

$= 5[3 - 2(3)]$ — Efectúe la adición: $2 + 1 = 3$.

$= 5(3 - 6)$ — Realice la multiplicación: $2(3) = 6$.

$= 5(-3)$ — Efectúe la sustracción: $3 - 6 = -3$.

$= -15$ — Realice la multiplicación.

e. $\dfrac{4 + 8(3 - 4)}{6 - 2(2)} = \dfrac{-4}{2}$ — Simplifique el numerador y el denominador por separado.

$= -2$

Autoprueba Evalúe: **a.** $5 + 3 \cdot 4$, **b.** $(5 + 3) \cdot 4$, **c.** $3(5 - 7) \div 6 + 3$ y **d.** $\dfrac{5 - 2(4 - 6)}{9 - 2 \cdot 3}$.

Medidas de tendencia central

Por lo general se emplean tres tipos de promedios en diarios y revistas: la **media,** la **mediana** y la **moda.**

Media

La **media** de varios valores es la suma de esos valores dividida entre el número de valores.

$$\text{Media} = \frac{\text{suma de los valores}}{\text{número de valores}}$$

EJEMPLO 6 **Fútbol** La figura 1-17 muestra las distancias ganadas y pérdidas por el jugador que recibe en siete jugadas. Encuentre el número medio de yardas por acarreo.

Solución Para hallar el número medio de yardas por acarreo, sumamos los números y dividimos el resultado entre 7.

$$\frac{-8 + (+2) + (-6) + (+6) + (+4) + (-7) + (-5)}{7} = \frac{-14}{7} = -2$$

El receptor promedió -2 yardas (o perdió 2 yardas) por acarreo.

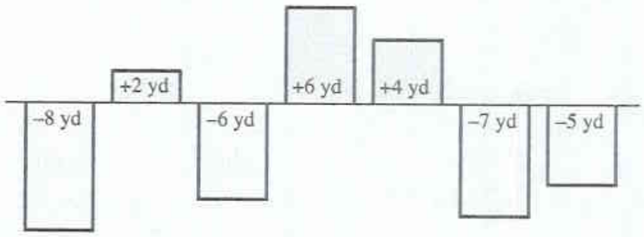


Figura 1-17

Mediana La **mediana** de varios valores es el valor central. Para hallar la mediana,

1. Acomode los valores en orden creciente.
2. Si hay un número impar de valores, seleccione el valor de en medio (el valor central).
3. Si hay un número par de valores, encuentre la media de los dos valores de en medio (los dos valores centrales).

Moda La **moda** de varios valores es el valor que se presenta más veces.

EJEMPLO 7 Los salarios de diez trabajadores que laboran en un negocio pequeño son:

\$2500, \$1750, \$2415, \$3240, \$2790,
\$3240, \$2650, \$2415, \$2415, \$2650

Encuentre **a.** la mediana y **b.** la moda de la distribución.

Solución **a.** Para hallar la mediana, primero acomodamos los salarios en orden creciente:

\$1750, \$2415, \$2415, \$2415, \$2500,
\$2650, \$2650, \$2790, \$3240, \$3240

Como hay un número par de salarios, la mediana será la media de los dos valores centrales, \$2500 y \$2650.

$$\text{Mediana} = \frac{\$2500 + \$2650}{2} = \$2575$$

b. Como el salario \$2415 se presenta más veces, ésta es la moda.

Si dos números diferentes en una distribución están empatados por presentarse más veces, la distribución se llama *bimodal.*

Aun cuando la media es probablemente la medida más común de promedio, la mediana y la moda se emplean con frecuencia. Por ejemplo, los salarios de los trabajadores se comparan a veces con el salario medio (promedio). Decir que la moda de zapatos es 9 significa que un zapato de medida 9 se presenta más que cualquier otra medida.

Evaluación de expresiones algebraicas

Es posible combinar variables y números con las operaciones de aritmética para obtener **expresiones algebraicas.** Para evaluar expresiones algebraicas, sustituimos números por las variables y simplificamos.

EJEMPLO 8 Si $a = 2, b = -3$ y $c = -5$, evalúe **a.** $a + bc$ y **b.** $\dfrac{ab + 3c}{b(c - a)}$.

Solución Sustituimos a por 2, b por -3 y c por -5 y simplificamos.

a.
$$\begin{aligned} a + bc &= 2 + (-3)(-5) \\ &= 2 + (15) \\ &= 17 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} \frac{ab + 3c}{b(c - a)} &= \frac{2(-3) + 3(-5)}{-3(-5 - 2)} \\ &= \frac{-6 + (-15)}{-3(-7)} \\ &= \frac{-21}{21} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Autoprueba Si $a = 2, b = -5$ y $c = 3$, evalúe **a.** $b - ac$ y **b.** $\dfrac{ab - 2c}{ac + 2b}$. ▮

La tabla 1-1 muestra las fórmulas para los perímetros de varias figuras geométricas. La longitud alrededor de un círculo se llama **circunferencia.**

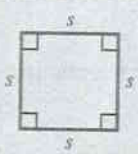
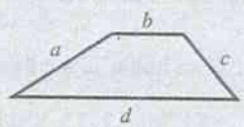
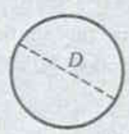
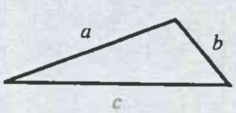
Figura	Nombre	Perímetro	Figura	Nombre	Perímetro o circunferencia
	Cuadrado	$P = 4s$		Trapecio	$P = a + b + c + d$
	Rectángulo	$P = 2l + 2w$		Círculo	$C = \pi D$ (π es aproximadamente 3.1416)
	Triángulo	$P = a + b + c$			

Tabla 1-1

EJEMPLO 9 Encuentre el perímetro del rectángulo que aparece en la figura 1-18.

Solución Sustituimos l por 2.75 y w por 1.25 en la fórmula $P = 2l + 2w$ y simplificamos.

$$\begin{aligned} P &= 2l + 2w \\ P &= 2(2.75) + 2(1.25) \\ &= 5.50 + 2.50 \\ &= 8.00 \end{aligned}$$

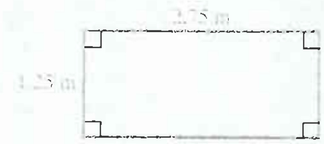


Figura 1-18

El perímetro es 8 metros.

Autoprueba Encuentre el perímetro de un rectángulo con una longitud de 8 metros, y 5 metros de ancho.

Propiedades de los números reales

Cuando trabajemos con números reales, usaremos las siguientes propiedades.

Propiedades de los números reales Si a, b y c son números reales, se aplican las siguientes propiedades.

Las propiedades asociativas para la adición y multiplicación

$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (ab)c = a(bc)$

Las propiedades conmutativas para la adición y multiplicación

$a + b = b + a \qquad ab = ba$

La propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición

$a(b + c) = ab + ac$

Las propiedades asociativas permiten agrupar los números de una suma o producto en cualquier forma deseada, no obstante se obtendrá el mismo resultado. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} (2 + 3) + 4 &= 5 + 4 & \qquad 2 + (3 + 4) &= 2 + 7 \\ &= 9 & &= 9 \\ (2 \cdot 3) \cdot 4 &= 6 \cdot 4 & 2 \cdot (3 \cdot 4) &= 2 \cdot 12 \\ &= 24 & &= 24 \end{aligned}$$

Comentario La sustracción y la división no son asociativas, porque diferentes agrupaciones dan diferentes resultados. Por ejemplo,

$(8 - 4) - 2 = 4 - 2 = 2$ pero $8 - (4 - 2) = 8 - 2 = 6$

$(8 \div 4) \div 2 = 2 \div 2 = 1$ pero $8 \div (4 \div 2) = 8 \div 2 = 4$

Las propiedades conmutativas permiten sumar o multiplicar dos números en cualquier orden y obtener el mismo resultado. Por ejemplo,

$2 + 3 = 5$ y $3 + 2 = 5$

$7 \cdot 9 = 63$ y $9 \cdot 7 = 63$

Comentario La sustracción y la división no son conmutativas, porque hacer estas operaciones en órdenes diferentes dará resultados diferentes. Por ejemplo,

$$8 - 4 = 4 \quad \text{pero} \quad 4 - 8 = -4$$

$$8 \div 4 = 2 \quad \text{pero} \quad 4 \div 8 = \frac{1}{2}$$

La propiedad distributiva permite evaluar muchas expresiones que incluyen una multiplicación en una suma. Primero podemos realizar la suma dentro del paréntesis y luego multiplicar cada uno de los términos de la adicción y luego sumarlos.

$$\begin{aligned} 2(3 + 7) &= 2 \cdot \mathbf{10} \\ &= 20 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2(3 + 7) &= \mathbf{2 \cdot 3 + 2 \cdot 7} \\ &= 6 + 14 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Podemos interpretar geométricamente la propiedad distributiva. Como el área del rectángulo mayor de la figura 1-19 es el producto de su ancho a y su longitud $b + c$, su área es $a(b + c)$. Las áreas de los dos rectángulos más pequeños son ab y ac. Como el área del rectángulo mayor es igual a la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños, tenemos $a(b + c) = ab + ac$.

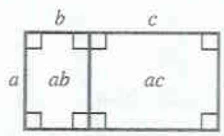


Figura 1-19

Una forma más general de la propiedad distributiva se denomina **propiedad distributiva extendida.**

$$a(b + c + d + e + \cdots) = ab + ac + ad + ae + \cdots$$

EJEMPLO 10 Use la propiedad distributiva para escribir cada expresión sin paréntesis:

a. $2(x + 3)$ y **b.** $2(x + y - 7)$.

Solución **a.** $\begin{aligned} 2(x + 3) &= \mathbf{2}x + \mathbf{2} \cdot 3 \\ &= 2x + 6 \end{aligned}$ **b.** $\begin{aligned} 2(x + y - 7) &= \mathbf{2}x + \mathbf{2}y - \mathbf{2} \cdot 7 \\ &= 2x + 2y - 14 \end{aligned}$

Autoprueba Elimine el paréntesis: $-5(a - 2b + 3c)$.

Los números reales 0 y 1 tienen importantes propiedades especiales.

Propiedades del 0 y 1

Identidad aditiva: la suma de 0 y cualquier número es el número mismo.

$$0 + a = a + 0 = a$$

Propiedad de multiplicación del 0: el producto de cualquier número y 0 es 0.

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Identidad multiplicativa: el producto de 1 y cualquier número es el número mismo.

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

Por ejemplo,

$$7 + 0 = 7, \qquad 7(0) = 0, \qquad 1(5) = 5 \qquad \text{y} \qquad (-7)1 = -7$$

Si la suma de dos números es 0, los números se llaman **inversos aditivos, negativos** u **opuestos** entre sí. Por ejemplo, 6 y -6 son inversos aditivos el uno del otro porque $6 + (-6) = 0$.

Propiedad del inverso aditivo

Para todo número real a, existe un número real $-a$ tal que

$$a + (-a) = -a + a = 0$$

El símbolo $-(-6)$ significa "el negativo de 6 negativo". Puesto que la suma de dos números que son negativos es 0, tenemos

$$-6 + [-(-6)] = 0 \qquad \text{y} \qquad -6 + 6 = 0$$

Como -6 tiene sólo un inverso aditivo, se deduce que $-(-6) = 6$. En general, se aplica la regla siguiente.

Regla del doble negativo

Si a representa cualquier número real, entonces $-(-a) = a$.

Si el producto de dos números es 1, los números se llaman **inversos multiplicativos** o **recíprocos** entre sí.

Propiedad del inverso multiplicativo

Para todo número real a diferente de cero, existe un número real $\frac{1}{a}$ tal que

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1 \quad (a \neq 0)$$

Algunos ejemplos de recíprocos son

- 5 y $\frac{1}{5}$ son recíprocos, porque $5\left(\frac{1}{5}\right) = 1$.
- $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son recíprocos, porque $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right) = 1$.
- -0.25 y -4 son recíprocos, porque $-0.25(-4) = 1$.

El recíproco de 0 no existe, porque $\frac{1}{0}$ no está definido.

Respuestas a autopruebas

1. a. -9, **b.** -5, **c.** 9, **d.** 5 **2. a.** -19, **b.** 3, **c.** -5 **3. a.** -30, **b.** 32, **c.** -34, **d.** 72 **4. a.** -11, **b.** 12, **c.** -10, **d.** 2 **5. a.** 17, **b.** 32, **c.** 2, **d.** 3 **8. a.** -11, **b.** 4 **9.** 26 m **10.** $-5a + 10b - 15c$

Examen oral *Efectúe cada una de las operaciones siguientes.*

1. $+2 + (-4)$ **2.** $-5 - 2$ **3.** $7(-4)$

4. $(-7)(-4)$ **5.** $3 + (-3)(2)$ **6.** $\dfrac{-4 + (-2)}{-3 + 5}$

1.2 EJERCICIOS

REPASO *Grafique cada conjunto en la recta numérica.*

1. $\{x|x > 4\}$
2. $(-\infty, -5]$
3. $(2, 10]$
4. $\{x|-4 \leq x \leq 4\}$
5. Un hombre compró 32 galones de gasolina a $1.29 por galón y 3 cuartos de galón de aceite a $1.35 por cuarto de galón. El impuesto de venta no estaba incluido en el precio de la gasolina, pero se agregó el 5% de impuesto de venta al costo del aceite. Encuentre el costo total.
6. Considere un salario de $57 760, por el cual una mujer debe pagar impuestos de acuerdo con el programa que se ilustra en la tabla. Calcule la declaración de impuestos.

Más de	Pero no más de	Impuesto	De la cantidad que exceda
$0	$10 000	. . . . . 10%	$0
10 000	37 450	1000.00 + 15%	10 000
37 450	96 700	5117.50 + 27%	37 450

VOCABULARIO Y CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

7. Para sumar dos números con signos iguales, sumamos sus valores _______ y conservamos el signo _______.
8. Para sumar dos números con signos diferentes, _______ sus valores absolutos y conservamos el signo del número con mayor valor absoluto.
9. Para restar un número de otro, _______ el signo del número que se resta y _______.
10. El producto de dos números reales con signos iguales es _______.
11. El cociente de dos números reales con signos distintos es _______.
12. El denominador de una fracción nunca puede ser __.
13. Las tres medidas de tendencia son la _____, _______ y _____.
14. Escriba la fórmula para la circunferencia de un círculo. _______
15. Escriba la propiedad asociativa de la multiplicación. _______________
16. Escriba la propiedad conmutativa de la adición. _______________
17. Escriba la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición. _______________
18. ¿Cuál es la identidad aditiva? __
19. ¿Cuál es la identidad multiplicativa? __
20. $-(-a) =$ __

PRÁCTICA *Efectúe las operaciones.*

21. $-3 + (-5)$
22. $2 + (+8)$
23. $-7 + 2$
24. $3 + (-5)$
25. $-3 - 4$
26. $-11 - (-17)$
27. $-33 - (-33)$
28. $14 - (-13)$
29. $-2(6)$
30. $3(-5)$
31. $-3(-7)$
32. $-2(-5)$
33. $\dfrac{-8}{4}$
34. $\dfrac{25}{-5}$
35. $\dfrac{-16}{-4}$
36. $\dfrac{-5}{-25}$
37. $\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{1}{3}\right)$
38. $-\dfrac{3}{4} + \left(-\dfrac{1}{5}\right)$
39. $\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{3}{5}\right)$
40. $\dfrac{1}{26} - \dfrac{11}{13}$
41. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}$
42. $\dfrac{7}{8} - \left(-\dfrac{3}{4}\right)$
43. $\left(-\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{10}{7}\right)$
44. $\left(-\dfrac{6}{7}\right)\left(-\dfrac{5}{12}\right)$
45. $\dfrac{3}{4} \div \left(-\dfrac{3}{8}\right)$
46. $-\dfrac{3}{5} \div \dfrac{7}{10}$
47. $-\dfrac{16}{5} \div \left(-\dfrac{10}{3}\right)$
48. $-\dfrac{5}{24} \div \dfrac{10}{3}$
49. $3 + 4 \cdot 5$
50. $5 \cdot 3 - 6 \cdot 4$
51. $3 - 2 - 1$
52. $5 - 3 - 1$
53. $3 - (2 - 1)$
54. $5 - (3 - 1)$
55. $2 - 3 \cdot 5$
56. $6 + 4 \cdot 7$
57. $8 \div 4 \div 2$
58. $100 \div 10 \div 5$
59. $8 \div (4 \div 2)$
60. $100 \div (10 \div 5)$
61. $2 + 6 \div 3 - 5$
62. $6 - 8 \div 4 - 2$
63. $(2 + 6) \div (3 - 5)$
64. $(6 - 8) \div (4 - 2)$

65. $\dfrac{3(8 + 4)}{2 \cdot 3 - 9}$

66. $\dfrac{5(4 - 1)}{3 \cdot 2 + 5 \cdot 3}$

67. $\dfrac{100(2 - 4)}{1{,}000 \div 10 \div 10}$

68. $\dfrac{8(3) - 4(6)}{5(3) + 3(-7)}$

Use la distribución: 7, 5, 9, 10, 8, 6, 6, 7, 9, 12, 9. *Puede usted usar calculadora.*

69. Encuentre la media.

70. Encuentre la mediana.

71. Encuentre la moda.

Considere la distribución: 8, 12, 23, 12, 10, 16, 26, 12, 14, 8, 16, 23.

72. Encuentre la mediana.

73. Encuentre la moda.

74. Encuentre la media.

Sea $a = 3$, $b = -2$, $c = -1$ *y* $d = 2$ *y evalúe cada expresión.*

75. $ab + cd$

76. $ad + bc$

77. $a(b + c)$

78. $d(b + a)$

79. $\dfrac{ad + c}{cd + b}$

80. $\dfrac{ab + d}{bd + a}$

81. $\dfrac{ac - bd}{cd - ad}$

82. $\dfrac{bc - ad}{bd + ac}$

Ordenar registros es una tarea común en el procesamiento de datos. Una selección de ordenar requiere C comparaciones para ordenar N registros, donde C y N están relacionados por la fórmula $C = \frac{N(N - 1)}{2}$.

83. ¿Cuántas comparaciones se necesitan para ordenar 200 registros?

84. ¿Cuántas comparaciones se necesitan para ordenar 10 000 registros?

85. Perímetro de un triángulo Encuentre el perímetro de un triángulo cuyos lados miden 23.5, 37.2 y 39.7 pies de largo.

86. Perímetro de un trapecio Encuentre el perímetro de un trapecio cuyos lados miden 43.27, 47.37, 50.21 y 52.93 centímetros de largo.

Indique la propiedad de los números reales que justifique cada enunciado.

87. $3 + 7 = 7 + 3$

88. $2 \cdot (9 \cdot 13) = (2 \cdot 9) \cdot 13$

89. $3(2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5$

90. $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$

91. $81 + 0 = 81$

92. $3(9 + 2) = 3 \cdot 9 + 3 \cdot 2$

93. $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$

94. $3 + (9 + 0) = (9 + 0) + 3$

95. $a + (7 + 8) = (a + 7) + 8$

96. $1 \cdot 3 = 3$

97. $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 4 \cdot (2 \cdot 3)$

98. $8 + (-8) = 0$

Use calculadora para verificar cada enunciado. Identifique la propiedad de números reales que se ilustre.

99. $(37.9 + 25.2) + 14.3 = 37.9 + (25.2 + 14.3)$

100. $7.1(3.9 + 8.8) = 7.1 \cdot 3.9 + 7.1 \cdot 8.8$

101. $2.73(4.534 + 57.12) = 2.73 \cdot 4.534 + 2.73 \cdot 57.12$

102. $(6.789 + 345.1) + 27.347 = (345.1 + 6.789) + 27.347$

APLICACIONES

103. Ganar dinero Un día, Scott ganó $22.25 enseñando matemáticas y $39.75 en física. ¿Cuánto ganó ese día?

104. Pérdida de peso Durante una enfermedad, Wendy bajó 13.5 libras. Entonces se puso a dieta y bajó otras 11.5 libras. ¿Qué entero representa su cambio de peso?

105. Cambio de temperatura La temperatura subió 17°F en 1 hora y luego bajó 13°F en la siguiente hora. Encuentre el cambio total de temperatura.

106. Honores a la bandera Antes de izar la bandera a media asta, primero debe elevarse hasta el tope del asta. ¿Cuánto se ha movido la bandera de la ilustración?

107. Variaciones en la temperatura Si la temperatura ha estado bajando a razón de 4°F por hora, ¿cuál era la temperatura hace 3 horas?

108. Juego en máquinas tragamonedas En Las Vegas, Harry perdió $30 por hora jugando en máquinas tragamonedas. ¿Cuánto perdió después de jugar durante 15 horas?

109. Llenado de una piscina El caudal de agua de un tubo llena una piscina a razón de 23 galones por minuto. ¿Cuánta agua menos había en la piscina hace 5 horas?

110. Drenado de una piscina Si una coladera vacía una piscina a razón de 12 galones por minuto, ¿cuánta agua más había en la piscina hace 2 horas?

Use calculadora para ayudar a resolver los siguientes problemas.

111. Ciencia militar Un ejército se retiró 2300 metros. Después de reagruparse, avanzó 1750 metros. Al día siguiente, avanzó otros 1875 metros. ¿Qué entero representa la ganancia (o pérdida) neta del ejército?

112. Mozo de caballos John ganó $8 por hora por cepillar el pelambre de los caballos. Después de trabajar durante 8 horas, tenía $94. ¿Cuánto tenía antes de empezar a trabajar?

113. Manejo de una chequera Sally empezó con $437.37 en una cuenta de cheques. Un mes después, ella depositó $125.18, $137.26 y $145.56. Ese mismo mes, retiró $117.11, $183.49 y $122.89. Encuentre su saldo final.

114. Promedios de acciones La ilustración muestra los avances y retrocesos diarios del promedio Dow Jones durante una semana. ¿Qué entero representa la ganancia o pérdida total para esa semana?

115. Venta de ropa Si un dependiente hizo las ventas que se muestran en la tabla en una semana, encuentre la media de ventas diarias.

Lunes	$ 1525
Martes	$ 785
Miércoles	$ 1628
Jueves	$ 1214
Viernes	$ 917
Sábado	$ 1197

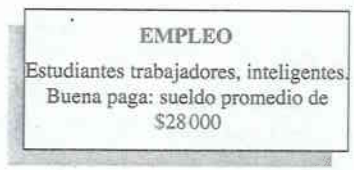
116. Tamaño de virus La tabla siguiente da longitudes aproximadas (en centimicrones) de los virus que causan cinco enfermedades comunes. Determine la longitud media de los virus.

Polio	2.5
Influenza	105.1
Faringitis	74.9
Varicela	137.4
Fiebre amarilla	52.6

117. Cálculo de calificaciones Un estudiante tiene calificaciones de 75, 82, 87, 80 y 76 en cinco exámenes. Encuentre su calificación promedio (la media).

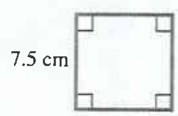
118. Promedio de pesos La línea ofensiva de un equipo de fútbol tiene dos defensas, dos atacantes y un centro. Si los defensas pesan 298 y 287 libras, los atacantes 310 y 302 libras, y el centro 303 libras, encuentre el peso promedio (la media) de la línea ofensiva.

119. Análisis de anuncios El empresario que colocó el siguiente anuncio gana $100 000 y emplea cuatro estudiantes que ganan $10 000 cada uno. ¿Es honesto el anuncio?



120. Promedio de calificaciones Un estudiante tiene calificaciones de 78%, 85%, 88% y 96%. Falta una prueba y el estudiante necesita promediar 90% para obtener una A. ¿Tiene probabilidad?

121. Perímetro de un cuadrado Encuentra el perímetro del cuadrado de la ilustración.



122. **Circunferencia de un círculo** Al centésimo más cercano, encuentre la circunferencia del círculo que se ve en la ilustración.

EXAMEN ESCRITO

123. La propiedad simétrica de la igualdad indica que si $a = b$, entonces $b = a$. Explique por qué esta propiedad se confunde a veces con las propiedades conmutativas. ¿Por qué piensa usted que es así?

124. Explique por qué la media de dos números está a la mitad entre los dos números.

ALGO PARA PENSAR

125. Escoja cinco números y encuentre la media. Sume 7 a cada uno de los números para obtener cinco nuevos números y encuentre su media. ¿Qué descubrió usted? ¿Es siempre verdadera esta propiedad?

126. Tome los cinco números originales del ejercicio 125 y multiplique cada uno por 7 para obtener cinco nuevos números y hallar su media. ¿Qué descubre usted? ¿Es siempre verdadera esta propiedad?

127. Dé tres aplicaciones en las que la moda sería el promedio más adecuado a usar.

128. Dé tres aplicaciones en las que la moda sería el promedio más adecuado a usar.

1.3 Exponentes

- Exponentes
- Propiedades de los exponentes
- Exponente cero
- Exponentes negativos
- Orden de las operaciones
- Evaluación de fórmulas

Para comenzar *Encuentre cada producto:*

1. $2 \cdot 2$

2. $3 \cdot 3 \cdot 3$

3. $(-4)(-4)(-4)$

4. $(-3)(-3)(-3)(-3)$

5. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

6. $-\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right)$

En esta sección haremos un repaso de exponentes, método abreviado para indicar multiplicación repetida.

Exponentes

Los exponentes indican multiplicación repetida. Por ejemplo,

$y^2 = y \cdot y$ Léase y^2 como "y a la segunda potencia" o "y cuadrada".

$z^3 = z \cdot z \cdot z$ Léase z^3 como "z a la tercera potencia" o "z al cubo".

$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$ Léase x^4 como "x a la cuarta potencia".

Estos ejemplos sugieren la siguiente definición.

