

Contents

1	Procesamiento Digital de señales.	3
1.1	Definiciones.	3
1.2	Señales basicas de tiempo continuo.	6
1.2.1	Exponencial compleja y senoidal.	6
1.2.2	Función escalón unitario e impulso unitario.	7
2	Sistemas.	8
2.1	Introduccion.	8
2.1.1	Sistemas inversos.	9
2.1.2	Sistemas causales.	9
2.1.3	Estabilidad.	10
2.2	Invariancia en el tiempo.	10
2.2.1	Linearidad.	11
3	Correlación.	12
3.1	Representación de señales en terminos de impulsos.	13
4	Convolución	15
4.1	Respuesta de Sistemas lineales invariantes en el tiempo a exponenciales complejas.	18
5	Transformada de Fourier	20
5.1	Representación de señales periódicas.	20
5.1.1	Transformada de Fourier de algunas funciones interesantes.	21
5.2	Propiedades de la Transformada de Fourier	24
5.2.1	Linearidad de la Transformada de Fourier.	24
5.2.2	Transformada de Fourier de una señal conjugada.	25

5.2.3	Propiedades de Simetría de la transformada de Fourier.	26
5.2.4	Desplazamiento en tiempo y frecuencia.	27
5.2.5	Diferenciación	28
5.2.6	Escalamiento.	28
5.2.7	El Teorema de la convolución.	29
5.2.8	Relación de Parseval.	30
5.3	Transformada de Fourier en dos dimensiones.	31
5.4	Convolución utilizando TF.	35
5.5	Teorema del Muestreo	35
5.5.1	Integración de la señal continua.	42
6	Filtros.	43
6.1	Filtros Pasa bajas.	43
6.2	Filtros Pasa Altas.	44
6.3	Filtro pasa bajas Butterworth.	46
6.4	Filtros de pasa banda.	47
6.5	Filtro de Membrana.	49
6.5.1	Estimador de máxima verosimilitud.	49
6.5.2	Interpretación del filtro de Membrana en el dominio de la Frecuencia.	51
6.5.3	Detección de corrimientos utilizando técnicas de restauración.	52

Chapter 1

Procesamiento Digital de señales.

1.1 Definiciones.

Representaremos a una señal discreta por $x(t)$ la cual puede ser función de una o varias variables. Esta señal discreta resulta de hacer la multiplicación de una señal continua por un tren de pulsos representados por

$$x(t) = f(t) \delta_T(t)$$

donde $f(t)$ es una función continua y $\delta_T(t)$ es un tren de pulsos unitarios. La función $\delta(t)$ es la delta de Dirac la cual toma el valor unitario cuando su argumento es cero.

Podemos decir que una señal es par si es idéntica a su reflexión alrededor del origen, esto es

$$x(-t) = x(t)$$

y que es impar si

$$x(-t) = -x(t)$$

Una característica importante de cualquier señal, es que esta puede ser representada por la suma de una señal par y una señal impar

$$x(t) = \mathcal{P}(x(t)) + \mathcal{I}(x(t))$$

donde la parte par la calculamos

$$\mathcal{P}(x(t)) = \frac{1}{2} [x(t) + x(-t)]$$

y la impar por

$$\mathcal{I}(x(t)) = \frac{1}{2} [x(t) - x(-t)]$$

Ejemplos.

(a) Demostrar que si $x(n)$ es discreta impar entonces

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n) = 0$$

Demostracion: si, $x(n)$ es impar, entonces

$$x(n) = -x(-n)$$

es decir

$$x(n) + x(-n) = 0$$

considerando

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x(n) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) + x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

reordenando

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) &= x(0) + \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \\ &= x(0) + \sum_{n=1}^{\infty} x(-n) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \\ &= x(0) - \sum_{n=1}^{\infty} x(n) + \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \end{aligned}$$

con $x(0) = 0$ y sustituyendo la definición de señal par en la ecuación anterior tenemos :

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \\ \sum_{-\infty}^{\infty} x(n) &= 0 \end{aligned}$$

(b) Comprobar, si $x_1(n)$ es impar y $x_2(n)$ es par, entonces

$$x_1(n) \cdot x_2(n) \implies \text{impar}$$

Comprobacion: Hacemos que

$$z(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$$

y

$$z(-n) = x_1(-n) \cdot x_2(-n)$$

Además, sabemos que

$$x_1(n) = -x_1(-n)$$

y

$$x_2(n) = x_2(-n)$$

sustituyendo las ecuaciones tenemos

$$z(n) = -x_1(-n) \cdot x_2(-n)$$

resulta

$$z(n) = -z(-n)$$

Lo cual implica que $z(n)$ es impar, i.e. $x_1(n) \cdot x_2(n)$ es impar.

(c) Considere que $x(n)$ es una señal con parte par $\mathcal{P}(x(n))$ y parte impar $\mathcal{I}(x(n))$, demostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{P}^2(x(n)) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{I}^2(x(n))$$

Demostracion: Hacemos

$$\mathcal{P}(x(n)) = x_p(n)$$

$$\mathcal{I}(x(n)) = x_i(n)$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_p(n) + x_i(n)]^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_p^2(n) + 2x_p(n)x_i(n) + x_i^2(n)) \end{aligned}$$

sustituyendo el término $x_p(n)x_i(n)$ por $z(n)$ y reordenando

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_p^2(n) + x_i^2(n)) + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(n)$$

Como $z(n)$ es el producto de una señal par y una impar, usamos el resultado del inciso *b)* y, concluimos que $z(n)$ es impar. Ahora, usando el resultado del inciso *a)* sabemos que

$$2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(n) = 0$$

Si sustituimos este resultado en la ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_p^2(n) + x_i^2(n)) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p^2(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_i^2(n) \end{aligned}$$

Una señal es periódica si tiene la propiedad de tener un valor positivo T para el cual

$$x(t) = x(t + T) \quad \forall t$$

en este caso diremos que la señal es periódica con periodo T

1.2 Señales básicas de tiempo continuo.

1.2.1 Exponencial compleja y senoidal.

La señal exponencial de tiempo continuo es de la forma

$$x(t) = Ce^{at}$$

donde C y a son, en general números complejos. Dependiendo de los valores de estos parámetros, la exponencial puede adoptar varias características diferentes. Una clase de exponenciales complejas que nos interesa es

$$x(t) = e^{w_0 t}$$

utilizando la relación de Euler esta señal puede expresarse como

$$x(t) = \cos(w_0 t) + j \operatorname{sen}(w_0 t)$$

Una propiedad importante de esta señal es que es periódica. Para verificar esta propiedad hacemos

$$\begin{aligned} e^{w_0 t} &= e^{w_0(t+T)} \\ e^{w_0 t} &= e^{w_0 t} e^{w_0 T} \end{aligned}$$

para que esta ecuación se cumpla debemos tener que

$$e^{w_0 T} = 1$$

Existen dos posibilidades para que esta condición se cumpla: la primera cuando $w_0 = 0$, la cual es periódica para cualquier valor de T , pero si $w_0 \neq 0$, entonces tenemos que existe un valor T_0 al cual llamamos periodo fundamental y esta dado por la ecuación

$$T_0 = \frac{2\pi}{|w_0|}$$

1.2.2 Función escalón unitario e impulso unitario.

Otra señal de interés es la función escalón unitario la cual esta dada por

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Otra señal bastante útil es la función impulso unitario de tiempo continuo la cual está relacionada con el escalón unitario por la ecuación

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Chapter 2

Sistemas.

2.1 Introduccion.

Un sistema se puede ver como cualquier proceso que produce una transformación de señales. Un sistema tiene una señal de entrada y una señal de salida la cual está relacionada con la entrada a través de la transformación del sistema.

$$y(t) = T[x(t)]$$

donde $x(t)$ es la señal de entrada, $y(t)$ es la señal de salida y $T[\]$ es la transformación del sistema.

Entre los sistemas podemos tener interconexiones serie y paralelo dadas como.

Sistemas con y sin memoria.

Si la salida de un sistema para cada valor de la variable independiente depende solo de la entrada en ese mismo instante de tiempo se dice que el sistema no tiene memoria.

$$y(t) = Rx(t)$$

Un ejemplo de un sistema con memoria es

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^n x(k)$$

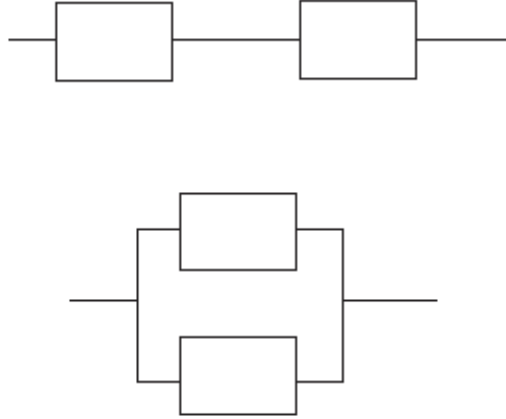


Figure 2.1: Sistemas en serie y en paralelo

2.1.1 Sistemas inversos.

Decimos que un sistema es invertible si dada una transformación T podemos encontrar la transformación T^{-1} tal que:

$$\begin{aligned} y(t) &= T[x(t)] \\ x(t) &= T^{-1}[y(t)] \end{aligned}$$

Un ejemplo de un sistema que no es invertible es $y(t) = 0$.

