Estructuras de Datos y Algoritmos

Tema 4: Árboles

Departamento de Informática
Universidad de Valladolid

Curso 2011-12

Grado en Ingeniería Informática
Grado en Ingeniería Informática de Sistemas

1. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

Definiciones (I)

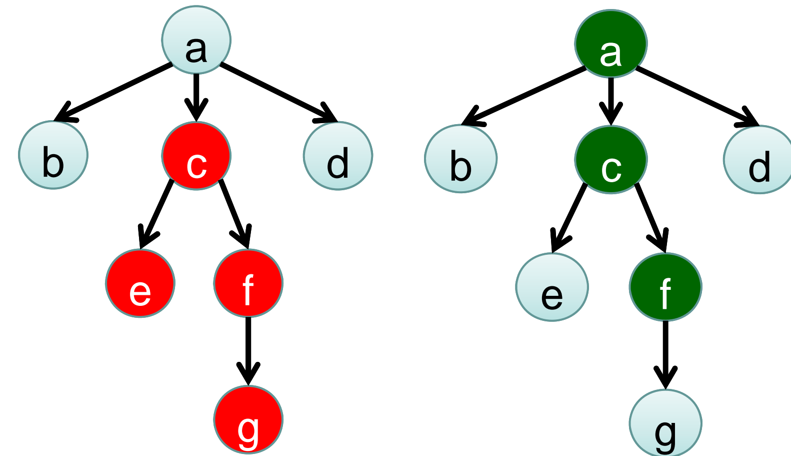
- Un **Árbol** consiste en un nodo (**r**, denominado **nodo raiz**) y una **lista** o **conjunto** de subárboles (A_1, A_2, .. A_k).
- Si el orden de los subárboles importa, entonces forman una lista, y se denomina árbol ordenado (por defecto un árbol se supone que es ordenado). En caso contrario los subárboles forman un conjunto, y se denomina árbol no ordenado.
- Se definen como **nodos hijos** de **r** a los nodos raices de los subárboles A_1, A_2, .. A_k
- Si **b** es un nodo hijo de **a** entonces **a** es el **nodo padre** de **b**
- Un nodo puede tener cero o más hijos, y uno o níngun padre. El único nodo que no tiene padre es el nodo raíz del árbol.
- Un nodo sin hijos se denomina **nodo hoja o externo**. En caso contrario se denomina **nodo interno**.

Definiciones (II)

- Se define un **camino** en un arbol como cualquier secuencia de nodos del arbol, $\mathbf{n_1 \dots n_p}$, que cumpla que cada nodo es padre del siguiente en la secuencia (es decir, que $\mathbf{n_i}$ es el padre de $\mathbf{n_{i+1}}$). La longitud del camino se define como el número de nodos de la secuencia menos uno ($\mathbf{p-1}$).

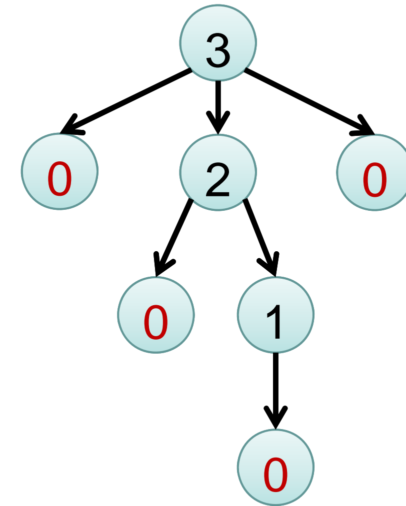
- Los **descendientes** de un nodo (**c** en el diagrama) son aquellos nodos accesibles por un camino que comience en el nodo.

- Los **ascendientes** de un nodo (**f** en el diagrama) son los nodos del camino que va desde la raiz a él.



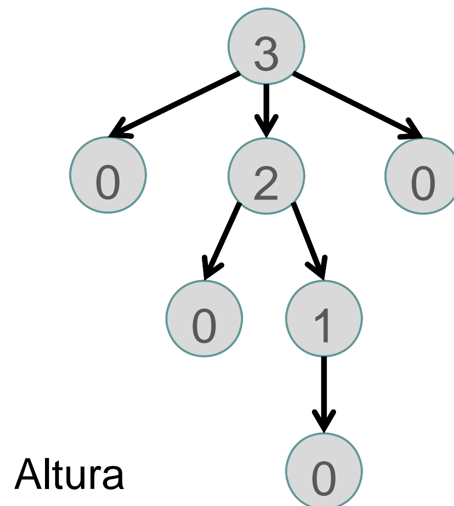
Altura

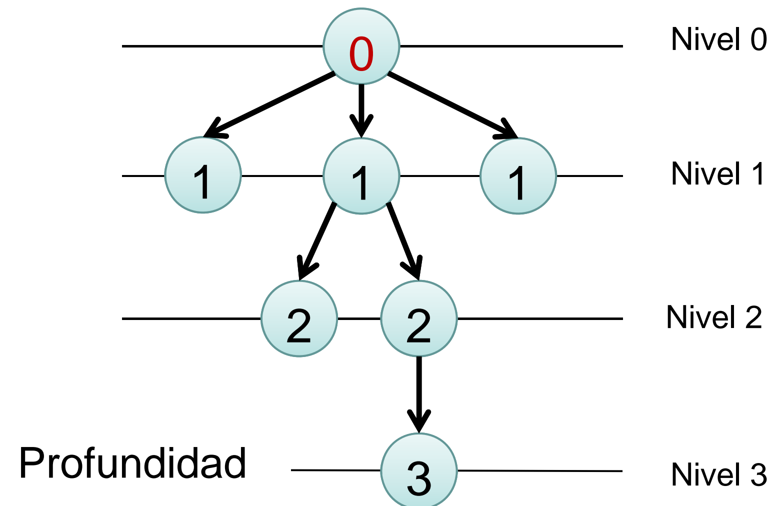
- Se define la **altura de un nodo** en un arbol como la longitud del camino más largo que comienza en el nodo y termina en una hoja.
  - La altura de un nodo hoja es 0
  - La altura de un nodo es igual a la mayor altura de sus hijos + 1
- La **altura de un árbol** se define como la altura de la raiz.
- La altura de un arbol determina la eficiencia de la mayoría de operaciones definidas sobre árboles.



Profundidad

- Se define la **profundidad de un nodo** en un arbol como la longitud del camino (único) que comienza en la raíz y termina en el nodo. También se denomina nivel.
  - La profundidad de la raiz es 0
  - La profundidad de un nodo es igual a la profundidad de su padre + 1



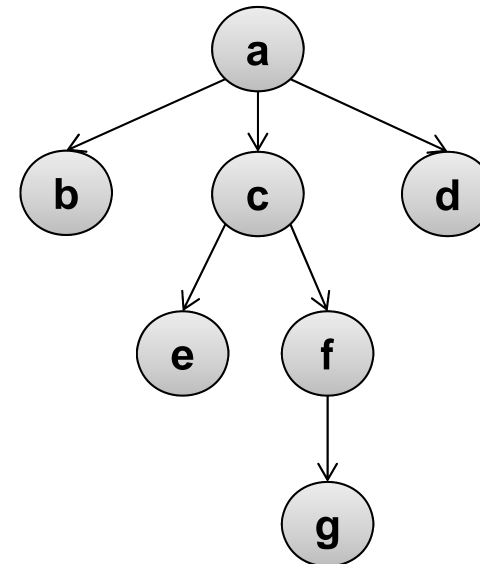


Recorrido de árboles

- **Preorden**: Se pasa por la raiz y luego se recorre en preorden cada uno de los subárboles. Recursivo.
- **Postorden**: Se recorre en postorden cada uno de los subárboles y luego se pasa por la raiz. Recursivo.
- **Inorden**: Se recorre en inorden el primer subárbol (si existe). Se pasa por la raíz y por último se recorre en inorden cada uno de los subárboles restantes. Tiene sentido fundamentalmente en árboles binarios. Recursivo.
- **Por Niveles**: Se etiquetan los nodos según su profundidad (nivel). Se recorren ordenados de menor a mayor nivel, a igualdad de nivel se recorren de izquierda a derecha.
  - No recursivo: Se introduce el raiz en una cola y se entra en un bucle en el que se extrae de la cola un nodo, se recorre su elemento y se insertan sus hijos en la cola.

Recorrido de árboles (II)

- **Preorden**: a,b,c,e,f,g,d
- **Postorden**: b,e,g,f,c,d,a
- **Inorden**: b,a,e,c,g,f,d
- **Por Niveles**: a,b,c,d,e,f,g

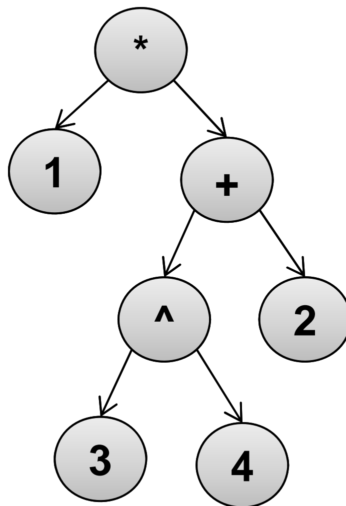


Parentizado sobre subárboles:

- **Preorden**: a (b) (c (e) (f (g))) (d)
- **Postorden**: (b) ((e) ((g) f) c) (d) a
- **Inorden**: (b) a ((e) c ((g) f)) (d)
- **Por Niveles**: (a) (b c d) (e f) (g)

Expresiones matemáticas

- **Preorden** →Notación prefija : * 1 + ^ 3 4 2
- **Postorden** → Notación postfija: 1 3 4 ^ 2 + *
- **Inorden** → Notación habitual: 1 * ((3 ^ 4) + 2)



Evaluación de expresiones

```
Se recorre el arbol en postorden:
Si es un operando, se inserta en pila
Si es un operador:
▪ Se extraen dos operandos
▪ Se aplica el operador
▪ Se inserta en pila el resultado
Al final, la pila debe contener un
único valor, el resultado.
```

Interludio en Haskell (I)

```haskell
-- Un arbol es un nodo que contiene un elemento,
-- de tipo genérico a, y una lista de árboles
data Arbol a = Nodo a [Arbol a]

-- Arbol de test
test :: Arbol Char
test = Nodo 'a' [(Nodo 'b' []), (Nodo 'c' [(Nodo 'e' []),
(Nodo 'f' [(Nodo 'g' [])])]),  (Nodo 'd' [])]

-- Comprobación de si un nodo es una hoja
esHoja :: Arbol a -> Bool
esHoja (Nodo _ []) = True
esHoja _ = False

-- Valor máximo de una lista
maxlis :: (Ord a) => [a] -> a
maxlis lis = foldl1 max lis
```

Interludio en Haskell (II)

```haskell
-- Altura de un árbol
altura :: Arbol a -> Int
altura (Nodo _ []) = 0
altura (Nodo _ lis) = 1 + maxlis (map altura lis)

-- Convierte una lista de listas en una lista, concatenándolas
aplanar :: [[a]] -> [a]
aplanar [] = []
aplanar lis = foldl1 (++) lis

-- Recorrido en preorden
preorden :: Arbol a -> [a]
preorden (Nodo x []) = [x]
preorden (Nodo x lis) = x : aplanar (map preorden lis)
```

Interludio en Haskell (III)

```haskell
-- Recorrido en postorden
postorden :: Arbol a -> [a]
postorden (Nodo x []) = [x]
postorden (Nodo x lis) = (aplanar (map postorden lis)) ++ [x]

-- Recorrido en inorden
inorden :: Arbol a -> [a]
inorden (Nodo x []) = [x]
inorden (Nodo x (a1:res)) = (inorden a1) ++ [x] ++
                            (aplanar (map inorden res))

-- Recorrido por niveles
niveles :: Arbol a -> [a]
niveles a = nivcol [a] where -- auxiliar, procesa cola
              nivcol [] = []
              nivcol ((Nodo x lis):res) = x : nivcol (res ++ lis)
```

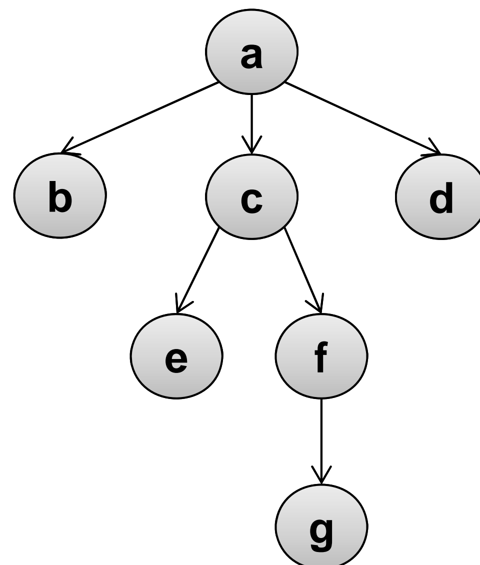
2. REPRESENTACIONES DEL TAD DIRECTORIO

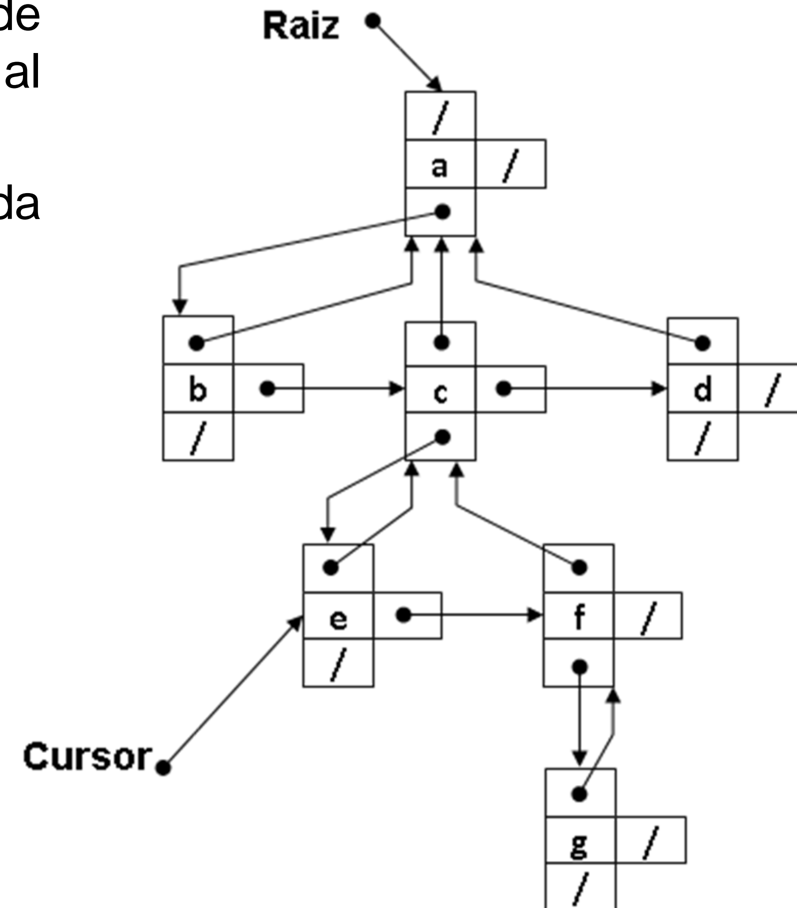
Representaciones

- Las representaciones del TAD Directorio (elementos con relación de **jerarquía**) suelen ser representaciones enlazadas, donde cada nodo almacena enlaces al nodo padre y/o a los nodos hijos.
- El único nodo distinguido es el nodo raíz.
- El método más habitual de realizar las operaciones es mediante un iterador (cursor) que marca un nodo concreto que sirve de referencia.
- Otra posibilidad es indicar un nodo concreto mediante el camino de la raiz a ese nodo.

Padre - primer hijo - hermano

- Los nodos tienen un número fijo de enlaces: al padre, al primer hijo y al siguiente hermano.
- La lista de hijos esta representada como una lista enlazada.