Exponentes de números naturales Si n es un número natural, entonces

n factores de x

La expresión exponencial x^n se denomina **potencia de x,** y la leemos como "x a la enésima potencia". En esta expresión, x se llama **base,** y n recibe el nombre de **exponente.**

Base $\rightarrow x^n \leftarrow$ Exponente

Comentario Un exponente de número natural dice cuántas veces debe usarse la base de una expresión exponencial como factor en un producto.

EJEMPLO 1 Escriba cada número sin exponentes:

a. $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$= 32$

b. $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$
$= -32$

c. $-4^4 = -(4^4)$
$= -(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)$
$= -256$

d. $(-4)^4 = (-4)(-4)(-4)(-4)$
$= 256$

e. $\left(\frac{1}{2}a\right)^3 = \left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}a\right)$
$= \frac{1}{8}a^3$

f. $\left(-\frac{1}{5}b\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}b\right)\left(-\frac{1}{5}b\right)$
$= \frac{1}{25}b^2$

Autoprueba Escriba cada número sin exponentes: **a.** 3^4, **b.** $(-5)^3$ y **c.** $\left(-\frac{3}{4}a\right)^2$. ∎

Comentario Note la diferencia entre $-x^n$ y $(-x)^n$.

$$-x^n = -(\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{n \text{ factores de } x}) \qquad (-x)^n = \overbrace{(-x)(-x)(-x) \cdot \cdots \cdot (-x)}^{n \text{ factores de } -x}$$

Asimismo, observe la diferencia entre ax^n y $(ax)^n$

$$ax^n = a \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{n \text{ factores de } x} \qquad (ax)^n = \overbrace{(ax)(ax)(ax) \cdot \cdots \cdot (ax)}^{n \text{ factores de } ax}$$

Propiedades de los exponentes

Puesto que x^5 significa que x ha de usarse como factor cinco veces, y como x^3 significa que x ha de usarse como factor tres veces, $x^5 \cdot x^3$ significa que x ha de usarse como factor ocho veces.

$$x^5x^3 = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}^{5 \text{ factores de } x} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot x}^{3 \text{ factores de } x} = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}^{8 \text{ factores de } x}$$

En general,

$$x^mx^n = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{m \text{ factores de } x} \cdot \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{n \text{ factores de } x} = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{m + n \text{ factores de } x}$$

En consecuencia, *para multiplicar expresiones exponenciales con la misma base, mantenemos la misma base y sumamos los exponentes.*

Regla del producto de los exponentes Si m y n son números naturales, entonces

$$x^m x^n = x^{m+n}$$

Comentario La regla del producto de los exponentes se aplica sólo a expresiones exponenciales con la misma base. La expresión x^5y^3, por ejemplo, no se puede simplificar porque las bases de las expresiones exponenciales son diferentes.

EJEMPLO 2 Simplifique cada expresión:

a. $x^{11}x^5 = x^{11+5}$
$= x^{16}$

b. $a^5a^4a^3 = (a^5a^4)a^3$
$= a^9a^3$
$= a^{12}$

c. $a^2b^3a^3b^2 = a^2a^3b^3b^2$
$= a^5b^5$

d. $-8x^4\left(\frac{1}{4}x^3\right) = \left(-8 \cdot \frac{1}{4}\right)(x^4x^3)$
$= -2x^7$

Autoprueba Simplifique cada expresión: **a.** a^3a^5, **b.** $a^2b^3a^3b^4$ y **c.** $-8a^4\left(-\frac{1}{2}a^2b\right)$.

Para hallar otra propiedad de los exponentes, simplificamos $(x^4)^3$, lo cual significa x^4 al cubo, o sea $x^4 \cdot x^4 \cdot x^4$.

$$(x^4)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x^4} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x^4} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x^4} = x^{12}$$

En general, tenemos

$$(x^m)^n = \underbrace{x^m \cdot x^m \cdot x^m \cdot \cdots \cdot x^m}_{n \text{ factores de } x^m} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{mn \text{ factores de } x} = x^{mn}$$

En consecuencia, *para elevar una expresión exponencial a una potencia, mantenemos la misma base y multiplicamos los exponentes.*

Para hallar una tercera propiedad de los exponentes, elevamos al cuadrado $3x$ y obtenemos

$$(3x)^2 = (3x)(3x) = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x = 3^2x^2 = 9x^2$$

En general, tenemos

$$(xy)^n = \underbrace{(xy)(xy)(xy) \cdot \cdots \cdot (xy)}_{n \text{ factores de } xy} = \underbrace{xxx \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ factores de } x} \cdot \underbrace{yyy \cdot \cdots \cdot y}_{n \text{ factores de } y} = x^ny^n$$

Para hallar una cuarta propiedad de los exponentes, elevamos al cubo $\frac{x}{3}$ para obtener

$$\left(\frac{x}{3}\right)^3 = \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x \cdot x \cdot x}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{x^3}{3^3} = \frac{x^3}{27}$$

En general, tenemos

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\frac{x}{y}\right)}_{n \text{ factores de } x/y} \quad (y \neq 0)$$

$$= \frac{\overbrace{xxx \cdot \cdots \cdot x}^{n \text{ factores de } x}}{\underbrace{yyy \cdot \cdots \cdot y}_{n \text{ factores de } y}}$$ Multiplique los numeradores y multiplique los denominadores.

$$= \frac{x^n}{y^n}$$

Los resultados previos se llaman **reglas de la potencia de los exponentes.**

Regla de potencia de los exponentes

Si m y n son números naturales, entonces

$$(x^m)^n = x^{mn} \qquad (xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$$

EJEMPLO 3 Simplifique cada expresión:

a. $(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3}$
$= 3^6$
$= 729$

b. $(x^{11})^5 = x^{11 \cdot 5}$
$= x^{55}$

c. $(x^2x^3)^6 = (x^5)^6$
$= x^{30}$

d. $(x^2)^4(x^3)^2 = x^8x^6$
$= x^{14}$

Autoprueba Simplifique cada expresión: **a.** $(a^5)^8$, **b.** $(a^4a^3)^3$ y **c.** $(a^3)^3(a^2)^3$.

EJEMPLO 4 Simplifique cada expresión. Suponga que ningún denominador es cero.

a. $(x^2y)^3 = (x^2)^3y^3$
$= x^6y^3$

b. $(x^3y^4)^4 = (x^3)^4(y^4)^4$
$= x^{12}y^{16}$

c. $\left(\frac{x}{y^2}\right)^4 = \frac{x^4}{(y^2)^4}$
$= \frac{x^4}{y^8}$

d. $\left(\frac{x^3}{y^4}\right)^2 = \frac{(x^3)^2}{(y^4)^2}$
$= \frac{x^6}{y^8}$

Autoprueba Simplifique cada expresión: **a.** $(a^4b^5)^2$ y **b.** $\left(\frac{a^5}{b^7}\right)^3$ $(b \neq 0)$.

Exponente cero

Como las reglas de los exponentes se cumplen para el exponente 0, tenemos

$$x^0x^n = x^{0+n} = x^n = 1x^n$$

Dado que $x^0x^n = 1x^n$, se deduce que $x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$.

Exponente cero Si $x \neq 0$, entonces $x^0 = 1$.

Comentario 0^0 no está definido.

Por la definición previa, cualquier base diferente de cero elevada a la potencia 0 es 1. Por ejemplo, si ninguna variable es cero, entonces

$$5^0 = 1, \qquad (-7)^0 = 1, \qquad (3ax^3)^0 = 1, \qquad \left(\frac{1}{2}x^5y^7z^9\right)^0 = 1$$

Exponentes negativos

Como las reglas para exponentes son verdaderas para exponentes enteros negativos, tenemos

$$x^{-n}x^n = x^{-n+n} = x^0 = 1 \quad (x \neq 0)$$

Debido a que $x^{-n} \cdot x^n = 1$ y $\frac{1}{x^n} \cdot x^n = 1$, definimos x^{-n} como el recíproco de x^n.

Exponentes negativos Si n es un entero y $x \neq 0$, entonces

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x^{-n}} = x^n$$

Comentario Por la definición de exponentes negativos, la base no puede ser 0. Por lo tanto, una expresión como 0^{-5} no está definida.

Debido a esta definición, podemos escribir expresiones que contengan exponentes negativos sin exponentes negativos. Por ejemplo,

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

Y si $x \neq 0$, tenemos

$$(2x)^{-3} = \frac{1}{(2x)^3} = \frac{1}{8x^3} \qquad 3x^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

EJEMPLO 5 Escriba cada expresión sin exponentes negativos:

a. $x^{-5}x^3 = x^{-5+3}$
$= x^{-2}$
$= \frac{1}{x^2}$

b. $(x^{-3})^{-2} = x^{(-3)(-2)}$
$= x^6$

Autoprueba Escriba cada expresión sin exponentes negativos: **a.** $a^{-7}a^3$ y **b.** $(a^{-5})^{-3}$.

Para crear una regla para dividir expresiones exponenciales, procedemos como sigue:

$$\frac{x^m}{x^n} = x^m\left(\frac{1}{x^n}\right) = x^m x^{-n} = x^{m+(-n)} = x^{m-n}$$

En consecuencia, *para dividir expresiones exponenciales con la misma base diferente de cero, mantenemos la misma base y restamos el exponente del denominador del exponente del numerador.*

Regla del cociente Si m y n son enteros, entonces

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x \neq 0)$$

EJEMPLO 6 Simplifique cada expresión:

a. $\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3}$
$= a^2$

b. $\frac{x^{-5}}{x^{11}} = x^{-5-11}$
$= x^{-16}$
$= \frac{1}{x^{16}}$

c. $\frac{x^4x^3}{x^{-5}} = \frac{x^7}{x^{-5}}$
$= x^{7-(-5)}$
$= x^{12}$

d. $\frac{(x^2)^3}{(x^3)^2} = \frac{x^6}{x^6}$
$= x^{6-6}$
$= x^0$
$= 1$

e. $\frac{x^2y^3}{xy^4} = x^{2-1}y^{3-4}$
$= xy^{-1}$
$= \frac{x}{y}$

f. $\left(\frac{a^{-2}b^3}{a^2a^3b^4}\right)^3 = \left(\frac{a^{-2}b^3}{a^5b^4}\right)^3$
$= (a^{-2-5}b^{3-4})^3$
$= (a^{-7}b^{-1})^3$
$= \left(\frac{1}{a^7b}\right)^3$
$= \frac{1}{a^{21}b^3}$

Autoprueba Simplifique cada expresión: **a.** $\frac{(a^{-2})^3}{(a^2)^{-3}}$ y **b.** $\left(\frac{a^{-2}b^5}{b^8}\right)^{-3}$. ∎

Para ilustrar una propiedad más de los exponentes, consideremos la simplificación de $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{2^4}{3^4}} = 1 \div \frac{2^4}{3^4} = 1 \cdot \frac{3^4}{2^4} = \frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$$

El ejemplo sugiere que para elevar una fracción a una potencia negativa, podemos invertir la base fraccionaria y luego elevarla a una potencia positiva.

Potencias para fracciones negativas Si n es un entero, entonces

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

EJEMPLO 7 Escriba cada expresión sin usar paréntesis. Escriba respuestas sin exponentes negativos.

a. $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-4} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{4}$

$= \dfrac{625}{81}$

b. $\left(\dfrac{y^2}{x^3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{x^3}{y^2}\right)^{3}$

$= \dfrac{x^9}{y^6}$

c. $\left(\dfrac{2x^2}{3y^{-3}}\right)^{-4} = \left(\dfrac{3y^{-3}}{2x^2}\right)^{4}$

$= \dfrac{81y^{-12}}{16x^8}$

$= \dfrac{81}{16x^8} \cdot y^{-12}$

$= \dfrac{81}{16x^8} \cdot \dfrac{1}{y^{12}}$

$= \dfrac{81}{16x^8y^{12}}$

d. $\left(\dfrac{a^{-2}b^3}{a^2a^3b^4}\right)^{-3} = \left(\dfrac{a^2a^3b^4}{a^{-2}b^3}\right)^{3}$

$= \left(\dfrac{a^5b^4}{a^{-2}b^3}\right)^{3}$

$= (a^{5-(-2)}b^{4-3})^3$

$= (a^7b)^3$

$= a^{21}b^3$

Autoprueba Escriba $\left(\dfrac{3a^3}{2b^{-2}}\right)^{-5}$ sin usar paréntesis.

Resumimos las reglas de los exponentes como sigue.

Propiedades de los exponentes

Si no hay divisiones entre 0, entonces para todos los enteros m y n,

$$x^mx^n = x^{m+n} \qquad (x^m)^n = x^{mn} \qquad (xy)^n = x^ny^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^0 = 1 \quad (x \neq 0) \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

Las mismas reglas se aplican a exponentes que son variables.

EJEMPLO 8 Simplifique cada expresión. Suponga que $a \neq 0$ y $x \neq 0$.

a. $\dfrac{a^na}{a^2} = a^{n+1-2}$

$= a^{n-1}$

b. $\dfrac{x^3x^2}{x^n} = x^{3+2-n}$

$= x^{5-n}$

c. $\left(\dfrac{x^n}{x^2}\right)^2 = \dfrac{x^{2n}}{x^4}$

$= x^{2n-4}$

d. $\dfrac{a^na^{-3}}{a^{-1}} = a^{n+(-3)-(-1)}$

$= a^{n-3+1}$

$= a^{n-2}$

Autoprueba Simplifique cada expresión (suponga que $t \neq 0$): **a.** $\dfrac{t^nt^2}{t^3}$ y **b.** $\left(\dfrac{2t^n}{3t^3}\right)^3$.

Énfasis en la tecnología

PARA HALLAR POTENCIAS

Para calcular las potencias de números con la ayuda de calculadoras, usamos la tecla y^x. Por ejemplo, para hallar 5.37^4, marcamos estos números y presionamos estas teclas:

5.37 y^x 4 = Algunas calculadoras tienen una tecla x^y.

La pantalla indicará 831.5668016 .

En una calculadora de gráficas teclearemos esos números y presionaremos las teclas

5.37 ∧ 4 ENTER

La pantalla indicará 5.37^4
831.5668016 .

Si ninguno de estos métodos funciona, consulta el manual de usuario de tu calculadora.

Orden de las operaciones

Cuando se simplifican expresiones que contengan exponentes, se encuentran las potencias antes de efectuar adiciones y multiplicaciones.

EJEMPLO 9 Si $x = 2$ y $y = -3$, encuentre el valor de $3x + 2y^3$.

Solución

$3x + 2y^3 = 3(2) + 2(-3)^3$ Sustituya x por 2 y y por -3.

$= 3(2) + 2(-27)$ Primero encuentre la potencia: $(-3)^3 = -27$.

$= 6 - 54$ Entonces realice las multiplicaciones.

$= -48$ Luego haga la resta.

Autoprueba Evalúe $-2a^2 - 3a$ si $a = -4$.

Evaluación de fórmulas

La tabla 1-2 muestra las fórmulas empleadas para calcular las áreas y volúmenes de muchas figuras geométricas.

EJEMPLO 10 Encuentre el volumen de la esfera que se ilustra en la figura 1-20.

Solución La fórmula para el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Como un radio es la mitad de la longitud que un diámetro, el radio de la esfera es la mitad de 20 centímetros, o sea 10 centímetros.

Figura 1-20

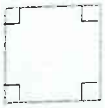
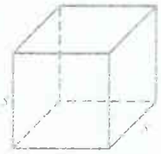
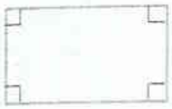
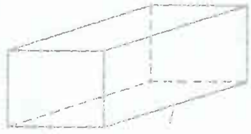
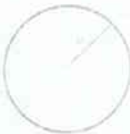
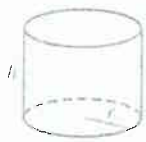
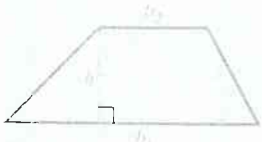
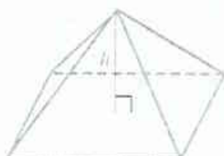
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(10)^3 \quad \text{Sustituya } r \text{ por } 10$$

$$\approx 4188.790205 \quad \text{Use una calculadora.}$$

Con dos decimales el volumen es 4188.79 cm^3.

Autoprueba Encuentre el volumen de una pirámide de base cuadrada, de 20 metros por lado y una altura de 21 metros.

Figura	Nombre	Área	Figura	Nombre	Volumen
	Cuadrado	$A = s^2$		Cubo	$V = s^3$
	Rectángulo	$A = lw$		Sólido rectangular	$V = lwh$
	Círculo	$A = \pi r^2$		Esfera	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
	Triángulo	$A = \frac{1}{2}bh$		Cilindro	$V = Bh$*
	Trapecio	$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$		Cono	$V = \frac{1}{3}Bh$*
				Pirámide	$V = \frac{1}{3}Bh$*

*B representa el área de la base.

Tabla 1-2

Respuestas a autopruebas

1. a. 81, **b.** -125, **c.** $\frac{9}{16}a^2$ **2. a.** a^8, **b.** a^5b^7, **c.** $4a^6b$ **3. a.** a^{40}, **b.** a^{21}, **c.** a^{15} **4. a.** a^8b^{10}, **b.** $\frac{a^{15}}{b^{21}}$ **5. a.** $\frac{1}{a^4}$, **b.** a^{15} **6. a.** 1, **b.** a^6b^9 **7.** $\frac{32}{243a^{15}b^{10}}$ **8. a.** t^{n-1}, **b.** $\frac{8t^{3n-9}}{27}$ **9.** -20 **10.** 2800 m^3

Examen oral *Simplifique cada expresión:*

1. 4^2 **2.** 3^3 **3.** x^2x^3 **4.** y^3y^4

5. 17^0 **6.** $(x^2)^3$ **7.** $(a^2b)^3$ **8.** $\left(\frac{b}{a^2}\right)^2$

9. 5^{-2} **10.** $(x^{-2})^{-1}$ **11.** $\frac{x^5}{x^2}$ **12.** $\frac{x^2}{x^5}$

1.3 EJERCICIOS

REPASO *Si $a = 4$, $b = -2$ y $c = 5$, encuentre cada valor.*

1. $a + b + c$ **2.** $a - 2b - c$

3. $\dfrac{ab + 2c}{a + b}$ **4.** $\dfrac{ac - bc}{6ab + b}$

VOCABULARIO Y CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

5. En la expresión exponencial x^n, x se llama ____, y n se llama el ______.

6. Un exponente de número natural indica cuántas veces se usa la base como ____

7. $x^m x^n =$ ____ **8.** $(x^m)^n =$ ____

9. $(xy)^n =$ ____ **10.** $\left(\frac{x}{y}\right)^n =$ ____ $(y \neq 0)$

11. Si $a \neq 0$, entonces $a^0 =$ __

12. Si $a \neq 0$, entonces $a^{-1} =$ __

13. Si $x \neq 0$, entonces $\dfrac{x^m}{x^n} =$ ____.

14. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{}{}\right)^3$.

Escriba la fórmula para hallar cada cantidad.

15. Área de un cuadrado: _____

16. Área de un rectángulo: _____

17. Área de un triángulo: _____

18. Área de un trapecio: __________

19. Área de un círculo: _____

20. Volumen de un cubo: _____

21. Volumen de un _____ sólido rectangular:

22. Volumen de una esfera: _____

23. Volumen de un cilindro: _____

24. Volumen de un cono: _____

25. Volumen de una pirámide: _____

26. En los ejercicios del 23 al 25, B representa el área de la ____ de un sólido.

PRÁCTICA *Identifique la base y el exponente.*

27. 5^3

28. -7^2

29. $-x^5$

30. $(-t)^4$

31. $2b^6$

32. $(3xy)^5$

33. $(-mn^2)^3$

34. $(-p^2q)^2$

Simplifique cada expresión. Suponga que no hay denominadores cero.

35. 3^2 **36.** 3^4

37. -3^2 **38.** -3^4

39. $(-3)^2$ **40.** $(-3)^3$

41. 5^{-2} **42.** 5^{-4}

43. -5^{-2} **44.** -5^{-4}

45. $(-5)^{-2}$ **46.** $(-5)^{-4}$

47. 8^0 **48.** -9^0

49. $(-8)^0$ **50.** $(-9)^0$

51. $(-2x)^5$ **52.** $(-3a)^3$

53. $(-2x)^6$ **54.** $(-3y)^5$

55. x^2x^3 **56.** y^3y^4

57. k^0k^7 **58.** x^8x^{11}

59. $x^2x^3x^5$ **60.** $y^3y^7y^2$

61. p^9pp^0 **62.** z^7z^0z

63. aba^3b^4 **64.** $x^2y^3x^3y^2$

65. $(-x)^2y^4x^3$ **66.** $-x^2y^7y^3x^{-2}$

67. $(x^4)^7$ **68.** $(y^7)^5$

69. $(b^{-8})^9$

70. $(z^{12})^2$

71. $(x^3y^2)^4$

72. $(x^2y^5)^2$

73. $(r^{-3}s)^3$

74. $(m^5n^2)^{-3}$

75. $(a^2a^3)^4$

76. $(bb^2b^3)^4$

77. $(-d^2)^3(d^{-3})^3$

78. $(c^3)^2(c^4)^{-2}$

79. $(3x^3y^4)^3$

80. $\left(\frac{1}{2}a^2b^5\right)^4$

81. $\left(-\frac{1}{3}mn^2\right)^6$

82. $(-3p^2q^3)^5$

83. $\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^5$

84. $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^4$

85. $\left(\frac{a^{-3}}{b^{-2}}\right)^{-2}$

86. $\left(\frac{k^{-3}}{k^{-4}}\right)^{-1}$

87. $\frac{a^8}{a^3}$

88. $\frac{c^7}{c^2}$

89. $\frac{c^{12}c^5}{c^{10}}$

90. $\frac{a^{33}}{a^2a^3}$

91. $\frac{m^9m^{-2}}{(m^2)^3}$

92. $\frac{a^{10}a^{-3}}{a^5a^{-2}}$

93. $\frac{1}{a^{-4}}$

94. $\frac{3}{b^{-5}}$

95. $\frac{3m^5m^{-7}}{m^2m^{-5}}$

96. $\frac{(2a^{-2})^3}{a^3a^{-4}}$

97. $\left(\frac{4a^{-2}b}{3ab^{-3}}\right)^3$

98. $\left(\frac{2ab^{-3}}{3a^{-2}b^2}\right)^2$

99. $\left(\frac{3a^{-2}b^2}{17a^2b^3}\right)^0$

100. $\frac{a^0 + b^0}{2(a+b)^0}$

101. $\left(\frac{-2a^4b}{a^{-3}b^2}\right)^{-3}$

102. $\left(\frac{-3x^4y^2}{-9x^5y^{-2}}\right)^{-2}$

103. $\left(\frac{2a^3b^2}{3a^{-3}b^2}\right)^{-3}$

104. $\left(\frac{3x^5y^2}{6x^5y^{-2}}\right)^{-4}$

105. $\frac{(3x^2)^{-2}}{x^3x^{-4}x^0}$

106. $\frac{y^{-3}y^{-4}y^0}{(2y^{-2})^3}$

107. $\frac{a^na^3}{a^4}$

108. $\frac{b^9b^7}{b^n}$

109. $\left(\frac{b^n}{b^3}\right)^3$

110. $\left(\frac{a^2}{a^n}\right)^4$

111. $\frac{a^{-n}a^2}{a^3}$

112. $\frac{a^na^{-2}}{a^4}$

113. $\frac{a^{-n}a^{-2}}{a^{-4}}$

114. $\frac{a^n}{a^{-3}a^5}$

Use calculadora para hallar cada valor.

115. 1.23^6

116. 0.0537^4

117. -6.25^3

118. $(-25.1)^5$

Use calculadora para verificar que cada enunciado sea verdadero.

119. $(3.68)^0 = 1$

120. $(2.1)^4(2.1)^3 = (2.1)^7$

121. $(7.2)^2(2.7)^2 = [(7.2)(2.7)]^2$

122. $(3.7)^2 + (4.8)^2 \neq (3.7 + 4.8)^2$

123. $(3.2)^2(3.2)^{-2} = 1$

124. $[(5.9)^3]^2 = (5.9)^6$

125. $(7.23)^{-3} = \frac{1}{(7.23)^3}$

126. $\left(\frac{5.4}{2.7}\right)^{-4} = \left(\frac{2.7}{5.4}\right)^4$

Evalúe cada expresión cuando $x = -2$ y $y = 3$.

127. x^2y^3

128. x^3y^2

129. $\frac{x^{-3}}{y^3}$

130. $\frac{x^2}{y^{-3}}$

131. $(xy^2)^{-2}$

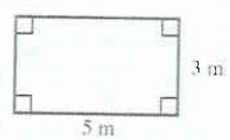
132. $-y^3x^{-2}$

133. $(-yx^{-1})^3$

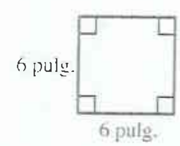
134. $(-y)^3x^{-2}$

Encuentre el área de cada figura. Redondee todas las respuestas a la unidad más cercana.

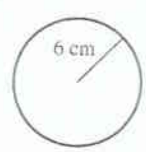
135.



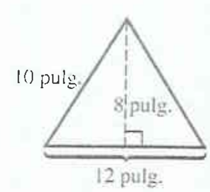
136.



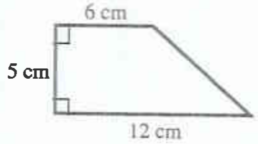
137.



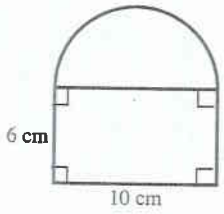
138.



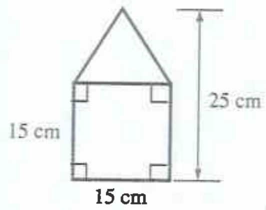
139.



