

# 6

## Vista tridimensional

El proceso de vista tridimensional es más complejo que el de vista bidimensional. En el caso bidimensional, basta especificar una ventana en el mundo bidimensional y un área de vista en la superficie de la vista bidimensional. En teoría, los objetos en el mundo se recortan con respecto a la ventana y luego se transforman al área de vista para la presentación. La complejidad adicional de la vista tridimensional es ocasionada en parte por la otra dimensión y en parte por el hecho de que los dispositivos de presentación son bidimensionales. Aunque a primera vista la vista tridimensional puede parecer abrumadora, deja de serlo cuando se le considera como una serie de pasos fáciles de comprender, para muchos de los cuales nos hemos preparado en capítulos anteriores. Por lo tanto, comenzaremos con un resumen del proceso de vista tridimensional que lo guiará por este capítulo.

### 6.1 La cámara sintética y los pasos en la vista tridimensional

Una metáfora útil para la creación de escenas tridimensionales es el concepto de la **cámara sintética**, que se ilustra en la figura 6.1. Imagine que podemos mover la cámara a cualquier posición, orientarla como queramos y, con un disparo del obturador, crear una imagen bidimensional de un objeto tridimensional, la lancha en este caso. Si lo deseamos, la cámara se puede convertir en una cámara cinematográfica, lo que nos permite crear una secuencia animada que muestre el objeto en diversas orientaciones y tamaños. Por supuesto, la cámara no es más

que un programa de computación que produce una imagen en la pantalla y el objeto es una base de datos tridimensionales que comprende una colección de puntos, líneas y superficies. En la figura 6.1 también se muestra que la cámara y el objeto tridimensional tienen su propio sistema de coordenadas:  $u, v, n$  para la cámara y  $x, y, z$  para el objeto. Más adelante en este capítulo analizaremos la importancia de estos sistemas de coordenadas. Por el momento sólo mencionaremos que ofrecen una importante independencia de la representación.

Aunque la cámara sintética es un concepto útil, se requiere más que presionar un botón para producir una imagen. La creación de nuestra "fotografía" se lleva a cabo en varias etapas que describimos a continuación.

- *Especificación del tipo de proyección.* La diferencia entre los objetos tridimensionales y las pantallas bidimensionales se resuelve con la introducción de **proyecciones**, que transforman objetos tridimensionales a un plano de proyección bidimensional. Gran parte de este capítulo se dedica a las proyecciones que son, cuáles son sus fundamentos matemáticos y cómo se usan en un paquete de subrutinas gráficas actual, PHIGS [ANSI88]. Nos centraremos en dos de las proyecciones más importantes: la de **perspectiva** y la **ortográfica paralela**. En el capítulo 7 se analiza con mayor detalle la utilización de proyecciones.

- *Especificación de parámetros de visualización.* Una vez que se ha determinado el tipo de proyección que se desea, es necesario especificar las condiciones

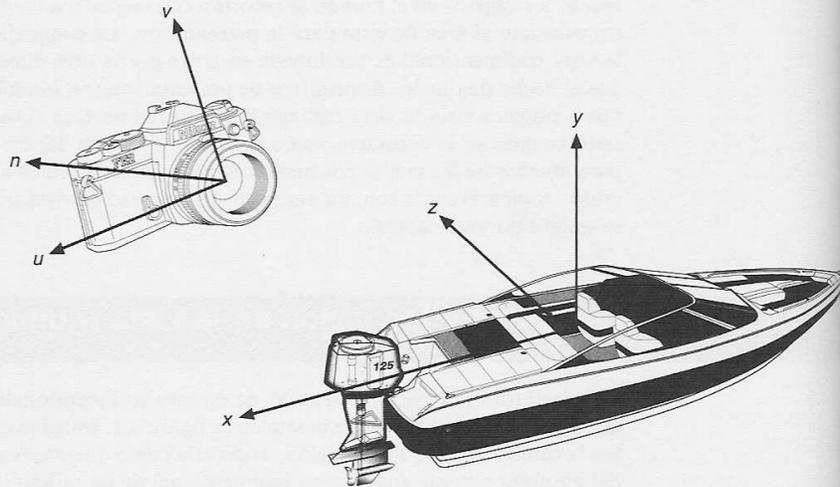


Figura 6.1 Cámara sintética que fotografía un objeto tridimensional.

en las cuales queremos ver el conjunto de datos tridimensionales del mundo real o la escena que se generará. Con base en las coordenadas de mundo del conjunto de datos, esta información incluye la posición del ojo del observador y la ubicación del plano de observación, o sea, la superficie donde se presentará la proyección. Usaremos dos sistemas de coordenadas, el de la pantalla y otro que llamaremos **sistema de coordenadas del ojo** o de **vista**. Variando alguno de estos parámetros podemos obtener cualquier representación de la escena, incluyendo la observación de su interior cuando esto tenga sentido.

- *Recorte en tres dimensiones.* Así como debemos confinar la presentación de una escena bidimensional a las fronteras de la ventana especificada, también hay que eliminar de una escena tridimensional las partes que no sean candidatos para la presentación final. De hecho, podemos ignorar las partes de la escena que están detrás de nosotros o que se encuentran demasiado lejos para ser claramente visibles. Para esto es necesario recortar con respecto a un volumen de vista, un proceso mucho más complejo que los representados por los algoritmos estudiados hasta ahora. Debido a la gran variedad de los volúmenes de vista posibles, dedicaremos parte de nuestro estudio a la definición de un **volumen de vista** canónico, con el cual podamos aplicar de manera eficaz un algoritmo de recorte estandarizado.

- *Proyección y presentación.* Por último, el contenido de la proyección del volumen de vista sobre el plano de proyección, llamado **ventana**, se transforma (se establece la correspondencia) al área de vista para la presentación.

En la figura 6.2 se ilustran los pasos principales de este modelo conceptual del proceso de visualización tridimensional; este modelo es el que se presenta a los usuarios de muchos paquetes de subrutinas gráficas tridimensionales. Como sucede en la vista bidimensional, se pueden usar diversas estrategias para implantar el proceso de vista. Las estrategias no tienen que ser idénticas al modelo conceptual, siempre y cuando los resultados sean los definidos por el modelo. En la sección 6.6 se describe una estrategia de implantación típica para los dibujos de alambrado. Para los sistemas gráficos que llevan a cabo la determinación de superficies visibles y sombreado, se emplea un ducto distinto, analizado en el capítulo 14.

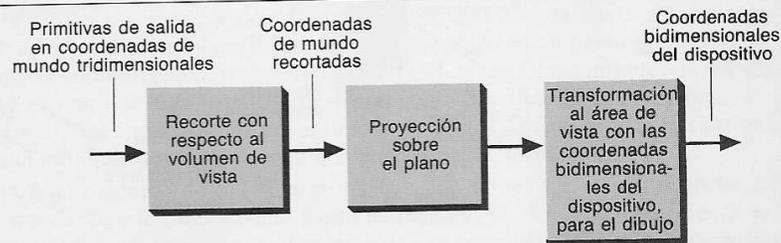


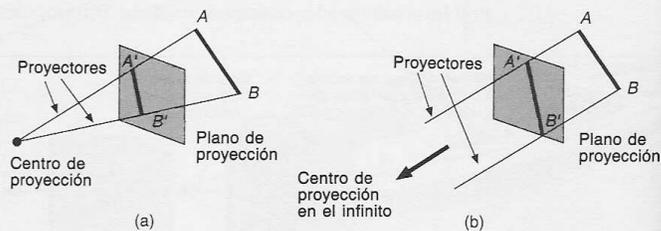
Figura 6.2 Modelo conceptual del proceso de vista tridimensional.