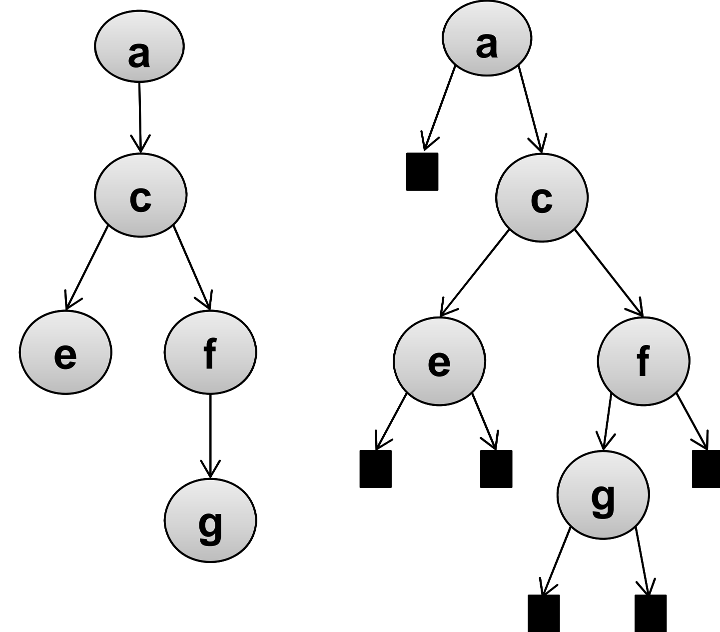




3. ÁRBOLES BINARIOS

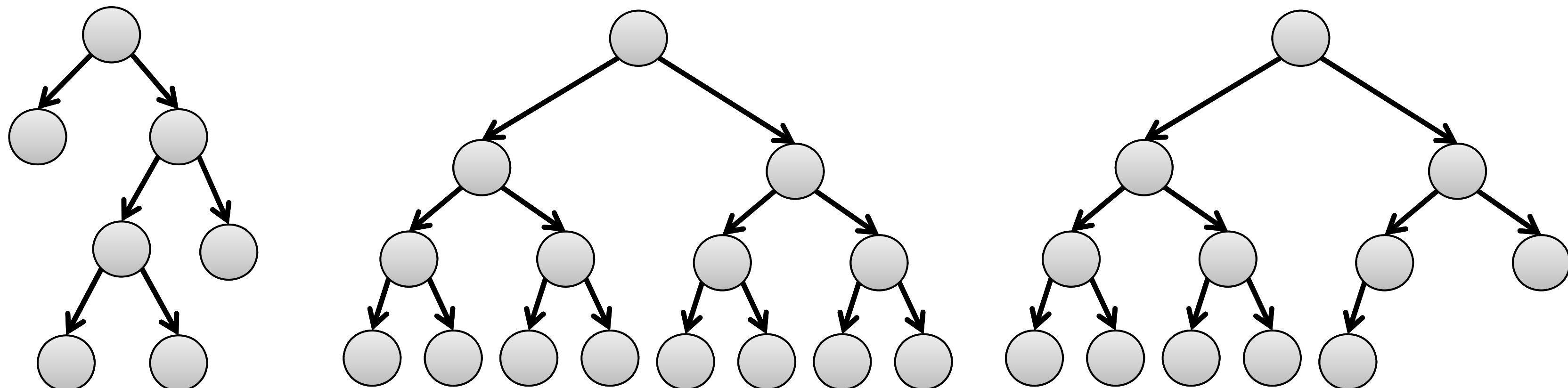
Árboles binarios

- **Árbol binario**: Es un árbol que o bien esta **vacío** (sin contenido) o bien consta de un nodo raiz con **dos** subárboles binarios, denominados **izquierdo** y **derecho**.
  - La existencia de árboles vacíos es una convención para que no exista ambigüedad al identificar el subarbol izquierdo y derecho. Se representa por un cuadrado.
  - La altura de un árbol vacío es -1
  - Cada nodo puede tener 0 hijos (subárbol izquierdo y derecho vacíos), 1 hijo (algún subárbol vacío) o 2 hijos.



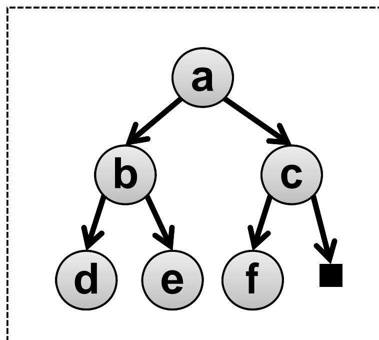
Variantes de árboles binarios

- **Árbol estricto**: Si un subárbol está vacío, el otro también. Cada nodo puede tener 0 ó 2 hijos.
- **Árbol lleno**: Árbol estricto donde en cada nodo la altura del subárbol izquierdo es igual a la del derecho, y ambos subárboles son árboles llenos.
- **Árbol completo**: Arbol lleno hasta el penúltimo nivel. En el último nivel los nodos están agrupados a la izquierda.

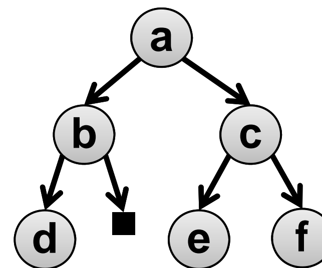


Árboles completos (I)

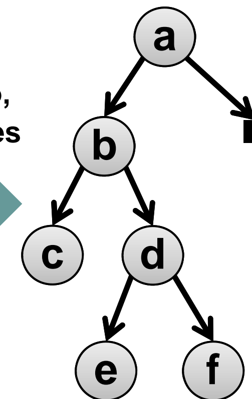
- Los **árboles llenos** son los árboles con máximo número de nodos (n) para una altura (h) dada. Se cumple que $n = 2^{h+1}-1$
  - El número de nodos de un árbol lleno sólo puede ser una potencia de dos menos uno: 1, 3, 7, 15, 31, …
- Los **árboles completos** pueden almacenar cualquier número de nodos y se sigue cumpliendo que su altura es proporcional al logaritmo del número de nodos: $h \in O(\log n)$
- Además tienen la propiedad de que conocido el **recorrido por niveles** del árbol es posible reconstruirle:



Completo, único.

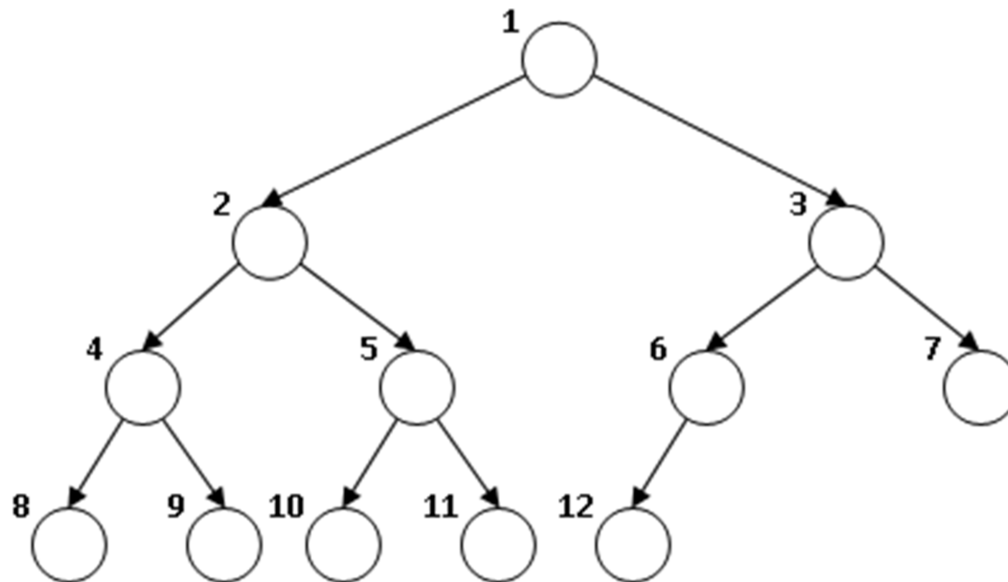


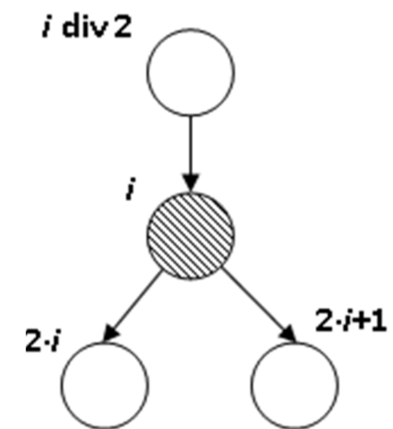
No completo, indistinguibles



Árboles completos (II)

- Es posible **almacenar** un árbol completo en un **vector** en el orden dado por su recorrido por niveles, y a partir del **índice** de un elemento en el vector conocer el índice de su **nodo padre** y los de sus **nodos hijos**:

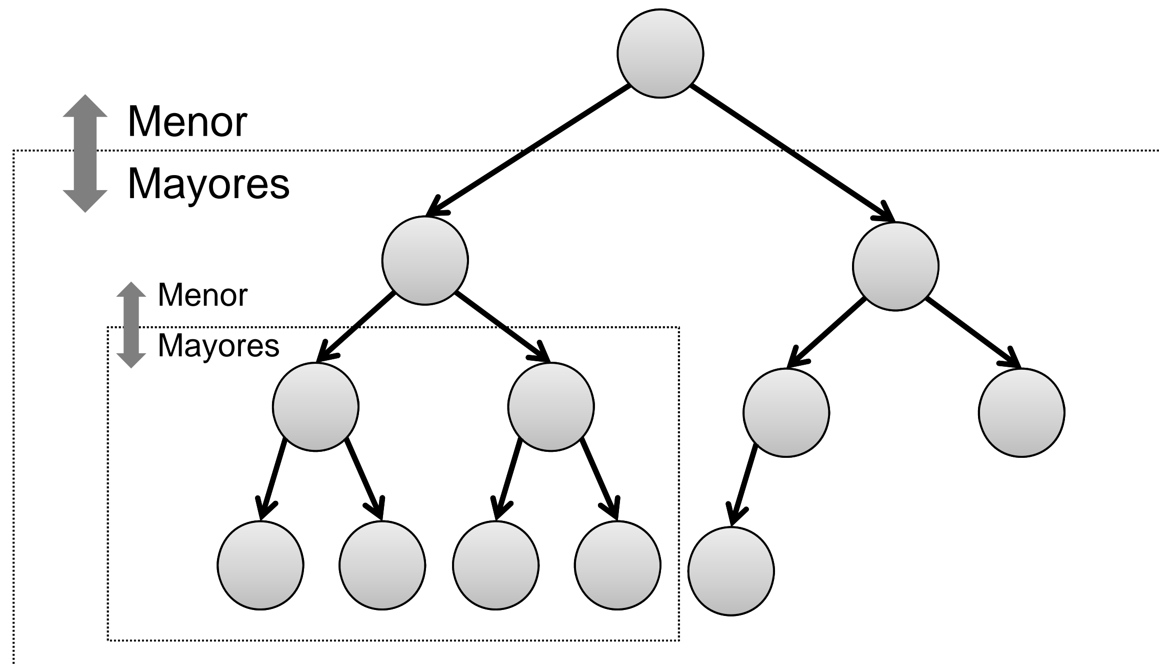




4. MONTÍCULOS (BINARIOS)

Montículo

- Un **montículo** (binario) es un **arbol completo** cuyos nodos almacenan elementos comparables mediante ≤ y donde todo nodo cumple la **propiedad de montículo**:
- **Propiedad de montículo**: Todo nodo es menor que sus descendientes. (montículo **de mínimos**).



Ejemplo

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	9	50	34	21	64	51	57	56	25	30	77	68	99	88	59	95	68	67	95

Propiedades del Montículo

- El **nodo raíz** (en primera posición del vector) es el **mínimo**.
- La **altura** de un montículo es **logarítmica** respecto al número de elementos almacenados (por ser arbol completo).
- Si un sólo elemento no cumple la propiedad de montículo, es posible restablecer la propiedad mediante **ascensos** sucesivos en el árbol (intercambiándole con su padre) o mediante **descensos** en el árbol (intercambiándole con el mayor de sus hijos). El número de operaciones es proporcional a la **altura**.
- Para **insertar** un nuevo elemento se situa al final del vector (última hoja del árbol) y se **asciende** hasta que cumpla la propiedad.
- Para **eliminar la raiz** se intercambia con el último elemento (que se elimina en O(1)) y se **desciende** la nueva raiz hasta que cumpla la propiedad.

Utilidad

- Un montículo es una representación extremadamente útil para el **TAD Cola de Prioridad**:
  - El **acceso al mínimo** es **O(1).**
  - La **inserción por valor** es **O(log n)** (tiempo amortizado).
  - El **borrado del mínimo** es **O(log n)**.
  - No usa una representación enlazada, sino un **vector**.
  - La **creación a partir de un vector** es **O(n)** y no requiere espacio adicional.
  - El borrado o modificación de un elemento, conocida su posición en el montículo, es **O(log n)**.
- Existen otras operaciones para las que no se comporta bien:
  - Para la **búsqueda** y **acceso al i-ésimo menor** se comporta igual que un vector desordenado.
  - La **fusión** de montículos (binarios) es O(n)

Representación (Java)

```java
public class Monticulo<E> implements ColaPrioridad<E> {
  // Vector que almacena los elementos, los hijos de vec[n]
  // son vec[2*n+1] y vec[2*n+2]. El padre es vec[(n-1)/2].
  Object[] vec;
  // Número de elementos
  int num;

  // Ampliar la capacidad del vector
  protected void ampliar() {
    vec = Arrays.copyOf(vec,2*vec.length);
  }

 // Resto de operaciones ...

}
```

Elevación de un nodo

```
void elevar(int i) {
  int k = i;        // Posición del elemento
  E x = (E) vec[i]; // Elemento
  while(k > 0) {
    int p = (k-1)/2; // Posición del padre
    // Si el elemento es >= padre, terminar
    if(vec[k] >= vec[p]) break;
    // En caso contrario, intercambiarlo con el padre
    vec[k] = vec[p];
    k = p;
  }
  // Colocar elemento en posición final
  vec[k] = x;
}
```

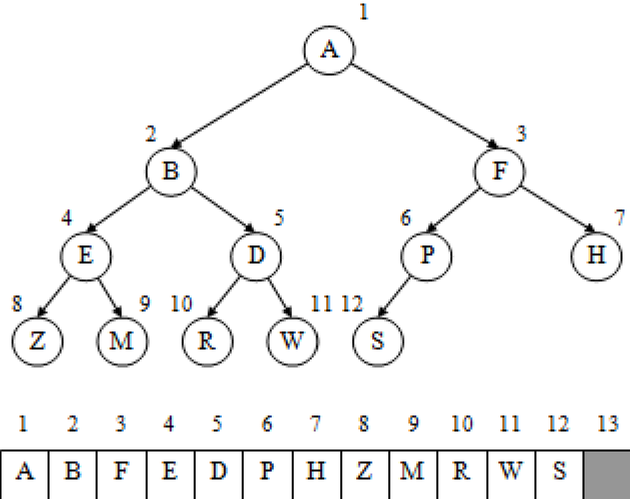
Descenso de un nodo

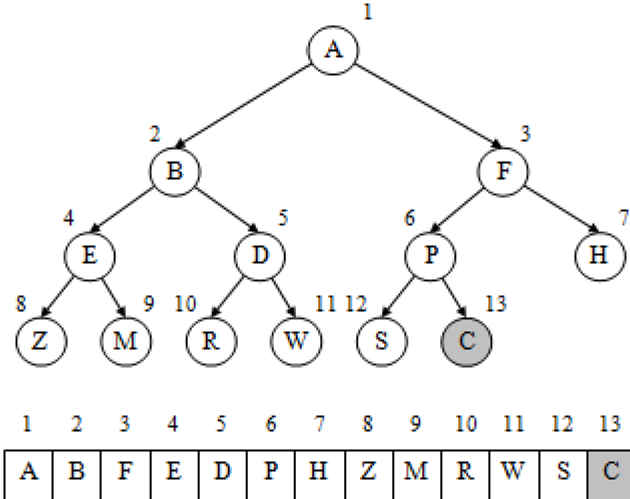
```
void descender(int i) {
  if(num < 2) return;
  int k = i;              // Posición del elemento
  E x = (E) vec[i];       // Elemento
  int lim = (num-2)/2; // Posición del ultimo nodo con hijos
  while(k <= lim) {
    int h = 2*k+1; // Posición del primer hijo
    // Escoger el hijo más pequeño
    if(h+1 < num && vec[h] > vec[h+1]) { h++; }
    // Si el elemento es menor que el menor hijo, terminar
    if(x <= vec[h]) break;
    // En caso contrario, intercambiar con hijo menor
    vec[k] = vec[h];
    k = h;
  }
  vec[k] = x; // Colocar elemento en posición final
}
```

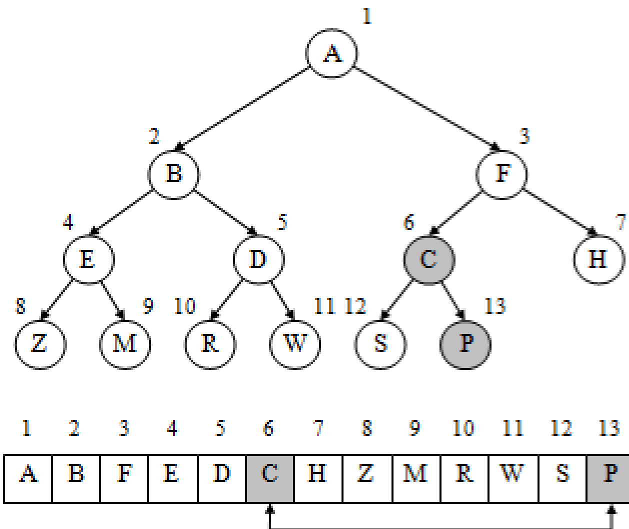
Acceso al mínimo e inserción

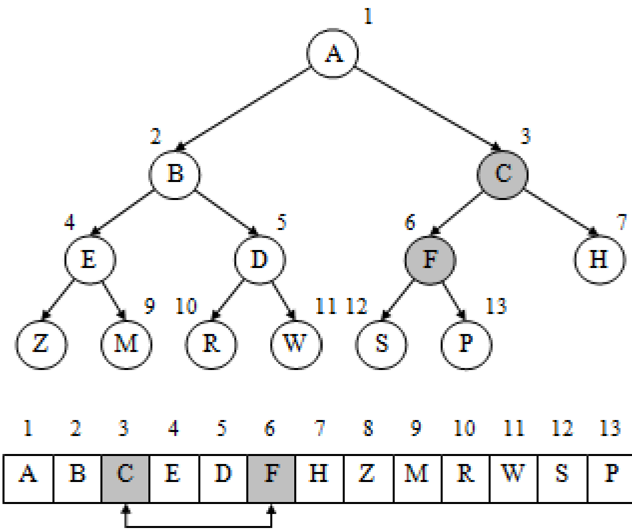
```
public E min() { return (E) vec[0]; }

public void add(E elem) {
  // Ampliar array si lleno
  if(num >= vec.length) ampliar();
  // Poner el elemento al final
  num++;
  vec[num-1] = elem;
  // Elevar el elemento
  elevar(num-1);
}
```