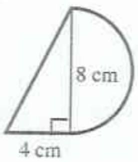
140.



141.

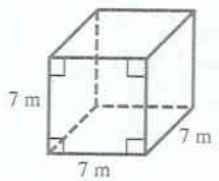


142.

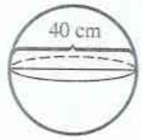


Encuentre el volumen de cada figura. Redondee todas las respuestas a la unidad más cercana.

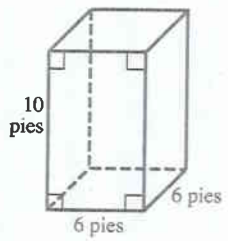
143.



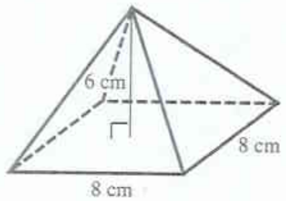
144.



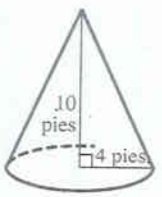
145.



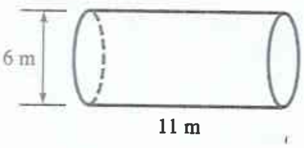
146.



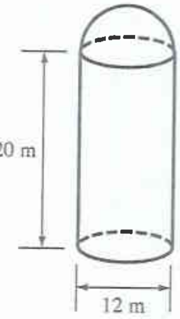
147.



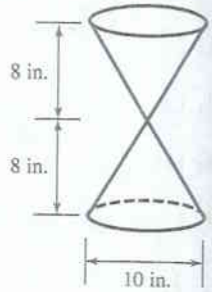
148.



149.



150.



APLICACIONES *Use calculadora para hallar cada valor.*

151. La fórmula $A = P(1 + i)^n$ da la cantidad A en una cuenta cuando P dólares es la cantidad originalmente depositada (el principal), i es la tasa de interés anual, y n es el número de años. Si se depositan \$5000 en una cuenta que paga 11% compuesto anualmente, ¿cuánto habrá en la cuenta en 50 años?

152. La fórmula $P = A(1 + i)^{-n}$ da el principal P que debe depositarse a una tasa anual i para llegar a A dólares en n años. ¿Cuánto debe invertirse al 9% de interés anual para tener \$1 millón en 50 años?

EXAMEN ESCRITO

153. Explique por qué un número positivo elevado a una potencia negativa es positivo.

154. Explique las reglas que determinan el orden en el que se efectúan las operaciones.

155. En la definición de x^{-1}, x no puede ser 0. ¿Por qué no?

156. Explique por qué $(xyz)^2 = x^2y^2z^2$.

ALGO PARA PENSAR

157. Encuentre la suma: $2^{-1} + 3^{-1} - 4^{-1}$.

158. Simplifique: $(3^{-1} + 4^{-1})^{-2}$.

159. Construya un ejemplo con números para demostrar que $x^m + x^n \neq x^{m+n}$.

160. Construya un ejemplo con números para demostrar que $x^m + y^m \neq (x + y)^m$.

Notación científica

Prepárese *Evalúe cada expresión:*

1. 10^1	**2.** 10^2	**3.** 10^3	**4.** 10^4
5. 10^{-2}	**6.** 10^{-4}	**7.** $4(10^3)$	**8.** $7(10^{-4})$

Con frecuencia en la ciencia se presentan números muy grandes y muy pequeños. Por ejemplo, la velocidad de la luz es aproximadamente 29 980 000 000 centímetros por segundo, y la masa de un átomo de hidrógeno es aproximadamente 0.000000000000000000000001673 gramos.

Estos números contienen un gran número de ceros, por lo cual se dificulta su lectura y recordarlos. En esta sección estudiaremos una notación que hará posible expresar estos números en forma más compacta.

Notación científica

Con exponentes, podemos escribir números muy grandes y muy pequeños en una forma llamada **notación científica.**

Notación científica Un número se escribe en **notación científica** cuando se escribe en la forma $N \times 10^n$, donde $1 \leq |N| < 10$ y n es un entero.

EJEMPLO 1 Cambie 29 980 000 000 a notación científica.

Solución El número 2.998 está entre 1 y 10. Para obtener 29 980 000 000, el punto decimal en 2.998 debe moverse diez lugares a la derecha. Podemos hacer esto al multiplicar 2.998 por 10^{10}.

$$29\,980\,000\,000 = 2.998 \times 10^{10}$$

Autoprueba Cambie 150 000 000 a notación científica.

EJEMPLO 2 Escriba 0.000000000000000000000001673 en notación científica.

Solución El número 1.673 está entre 1 y 10. Para obtener 0.000000000000000000000001673, el punto decimal en 1.673 debe moverse 24 lugares a la izquierda. Podemos hacer esto al multiplicar 1.673 por 10^{-24}.

$$0.000000000000000000000001673 = 1.673 \times 10^{-24}$$

Autoprueba Cambie 0.000025 a notación científica.

EJEMPLO 3 Cambie -0.0013 a notación científica.

Solución El valor absoluto de -1.3 está entre 1 y 10. Para obtener -0.0013, desplazamos el punto decimal en -1.3 tres lugares a la izquierda al multiplicar por 10^{-3}.

$$-0.0013 = -1.3 \times 10^{-3}$$

Autoprueba Cambie $-45\,700$ a notación científica.

Podemos cambiar un número escrito en notación científica a **notación estándar.** Por ejemplo, para escribir 9.3×10^7 en notación estándar, multiplicamos 9.3×10^7.

$$9.3 \times 10^7 = 9.3 \times 10\,000\,000 = 93\,000\,000$$

EJEMPLO 4 Cambie **a.** 3.7×10^5 y **b.** -1.1×10^{-3} a notación estándar.

Solución **a.** Puesto que la multiplicación por 10^5 desplaza el punto decimal 5 lugares a la derecha,

$$3.7 \times 10^5 = 370\,000$$

b. Como la multiplicación por 10^{-3} mueve el punto decimal 3 lugares a la izquierda,

$$-1.1 \times 10^{-3} = -0.0011$$

Autoprueba Cambie **a.** -9.6×10^4 y **b.** 5.62×10^{-3} a notación estándar.

Cada uno de los números siguientes está escrito tanto en notación científica como en la estándar. En cada caso, el exponente da el número de lugares que se recorre el punto decimal, y el signo del exponente indica la dirección en que se mueve:

$5.32 \times 10^4 = \underbrace{5\,3\,2\,0\,0.}_{\text{4 lugares a la derecha}}$

$6.45 \times 10^7 = \underbrace{6\,4\,5\,0\,0\,0\,0\,0.}_{\text{7 lugares a la derecha}}$

$2.37 \times 10^{-4} = \underbrace{0.\,0\,0\,0\,2\,3\,7}_{\text{4 lugares a la izquierda}}$

$9.234 \times 10^{-2} = \underbrace{0.\,0\,9\,2\,3\,4}_{\text{2 lugares a la izquierda}}$

$4.89 \times 10^0 = 4.\,89$

no se desplaza el punto decimal

Comentario Los números como 47.2×10^3 y 0.063×10^{-2} parecen estar escritos en notación científica, porque son el producto de un número y una potencia de 10. Sin embargo, no están en notación científica porque 47.2 y 0.063 no están entre 1 y 10.

EJEMPLO 5 Cambie **a.** 47.2×10^3 y **b.** 0.063×10^{-2} a notación científica.

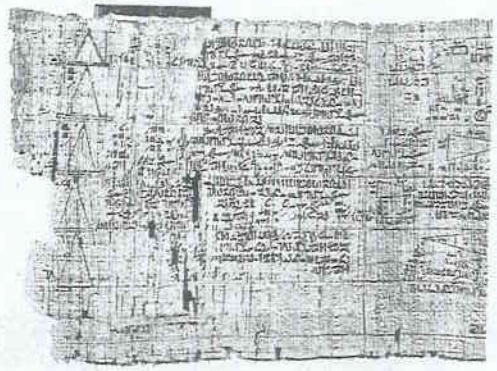
Solución Como los primeros factores no están entre 1 y 10, ningún número está en notación científica. No obstante, podemos cambiarlos a notación científica como sigue:

a.
$$\begin{aligned} \mathbf{47.2} \times 10^3 &= (\mathbf{4.72 \times 10^1}) \times 10^3 && \text{Escriba 47.2 en notación científica.} \\ &= 4.72 \times (10^1 \times 10^3) \\ &= 4.72 \times 10^4 \end{aligned}$$

PERSPECTIVA

Los antiguos egipcios crearon dos sistemas de escritura. En jeroglíficos, cada símbolo era una imagen de un objeto. Como la escritura en jeroglíficos se escribía por lo general en piedra, muchos ejemplos han llegado hasta nuestro tiempo. Para la vida diaria, los egipcios usaban escritura hierática. Semejante a la jeroglífica, la escritura hierática se hacía con tinta sobre hojas de papiro.

Un papiro que ha perdurado, el papiro de Rhind, fue descubierto en 1858 por un arqueólogo británico, Henry Rhind. Conocido también como el papiro de Ahmes por su autor de la Antigüedad, comienza con una descripción de su contenido: *Instrucciones para obtener el conocimiento de todas las cosas oscuras.*



The Ahmes Papyrus

El papiro de Ahmes y otro, el papiro de Moscú, contenían juntos 110 problemas matemáticos y sus soluciones. Muchos de éstos eran probablemente para educación, porque presentaban situaciones que se esperaba que escribas, sacerdotes y otros trabajadores del gobierno y de la administración de templos tenían que resolver.

b. $0.063 \times 10^{-2} = (6.3 \times 10^{-2}) \times 10^{-2}$ Escriba 0.063 en notación científica.

$= 6.3 \times (10^{-2} \times 10^{-2})$

$= 6.3 \times 10^{-4}$

Autoprueba Cambie **a.** 27.3×10^2 y **b.** 0.0025×10^{-3} a notación científica.

Uso de la notación científica para simplificar cálculos

La notación científica es útil cuando se simplifican expresiones que contienen números muy grandes o muy pequeños.

EJEMPLO 6 Use notación científica para simplificar $\dfrac{(0.00000064)(24\,000\,000\,000)}{(400\,000\,000)(0.0000000012)}$.

Solución Después de cambiar cada uno de los números a notación científica, podemos hacer por separado la aritmética en los números y las expresiones exponenciales.

$$\frac{(0.00000064)(24\,000\,000\,000)}{(400\,000\,000)(0.0000000012)} = \frac{(6.4 \times 10^{-7})(2.4 \times 10^{10})}{(4 \times 10^{8})(1.2 \times 10^{-9})}$$

$$= \frac{(6.4)(2.4)}{(4)(1.2)} \times \frac{10^{-7}10^{10}}{10^{8}10^{-9}}$$

$$= 3.2 \times 10^{4}$$

En notación estándar, el resultado es 32 000.

Autoprueba Simplifique: $\dfrac{(320)(25\,000)}{0.00004}$.

Énfasis en la tecnología USO DE LA NOTACIÓN CIENTÍFICA

Las calculadoras científicas y de gráficas dan con frecuencia respuestas en notación científica. Por ejemplo, si usamos una calculadora para hallar 301.2^8, la pantalla indicará

6.77391496 19	En calculadora científica
301.2^8 6.77391496E19	En calculadora de gráficas.

En cualquier caso, la respuesta está dada en notación científica y ha de interpretarse como

$$6.77391496 \times 10^{19}$$

También es posible marcar números en notación científica en una calculadora. Por ejemplo, para marcar 24 000 000 000 (que es 2.4×10^{10} en notación científica), marcamos estos números y presionamos estas teclas:

$$\left.\begin{matrix} 2.4\ \boxed{\text{EXP}}\ 10 \\ 2.4\ \boxed{\text{EE}}\ 10 \end{matrix}\right\} \text{Cualquiera de estas teclas está en una calculadora.}$$

Utilice una calculadora para simplificar

$$\frac{(24\,000\,000\,000)(0.00000006495)}{0.00000004824}$$

debemos introducir cada número en notación científica, porque cada uno tiene demasiados dígitos a marcar directamente. En notación científica, los tres números son

$$2.4 \times 10^{10} \qquad 6.495 \times 10^{-8} \qquad 4.824 \times 10^{-8}$$

Para usar una calculadora científica para simplificar la fracción, introducimos estos números y presionamos estas teclas:

$$2.4\ \boxed{\text{EXP}}\ 10\ \boxed{\times}\ 6.495\ \boxed{\text{EXP}}\ 8\ \boxed{+/-}\ \boxed{\div}\ 4.824\ \boxed{\text{EXP}}\ 8\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$$

La pantalla indicará 3.231343284 10. En notación estándar, la respuesta es 32, 313, 432, 840.

Los pasos son similares en una calculadora de gráficas.

Cifras significativas

Si medimos la longitud de un rectángulo y reportamos que la longitud es de 45 centímetros, hemos redondeado al centímetro más cercano. Si medimos con más cuidado y hallamos que la longitud es de 45.2 centímetros, hemos redondeado al décimo de centímetro más cercano. Decimos que la segunda medición es más precisa que la primera, porque 45.2 tiene tres *cifras significativas*, pero 45 sólo tiene dos.

No siempre es fácil saber cuántas cifras significativas tiene un número. Por ejemplo, 270 podría ser preciso a dos o tres cifras significativas. Si 270 se redondea a la decena más cercana, el número tiene dos cifras significativas. Si 270 se redondea a la unidad más cercana, tiene tres cifras significativas. Esta ambigüedad no se presenta cuando un número se escribe en notación científica.

Obtención de cifras significativas

Si un número M se escribe en notación científica como $N \times 10^n$, donde $1 \leq |N| < 10$ y n es un entero, el número de cifras significativas en M es el mismo que el número de dígitos en N.

En un problema donde las mediciones se multiplican o dividen, el resultado final debe redondearse para que la respuesta tenga el mismo número de cifras significativas que la medición menos precisa.

Resolución de problemas

EJEMPLO 7 La Tierra está aproximadamente a 93 000 000 de millas del Sol, y Júpiter está aproximadamente a 484 000 000 millas del Sol. Si se supone la alineación que se ve en la figura 1-21, ¿cuánto tardaría una nave espacial que vuela a 7500 millas por hora para llegar de la Tierra a Júpiter?

Solución Cuando los planetas están alineados como se muestra en la figura, la distancia entre la Tierra y Júpiter es (484 000 000 − 93 000 000) millas, o 391 000 000 millas. Para encontrar cuánto tardaría el viaje en horas, dividimos la distancia entre la velocidad.

$$\frac{391\,000\,000 \text{ mi}}{7500 \frac{\text{mi}}{\text{hr}}} = \frac{3.91 \times 10^8 \text{mi}}{7.5 \times 10^3 \frac{\text{mi}}{\text{hr}}}$$

Hay tres cifras significativas en el numerador y dos en el denominador.

$$\approx 0.5213333 \times 10^5 \text{mi} \cdot \frac{\text{hr}}{\text{mi}}$$

$$\approx 52{,}133.33 \text{ hr}$$

Como hay 24 × 365 horas en un año, podemos cambiar este resultado de horas a años si dividimos 52 133.33 entre (24 × 365).

$$\frac{52\,133.33 \text{ hora}}{(24 \times 365) \frac{\text{hora}}{\text{año}}} \approx 5.95129376 \text{ hora} \cdot \frac{\text{año}}{\text{hora}} \approx 5.95129376 \text{ años}$$

Si redondeamos a dos cifras significativas, el viaje tomará alrededor de 6.0 años.

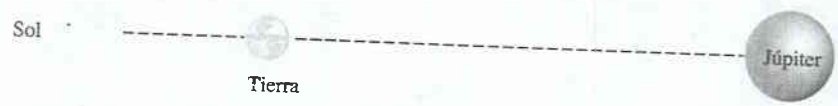


Figura 1-21

Autoprueba ¿Cuánto tardaría si la nave espacial pudiera volar a 12 000 millas por hora?

Respuestas a autopruebas

1. 1.5×10^8 **2.** 2.5×10^{-5} **3.** -4.57×10^4 **4. a.** −96 000, **b.** 0.00562 **5. a.** 2.73×10^3, **b.** 2.5×10^{-6} **6.** 200 000 000 000 **7.** Alrededor de 3.7 años

Examen oral *Dé cada número en notación científica.*

1. 352
2. 5130
3. 0.002
4. 0.00025

Dé cada número en notación estándar.

5. 3.5×10^2
6. 4.3×10^3
7. 2.7×10^{-1}
8. 8.5×10^{-2}

1.4 EJERCICIOS

REPASO *Escriba cada fracción como decimal finito o periódico.*

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{4}{5}$
3. $\frac{13}{9}$
4. $\frac{14}{11}$
5. Un hombre eleva 3 al cuadrado, 4 al cubo y 2 a la cuarta potencia, y luego encuentra su suma. ¿Qué número obtiene?
6. Si $a = -2$, $b = -3$ y $c = 4$, evalúe

$$\frac{5ab - 4ac - 2}{3bc + abc}$$

VOCABULARIO Y CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

7. Un número se escribe en notación científica cuando se escribe en la forma $N \times$ ___, donde $1 \leq |N| < 10$ y n es entero.
8. Para cambiar 6.31×10^4 a notación estándar, movemos el punto decimal en 6.31 ___ lugares a la derecha.
9. Para cambiar 6.31×10^{-4} a notación estándar, recorremos el punto decimal cuatro lugares a la ___.
10. El número 6.7×10^3 ___ ($>$ o $<$) al número $6\,700\,000 \times 10^{-4}$.

PRÁCTICA *Escriba cada número en notación científica.*

11. 3900
12. 1700
13. 0.0078
14. 0.068
15. −45 000
16. −547 000
17. −0.00021
18. −0.00078
19. 17 600 000
20. 89 800 000
21. 0.0000096
22. 0.000046
23. 323×10^5
24. 689×10^9
25. $6\,000 \times 10^{-7}$
26. 765×10^{-5}
27. 0.0527×10^5
28. 0.0298×10^3
29. 0.0317×10^{-2}
30. 0.0012×10^{-3}

Escriba cada número en notación estándar.

31. 2.7×10^2
32. 7.2×10^3
33. 3.23×10^{-3}
34. 6.48×10^{-2}
35. 7.96×10^5
36. 9.67×10^6
37. 3.7×10^{-4}
38. 4.12×10^{-5}
39. 5.23×10^0
40. 8.67×10^0
41. 23.65×10^6
42. 75.6×10^{-5}

Escriba cada número en notación científica y efectúe las operaciones. Dé todas las respuestas en notación científica.

43. $\frac{(4000)(30\,000)}{0.0006}$
44. $\frac{(0.0006)(0.00007)}{21\,000}$
45. $\frac{(640\,000)(2\,700\,000)}{120\,000}$
46. $\frac{(0.0000013)(0.000090)}{0.00039}$

Escriba cada número en notación científica y efectúe las operaciones. Dé todas las respuestas en notación estándar.

47. $\dfrac{(0.006)(0.008)}{0.0012}$

48. $\dfrac{(600)(80\,000)}{120\,000}$

49. $\dfrac{(220\,000)(0.000009)}{0.00033}$

50. $\dfrac{(0.00024)(96\,000\,000)}{640\,000\,000}$

51. $\dfrac{(320\,000)^2(0.0009)}{12\,000^2}$

52. $\dfrac{(0.000012)^2(49\,000)^2}{0.021}$

Use una calculadora científica para evaluar cada expresión. Redondee cada respuesta al número apropiado de cifras significativas.

53. $23\,437^3$

54. 0.00034^4

55. $(63\,480)(893\,322)$

56. $(0.0000413)(0.0000049)^2$

57. $\dfrac{(69.4)^8(73.1)^2}{(0.0043)^3}$

58. $\dfrac{(0.0031)^4(0.0012)^5}{(0.0456)^{-7}}$

APLICACIONES *Use notación científica para hallar cada respuesta. Redondee todas las respuestas al número apropiado de cifras significativas.*

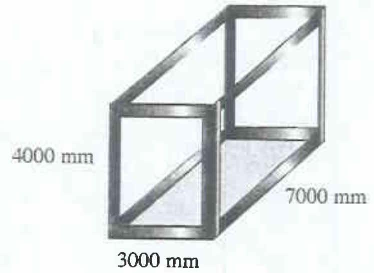
59. Longitudes de onda Los transmisores, tubos de vacío y luces emiten energía que se puede modelar como una onda. Ponga en orden las longitudes de onda que se ilustran en la tabla, de la más corta a la más larga.

Tipo	Uso	Longitud de onda (m)
luz visible	iluminación	9.3×10^{-6}
infrarroja	fotografía	3.7×10^{-5}
rayos X	médico	2.3×10^{-11}
ondas de radio	comunicación	3.0×10^{2}
rayos gamma	tratar cáncer	8.9×10^{-14}

60. Distancia al Sol El Sol está a unas 93 millones de millas de la Tierra. Encuentre esta distancia en pies. (1 mi = 5280 pies.)

61. Velocidad del sonido La velocidad del sonido en el aire es de 3.31×10^4 centímetros por segundo. Halle la velocidad del sonido en centímetros por hora.

62. Volumen de un tanque Encuentre el volumen del tanque que se ve en la ilustración.



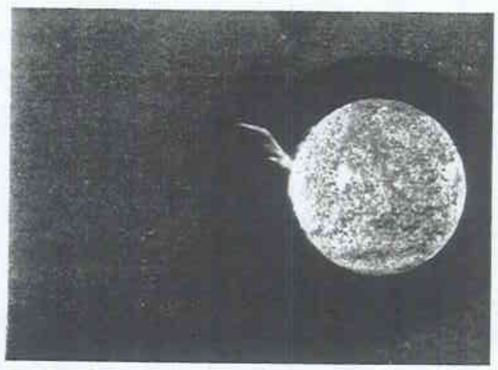
63. Masa de protones Si la masa de 1 protón es de 0.00000000000000000000000167248 gramos, encuentre la masa de 1 millón de protones.

64. Velocidad de la luz La velocidad de la luz en un vacío es alrededor de 30 000 000 000 centímetros por segundo. Encuentre la velocidad de la luz en millas por hora. (*Sugerencia:* 160 000 cm ≈ 1 milla.)

65. Distancia a la Luna La Luna está a unas 235 000 millas de la Tierra. Encuentre esta distancia en pulgadas.

66. Distancia al Sol El Sol está a unos 149 700 000 kilómetros de la Tierra. Encuentre esta distancia en millas. (*Sugerencia:* 1 km ≈ 0.6214 milla.)

67. Protuberancias solares Las protuberancias solares producen a veces enormes anillos de gas brillante expulsado de la superficie solar. La protuberancia de la ilustración se extiende unos 95 000 kilómetros en el espacio. Exprese esta distancia en millas. (*Sugerencia:* 1 km ≈ 0.6214 milla.)



68. Distancia a la Luna La Luna está a unos 378 196 kilómetros de la Tierra. Exprese esta distancia en pulgadas. (*Sugerencia:* 1 km ≈ 0.6214 milla.)

69. **Angstroms por pulgada** Un **angstrom** mide 0.0000001 milímetro, y una pulgada mide 25.4 milímetros. Encuentre el número de angstroms en una pulgada.
70. **Desplazamiento de un cometa** Una **unidad astronómica** (UA) es la distancia de la Tierra al Sol, unas 9.3×10^7 millas. El cometa Halley se desplaza de 0.6 a 18 UA del Sol. Exprese este desplazamiento en millas.
71. **Vuelo a Plutón** El planeta Plutón está aproximadamente a 3 574 000 000 de millas de la Tierra. Si una nave espacial puede volar a 18 000 millas por hora, ¿cuánto tardará en llegar a Plutón?
72. **Año luz** La luz se desplaza a unos 300 000 000 de metros por segundo. Un **año luz** es la distancia que la luz se puede desplazar en un año. ¿Cuántos metros hay en un año luz?
73. **Distancia a Alfa Centauro** La luz viaja a unas 186 000 millas por segundo. Un **pársec** es 3.26 años luz. La estrella Alfa Centauro está a 1.3 pársec de la Tierra. Exprese esta distancia en millas.
74. **Vida de un cometa** La masa del cometa que se observa en la ilustración es de unos 10^{16} gramos. Cuando el cometa se acerca al Sol, se evapora materia a razón de 10^7 gramos por segundo. Calcule la vida del cometa si aparece cada 50 años y pasa diez días cerca del Sol.

EXAMEN ESCRITO

75. Explique cómo cambiar un número de notación estándar a notación científica.
76. Explique cómo cambiar un número de notación científica a notación estándar.

ALGO PARA PENSAR

77. Encuentre la potencia más alta de 2 que se pueda evaluar con una calculadora científica.
78. Encuentre la potencia más alta de 7 que se pueda evaluar con una calculadora científica.

1.5 Resolución de ecuaciones

▮ Ecuaciones ▮ Propiedades de la igualdad ▮ Resolución de ecuaciones lineales ▮ Combinación de términos semejantes ▮ Identidades y contradicciones ▮ Fórmulas

Para comenzar *Llene los espacios en blanco.*

1. $\square + 3 = 5$ **2.** $8 - \square = 4$ **3.** $\frac{12}{\square} = 4$ **4.** $\square \cdot 5 = 30$

En esta sección mostraremos cómo resolver ecuaciones, uno de los conceptos más importantes en álgebra. A continuación, aplicaremos estas técnicas para resolución de ecuaciones para resolver fórmulas de varias variables.

Ecuaciones

Una **ecuación** es un enunciado que indica que dos cantidades son iguales. La ecuación $2 + 4 = 6$ es verdadera, y la ecuación $2 + 4 = 7$ es falsa. Si una ecuación tiene una variable (x, por ejemplo) puede ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de x. Por ejemplo, si $x = 1$, la ecuación $7x - 3 = 4$ es verdadera.

$$7(1) - 3 = 4 \qquad \text{Sustituya } x \text{ por } 1.$$
$$7 - 3 = 4$$
$$4 = 4$$

No obstante, la ecuación es falsa para todos los otros valores de x. Como 1 hace verdadera la ecuación, decimos que 1 *satisface* la ecuación.