2.1.2 Sistemas causales.

Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores en el tiempo presente y en el pasado. Estos sistemas también son llamados no anticipativo.

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t - 1) \\ y(t) &= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

2.1.3 Estabilidad.

Un sistema es llamado estable si se produce una salida acotada para una entrada acotada. Una señal es acotada si

$$|x(k)| \leq M < \infty$$

y la señal de salida $y(k) = T[x(k)]$, es acotada si

$$|y(k)| \leq N < \infty$$

Ejemplo. Consideremos la secuencia de los números de Fibonacci donde $x(k) = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$ ó $x(k) = x(k-1) + x(k-2)$. En este caso tenemos un sistema no acotado ya que la sucesión crece indefinidamente para valores de k .

Un ejemplo de señal estable lo tenemos en la sucesión

$$x(n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^2}$$

para esta sucesión podemos ver que

$$x(n) - x(n-1) = \frac{1}{n^2}$$

si tomamos el límite podemos verificar que la sucesión converge en un valor estable

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [x(n) - x(n-1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

2.2 Invariancia en el tiempo.

Para que un sistema sea invariante en el tiempo se debe cumplir que para un desplazamiento en la señal de entrada se produzca el mismo desplazamiento en la señal de salida.

$$T[D^n[x(t)]] = D^n[T[x(t)]]$$

Ejemplo. Considere la señal $y(t) = \text{sen}[x(t)]$

$$\begin{aligned} D^k[x(t)] &= x(t-k) \\ &= \text{sen}[x(t-k)] \\ D^k y(t) &= \text{sen}[x(t-k)] \end{aligned}$$

2.2.1 Linearidad.

La característica principal de los sistemas lineales es

$$T[\alpha x(k) + \beta y(k)] = T[\alpha x(k)] + T[\beta y(k)]$$

esta propiedad es conocida como el principio de superposición.

Ejemplo. Considere el sistema $y(k) = mx(k) + b$. Que valores debe tener el sistema para ser lineal.

Consideremos dos señales $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$\begin{aligned}y_1(k) &= mx_1(t) + b \\y_2(k) &= mx_2(t) + b \\y_1(k) + y_2(k) &= m(x_1(t) + x_2(t)) + 2b\end{aligned}$$

Si aplicamos la transformación a la suma de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ tendremos

$$y_3(k) = m(x_1(t) + x_2(t)) + b$$

note que $y_3(k)$ es diferente de $y_1(k) + y_2(k)$, la única posibilidad es que la constante b sea igual a cero.

Chapter 3

Correlación.

La crosocorrelacion de las señales $x(t)$ y $y(t)$ es la secuencia $r_{xy}(t)$ definida por

$$r_{xy}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) y(n-k)$$
$$r_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(\tau-t) d\tau$$

La función de correlación suministra una medida de la similitud o interdependencia entre las funciones x y y .

Demostrar que la función de correlación y autocorrelación son señales pares, es decir

$$r_{xy}(t) = r_{yx}(-t)$$
$$r_{xx}(t) = r_{xx}(-t)$$

para ello hacemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(\tau-t) d\tau$$

y sustituimos $\hat{\tau} = \tau - t$

$$r_{yx}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\hat{\tau} + t) y(\hat{\tau}) d\hat{\tau}$$

en el caso de la autocorrelación tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(\tau-t) d\tau$$

y sustituimos $\hat{\tau} = \tau - t$

$$r_{xx}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\hat{\tau} + t) x(\hat{\tau}) d\hat{\tau}$$

Es la correlación invariante a translación.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau + a) y(\tau - t) d\tau$$

si sustituimos

$$\hat{\tau} = \tau + a$$

$$\tau = \hat{\tau} - a$$

$$r_{xy}(t - a) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\hat{\tau}) y(\hat{\tau} - (t + a)) d\tau$$

la correlación es invariante a translación. Pero será lineal

$$\begin{aligned} r_{xy}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_1(\tau) + x_2(\tau)] y(\tau + t) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) y(\tau + t) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) y(\tau + t) d\tau \\ &= r_{x_1y} + r_{x_2y} \end{aligned}$$

si es una transformación lineal la correlación.

3.1 Representación de señales en terminos de impulsos.

La función impulso unitario, puede utilizarse para construir una clase amplia de señales. Para ilustrar como funciona consideremos que tenemos una señal discreta dada por $x(n)$. Si queremos ver un parte de la señal en cierto instante de tiempo multiplicamos la señal de entrada por un impulso en el instante que deseamos analizar, así por ejemplo:

$$\begin{aligned} x(-1) \delta(n + 1) &= \begin{cases} x(-1) & \text{si } n=-1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ x(0) \delta(n + 0) &= \begin{cases} x(0) & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ x(1) \delta(n - 1) &= \begin{cases} x(1) & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

por lo tanto la suma de estos términos me da la señal x . Matemáticamente podemos expresar esta suma como

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

esta ecuación es llamada la propiedad de escudriñamiento del impulso unitario. Este es un sistema LIT, comenzaremos probando que se trata de un sistema invariante a translación

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-k_0) \delta(n-k)$$

haciendo $\hat{k} = k - k_0$ tenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\hat{k}) \delta(n - (\hat{k} + k_0)) \\ & \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\hat{k}) \delta((n - k_0) + \hat{k}) \\ & = y(n - k_0) \end{aligned}$$

para probar que se trata de un sistema lineal hacemos

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x_1(k) + x_2(k)] \delta(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) \delta(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_2(k) \delta(n-k) \\ &= y_1(n) + y_2(n) \end{aligned}$$

y para probar si es invariante a translación hacemos

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k-k_0) \delta(n-k)$$

haciendo el cambio de variable $\hat{k} = k - k_0$ tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\hat{k}) \delta(n - (\hat{k} + k_0)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\hat{k}) \delta((n - k_0) - \hat{k}) \\ &= y(n - k_0) \end{aligned}$$

Chapter 4

Convolución

Podemos extender el concepto sustituyendo la función impulso por cualquier otra función, así obtenemos la expresión de la convolución.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

note que también es un sistema LIT. La convolución la podemos representar por $y = x * h$

La convolución cumple con dos leyes; la ley conmutativa y la ley asociativa

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= f_2 * f_1 \\ (f_1 * f_2) * f_3 &= f_1 * (f_2 * f_3) \end{aligned}$$

demostración. Comenzaremos por probar la propiedad conmutativa

$$f_1 * f_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) f_2(n-k)$$

haciendo el cambio de variable $\hat{k} = n - k$ tenemos

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(n - \hat{k}) f_2(\hat{k}) = f_2 * f_1$$

para demostrar la propiedad asociativa hacemos $f_1 * f_2 = g$ y $f_2 * f_3 = h$

$$g * f_3 = f_1 * h$$

puesto que

$$g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) f_2(n-k)$$

se tiene que

$$\begin{aligned} g(n) * f_3(n) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(j) f_3(n-j) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) f_2(j-k) \right] f_3(n-j) \end{aligned}$$

sustituyendo $l = j - k$ y cambiando el orden de las sumatorias

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_2(l) f_3(n - (l+k)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_2(l) f_3((n-k) - l) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) h(n-k) \\ &= f_1 * h \end{aligned}$$

Nota: Una sucesión que nos será especialmente útil para realizar los cálculos de convolución y correlación es la sucesión geométrica

$$s_N = \sum_{n=0}^N a^n = 1 + a + a^2 + \dots + a^N$$

para esta serie podemos ver

$$\begin{aligned} s_N &= 1 + a(1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1}) \\ &= 1 + a s_{N-1} \end{aligned}$$

que pasa si multiplicamos s_N por $(1 - a)$

$$\begin{aligned} (1 - a) s_N &= (1 + a + a^2 + \dots + a^N) - \\ &= (a + a^2 + a^3 \dots + a^{N+1}) \\ &= 1 - a^{N+1} \end{aligned}$$

de lo cual concluimos que

$$s_N = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}$$

Esta serie será convergente en el caso de que $|a| < 1$ y divergente en el caso de que $|a| > 1$. Lo cual lo podemos verificar haciendo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a^N = 0$$

y el valor de convergencia lo podemos calcular con

$$s_N = 1 + a s_{N-1}$$

en el límite $s_N = s_{N-1} = r$

$$\begin{aligned} r &= 1 + ar \\ r(1 - a) &= 1 \\ r &= \frac{1}{1 - a} \end{aligned}$$

En el caso de que $|r| = 1$, la serie converge al valor de

$$\begin{aligned} s_N &= \sum_{n=0}^N 1^n = 1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^N \\ &= N + 1 \end{aligned}$$

y en el caso de $|r| > 1$ la serie diverge

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a^N \neq 0$$

Ejemplo.