Ejemplo de inserción





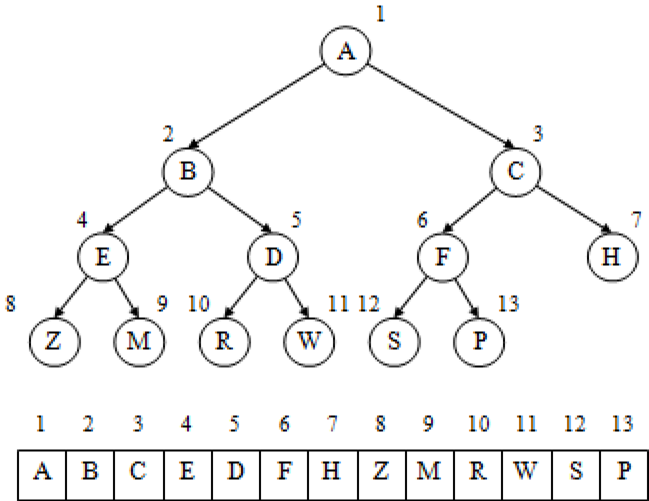


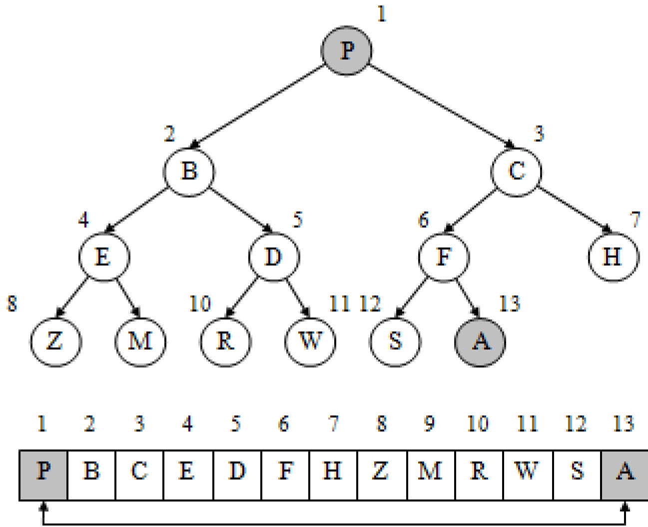


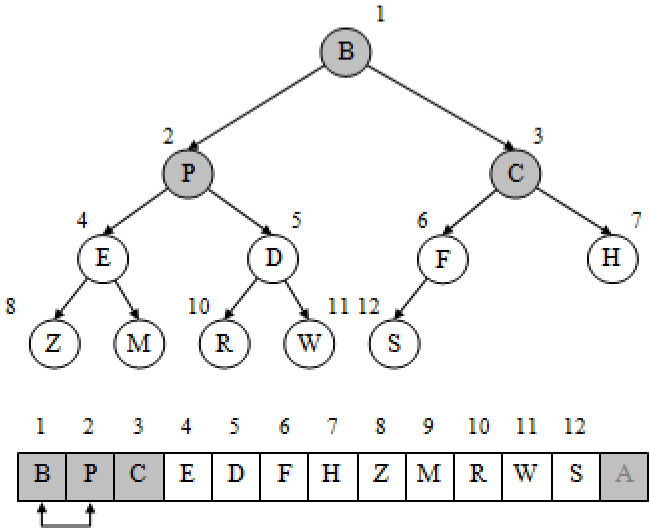
Borrado del mínimo

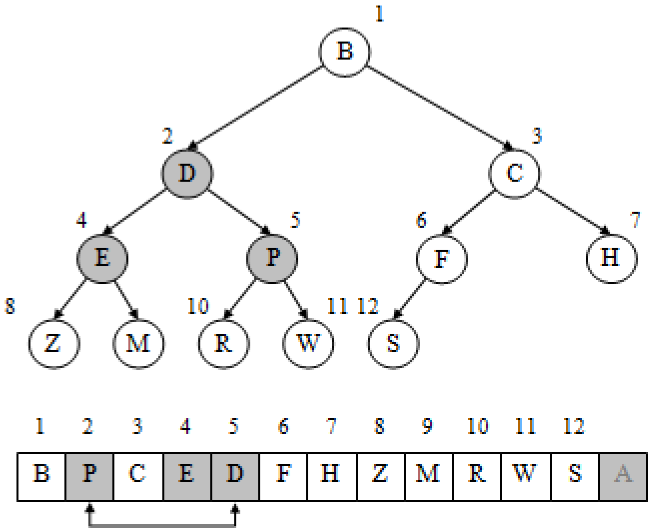
```
public E delMin() {
  E x = (E) vec[0];
  // Mover último a raiz (elemento a borrar)
  vec[0] = vec[num-1];
  vec[num-1] = x;
  num--;
  // Descender el nuevo elemento raiz
  descender(0);
  return x;
}
```

Ejemplo de borrado del mínimo









Creación a partir de array

- Es posible crear un montículo **directamente** de un array, sin necesidad de realizar ***n* inserciones**: Se hace un recorrido por niveles, del penúltimo hacia arriba, **descendiendo** la raiz de esos subárboles. El orden es **O(n)** y no se requiere espacio extra.

```
public void crear(Object[] vec) {
  // Se trabaja sobre el vector proporcionado
  this.vec = vec;
  this.num = vec.length;
  // Recorrer nodos por niveles (del último al
  // primero) descendiendo su raiz
  for(int i = (num-2)/2; i >= 0; i--) {
    descender(i);
  }
}
```

Ordenación por montículos

- La **ordenación por montículos** se basa en la posibilidad de crear un montículo directamente sobre el propio array, y del efecto colateral del borrado del mínimo, que (al intercambiarle con el último) lo coloca en la última posición.
  - Primero se reorganiza un vector desordenado como montículo: Esta operación tarda **O(n)**.
  - A continuación se realizan ***n* extracciones del mínimo: O(n log n).**
- El resultado es un montículo vacío (num = 0), pero en el vector que lo sostenía se han depositado los elementos borrados en las posiciones inversas: Se obtiene un vector **ordenado de mayor a menor**.
  - Con un montículo de máximos se obtendría un vector ordenado de menor a mayor.
- El tiempo es **O(n log n)** y el espacio **O(1)**.

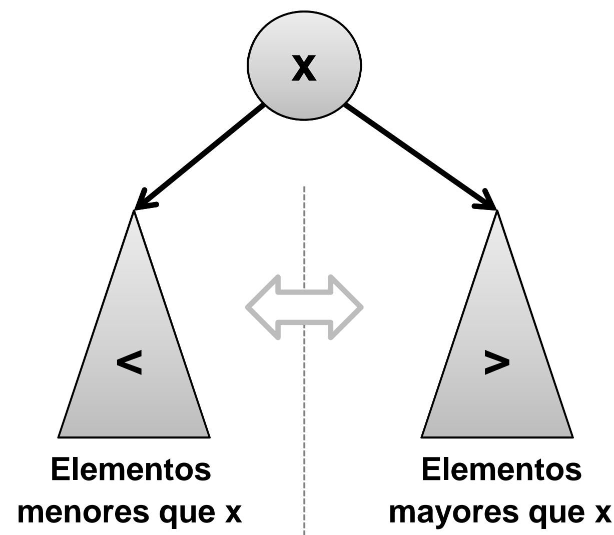
Otros montículos

- Los montículos que hemos visto son los **montículos binarios.** Existen otros tipos de montículos, generalmente basados en representación enlazada (se sigue manteniendo la propiedad de montículo)
  - **Montículo binomial**: La operación de **fusión** de montículos es **O(log n)**, en vez de O(n) como en los binarios. Sin embargo, el **acceso al mínimo** es **O(log n)** en vez de O(1).
  - **Montículo de Fibonacci**: Las operaciones de **acceso al mínimo**, **inserción** y **fusión** son **O(1)** en tiempo amortizado. La operación de **borrado del mínimo** es **O(log n)**, también en tiempo amortizado.
  - **Montículo Min-Max**: Cada nodo en nivel **par** es **menor** que sus descendientes, y cada nodo en nivel **impar** es **mayor** que sus descendientes.

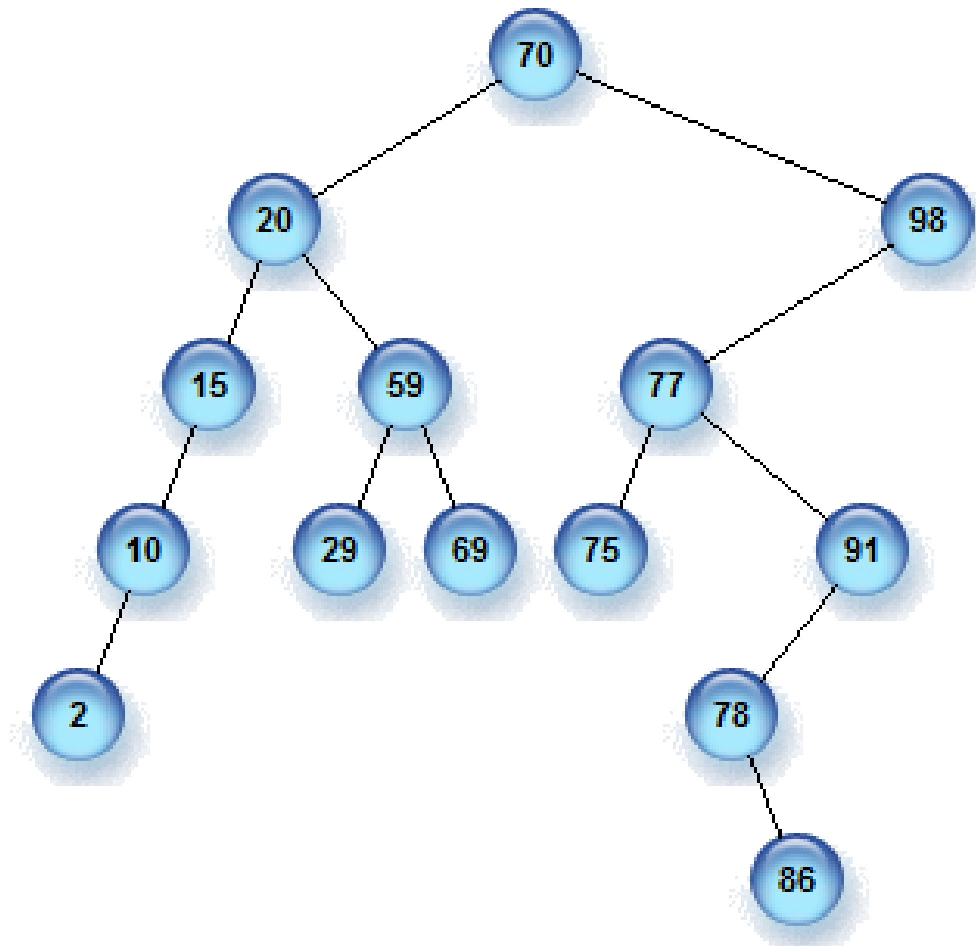
5. ÁRBOLES BINARIOS DE BÚSQUEDA

Árbol Binario de Búsqueda

- Un **árbol binario de búsqueda** (árbol BB) es un **árbol binario** cuyos nodos almacenan elementos comparables mediante $\leq$ y donde todo nodo cumple la **propiedad de ordenación**:
- **Propiedad de ordenación**: Todo nodo es **mayor** que los nodos de su subárbol **izquierdo**, y **menor** que los nodos de su subárbol **derecho**.



Ejemplo de árbol BB



Propiedades y operaciones

- Un recorrido **inorden** por el árbol recorre los elementos en **orden** de menor a mayor.
- El elemento **mínimo** es el primer nodo sin hijo izquierdo en un descenso por hijos izquierdos desde la raiz.
- El elemento **máximo** es el primer nodo sin hijo derecho en un descenso por hijos derechos desde la raiz.
- Para **buscar** un elemento se parte de la raiz y se desciende escogiendo el subárbol izquierdo si el valor buscado es menor que el del nodo o el subárbol derecho si es mayor.
- Para **insertar** un elemento se busca en el árbol y se inserta como nodo hoja en el punto donde debería encontrarse.
- Para **borrar** un elemento, se adaptan los enlaces si tiene 0 o 1 hijo. Si tiene dos hijos se intercambia con el máximo de su subárbol izquierdo y se borra ese máximo.

Representación (Java)

```java
public class ArbolBB<E> {

  // Clase interna que representa un nodo BB
  private class Nodo<E> {
     E elem;              // Elemento
     Nodo<E> izdo, dcho; // Enlaces
     // Constructor (nodo sin enlaces)
     Nodo(E elem) { this.elem = elem; izdo = dcho = null; }
  }

  // Nodo raiz
  Nodo<E> raiz = null;

  // Resto de operaciones ...
}
```

Acceso por valor (búsqueda)

```
public E get(E elem) {
  if(raiz == null) return null;
  Nodo<E> p = raiz;
  do {
     if(elem == p.elem) break;
     p = (elem < p.elem) ? p.izdo : p.dcho;
  } while(p != null);
  return (p == null) ? null : p.elem;
}
```

Inserción

```
public void add(E elem) {
  if(raiz == null) { raiz = new Nodo(elem); return; }
  Nodo<E> ant = null;
  Nodo<E> act = raiz;
  do {
     ant = act;
     act = (elem < act.elem) ? act.izdo : act.dcho;
  } while(act != null);
  // Insertar nuevo nodo
  act = new Nodo(elem);
  if(elem < ant.elem) {
    ant.izdo = act;
  } else {
    ant.dcho = act;
  }
}
```

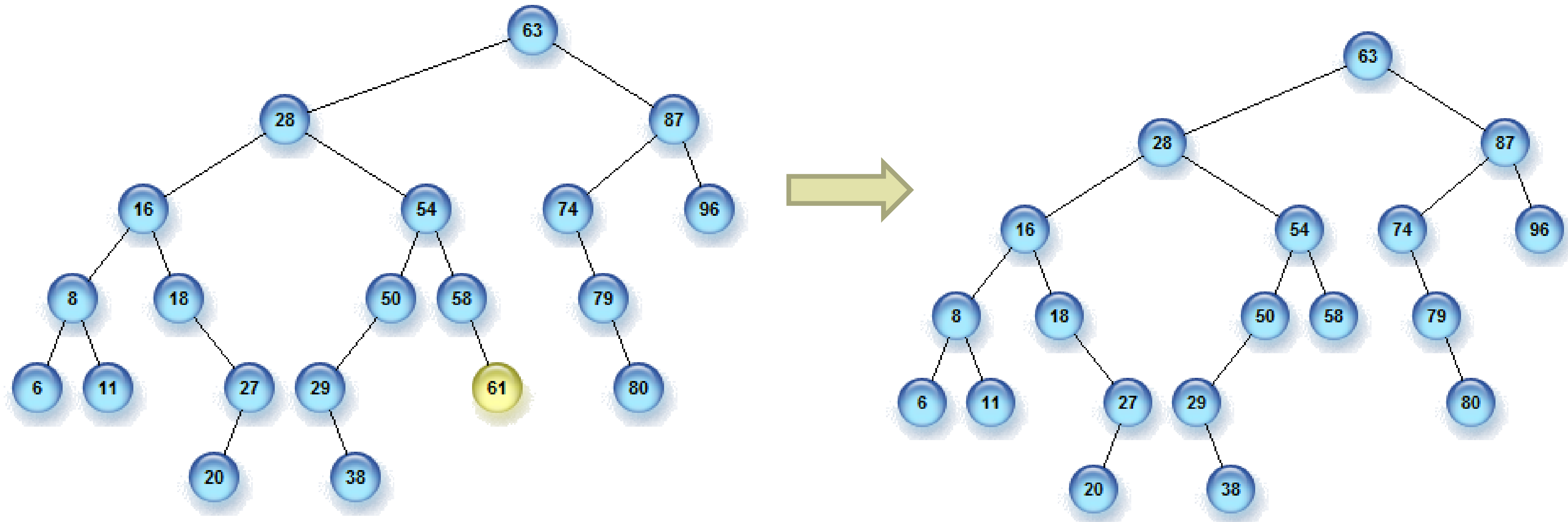
Borrado (I)

```
public void del(E elem) {
  // Si el elemento no existe, no hacer nada
  if (get(elem) == null) return;
  // Búsqueda del nodo a borrar (existe)
  if(raiz == null) { raiz = new Nodo(elem); return; }
  Nodo<E> ant = null;
  Nodo<E> act = raiz;
  while(elem != act.elem) {
     ant = act;
     act = (elem < act.elem) ? act.izdo : act.dcho;
  } while(act != null);
  // act apunta al elemento a borrar y ant a su padre
  ...
```