## 6.2 Proyecciones

En términos generales, las proyecciones transforman puntos en un sistema de coordenadas de dimensión  $n$  a puntos en un sistema de coordenadas con dimensión menor que  $n$ . De hecho, durante mucho tiempo se ha usado la graficación por computador para estudiar objetos  $n$ -dimensionales por medio de su proyección sobre dos dimensiones [NOLL67]. Aquí nos limitaremos a la proyección de tres dimensiones a dos. La proyección de objetos tridimensionales es definida por rayos de proyección rectos, llamados **proyectores**, que emanan de un **centro de proyección** para formar la proyección. Por lo general, el centro de proyección se encuentra a una distancia finita del plano de proyección. Sin embargo, en algunos tipos de proyecciones es conveniente pensar en función de un centro de proyección que tienda a estar infinitamente lejos; este concepto se examinará con mayor detalle en la sección 6.2.1. En la figura 6.3 se presentan dos proyecciones diferentes de la misma línea. Afortunadamente, la proyección de una línea es en sí una línea, de manera que sólo hay que proyectar los puntos extremos.

La clase de proyecciones que trataremos aquí se conoce como **proyecciones geométricas planas**, ya que la proyección es sobre un plano y no sobre una superficie curva y porque usa proyectores rectos y no curvos. Varias proyecciones cartográficas son no planas o no geométricas.

Las proyecciones geométricas planas, que a partir de ahora llamaremos simplemente **proyecciones**, se pueden dividir en dos clases básicas: **de perspectiva** y **paralelas**. La diferencia se debe a la relación entre el centro de proyección y el plano de proyección. Si la distancia entre uno y otro es finita, la proyección es de perspectiva; conforme se aleja el centro de proyección, los proyectores que pasan por un objeto tienden cada vez más a ser paralelos. En la figura 6.3 se



**Figura 6.3** Dos proyecciones diferentes de la misma línea. (a) Línea  $AB$  y su proyección de perspectiva  $A'B'$ . (b) Línea  $AB$  y su proyección paralela  $A'B'$ . Los proyectores  $AA'$  y  $BB'$  son paralelos.

ilustran los dos casos. La proyección paralela recibe ese nombre porque los proyectores son paralelos si el centro de proyección se encuentra a una distancia infinita. Al definir una proyección de perspectiva se especifica explícitamente su **centro de proyección**; en el caso de una proyección paralela, se indica su **dirección de proyección**. El centro de proyección es un punto, por lo cual tiene coordenadas homogéneas de la forma  $(x, y, z, 1)$ . Como la dirección de proyección es un vector (es decir, la diferencia entre dos puntos), lo podemos calcular restando los dos puntos  $d = (x, y, z, 1) - (x', y', z', 1) = (a, b, c, 0)$ . Por lo tanto, las **direcciones** y los **puntos en el infinito** tienen una correspondencia natural. En el límite, una proyección de perspectiva cuyo centro de proyección tienda a un punto en el infinito se convierte en una proyección paralela.

El efecto visual de una proyección de perspectiva es similar al de los sistemas fotográficos y al del sistema visual humano y se conoce como **reducción frontal de perspectiva**. El tamaño de la proyección de perspectiva de un objeto varía inversamente con la distancia entre el objeto y el centro de proyección. Por lo tanto, aunque la proyección de perspectiva de los objetos tiende a parecer realista, no es muy útil para registrar la forma y las medidas exactas de los objetos; no se pueden tomar las distancias de la proyección, los ángulos sólo se conservan en las caras de los objetos paralelos al plano de proyección y por lo general las líneas paralelas no se proyectan como tales.

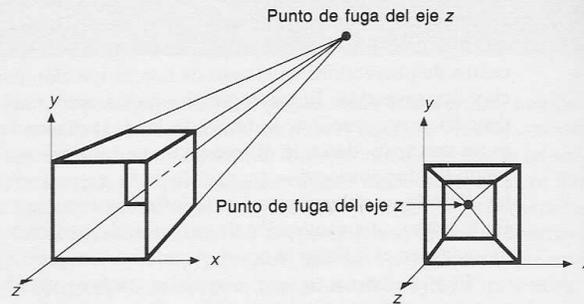
La proyección paralela es una vista menos realista porque no existe la reducción frontal de perspectiva, aunque pueden existir diversas reducciones frontales constantes sobre cada eje. La proyección se puede usar para mediciones exactas, y las líneas paralelas permanecen como tales. Como sucede en la proyección de perspectiva, los ángulos únicamente se conservan en las caras de los objetos paralelos al plano de proyección.

Los distintos tipos de proyecciones paralelas y de perspectiva se analizan e ilustran con detalle en el exhaustivo artículo escrito por Carlbom y Paciorek [CARL78]. En las secciones 6.2.1 y 6.2.2 resumimos las definiciones y características básicas de las proyecciones de uso más común; después, en la sección 6.3, pasamos a la forma como se especifican las proyecciones en PHIGS.

### 6.2.1 Proyecciones de perspectiva

Las proyecciones de perspectiva de cualquier conjunto de líneas paralelas que no sean paralelas al plano de conversión convergen en un **punto de fuga**. En el espacio tridimensional, las líneas paralelas sólo se unen en el infinito, de manera que el punto de fuga se puede considerar como la proyección de un punto en el infinito. Por supuesto, hay una infinidad de puntos de fuga, uno para cada una de la infinidad de direcciones en que puede orientarse una línea.

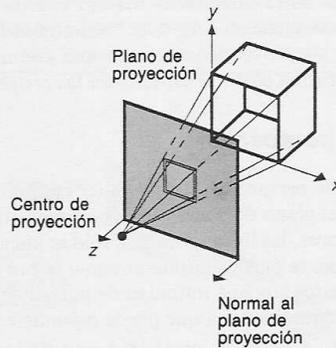
Si el conjunto de líneas es paralelo a uno de los tres ejes principales, el punto de fuga se conoce como **punto de fuga de eje**. A lo sumo hay tres de estos puntos, correspondientes al número de ejes principales cortados por el plano de proyección. Por ejemplo, si el plano de proyección sólo corta el eje  $z$  (y por consiguiente es normal a él), sólo el eje  $z$  tendrá un punto de fuga principal, ya



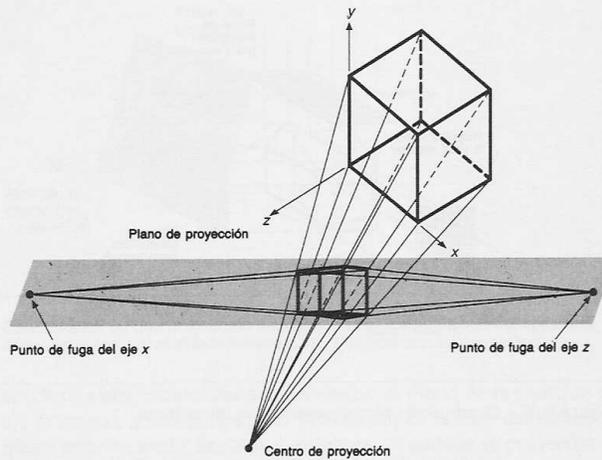
**Figura 6.4** Proyecciones de perspectiva de un punto de un cubo sobre un plano que corta el eje  $z$ , mostrando el punto de fuga de las líneas perpendiculares al plano de proyección.

que las líneas paralelas a los ejes  $y$  o  $x$  también serán paralelas al plano de proyección y no tendrán puntos de fuga.