Considere una señal $x(n) = \alpha^n$ y un kernel dado por $h(n) = \beta^n$. Calcular la convolución de estas dos señales.

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \beta^{(n-k)} \\ y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \beta^n \beta^{-k} \\ y(n) &= \beta^n \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \\ y(n) &= \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^N}{1 - \frac{\alpha}{\beta}} \end{aligned}$$

si quisieramos calcular la correlación hacemos

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \beta^{(k-n)} \\
 y(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k \beta^{-n} \beta^k \\
 y(n) &= \beta^{-n} \sum_{k=0}^{N-1} (\alpha\beta)^k \\
 y(n) &= \beta^{-n} \frac{1 - (\alpha\beta)^N}{1 - (\alpha\beta)}
 \end{aligned}$$

4.1 Respuesta de Sistemas lineales invariantes en el tiempo a exponenciales complejas.

La importancia de las exponenciales complejas en el estudios de sistemas LTI proviene del hecho, de que la respuesta de un sistema LTI a una entrada exponencial compleja es la misma exponencial compleja modificada solo en amplitud.

$$T[z^n] = H(z)z^n$$

donde el factor complejo de la amplitud $H(z)$ será en general una función de la variable compleja z . Esto lo podemos mostrar haciendo

$$\begin{aligned}
 y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) \\
 y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{(n-k)} \\
 y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^n z^{-k} \\
 y(n) &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k} \\
 y(n) &= H(z)z^n
 \end{aligned}$$

donde

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

hemos demostrado que cualquier exponencial compleja es una función característica de un sistema LIT.

Si la entrada de un sistema LIT de tiempo discreto se presenta como una combinación de exponenciales complejas, esto es, si

$$x(n) = \sum_k a_k z_k^n$$

entonces la salida es

$$y(n) = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

Chapter 5

Transformada de Fourier

5.1 Representación de señales periódicas.

Recordemos que la exponencial compleja $e^{j(2\pi/N)n}$ es periódica con periodo N y existe una familia de exponenciales complejas también con periodo N dadas por

$$\phi_k(n) = e^{jk(2\pi/N)n}$$

todas estas señales tienen frecuencias que son múltiplos de la misma frecuencia fundamental $2\pi/N$. Así cuando $k = 0$ llamaremos a este el componente de CD de la señal, cuando $k = 1$ como armónico de frecuencia fundamental, $k = 2$ segundo armónico y así sucesivamente.

Con esto queremos llegar a hacer la representación de una señal periódica como la combinación de exponenciales complejas, tal que

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \phi_k(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

esta ecuación es conocida como la serie de Fourier de tiempo discreto y los coeficientes a_k como los coeficientes de esta.

Para determinar los coeficientes de la serie de Fourier procedemos

$$\begin{aligned} x(0) &= a_0 \phi_0(0) + a_1 \phi_1(0) + a_2 \phi_2(0) + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}(0) \\ x(1) &= a_0 \phi_0(1) + a_1 \phi_1(1) + a_2 \phi_2(1) + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}(1) \\ x(2) &= a_0 \phi_0(2) + a_1 \phi_1(2) + a_2 \phi_2(2) + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}(2) \\ x(N-1) &= a_0 \phi_0(N-1) + a_1 \phi_1(N-1) + \dots + a_{N-1} \phi_{N-1}(N-1) \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} \phi_0(0) & \phi_1(0) & \cdots & \phi_{N-1}(0) \\ \phi_0(1) & \phi_1(1) & \cdots & \phi_{N-1}(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(N-1) & \phi_1(N-1) & \cdots & \phi_{N-1}(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Tenemos un sistema $\Phi a = x$ para el cual la solución puede ser calculada si encontramos la inversa de la matriz Φ . Pero una alternativa es multiplicar por $e^{-jr(2\pi/N)n}$ ambos lados de la representación en serie de Fourier y sumar para todos los N términos de la serie

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} e^{-jr(2\pi/N)n} \\ \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \end{aligned}$$

la suma interior para n en el lado derecho de la ecuación es cero a menos que $k - r$ sea cero o un múltiplo entero de N . Por tanto si escogemos valores de r sobre el mismo rango de k , tendremos que esta suma es igual a N si $k = r$ y cero de lo contrario, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} Na_r &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} \\ a_r &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jr(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \phi_r^*(n) \end{aligned}$$

En lo general representaremos la transformada de Fourier como

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \phi_r^*(n)$$

5.1.1 Transformada de Fourier de algunas funciones interesantes.

Transformada de una exponencial compleja.

Dado $x(n) = e^{j(\frac{2\pi}{N})k_0n}$ la transformada de fourier esta dada como

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\frac{2\pi}{N})k_0n} e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j(\frac{2\pi}{N})(k_0-k)n} \end{aligned}$$

esta suma tendrá solución N en el caso de que $k = k_0$ y cero en los demas casos. La transformada de Fourier es

$$e^{j(\frac{2\pi}{N})k_0n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(k - k_0)$$

Función seno.

Dada la función seno, podemos hacer la representación de esta función como

$$\text{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right) k_0n = \frac{j}{2} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N})k_0n} - e^{-j(\frac{2\pi}{N})k_0n} \right]$$

dado que tenemos la suma de dos exponenciales complejas, la transformada de Fourier es

$$\text{sen} \left(\frac{2\pi}{N} \right) k_0n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{j}{2} \delta(k - k_0) - \frac{j}{2} \delta(k + k_0)$$

Funcion coseno.

La representación de la función coseno la podemos dar como

$$\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) k_0n = \frac{1}{2} \left[e^{j(\frac{2\pi}{N})k_0n} + e^{-j(\frac{2\pi}{N})k_0n} \right]$$

de manera similar que en la función seno tenemos

$$\cos \left(\frac{2\pi}{N} \right) k_0n \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \delta(k - k_0) + \frac{1}{2} \delta(k + k_0)$$

Función impulso unitario.

Recordemos que la función impulso unitario es

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

la transformada de Fourier para esta la calculamos

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n - n_0) e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \\ &= \frac{1}{N} e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn_0} \end{aligned}$$

podemos comprobar que $\left| e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn_0} \right| = 1$ para cualquier valor que tome k por lo que finalmente la magnitud de la transformada de Fourier es

$$\delta(n - n_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{N}$$

Transformada de Fourier de una constante.

Consideremos una función $x(n) = a$ la transformada de Fourier es

$$\begin{aligned} X(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \\ &= \frac{a}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn} \end{aligned}$$

la sumatoria tendrá la solución N para $k = 0$ y 0 para $k \neq 0$ por lo cual

$$a \xrightarrow{\mathcal{F}} a\delta(k)$$

Transformada de Fourier de una caja.

Consideremos una función $x(n)$ dada por la siguiente expresión

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -d < t < d \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

en este caso resolveremos la transformada de Fourier continua, la cual está dada por la siguiente expresión

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j(\frac{2\pi}{T})kt} dt$$

al sustituir nuestra función obtenemos

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-d}^d e^{-j(\frac{2\pi}{T})kt} dt$$

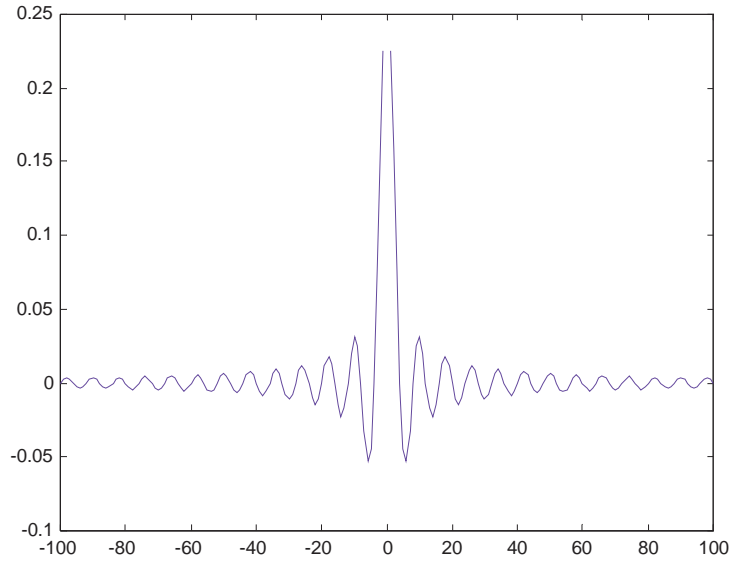


Figure 5.1: Función Sinc

$$a_k = \frac{1}{T} \frac{1}{\left[-j\left(\frac{2\pi}{T}\right)k\right]} e^{-j\left(\frac{2\pi}{T}\right)kt} \Big|_{-d}^d$$

$$a_k = \frac{1}{T} \frac{1}{\left[-j\left(\frac{2\pi}{T}\right)k\right]} (-2j) \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{T} kd \right]$$

$$a_k = \frac{\operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{T} kd \right]}{\pi k}$$

la cual luce como
a esta función se le conoce como Sinc.