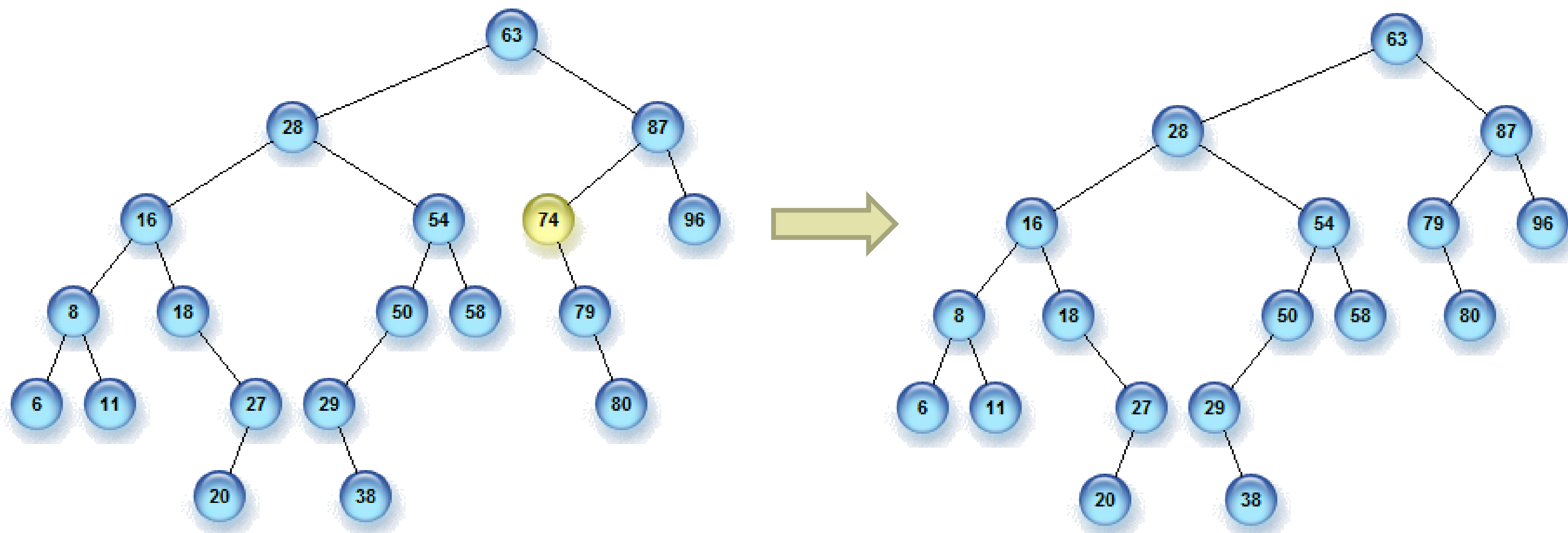
Borrado (II)

```
  // Si tiene dos hijos, lo intercambiamos con
  // el máximo de su subarbol izquierdo
  if(act.izdo != null && act.dcho != null) {
    Nodo<E> tmp = act;
    ant = act; act = act.izdo;
    while(act.dcho != null) { ant = act; act = act.dcho; }
    tmp.elem = act.elem;
  }
  // El nodo a borrar solo tiene 0 o 1 hijos
  Nodo<E> h = (act.izdo != null) ? act.izdo : act.dcho;
  if(ant == null) {
    raiz = h;
  } else {
    if(ant.izdo = act) { ant.izdo = h; } else { ant.dcho = h; }
  }
}
```

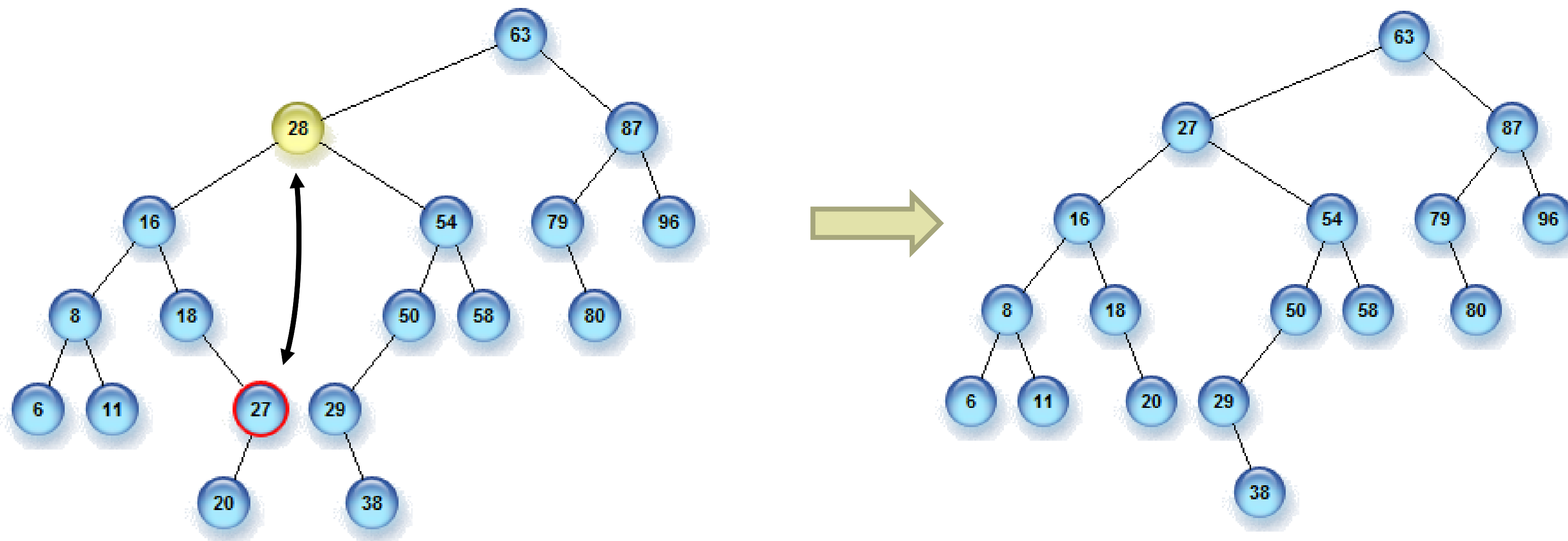
Ejemplo de borrado – 0 hijos



Ejemplo de borrado – 1 hijos

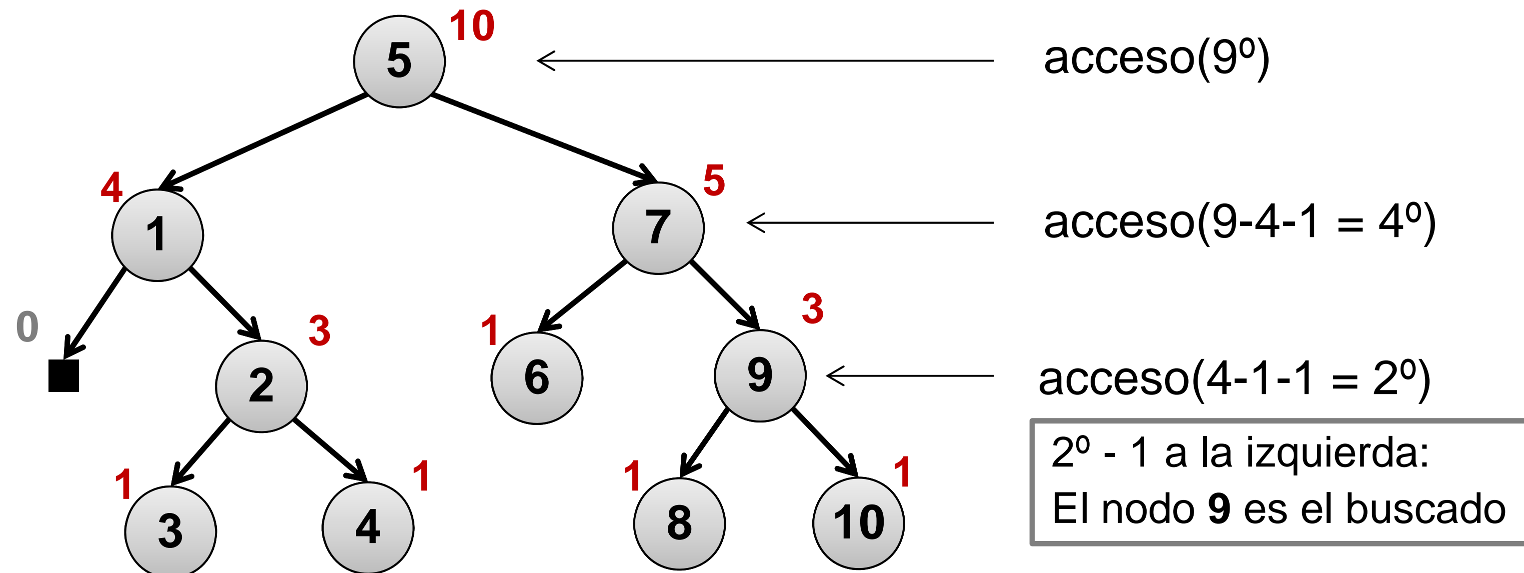


Ejemplo de borrado – 2 hijos



Extensión: Acceso por índice

- Es posible **extender** un ABB para que la operación de **acceso al i-ésimo menor** sea eficiente añadiendo un campo a cada nodo que indique el **número de elementos del subárbol:**



Utilidad

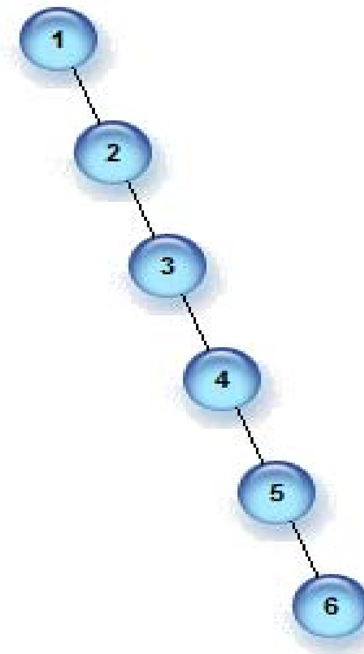
- Un árbol BB podría ser adecuado para representar los **TADs Conjunto, Mapa, Diccionario y Lista ordenada**:
  - El **acceso por valor** (búsqueda) es **O(h)**
  - La **inserción por valor** es **O(h)**
  - El **borrado por valor** es **O(h)**.
  - El **acceso al í-ésimo menor** (con la extensión anterior) es **O(h).**
  - El **borrado del i-ésimo menor** es **O(h)**.
  - La **fusión** es **O(n)**.
- En las medidas de eficiencia **h** es la altura del árbol.
  - Se define **arbol equilibrado** como aquél que garantiza que su altura es logarítmica **h $\in$ O(log n)**
  - Desafortunadamente, los árboles BB **no son equilibrados** (no tiene porqué cumplirse que la altura sea logarítmica).

Equilibrado en árboles BB

- El que un árbol BB esté equilibrado o no depende de la **secuencia de inserciones**. Desafortunadamente, el insertar elementos **en orden** provoca caer en el peor caso: Un **árbol lineal** (altura O(n), proporcional al número de elementos)

- En un árbol lineal todas las operaciones relevantes serían **O(n)**, arruinando la eficiencia.

- Si los elementos se insertan al azar, se puede demostrar que la altura del árbol BB es, en promedio, logarítmica.



6. ÁRBOLES AVL

Árboles equilibrados

- Los **árboles equilibrados** son **árboles BB** que imponen restricciones estructurales para garantizar (o tender a) que su altura sea **logarítmica**.
- Para ello añaden **etapas extra** a las operaciones de inserción y borrado (y a veces al acceso)
- **Árboles AVL**: Imponen que para todo nodo la diferencia de altura entre los subárboles izquierdo y derecho no sea mayor que uno.
- **Árboles Rojo-Negro**: Los nodos se clasifican como rojos o negros, y se cumple:
  - Los hijos de un nodo rojo son negros
  - Todo camino de la raiz a una hoja pasa por el mismo número de nodos negros.
- **Splay Trees**: Cada vez que se accede a un nodo se "eleva" en el árbol pasando a ser la raiz (equilibrado "promedio")

Árboles AVL

- Los **árboles AVL** son **árboles BB** donde todo nodo cumple la propiedad de **equilibrado AVL**:

  La altura del subárbol izquierdo y del derecho no se diferencian en más de uno.

- Se define **factor de equilibrio** de un nodo como:

  Fe(nodo) = altura(derecho) – altura(izquierdo)

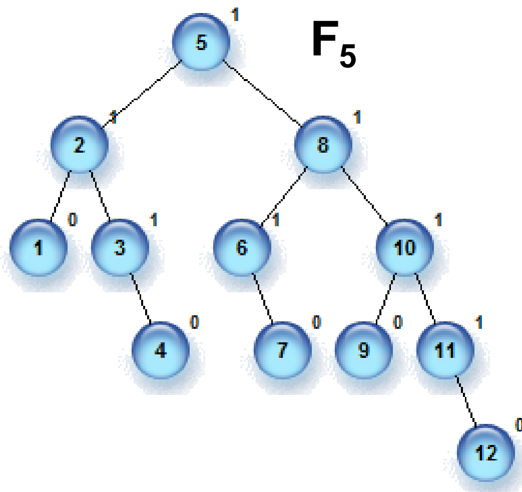
- En un árbol AVL el factor de equilibrio de todo nodo es -1, 0 ó +1.
- Tras la inserción o borrado de un elemento, sólo los **ascendientes** del nodo pueden sufrir un cambio en su factor de equilibrio, y en todo caso sólo en una unidad.
- Se añade una etapa donde se recorren los ascendientes. Si alguno está desequilibrado (+2 o -2) se vuelve a equilibrar mediante operaciones denominadas **rotaciones**.

Ejemplo de árbol AVL

- 65 (-1)
  - 32 (-1)
    - 11 (1)
      - 6 (-1)
        - 2 (0)
      - 26 (0)
        - 13 (1)
          - 23 (0)
        - 30 (0)
          - 28 (0)
          - 31 (0)
    - 55 (0)
      - 41 (0)
        - 40 (0)
        - 47 (0)
      - 57 (1)
        - 59 (0)
  - 74 (0)
    - 69 (-1)
      - 67 (0)
        - 66 (0)
        - 68 (0)
      - 70 (0)
    - 86 (0)
      - 83 (-1)
        - 76 (0)
      - 94 (0)
        - 90 (0)
        - 98 (0)

Áltura logarítmica

- Todo árbol binario con **equilibrado AVL** tiene altura logarítmica
- Se define **árbol de Fibonacci** (F_h) como:
  - F_{-1} es el árbol vacío.
  - F_0 es el árbol con un único nodo.
  - F_h es el árbol con subárbol izquierdo F_{h-2} y derecho F_{h-1}
- El árbol F_h tiene altura h y número de elementos:



F_5

$$N(h) = N(h-1) + N(h-2) + 1$$

$$N(h) \in O(\phi^h) \Rightarrow h \in O(\log n)$$

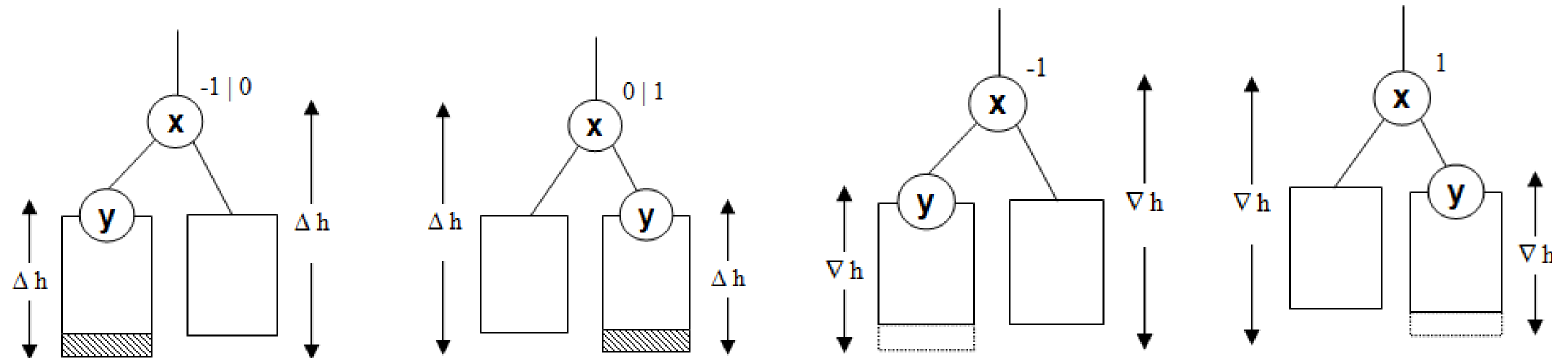
Un árbol de fibonacci es el árbol AVL con mayor desequilibrio

Operaciones en Árbol AVL

- Un árbol AVL es un **árbol binario de búsqueda** (ABB), ampliado con un campo que indica el **factor de equilibrio** de cada nodo.
- Las operaciones de **acceso** son **idénticas** a las de un ABB.
- Las operaciones de **inserción** y **borrado** se realizan **igual** que en un ABB, salvo que se añade una etapa posterior de **reequilibrado**.
- El reequilibrado recorre los **ascendientes** del nodo que ha sufrido modificación, recalculando sus **factores de equilibrio** y aplicando las **rotaciones** adecuadas cuando es necesario.
- El recorrido se detiene al llegar al **nodo raiz** o cuando el subárbol del nodo actual no haya sufrido **cambios en altura** respecto a la situación **anterior** a la operación.
- Es necesario controlar el cambio de altura de los subárboles, dH, a lo largo del recorrido.