El conjunto de números que satisfacen una ecuación se denomina **conjunto solución.** Los elementos del conjunto solución se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación. Hallar el conjunto solución de una ecuación se conoce como *resolver la ecuación.*

EJEMPLO 1 Determine si 3 es una solución de $2x + 4 = 10$.

Solución Sustituimos x por 3 y vemos si satisface la ecuación.

$$2x + 4 = 10$$
$$2(3) + 4 \stackrel{?}{=} 10 \qquad \text{Sustituya } x \text{ por } 3.$$
$$6 + 4 \stackrel{?}{=} 10 \qquad \text{Primero realice la multiplicación en el lado izquierdo.}$$
$$10 = 10 \qquad \text{Luego haga la adición.}$$

Como $10 = 10$, el número 3 satisface la ecuación. Es una solución.

Autoprueba ¿Es -5 una solución de $2x - 3 = -13$?

Propiedades de la igualdad

Para resolver una ecuación sustituimos la ecuación con unas más sencillas, que tengan todas el mismo conjunto solución. Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones equivalentes.**

Ecuaciones equivalentes Las ecuaciones con el mismo conjunto solución se llaman **ecuaciones equivalentes.**

Continuamos para sustituir cada ecuación resultante con una equivalente hasta que hayamos aislado la variable en un lado de una ecuación. Para aislar la variable, podemos usar las siguientes propiedades:

Propiedades de una igualdad Si a, b y c son números reales y $a = b$, entonces

$$a + c = b + c \quad \text{y} \quad a - c = b - c$$

y si $c \neq 0$, entonces

$$ac = bc \quad \text{y} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

En otras palabras, *podemos decir que si cualquier cantidad se suma a (o resta de) ambos lados de una ecuación, la nueva ecuación formada es equivalente a la ecuación original.*

Si ambos lados de una ecuación se multiplican (o dividen) por la misma cantidad diferente de cero, se forma una nueva ecuación que es equivalente a la ecuación original.

Resolución de ecuaciones lineales

Las ecuaciones más elementales que resolveremos son **ecuaciones lineales.**

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal en una variable (x, por ejemplo) es cualquier ecuación que se puede escribir en la forma

$$ax + c = 0 \quad (a \text{ y } c \text{ son números reales y } a \neq 0)$$

EJEMPLO 2 Resuelva: $2x + 8 = 0$.

Solución Para resolver la ecuación, aislaremos x en el lado izquierdo.

$$2x + 8 = 0$$

$$2x + 8 - \mathbf{8} = 0 - \mathbf{8} \qquad \text{Para eliminar 8 del lado izquierdo, reste 8 de ambos lados.}$$

$$2x = -8 \qquad \text{Simplifique.}$$

$$\frac{2x}{\mathbf{2}} = \frac{-8}{\mathbf{2}} \qquad \text{Para eliminar 2 del lado izquierdo, divida ambos lados entre 2.}$$

$$x = -4 \qquad \text{Simplifique.}$$

Comprobación: Sustituimos x por -4 para verificar que satisfaga la ecuación original.

$$2x + 8 = 0$$

$$2(\mathbf{-4}) + 8 \stackrel{?}{=} 0 \qquad \text{Sustituya } x \text{ por } -4.$$

$$-8 + 8 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

Como -4 satisface la ecuación original, es la solución. El conjunto solución es $\{-4\}$.

Autoprueba Resuelva $-3a + 15 = 0$ y dé el conjunto solución.

EJEMPLO 3 Resuelva: $3(x - 2) = 20$.

Solución Aislamos x en el lado izquierdo.

$$3(x - 2) = 20$$

$$3x - 6 = 20 \qquad \text{Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.}$$

$$3x - 6 + \mathbf{6} = 20 + \mathbf{6} \qquad \text{Para eliminar } -6 \text{ del lado izquierdo, sume 6 a ambos lados.}$$

$$3x = 26 \qquad \text{Simplifique.}$$

$$\frac{3x}{\mathbf{3}} = \frac{26}{\mathbf{3}} \qquad \text{Para eliminar 3 del lado izquierdo, divida ambos lados entre 3.}$$

$$x = \frac{26}{3} \qquad \text{Simplifique.}$$

Comprobación: $3(x - 2) = 20$

$$
\begin{aligned}
3\left(\frac{26}{3} - 2\right) &\stackrel{?}{=} 20 && \text{Sustituya } x \text{ por } \tfrac{26}{3}. \\
3\left(\frac{26}{3} - \frac{6}{3}\right) &\stackrel{?}{=} 20 && \text{Busque un común denominador: } 2 = \tfrac{6}{3}. \\
3\left(\frac{20}{3}\right) &\stackrel{?}{=} 20 && \text{Combine las dos fracciones: } \tfrac{26}{3} - \tfrac{6}{3} = \tfrac{20}{3}. \\
20 &= 20 && \text{Simplifique.}
\end{aligned}
$$

Como $\frac{26}{3}$ satisface la ecuación, es la solución. El conjunto solución es $\left\{\frac{26}{3}\right\}$.

Autoprueba Resuelva $-2(a + 3) = 18$ y dé el conjunto solución. ▮

Combinación de términos semejantes

Para resolver numerosas ecuaciones, necesitaremos combinar los terminos semejantes. Un **término algebraico** es un número o el producto de números (llamados **constantes**) y variables. Algunos ejemplos de términos son $3x$, $-7y$, y^2 y 8. Los **coeficientes numéricos** de estos términos son 3, -7, 1 y 8 (8 se puede escribir como $8x^0$), respectivamente.

En expresiones algebraicas, los términos se separan por signos + o −. Por ejemplo, la expresión $3x^2 + 2x - 4$ tiene tres términos, y la expresión $3x + 7y$ y tiene dos términos.

Los términos con las mismas variables y exponentes iguales reciben el nombre de **términos semejantes** o **términos similares:**

$5x$ y $6x$ son términos semejantes.

$27x^2y^3$ y $-326x^2y^3$ son términos semejantes.

$4x$ y $-17y$ son términos no semejantes. Porque tienen variables diferentes.

$15x^2y$ y $6xy^2$ son términos no semejantes Porque las variables tienen exponentes distintos.

Con el uso de la ley distributiva, podemos combinar términos semejantes. Por ejemplo,

$$5x + 6x = (5 + 6)x = 11x \qquad \text{y} \qquad 32y - 16y = (32 - 16)y = 16y$$

Esto sugiere que para combinar términos semejantes, *sumamos o restamos sus coeficientes numéricos y mantenemos las mismas variables con los mismos exponentes.*

EJEMPLO 4 Resuelva: $3(2x - 1) = 2x + 9$.

Solución

$$
\begin{aligned}
3(2x - 1) &= 2x + 9 \\
6x - 3 &= 2x + 9 && \text{Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.} \\
6x - 3 + 3 &= 2x + 9 + 3 && \text{Para eliminar } -3 \text{ del lado izquierdo, sume 3 a ambos lados.} \\
6x &= 2x + 12 && \text{Combine los términos semejantes.} \\
6x - 2x &= 2x - 2x + 12 && \text{Para eliminar } 2x \text{ del lado derecho, reste } 2x \text{ de ambos lados.} \\
4x &= 12 && \text{Combine los términos semejantes.} \\
x &= 3 && \text{Para eliminar 4 del lado izquierdo, divida ambos lados entre 4.}
\end{aligned}
$$

Comprobación: $3(2x - 1) = 2x + 9$

$$3(2 \cdot 3 - 1) \stackrel{?}{=} 2 \cdot 3 + 9 \quad \text{Sustituya } x \text{ por 3.}$$
$$3(5) \stackrel{?}{=} 6 + 9$$
$$15 = 15$$

Como 3 satisface la ecuación, es la solución. El conjunto solución es $\{3\}$.

Autoprueba Resuelva $-4(3a + 4) = 2a - 4$ y dé el conjunto solución.

Para resolver ecuaciones lineales más complicadas, seguiremos estos pasos.

Resolución de ecuaciones lineales

1. Si la ecuación contiene fracciones, multiplique ambos lados de la ecuación por un número que elimine a los denominadores.
2. Use la propiedad distributiva para eliminar todos los juegos de paréntesis y combine los términos semejantes.
3. Use las propiedades de adición y sustracción para obtener todas las variables en un lado de la ecuación y todos los números en el otro. Combine los términos semejantes, si es necesario.
4. Use las propiedades de la multiplicación y la división para hacer igual a 1 el coeficiente de la variable.
5. Compruebe el resultado al sustituir la variable con la posible solución y verifique que el número satisfaga la ecuación.

EJEMPLO 5 Resuelva: $\frac{5}{3}(x - 3) = \frac{3}{2}(x - 2) + 2$.

Solución **Paso 1:** Como 6 es el número mínimo que se puede dividir entre 2 y entre 3, multiplicamos por 6 ambos lados de la ecuación para eliminar las fracciones:

$$\frac{5}{3}(x - 3) = \frac{3}{2}(x - 2) + 2$$
$$6\left[\frac{5}{3}(x - 3)\right] = 6\left[\frac{3}{2}(x - 2) + 2\right] \quad \text{Para eliminar las fracciones, multiplique ambos lados por 6.}$$
$$6 \cdot \frac{5}{3}(x - 3) = 6 \cdot \frac{3}{2}(x - 2) + 6 \cdot 2 \quad \text{Use la propiedad distributiva en el lado derecho.}$$
$$10(x - 3) = 9(x - 2) + 12 \quad \text{Simplifique.}$$

Paso 2: Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis y luego combinar términos semejantes.

$$10x - 30 = 9x - 18 + 12$$
$$10x - 30 = 9x - 6$$

Paso 3: Use las propiedades de la adición y sustracción, sume 30 a ambos lados y reste $9x$ de ambos lados.

$$10x - 30 - 9x + 30 = 9x - 6 - 9x + 30$$
$$x = 24 \quad \text{Combine los términos semejantes.}$$

Como el coeficiente de x en la ecuación anterior es 1, el paso 4 es innecesario.

Paso 5: Verifique. Para esto sustituya x por 24 en la ecuación original y simplifique:

$$\frac{5}{3}(x-3) = \frac{3}{2}(x-2) + 2$$

$$\frac{5}{3}(24-3) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}(24-2) + 2$$

$$\frac{5}{3}(21) \stackrel{?}{=} \frac{3}{2}(22) + 2$$

$$5(7) \stackrel{?}{=} 3(11) + 2$$

$$35 = 35$$

Como 24 satisface la ecuación, es la solución. El conjunto solución es $\{24\}$.

EJEMPLO 6 Resuelva: $\dfrac{x+2}{5} - 4x = \dfrac{8}{5} - \dfrac{x+9}{2}$.

Solución

$$\frac{x+2}{5} - 4x = \frac{8}{5} - \frac{x+9}{2}$$

$$10\left(\frac{x+2}{5} - 4x\right) = 10\left(\frac{8}{5} - \frac{x+9}{2}\right) \quad \text{Para eliminar las fracciones, multiplique ambos lados por 10.}$$

$$2(x+2) - 40x = 2(8) - 5(x+9) \quad \text{Elimine los paréntesis.}$$

$$2x + 4 - 40x = 16 - 5x - 45 \quad \text{Elimine los paréntesis.}$$

$$-38x + 4 = -5x - 29 \quad \text{Combine los términos semejantes.}$$

$$-33x = -33 \quad \text{Sume } 5x \text{ y } -4 \text{ a ambos lados.}$$

$$\frac{-33x}{-33} = \frac{-33}{-33} \quad \text{Divida ambos lados entre } -33.$$

$$x = 1 \quad \text{Simplifique.}$$

Comprobación: $\dfrac{x+2}{5} - 4x = \dfrac{8}{5} - \dfrac{x+9}{2}$

$$\frac{1+2}{5} - 4(1) \stackrel{?}{=} \frac{8}{5} - \frac{1+9}{2} \quad \text{Sustituya } x \text{ por 1.}$$

$$\frac{3}{5} - 4 \stackrel{?}{=} \frac{8}{5} - 5$$

$$\frac{3}{5} - \frac{20}{5} \stackrel{?}{=} \frac{8}{5} - \frac{25}{5}$$

$$-\frac{17}{5} = -\frac{17}{5}$$

Como 1 satisface la ecuación, es la solución. El conjunto solución es $\{1\}$.

Autoprueba Resuelva $\dfrac{a+5}{5} + 2a = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a+14}{5}$ e indique el conjunto solución.

Identidades y contradicciones

Las ecuaciones estudiadas hasta este punto se denominan **ecuaciones condicionales.** Para estas ecuaciones, algunos números x satisfacen la ecuación y otros no la satisfacen. Una **identidad** es una ecuación que es satisfecha por todo número x para el que están definidos ambos lados de la ecuación.

EJEMPLO 7 Resuelva: $2(x - 1) + 4 = 4(1 + x) - (2x + 2)$.

Solución

$$2(x - 1) + 4 = 4(1 + x) - (2x + 2)$$

$$2x - 2 + 4 = 4 + 4x - 2x - 2$$ Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

$$2x + 2 = 2x + 2$$ Combine los términos semejantes.

El resultado $2x + 2 = 2x + 2$ es verdadero para todo valor de x. Como todo número x satisface la ecuación, es una identidad.

Autoprueba Resuelva: $3(a + 4) + 5 = 2(a - 1) + a + 19$.

Una **contradicción** es una ecuación que no tiene solución.

EJEMPLO 8 Resuelva: $\dfrac{x - 1}{3} + 4x = \dfrac{3}{2} + \dfrac{13x - 2}{3}$.

Solución

$$\frac{x - 1}{3} + 4x = \frac{3}{2} + \frac{13x - 2}{3}$$

$$6\left(\frac{x - 1}{3} + 4x\right) = 6\left(\frac{3}{2} + \frac{13x - 2}{3}\right)$$ Para eliminar las fracciones, multiplique ambos lados por 6.

$$2(x - 1) + 6(4x) = 3(3) + 2(13x - 2)$$ Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

$$2x - 2 + 24x = 9 + 26x - 4$$ Elimine los paréntesis.

$$26x - 2 = 26x + 5$$ Combine los términos semejantes.

$$-2 = 5$$ Reste $26x$ de ambos lados.

Como $-2 = 5$ es falsa, ningún número x puede satisfacer la ecuación. El conjunto solución es el **conjunto vacío,** denotado como $\varnothing$.

Autoprueba Resuelva: $\dfrac{x + 5}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{x}{5}$.

Fórmulas

Suponga que deseamos hallar las alturas de varios triángulos cuyas áreas y bases se conocen. Sería tedioso sustituir valores de A y b en la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ y luego repetidamente despejar la h de la fórmula. Es más fácil despejar h primero y luego sustituir valores por A y b y calcular h directamente.

Resolver (o despejar) una variable en una fórmula significa aislar la variable en un lado de la ecuación y aislar las demás cantidades en el otro lado.

EJEMPLO 9 De $A = \frac{1}{2}bh$ despeje h.

Solución

$$A = \frac{1}{2}bh$$

$$2A = bh \quad \text{Para eliminar la fracción, multiplique ambos lados por 2.}$$

$$\frac{2A}{b} = h \quad \text{Para aislar } h\text{, divida ambos lados entre } b.$$

$$h = \frac{2A}{b} \quad \text{Escriba } h \text{ en el lado izquierdo.}$$

Autoprueba De $A = \frac{1}{2}bh$ despeje b.

EJEMPLO 10 Para interés simple, la fórmula $A = p + prt$ da la cantidad de dinero en una cuenta al final de un tiempo específico. A representa la cantidad, p el principal, r la tasa de interés y t el tiempo. De la fórmula podemos despejar t como sigue:

Solución

$$A = p + prt$$

$$A - p = prt \quad \text{Para aislar el término con } t\text{, reste } p \text{ de ambos lados.}$$

$$\frac{A-p}{pr} = t \quad \text{Para aislar } t\text{, divida ambos lados entre } pr.$$

$$t = \frac{A-p}{pr} \quad \text{Escriba } t \text{ en el lado izquierdo.}$$

Autoprueba De $A = p + prt$ despeje r.

EJEMPLO 11 La fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$ convierte grados Celsius en grados Fahrenheit. De la fórmula despeje C.

Solución

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

$$F - 32 = \frac{9}{5}C \quad \text{Para aislar el término con } C\text{, reste 32 de ambos lados.}$$

$$\frac{5}{9}(F - 32) = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}C\right) \quad \text{Para aislar } C\text{, multiplique ambos lados por } \frac{5}{9}.$$

$$\frac{5}{9}(F - 32) = C \quad \frac{5}{9}\cdot\frac{9}{5} = 1.$$

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Para convertir grados Fahrenheit en grados Celsius, podemos usar la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

Autoprueba De la fórmula $S = \dfrac{180(n-2)}{5}$ despeje n.

Respuestas a autopruebas

1. sí **2.** $\{5\}$ **3.** $\{-12\}$ **4.** $\left\{-\frac{6}{7}\right\}$ **6.** $\{-2\}$ **7.** todos los números reales **8.** $\varnothing$ **9.** $b = \frac{2A}{h}$
10. $r = \frac{A-p}{pt}$ **11.** $n = \frac{5S}{180} + 2$ o $n = \frac{5S+360}{180}$

Examen oral *Combine los términos semejantes.*

1. $5x + 4x$ **2.** $7s^2 - 5s^2$

Diga si cada número es una solución de $2x + 5 = 13$.

3. 3 **4.** 4 **5.** 5 **6.** 6

Resuelva cada ecuación.

7. $3x - 2 = 7$ **8.** $\frac{1}{2}x - 1 = 5$ **9.** $\frac{x-2}{3} = 1$ **10.** $\frac{x+3}{2} = 3$

1.5 EJERCICIOS

REPASO *Simplifique cada expresión.*

1. $(-4)^3$ **2.** -3^3

3. $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^0$ **4.** $(x^2x^3)^4$

5. $\left(\frac{x^2x^5}{x^3}\right)^2$ **6.** $\left(\frac{x^4y^3}{x^5y}\right)^3$

7. $(2x)^{-3}$ **8.** $\left(\frac{x^2}{y^5}\right)^{-4}$

VOCABULARIO Y CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

9. Una ________ es un enunciado de que dos cantidades son iguales.

10. Si un número es sustituido por una variable en una ecuación y la ecuación es verdadera, decimos que el número ______ la ecuación.

11. Si dos ecuaciones tienen el mismo conjunto solución, se llaman ecuaciones ________.

12. Si a, b y c son números reales y $a = b$, entonces $a + c = b +$ __ y $a - c = b -$ __.

13. Si a, b y c son números reales y $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot$ __ y $\frac{a}{c} =$ __ $(c \neq 0)$.

14. Un número o el producto de números y variables se llama _____ algebraico.

15. Los términos _____ son aquellos con las mismas variables y con los mismos exponentes.

16. Para combinar términos semejantes, se suman sus ________ y se mantienen las mismas _______ y exponentes.

17. Una ______ es una ecuación que es verdadera para todos los valores de su variable.

18. Una contradicción no es verdadera para ___ valor de su variable.

PRÁCTICA *Diga si 5 es una solución de cada ecuación.*

19. $3x + 2 = 17$ **20.** $7x - 2 = 33$

21. $\frac{3}{5}x - 5 = -2$ **22.** $\frac{2}{5}x + 12 = 8$

Resuelva cada ecuación.

23. $x + 6 = 8$ **24.** $y - 7 = 3$

25. $a - 5 = 20$ **26.** $b + 4 = 18$

27. $2u = 6$ **28.** $3v = 12$

29. $\frac{x}{4} = 7$ **30.** $\frac{x}{6} = 8$

31. $3x + 1 = 3$ **32.** $8x - 2 = 13$

33. $2x + 1 = 13$ **34.** $2x - 4 = 16$

35. $3(x - 4) = -36$ **36.** $4(x + 6) = 84$

37. $3(r - 4) = -4$ **38.** $4(s - 5) = -3$

Diga si los términos son semejantes. Si así es, combínelos.

39. $2x, 6x$ **40.** $-3x, 5y$

41. $-5xy, -7yz$ **42.** $-3t^2, 12t^2$

43. $3x^2, -5x^2$ **44.** $5y^2, 7xy$

45. $xy, 3xt$ **46.** $-4x, -5x$

Resuelva cada ecuación. Si la ecuación es una identidad o una contradicción, indíquelo así.

47. $3a - 22 = -2a - 7$ **48.** $a + 18 = 6a - 3$

49. $2(2x + 1) = 15 + 3x$ **50.** $-2(x + 5) = 30 - x$

51. $3(y - 4) - 6 = y$ **52.** $2x + (2x - 3) = 5$

53. $5(5 - a) = 37 - 2a$ **54.** $4a + 17 = 7(a + 2)$

55. $4(y + 1) = -2(4 - y)$ **56.** $5(r + 4) = -2(r - 3)$

57. $2(a - 5) - (3a + 1) = 0$

58. $8(3a - 5) - 4(2a + 3) = 12$

59. $3(y - 5) + 10 = 2(y + 4)$

60. $2(5x + 2) = 3(3x - 2)$

61. $9(x + 2) = -6(4 - x) + 18$

62. $3(x + 2) - 2 = -(5 + x) + x$

63. $-4p - 2(3p + 5) = -6p + 2(p + 2)$

64. $2q - 3(q - 5) = 5(q + 2) - 7$

65. $4 + 4(n + 2) = 3n - 2(n - 5)$

66. $4x - 2(3x + 2) = 2(x + 3)$

67. $\frac{1}{2}x - 4 = -1 + 2x$ **68.** $2x + 3 = \frac{2}{3}x - 1$

69. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 4$ **70.** $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$

71. $\frac{x}{6} + 1 = \frac{x}{3}$ **72.** $\frac{3}{2}(y + 4) = \frac{20 - y}{2}$

73. $5 - \frac{x + 2}{3} = 7 - x$

74. $3x - \frac{2(x + 3)}{3} = 16 - \frac{x + 2}{2}$

75. $\frac{4x - 2}{2} = \frac{3x + 6}{3}$ **76.** $\frac{t + 4}{2} = \frac{2t - 3}{3}$

77. $\frac{a + 1}{3} + \frac{a - 1}{5} = \frac{2}{15}$

78. $\frac{2z + 3}{3} + \frac{3z - 4}{6} = \frac{z - 2}{2}$

79. $\frac{5a}{2} - 12 = \frac{a}{3} + 1$ **80.** $\frac{5a}{6} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{a}{6}$

81. $4(2 - 3t) + 6t = -6t + 8$

82. $2x - 6 = -2x + 4(x - 2)$

83. $\frac{a + 1}{4} + \frac{2a - 3}{4} = \frac{a}{2} - 2$

84. $\frac{y - 8}{5} + 2 = \frac{2}{5} - \frac{y}{3}$

85. $3(x - 4) + 6 = -2(x + 4) + 5x$

86. $2(x - 3) = \frac{3}{2}(x - 4) + \frac{x}{2}$

87. $y(y + 2) + 1 = y^2 + 2y + 1$

88. $x(x - 3) = x^2 - 2x + 1 - (5 + x)$

De cada fórmula, despeje la variable indicada.

89. $A = lw$ despeje w **90.** $p = 4s$ despeje s

91. $V = \frac{1}{3}Bh$ despeje B **92.** $b = \frac{2A}{h}$ despeje A

93. $I = prt$ despeje t **94.** $I = prt$ despeje r

95. $p = 2l + 2w$ despeje w **96.** $p = 2l + 2w$ despeje l

97. $A = \frac{1}{2}h(B + b)$ despeje B **98.** $A = \frac{1}{2}h(B + b)$ despeje b

99. $y = mx + b$ despeje x **100.** $y = mx + b$ despeje m

101. $l = a + (n - 1)d$ despeje n

102. $l = a + (n - 1)d$ despeje d

103. $S = \frac{a - lr}{1 - r}$ despeje l

104. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ despeje F

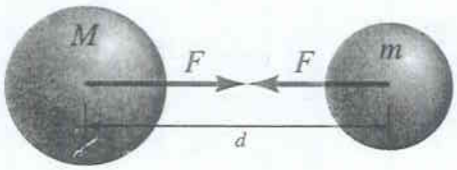
105. $S = \frac{n(a + l)}{2}$ despeje l **106.** $S = \frac{n(a + l)}{2}$ despeje n

APLICACIONES

107. Fuerza debida a la gravedad Las masas de dos objetos en la ilustración de la página siguiente son m y M. La fuerza de gravitación F entre las masas es

$$F = \frac{GmM}{d^2}$$

donde G es una constante y d es la distancia entre ellas. Despeje m.



108. Termodinámica La fórmula de Gibbs de energía libre es $G = U - TS + pV$. Despeje S.

109. Conversión de temperaturas De la fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$ despeje C y encuentre las temperaturas Celsius que corresponden a temperaturas Fahrenheit de 32°, 70° y 212°.

110. Duplicar dinero Un hombre pretende invertir \$1000 a interés simple. En la fórmula $A = p + prt$ despeje t y encuentre cuánto tardará en duplicar su dinero a las tasas de 5%, 7% y 10%.

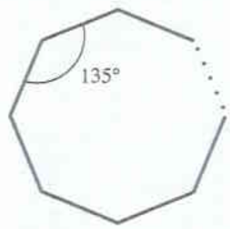
111. Costo de la electricidad El costo de la energía eléctrica en cierta población está dado por la fórmula $C = 0.07n + 6.50$, donde C es el costo y n es el número de kilowatts-hora usados. Despeje n y encuentre el número de kwh usados para costos de \$49.97, \$76.50 y \$125.