Las proyecciones de perspectiva se clasifican de acuerdo con el número de puntos de fuga principales y por ende con respecto al número de ejes que corta el plano de proyección. En la figura 6.4 se muestran dos proyecciones de perspectiva de un punto para un cubo. Es obvio que hay más proyecciones de un punto, ya que las líneas paralelas a los ejes  $x$  y  $y$  no convergen; esto sólo ocurre con las líneas paralelas al eje  $z$ . En la figura 6.5 se presenta la construcción de



**Figura 6.5** Construcción de una proyección de perspectiva de un punto para un cubo sobre un plano que corta el eje  $z$ . La normal al plano de proyección es paralela al eje  $z$ . (Adaptado de [CARL78], Association for Computing Machinery, Inc.; utilizado con autorización.)



**Figura 6.6** Proyección de perspectiva de dos puntos de un cubo. El plano de proyección corta los ejes  $x$  y  $z$ .

una perspectiva de un punto con algunos de los proyectores y con un plano de proyección que sólo corta el eje  $z$ .

En la figura 6.6 se muestra la construcción de una perspectiva de dos puntos. Observe que las líneas paralelas al eje  $y$  no convergen en la proyección. La perspectiva de dos puntos se usa comúnmente en dibujos de arquitectura, ingeniería, diseño industrial y publicidad. Las perspectivas de tres puntos son menos frecuentes, ya que añaden muy poco al realismo que se puede obtener con la perspectiva de dos puntos.

### 6.2.2 Proyecciones paralelas

Las proyecciones paralelas se clasifican en dos tipos, dependiendo de la relación entre la dirección de la proyección y la normal al plano de proyección. En las proyecciones paralelas **ortográficas**, estas direcciones son las mismas (o en sentido contrario), de manera que la dirección de la proyección es normal al plano de proyección. Esto no ocurre en la proyección paralela **oblicua**.

Los tipos más comunes de proyecciones ortográficas son la de **elevación frontal**, **elevación superior** o **elevación de plano** y la de **elevación lateral**. En todas ellas, el plano de proyección es perpendicular al eje principal, que por lo tanto es la dirección de la proyección. En la figura 6.7 se presenta la construcción de estas tres proyecciones, que se usan comúnmente en dibujos de ingeniería para representar piezas de maquinaria, montajes y edificios, ya que

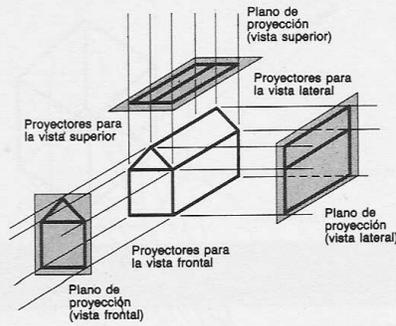


Figura 6.7 Construcción de tres proyecciones ortográficas.

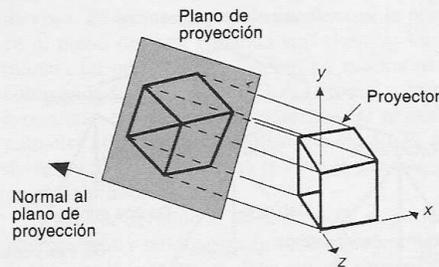
las distancias y los ángulos se pueden medir a partir de las representaciones. Sin embargo, cada proyección sólo muestra una cara del objeto, de manera que puede ser difícil deducir la naturaleza tridimensional del objeto proyectado, incluso si se estudian simultáneamente varias proyecciones del mismo objeto.

Las **proyecciones ortográficas axonométricas** usan planos de proyección que no son normales a un eje principal y que por ende muestran varias caras de un objeto al mismo tiempo. En este aspecto se parecen a la proyección de perspectiva, pero difieren en lo referente al recorte frontal, que es uniforme y no relacionado con la distancia al centro de proyección. Se conserva el paralelismo de las líneas, pero no los ángulos, y las distancias se pueden medir sobre cualquiera de los ejes principales (por lo general, con factores de escalamiento diferentes).

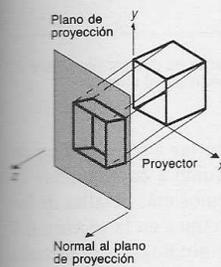
La **proyección isométrica** es una proyección axonométrica de uso común. La normal al plano de proyección (y por consiguiente la dirección de la proyección) forma ángulos iguales con respecto a cada eje principal. Si la normal al plano de proyección es  $(d_x, d_y, d_z)$ , requerimos que  $|d_x| = |d_y| = |d_z|$  o  $\pm d_x = \pm d_y = \pm d_z$ . Sólo hay ocho direcciones (una en cada octante) que satisfacen esta condición. En la figura 6.8 se muestra la construcción de una proyección isométrica a lo largo de una de estas direcciones,  $(1, -1, -1)$ .

La proyección isométrica tiene una útil propiedad: los tres ejes principales tienen la misma reducción frontal, lo que permite que las mediciones sobre los ejes se realicen con la misma escala (de aquí proviene el nombre: *iso*, que quiere decir "igual", y *métrico*, de medición). Además, las proyecciones de los ejes principales forman ángulos iguales de  $120^\circ$  entre sí.

Las **proyecciones oblicuas**, la segunda clase de proyecciones paralelas, difieren de las proyecciones ortográficas en que la normal al plano de proyección y la dirección de la proyección son diferentes. Las proyecciones oblicuas combinan las propiedades de las proyecciones ortográficas frontal, superior y lateral.



**Figura 6.8** Construcción de una proyección isométrica de un cubo unidad. (Adaptado de [CARL78], Association for Computing Machinery, Inc; utilizado con autorización.)



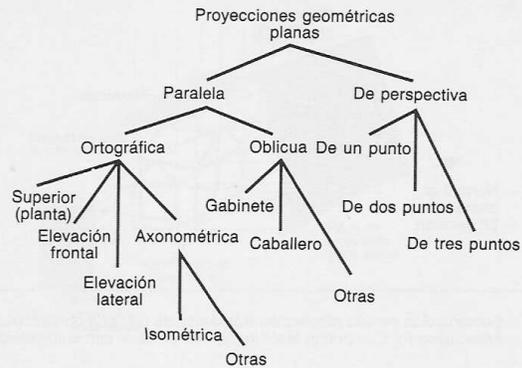
**Figura 6.9** Construcción de una proyección oblicua. (Adaptado de [CARL78], Association for Computing Machinery, Inc; utilizado con autorización.)

con las de una proyección axonométrica: el plano de proyección es normal a un eje principal, de manera que la proyección de la cara del objeto paralela a este plano permite medir ángulos y distancias. También se proyectan otras caras del objeto, lo que permite medir las distancias sobre los ejes principales, aunque no los ángulos. En este texto se emplean mucho las proyecciones oblicuas porque son fáciles de dibujar. En la figura 6.9 se muestra la construcción de una proyección oblicua. Observe que la normal al plano de proyección y la dirección de la proyección no son iguales. En [FOLE90] se describen varios tipos de proyecciones oblicuas.