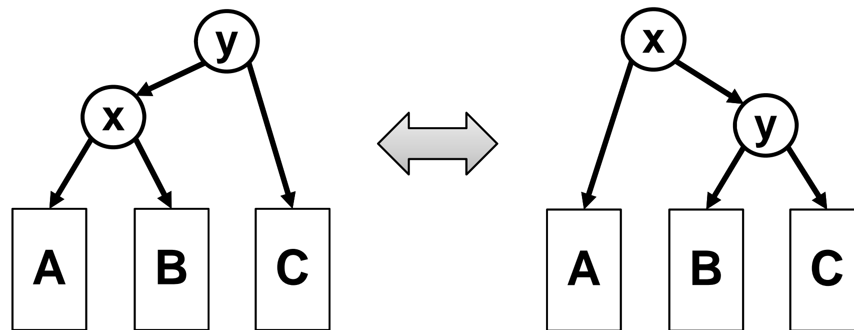
Cambios en altura

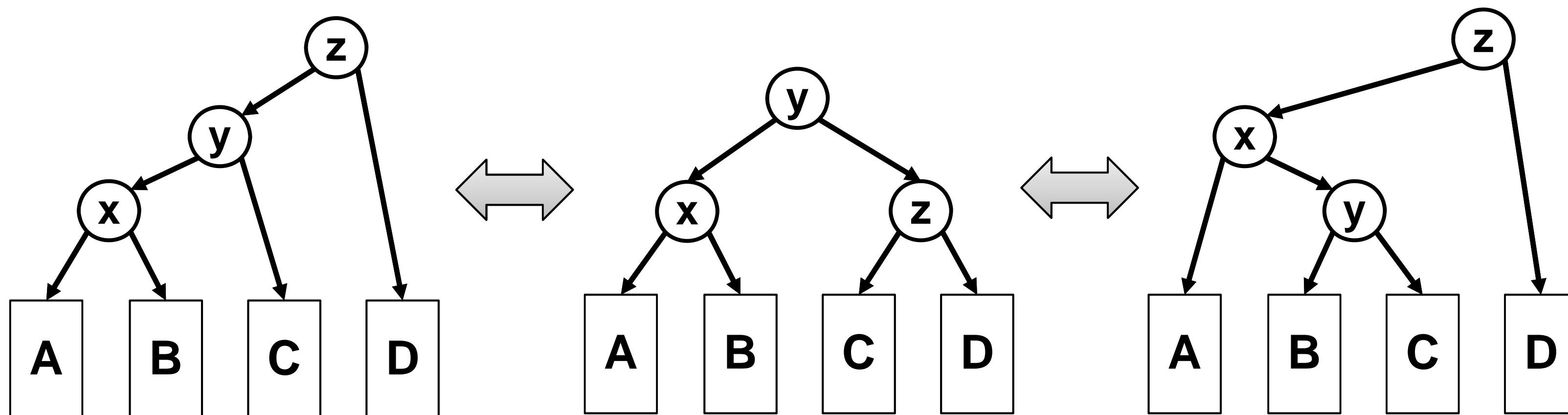
- En **inserción** (dH > 0), si un hijo (**y**) incrementa su altura, el padre (**x**) también la incrementa si su factor de equilibrio era -1 o 0 (hijo izquierdo) o bien 0 o +1 (hijo derecho)
- En **borrado** (dH < 0), si un hijo (**y**) decrementa su altura, el padre (**x**) también la decrementa si su factor de equilibrio era -1 (hijo izquierdo) o +1 (hijo derecho)



Rotaciones

- Una **rotación** es una reestructuración local de un subárbol BB que mantiene la propiedad de ordenación.

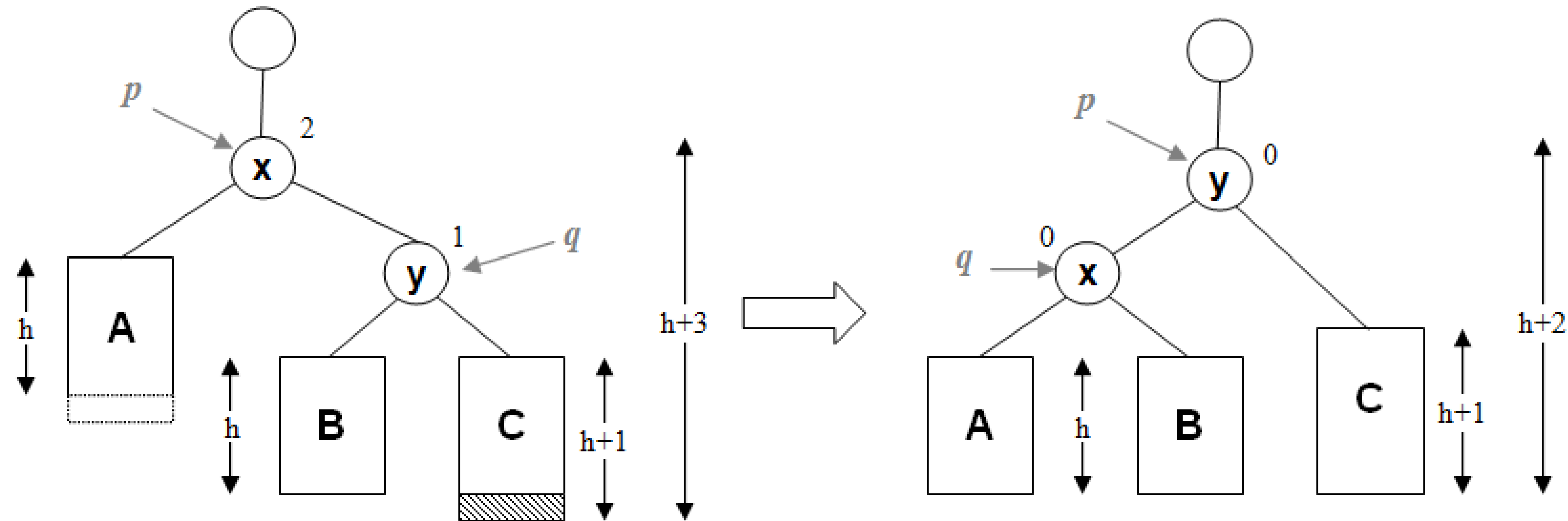




Rotaciones en AVL

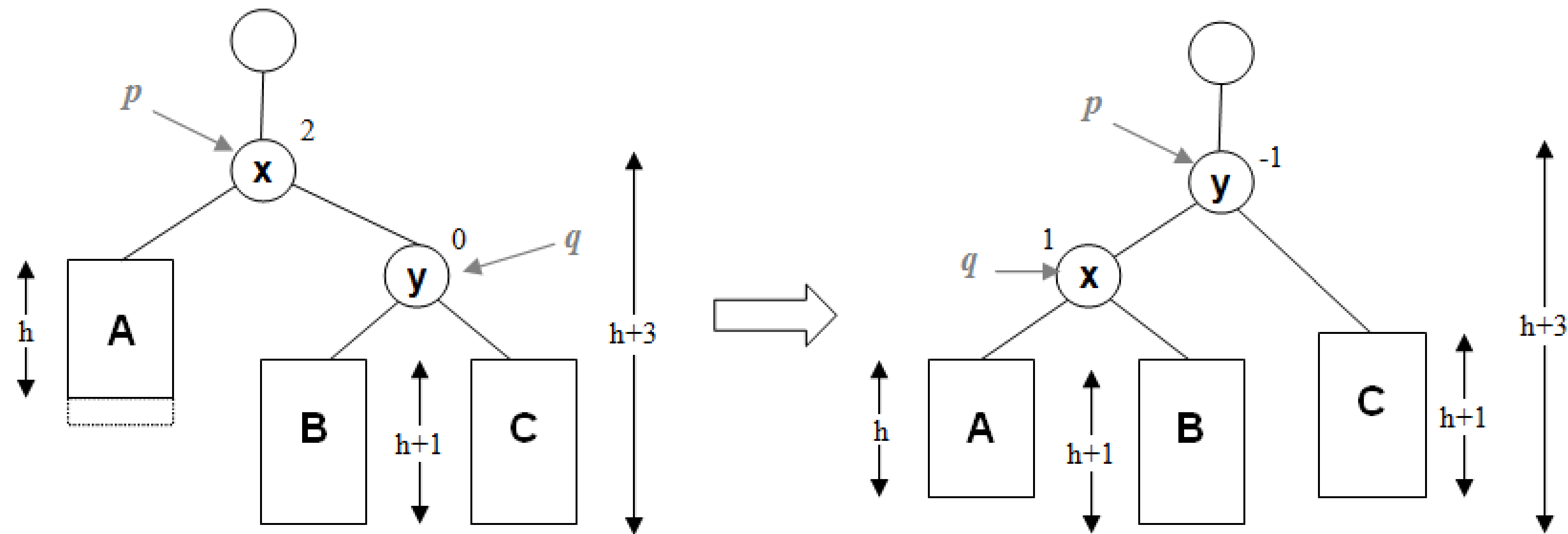
- Tras una operación de inserción o borrado, se recorren los ascendientes, recalculando sus factores de equilibrio y teniendo en cuenta el cambio en altura del subárbol.
- Es posible que en el recorrido el factor de equilibrio de algún nodo pasa a valer +2 ó -2 (desequilibrado).
- En ese caso se aplica una determinada rotación que restablece el equilbrio del nodo (aunque es posible que cambie la altura del nodo).
- En un árbol AVL se necesitan 2 tipos de rotaciones (simples y dobles), en un sentido u otro (izquierdas y derechas).
- Teniendo en cuenta los distintos ajustes de factores de equilibrio y posibles resultados respecto al cambio de altura, existen **seis** casos a considerar.

Rotación 2|1 (Simple derecha)



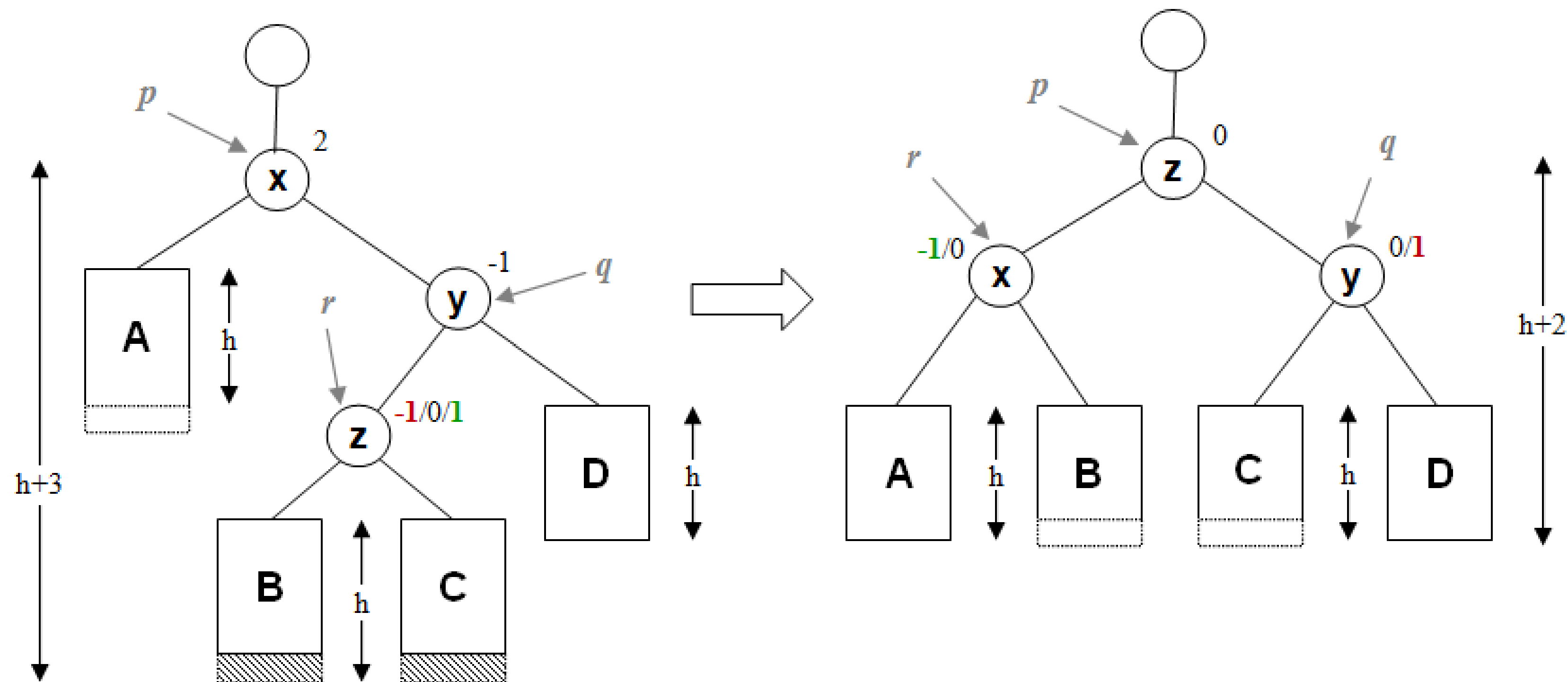
- Posibles causas: Borrado en **A** que decrementa su altura (sin cambiar la del subárbol **x**) o inserción en **C** que incrementa su altura (incrementando la de los subarboles **y, x**).
- Tras la rotación el subarbol decrementa en uno su altura.

Rotación 2|0 (Simple derecha)



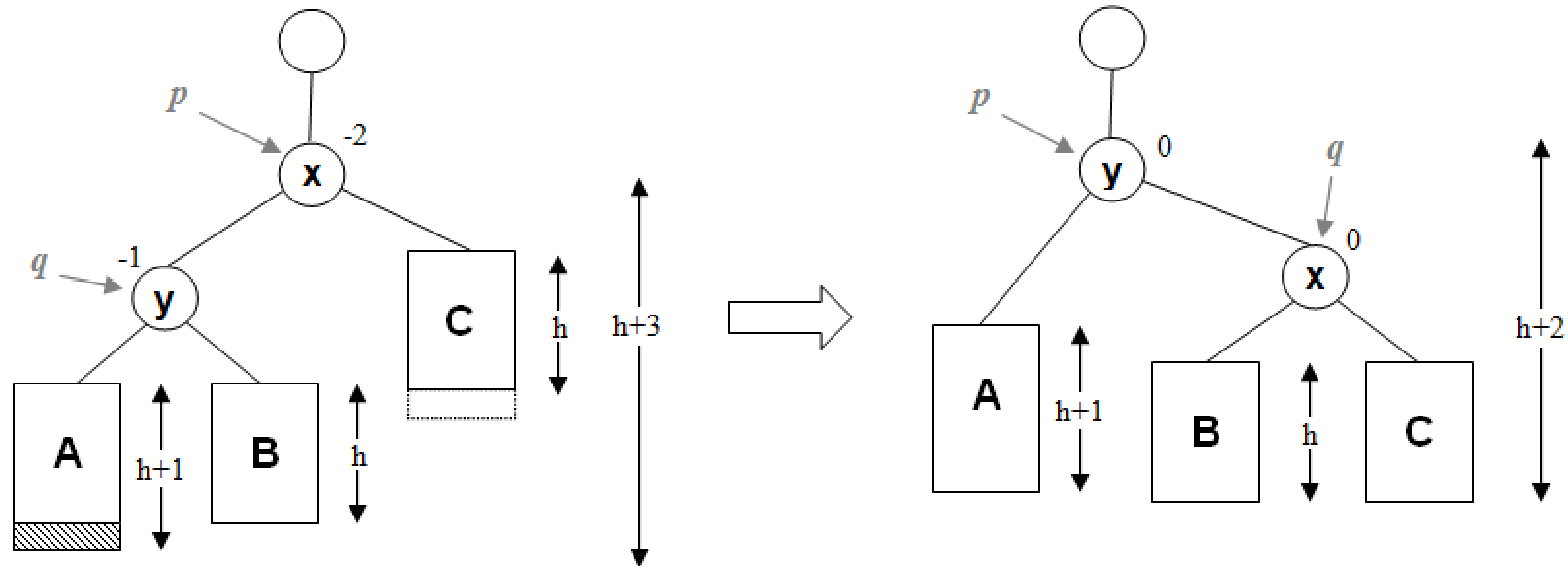
- Posibles causas: Borrado en **A** que decrementa su altura (sin cambiar la del subárbol **x**)
- Tras la rotación el subarbol mantiene su altura.
- Las modificaciones son las mismas que el caso anterior

Rotación 2|-1 (Doble derecha)



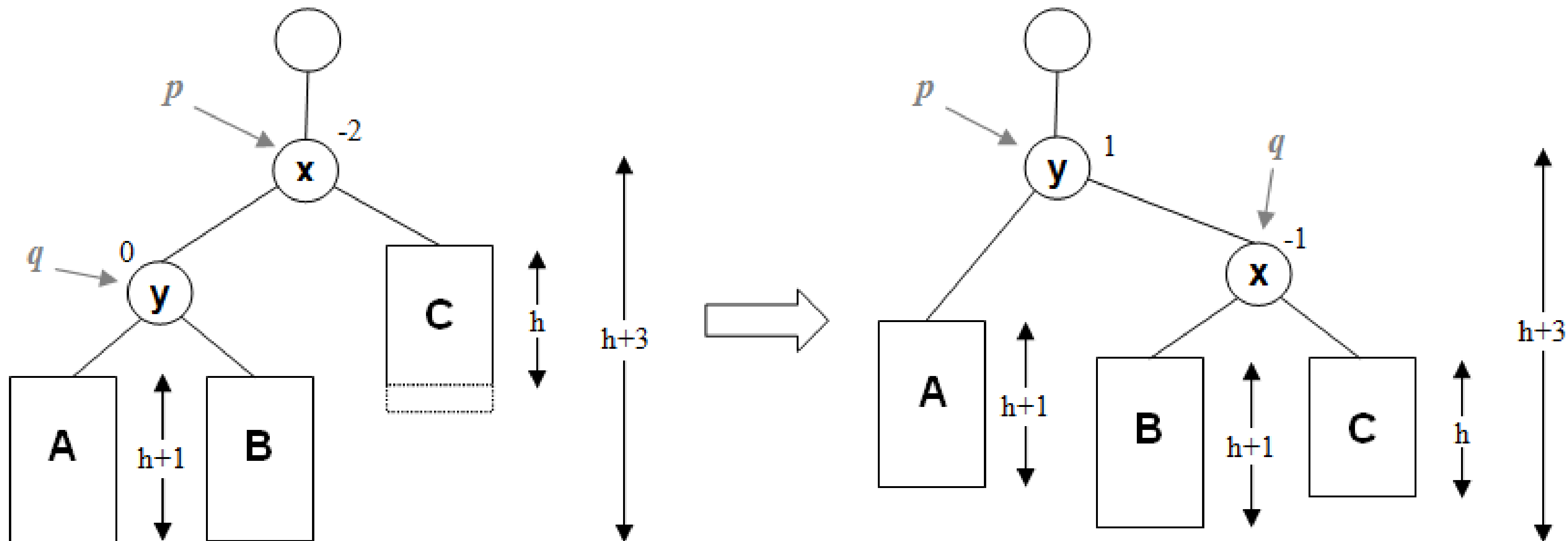
- Posibles causas: Borrado en **A** que decrementa su altura (sin cambiar la del subárbol **x**) ó inserción en **B** ó **C** que incrementa su altura y la de los subarboles **z, y, x**
- Tras la rotación el subarbol decrementa en uno su altura.