112. Costo de agua Una factura mensual de agua en cierta población se calcula con la fórmula $n = \frac{5000C - 17\,500}{6}$, donde n es el número de galones consumidos y C es el costo mensual. Despeje C y calcule la cuenta para cantidades consumidas de 500, 1200 y 2500 galones.

113. Ley de Ohm La fórmula $E = IR$, llamada **ley de Ohm,** se emplea en electrónica. Despeje R y luego calcule la resistencia R si el voltaje E es de 56 volts y la corriente I es de 7 amperes. (La resistencia tiene unidades de **ohms.**)

114. Ganancia de interés Una cantidad P, invertida a una tasa r de interés simple, crecerá a una cantidad A en t años, según la fórmula $A = P(1 + rt)$. Despeje P. Suponga que un hombre invirtió algún dinero al 5.5%. Si después de 5 años él tenía \$6693.75 en depósito, ¿qué cantidad invirtió originalmente?

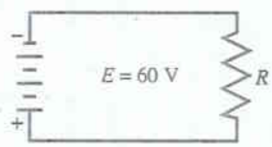
115. Ángulos de un polígono Un polígono rectangular tiene n lados iguales y n ángulos iguales. La medida a de un ángulo interior está dada por $a = 180°\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ Despeje n. Encuentre el número de lados del polígono regular de la ilustración si el ángulo interior es de 135°.



116. Pérdida de potencia La ilustración es el diagrama esquemático de un resistor conectado a una fuente de voltaje de 60 volts. En consecuencia, el resistor disipa potencia en forma de calor. La potencia P que se pierde cuando se conecta un voltaje V a través de una resistencia R está dada por la fórmula

$$P = \frac{E^2}{R}$$

Despeje R. Si P es 4.8 watts y E es 60 volts, encuentre R.



EXAMEN ESCRITO

117. Explique la diferencia entre una ecuación condicional, una identidad y una contradicción.

118. Explique cómo resolvería una ecuación.

ALGO PARA PENSAR *Encuentre el error.*

119.
$$\begin{aligned} 3(x - 2) + 4 &= 14 \\ 3x - 2 + 4 &= 14 \\ 3x + 2 &= 14 \\ 3x &= 12 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

120.
$$\begin{aligned} A &= p + prt \\ A - p &= prt \\ A - p - pt &= t \\ t &= A - p - pt \end{aligned}$$

1.6 Uso de ecuaciones para resolver problemas

- Problemas de práctica
- Problemas de negocios
- Problemas de geometría
- Problemas de palancas

Para comenzar *Sea* $x = 18$.

1. ¿Qué número es 2 unidades mayor que x?
2. ¿Qué número es 4 veces x?
3. ¿Qué número es 5 unidades más que el doble de x?
4. ¿Qué número es 2 unidades menos que la mitad de x?

En esta sección aplicaremos nuestros conocimientos para resolución de ecuaciones, para resolver problemas. Cuando traducimos palabras de un problema a matemáticas, estamos creando un *modelo matemático* del problema. Para crear estos modelos, podemos usar la tabla 1-3 para traducir ciertas palabras a operaciones matemáticas.

Adición (+)	Sustracción (−)	Multiplicación (·)	División (÷)
sumada a	restado de	multiplicado por	dividido entre
más	diferencia	producto	cociente
la suma de	menos que	veces	razón
más que	menos	de	mitad
aumentado en	disminuido en	doble	

Tabla 1-3

Entonces podemos cambiar frases en expresiones algebraicas, como en la tabla 1-4.

Frase	Expresión algebraica
2 sumado a un número	$x + 2$
la diferencia entre dos números	$x - y$
5 por un número	$5x$
el producto de 925 y un número	$925x$
5% de un número	$0.05x$
la suma de dos veces un número y 10	$2x + 10$
el cociente (o razón) entre dos números	$\frac{x}{y}$
mitad de un número	$\frac{x}{2}$

Tabla 1-4

Una vez que sepamos cómo cambiar frases en expresiones algebraicas, podremos resolver muchos problemas. La siguiente lista de pasos proporciona una estrategia para resolver problemas.

Resolución de problemas

1. ***Analice el problema*** leálo cuidadosamente para entender los datos dados. ¿Qué información se da? ¿Qué vocabulario se emplea? ¿Qué se le pide hallar? A veces un diagrama ayuda a visualizar los datos del problema.
2. ***Forme una ecuación*** utilice una variable que represente la cantidad a hallar. Luego indique todas las otras cantidades mencionadas como expresiones con esa variable. Por último, escriba una ecuación que exprese una cantidad en dos formas diferentes.
3. ***Resuelva la ecuación.***
4. ***Exprese la conclusión.***
5. ***Verifique el resultado*** de acuerdo con la expresión oral del problema.

Problemas de práctica

EJEMPLO 1 **Corte de una cuerda** Un escalador de montañas desea cortar en 3 una cuerda de 213 pies de largo. Si cada pieza debe ser 2 pies más larga que la anterior, ¿dónde debe hacer los cortes?

Analice el problema Si x representa la longitud de la pieza más corta, el escalador desea que los tramos de las tres piezas midan

$$x, \qquad x + 2 \qquad \text{y} \qquad x + 4$$

pies de largo. Él sabe que la suma de estas tres longitudes se puede expresar en dos formas: como $x + (x + 2) + (x + 4)$ y como 213.

Forme una ecuación Represente con x la longitud de la primera pieza de la cuerda. Entonces $x + 2$ representa la longitud de la segunda pieza y $x + 4$ representa la longitud de la tercera pieza. (Vea la figura 1-22.)

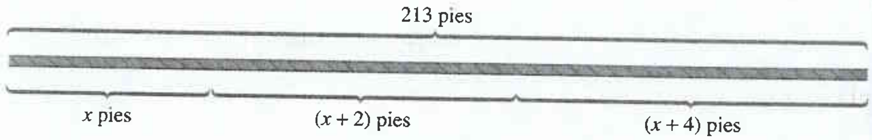


Figura 1-22

De la figura 1-22, vemos que la suma de las piezas individuales deber ser igual a la longitud total de la cuerda.

Longitud de la primera pieza	más	longitud de la segunda pieza	más	longitud de la tercera pieza	igual a	**longitud total de la cuerda.**
x	$+$	$x + 2$	$+$	$x + 4$	$=$	213

Resuelva la ecuación Ahora resolvemos la ecuación.

$$x + x + 2 + x + 4 = 213$$

$$3x + 6 = 213 \quad \text{Combine los términos semejantes.}$$

$$3x = 207 \quad \text{Reste 6 de ambos lados.}$$

$$x = 69 \quad \text{Divida ambos lados entre 3.}$$

$$x + 2 = 71$$

$$x + 4 = 73$$

Exprese la conclusión Él debe hacer cortes de 69 pies de un extremo y 73 pies del otro extremo, para obtener longitudes de 69 pies, 71 pies y 73 pies.

Verifique el resultado Cada tramo mide 2 pies más que el tramo anterior, y la suma de los tramos es de 213 pies. ∎

Problemas de negocios

Cuando se reduce el precio regular de la mercancía, la cantidad de reducción se denomina **rebaja** (o descuento).

Precio de venta	=	precio regular	−	rebaja.

Por lo general, la rebaja se expresa como porcentaje del precio regular.

Rebaja	=	porcentaje de rebaja	·	precio regular.

EJEMPLO 2 **Calcule el porcentaje de rebaja** Un sistema de teatro en casa está a la venta en \$777. Si el precio de lista era de \$925, encuentre el porcentaje de rebaja.

Analice el problema En este caso, \$777 es el precio de venta, \$925 es el precio regular, y la rebaja es el producto de \$925 y el porcentaje de rebaja.

Forme una ecuación Podemos representar con r el porcentaje de rebaja, expresado como decimal. A continuación sustituimos \$777 por el precio de venta y \$925 por el precio regular en la fórmula.

Precio de venta	igual a	precio regular	menos	rebaja.
777	=	925	−	$r \cdot 925$

Resuelva la ecuación Ahora resolvemos la ecuación.

$$777 = 925 - r \cdot 925$$
$$777 = 925 - 925r$$
$$-148 = -925r \qquad \text{Reste 925 de ambos lados.}$$
$$0.16 = r \qquad \text{Divida ambos lados entre } -925.$$

Exprese la conclusión El porcentaje de rebaja es 16%.

Verifique el resultado Como la rebaja es 16% de \$925, o sea \$148, el precio de venta es \$925 − \$148, o \$777. ∎

EJEMPLO 3 **Análisis de cartera de valores** Una fundación universitaria posee acciones en IBC (venta a \$54 por acción), GS (venta a \$65 por acción) y ATB (venta a \$105 por acción). La fundación posee igual número de acciones de GS e IBC, pero cinco veces más que ATB.

Si la cartera de valores vale \$450 800, ¿cuántas acciones de cada tipo posee la fundación?

Analice el problema El valor de la acción IBC más el valor de la acción GS más el valor de la acción ATB deben ser iguales a \$450 800.

- Si x representa el número de acciones de IBC, entonces $\$54x$ es el valor de esa acción.
- Como la fundación tiene números iguales de acciones de GS y de IBC, x también representa el número de acciones de GS. El valor de esta acción es $\$65x$.
- Puesto que la fundación posee cinco veces las acciones de ATB, es dueña de $5x$ acciones de ATB. El valor de esta acción es $\$105(5x)$.

Hacemos la suma de estos valores igual a \$450 800.

Forme una ecuación Representemos por x el número de acciones de IBC. Luego x representa también el número de acciones de GS, y $5x$ representa el número de acciones de ATB.

Valor de la acción IBC	más	valor de la acción GS	más	valor de la acción ATB	igual a	valor total de la cartera.
$54x$	$+$	$65x$	$+$	$105(5x)$	$=$	$450\,800$

Resuelva la ecuación Ahora resolvemos la ecuación.

$$54x + 65x + 105(5x) = 450\,800$$

$$54x + 65x + 525x = 450\,800 \qquad 105(5x) = 525x.$$

$$644x = 450\,800 \qquad \text{Combine los términos semejantes.}$$

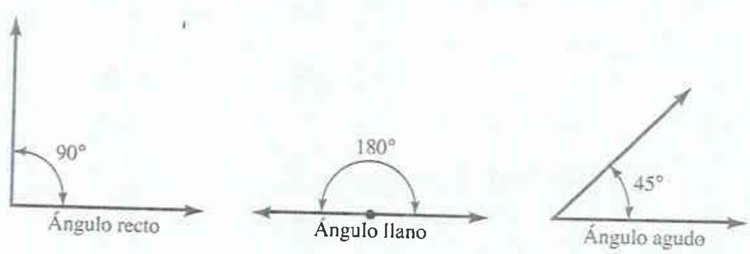
$$x = 700 \qquad \text{Divida ambos lados entre 644.}$$

Exprese la conclusión La fundación posee 700 acciones de IBC, 700 acciones de GS, y 5(700), o sea 3500 acciones de ABT.

Verifique el resultado El valor de 700 acciones de IBC a \$54 por acción es de \$37 800. El valor de 700 acciones de GS a \$65 por acción es de \$45 500. El valor de 3500 acciones de ATB a \$105 por acción es de \$367 500. La suma de estos valores es de \$450 800. ∎

Problemas de geometría

La figura 1-23 ilustra varias figuras geométricas. Un **ángulo recto** es un ángulo que mide 90°. Un **ángulo llano** es un ángulo cuya medida es de 180°. Un **ángulo agudo** es un ángulo cuya medida es mayor que 0° pero menor de 90°.



(a) (b) (c)

Figura 1-23

Si la suma de dos ángulos es igual a 90°, los ángulos se llaman **complementarios**, y cada ángulo se denomina **complemento** del otro. Si la suma de dos ángulos es igual a 180°, los ángulos se llaman **suplementarios**, y cada ángulo se denomina **suplemento** del otro.

Un **triángulo rectángulo** es un triángulo con un ángulo recto. En la figura 1-24(a), $\angle C$ (léase como "ángulo C") es un ángulo recto. Un **triángulo isósceles** es un triángulo con dos lados de igual medida que se encuentran para formar el **ángulo del vértice**. Los ángulos opuestos a los lados iguales, llamados **ángulos de la base**, también son iguales. Un **triángulo equilátero** es un triángulo con tres lados iguales y tres ángulos iguales.

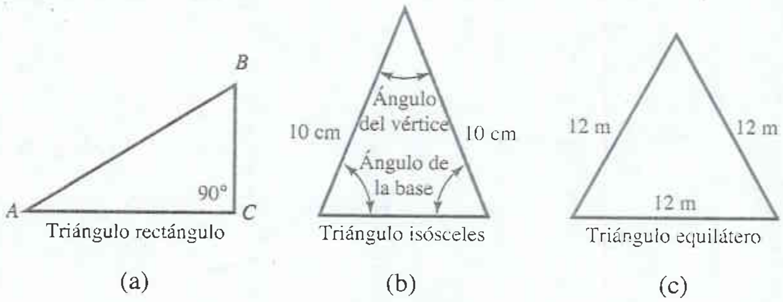


Figura 1-24

EJEMPLO 4 **Ángulos en un triángulo** Si el ángulo del vértice del triángulo isósceles que se ve en la figura 1-24(b) mide 64°, encuentre la medida de cada ángulo de base.

Analice el problema Nos dicen que el ángulo del vértice mide 64°. Si con $x°$ representamos la medida de un ángulo de base, la medida del otro ángulo de base es también $x°$. Por lo tanto, la suma de los ángulos del triángulo es $x° + x° + 64°$. Como la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es de 180°, sabemos que $x° + x° + 64°$ es igual a 180°.

Forme una ecuación Podemos formar la ecuación

La medida de un ángulo de la base	más	la medida del otro ángulo de base	más	la medida del ángulo del vértice	es igual a	180°.
x	$+$	x	$+$	64	$=$	180

Resuelva la ecuación Ahora resolvemos la ecuación.

$$x + x + 64 = 180$$

$$2x + 64 = 180 \quad \text{Combine los términos semejantes.}$$

$$2x = 116 \quad \text{Reste 64 de ambos lados.}$$

$$x = 58 \quad \text{Divida ambos lados entre 2.}$$

Exprese la conclusión La medida de cada ángulo de base es de 58°.

Verifique el resultado La suma de las medidas de cada ángulo de base y el ángulo del vértice es de 180°:

$$58° + 58° + 64° = 180°$$

EJEMPLO 5 **Diseño de una cerca para perros** Un hombre tiene 28 metros de cerca para construir una cerca rectangular para un perro. Si la cerca ha de medir 6 metros más larga que su ancho, encuentre sus dimensiones.

Analice el problema El perímetro P de un rectángulo es la distancia a su alrededor. Si w se escoge para representar el ancho de la cerca, entonces $w + 6$ representa su longitud. (Vea la figura 1-25.) El perímetro se puede expresar como $2w + 2(w + 6)$ o como 28.

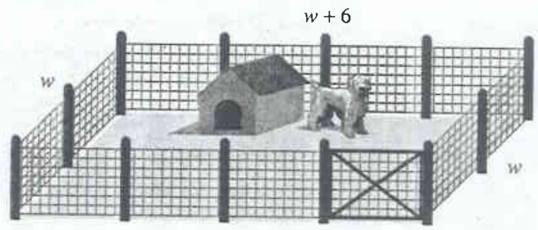


Figura 1-25

Forme una ecuación Con w represente el ancho de la cerca. Entonces $w + 6$ representa su longitud.

Dos anchos	más	dos longitudes	igual a	el perímetro.
$2 \cdot w$	$+$	$2 \cdot (w + 6)$	$=$	28

Resuelva la ecuación Ahora resolvemos la ecuación.

$$2 \cdot w + 2 \cdot (w + 6) = 28$$

$$2w + 2w + 12 = 28 \qquad \text{Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.}$$

$$4w + 12 = 28 \qquad \text{Combine los términos semejantes.}$$

$$4w = 16 \qquad \text{Reste 12 de ambos lados.}$$

$$w = 4 \qquad \text{Divida ambos lados entre 4.}$$

$$w + 6 = 10$$

Exprese la conclusión Las dimensiones de la cerca son 4 metros por 10 metros.

Verifique el resultado Si una cerca tiene un ancho de 4 metros y una longitud de 10 metros, su longitud es 6 metros más larga que su ancho, y el perímetro es 2(4) metros + 2(10) metros = 28 metros. ∎

Problemas de palancas

EJEMPLO 6 **Ingeniería** Unos ingenieros de diseño deben colocar dos cilindros hidráulicos, como se muestra en la figura 1-26, para equilibrar una fuerza de 9500 libras en el punto A. El primer cilindro del extremo de la palanca ejerce una fuerza de 3500 libras. ¿Dónde deben colocar los ingenieros el segundo cilindro, que es capaz de ejercer una fuerza de 5500 libras?

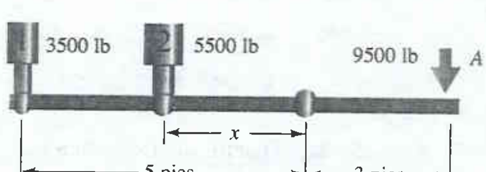


Figura 1-26

Analice el problema La palanca estará en equilibrio cuando la fuerza del primer cilindro multiplicada por su distancia desde el pivote (también llamado **fulcro**), sumada a la fuerza del segundo cilindro multiplicada por su distancia desde el fulcro, es igual al producto de la fuerza de 9500 libras y su distancia desde el fulcro.

Forme una ecuación Con x represente la distancia desde el cilindro más grande al fulcro.

Fuerza del cilindro 1, por su distancia	más	fuerza del cilindro 2, por su distancia	igual a	fuerza a equilibrar, por su distancia.
$3500 \cdot 5$	$+$	$5500x$	$=$	$9500 \cdot 3$

Resuelva la ecuación Ahora podemos resolver la ecuación.

$$\begin{aligned} 3500 \cdot 5 + 5500x &= 9500 \cdot 3 \\ 17\,500 + 5500x &= 28\,500 \\ 5500x &= 11\,000 && \text{Reste 17 500 de ambos lados.} \\ x &= 2 && \text{Divida ambos lados entre 5500.} \end{aligned}$$

Exprese la conclusión El diseño debe especificar que el segundo cilindro se coloque a 2 pies del fulcro.

Verifique el resultado $3500 \cdot 5 + 5500 \cdot 2 = 17\,500 + 11\,000 = 28\,500$
$9500 \cdot 3 = 28\,500$

Examen oral *Encuentre cada valor.*

1. 20% de 500

2. $33\frac{1}{3}$% de 600

Si una acción cuesta $54, encuentre el costo de

3. 5 acciones

4. x acciones

Encuentre el área del rectángulo con las dimensiones dadas.

5. 6 m de largo, 4 m de ancho

6. l m de largo, $l - 5$ m de ancho

1.6 EJERCICIOS

REPASO *Simplifique cada expresión.*

1. $\left(\dfrac{3x^{-3}}{4x^2}\right)^{-4}$

2. $\left(\dfrac{r^{-3}s^2}{r^2r^3s^{-4}}\right)^{-5}$

3. $\dfrac{a^m a^3}{a^2}$

4. $\left(\dfrac{b^n}{b^3}\right)^3$

VOCABULARIO Y CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

5. La expresión ______ representa la frase "4 más que 5 veces x".

6. La expresión ______ representa la frase "6 por ciento de x".

7. La expresión ____ representa la frase "el valor de x acciones al precio de $40 por acción".

8. Un ángulo recto es aquél cuya medida es ____.

9. Un ángulo llano mide _____.

10. Un ángulo _____ mide más de 0° pero menos de 90°.

11. Si la suma de las medidas de dos ángulos es igual a 90°, los ángulos se llaman ____________.

12. Si la suma de las medidas de dos ángulos es igual a ____, los ángulos se llaman suplementarios.

13. Si un triángulo tiene un ángulo recto, se llama triángulo _____.

14. Si un triángulo tiene dos lados con medidas iguales, se llama triángulo _______

15. Los lados iguales de un triángulo isósceles forman el ángulo del ______.

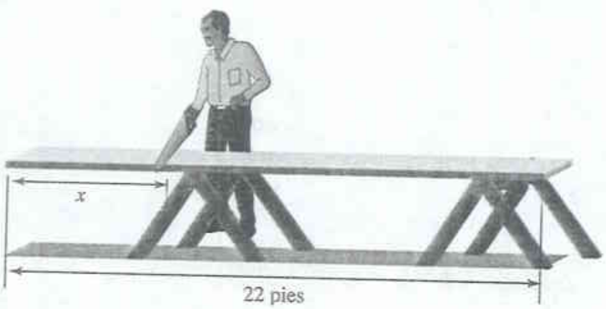
16. Un triángulo equilátero tiene tres lados _____ y tres ángulos iguales.

APLICACIONES

17. **Corte de una cuerda** Una cuerda de 60 pies se corta en cuatro tramos, con cada pieza sucesiva siendo el doble de largo que la anterior. Encuentre la longitud de la pieza más larga.

18. **Corte de un cable** Un cable de 186 pies ha de cortarse en cuatro piezas. Encuentre la longitud de cada pieza si cada pieza sucesiva mide 3 pies más que la previa.

19. **Corte de una tabla** El carpintero de la ilustración corta una tabla en dos piezas. Él desea que una pieza mida 1 pie más que el doble de largo de la pieza más corta. Encuentre la longitud de cada una de las piezas.



20. **Corte de una viga** Una viga de acero de 30 pies ha de cortarse en dos piezas. La pieza más larga ha de medir 2 pies más que el triple de la pieza más corta. Encuentre la longitud de cada pieza.

21. **Compra de una TV y una VCR** Vea el siguiente anuncio. Si la TV cuesta $55 más que la VCR, ¿cuánto más cuesta la TV?

22. **Compra de palos de golf** El costo de un juego de palos de golf es de $590. Si los hierros cuestan $40 más que las maderas, encuentre el costo de los hierros.

23. **Compra de una lavadora y secadora** Encuentre el porcentaje de rebaja de la venta en el siguiente anuncio.

24. **Compra de muebles** Un juego de recámara se vende regularmente en $983. Si está de barata en $737.25, ¿cuál es el porcentaje de rebaja?

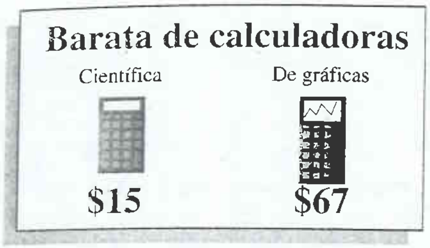
25. **Compra de libros** Una librería compra un libro usado de cálculo en $12 y lo vende en $40. Encuentre el porcentaje de aumento.

26. **Venta de juguetes** El propietario de una tienda de regalos compra animales disecados en $18 y los vende en $30. Encuentre el porcentaje de aumento.

27. **Valor de una CIR** En una Cuenta Individual de Retiro (CIR) con valor de $53 900, un estudiante tiene 500 acciones, algunas en el Big Bank Corporation y otras en el Safe Savings and Loan. Si el Big Bank vende en $115 cada acción y el Safe Savings las vende en $97 por acción, ¿cuántas acciones de cada una posee el estudiante?

28. **Activos de un fondo de pensiones** Un fondo de pensiones posee 12 000 acciones en un fondo mutuo de acciones y un fondo mutuo de bonos. Actualmente, el fondo de acciones vende cada acción en $12, y el fondo de bonos vende cada acción en $15. ¿Cuántas acciones de cada una posee el fondo de pensiones si el valor de los títulos es de $165 000?

29. Venta de calculadoras El mes pasado, una librería puso el siguiente anuncio y vendió 85 calculadoras, que generaron $3875 en ventas. ¿Cuántas de cada tipo de calculadora vendió la librería?



30. Venta de semilla de pasto Una compañía de granos y semillas vende dos clases de semilla de pasto. Una bolsa de 100 lb de una mezcla de centeno y pasto azul se vende en $245, y una bolsa de 100 libras de pasto azul se vende en $347. ¿Cuántas bolsas de cada una se venden en una semana cuando los recibos por 19 bolsas suman $5369?

31. Compra de rosas Un hombre con $21.25 se detiene después de trabajar para comprar algunas rosas para el cumpleaños de su esposa. Si cada rosa cuesta $1.25 y hay un cargo de $5 por entrega, ¿cuántas rosas puede comprar?

32. Renta de un camión Para mudarse a Wisconsin, un hombre puede rentar un camión en $29.95 por día más $0.19 por milla. Si conserva el camión por un día, ¿cuántas millas puede recorrer por un costo de $77.45?

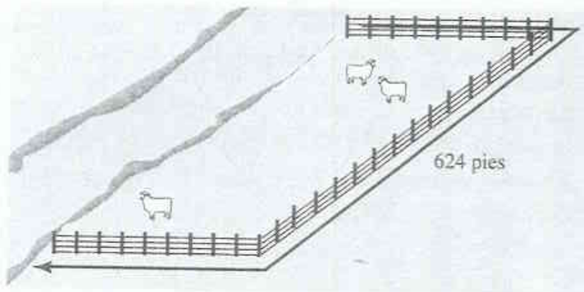
33. Renta de un auto Mientras espera que su auto sea reparado, un hombre renta un auto en $12 por día más $0.10 por milla. Si él conserva el auto durante 2 días, ¿cuántas millas puede recorrer por un costo total de $30? ¿Cuántas millas puede recorrer por un costo total de $36?

34. Cálculo de salarios Una estudiante gana $17 por día por entregar paquetes durante la noche. Le pagan $5 por día más $0.60 por cada paquete entregado. ¿Cuántas entregas más debe hacer ella cada día para aumentar sus ganancias diarias a $23?

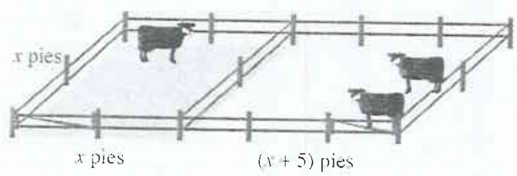
35. Cálculo de dimensiones El jardín rectangular de la ilustración mide el doble de largo que de ancho. Encuentre sus dimensiones.