En la figura 6.10 se muestran las relaciones lógicas entre los diversos tipos de proyecciones. El lazo común de todas las proyecciones es que comprenden un plano de proyección y un centro de proyección para las proyecciones de perspectiva o una dirección de proyección para las proyecciones paralelas. Podemos unificar los casos paralelos y de perspectiva si consideramos que el centro de proyección está definido por la dirección al centro de proyección desde un punto de referencia y la distancia a este punto. Cuando esta distancia aumenta hasta el infinito, la proyección se convierte en paralela. Por lo tanto, podemos decir que el aspecto común de estas proyecciones es que comprenden un plano de proyección, una dirección al centro de proyección y una distancia al centro de proyección. En la sección 6.3 veremos cómo integrar algunos de estos tipos de proyecciones al proceso de visualización tridimensional.

### 6.3 Especificación de una vista tridimensional arbitraria

Como se sugiere en la figura 6.2, la vista tridimensional no sólo comprende una proyección, sino también un volumen de vista con respecto al cual se recorta el mundo tridimensional. El conjunto de la proyección y el volumen de vista



**Figura 6.10** Subclases de las proyecciones geométricas planas. La **vista de planta** es otro término para la vista superior. Las vistas **frontal** y **lateral** muchas veces se emplean sin el término **elevación**.

proporciona toda la información que se necesita para recortar y proyectar en un espacio bidimensional. Así, la transformación bidimensional a coordenadas de un dispositivo físico es bastante sencilla. Ahora conoceremos más detalles de los conceptos de la proyección geométrica plana que presentamos en la sección 6.2 y veremos cómo especificar un volumen de vista. La terminología y el método de visualización que presentamos aquí son los que se emplean en PHIGS.

El plano de proyección, que a partir de ahora llamaremos **plano de vista** para ser consistentes con la literatura sobre graficación, es definido por un punto en el plano denominado **punto de referencia de vista (VRP, view reference point)** y una normal al plano llamada **normal al plano de vista (VPN, view-plane normal)**. El plano de vista puede estar en cualquier lugar con respecto a los objetos mundiales que se proyectarán: puede encontrarse delante de los objetos, atravesarlos o estar detrás de ellos.

Una vez que se tiene el plano de vista, se requiere una ventana en el plano. La función de la ventana es similar a la de una ventana bidimensional: se establece una correspondencia entre su contenido y el área de vista, y no se presentan las partes del mundo tridimensional que se proyecten al plano de vista fuera de la ventana. Veremos que la ventana también tiene una función importante en la definición del volumen de vista.

Para definir una ventana en el plano de vista necesitamos una manera de especificar coordenadas mínimas y máximas para la ventana y los dos ejes ortogonales en el plano de vista para medir estas coordenadas. Estos ejes forman parte de un sistema de **coordenadas de referencia de vista (VRC, viewing-reference coordinates)**. El origen de un sistema VRC es el VRP. Un eje del VRC es VPN y se denomina eje  $n$ . Otro eje de VRC se encuentra con el **vector de vista**

arriba (**VUP**, *view-up vector*), que determina la dirección del eje  $v$  en el plano de vista. El eje  $v$  se define de manera que la proyección de VUP paralela a VPN en el plano de vista coincida con el eje  $v$ . La dirección del eje  $u$  se define de manera tal que  $u$ ,  $v$  y  $n$  formen un sistema de coordenadas de mano derecha, como en la figura 6.11. El VRP y los dos vectores de dirección, VPN y VUP, se especifican en el sistema de coordenadas mundiales de mano derecha. (Algunos paquetes gráficos utilizan el eje  $y$  como VUP, pero esta convención es demasiado restrictiva y no funciona si VPN es paralelo al eje  $y$ , ya que en este caso VUP no está definido.)

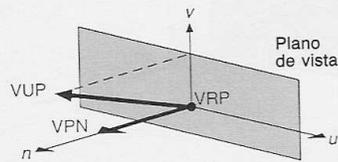
Una vez definido el sistema VRC, es posible determinar las coordenadas  $u$  y  $v$  máximas y mínimas de la ventana, como en la figura 6.12. En esta figura se ilustra que la ventana no tiene que ser simétrica con respecto al VRP, y se muestra explícitamente el centro de la ventana, CW.

El centro de proyección y la dirección de la proyección (DOP) se definen con un **punto de referencia de proyección (PRP)** y un indicador del tipo de proyección. Si el tipo de proyección es de perspectiva, entonces PRP es el centro de proyección. Si la proyección es paralela, la dirección de proyección es de PRP a CW. El centro de la ventana generalmente es distinto del VRP, el cual ni siquiera tiene que estar dentro de los límites de la ventana.

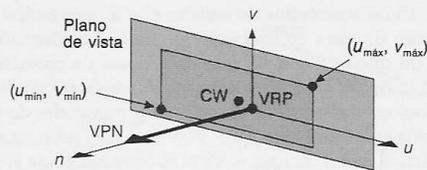
El PRP se especifica en el sistema VRC, no en el sistema de coordenadas de mundo; es decir, la posición del PRP con respecto al VRP no cambia al mover VUP o VRP. La ventaja de este esquema es que el programador puede especificar la dirección de proyección que se requiere y luego cambiar VPN y VUP (cambiando por lo tanto VRC) sin tener que recalcular el PRP necesario para mantener la proyección deseada. Por otra parte, puede ser más difícil mover el PRP para obtener diferentes vistas de un objeto.

El **volumen de vista** limita la porción de un mundo que se recortará y proyectará en el plano de vista. Para una proyección de perspectiva, el volumen de vista es la pirámide semiinfinita con ápice en el PRP y aristas que pasan por los vértices de la ventana. En la figura 6.13 se presenta un volumen de vista de proyección de perspectiva.

Las posiciones detrás del centro de proyección no se incluyen en el volumen de vista y por ende no se proyectan. Por supuesto, en la realidad nuestros ojos



**Figura 6.11** El plano de vista está definido por VPN y VRP; el eje  $v$  se define con la proyección de VUP a lo largo de VPN sobre el plano de vista. El eje  $u$  forma el sistema VRC de mano derecha con VPN y  $v$ .

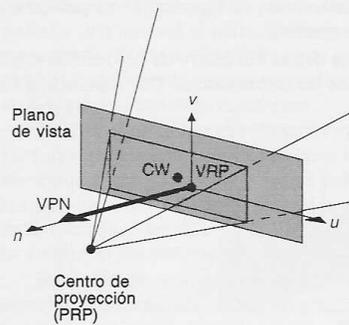


**Figura 6.12** El sistema de coordenadas de referencia de visualización (VRC) es un sistema de mano derecha formado por los ejes  $u$ ,  $v$  y  $n$ . El eje  $n$  siempre es VPN. CW es el centro de la ventana.