Rotación -2|-1 (Simple izquierda)



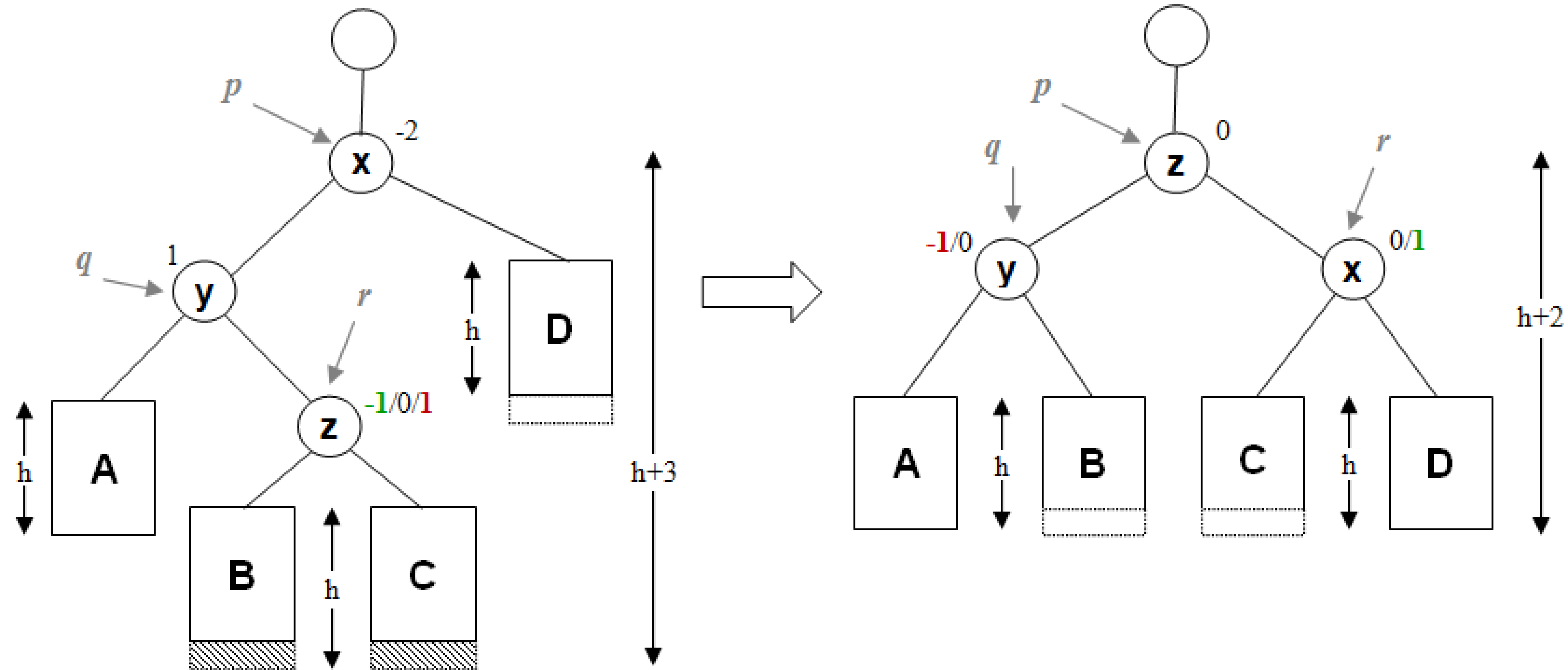
- Posibles causas: Borrado en **C** que decrementa su altura (sin cambiar la del subárbol **x**) o inserción en **A** que incrementa su altura (incrementando la de los subarboles **y, x**).
- Tras la rotación el subarbol decrementa en uno su altura.

Rotación -2|0 (Simple izquierda)



- Posibles causas: Borrado en **C** que decrementa su altura (sin cambiar la del subárbol **x**)
- Tras la rotación el subarbol mantiene su altura.
- Las modificaciones son las mismas que el caso anterior.

Rotación -2|1 (Doble izquierda)



- Posibles causas: Borrado en **D** que decrementa su altura (sin cambiar la del subárbol **x**) ó inserción en **B** ó **C** que incrementa su altura y la de los subarboles **z, y, x**
- Tras la rotación el subarbol decrementa en uno su altura.

Implementación en Haskell (I)

```haskell
-- Nodo e i x d
-- i,d : Subarboles izquierdo y derecho
-- x : elemento almacenado
-- e : Factor de equilibrio = altura(d)-altura(i)
data AVL a = Nulo | Nodo Int (AVL a) a (AVL a)

-- Elemento mínimo
minimo :: AVL a -> a
minimo (Nodo _ Nulo x _) = x
minimo (Nodo _ i _ _)    = minimo i

-- Búsqueda
busqueda :: AVL a -> a -> Bool
busqueda Nulo _ = False
busqueda (Nodo _ i y d) x
  | x == y = True
  | x < y  = busqueda i x
  | x > y  = busqueda d x
```

Implementación en Haskell (II)

```haskell
-- Equilibra un subarbol en el cuál el nodo raiz esté desequilibrado
-- (+2 o -2) aplicando la rotación adecuada. Devuelve un par con el
-- subarbol equilibrado y la modificación de la altura respecto al subarbol
-- anterior (se acumula al parámetro p que toma en cuenta modificaciones
-- de altura de operaciones anteriores).
equil :: AVL a -> Int -> (AVL a, Int)
equil (Nodo 2 a x (Nodo 1 b y c)) p =
      (Nodo 0 (Nodo 0 a x b) y c, p-1)
equil (Nodo 2 a x (Nodo 0 b y c)) p =
      (Nodo (-1) (Nodo 1 a x b) y c, p)
equil (Nodo 2 a x (Nodo (-1) (Nodo e b z c) y d)) p =
      (Nodo 0 (Nodo (min (-e) 0) a x b) z (Nodo (max (-e) 0) c y d), p-1)
equil (Nodo (-2) (Nodo (-1) a y b) x c) p =
      (Nodo 0 a y (Nodo 0 b x c), p-1)
equil (Nodo (-2) (Nodo 0  a y b) x c) p =
      (Nodo 1 a y (Nodo (-1) b x c), p)
equil (Nodo (-2) (Nodo 1 a y (Nodo e b z c)) x d) p =
      (Nodo 0 (Nodo (min (-e) 0) a y b) z (Nodo (max (-e) 0) c x d), p-1)
equil a p = (a,p) – Caso en que no está desequilibrado
```

Implementación en Haskell (III)

```haskell
-- insercion
insertar :: (Ord a) => AVL a -> a -> AVL a
insertar a x = fst (insaux a x)
-- Inserta en un subarbol y devuelve la modificacion en altura
-- (+1,0) del subarbol resultante
insaux :: (Ord a) => AVL a -> a -> (AVL a, Int)
insaux Nulo x = (Nodo 0 Nulo x Nulo, 1)
insaux a@(Nodo e i y d) x
  | x < y = let (i',k) =
     insaux i x in equil (Nodo (e-k) i' y d) (min (k*(1-e)) 1)
  | x > y = let (d',k) =
     insaux d x in equil (Nodo (e+k) i y d') (min (k*(1+e)) 1)
  | x == y = (a,0)
-- Nota: En violeta aparecen fórmulas derivadas de los
-- diagramas de la transparencia 57
```

Implementación en Haskell (IV)

```haskell
-- borrado
borrar :: (Ord a) => AVL a -> a -> AVL a
borrar a x = fst (boraux a x) where
  boraux Nulo _ = (Nulo, 0)
  boraux (Nodo e i y d) x
    | x < y  = let (i',k) =
       boraux i x in equil (Nodo (e-k) i' y d) (min (-k*e) 0)
    | x > y  = let (d',k) =
       boraux d x in equil (Nodo (e+k) i y d') (min (k*e) 0)
    | x == y = case (i,d) of
                (Nulo,Nulo) -> (Nulo, -1)
                (Nulo,_)    -> (d, -1)
                (_,Nulo)    -> (i, -1)
                (_,_)       -> equil (Nodo (e-k) i' z d) k where
                                 z = maximo i
                                 (i',k) = boraux i z
```

7. ANÁLISIS DE EFICIENCIA

Eficiencia TADs Conjunto/Mapa

	Contigua ordenada	Árbol bin. búsq. (peor caso)	Árbol bin. búsq. (caso promedio)	Árbol AVL
Pertenencia (conjunto) Acceso por clave (mapa)	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Borrado (por valor/clave)	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Inserción (por valor)	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Iterar todos los elementos	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
Unión (ambos tamaño *n*)	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$

Eficiencia TAD Lista Ordenada

	Contigua ordenada	Árbol AVL
Acceso *i*-ésimo menor	$O(1)$	$O(\log n)$
Borrado *i*-ésimo menor	$O(n)$	$O(\log n)$
Inserción por valor	$O(n)$	$O(\log n)$
Búsqueda	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Fusión	$O(n)$	$O(n)$

Nota:

Se supone que los nodos del árbol AVL disponen de un campo extra que almacena el número de elementos del subárbol.

Eficiencia TAD Cola de Prioridad

	Contigua ordenada	Contigua	Arbol AVL	Montículo
Acceso mínimo	$O(1)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$
Borrado mínimo	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Borrado elemento dada su referencia	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Inserción por valor	$O(n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Creación a partir de un array desordenado	$O(n \log n)$	---	$O(n \log n)$	$O(n)$
Fusión	$O(n \log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$

Eficiencia TAD Diccionario

	Contigua ordenada	Enlazada ordenada	Arbol AVL
Acceso por clave	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(\log n)$
Acceso clave *i*-ésima menor	$O(1)$	$O(n)$	$O(\log n)$
Acceso por iterador	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
Borrado por clave	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$
Borrado clave *i*-ésima menor	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$
Borrado por iterador	$O(n)$	$O(1)$	$O(\log n)$
Inserción por valor	$O(n)$	$O(n)$	$O(\log n)$

8. ÁRBOLES B

Motivación

- Los sistemas de almacenamiento masivo suelen tener un **tiempo de acceso** mucho mayor que el **tiempo de transferencia**: La localización de un elemento es mucho más costosa que la lectura secuencial de datos, una vez localizados.
- Esto se aplica sobre todo a discos duros, pero también, aunque en menor medida, a memorias de estado sólido (flash) e incluso a memorias volátiles.
- Esto supone un problema para estructuras enlazadas, como los árboles AVL, donde las operaciones acceden a bastantes nodos de pequeño tamaño.
- Para grandes volúmenes de datos, sería conveniente **reducir el número de accesos**, a cambio de que esos accesos contuvieran **elementos de mayor tamaño**.

Caso práctico

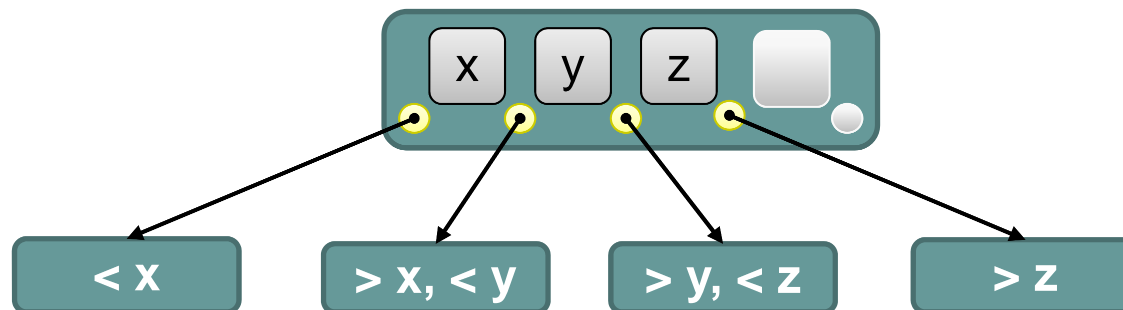
- El SACYL trabaja con una base de datos de unas 2.500.000 tarjetas sanitarias, ocupando cada una aprox. 1 Kb de datos.
- Si se almacenan en un árbol AVL, su altura (árbol de Fibonacci) sería:

$$h = \log_{\phi} 2.500.000 = 31{,}9$$

- Lo que supone entre 25-31 accesos a disco para cualquier búsqueda de un elemento.
- En cambio, si se almacenan en un Árbol B de orden 1.000 (aproximadamente 1 Mb por nodo) tendría altura 3, o 2 con una ocupación media del 80%.
- Sólo se necesitarían 1 ó 2 accesos a disco (la raiz reside en memoria) para cada búsqueda.
- El orden para ambos casos es logarítmico, pero si el tiempo de acceso es dominante, la segunda solución sería 10-30 veces más rapida.

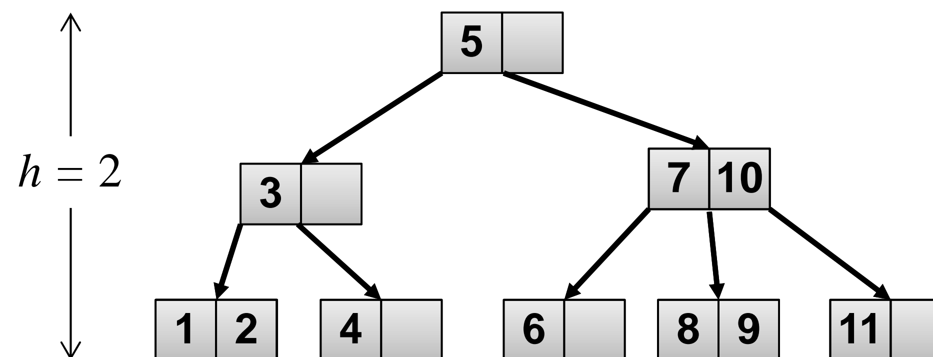
Árboles (a,b)

- Los **árboles (a,b)** son árboles generales (no binarios) donde cada nodo interno puede tener un número de hijos, ***m*+1**, en el rango **[a,b].**
- Cada nodo almacena ***m* claves** (elementos comparables por $\leq$), **ordenadas de menor a mayor**, que sirven para que se pueda usar como un **árbol de búsqueda**.
- El contenido típico de un nodo consiste en:
  - Un entero, ***m*** $\in$ [*a*-1,*b*-1], que indica el número de claves almacenadas.
  - Un vector, **c**, de capacidad ***b*-1**, que almacena las *m* claves.
  - Un vector, **e**, de capacidad ***b***, que almacena los *m*+1 enlaces a hijos.
- **Propiedad de ordenación**: Nodo **e[i]** almacena claves **menores** que **c[i]**



Árboles B

- Un **árbol B** (Bayer-McCreight 1972) de **orden d** es un **árbol (d+1,2d+1)** con las propiedades adicionales siguientes:
  - La **raiz** puede tener **cualquier** número de claves.
  - Todas las hojas se encuentran a la **misma profundidad**, ***h***.
- La segunda propiedad garantiza que un árbol B es un **árbol equilibrado**: Su altura es logarítmica respecto al número de claves almacenadas.
- **Ejemplo**: Un árbol B de orden 1 es un árbol (2,3): Cada nodo puede contener 1 o 2 claves y tener 2 o 3 hijos.