36. Cálculo de dimensiones El ancho de una piscina rectangular es un tercio de su longitud. Si su perímetro es de 96 metros, encuentre las dimensiones de la piscina.

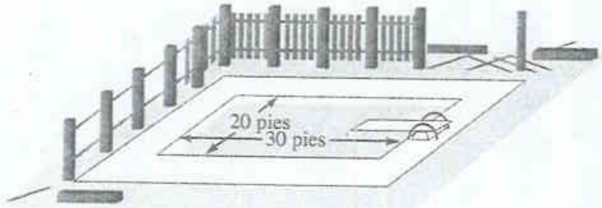
37. Construcción de una cerca Un granjero tiene 624 pies de cerca para encerrar la pastura de la ilustración. Como un río corre a lo largo de un lado, la cerca será necesaria sólo en tres lados. Encuentre las dimensiones de la cerca si su longitud es el doble de su ancho.



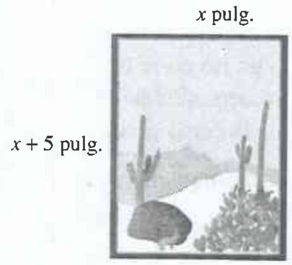
38. Construcción de un corral Un hombre tiene 150 pies de cerca para construir el corral de la figura. Si un extremo es un cuadrado, encuentre las dimensiones exteriores.



39. Encerrar una piscina Una mujer desea encerrar la piscina de la figura y tener un pasillo de ancho uniforme a todo alrededor. ¿Cuál será el ancho del pasillo si la mujer usa 180 pies de cerca?

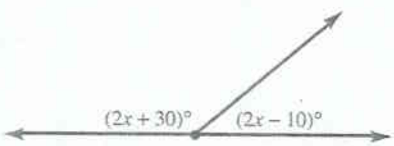


40. Enmarcar un cuadro Un pintor desea enmarcar el siguiente cuadro con un marco de 2 pulgadas de ancho. ¿Cuál será el ancho del cuadro enmarcado si el pintor usa 70 pulgadas de material para el marco?



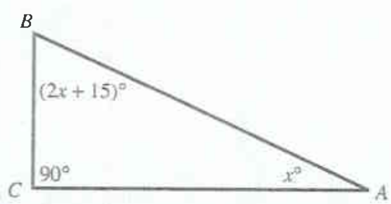
41. Ángulos suplementarios Si uno de dos ángulos suplementarios es 35° más grande que el otro, encuentre la medida del ángulo más pequeño.

42. Ángulos suplementarios Consulte la figura y encuentre x.



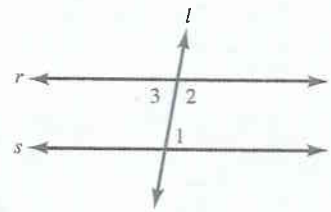
43. Ángulos complementarios Si uno de los dos ángulos complementarios es 22° más grande que el otro, encuentre la medida del ángulo más grande.

44. Ángulos complementarios en un triángulo rectángulo Explique por qué los ángulos agudos del siguiente triángulo rectángulo son complementarios. Luego encuentre la medida del ángulo A.



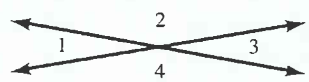
45. Ángulos suplementarios y líneas paralelas En la ilustración, las rectas r y s cortan una tercera recta l para formar el $\angle 1$ y el $\angle 2$. Cuando las rectas r y s son paralelas, *el* $\angle 1$ y el $\angle 2$ son suplementarios. Si $m(\angle 1) = (x + 50)°$ y $m(\angle 2) = (2x - 20)°$ y las rectas r y s son paralelas, encuentre x. Lea $m(\angle 1)$ como "la medida de $\angle 1$".

46. En la ilustración, encuentre $m(\angle 3)$. (*Sugerencia:* Vea el ejercicio 45.)



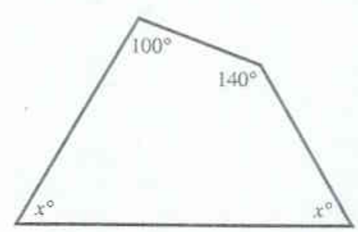
47. Ángulos de un triángulo equilátero Encuentre la medida de cada ángulo en un triángulo equilátero.

48. Ángulos verticales Cuando dos rectas se cortan como en la figura, se forman cuatro ángulos. Los ángulos que están uno al lado del otro, como el $\angle 1$ y el $\angle 2$, se llaman **ángulos adyacentes.** Los ángulos que no son adyacentes, como $\angle 1$ y $\angle 3$ o $\angle 2$ y $\angle 4$, se llaman **ángulos verticales** (también **opuestos por el vértice**). Por geometría, sabemos que si dos rectas se cortan, los ángulos verticales tienen la misma medida. Si $m(\angle 1) = (3x + 10)°$ y $m(\angle 3) = (5x - 10)°$, encuentre x. Lea $m(\angle 1)$ como "la medida de $\angle 1$".



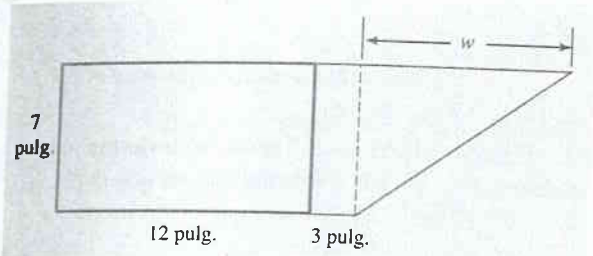
49. Si $m(\angle 2) = (6x + 20)°$ en la ilustración previa y $m(\angle 4) = (8x - 20)°$, encuentre $m(\angle 1)$. (Vea el ejercicio 48.)

50. Ángulos de un cuadrilátero La suma de los ángulos de cualquier figura de cuatro lados (llamada *cuadrilátero*) es de 360°. El siguiente cuadrilátero tiene en la base dos ángulos iguales. Encuentre x.



51. Altura de un triángulo Si se triplica la altura de un triángulo con una base de 8 pulgadas, su área aumenta en 96 pulgadas cuadradas. Encuentre la altura del triángulo.

52. Diseño de ingeniería El ancho, w, de la brida del siguiente dibujo de ingeniería no ha sido determinado aún. Encuentre w de modo que el área de la parte rectangular de 7 pulg. por 12 pulg. sea exactamente la mitad del área total.



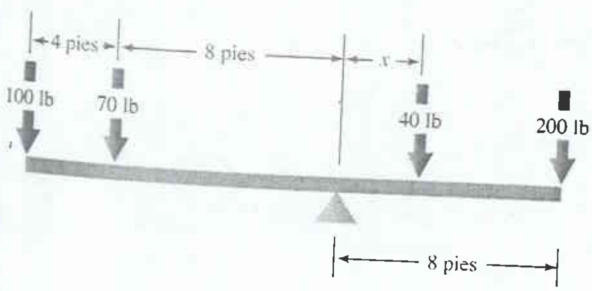
53. Balanceo de un sube y baja Un sube y baja mide 20 pies de largo, y el fulcro está en el centro. Si un niño de 80 lb se sienta en un extremo, ¿a qué distancia del fulcro debe sentarse el padre del niño, que pesa 160 libras, para equilibrar el sube y baja?

54. Establecer equilibrio Dos fuerzas, de 110 lb y 88 lb, se aplican en extremos opuestos de una palanca de 18 pies. ¿A qué distancia de la fuerza mayor debe colocarse el fulcro para que la palanca quede balanceada?

55. Movimiento de una piedra Una mujer usa una barra de 10 pies para levantar una piedra de 210 libras. Si ella pone otra piedra a 3 pies de la primera para que sirva como fulcro, ¿cuánta fuerza debe ella ejercer para mover la piedra?

56. Levantamiento de un auto Un jugador de fútbol de 350 libras alardea que puede levantar un auto de 2500 libras. Si él usa una barra de 12 pies con el fulcro colocado a 3 pies del auto, ¿podrá levantar el auto?

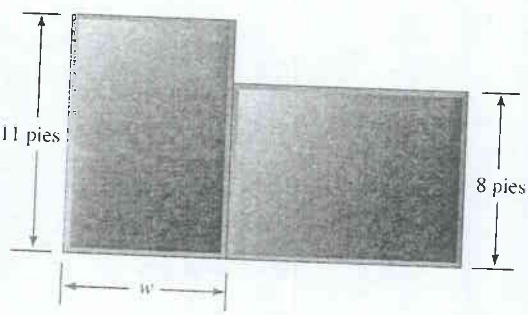
57. Balanceo de una palanca Se aplican fuerzas a una palanca como se indica en la ilustración. Encuentre x, la distancia de la fuerza más pequeña desde el fulcro.



58. Balanceo de un sube y baja Jim y Bob se sientan en extremos opuestos de un sube y baja de 18 pies, con el fulcro en su centro. Jim pesa 160 libras, y Bob pesa 200 libras. Cuando Kim se sienta 4 pies frente a Jim, se equilibra el sube y baja. ¿Cuánto pesa Kim?

59. Escalas de temperatura Las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit están relacionadas por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ¿A qué temperatura es que un termómetro Fahrenheit y un Celsius darán la misma lectura?

60. Instalación de calefacción solar Un panel solar de la ilustración debe medir 3 pies más ancho que el otro, pero, para ser igualmente eficientes, deben tener la misma área. Encuentre el ancho de cada uno.



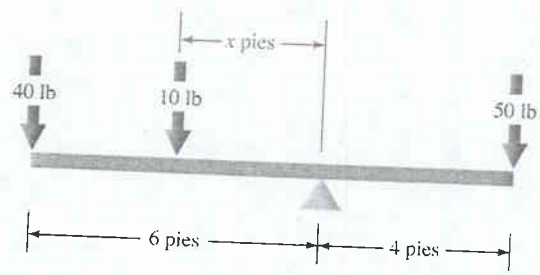
EXAMEN ESCRITO

61. Explique los pasos para resolver un problema aplicado.

62. Explique cómo verificar la solución de un problema aplicado.

ALGO PARA PENSAR

63. Encuentre la distancia x necesaria para equilibrar la palanca de la ilustración.



64. Interprete la respuesta al ejercicio 63.

1.7 Más aplicaciones de ecuaciones

- Problemas de inversiones
- Problemas de movimiento uniforme
- Problemas de mezclas

Para comenzar

1. Encuentre 8% de \$500.
2. Escriba una expresión para el 8% de \$$x$.
3. Si \$9000 de \$15 000 se invierten al 7%, ¿cuánto queda para invertir a otra tasa?
4. Si \$$x$ de \$15 000 se invierten al 7%, escriba una expresión para hallar cuánto queda por invertir a otra tasa.
5. Si un auto corre a 50 mph durante 4 horas, ¿cuánto recorre?
6. Si el café se vende en \$4 por libra, ¿cuánto cuestan 5 libras?

En esta sección continuaremos nuestra investigación de resolución de problemas al considerar problemas de inversiones, movimiento y mezclas.

Problemas de inversiones

EJEMPLO 1 **Planeación financiera** Una profesora tiene \$15 000 para invertir a un año, una parte al 8% y el resto al 7%. Si ella gana \$1110 por estas inversiones, ¿cuánto invirtió a cada tasa?

Analice el problema El interés simple se calcula con la fórmula $i = prt$, donde i es el interés ganado, p es el principal, r es la tasa de interés anual y t es el tiempo que se invierte el principal. En este problema, $t = 1$ año. Por lo tanto, si \$$x$ se invierte al 8% durante un año, el interés ganado es $i = \$x(8\%)(1) = \$0.08x$. Si el resto $\$(15\,000 - x)$ se invierte al 7%, la cantidad ganada en esa inversión es de $\$0.07(15\,000 - x)$. Vea la figura 1-27. La suma de estas cantidades debe ser igual al total de interés ganado de \$110.

	i	=	p	·	r	·	t
Inversión al 8%	$0.08x$		x		0.08		1
Inversión al 7%	$0.07(15\,000 - x)$		$15\,000 - x$		0.07		1

Figura 1-27

Forme una ecuación Con x podemos representar el número de dólares invertidos al 8%. Entonces $15\,000 - x$ representa el número de dólares invertidos al 7%.

Interés ganado al 8%	más	interés ganado al 7%	es igual a	interés total.
$0.08x$	$+$	$0.07(15\,000 - x)$	$=$	1110

Resuelva la ecuación Ahora resolvamos la ecuación.

$$
\begin{aligned}
0.08x + 0.07(15\,000 - x) &= 1110 \\
8x + 7(15\,000 - x) &= 111\,000 && \text{Para eliminar los decimales, multiplique ambos lados por 100.} \\
8x + 105\,000 - 7x &= 111\,000 && \text{Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.} \\
x + 105\,000 &= 111\,000 && \text{Combine los términos semejantes.} \\
x &= 6000 && \text{Reste 105 000 de ambos lados.} \\
15\,000 - x &= 9000
\end{aligned}
$$

Exprese la conclusión Ella invirtió \$6000 al 8% y \$9000 al 7%.

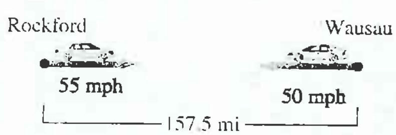
Verifique el resultado El interés sobre \$6000 es 0.08(\$6000) = \$480. El interés ganado sobre \$9000 es 0.07(\$9000) = \$630. El interés total es \$1110.

Problemas de movimiento uniforme

EJEMPLO 2 **Tiempo de recorrido** Un auto sale de Rockford y se dirige hacia Wausau a razón de 55 millas por hora. Al mismo tiempo, otro auto sale de Wausau y viaja a Rockford a la misma velocidad de 50 mph. ¿Cuánto tardarán en encontrarse si las ciudades están a 157.5 millas entre sí?

Analice el problema En este caso, los autos están viajando uno hacia el otro como se ve en la figura 1-28(a). Los problemas de movimiento uniforme están basados en la fórmula $d = rt$, donde d es la distancia, r es la velocidad, y t es el tiempo. Podemos organizar la información dada en la tabla de la figura 1-28(b).

Sabemos que un auto está corriendo a 55 mph y que el otro avanza a 50 mph. También sabemos que viajan durante la misma cantidad de tiempo, t horas por ejemplo. Entonces, la distancia que el auto más rápido recorre es de $55t$ millas, y la distancia que el auto más lento recorre es de $50t$ millas. La suma de estas distancias es igual a 157.5 millas, que es la distancia entre las ciudades.



(a)

	Velocidad ·	Tiempo =	Distancia
Auto más rápido	55	t	$55t$
Auto más lento	50	t	$50t$

(b)

Figura 1-28

Forme una ecuación Con t representamos el tiempo que viaja cada auto. Entonces $55t$ representa la distancia recorrida por el auto más rápido, y $50t$ representa la distancia recorrida por el auto más lento.

Distancia recorrida por el auto más rápido	más	distancia recorrida por el auto más lento	igual a	distancia entre las ciudades.
$55t$	$+$	$50t$	$=$	157.5

Resuelva la ecuación Ahora resolvemos la ecuación.

$$
\begin{aligned}
55t + 50t &= 157.5 \\
105t &= 157.5 && \text{Combine los términos semejantes.} \\
t &= 1.5 && \text{Divida ambos lados entre 105.}
\end{aligned}
$$

Exprese la conclusión Los dos autos se encontrarán en $1\frac{1}{2}$ horas.

Verifique el resultado El auto más rápido viaja $1.5(55) = 82.5$ millas. El auto más lento viaja $1.5(50) = 75$ millas. La distancia total recorrida es de 157.5 millas. ▮

Problemas de mezclas

EJEMPLO 3 **Mezcla de nueces** El propietario de una dulcería observa que 20 libras de nueces de la India se están echando a perder. No se vendieron por su alto precio de \$12 la libra. El propietario decide mezclar cacahuates con las nueces de la India para bajar el precio por libra. Si los cacahuates se venden en \$3 por libra, ¿cuántas libras de cacahuates deben mezclarse con nueces de la India para que la mezcla pueda venderse en \$6 por libra?

Analice el problema Este problema está basado en la fórmula $V = pn$, donde V representa el valor, p representa el precio por libra, y n representa el número de libras.

Con x podemos representar el número de libras de cacahuates a usar y escribir la información conocida en la tabla que se observa en la figura 1-29. El valor de las nueces de la India más el valor de los cacahuates será igual al valor de la mezcla.

	Precio	· Número de libras	= Valor
Nueces de la India	12	20	240
Cacahuates	3	x	$3x$
Mezcla	6	$20 + x$	$6(20 + x)$

Figura 1-29

Forme una ecuación Con x podemos representar el número de libras de cacahuates a usar. Luego $20 + x$ representa el número de libras de la mezcla.

Valor de las nueces de la India	más	valor de los cacahuates	igual a	valor de la mezcla.
240	$+$	$3x$	$=$	$6(20 + x)$

Resuelva la ecuación Ahora resolvemos la ecuación.

$$240 + 3x = 6(20 + x)$$

$$240 + 3x = 120 + 6x \quad \text{Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.}$$

$$120 = 3x \quad \text{Reste } 3x \text{ y 120 de ambos lados.}$$

$$40 = x \quad \text{Divida ambos lados entre 3.}$$

Exprese la conclusión El propietario debe mezclar 40 libras de cacahuates con las 20 libras de nueces de la India.

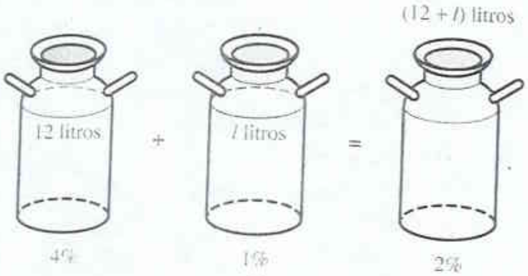
Verifique el resultado Las nueces de la India están valuadas en $\$12(20) = \$240$, y los cacahuates están valuados en $\$3(40) = \$120$, de modo que la mezcla está valuada en $\$6(60) = \$360$.

El valor de las nueces de la India más el valor de los cacahuates es igual al valor de la mezcla. ▮

EJEMPLO 4 **Producción de leche** Un recipiente está parcialmente lleno con 12 litros de leche entera que contiene 4% de grasa. ¿Cuánta leche al 1% debe agregarse para obtener una mezcla que contenga 2% de grasa?

Analice el problema Como el primer recipiente mostrado en la figura 1-30(a) contiene 12 litros de leche al 4%, contiene 0.04(12) litros de grasa. A este recipiente le agregaremos el contenido del segundo recipiente, que contiene $0.01l$ litros de grasa.

La suma de estas dos cantidades de grasa $(0.04(12) + 0.01l)$ será igual a la cantidad de grasa en el tercer recipiente, que es $0.02(12 + l)$ litros de grasa. Esta información se presenta en forma de tabla en la figura 1.30(b).



(a)

	Cantidad de grasa	=	Cantidad de leche	·	Porcentaje de grasa
Leche entera	0.04(12)		12		0.04
Leche al 1%	$0.01(l)$		l		0.01
Leche al 2%	$0.02(12 + l)$		$12 + l$		0.02

(b)

Figura 1-30

Forme una ecuación Con l podemos representar el número de litros de leche al 1% a agregar. Entonces

Cantidad de grasa en 12 litros de leche al 4%	más	cantidad de grasa en l litros de leche al 1%	igual a	cantidad de grasa en $(12 + l)$ litros de mezcla.
0.04(12)	+	$0.01l$	=	$0.02(12 + l)$

Resuelva la ecuación Ahora resolvemos la ecuación.

$$0.04(12) + 0.01l = 0.02(12 + l)$$

$$4(12) + 1l = 2(12 + l) \qquad \text{Multiplique ambos lados por 100.}$$

$$48 + l = 24 + 2l \qquad \text{Use la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.}$$

$$24 = l \qquad \text{Reste 24 y } l \text{ de ambos lados.}$$

Exprese la conclusión Entonces, 24 litros de leche al 1% deben agregarse para obtener una mezcla que contenga 2% de grasa.

Verifique el resultado 12 litros de leche al 4% contienen 0.48 litros de grasa. 24 litros de leche al 1% contienen 0.24 litros de grasa. Esto da un total de 36 litros de mezcla que contiene 0.72 litros de grasa. Ésta es una solución al 2%. ∎

Examen oral *Suponga que todas las inversiones son por un año.*

1. ¿Cuánto interés darán \$1500 si se invierten al 6%?
2. Exprese la cantidad de interés que $\$x$ darán si se invierten al 5%.
3. Si $\$x$ de \$30 000 se invierten al 5%, ¿cómo se expresaría la cantidad restante a invertir al 6%?
4. Si las nueces de la India valen $\$x$ por libra, exprese cuánto valdrán 20 libras.

5. Si la leche entera contiene 4% de grasa, ¿cuánta grasa hay en 2 galones?

6. Si la leche entera contiene 4% de grasa, exprese cuánta grasa hay en x galones.

1.7 EJERCICIOS

REPASO *Resuelva cada ecuación.*

1. $9x - 3 = 6x$
2. $7a + 2 = 12 - 4(a - 3)$
3. $\dfrac{8(y-5)}{3} = 2(y-4)$
4. $\dfrac{t-1}{3} = \dfrac{t+2}{6} + 2$

VOCABULARIO Y CONCEPTOS *Llene los espacios en blanco.*

5. La fórmula para interés simple i es $i = prt$, donde p es el ________, r es la _____ y t es el _____.
6. Los problemas de movimiento uniforme están basados en la fórmula ______, donde d es la _______, r es la _____ de velocidad, y t es el _____.
7. Los problemas de mezclas secas están basados en la fórmula $V = pn$, donde V es el _____, p es el _____ por unidad, y n es el _______ de unidades.
8. El problema de mezcla líquida del ejemplo 4 está basado en la idea de que la cantidad de ________ del primer recipiente, más la cantidad de ________ del segundo recipiente, es igual a la cantidad de ________ de la mezcla.

APLICACIONES

9. **Inversión de dinero** Atraída por el siguiente anuncio, una mujer invirtió $12 000, parte en una cuenta de mercado de dinero y el resto en un certificado de depósito (CD) a 5 años. ¿Cuánto invirtió en cada caso si el ingreso de ambas inversiones es de $1060 por año?

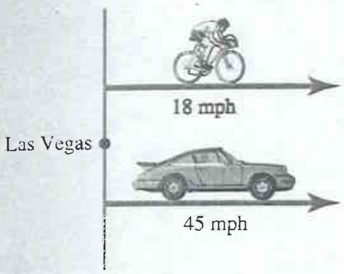
Banco First República
Ahorros y préstamos

Cuenta	Tasa
NOW	5.5%
Ahorros	7.5%
Mercado de dinero	8.0%
Verificación	4.0%
CD a 5 años	9.0%

10. **Inversión de dinero** Un hombre invirtió $14 000, parte al 7% y parte al 10% anual. El ingreso anual por estas inversiones fue de $1280. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?
11. **Ingreso suplementario** Una maestra desea ganar $1500 por año en ingreso suplementario por una inversión de $16 000. Ella pone $6000 en una unión de crédito que paga 7% de interés anual. ¿Qué tasa debe ganar ella en el resto para lograr su meta?
12. **Herencia de dinero** Paul dividió una herencia entre dos inversiones, una que paga 7% de interés anual y otra al 10%. Él invirtió el doble en la inversión de 10% que en la de 7%. Si el ingreso anual combinado por estas dos inversiones fue de $4050, ¿cuánto heredó?
13. **Inversión de dinero** Kyoko tiene algún dinero para invertir. Si ella pudiera invertir $3000 más, podría tener derecho a una inversión de 11%. De otro modo, ella puede invertir el dinero al 7.5% de interés anual. Si la inversión del 11% da el doble de ingreso anual que la inversión al 7.5%, ¿cuánto debe tener a mano para invertir?
14. **Ingreso suplementario** Un conductor de autobuses desea ganar $3500 por año en ingreso suplementario por una herencia de $40 000. Si el conductor invierte $10 000 en un fondo mutuo que paga 8%, ¿a qué tasa debe ganar en el resto para lograr su meta?
15. **Recibos de concierto** Para un concierto de jazz, los boletos para estudiante valen $2 cada uno, y los boletos para adultos valen $4 cada uno. Si se vendieron 200 boletos y los recibos totales son de $750, ¿cuántos boletos para estudiantes se vendieron?
16. **Juegos escolares** En unos juegos escolares se vendieron 140 boletos, con recibos totales de $290. Si los boletos para adultos cuestan $2.50 cada uno y los de estudiante cuestan $1.50, ¿cuántos boletos para adulto se vendieron?
17. **Cálculo de tiempo** Un auto sale de Chicago con destino a Cleveland, una distancia de 343 millas. Al mismo tiempo, un segundo auto sale de Cleveland rumbo a Chicago. Si el primer auto promedia 50 mph y el segundo promedia 48 mph, ¿cuánto tardarán los autos en encontrarse?

18. Investigación de tormentas Durante una tormenta, dos equipos de científicos salen de una universidad al mismo tiempo para investigar tornados. El primer equipo se dirige al este a 20 mph, y el segundo viaja al oeste a 25 mph, como se ve en la ilustración. Si sus radios tienen un alcance de 90 millas, ¿cuánto tiempo pasará para que pierdan contacto por radio?

19. Ciclismo Un ciclista sale de Las Vegas corriendo a razón de 18 mph. Vea la ilustración. Una hora después, un auto sale de Las Vegas a 45 mph en la misma dirección ¿Cuánto tardará el auto en alcanzar al ciclista?