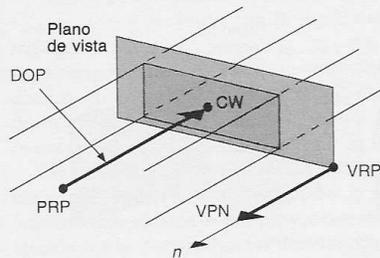
observan un volumen de vista de forma irregular similar a la de un cono. Sin embargo, un volumen de vista piramidal es matemáticamente más sencillo y acorde con el concepto de un área de vista rectangular.

En el caso de las proyecciones paralelas, el volumen de vista es un paralelepípedo infinito con lados paralelos a la dirección de proyección, o sea, a la dirección del PRP al centro de la ventana. En la figura 6.14 se muestra un volumen de vista de proyección paralela y su relación con el plano de vista, la ventana y el PRP.

En ocasiones queremos que el volumen de vista sea finito, para limitar el número de primitivas de salida que se proyectan sobre el plano de vista. En las figuras 6.15 y 6.16 se muestra cómo se hace finito el volumen de vista con un **plano de recorte anterior** y un **plano de recorte posterior**, que a veces se conocen como **cercano** y **lejano** (*hither* y *yon*). Estos planos son paralelos al plano de vista; su normal es VPN. Los planos se especifican usando cantidades con signo de **distancia al plano anterior** ( $F$ ) y **distancia al plano posterior** ( $B$ ), relativas al



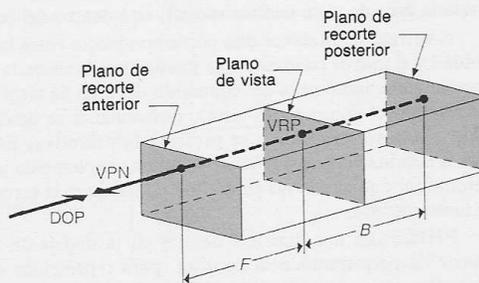
**Figura 6.13** Volumen de vista de pirámide semiinfinita para la proyección de perspectiva. CW es el centro de la ventana.



**Figura 6.14** Volumen de vista de paralelepípedo infinito para una proyección paralela ortográfica. VPN y la dirección de proyección (DOP) son paralelas. DOP es el vector de PRP a CW y es paralelo a VPN.

VRP y sobre la VPN, con distancias positivas en la dirección de VPN. Para que el volumen de vista no esté vacío, la distancia al plano anterior debe ser algebraicamente mayor que la distancia al plano posterior.

Esta limitación del volumen de vista puede ser útil para eliminar objetos extraños y permitir que el usuario se centre en una porción particular del mundo. La modificación dinámica de las distancias al plano anterior o posterior puede dar al observador un buen sentido de las relaciones espaciales entre distintas partes del objeto, conforme estas partes aparecen y desaparecen de su vista (véase el Cap. 12). Para las proyecciones de perspectiva hay una motivación adicional. Un objeto muy distante del centro de proyección se proyecta en la superficie de vista como una "mancha" sin forma distinguible. Al presentar este tipo de objeto en un graficador, el instrumento de escritura puede perforar el papel; en una pantalla vectorial, el fósforo del CRT se puede quemar



**Figura 6.15** Volumen de vista truncado para una proyección paralela ortográfica. DOP es la dirección de la proyección.

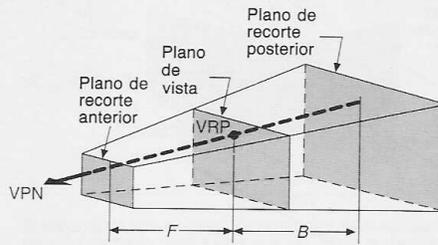


Figura 6.16 Volumen de vista truncado para una proyección de perspectiva.

con el rayo de electrones; y en una grabadora vectorial de película fotográfica, la alta concentración de luz ocasiona la aparición de un área blanca borrosa. Además, un objeto muy cercano al centro de proyección se puede extender por la ventana como si fueran varios palillos inconexos, sin estructura discernible. La especificación apropiada del volumen de vista puede eliminar estos problemas.

¿Cómo se establece la correspondencia entre el contenido del volumen de vista y la superficie de presentación? En primer lugar, considere el cubo unidad que se extiende de 0 a 1 en cada una de las tres dimensiones de las **coordenadas de proyección normalizadas (NPC, normalized projection coordinates)**. El volumen de vista se transforma en un sólido rectangular de NPC que se extiende de  $x_{\min}$  a  $x_{\max}$  sobre el eje  $x$ , de  $y_{\min}$  a  $y_{\max}$  sobre el eje  $y$ , y de  $z_{\min}$  a  $z_{\max}$  sobre el eje  $z$ . El plano de recorte anterior se convierte en el plano  $z_{\max}$  y el plano de recorte posterior se convierte en el plano  $z_{\min}$ . En forma similar, el lado  $u_{\min}$  del volumen de vista es ahora el plano  $x_{\min}$  y el lado  $u_{\max}$  se convierte en el plano  $x_{\max}$ . Por último, el lado  $v_{\min}$  del volumen de vista se convierte en el plano  $y_{\min}$  y el lado  $v_{\max}$  se convierte en el plano  $y_{\max}$ . Esta porción rectangular sólida de NPC, llamada **área de vista tridimensional**, está dentro del cubo unidad.

A su vez, se establece una correspondencia entre la cara  $z = 1$  de este cubo unidad y el mayor cuadrado que puede inscribirse en la pantalla. Para crear una presentación alambrada del contenido del área de vista tridimensional (que es el contenido del volumen de vista), simplemente se descarta el componente  $z$  de cada primitiva de salida y se presenta la primitiva. En el capítulo 13 veremos que la eliminación de superficies ocultas simplemente usa el componente  $z$  para determinar cuáles son las primitivas de salida más cercanas al observador y por lo tanto visibles.

PHIGS usa dos matrices de  $4 \times 4$ , la matriz de orientación de vista y la matriz de correspondencia de vista, para representar el conjunto completo de especificaciones de vista. VRP, VPN y VUP se combinan para formar la **matriz de orientación de vista**, que transforma las posiciones representadas en coordenadas de mundo a posiciones representadas en VRC. Esta transformación lleva los ejes  $u$ ,  $v$  y  $n$  a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente.

Las especificaciones de volumen de vista, indicadas por PRP,  $u_{\min}$ ,  $u_{\max}$ ,  $v_{\min}$ ,  $v_{\max}$ ,  $F$  y  $B$ , junto con la especificación de área de vista tridimensional, indicada por  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$ ,  $y_{\min}$ ,  $y_{\max}$ ,  $z_{\min}$  y  $z_{\max}$ , se combinan para formar la **matriz de correspondencia de vista**, que transforma puntos en VRC a puntos en coordenadas de proyección normalizadas. En la sección 7.3.4 se analizan las llamadas a subrutinas que forman la matriz de orientación de vista y la matriz de correspondencia de vista se analizan en la sección 7.3.4.

En la sección 6.4 veremos cómo obtener diversas vistas usando los conceptos presentados en esta sección. En la sección 6.5 se presentan los conceptos matemáticos básicos de las proyecciones geométricas planas, mientras que en la sección 6.6 se desarrollan las matemáticas y los algoritmos necesarios para toda la operación de vista.

## 6.4 Ejemplos de vista tridimensional

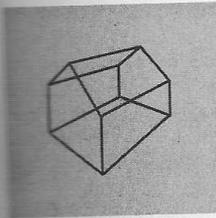


Figura 6.17  
Proyección de perspectiva  
de dos puntos de una casa.