5.2 Propiedades de la Transformada de Fourier

5.2.1 Linearidad de la Transformada de Fourier.

Si

$$\begin{aligned}x_1(n) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_1(k) \\x_2(n) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X_2(k)\end{aligned}$$

entonces

$$ax_1(n) + bx_2(n) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aX_1(k) + bX_2(k)$$

prueba

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk}$$

para la suma de $ax_1(n) + bx_2(n)$ queda

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [ax_1(n) + bx_2(n)] e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\&= \frac{a}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} + \frac{b}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\&= aX_1(k) + bX_2(k)\end{aligned}$$

5.2.2 Transformada de Fourier de una señal conjugada.

La definición del conjugado de un número complejo es

$$\begin{aligned}x &= R + jI \\x^* &= R - jI\end{aligned}$$

Mostrar que:

$$x^*(n) \stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X^*(-k)$$

comenzaremos por

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\&= \frac{1}{N} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})n(-k)} \right]^* \\&= X^*(-k)\end{aligned}$$

5.2.3 Propiedades de Simetría de la transformada de Fourier.

Para cualquier secuencia $x(n)$ la parte real la podemos calcular haciendo

$$\mathcal{R}[x(n)] = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)]$$

y la parte imaginaria como

$$\mathcal{I}[x(n)] = \frac{1}{2} [x(n) - x^*(n)]$$

Si $x(n)$ es una secuencia real entonces:

$$\frac{1}{2} [x(n) - x^*(n)] = 0$$

lo que es equivalente a

$$x(n) = x^*(n)$$

Al aplicar la transformada de Fourier tendremos que

$$X(n) = X^*(-n)$$

A partir de esto se observa que la parte real de $X(k)$ es una función par de k y la parte imaginaria de $X(k)$ es una función impar de k . De manera similar, la magnitud de $X(k)$ es una función par y el ángulo de fase es una función impar. Además

$$\mathcal{E}\{x(n)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{R}\{X(n)\}$$

y

$$\mathcal{O}\{x(n)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{I}\{X(n)\}$$

demostración:

En el caso de una señal real y par se cumple que $x(n) = x(-n)$ y que $x(n) = x^*(n)$ por lo tanto en el dominio de Fourier

$$\begin{aligned} X(k) &= X(-k) = \mathcal{R}[X(-k)] + j\mathcal{I}[X(-k)] \\ X(k) &= X^*(-k) = \mathcal{R}[X(-k)] - j\mathcal{I}[X(-k)] \end{aligned}$$

la única posibilidad de que esto sea cierto es que la parte imaginaria sea cero. Así la transformada de Fourier se transforma en

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)$$

a esta ecuación es común que se le conozca como la transformada coseno.

En el caso de una señal real e impar, se cumple que $x(n) = -x(-n)$ $x(n) = x^*(n)$, entonces en el dominio de Fourier

$$\begin{aligned} X(k) &= -X(-k) = -\mathcal{R}[X(-k)] - j\mathcal{I}[X(-k)] \\ X(k) &= X^*(-k) = \mathcal{R}[X(-k)] - j\mathcal{I}[X(-k)] \end{aligned}$$

la única posibilidad de que esto ocurra es que la parte real sea cero. La transformada de Fourier en este caso queda como

$$= j\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x(n) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)$$

5.2.4 Desplazamiento en tiempo y frecuencia.

Si

$$\begin{aligned} x(n) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} X(k) \\ x(n - n_0) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0k} X(k) \end{aligned}$$

demostración

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x(n - n_0) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

haciendo en cambio de variable $\hat{n} = n - n_0$ tenemos

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x(\hat{n}) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n+n_0)k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x(\hat{n}) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0k} \\ &= e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0k} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N x(\hat{n}) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \\ &= e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n_0k} X(k) \end{aligned}$$

Ahora

$$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk_0} x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(k - k_0)$$

demostración

$$= \sum_{k=0}^{N-1} X(k - k_0) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

haciendo el cambio de variable $\hat{k} = k - k_0$ tenemos

$$\begin{aligned} &= \sum_{\hat{k}=0}^{N-1} X(\hat{k}) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(\hat{k}+k_0)} \\ &= \sum_{\hat{k}=0}^{N-1} X(\hat{k}) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n\hat{k}} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk_0} \\ &= e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk_0} x(n) \end{aligned}$$

5.2.5 Diferenciación

Demostrar que

$$x(n) - x(n - 1) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left(1 - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right) X(k)$$

tenemos que

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(k)$$

y

$$x(n - 1) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k} X(k)$$

por superposición demostramos la primera.

5.2.6 Escalamiento.

Comenzaremos por calcular la transformada de Fourier de $x(-n)$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(-n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

hacemos el cambio de variable $m = -n$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{-N+1} x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(-m)k} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{-N+1} x(n) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m(-k)} \\
 &= X(-k)
 \end{aligned}$$

Sea $x(an)$ una señal multiplicada por un entero, calcular la transformada de Fourier para este caso

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(an) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

haciendi $m = an$ tenemos

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(m) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\left(\frac{m}{a}\right)k} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{a}} x(m) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)m\left(\frac{k}{a}\right)} \\
 &= X\left(\frac{k}{a}\right)
 \end{aligned}$$

5.2.7 El Teorema de la convolución.

El teorema de la convolución afirma que si $\mathcal{F}[x(n)] = X(k)$ y $\mathcal{F}[y(n)] = Y(k)$ entonces

$$x(n) * y(n) = NX(k)Y(k)$$

demostración

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} x(m) y(n-m) \right] e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

cambiando el orden de la sumatoria

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[\sum_{n=0}^{N-1} y(n-m) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \right]$$

haciendo $\hat{n} = n - m$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \left[\sum_{n=0}^{N-1} y(\hat{n}) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(\hat{n}+m)k} \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)mk} \left[\sum_{\hat{n}=0}^{N-1} y(\hat{n}) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\hat{n}k} \right] \\
&= N \left[\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)mk} \right] \left[\frac{1}{N} \sum_{\hat{n}=0}^{N-1} y(\hat{n}) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\hat{n}k} \right] \\
&= NX(k)Y(k)
\end{aligned}$$

De manera inversa podemos ver que si $\mathcal{F}[x(n)] = X(k)$ y $\mathcal{F}[y(n)] = Y(k)$ entonces

$$x(n)y(n) = X(k) * Y(k)$$

demostración

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X(l)y(l-k) \right] e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}$$

cambiando el orden de la sumatoria

$$\sum_{l=0}^{N-1} X(l) \left[\sum_{k=0}^{N-1} y(l-k) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \right]$$

haciendo $\hat{k} = l - k$

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{N-1} X(l) \left[\sum_{\hat{k}=0}^{N-1} y(\hat{k}) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n(\hat{k}+l)} \right] \\
&= \left[\sum_{l=0}^{N-1} X(l) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nl} \right] \left[\sum_{\hat{k}=0}^{N-1} y(\hat{k}) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)n\hat{k}} \right] \\
&= x(n)y(n)
\end{aligned}$$

5.2.8 Relación de Parseval.

Si $x(n)$ y $X(k)$ son la señal y su transformada respectivamente, entonces tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = N \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

podemos representar como

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k)X(k)^* \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \right]^* \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk}
 \end{aligned}$$

cambiando el orde en que se hacen las sumatorias

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) \left[\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)x(n) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2
 \end{aligned}$$

5.3 Transformada de Fourier en dos dimensiones.

En dos dimensiones la transformada de Fourier se expresa como

$$X(k, l) = \frac{1}{NM} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} x(n, m)e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(nk+ml)}$$

reorganizando terminos tenemos:

$$X(k, l) = \frac{1}{NM} \sum_{m=0}^{M-1} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x(n, m)e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)nk} \right] e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)ml}$$

de esta expresion podemos ver que la transformada de Fourier en dos dimensiones, es equivalente a realizar la transformada de Fourier en una dirección del arreglo bidimensional y despues realizarlo en la otra dirección.

La trasformada Discreta de Fourier TDF es $O(N^2)$ y existe la Transformada Rapida de Fourier FFT la cual es $O(N \log N)$, para una señal en



Figure 5.2: Señal coseno bidimensional

una sola dimensión. Para el caso de señales en dos dimensiones, la TDF es $O((NM)^2)$ y la FFT es $O(NM \log NM)$, razón por la cual se utiliza la FFT. Sin embargo, la FFT requiere que el tamaño de la señales sea potencia de 2, es decir $N = 2^r$ y $M = 2^s$. Todas la propiedades de la transformada de Fourier son validas para el caso multidimensional y para hacer la demostración solo hay que tener en cuenta que se trata de arreglos bidimensionales.