20. Cálculo de distancia A las 2 P.M., dos autos salen de Eagle River, WI, uno rumbo al norte y otro hacia el sur. Si el auto que va al norte promedia 50 mph y el que va al sur promedia 60 mph, ¿cuándo estarán los autos a 165 millas entre sí?

21. Una carrera Dos corredores salen del punto de partida, uno corriendo a 12 mph y el otro a 10 mph. Si mantienen el paso, ¿cuánto tardarán en estar a un cuarto de milla entre sí?

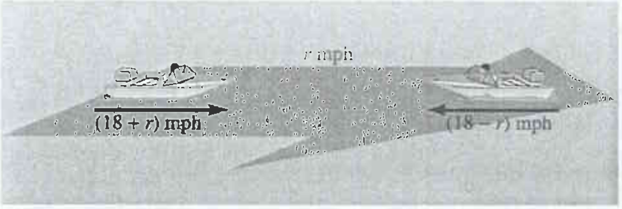
22. Transporte en camión Dos conductoras de camiones salen de un almacén en direcciones opuestas, una a 50 mph y la otra a 56 mph. Si la conductora más lenta sale 2 horas antes que la otra, ¿cuánto tiempo ha estado en camino cuando las dos conductoras están a 683 millas entre sí?

23. De viaje en esquí Un esquí puede ir a 12 mph en aguas en calma. Si un deportista viaja corriente arriba durante 3 horas contra una corriente de 4 mph, ¿cuánto tardará en regresar? (*Sugerencia:* La velocidad corriente arriba es $(12 - 4)$ mph; ¿cuánto puede viajar en 3 horas?)

24. De paseo Sara caminó al norte a razón de 3 mph y regresó a razón de 4 mph. ¿Cuántas millas caminó si el viaje redondo tardó 3.5 horas?

25. Cálculo del tiempo de recorrido Jamal viajó una distancia de 400 millas en 8 horas. Parte del tiempo, su velocidad fue de 45 mph; el resto del tiempo, fue de 55 mph. ¿Cuánto tiempo recorrio para cada velocidad?

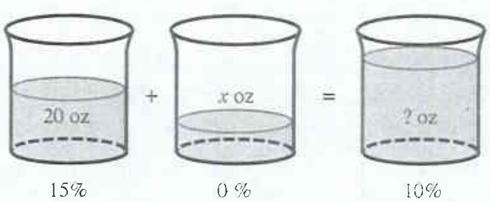
26. De viaje en un bote de motor El bote de motor de la ilustración puede navegar a 18 mph en aguas en calma. Si un viaje corriente abajo toma 4 horas y el viaje de regreso toma 5 horas, encuentre la velocidad de la corriente.



27. Mezcla de dulces El propietario de una tienda desea hacer una mezcla de 30 libras de dos dulces para vender a \$1 por libra. Si un dulce se vende en \$0.95 por libra y el otro en \$1.10 por libra, ¿cuántas libras de cada uno debe usar?

28. Cálculo de precio de venta Una mezcla de dulces se hace para vender a \$0.89 por libra. Si mezcla 32 libras de dulce, que se vende a \$0.80 por libra, con 12 libras de un dulce de mayor precio, encuentre el precio por libra del mejor dulce.

29. Dilución de soluciones En la ilustración, ¿cuánta agua debe agregarse a 20 onzas de una solución al 15% de alcohol para diluirla en una solución al 10%?



30. Aumento de la concentración ¿Cuánta agua debe evaporarse para aumentar la concentración de 300 galones de una solución salina de 2% al 3%?

31. Producción de leche entera La crema es aproximadamente 22% de grasa. ¿Cuántos galones de crema deben mezclarse con leche con grasa al 2% para obtener 20 galones de leche que contenga 4% de grasa?

32. Mezcla de soluciones ¿Cuánto ácido debe agregarse a 60 gramos de una solución que es 65% ácida para obtener una nueva solución que sea 75% ácida?

33. Mejora de las calificaciones Un estudiante obtiene 70% en un examen que contiene 30 preguntas. Para mejorar su calificación, el profesor le permite contestar 15 preguntas adicionales. ¿Cuántas preguntas debe responder correctamente para elevar su calificación a 80%?

34. Mejora de las calificaciones En un segundo examen, el estudiante del ejercicio 33 obtiene una calificación de 60% en una prueba de 20 preguntas. Esta vez, el instructor le permite resolver 20 problemas extra para mejorar su calificación. ¿Cuántos problemas debe resolver bien para elevar su calificación a 70%?

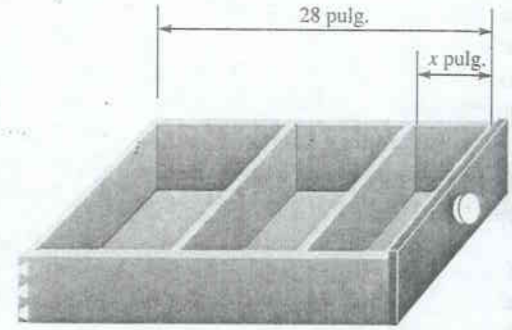
35. Cálculo de calificaciones Antes del final, Estela había obtenido un total de 375 puntos en cuatro exámenes. Para recibir una A en el curso, ella debe tener 90% de un posible total de 450 puntos. Encuentre el número más bajo de puntos que ella puede ganar en el examen final y todavía recibir una A.

36. Cálculo de calificaciones Un estudiante ha obtenido un total de 435 puntos en cinco pruebas. Para recibir una B en el curso, debe tener 80% de un posible total de 600 puntos. Encuentre el número más bajo de puntos que el estudiante puede hacer en el examen final y todavía recibir una B.

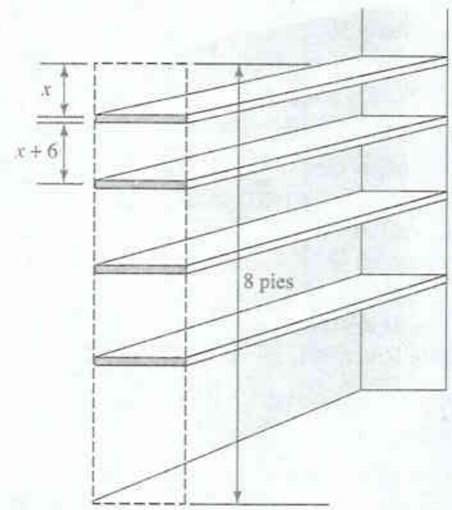
37. Administración de una librería Una librería vende un libro de historia en \$65. Si la librería obtiene una utilidad del 30% en cada libro, ¿cuánto paga la librería al editor por cada libro? (*Sugerencia:* Precio al menudeo = precio de mayoreo + aumento.)

38. Administración de una librería Una librería vende un libro de texto en \$39.20. Si la librería obtiene una utilidad de 40% en cada venta, ¿cuánto paga la librería al editor por cada libro? (*Sugerencia:* Precio al menudeo = precio de mayoreo + aumento.)

39. Fabricación de un mueble Un carpintero desea poner dos divisiones transversales en un cajón que mide 28 pulgadas de fondo. (Vea la ilustración.) Él desea poner las divisiones de modo que cada espacio sea 3 pulgadas mayor que el anterior, del frente hacia atrás. Si el grosor de cada división es de $\frac{1}{2}$ pulgada, ¿a qué distancia del extremo delantero debe poner la primera división?



40. Construcción de anaqueles Un carpintero desea poner cuatro anaqueles en una pared de 8 pies, de modo que los cinco espacios creados disminuyan en 6 pulgadas conforme suban en la pared. (Vea la ilustración.) Si el grosor de cada estante es $\frac{3}{4}$ de pulgada, ¿a qué distancia estará el anaquel del fondo desde el piso?



EXAMEN ESCRITO

41. ¿Qué encuentra el lector más difícil al resolver problemas de aplicación, y por qué?

42. ¿Qué tipo de problema de aplicación encuentra más fácil, y por qué?

ALGO PARA PENSAR

43. Analice las dificultades al resolver este problema:

Un hombre recorre 100 millas a 30 mph. ¿Con qué rapidez debe viajar de regreso para promediar 60 mph para todo el viaje?

44. ¿Qué dificultades encontró el lector al resolver este problema?

Los boletos para adulto cuestan \$4 y los de estudiante cuestan \$2. Las ventas de 71 boletos producen \$245. ¿Cuántos de cada clase se vendieron?

Proyectos

Proyecto 1

El estudiante es miembro del concejo de planeación de Parchdale. El mayor debate en años está teniendo lugar sobre si la ciudad debe o no debe construir un estanque de emergencia para usar en tiempo de secas. El lugar propuesto tiene espacio suficiente para un depósito cónico de 141 pies de diámetro y 85.3 pies de profundidad.

Mientras funcione el abasto principal de agua de Parchdale, el depósito se mantendrá lleno. Cuando haya una emergencia de agua, sin embargo, el depósito perderá agua por evaporación así como para suministrar agua a la población. La compañía que ha diseñado el depósito ha dado a la población la siguiente información.

Si D es igual al número de días consecutivos que el depósito de volumen V se usa como fuente de agua de Parchdale, entonces la cantidad total de agua perdida por evaporación después de D días será

$$0.1V \cdot \left(\frac{D - 0.7}{D}\right)^2$$

Por lo tanto, el volumen de agua que resta en el depósito después que se ha usado durante D días es

$$\text{Volumen} = V - (\text{uso por día}) \cdot D - (\text{evaporación})$$

Parchdale usa alrededor de 57 500 pies cúbicos de agua por día bajo condiciones de emergencia. La mayoría de los miembros del concejo piensan que construir el estanque es una buena idea si proveerá de agua a la población durante una semana. De otro modo, votarán contra la construcción del estanque.

a. Calcule el volumen de agua que contendrá el depósito. Recuerde usar cifras significativas correctamente. Exprese la respuesta en notación científica.

b. Demuestre que el depósito proveerá de agua a Parchdale durante toda una semana.

c. ¿Cuánta agua por día podría usar la población si el estanque propuesto tuviera que proveer de agua a la ciudad durante diez días?

Proyecto 2

Teresa dirige la tienda local de Hook n'Slice, donde se ofertan artículos deportivos a nivel nacional. Ella lo ha contratado a usted, para ayudar a resolver varios problemas. Asegúrese de dar explicaciones de cómo llega a sus soluciones.

a. La compañía acordó recientemente que el precio al menudeo de todos los embarques de palos de golf fuera tres veces lo que cuestan a la compañía. Ayer llegó un embarque de palos de golf, y todavía no han sido etiquetados. Esta mañana, la oficina principal de Hook n'Slice llamó para decir que los palos deben venderse con un 35% de descuento de sus precios al menudeo. En lugar de marcar cada palo con su precio al menudeo, se debe calcular el precio de venta con un descuento y luego volver a marcar el precio al palo, Teresa se pregunta cómo ir directamente del costo del palo al precio de venta. Esto es, si C es el costo de cierto palo para la compañía, ¿cuál es el precio de venta con descuento para ese palo?

1. Desarrolle una fórmula y conteste esta pregunta para ella.
2. Ahora ponga a prueba su fórmula sobre un palo que cuesta $26 a la compañía. Compare la respuesta de usted con la que encontró siguiendo el procedimiento de la compañía de primero calcular el precio al menudeo y luego reducirlo en 35%.

b. Todas las bolsas de golf han sido marcadas con 20% de descuento durante las últimas semanas. Teresa tiene todas ellas en un estante, marcadas con una leyenda que dice "20% de descuento sobre precio al menudeo". La compañía ha ordenado ahora que este precio de venta se reduzca en 35%. En lugar de volver a marcada cada bolsa con su nuevo precio de venta, a Teresa le gustaría cambiar simplemente el precio para que diga "________ % de descuento sobre precio al menudeo".

1. Determine qué número debe poner Teresa en el espacio en blanco.
2. Verifique su respuesta al calcular el precio final de venta por una bolsa de palos de golf con un precio al menudeo de $100 en dos formas:
   - usando el porcentaje que usted dijo a Teresa que debe llevar la etiqueta, y
   - haciendo por separado las dos reducciones de precio.
3. ¿La etiqueta será igual si el precio al menudeo se reduce primero en 35%, y luego se reduce en 20%? Explique.

Resumen del capítulo

CONCEPTOS

1.1

Un *conjunto* es un grupo de objetos.

Números naturales:

$\{1, 2, 3, 4, 5, . . .\}$

Números enteros no negativos:

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, . . .\}$

Enteros:

$\{. . ., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .\}$

Enteros pares:

$\{. . ., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, . . .\}$

Enteros impares:

$\{. . ., -5, -3, -1, 1, 3, 5, . . .\}$

Números primos:

$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, . . .\}$

Números compuestos:

$\{4, 6, 8, 9, 10, 12, . . .\}$

Números racionales: números que se pueden escribir como $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), donde a y b son enteros

Números irracionales: números que se pueden escribir como decimales infinitos y no periódicos

Números reales: números que se pueden escribir como decimales

EJERCICIOS DE REPASO

El sistema de los números reales

Anote los números en $\left\{-4, -\frac{2}{3}, 0, 1, 2, \pi, 4\right\}$ que satisfacen la condición dada.

1. número entero no negativo

2. número natural

3. número racional

4. entero

5. número real

6. número irracional

7. número negativo

8. número positivo

9. número primo

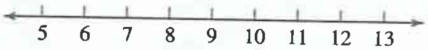
10. número compuesto

11. entero par

12. entero impar

13. Grafique el conjunto de números primos entre 20 y 30.

14. Grafique el conjunto de números compuestos entre 5 y 13.



Grafique cada conjunto sobre la recta numérica.

15. $\left\{x|x \geq -4\right\}$

16. $\left\{x|-2 < x \leq 6\right\}$

17. $(-2, 3)$

18. $[2, 6]$

19. $\{x|x > 2\}$

20. $(-\infty, -1)$

21. $(-\infty, 0] \cup (2, \infty)$

lada.

Valor absoluto:

$\begin{cases} \text{Si } x \geq 0, \text{ entonces } |x| = x. \\ \text{Si } x < 0, \text{ entonces } |x| = -x. \end{cases}$

Escriba cada expresión sin símbolos de valor absoluto.

22. $|0|$

23. $|-1|$

24. $|8|$

25. $-|8|$

1.2 Aritmética y propiedades de los números reales

Adición y sustracción de números reales:
Con signos iguales:
Sume sus valores absolutos y conserve el mismo signo.

Con signos diferentes:
Reste sus valores absolutos y conserve el signo del número con mayor valor absoluto.

$x - y$ es equivalente a $x + (-y)$.

Multiplicación y división de números reales:
Con signos iguales:
Multiplique (o divida) sus valores absolutos. El signo es positivo.

Con signos diferentes: Multiplique (o divida) sus valores absolutos. El signo es negativo.

Orden de operaciones sin exponentes:
Haga todos los cálculos con símbolos de agrupación, trabajando del par más interior al más exterior.

1. Efectúe multiplicaciones y divisiones, trabajando de izquierda a derecha.
2. Realice las adiciones y sustracciones, trabajando de izquierda a derecha.

En una fracción, simplifique el numerador y el denominador por separado. Luego simplifique la fracción.

Efectúe las operaciones y simplifique cuando sea posible.

26. $3 + (+5)$

27. $-6 + (-3)$

28. $-15 + (-13)$

29. $25 + 32$

30. $-2 + 5$

31. $3 + (-12)$

32. $8 + (-3)$

33. $7 + (-9)$

34. $-25 + 12$

35. $-30 + 35$

36. $-3 - 10$

37. $-8 - (-3)$

38. $27 - (-12)$

39. $38 - (-15)$

40. $(+5)(+7)$

41. $(-6)(-7)$

42. $\dfrac{-16}{-4}$

43. $\dfrac{-25}{-5}$

44. $4(-3)$

45. $-3(8)$

46. $\dfrac{-8}{2}$

47. $\dfrac{8}{-4}$

Simplifique cada expresión.

48. $-4(3 - 6)$

49. $3[8 - (-1)]$

50. $-[4 - 2(6 - 4)]$

51. $3[-5 + 3(2 - 7)]$

52. $\dfrac{3 - 8}{10 - 5}$

53. $\dfrac{-32 - 8}{6 - 16}$

Considere los números 14, 12, 13, 14, 15, 20, 15, 17, 19, 15.

54. Encuentre la media.

55. Encuentre la mediana.

56. Encuentre la moda.

57. ¿Pueden la media, la mediana y la moda de un grupo de números ser iguales?

Propiedades asociativas:

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(ab)c = a(bc)$

Propiedades conmutativas:

$a + b = b + a$

$ab = ba$

Propiedad distributiva:

$a(b + c) = ab + ac$

$a + 0 = 0 + a = a$

$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

$a + (-a) = 0$

Regla del doble negativo:

$-(-a) = a$

Si $a \neq 0$, entonces

$$a\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Evalúe cuando $a = 5$, $b = -2$, $c = -3$ y $d = 2$.

58. $\dfrac{3a - 2b}{cd}$

59. $\dfrac{3b + 2d}{ac}$

60. $\dfrac{ab + cd}{c(b - d)}$

61. $\dfrac{ac - bd}{a(d + c)}$

Diga qué propiedad justifica cada enunciado.

62. $3(4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$

63. $3 + (x + 7) = (x + 7) + 3$

64. $3 + (x + 7) = (3 + x) + 7$

65. $3 + 0 = 3$

66. $3 + (-3) = 0$

67. $5(3) = 3(5)$

68. $3(xy) = (3x)y$

69. $3x \cdot 1 = 3x$

70. $a\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1 \quad a \neq 0$

71. $-(-x) = x$

1.3 Exponentes

Propiedades de los exponentes: Si no hay divisiones entre 0,

$$x^n = \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}^{n \text{ factores de } x}$$

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

$$(xy)^n = x^n y^n \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$x^0 = 1 \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

Simplifique cada expresión y escriba todas las respuestas sin exponentes negativos.

72. 3^6

73. -2^6

74. $(-4)^3$

75. -5^{-4}

76. $(3x^4)(-2x^2)$

77. $(-x^5)(3x^3)$

78. $x^{-4}x^3$

79. $x^{-10}x^{12}$

80. $(3x^2)^3$

81. $(4x^4)^4$

82. $(-2x^2)^5$

83. $-(-3x^3)^5$

84. $(x^2)^{-5}$

85. $(x^{-4})^{-5}$

86. $(3x^{-3})^{-2}$

87. $(2x^{-4})^{4}$

88. $\frac{x^6}{x^4}$

89. $\frac{x^{12}}{x^7}$

90. $\frac{a^7}{a^{12}}$

91. $\frac{a^4}{a^7}$

92. $\frac{y^{-3}}{y^4}$

93. $\frac{y^5}{y^{-4}}$

94. $\frac{x^{-5}}{x^{-4}}$

95. $\frac{x^{-6}}{x^{-9}}$

Simplifique cada expresión y escriba todas las respuestas sin exponentes negativos.

96. $(3x^2y^3)^2$

97. $(-3a^3b^2)^{-4}$

98. $\left(\frac{3x^2}{4y^3}\right)^{-3}$

99. $\left(\frac{4y^{-2}}{5y^{-3}}\right)^{3}$

1.4

Notación científica:
$N \times 10^n$, donde $1 \leq |N| < 10$ y n es un entero.

Notación científica

Escriba cada número en notación científica.

100. 19 300 000 000

101. 0.0000000273

Escriba cada número en notación científica.

102. 7.2×10^7

103. 8.3×10^{-9}

104. Cada persona en Estados Unidos usa aproximadamente 1640 galones de agua al día. Si la población de Estados Unidos es de 270 millones de habitantes, ¿cuántos galones de agua se usan al día?

1.5

Si a y b son números reales y $a = b$, entonces

$$a + c = b + c$$
$$a - c = b - c$$
$$ac = bc \quad (c \neq 0)$$
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$$

Resolución de ecuaciones

Resuelva cada ecuación.

105. $5x + 12 = 37$

106. $-3x - 7 = 20$

107. $4(y - 1) = 28$

108. $3(x + 7) = 42$

109. $13(x - 9) - 2 = 7x - 5$

110. $\frac{8(x - 5)}{3} = 2(x - 4)$

111. $\frac{3y}{4} - 13 = -\frac{y}{3}$

112. $\frac{2y}{5} + 5 = \frac{14y}{10}$

Despeje la cantidad indicada.

113. De $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ despeje r^3

114. De $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ despeje h

115. De $v = \frac{1}{6}ab(x + y)$ despeje x

116. De $V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$ despeje r

1.6 Uso de ecuaciones para resolver problemas

Para resolver problemas, use la siguiente estrategia:

1. Analice el problema.
2. Forme una ecuación.
3. Resuelva la ecuación.
4. Exprese la conclusión.
5. Verifique el resultado.

117. Carpintería Un carpintero desea cortar una viga de 20 pies de modo que una pieza tenga el triple de largo que la otra. ¿Dónde debe cortar la viga?

118. Geometría Un rectángulo mide 4 metros más de largo que su ancho. Si el perímetro del rectángulo es de 28 metros, encuentre su área.

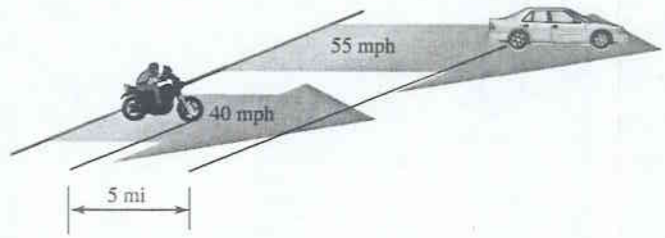
119. Balanceo de un sube y baja Susana pesa 48 libras, y su padre pesa 180 libras. Si Susana se sienta en un extremo de un sube y baja de 20 pies de largo con el fulcro en medio, ¿a qué distancia del fulcro debe sentarse su padre para balancear el sube y baja?

1.7 Más aplicaciones de ecuaciones

120. Problema de inversión Sally tiene $25 000 para invertir. Ella invierte parte del dinero al 10% de interés y el resto al 9%. Si su ingreso total anual por estas dos inversiones es de $2430, ¿cuánto invierte ella en cada tasa?

121. Mezcla de soluciones ¿Cuánta agua debe agregarse a 20 litros de una solución de alcohol al 12% para diluirla a una solución al 8%?

122. Problema de movimiento Un auto y una motocicleta salen del mismo punto y se desplazan en la misma dirección. (Vea la ilustración.) El auto corre a un promedio de 55 mph y la motocicleta a un promedio de 40 mph. ¿Cuánto tiempo pasará para que los dos vehículos estén separados 5 millas?



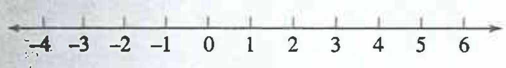
Examen del capítulo

Sea $A = \left\{-2, 0, 1, \frac{6}{5}, 2, \sqrt{7}, 5\right\}$.

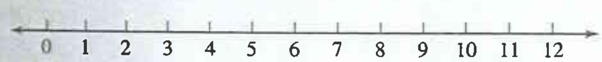
1. ¿Qué números en A son números naturales?
2. ¿Qué números en A son números irracionales?

Grafique cada conjunto sobre la recta numérica.

3. El conjunto de enteros impares entre -4 y 6



4. El conjunto de números primos menores a 12



Grafique cada conjunto sobre la recta numérica.

5. $\{x \mid x > 4\}$
6. $[-3, \infty)$
7. $\{x \mid -2 \le x < 4\}$
8. $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

Escriba cada expresión sin usar símbolos de valor absoluto.

9. $-|8|$
10. $|-5|$

Efectúe las operaciones.

11. $7 + (-5)$
12. $-5(-4)$
13. $\dfrac{12}{-3}$
14. $-4 - \dfrac{-15}{3}$

Considere los números $-2, 0, 2, -2, 3, -1, -1, 1, 1, 2$.

15. Encuentre la media.
16. Encuentre la mediana.

Sea $a = 2$, $b = -3$ *y* $c = 4$ *y evalúe cada expresión.*

17. ab
18. $a + bc$
19. $ab - bc$
20. $\dfrac{-3b + a}{ac - b}$

Diga qué propiedad de números reales justifica cada enunciado.

21. $3 + 5 = 5 + 3$
22. $a(b + c) = ab + ac$

Simplifique. Escriba todas las respuestas sin usar exponentes negativos. Suponga que ninguno de los denominadores es cero.

23. x^3x^5
24. $(2x^2y^3)^3$
25. $(m^{-4})^2$
26. $\left(\dfrac{m^2n^3}{m^4n^{-2}}\right)^{-2}$

Escriba cada número en notación científica.

27. 4 700 000

28. 0.00000023

Escriba cada número en notación estándar.

29. 6.53×10^5

30. 24.5×10^{-3}

Resuelva cada ecuación.

31. $9(x + 4) + 4 = 4(x - 5)$

32. $\dfrac{y-1}{5} + 2 = \dfrac{2y-3}{3}$

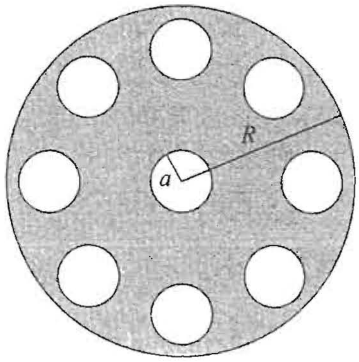
33. De la ecuación $P = L + \dfrac{s}{f} i$ despeje i.

34. Un rectángulo tiene un perímetro de 26 centímetros y es 5 centímetros más largo que su ancho. Encuentre su área.

35. Jaime invierte parte de $10 000 al 9% de interés anual y el resto al 8%. Si su ingreso anual por estas inversiones es de $860, ¿cuánto invierte al 8%?