En esta sección veremos cómo aplicar los conceptos de visualización básicos presentados en la sección 6.3 para crear diversas proyecciones, como la que se presenta en la figura 6.17. Como la casa que aparece en esta figura se utiliza a lo largo de la sección, será útil recordar sus dimensiones y su posición, las cuales se indican en la figura 6.18. En cada vista que analicemos se presentará una tabla con VRP, VPN, VUP, PRP, ventana y tipo de proyección (de perspectiva o paralela). En toda la sección se supone el área de vista tridimensional por omisión, que es el cubo unidad en NPC. La notación (WC) o (VRC) se añade a la tabla como recordatorio del sistema de coordenadas (de mundo o de referencia de vista, respectivamente) para el cual se proporciona el parámetro de vista. La forma de la tabla que se presenta aquí es para la especificación de vista por omisión utilizada por PHIGS. Los valores por omisión se presentan en la figura

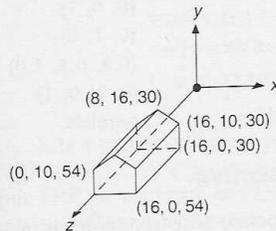
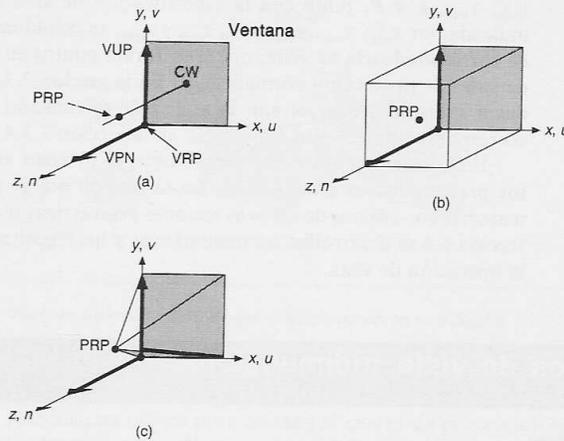


Figura 6.18 Esta casa se usa a lo largo del presente capítulo como ejemplo de un conjunto de datos de coordenadas de mundo. Sus coordenadas se extienden de 30 a 54 en  $z$ , de 0 a 16 en  $x$  y de 0 a 16 en  $y$ .



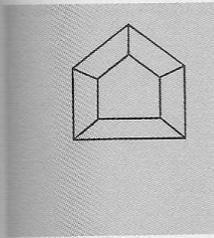
**Figura 6.19** Relación entre las coordenadas de mundo y de referencia de vista. (a) La especificación de vista por omisión: VRP está en el origen, VUP es el eje  $y$  y VPN es el eje  $z$ . Esta disposición hace que el sistema VRC de  $u, v$  y  $n$  coincida con el sistema de coordenadas de mundo  $x, y, z$ . La ventana se extiende de 0 a 1 sobre  $u$  y  $v$ , y PRP está en  $(0.5, 0.5, 1.0)$ . (b) Volumen de vista por omisión de proyección paralela. (c) Volumen de vista si la proyección por omisión fuera de perspectiva.

6.91(a); el volumen de vista correspondiente a estos valores se muestra en la figura 6.19(b). Si el tipo de proyección es de perspectiva en lugar de paralela, el volumen de vista será la pirámide presentada en la figura 6.19(c).

Parámetro de visualización	Valor	Comentarios
VRP(WC)	$(0, 0, 0)$	origen
VPN(WC)	$(0, 0, 1)$	eje $z$
VUP(WC)	$(0, 1, 0)$	eje $y$
PRP(WC)	$(0.5, 0.5, 1.0)$	
ventana (VRC)	$(0, 1, 0, 1)$	
tipo de proyección	paralela	

#### 6.4.1 Proyecciones de perspectiva

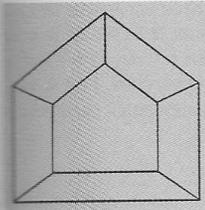
Para obtener la vista en perspectiva frontal de un punto de la casa presentada en la figura 6.20 (esta figura y todas las similares se realizaron con el programa SPHIGS, analizado en el capítulo 7), se coloca el centro de proyección (que puede considerarse como la posición del observador) en  $x = 8, y = 6$  y  $z = 84$ . El valor  $x$  se selecciona para que esté en el centro horizontal de la casa y el valor



**Figura 6.20**  
Proyección de perspectiva  
de un punto de la casa.

y para que corresponda a la altura aproximada del ojo de un observador de pie en el plano  $(x, z)$ ; el valor  $z$  es arbitrario. En este caso,  $z$  está a 30 unidades del frente de la casa (plano  $z = 54$ ). La ventana se ha hecho de gran tamaño para garantizar que la casa quepa en el volumen de vista. Los demás parámetros de vista tienen sus valores por omisión, de manera que el conjunto global de parámetros de visualización es el siguiente:

VRP(WC)	(0, 0, 0)
VPN(WC)	(0, 0, 1)
VUP(WC)	(0, 1, 0)
PRP(WC)	(8, 6, 84)
ventana (VRC)	(-50, 50, -50, 50)
tipo de proyección	perspectiva

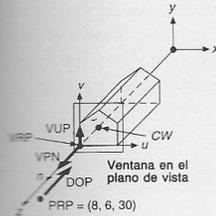


**Figura 6.21**  
Proyección de perspectiva  
centrada de una casa.

Aunque la imagen en la figura 6.20 es en realidad una proyección de perspectiva de la casa, es muy pequeña y no está centrada en la superficie de vista. Preferiríamos una proyección más centrada de la casa, que abarque casi toda la superficie de vista, como en la figura 6.21. Es más fácil producir este efecto si coinciden el plano de vista y el plano frontal de la casa. Así, como el frente de la casa se extiende de 0 a 16 tanto en  $x$  como en  $y$ , se obtienen resultados razonables con una ventana que se extiende de -1 a 17 en  $x$  y  $y$ .

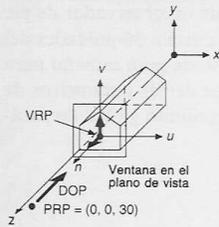
Colocamos el plano de vista en la cara frontal de la casa ubicando el VRP en cualquier lugar del plano  $z = 54$ ; (0, 0, 54), la esquina inferior izquierda frontal de la casa, es un punto adecuado para ello. Para que el centro de la proyección sea el mismo que en la figura 6.20, el PRP, que se halla en el sistema VRC, debe estar en (8, 6, 30). En la figura 6.22 se muestra esta nueva disposición de VRC, VRP y PRP, que corresponde al siguiente conjunto de parámetros:

VRP(WC)	(0, 0, 54)
VPN(WC)	(0, 0, 1)
VUP(WC)	(0, 1, 0)
PRP(VRC)	(8, 6, 30)
ventana (VRC)	(-1, 17, -1, 17)
tipo de proyección	perspectiva

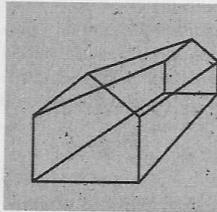


**Figura 6.22**  
Situación de vista para la  
figura 6.21.

Este mismo resultado se puede obtener de otras maneras. Por ejemplo, con VRP en (8, 6, 54) como en la figura 6.23, el centro de la proyección, indicado por PRP, se convierte en (0, 0, 30). También hay que cambiar la ventana, ya que su definición se basa en el sistema VRC, cuyo origen es VRP. La ventana apropiada se extiende de -9 a 9 en  $u$  y de -7 a 11 en  $v$ . Con respecto a la casa, ésta es la misma ventana que se usó en el ejemplo previo, pero ahora se especifica en un sistema VRC diferente. Como la dirección de vista superior es el eje  $y$ , los ejes  $u$  y  $x$  son paralelos, lo mismo que los ejes  $v$  y  $y$ . En resumen, los

**Figura 6.23**

Situación de visualización alternativa para la figura 6.21.