Reestructuraciones

$2 \cdot d+1$ → División → d, d

$d+1$, $d-1$ → Transferencia → d, d

d, $d-1$ → Fusión → $2 \cdot d$

Búsqueda e Inserción

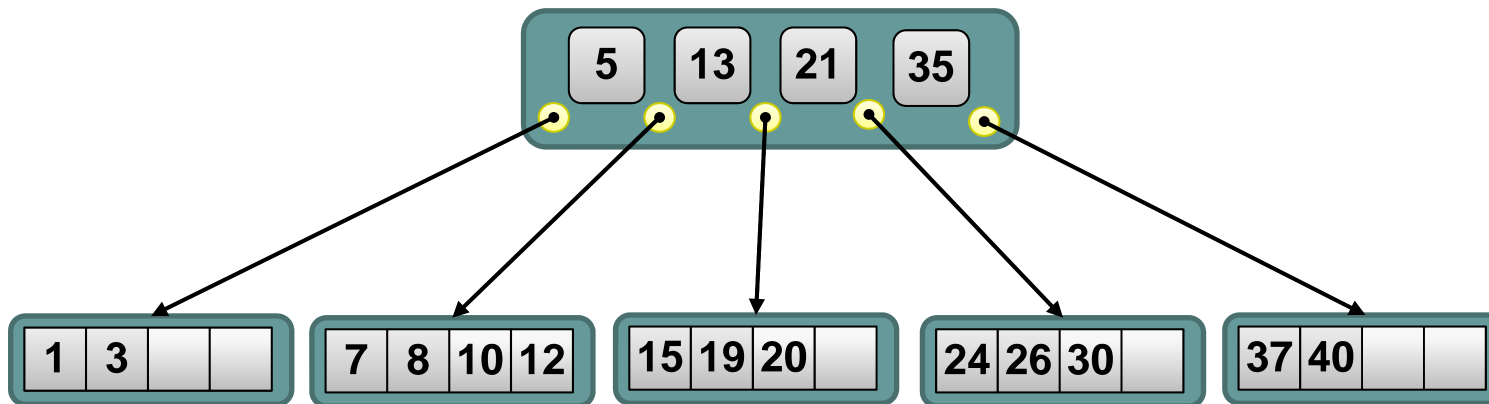
- **Búsqueda:**
  - Se desciende desde la raiz hasta el nodo que contenga el elemento (o bien llegar a una hoja que no lo contenga).
  - En cada nodo se busca en el array de claves (búsqueda secuencial o binaria). Si no se encuentra, se pasa al hijo asociado a la primera clave mayor que el valor buscado (o el último hijo si el valor buscado es mayor que todas las claves).
- **Inserción:**
  - Se desciende (igual que en la búsqueda) hasta el nodo hoja que debería contener el elemento.
  - Se inserta en la posición adecuada del array de claves.
  - Si con ello se supera el número máximo de claves (2*d*), el nodo se **divide**, transfiriendo su clave en **posición media** al padre.
  - Es posible que el padre deba dividirse a su vez, y así con todos los ascendientes.

Borrado

- **Borrado en nodo interno:**
  - Se desciende desde la raiz hasta el nodo que contenga el elemento a borrar.
  - Se intercambia con el máximo del hijo izquierdo o con el mínimo del hijo derecho (se elige el hijo con más claves).
  - Se pasa a borrar el elemento en el hijo (al final el borrado se produce en un **nodo hoja**)
- **Borrado en nodo hoja:**
  - Se elimina del array de claves (desplazamiento).
  - Si con ello el número de claves es d-1:
    - Se intenta una **transferencia** con el hermano izquierdo o derecho, el que contenga más claves.
    - Si no es posible (ambos tienen d hijos o no existen), se produce una **fusión** con el hermano izquierdo (o el derecho, si no existe).
    - La fusión toma un elemento del padre, por lo que éste a su vez puede necesitar transferencias o fusiones (y así con los ascendientes)

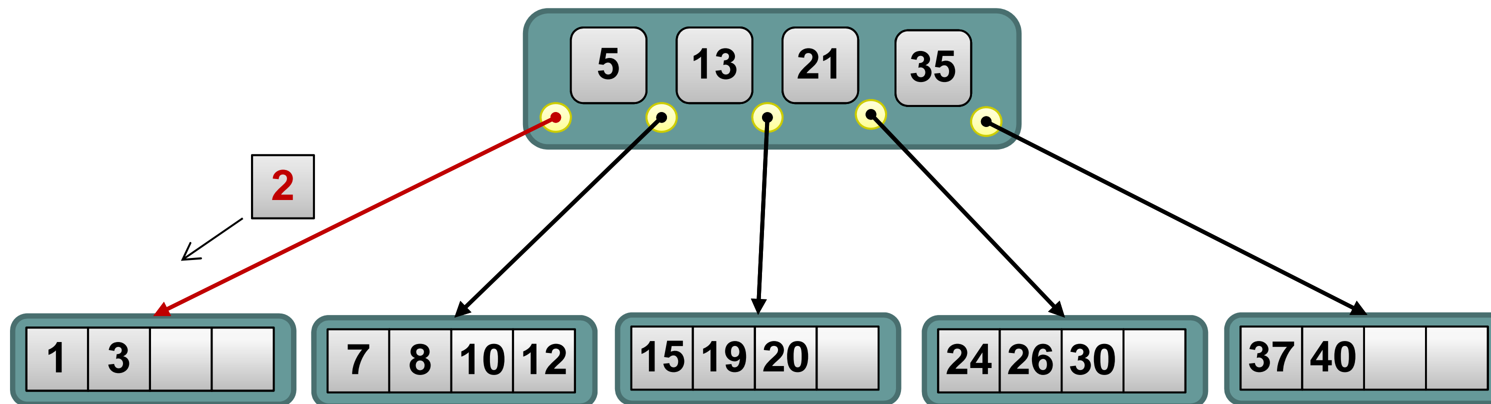
Inserción – Sin reestructuración

- Inserción del valor 2 en árbol B de orden 2 (árbol (3,5))



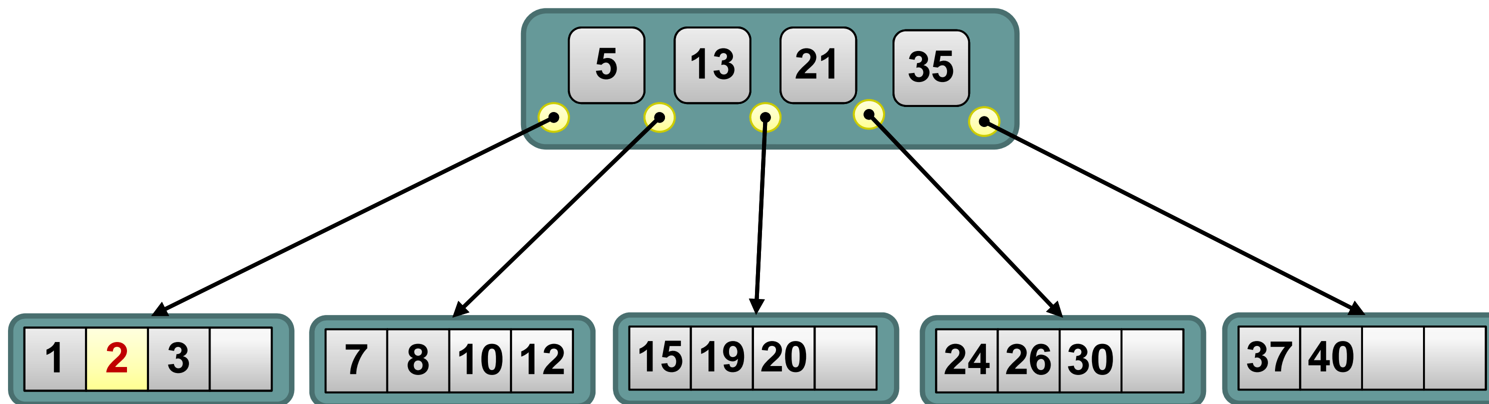
Inserción – Sin reestructuración

- Se busca el nodo hoja donde debe encontrarse el elemento



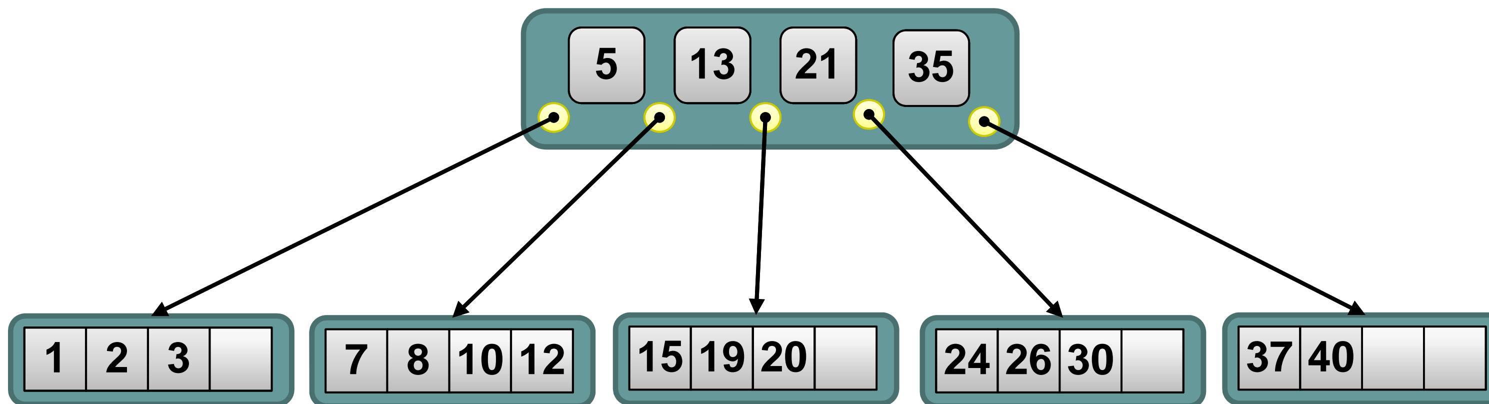
Inserción – Sin reestructuración

- Se inserta en orden en la hoja (desplazamiento)



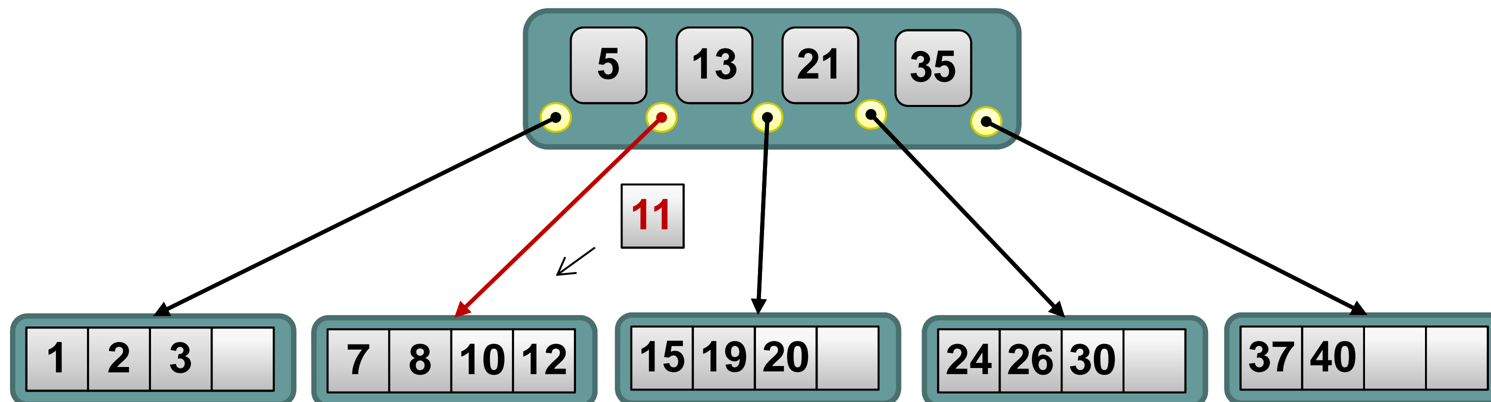
Inserción – División de nodos

- Inserción del valor 11



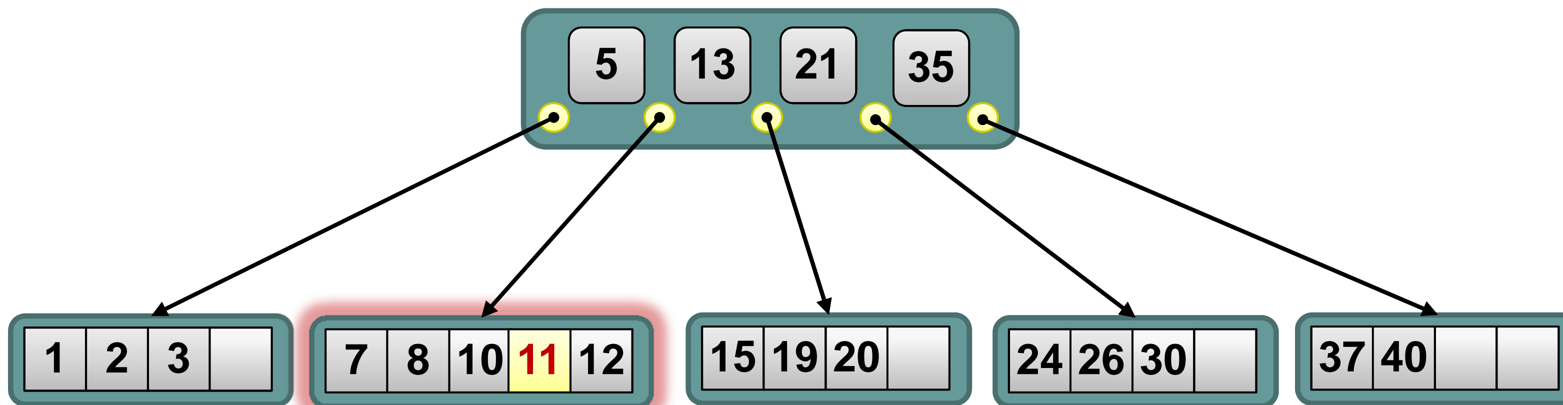
Inserción – División de nodos

- Se busca el nodo hoja donde debe encontrarse el elemento



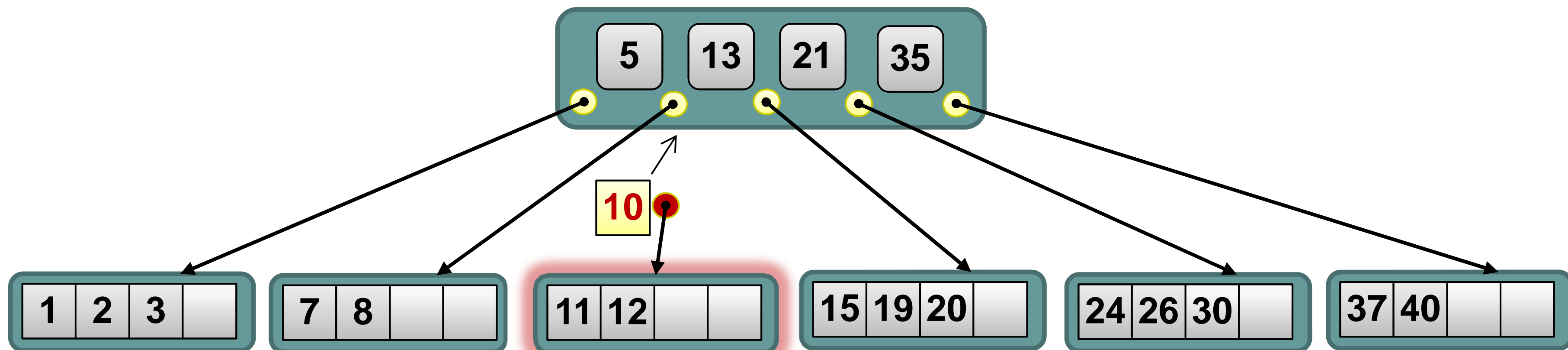
Inserción – División de nodos

- Se inserta en el nodo. En este caso el nodo sobrepasa el límite de claves (4).