Transformada de Fourier de una señal bidimensional

Dada la señal $x(n,m) = \cos \left[\frac{2*\pi}{N} (k_0n + l_0m) \right]$ determinar su transformada de Fourier.

Esta señal puede ser representada como la suma de dos exponenciales complejas

$$\begin{aligned} x(n,m) &= \cos \left[\frac{2*\pi}{N} (k_0n + l_0m) \right] \\ &= \frac{1}{2} e^{j \left(\frac{2\pi}{N} \right) (k_0n + l_0m)} + \frac{1}{2} e^{-j \left(\frac{2\pi}{N} \right) (k_0n + l_0m)} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$X(k,l) = \frac{1}{2} \delta(k - k_0, l - l_0) + \frac{1}{2} \delta(k + k_0, l + l_0)$$

En la figura 5.2 podemos ver la señal bidimensional correspondiente $x(n,m) = \cos \left[\frac{2*\pi}{N} (10n + 20m) \right]$ y su transformada de Fourier. Note que en la imagen de la transformada de Fourier aparecen dos picos en las coordenadas $[10, 20]$ y $[118, 108]$, lo cual, corresponde con la deducción anterior.

Ejemplo

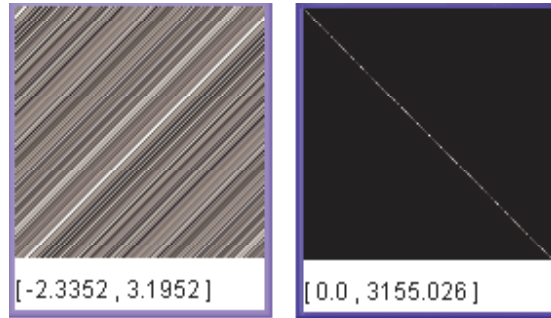


Figure 5.3: Izq) Patron regular en una se\u00f1al con ruido gaussiano. Der) Magnitud de la transformada de Fourier.

El primer rengl\u00f3n de una imagen es creado utilizando una distribuci\u00f3n normal $N(0, 1)$ y los renglones subsiguientes se calculan de acuerdo con la siguiente sucesi\u00f3n $f(n, m) = f(n - 1, m - 1)$ tal que se produce un patron como el mostrado en la figura 5.3 (a la izquierda). Explique a que se debe que la magnitud de la transformada de Fourier esta dominado por una linea recta a 45 grados. La transformada de Fouier del ruido gaussiano la podemos ver en la figura 5.4.

Demostracion:

El primer rengl\u00f3n de imagen fue generado utilizando una distribuci\u00f3n normal, y los renglones subsecuentes utilizando la recursi\u00f3n

$$f(n, m) = f(n - 1, m - 1)$$

la transformda de Fourier para $f(n, m)$ es $F(k, l)$ si aplicamos la propiedad de translaci\u00f3n de la TF, podemos ver:

$$\begin{aligned} f(n, m) &\xrightarrow{\mathcal{F}} F(k, l) \\ f(n - n_0, m - m_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(n_0k + m_0l)} F(k, l) \end{aligned}$$

lo cual nos da como resultado la transformada de fourier $F(x)$, esta multiplicada por una exponencial compleja $e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(n_0k + m_0l)}$ cuyo m\u00e1ximo se localiza sobre la recta $n_0k + m_0l = 0$, dado que $n_0 = m_0 = 1$, tendremos que la pendiente de esta linea recta es 45 grados.

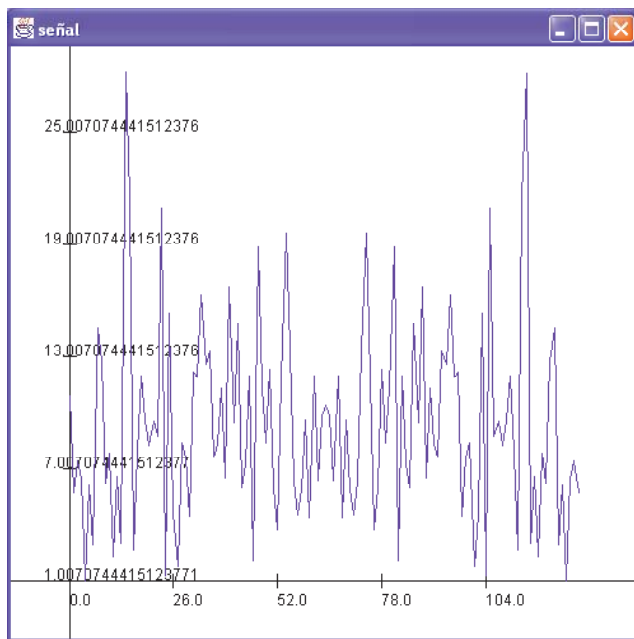


Figure 5.4: Magnitud de la transformada de Fourier de ruido gaussiano.

5.4 Convolución utilizando TF.

En una imagen tenemos que la referencia se encuentra en la esquina superior izquierda. Cuando estamos utilizando la transformada de Fourier debemos recordar que está, considera que las señales tienen periodos N en la dirección de x y M en la dirección de y . Así, una imagen estará representada virtualmente, por un conjunto de copias infinitas es un espacio infinito.

Para realizar una translación de la imagen, una manera es convolucionar la imagen con la función delta de Dirac $\delta(n - n_0, m - m_0)$ donde n_0 y m_0 es el desplazamiento, hay que recordar que la convolución es Lineal e invariante a la translación, por lo que, la convolución de dos señales no se vera afectada cuando hacemos la translación del kernel.

Cuando aplicamos el teorema de la convolución

$$x(n, m) * y(n, m) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(k, l)Y(K, l)$$

debemos tomar en cuenta que si el kernel se desplaza, la transformada de Fourier del kernel estará multiplicada por una exponencial compleja

$$\begin{aligned} x(n - n_0, y - m_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(k, l)e^{-j\frac{2\pi}{NM}(n_0k+m_0l)} \\ x(n, m) * \delta(n - n_0, m - m_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(k, l)e^{-j\frac{2\pi}{NM}(n_0k+m_0l)} \end{aligned}$$

Cuando aplicamos el teorema de la convolución tendremos

$$\begin{aligned} x(n, m) * [y(n, m) * \delta(n - n_0, m - m_0)] &\xrightarrow{\mathcal{F}} X(k, l) \left[Y(k, l)e^{-j\frac{2\pi}{NM}(n_0k+m_0l)} \right] \\ [x(n, m) * \delta(n - n_0, m - m_0)] * y(n, m) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \left[X(k, l)e^{-j\frac{2\pi}{NM}(n_0k+m_0l)} \right] Y(k, l) \\ x(n - n_0, m - m_0) * y(n, n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \left[X(k, l)e^{-j\frac{2\pi}{NM}(n_0k+m_0l)} \right] Y(k, l) \end{aligned}$$

lo cual significa que $x(n - n_0, m - m_0)$, estará desplazada a las coordenadas $[n_0, m_0]$

5.5 Teorema del Muestreo

Consideremos el caso de una señal continua en el tiempo dada por $x(t) = 30\pi t$. Es claro que la señal tiene periodo 15 lo cual indica que si graficamos la señal tendremos 15 ciclos completos en un intervalo de 0 a 2π y la gráfica para esta lucira como la figura 5.5 ($w_b = 30\pi$ o $f = 15$) si esta misma función

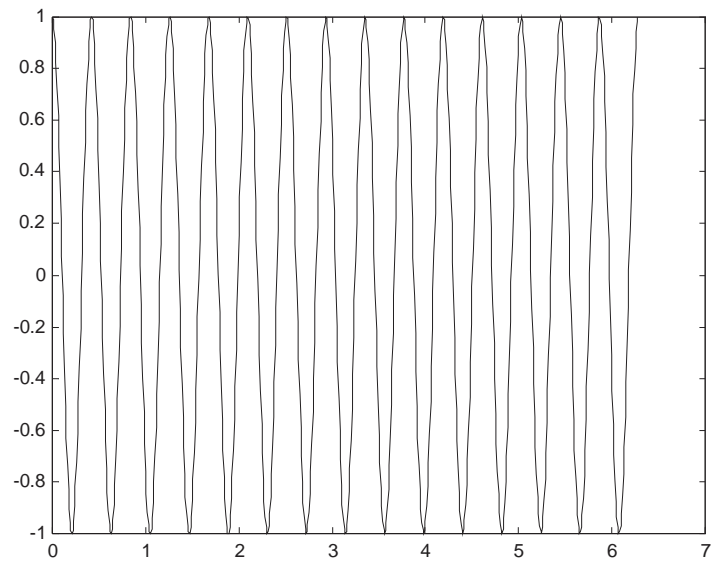


Figure 5.5: función periódica.