**Figura 6.24**

Proyección de perspectiva de una casa desde (36, 25, 74), con VPN paralela al eje z.

siguientes parámetros de visualización, presentados en la figura 6.23, producen también la figura 6.21:

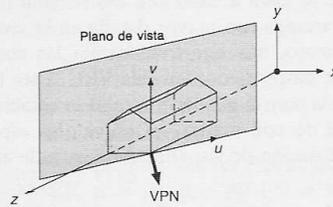
VRP(WC)	(8, 6, 54)
VPN(WC)	(0, 0, 1)
VUP(WC)	(0, 1, 0)
PRP(VRC)	(0, 0, 30)
ventana (VRC)	(-9, 9, -7, 11)
tipo de proyección	perspectiva

Intentemos ahora obtener la proyección de perspectiva de dos puntos que se muestra en la figura 6.17. El centro de proyección es análogo a la posición de una cámara que fotografía objetos en coordenadas de mundo. Teniendo en cuenta esta analogía, el centro de proyección en la figura 6.17 parece estar un poco hacia arriba y a la derecha de la casa, visto desde el eje z positivo. El centro de proyección exacto es (36, 25, 74). Ahora, si se elige como VRP la esquina de la casa en (16, 0, 54), este centro de proyección se encuentra en (20, 25, 20) con respecto a VRP. Si el plano de vista coincide con el frente de la casa (el plano  $z = 54$ ), una ventana que abarca de -20 a 20 en  $u$  y de -5 a 35 en  $v$  tiene ciertamente el tamaño suficiente para contener la proyección. Por lo tanto, podemos especificar la vista de la figura 6.24 con los siguientes parámetros de vista:

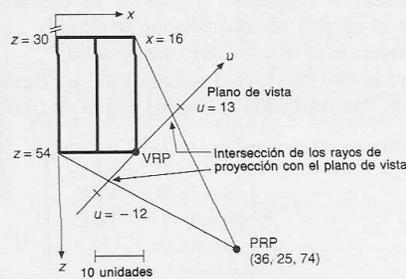
VRP(WC)	(16, 0, 54)
VPN(WC)	(0, 0, 1)
VUP(WC)	(0, 1, 0)
PRP(VRC)	(0, 25, 20)
ventana (VRC)	(-20, 20, -5, 35)
tipo de proyección	perspectiva

Esta vista es similar, pero obviamente distinta, que la que se presentó en la figura 6.17. Una diferencia es que la figura 6.17 es una proyección de perspectiva de dos puntos, mientras que la figura 6.24 es una perspectiva de un punto. Resulta evidente que la figura 6.17 no se puede producir con sólo mover el centro de proyección. De hecho, hay que reorientar el plano de vista para que corte los ejes  $x$  y  $z$ , asignando VPN igual a (1, 0, 1). De esta manera, los parámetros de vista para la figura 6.17 son los siguientes:

VRP(WC)	(16, 0, 54)
VPN(WC)	(1, 0, 1)
VUP(WC)	(1, 0, 1)
PRP(VRC)	(0, 25, $20\sqrt{2}$ )
ventana (VRC)	(-20, 20, -5, 35)
tipo de proyección	perspectiva



**Figura 6.25** El plano de vista y el sistema VRC correspondientes a la figura 6.17.

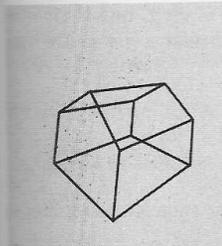


**Figura 6.26** Vista superior (planta) de una casa para determinar un tamaño apropiado de ventana.

En la figura 6.25 se muestra el plano de vista establecido con esta VPN. Se usa el componente  $n 20\sqrt{2}$  de PRP para que el centro de proyección esté a una distancia de  $20\sqrt{2}$  del VRP en el plano  $(x, y)$ , como se muestra en la figura 6.26.

Hay dos maneras de elegir una ventana que rodee totalmente la proyección, como lo hace la ventana de la figura 6.17. Podemos estimar el tamaño de la proyección de la casa sobre el plano de vista usando un bosquejo, como en la figura 6.26, para calcular las intersecciones de los proyectores con el plano de vista. Sin embargo, una mejor alternativa es permitir que los límites de la ventana sean variables en un programa y que se determinen interactivamente con un dispositivo localizador o valuator.

La figura 6.27 se obtiene de la misma proyección que la figura 6.17, pero la ventana tiene distinta orientación. En los ejemplos anteriores, el eje  $v$  del sistema VRC era paralelo al eje  $y$  del sistema de coordenadas mundiales; así, la ventana (dos de sus lados paralelos al eje  $v$ ) se alineaba con los lados verticales de la casa. La figura 6.27 tiene exactamente los mismos parámetros de vista que la figura 6.17, excepto que el VUP se ha rotado a unos  $10^\circ$  del eje  $y$ .



**Figura 6.27**  
Proyección de la casa  
producida por la rotación  
de VUP.

**Ejemplo 6.1**

**Problema:** Una vez que se ha establecido el sistema VRC, todo el procesamiento gráfico subsecuente se lleva a cabo con ese sistema de coordenadas, procedimiento que examinaremos con mayor detalle en la sección 6.6. Antes de estos pasos de procesamiento, hay que transformar las coordenadas de mundo en nuestro conjunto de datos a coordenadas VRC. Esta transformación se puede efectuar con una sola matriz que lleve a cabo la rotación y la traslación. ¿Cuál es la forma general de esta matriz? ¿Qué valores específicos deben tener sus elementos para la situación de visualización ilustrada en la figura 6.17?

**Respuesta:** El método que usaremos se propuso en la sección 5.8 y se ilustra con las ecuaciones (5.60) a (5.64). Allí se trasladaba y rotaba un conjunto arbitrario de líneas para asumir una nueva posición en el sistema de coordenadas  $x, y, z$ , a través de la composición de una matriz de traslación  $T$  y una matriz de rotación  $R$  para formar la matriz  $M$ . Queremos seguir el mismo procedimiento, pero ahora deseamos reorientar el sistema de coordenadas  $u, v, n$  para que coincida con el sistema de coordenadas de mundo. La matriz que lleve a cabo esta transformación es la que estamos buscando.