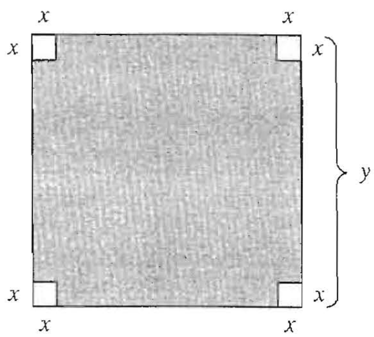
36. ¿Cuántos litros de agua se necesitan para diluir 20 litros de una solución salina al 5% para que sea una solución al 1%?

83. El círculo grande de la siguiente figura tiene radio R y cada uno de los círculos pequeños tienen radio a. Formule la ecuacion del área sombreada, en forma factorizada, y con el resultado calcule el área para $R = 15.7$ y $a = 3.1$.



84. **(a)** Si se cortan las cuatro esquinas cuadradas congruentes del cuadrado grande, deduzca una ecuación para el área de la figura resultante, en forma factorizada. Con este resultado calcule esa área cuando $y = 12.8$ y $x - 2.4$.

(b) Explique por qué la expresión $(y - 2x)^2 + 4x(y - 2x)$ también representa al área de la parte sombreada y demuestre que equivale al resultado obtenido en la parte (a).



Reto Factorice: $x^3 - y^3 + xy^2 - x^2y - x + y$.

Redacción Es frecuente oír que no se puede factorizar una expresión como $x^2 - 10$ en la forma de una diferencia de dos cuadrados. Explique lo que significa esta afirmación y analice su exactitud.

1.9 OPERACIONES FUNDAMENTALES CON EXPRESIONES RACIONALES

Una **expresión racional** es un cociente de polinomios. Las expresiones racionales son las "extensiones algebraicas" de los números racionales y, por tanto, las reglas fundamentales del manejo de estos números abarcan las expresiones racionales.

A continuación describiremos las reglas importantes del manejo de expresiones racionales, que también se llaman *fracciones algebraicas*. En cada caso presentaremos un ejemplo de la regla bajo consideración, en términos de fracciones aritméticas, para que el lector pueda comparar los procedimientos que se siguen. También, se supone que se excluyen los valores de la variable en el denominador que sean iguales a cero.

Negativo de una fracción

REGLA 1. $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ $\left[-\dfrac{2}{3} = \dfrac{-2}{3} = \dfrac{2}{-3}\right]$

Reducción de fracciones

REGLA 2. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ $\left[\dfrac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \dfrac{2}{5}\right]$

Multiplicación de fracciones

REGLA 3. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ $\left[\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \dfrac{8}{15}\right]$

División de fracciones

REGLA 4. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ $\left[\dfrac{3}{5} \div \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{3 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \dfrac{9}{10}\right]$

Suma y resta de fracciones; denominadores iguales

REGLA 5. $\dfrac{a}{d} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a + c}{d}$ $\left[\dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{3 + 2}{7} = \dfrac{5}{7}\right]$

REGLA 6. $\dfrac{a}{d} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a - c}{d}$ $\left[\dfrac{7}{9} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7 - 2}{9} = \dfrac{5}{9}\right]$

Suma y resta de fracciones; denominadores distintos

REGLA 7. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$ $\left[\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \dfrac{8 + 9}{12} = \dfrac{17}{12}\right]$

REGLA 8. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$ $\left[\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \dfrac{12 - 10}{15} = \dfrac{2}{15}\right.$

A continuación presentaremos varios ejemplos que ilustran estas reglas. Asegúrese de comprender cada uno de los pasos que se muestran.

EJEMPLO 1 Simplifiquemos (a) $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 6x}$ (b) $\dfrac{5a - 3b}{3b - 5a}$

Solución

(a) $\dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 + 6x} = \dfrac{(x - 1)\cancel{(x + 6)}}{x\,\cancel{(x + 6)}} = \dfrac{x - 1}{x}$ Regla 2

(b) $\dfrac{5a - 3b}{3b - 5a} = \dfrac{(-1)(-5a + 3b)}{(1)(3b - 5a)} = \dfrac{(-1)(3b - 5a)}{(1)(3b - 5a)} = -1$ ■

Todo número distinto de cero dividido entre su opuesto es igual a -1:

$$\frac{x-y}{y-x} = -1$$

Lo que vimos en el ejemplo anterior se puede abreviar dividiendo numerador y denominador entre $3b - 5a$:

$$\frac{5a-3b}{3b-5a} = \frac{\overset{-1}{\cancel{5a-3b}}}{\underset{1}{\cancel{3b-5a}}} = \frac{-1}{1} = -1$$

EJEMPLO 2 Determinemos el producto $\dfrac{x+1}{x-1} \cdot \dfrac{2-x-x^2}{5x}$.

Solución

Siempre que se trabaja con expresiones racionales se supone que las respuestas se han reducido a los términos más bajos, empleando la regla 2.

$$\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{2-x-x^2}{5x} = \frac{(x+1)(2-x-x^2)}{(x-1)5x} \qquad \text{Regla 3}$$

$$= \frac{(x+1)\overset{-1}{\cancel{(1-x)}}(2+x)}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}5x}$$

$$= -\frac{(x+1)(x+2)}{5x} \quad \text{o} \quad -\frac{x^2+3x+2}{5x}$$

■

EJEMPLO 3 Determinemos el cociente $\dfrac{(x+1)^2}{x^2-6x+9} \div \dfrac{3x+3}{x-3}$.

Solución

$$\frac{(x+1)^2}{x^2-6x+9} \div \frac{3x+3}{x-3} = \frac{(x+1)^2}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{3(x+1)} \qquad \text{Regla 4}$$

$$= \frac{x+1}{3(x-3)}$$

■

EJEMPLO 4 Determinemos la suma $\dfrac{3}{x^2+x} + \dfrac{2}{x^2-1}$.

Solución

$$\frac{3}{x^2+x} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{3(x^2-1)+2(x^2+x)}{(x^2+x)(x^2-1)} \qquad \text{Regla 7}$$

$$= \frac{5x^2+2x-3}{(x^2+x)(x^2-1)} \qquad \text{Reducción de términos}$$

$$= \frac{(5x-3)(x+1)}{x(x+1)(x^2-1)} \qquad \text{Factorización}$$

$$= \frac{5x-3}{x(x^2-1)} \qquad \text{Regla 2}$$

■

grado menor que [illegible]

[illegible] cociente × divisor + residuo

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Simplifique cada una de las expresiones reduciéndola a los términos mínimos.

1. $\frac{[illegible]}{x^2 + 2x}$ 2. $\frac{[illegible]}{3x^{[illegible]} - 3[illegible]}$ 3. $\frac{[illegible]}{5x - 3x^2}$

[illegible]

4. $\frac{4 - 2x}{2} \cdot \frac{x + 2}{x^2 - 4}$ 5. $\frac{x + y}{x - y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$

6. $\frac{[illegible]}{2x^2} - \frac{[illegible]}{2x}$ 7. $\frac{[illegible]}{2x} [illegible] \frac{3}{5x} [illegible] \frac{[illegible]}{x}$ 8. $\frac{[illegible]}{x - 2} - \frac{[illegible]}{x - 2}$

9. $\frac{5}{(x - 1)(x + 2)} - \frac{8}{4 - x^{[illegible]}}$ 10. $\frac{1 - 4x}{2x + 5} + \frac{8x^2 - 16x}{4x^2 - 25} - \frac{1}{2x - 5}$

11. $\frac{[illegible]}{5x^{[illegible]} y^2}$ 12. $\frac{2x^{[illegible]} + x^2 - x + 3}{x + 2}$

Respuestas: página [illegible]

Veamos los pasos del proceso. Se divide $2x^3$ entre x^2 para obtener $2x$. Se multiplica $2x$ por el divisor y se resta. A continuación se divide $-x^2$ de nuevo entre x^2, y así sucesivamente. Se termina cuando el residuo es de grado menor que el del divisor.

Solución

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 1 \\
\hline
x^2 + 2x - 3 & 2x^3 + 3x^2 - x + 16 \\
 & \underline{2x^3 + 4x^2 - 6x} \\
 & -x^2 + 5x + 16 \\
 & \underline{-x^2 - 2x + 3} \\
 & 7x + 13
\end{array}
$$

Multiplicar $x^2 + 2x - 3$ por $2x$.
Restar.
Multiplicar $x^2 + 2x - 3$ por -1.
Restar.

Detenerse cuando el residuo tenga grado *menor* que el del divisor.

El resultado de este ejemplo de la división se puede expresar también empleando expresiones racionales:

$$\frac{2x^3 + 3x^2 - x + 16}{x^2 + 2x - 3} = (2x - 1) + \frac{7x + 13}{x^2 + 2x - 3}$$

Para comprobar la respuesta, demuestre el lector que es correcto lo siguiente:

$$\underbrace{2x^3 + 3x^2 - x + 16}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(2x - 1)}_{\text{cociente}} \times \underbrace{(x^2 + 2x - 3)}_{\text{divisor}} + \underbrace{(7x + 13)}_{\text{residuo}}$$

PRUEBE SU COMPRENSIÓN

Simplifique cada una de las expresiones reduciéndola a los términos mínimos.

1. $\dfrac{x^2}{x^2 + 2x}$ **2.** $\dfrac{4b^2 - 4ab}{3a^2 - 3ab}$ **3.** $\dfrac{3x^2 + x - 10}{5x - 3x^2}$

Lleve a cabo la operación indicada y simplifique.

4. $\dfrac{4 - 2x}{2} \cdot \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$ **5.** $\dfrac{x + y}{x - y} \cdot \dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$

Simplifique.

6. $\dfrac{2}{3x^2} - \dfrac{1}{2x}$ **7.** $\dfrac{3}{2x} + \dfrac{5}{3x} + \dfrac{1}{x}$ **8.** $\dfrac{7}{x - 2} + \dfrac{3}{x + 2}$

9. $\dfrac{5}{(x - 1)(x + 2)} - \dfrac{8}{4 - x^2}$ **10.** $\dfrac{1 - 4x}{2x + 5} + \dfrac{8x^2 - 16x}{4x^2 - 25} - \dfrac{1}{2x - 5}$

11. $\dfrac{15x^4y^6 - 10x^3y^3 + 20x^6y^4}{5x^2y^2}$ **12.** $\dfrac{2x^3 + x^2 - x + 3}{x + 2}$

(Respuestas: página 84)

Se pueden usar las propiedades fundamentales de las fracciones para simplificar expresiones racionales cuyos numeradores y denominadores pueden, a su vez, contener fracciones. Cuando se tiene este caso decimos que se manejan *fracciones complejas*.

EJEMPLO 8 Simplifiquemos $\dfrac{\dfrac{1}{5+h}-\dfrac{1}{5}}{h}$

La expresión del ejemplo 8 es de un tipo con el que se encontrará el lector cuando estudie cálculo. Asegúrese de comprender cada paso de la resolución.

Solución Combinamos las fracciones del numerador y después dividimos.

$$\frac{\dfrac{1}{5+h}-\dfrac{1}{5}}{h}=\frac{\dfrac{5-(5+h)}{5(5+h)}}{h}=\frac{\dfrac{-h}{5(5+h)}}{h}$$

$$=\frac{-h}{5(5+h)}\div\frac{h}{1}=\frac{-h}{5(5+h)}\cdot\frac{1}{h}=-\frac{1}{5(5+h)}$$ ■

Muchas veces los estudiantes encuentran difícil el trabajo con fracciones. Estudie la lista siguiente; puede ayudarlo a evitar algunas de las pifias más comunes.

PRECAUCIÓN: Aprenda a evitar estos errores

INCORRECTO	CORRECTO
$\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{5}=\dfrac{2+x}{3+5}$	$\dfrac{2}{3}+\dfrac{x}{5}=\dfrac{2\cdot5+3\cdot x}{3\cdot5}=\dfrac{10+3x}{15}$
$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$	$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{b+a}{ab}$
$\dfrac{2x+5}{4}=\dfrac{x+5}{2}$	$\dfrac{2x+5}{4}=\dfrac{2x}{4}+\dfrac{5}{4}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{4}$
$2+\dfrac{x}{y}=\dfrac{2+x}{y}$	$2+\dfrac{x}{y}=\dfrac{2y+x}{y}$
$3\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{3(x+1)}{3(x-1)}$	$3\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{3(x+1)}{x-1}$
$a\div\dfrac{b}{c}=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{b}{c}$	$a\div\dfrac{b}{c}=a\cdot\dfrac{c}{b}=\dfrac{ac}{b}$
$\dfrac{1}{a^{-1}+b^{-1}}=a+b$	$\dfrac{1}{a^{-1}+b^{-1}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=\dfrac{ab}{b+a}$
$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}=\dfrac{x^2+4x+\overset{3}{\cancel{6}}}{x+\underset{1}{\cancel{2}}}=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$	$\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}$ ya está en su forma más simple.

En el ejemplo 9 se necesita simplificar una fracción compleja donde aparecen exponentes negativos.

EJEMPLO 9 Simplifiquemos $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}}$

En este método se multiplican numerador y denominador por x^2y^2 para simplificar.

Solución

$$\frac{x^{-2} - y^{-2}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} = \frac{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} = \frac{\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}\right)(x^2y^2)}{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)(x^2y^2)} \qquad \text{Regla 2}$$

Este problema también se puede resolver mediante el procedimiento que se vio en el ejemplo 8.

$$= \frac{y^2 - x^2}{xy^2 - x^2y}$$

$$= \frac{(y - x)(y + x)}{xy(y - x)}$$

$$= \frac{y + x}{xy}$$

■

EJERCICIOS 1.9

Diga si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Si es falsa, corrija el lado derecho para llegar a una igualdad correcta.

1. $\dfrac{5}{7} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{4}$ **2.** $\dfrac{2x + y}{y - 2x} = -2\left(\dfrac{x + y}{x - y}\right)$ **3.** $\dfrac{3ax - 5b}{6} = \dfrac{ax - 5b}{2}$

4. $\dfrac{x + x^{-1}}{xy} = \dfrac{x + 1}{x^2y}$ **5.** $x^{-1} + y^{-1} = \dfrac{y + x}{xy}$ **6.** $\dfrac{2}{\frac{3}{4}} = \dfrac{8}{3}$

Simplifique, de ser posible.

7. $\dfrac{8xy}{12yz}$ **8.** $\dfrac{24abc^2}{36bc^2d}$ **9.** $\dfrac{45x^3 + 15x^2}{15x^2}$

10. $\dfrac{9y^2 + 12y^8 - 15y^6}{3y^2}$ **11.** $\dfrac{12x^3 + 8x^2 + 4x}{4x}$ **12.** $\dfrac{5a^2 - 10a^3 + 15a^4}{5a^2}$

13. $\dfrac{a^2b^2 + ab^2 - a^2b^3}{ab^2}$ **14.** $\dfrac{-6a^3 + 9a^6 - 12a^9}{-3a^3}$ **15.** $\dfrac{6a^2x^2 - 8a^4x^6}{2a^2x^2}$

16. $\dfrac{-8a^3x^3 + 4ax^3 - 12a^2x^6}{-4ax^3}$ **17.** $\dfrac{x^2 - 5x}{5 - x}$ **18.** $\dfrac{n - 1}{n^2 - 1}$

19. $\dfrac{n + 1}{n^2 + 1}$ **20.** $\dfrac{(x + 1)^2}{1 - x^2}$ **21.** $\dfrac{3x^2 + 3x - 6}{2x^2 + 6x + 4}$

22. $\dfrac{x^3 - x}{x^3 - 2x^2 + x}$ **23.** $\dfrac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 - 9}$ **24.** $\dfrac{x^2 + 2x + xy + 2y}{x^2 + 4x + 4}$

25. $\dfrac{a^2 - 16b^2}{a^3 + 64b^3}$ **26.** $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 - 6b - ab + 6a}$

Efectúe las operaciones indicadas y simplifique.

27. $\dfrac{2x^2}{y} \cdot \dfrac{y^2}{x^3}$

28. $\dfrac{3x^2}{2y^2} \div \dfrac{3x^3}{y}$

29. $\dfrac{2a}{3} \cdot \dfrac{3}{a^2} \cdot \dfrac{1}{a}$

30. $\left(\dfrac{a^2}{b^2} \cdot \dfrac{b}{c^2}\right) \div a$

31. $\dfrac{3x}{2y} - \dfrac{x}{2y}$

32. $\dfrac{a + 2b}{a} + \dfrac{3a + b}{a}$

33. $\dfrac{a - 2b}{2} - \dfrac{3a + b}{3}$

34. $\dfrac{7}{5x} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x}$

35. $\dfrac{x - 1}{3} \cdot \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

36. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} \cdot \dfrac{x^3 + x^2}{x + 2}$

37. $\dfrac{1 - x}{2 + x} \div \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 2x}$

38. $\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 3} \div \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$

39. $\dfrac{2}{x} - y$

40. $\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{1}{1 - x}$

41. $\dfrac{3y}{y + 1} + \dfrac{2y}{y - 1}$

42. $\dfrac{2a}{a^2 - 1} - \dfrac{a}{a + 1}$

43. $\dfrac{2x^2}{x^2 + x} + \dfrac{x}{x + 1}$

44. $\dfrac{3x + 3}{2x^2 - x - 1} + \dfrac{1}{2x + 1}$

45. $\dfrac{5}{x^2 - 4} - \dfrac{3 - x}{4 - x^2}$

46. $\dfrac{1}{a^2 - 4} + \dfrac{3}{a - 2} - \dfrac{2}{a + 2}$

47. $\dfrac{2x}{x^2 - 9} + \dfrac{x}{x^2 + 6x + 9} - \dfrac{3}{x + 3}$

48. $\dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x + 7}{x^2 - 1} - \dfrac{x - 2}{x + 1}$

49. $\dfrac{x + 3}{5 - x} - \dfrac{x - 5}{x + 5} + \dfrac{2x^2 + 30}{x^2 - 25}$

50. $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} \div \dfrac{a^2 + 3ab + 2b^2}{a^2 - 3ab + 2b^2}$

51. $\dfrac{x^3 + x^2 - 12x}{x^2 - 3x} \cdot \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{3x^2 + 11x - 4}$

52. $\dfrac{n^2 + n}{2n^2 + 7n - 4} \cdot \dfrac{4n^2 - 4n + 1}{2n^2 - n - 3} \cdot \dfrac{2n^2 + 5n - 12}{2n^3 - n^2}$

53. $\dfrac{n^3 - 8}{n + 2} \cdot \dfrac{2n^2 + 8}{n^3 - 4n} \cdot \dfrac{n^3 + 2n^2}{n^3 + 2n^2 + 4n}$

54. $\dfrac{a^3 - 27}{a^2 - 9} \div \left(\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{a^3 + b^3} \cdot \dfrac{a^3 - a^2b + ab^2}{a^2 + ab}\right)$

Como en el ejemplo 7, página 65, use el algoritmo de la división para determinar el cociente y el residuo. Compruebe cada uno de los resultados.

55. $(x^3 - 2x^2 - 13x + 6) \div (x + 3)$

56. $(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$

57. $(x^3 - x^2 + 7) \div (x - 1)$

58. $(5x + 2x^3 - 3) \div (x + 2)$

59. $(5x^2 - 7x + x^3 + 8) \div (x - 2)$

60. $(2x^3 + 9x^2 - 3x - 1) \div (2x - 1)$

61. $(4x^3 - 5x^2 + x - 7) \div (x^2 - 2x)$

62. $(8x^4 - 8x^2 + 6x + 6) \div (2x^2 - x)$

63. $(x^3 - x^2 - x + 10) \div (x^2 - 3x + 5)$

64. $(3x^3 + 4x^2 - 13x + 6) \div (x^2 + 2x - 3)$

Simplifique.

65. $\dfrac{\dfrac{5}{x^2 - 4}}{\dfrac{10}{x - 2}}$

66. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4}}{x - 4}$

67. $\dfrac{\dfrac{1}{4 + h} - \dfrac{1}{4}}{h}$

68. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{9}}{x - 3}$

69. $\dfrac{\dfrac{1}{x + 3} - \dfrac{1}{3}}{x}$

70. $\dfrac{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{x^2}}{x - 2}$

71. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{16}}{x + 4}$

72. $\dfrac{x^{-2} - \dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}}$

73. $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}$

74. $\dfrac{\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}{\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y}}$

75. $\dfrac{(1 + x^2)(-2x) - (1 - x^2)(2x)}{(1 + x^2)^2}$

76. $\dfrac{(x^2 - 9)(2x) - x^2(2x)}{(x^2 - 9)^2}$

77. $\dfrac{x^2(4 - 2x) - (4x - x^2)(2x)}{x^4}$

78. $\dfrac{(x + 1)^2(2x) - (x^2 - 1)(2)(x + 1)}{(x + 1)^4}$

Simplifique y exprese como una sola fracción sin exponentes negativos.

79. $\dfrac{a^{-1} - b^{-1}}{a - b}$ **80.** $\dfrac{(a + b)^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}}$ **81.** $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{xy}$

82. Para calificar un curso de matemáticas se tienen tres pruebas y un examen final. Sean a, b y c las calificaciones numéricas de las pruebas, y d la del examen final.

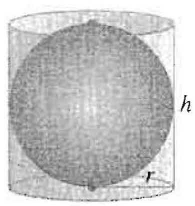
(a) Si se calcula la calificación total haciendo que el examen final cuente igual que el promedio de las tres pruebas, demuestre que el promedio final está expresado por $\dfrac{a + b + c + 3d}{6}$.

(b) Suponga que el promedio de las tres pruebas forma el 60% de la calificación total, y el examen final el 40%. Demuestre que la calificación total está expresada por $\dfrac{a + b + c + 2d}{5}$.

83. En algunas calculadoras se requiere hacer ciertos cálculos en forma distinta, de acuerdo con la máquina. Demuestre que en cada caso la expresión del lado izquierdo se puede calcular empleando la expresión equivalente del lado derecho.

(a) $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{\dfrac{A \cdot D}{B} + C}{D}$ **(b)** $(A \cdot B) + (C \cdot D) + (E \cdot F) = \left[\dfrac{\left(\dfrac{A \cdot B}{D} + C\right) \cdot D}{F} + E\right] \cdot F$

84. Arquímedes (287-212 a. de C.) descubrió una interesante relación entre un cilindro y una esfera inscrita. Determine, en su forma más sencilla, la relación del volumen del cilindro entre el volumen de la esfera.



85. La distancia entre dos poblaciones, A y B, es de 120 millas. Si el lector conduce un automóvil en una dirección, a velocidad media de 60 mph, y regresa a 40 mph, ¿cuál es su velocidad promedio durante el viaje redondo? (En contra de nuestra intuición, *no* es 50 mph.) Calcule la respuesta empleando la fórmula de la velocidad promedio de un viaje redondo a velocidades medias s_1 y s_2 en las direcciones respectivas:

$$\frac{2}{\dfrac{1}{s_1} + \dfrac{1}{s_2}}$$

Determine una forma simplificada de esta fracción compleja y compruebe su respuesta.

86. Si $x^2 + y^2 = 4$, demuestre que $-\dfrac{y - x\left(-\dfrac{x}{y}\right)}{y^2} = -\dfrac{4}{y^3}$.

87. Si $y^3 - x^3 = 8$, demuestre que $\dfrac{2xy^2 - 2x^2y\left(\dfrac{x^2}{y^2}\right)}{y^4} = \dfrac{16x}{y^5}$.

88. Si $y = x^2 - \dfrac{1}{4x^2}$, demuestre que $\sqrt{1 + y^2} = x^2 + \dfrac{1}{4x^2}$.

89. Si $y = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{2}{x^2}$, demuestre que $\sqrt{1 + y^2} = \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{2}{x^2}$.

Reto Un señor heredó 17 caballos a sus 3 hijos. Dejó la mitad al mayor, la tercera parte al intermedio y la novena parte al menor. Ya que 17 no es divisible entre 2, 3 ni 9, los hijos pidieron prestado un caballo del vecino para tener un total de 18. A continuación el hijo mayor recibió $\frac{1}{2} \times 18 = 9$ caballos, el intermedio $\frac{1}{3} \times 18 = 6$ caballos, y el menor $\frac{1}{9} \times 18 = 2$ caballos. Como $9 + 6 + 2 = 17$, que es la cantidad de caballos heredados, fue posible regresar el caballo adicional al vecino. ¿Dónde está el error de esta historia?

Razonamiento crítico

1. Presente un argumento convincente para explicar por qué $3\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \neq \frac{3x+1}{3x-1}$.

2. Note que $\frac{12}{\sqrt{150}} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$. ¿Es preferible una forma en comparación con la otra? Explique su respuesta.

3. Traduzca lo siguiente a forma simbólica:

   El cuadrado de la suma de dos números es *cuando menos*
   cuatro veces el producto de ambos.

   Probar que el enunciado es verdadero. (*Sugerencia:* Suponga que la desigualdad es verdadera y trabaje hacia atrás.)

4. Tres números se pueden ordenar verticalmente en una fracción, produciéndose los tres casos siguientes:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

   Determine todos los casos distintos posibles con 4 números, a, b, c y d, ordenados verticalmente en una fracción.

1.10 INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

En la definición de un radical se tuvo cuidado de evitar la raíz par de un número negativo, como $\sqrt{-4}$. Esto fue necesario porque no existe número real x cuyo cuadrado sea -4. En consecuencia, no puede haber número real que satisfaga la ecuación $x^2 + 4 = 0$. Suponga el lector, por el momento, que pudiéramos resolverla con métodos algebraicos:

$$\begin{aligned} x^2 + 4 &= 0 \\ x^2 &= -4 \\ x &= \pm\sqrt{-4} \\ &= \pm\sqrt{4(-1)} \\ &= \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} \\ &= \pm 2\sqrt{-1} \end{aligned}$$

Aunque se pudiera decir que $2\sqrt{-1}$ es solución de $x^2 + 4 = 0$, ciertamente no se trata de una solución con un *número real*. En consecuencia, introduciremos $\sqrt{-1}$ como