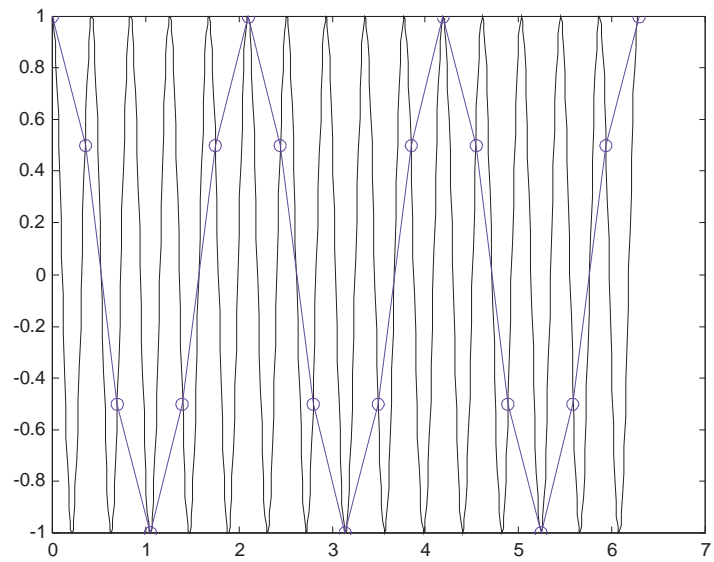


Figure 5.6: señal muestreada a intervalos $\pi/9$

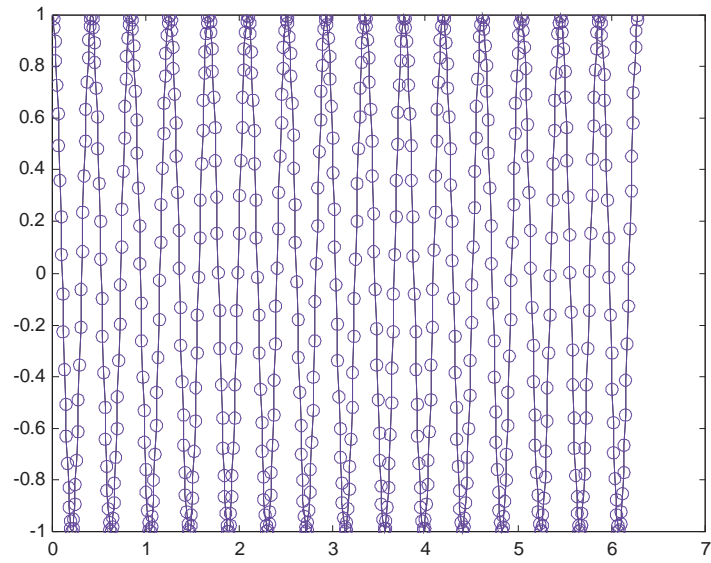


Figure 5.7: función periódica muestrea a intervalos de 0.01

la muestremos con incrementos de $\pi/9$ lucira como la fig 5.6 y esta misma a intervalos de 0.01 lucira como 5.7

¿Cual es el valor de incremento al que debo discretizar mi señal sin perder información?

Comenzaremos por calcular la transformada de Fourier de un tren de pulsos dada por

$$p(t) = \dots + \delta(t + 2T) + \delta(t + T) + \delta(t) + \delta(t - T) + \delta(t - 2T) + \dots$$

la cual podemos representar como

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$. En este caso hablamos de una transformada de Fourier continua por lo cual haremos la transformada de Fourier utilizando la definición continua

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t)e^{-j\omega t} dt$$

sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega kT} \end{aligned}$$

como $T = \frac{2\pi}{\omega}$ entonces el producto $\omega kT = 2\pi k$ lo que da como resultado un tren de pulsos equiespaciados en la frecuencia con $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$.

$$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

Una señal muestreada se calcula como

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$

donde $p(t)$ es un tren de pulsos. Aplicando el teorema de la convolución tenemos que la transformada de Fourier de esta señal es

$$\begin{aligned} X_p(\omega) &= X(\omega) * P(\omega) \\ X_p(\omega) &= X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_s) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \end{aligned}$$

lo cual significa que tendremos copias de nuestra señal $X(\omega)$ repedidas cada $\frac{2\pi}{T}$. ¿Pero que ocurre si el ancho de banda de la señal $X(\omega)$ rebasa el valor $\frac{2\pi}{T}$?

Llamemos ω_s la frecuencia de muestreo la cual esta dada como

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

y ω_m el ancho de banda de la señal $x(t)$, podemos ver que si

$$\omega_s > 2\omega_m$$

podemos reconstruir exactamente la señal continua $x(t)$ a partir de la señal muestreada $x_p(t)$. La frecuencia de muestreo ω_s también se conoce como la frecuencia de Nyquist.

Podemos notar que

$$x_p(n) = x(nT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega nT} d\omega$$

dado que la señal en el dominio de la frecuencia es periodica podemos considerar que

$$x_p(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{(2r-1)\pi/T}^{(2r+1)\pi/T} X(\omega) e^{j\omega nT} d\omega$$

y cada término de la suma puede ser reducido a una integral sobre el rango $-\frac{\pi}{T}$ a $\frac{\pi}{T}$ haciendo el cambio de variable $\omega = \Omega + \frac{2\pi r}{T}$

$$x_p(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} X\left(\Omega + \frac{2\pi r}{T}\right) e^{j\Omega nT} e^{j2\pi r n} d\Omega$$

Si intercambiamos el orden de integración y considerando que $e^{j2\pi rn} = 1$ para cualquier valor de n y r , tenemos que:

$$x_p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} X \left(\Omega + \frac{2\pi r}{T} \right) e^{j\Omega n T} \right] d\Omega$$

haciendo un cambio de variable $\Omega = \frac{\omega}{T}$

$$x_p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X \left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi r}{T} \right) e^{j\omega n} \right] d\omega$$

de esta ecuación tenemos que

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X \left(\frac{\omega}{T} + \frac{2\pi r}{T} \right)$$

o si hacemos $\hat{\omega} = \frac{\omega}{T}$ tenemos

$$X_p(\hat{\omega}T) = \frac{1}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X \left(\hat{\omega} + \frac{2\pi r}{T} \right)$$

Ejemplos.

Aquella frecuencia que de acuerdo con el teorema de muestreo, debe ser excedida por la frecuencia de muestreo se llama razón de Nyquist. Determine la razón de Nyquist para las siguientes señales

a) $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \text{sen}(4000\pi t)$.

La transformada de Fourier para esta señal es

$$x(k) = \delta(0) + \frac{1}{2} [\delta(\omega - 2000\pi) + \delta(\omega + 2000\pi)] + \frac{j}{2} [\delta(\omega - 4000\pi) - \delta(\omega + 4000\pi)]$$

lo cual indica que el espectro de frecuencia tendrá valores en el intervalo $[-4000\pi, 4000\pi]$, o bien que $\omega_b = 4000\pi$. De acuerdo con esto la razón de Nyquist es $\omega_s = 8000\pi$.

b) $x(t) = \frac{\text{sen}(200\pi t)}{\pi t}$. Podemos ver que la antitransformada de Fourier de una caja es

$$\begin{aligned} x(t) &= A \int_{-d}^d e^{j\omega t} d\omega \\ x(t) &= \frac{A}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-d}^d \\ x(t) &= \frac{1}{jt} (2j) \text{sen}[dt] \\ x(t) &= \frac{2A \text{sen}[dt]}{t} \end{aligned}$$

de donde podemos ver que la transformada de Fourier de esta señal es una caja de ancho $d = 200\pi$ y altura $A = \frac{1}{2\pi}$, por lo tanto su ancho de banda será de $\omega_b = 200\pi$ y su razón de Nyquist será $\omega_s = 400\pi$.

5.5.1 Integración de la señal continua.

Ahora que hacemos para recuperar la señal continua a partir de la señal muestreada. Puesto que la señal $X_p(\omega)$ solo esta definida en el rango $[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}]$, calcularemos la antitrasformada en estos límites, además $X_p(\omega T) = \frac{1}{T}X(\omega)$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} T X_p(\omega T) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\omega nT} \right] e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \left[\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{+\frac{\pi}{T}} e^{j\omega(t-nT)} d\omega \right] \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-nT)}{\left(\frac{\pi}{T}\right)(t-nT)}
 \end{aligned}$$

Chapter 6

Filtros.

6.1 Filtros Pasa bajas.

La idea de un filtro es permitir el paso de solamente un cierto ancho de banda de un espectro de frecuencias. En el caso de un filtro pasa bajas la frecuencias que este dejará pasar son aquellas que se encuentran cerca de la frecuencia cero o componente de C.D.