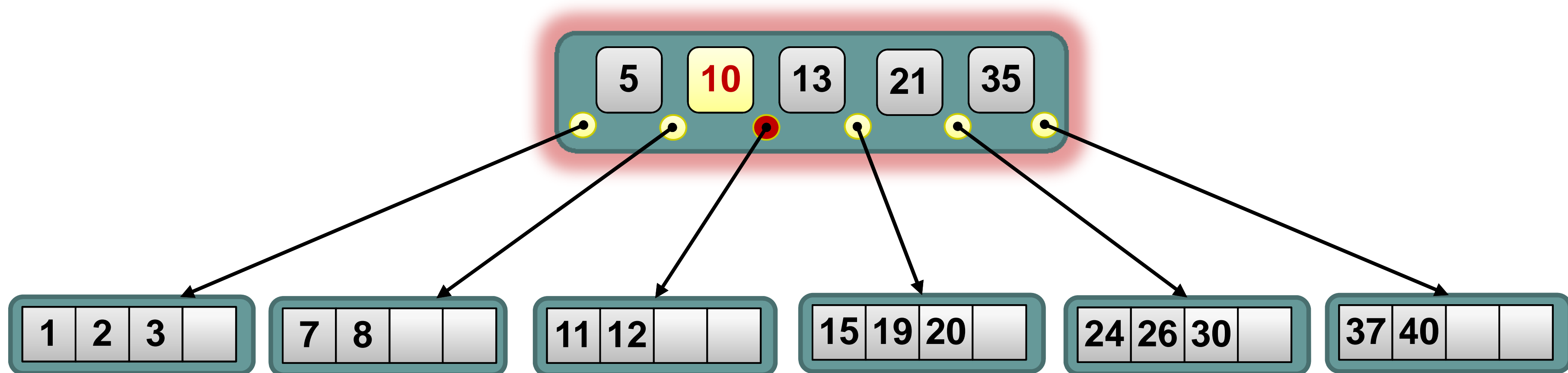
Inserción – División de nodos

- Se crea un nuevo nodo y se traslada la mitad derecha de los elementos a él. El elemento en posición media (10), junto con el enlace al nuevo nodo, se envía al padre para su inserción



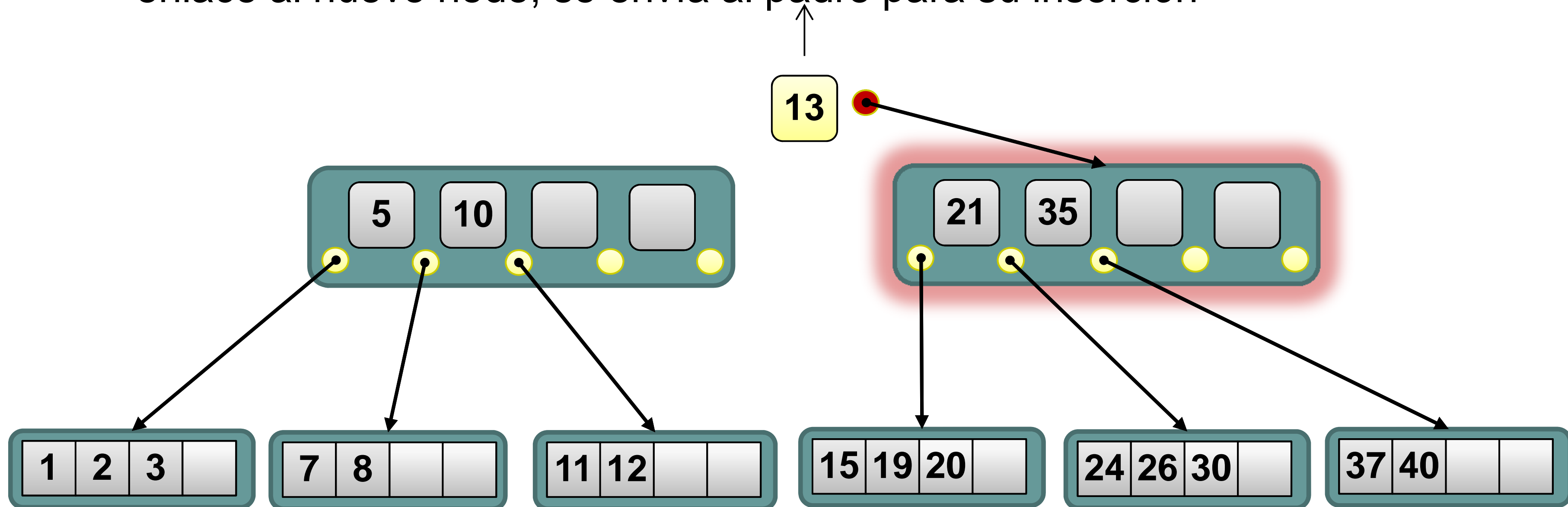
Inserción – División de nodos

- Se inserta en el nodo padre. Se sobrepasa el límite de claves permitidas (4)



Inserción – División de nodos

- Se crea un nuevo nodo y se traslada la mitad derecha de los elementos a él. El elemento en posición media (13), junto con el enlace al nuevo nodo, se envía al padre para su inserción



Inserción – División de nodos

13

5 10

21 35

1 2 3

7 8

11 12

15 19 20

24 26 30

37 40

- Como no existe padre, se crea un nuevo nodo raiz que contiene únicamente esa clave

Borrado – Sin reestructuración

13

5 | 10

21 | 35

1 | 2 | 3

7 | 8

11 | 12

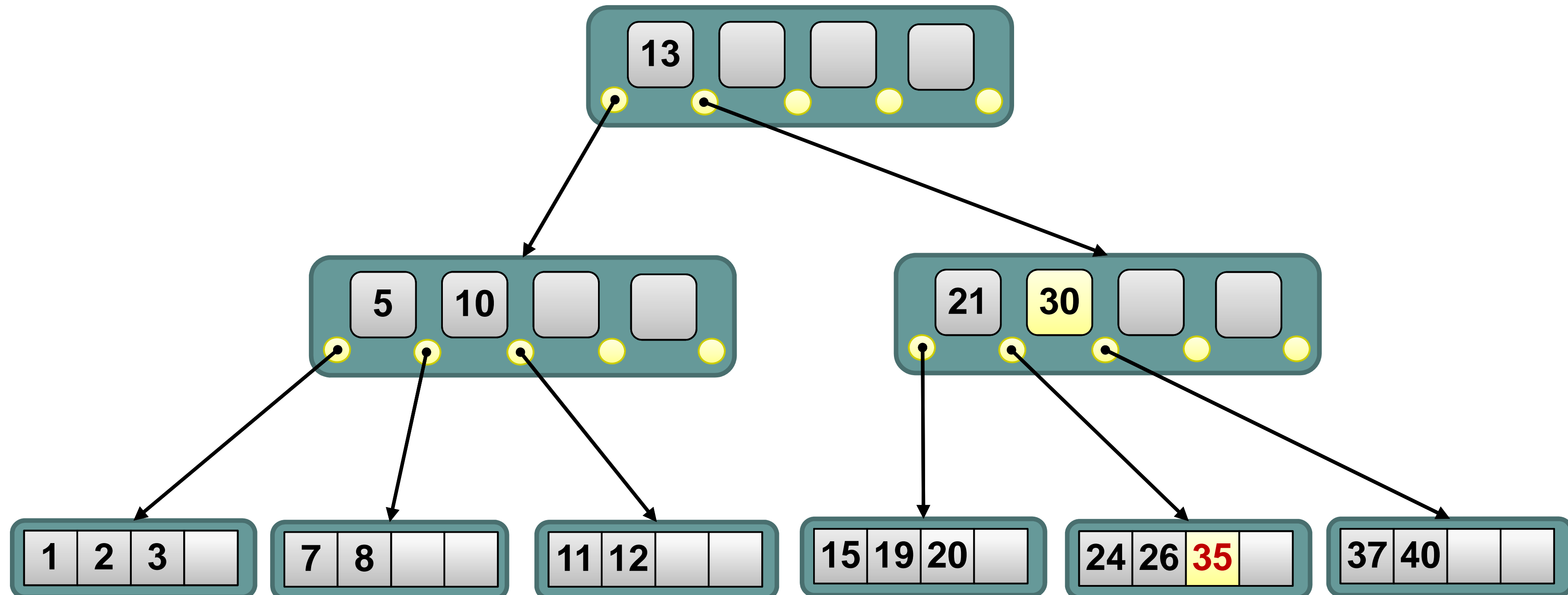
15 | 19 | 20

24 | 26 | 30

37 | 40

- Borrado de la clave 35. Se busca el nodo donde está el elemento.

Borrado – Sin reestructuración



- Es un nodo interno. Se intercambia con el máximo de su hijo izquierdo y se pasa a borrar esa clave.

Borrado – Sin reestructuración

13			

5	10		

21	30		

1	2	3	

7	8		

11	12		

15	19	20	

24	26		

37	40		

- Se borra el elemento.

Borrado – Transferencia

13

5 10 | 21 30

1 2 3 | 7 8 | 11 12 | 15 19 20 | 24 26 | 37 40

- Borrado de la clave 8. Se busca el nodo.

Borrado – Transferencia

13

5 10 | 21 35

1 2 3 | 7 | 11 12 | 15 19 20 | 26 30 | 37 40

- Se borra la clave. El nodo pasa a tener menos claves que las permitidas (2).

Borrado – Transferencia

13

5 10

21 35

3

1 2

7

11 12

15 19 20

26 30

37 40

- Se comprueba el hermano con más claves (el izquierdo). Se transfiere su última clave al padre y la del padre al nodo.

Borrado – Transferencia

13

3 | 10

21 | 35

1	2		

5	7		

11	12		

15	19	20	

26	30		

37	40		

Borrado – Fusión

13

3 | 10

21 | 35

1 | 2

5 | 7

11 | 12

15 | 19 | 20

26 | 30

37 | 40

- Borrado del elemento con clave 11. Se busca el nodo.

Borrado – Fusión

13

3 | 10

21 | 35

1 | 2

5 | 7

12

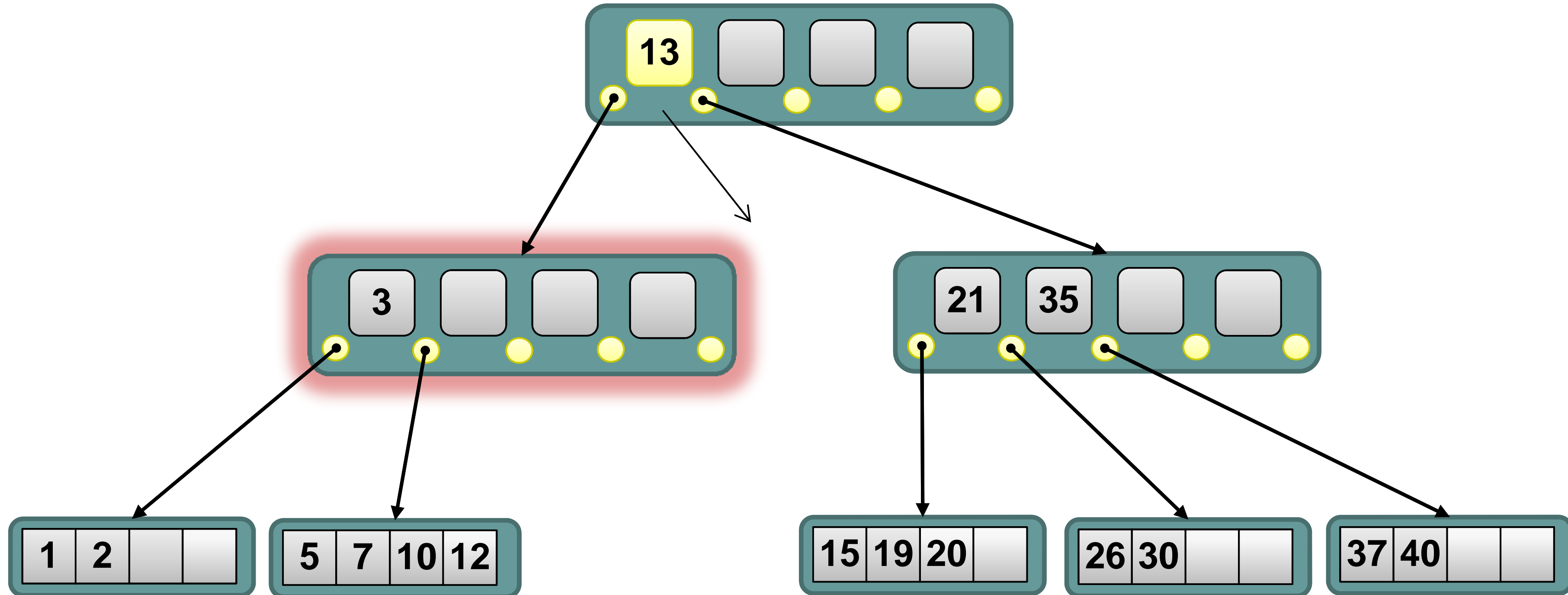
15 | 19 | 20

26 | 30

37 | 40

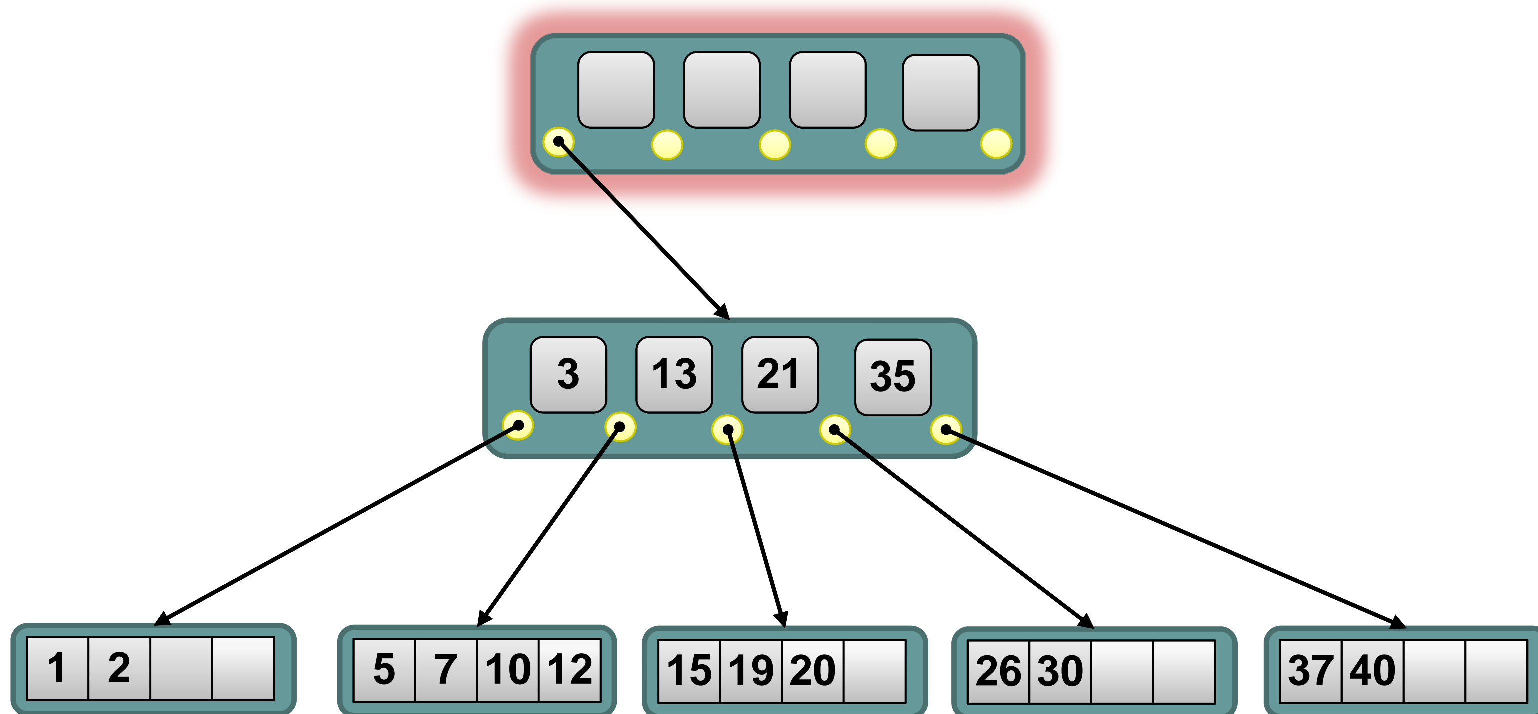
- Al borrar la clave pasa a tener menos claves que las permitidas. Su único hermano (izquierdo) no puede transferir claves.

Borrado – Fusión



- Se fusionan el nodo con su hermano izquierdo, tomando una clave extra del padre. El padre pasa a tener una sola clave, y su hermano derecho no puede transferir.

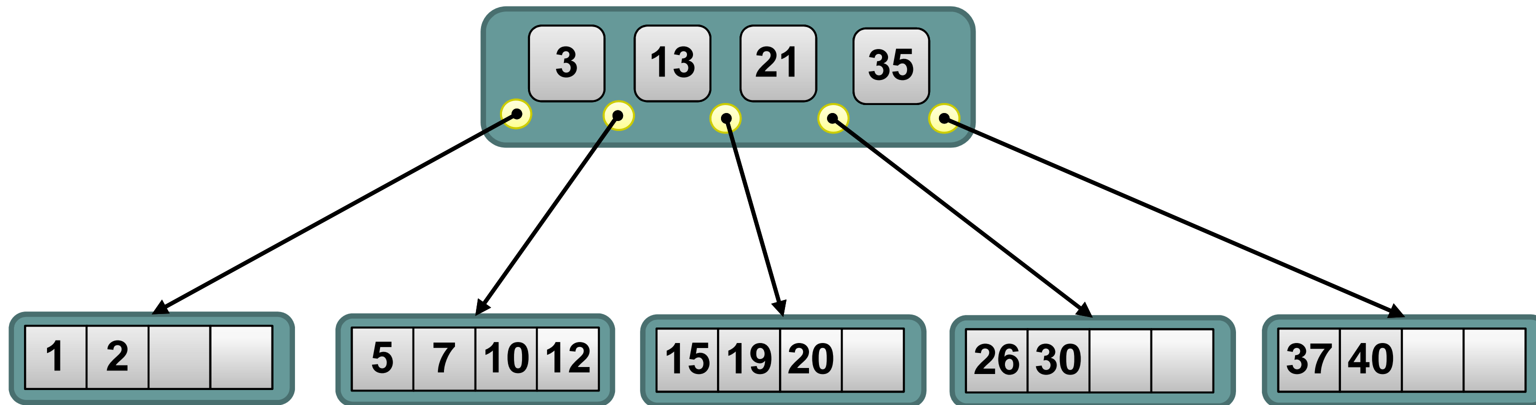
Borrado – Fusión



- Se fusionan los nodos, tomando la única clave del raiz, que queda vacío.

Borrado – Fusión

- Se elimina el nodo raiz.



Usos y Variantes

- **Los árboles B y sus variantes se usan en:**
  - **Gestores de Bases de Datos.**
  - **Sistemas de Ficheros:** NTFS (Windows), HFS+ (Apple), btrfs, Ext4 (Linux)
- **Variantes principales:**
  - **Árboles con prerecorrido**: Antes de insertar se realiza una búsqueda que divide todos los nodos llenos. El número máximo de claves es 2d+1.
  - **Árboles B+**: Sólo las hojas contienen elementos, los nodos internos contienen claves para dirigir la búsqueda (esas claves se encuentran también en los nodos hoja). Los nodos hoja forman una lista doblemente enlazada.
  - **Árboles B***: El número mínimo de claves es 2/3 de la capacidad. Se fusionan 3 nodos en 2, y se dividen 2 nodos en 3.