El filtro pasa bajas más simple es $h(n) = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ consideremos una señal dada por $x(n) = [1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1]$ al realizar la convolución de esta señal con el kernel tenemos

$$\begin{aligned} z_1(n) &= x(n) * h(n) \\ &= [1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1] * [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ &= [1, 1, 1, 1.5, 2, 2, 1.5, 1, 1, 1] \end{aligned}$$

si volvemos a convolucionar con el mismos kernel tenemos

$$z_2(n) = [1, 1, 1, 1.25, 1.75, 1.75, 1.25, 1, 1, 1]$$

el aplicar sucesivamente el filtrado pasabajas dará lugar a una señal plana. En lugar de convolucionar varias veces la señal $x(n)$ con el kernel $h(n)$ resulta más practico hacer la convolución del kernel consigo mismo dando lugar a

$$\begin{aligned} &1,1 \\ &1,2,1 \\ &1,3,3,1 \\ &1,4,6,4,1 \end{aligned}$$

Pero veamos la transformada de Fourier del kernel propuesto para ser filtro pasabajas.

$$\begin{aligned}
 H(k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N h(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\
 &= \frac{1}{N} \left[1 \times e^{-j(\frac{2\pi}{N})0k} + 1 \times e^{-j(\frac{2\pi}{N})1k} \right] \\
 &= \frac{1}{N} \left[1 + e^{-j(\frac{2\pi}{N})k} \right]
 \end{aligned}$$

la magnitud de este filtro es

$$\begin{aligned}
 |H(k)| &= \frac{1}{N} \sqrt{\left(1 + \cos \frac{2\pi k}{N}\right)^2 + \left(\text{sen} \frac{2\pi k}{N}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{N} \sqrt{1 + 2 \cos \frac{2\pi k}{N} + \cos^2 \frac{2\pi k}{N} + \text{sen}^2 \frac{2\pi k}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \sqrt{2 + 2 \cos \frac{2\pi k}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \cos \frac{\pi k}{N}
 \end{aligned}$$

note que esta función tiene un máximo en cero y un mínimo en N , razón por la cual, deja pasar las bajas frecuencias y atenúa las altas frecuencias. En la figura podemos ver el comportamiento del filtro pasa bajas en el dominio de la frecuencia.

6.2 Filtros Pasa Altas.

El filtro pasa bajas más simple es $h(n) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ consideremos una señal dada por $x(n) = [1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1]$ al realizar la convolución de esta señal con el kernel tenemos

$$\begin{aligned}
 z_1(n) &= x(n) * h(n) \\
 &= [1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1] * [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\
 &= [1, 0, 0, -0.5, 0, 0, 0.5, 0, 0, 0]
 \end{aligned}$$

El aplicar sucesivamente el filtrado pasabajas dará lugar a una señal plana. En lugar de convolucionar varias veces la señal $x(n)$ con el kernel

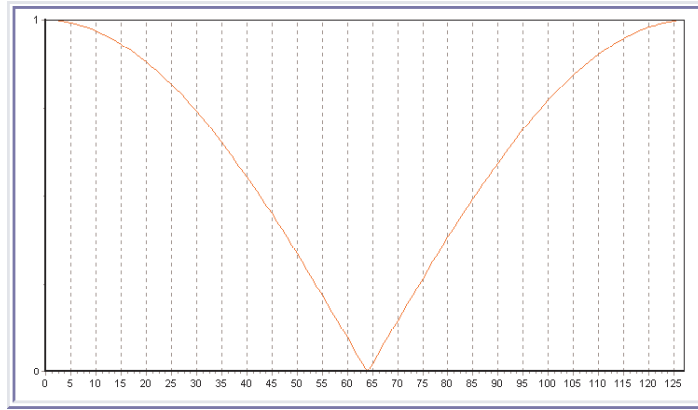


Figure 6.1:

$h(n)$ resulta más práctico hacer la convolución del kernel consigo mismo dando lugar a

$$\begin{aligned} & -1,+1 \\ & +1,-2,+1 \\ & -1,+3,-3,+1 \\ & +1,-4,+6,-4,+1 \end{aligned}$$

Pero veamos la transformada de Fourier del kernel propuesto para ser filtro pasa altas.

$$\begin{aligned} H(k) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N h(n) e^{-j(\frac{2\pi}{N})nk} \\ &= \frac{1}{N} \left[1 \times e^{-j(\frac{2\pi}{N})0k} - 1 \times e^{-j(\frac{2\pi}{N})1k} \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[1 - e^{-j(\frac{2\pi}{N})k} \right] \end{aligned}$$

la magnitud de este filtro es

$$\begin{aligned} |H(k)| &= \frac{1}{N} \sqrt{\left(1 - \cos \frac{2\pi k}{N}\right)^2 + \left(\text{sen} \frac{2\pi k}{N}\right)^2} \\ &= \frac{1}{N} \sqrt{1 - 2 \cos \frac{2\pi k}{N} + \cos^2 \frac{2\pi k}{N} + \text{sen}^2 \frac{2\pi k}{N}} \end{aligned}$$

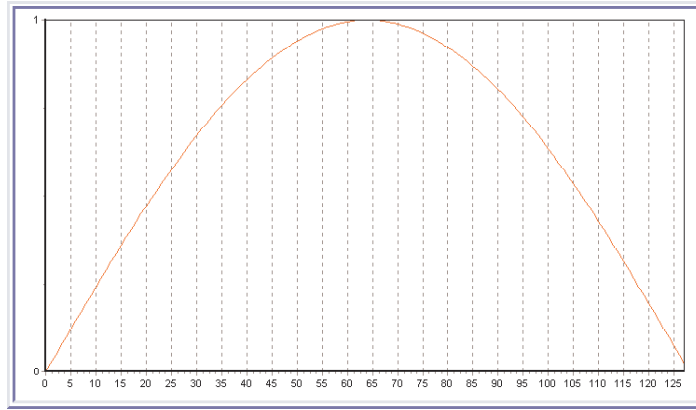


Figure 6.2:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N} \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi k}{N}} \\
 &= \frac{1}{N} \operatorname{sen} \frac{\pi k}{N}
 \end{aligned}$$

note que esta función tiene un máximo en $\frac{N}{2}$ y un mínimo en 0, razón por la cual, deja pasar las altas frecuencias y atenúa las bajas frecuencias. En la figura podemos ver el comportamiento del filtro pasa bajas en el dominio de la frecuencia.

6.3 Filtro pasa bajas Butterworth.

La magnitud al cuadrado de la respuesta de un filtro Butterworth esta dada por la expresión

$$|H(k)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi k}{N}\right)^{2n}}$$

Note que $|H(0)|^2 = 1$ y que $\left|H\left(\frac{N}{2\pi}\right)\right|^2 = 0.5$, lo cual le da su característica de ser un filtro pasa bajas, pero adicionalmente este filtro tiene otro parámetro de control que es el exponente n al cual esta elevado la frecuencia. Si cambiamos este valor tendremos que la ventana del filtro se modifica tal como se observa en la figura.

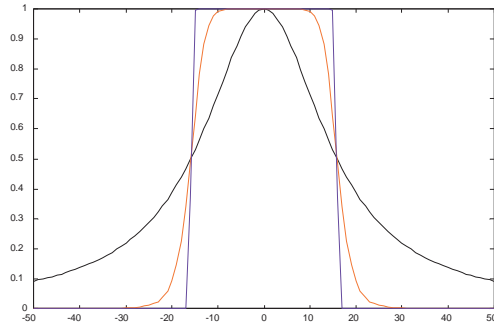


Figure 6.3:

Podemos notar que para valores bajos de n la ventana es suave y para valores grandes tiende a una ventana cuadrada.

6.4 Filtros de pasa banda.

La ecuación de una función gaussiana g la podemos representar por:

$$g(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

y podemos demostrar que la transformada de fourier es otra gaussiana G dada como

$$g(\mu, \sigma_t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(\mu, \sigma_\omega)$$

y que $\sigma_t \sigma_\omega \geq K$. Esta expresión es la formulación del principio de incertidumbre y el caso de una gaussiana se tiene la igualdad. El principio de incertidumbre establece que no podemos tener definición simultaneamente en el dominio de la frecuencia y del tiempo.

Esta función puede ser utilizada como filtro pasa bajas cuando $\mu = 0$, pero con valores diferentes cambiaremos la banda de la señal que queremos filtrar. Así por ejemplo para filtrar una señal condineraremos que la gaussiana tiene una media cero y que aplicaremos una translación en el tiempo y/o en la frecuencia de la señal dada por μ

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2}}$$

si queremos hacer el filtrado en una frecuencia $w_k = \frac{2\pi}{N}k$ simplemente situamos una gaussiana en $G(k - \mu)$ y otra en $G(k + \mu)$ la transformada de fourier de estas será

$$\begin{aligned} G(k) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} g(n) \\ \frac{1}{2}G(k - \mu) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}g(n)e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n} \\ \frac{1}{2}G(k + \mu) &\stackrel{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}g(n)e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n} \end{aligned}$$

el filtro en la frecuencia es la suma de $G(k - \mu)$ y $G(k + \mu)$ por lo que el filtro de convolución es la suma de estos dos

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \frac{1}{2}g(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n + j\text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n \right] \\ f_2(n) &= \frac{1}{2}g(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n - j\text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n \right] \\ f_1(n) + f_2(n) &= g(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n \end{aligned}$$

Pero que ocurre si en lugar de colocar un filtro en $\frac{1}{2}G(k - \mu)$ y otro en $\frac{1}{2}G(k + \mu)$, pusieramos uno solo en $G(k - \mu)$

$$f(n) = g(n) \left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n + j\text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n \right]$$

note que la parte real es equivalente a la encontrada anteriormente, pero además tenemos una parte compleja. El hecho de tener solamente un filtro G en el dominio de la frecuencia, nos da más información acerca de la banda que andamos buscando

$$\begin{aligned} f_R(n) &= g(n) \cos\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n \\ f_I(n) &= g(n) \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)\mu n \end{aligned}$$

a este tipo de filtro se le conoce como filtro de Gabor. La magnitud del filtro nos dará los puntos de la señal donde la frecuencia para la cual entonamos el filtro produce esa señal, siendo mas alta en los puntos de dicha frecuencia.

6.5 Filtro de Membrana.

En esta sección describiremos la aplicación de la regularización al cálculo de un filtro de membrana. La regularización es una técnica de adaptable de filtrado de señales que permite estimar componentes de baja frecuencia. Abordaremos el problema desde un punto de vista estadístico, para ello, calcularemos primero el estimador de máxima verosimilitud, agregaremos información a priori y finalmente con regla de Bayes calcularemos el filtro.

6.5.1 Estimador de máxima verosimilitud.

Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud f , dado un conjunto de observaciones g , suponemos que estos tienen una distribución de probabilidad normal con varianza $\sigma^2 = 1/2$, la cual se expresa como:

$$p(f_i|g_i) = \frac{1}{C_1} e^{-(f_i - g_i)^2}$$

considerando que los datos son generados de manera independiente tenemos que la distribución de probabilidades conjunta es

$$p(f|g) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{C_1} e^{-(f_i - g_i)^2}$$

Note que la probabilidad conjunta es máxima cuando $g_i = f_i$. Queremos calcular una señal suave, por lo que, nuestra información a priori será

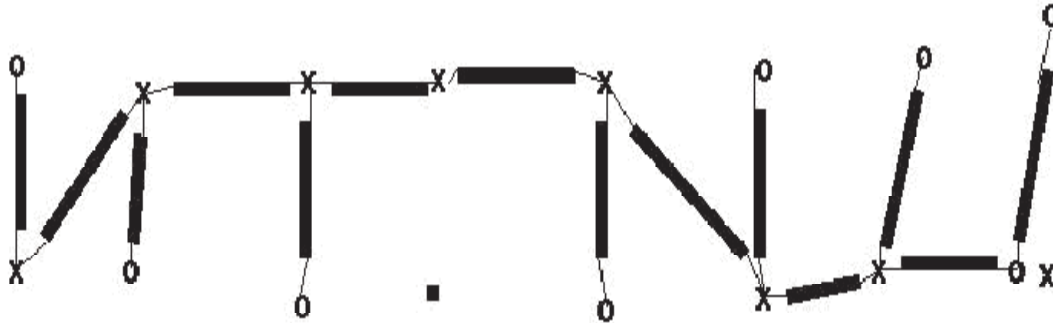
$$p(f) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{C_2} e^{-\lambda \nabla^2 f_i} = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{C_2} e^{-\lambda (f_i - f_{i-1})^2}$$

aplicando la regla de Bayes, encontramos la expresión para la probabilidad a posteriori dada por:

$$p(g|f) = \frac{p(f|g) * p(f)}{p(g)} \tag{6.1}$$

$$p(g|f) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{C} e^{-[(f_i - g_i)^2 + \lambda (f_i - f_{i-1})^2]}$$

$$p(g|f) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{C} e^{-U(f)}$$



- o** Valores observados
- x** Valores a estimar

Figure 6.4:

La ecuación 6.1 es la distribución de probabilidad a posteriori, el mínimo de esta función, lo encontramos cuando la función de energía $U(f)$ es mínima. Nuestro problema lo traducimos en calcular el mínimo de la siguiente función:

$$U(f) = \sum_{i=0}^{N-1} [(f_i - g_i)^2 + \lambda (f_i - f_{i-1})^2]$$

la cual representa la energía potencial almacenada en un sistema de resortes acoplados, tal como se muestra en la figura.

Para calcular el valor de f que minimiza la función $U(f)$, hacemos $\frac{\partial U(f)}{\partial f_i} = 0$

$$\frac{\partial U(f)}{\partial f_i} = 2(f_i - g_i) + 2\lambda(f_i - f_{i-1}) - 2\lambda(f_{i+1} - f_i) = 0 \quad (6.2)$$

6.5.3 Detección de corrimientos utilizando técnicas de restauración.

Dadas dos imágenes f' y f , la delta de Dirac δ y el operador de corrimiento S_d podemos decir:

$$f' = S_d f = S_d f * \delta = f * S_d \delta = f * \delta_d$$

lo cual indica que si realizamos convolución con un impulso desplazado, tendremos una imagen desplazada a un nuevo punto de coordenadas dado por d . Aplicando transformada de Fourier podemos intentar calcular el valor de desplazamiento haciendo

$$\begin{aligned} f'(n) &= f * \delta_d(n) \\ F'(k) &= F(k) e^{j(\frac{2\pi}{N})kd} \end{aligned}$$

de esta expresión podemos despejar el valor de d pero si un valor de $F(k) = 0$, no tenemos manera de estimar el valor del mismo.

En su lugar utilizaremos técnicas de Regularización, para ello, minimizamos la función

$$\begin{aligned} &|f' - f * g|^2 \\ &\text{sueto a } |l * g|^2 \end{aligned}$$

donde $f'(n)$ es la imagen desplazada, $f(n)$ es la imagen origen, $l(n)$ es un operador lineal que escogeremos de la mejor manera para facilitar la solución y $g(n)$ es la función impulso que intentamos encontrar. Para nuestro cálculo procedemos

$$\begin{aligned} U(g) &= \sum_{n=0}^{N-1} [f'(n) - f * g(n)]^2 + \beta \sum_{n=0}^{N-1} |l * g(n)|^2 \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[f'(n) - \sum_{i=0}^{N-1} f(n-i)g(i) \right]^2 + \beta \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} l(n-i)g(i) \right]^2 \end{aligned}$$

Para encontrar el valor de g que minimiza esta expresión hacemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(g)}{\partial g(i)} &= -2 \sum_{n=0}^{N-1} \left[f'(n) - \sum_{i=0}^{N-1} f(n-i) * g(i) \right] f(n-i) \\ &\quad + 2\beta \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} l(n-i) * g(i) \right] l(n-i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

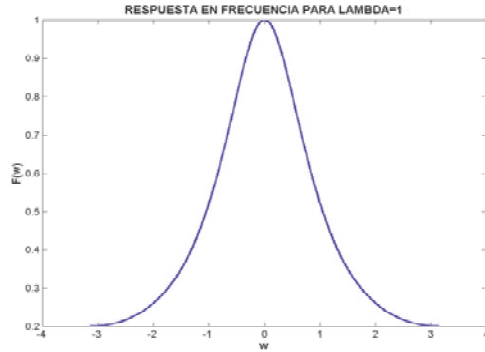


Figure 6.5: Filtro de Membrana con lambda 1

reorganizado términos tenemos

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} f(n-i) * g(i) \right] f(n-i) + \beta \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{i=0}^{N-1} l(n-i) * g(i) \right] l(n-i) = \sum_{n=0}^{N-1} f'(n) f(n-i)$$

$$[f * f^r + \beta l * l^r] * g(n) + = f' * f^r(n)$$

Al aplicar transformada de Fourier tenemos:

$$G(k) = \frac{[F'(k)]^* F(k)}{[F(k)]^* F(k) + \beta [L(k)]^* L(k)}$$

$$G(k) = \frac{[F'(k)]^* F(k)}{|F(k)|^2 + \beta |L(k)|^2}$$

al sacar la antitrasformada de Fourier calculamos la función impultos $g(n)$.

Bibliografía.

- Digital Image Processing. Concepts, Algorithms and Scientific Application. Jahne, B. Berlin Heidelberg: Springer-Verlang
- Robot Vision. Berthold Horn. MIT Press.
- Algorithms for Image Processing and Computer Vision. James R. Parker.

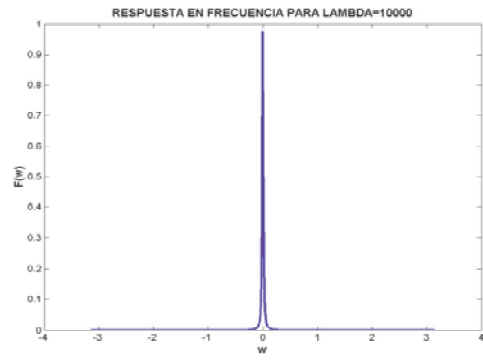


Figure 6.6: Filtro de Membrana con $\lambda = 1000$