Primero hay que trasladar el sistema VRC al origen. Con base en lo visto en la sección 5.8, esta traslación se obtiene con la matriz  $T$ , la cual es más que

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -VRP_x \\ 0 & 1 & 0 & -VRP_y \\ 0 & 0 & 1 & -VRP_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El método utilizado en la sección 5.8, en el cual hallamos una matriz de rotación (una matriz ortogonal especial) a través de la determinación de a dónde enviaba los ejes principales, es el que usaremos aquí. Los componentes de los vectores unidad que yacen sobre las direcciones  $u, v$  y  $n$  constituyen los elementos de esta matriz. Así, podemos encontrar los elementos de la matriz de rotación,  $R$ , si observamos que el vector VPN debe rotarse al eje  $z$ , que el eje  $u$  es perpendicular a VUP y VPN y que el eje  $v$  es perpendicular a  $n$  y  $u$ . De esta manera,

$$n = \frac{VPN}{\|VPN\|}, \quad u = \frac{VUP \times VPN}{\|VUP \times VPN\|}, \quad v = n \times u,$$

donde  $u, v$  y  $n$  representan vectores unidad. La matriz de rotación resultante es

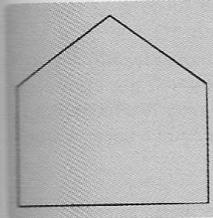
$$R = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz que buscamos es

$$M = R \cdot T = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -(u_x \cdot \text{VRP}_x + u_y \cdot \text{VRP}_y + u_z \cdot \text{VRP}_z) \\ v_x & v_y & v_z & -(v_x \cdot \text{VRP}_x + v_y \cdot \text{VRP}_y + v_z \cdot \text{VRP}_z) \\ n_x & n_y & n_z & -(n_x \cdot \text{VRP}_x + n_y \cdot \text{VRP}_y + n_z \cdot \text{VRP}_z) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, para los valores específicos aplicables a la figura 6.17, tenemos  $n = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}]^T$ ,  $u = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}]^T$  y  $v = [0, 1, 0]^T$ . Como los componentes de VRP son 16.0, 0.0 y 54.0, se tiene que los términos de traslación en  $M$  son 26.8701, 0.0 y -49.4975.

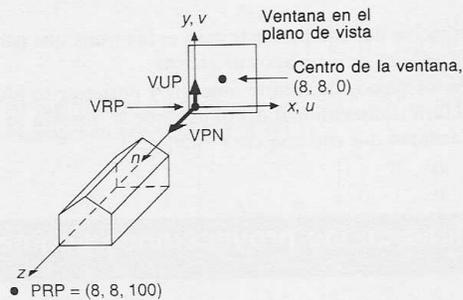
### 6.4.2 Proyecciones paralelas



**Figura 6.28**  
Proyección paralela frontal de la casa.

Para crear una proyección paralela frontal de la casa (Fig. 6.28), la dirección de la proyección se hace paralela al eje  $z$ . Recuerde que la dirección de la proyección está determinada por el PRP y el centro de la ventana. Con el sistema VRC por omisión y una ventana de  $(-1, 17, -1, 17)$ , el centro de la ventana es  $(8, 8, 0)$ . Un PRP de  $(8, 8, 100)$  proporciona una dirección de proyección paralela al eje  $z$ . En la figura 6.29 se muestra la situación de visualización que crea la figura 6.28. Los parámetros de visualización son los siguientes:

VRP(WC)	$(0, 0, 0)$
VPN(WC)	$(0, 0, 1)$
VUP(WC)	$(0, 1, 0)$
PRP(VRC)	$(8, 8, 100)$
ventana (VRC)	$(-1, 17, -1, 17)$
tipo de proyección	paralela

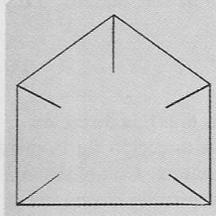


**Figura 6.29** Situación de visualización que crea la figura 6.28, una vista frontal de la casa. El PRP puede ser cualquier punto con  $x = 8$  y  $y = 8$ .

Para crear una vista lateral usaríamos una situación de visualización con el plano  $(y, z)$  (o cualquier plano paralelo) como plano de vista. La vista superior de la casa se crea usando el plano  $(x, z)$  como plano de vista y VPN como eje  $y$ . Sin embargo, hay que cambiar la dirección de vista superior de  $+y$  y usar en cambio el eje  $x$  negativo.

Véase [FOLE90] para un tratamiento completo de los casos de vista lateral y superior, así como ejemplos de proyecciones oblicuas.

### 6.4.3 Volúmenes de vista finitos



**Figura 6.30**  
Proyección de perspectiva de la casa con plano de recorte posterior en  $z = 31$ .

Hasta ahora, en todos los ejemplos hemos supuesto que el volumen de vista es infinito. Los planos de recorte anterior y posterior, descritos en la sección 6.3, ayudan a determinar un **volumen de vista finito**. Estos planos, los dos paralelos al plano de vista, se encuentran a una distancia  $F$  y  $B$ , respectivamente, del VRP, medida a lo largo de VPN. Para evitar un volumen de vista negativo, debemos asegurar que  $F$  sea algebraicamente mayor que  $B$ .  $\square$

Con la siguiente especificación de vista a la cual se han agregado  $F$  y  $B$ , se obtiene una vista de perspectiva frontal de la casa con la pared posterior recortada (Fig. 6.30). Si se indica una distancia, se supone un recorte con respecto al plano correspondiente; en caso contrario, no se supone ningún recorte. La especificación de vista es la siguiente:

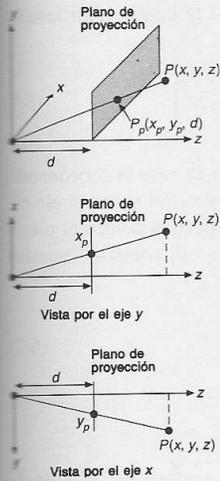
VRP(WC)	(0, 0, 54)	esquina inferior izquierda de la casa
VPN(WC)	(0, 0, 1)	eje $z$
VUP(WC)	(0, 1, 0)	eje $y$
PRP(VRC)	(8, 6, 30)	
ventana (VRC)	(-1, 17, -1, 17)	
tipo de proyección perspectiva		
$F$ (VRC)	+1	una unidad frente a la casa, en $z = 54 + 1 = 55$
$B$ (VRC)	-23	una unidad detrás de la casa, en $z = 54 - 23 = 31$

La situación de vista para este caso es la misma que para la figura 6.22, excepto por la adición de los planos de recorte.

Si los planos de recorte anterior y posterior se mueven dinámicamente, la estructura tridimensional del objeto que se observa se puede discernir con mayor facilidad que con una vista estática.

## 6.5 Las matemáticas de las proyecciones geométricas planas

Aquí presentaremos las matemáticas básicas de las proyecciones geométricas planas. Para simplificar, comenzaremos por suponer que, en la proyección de perspectiva, el plano de proyección es normal al eje  $z$  en  $z = d$  y que, en la



proyección paralela, el plano de proyección es el plano  $z = 0$ . Cada una de las proyecciones se puede definir con una matriz de  $4 \times 4$ . Esta representación es conveniente, ya que la matriz de proyección se puede componer con matrices de transformación, lo que permite representar dos operaciones (transformación y luego proyección) como una sola matriz. En la sección 6.6 se analizan los planos de proyección arbitrarios.

En esta sección obtendremos matrices de  $4 \times 4$  para varias proyecciones, comenzando con un plano de proyección paralelo al plano  $xy$  en la posición  $z = d$ , por consiguiente a una distancia  $d$  del origen, y con un punto  $P$  al cual se proyectará. Para calcular  $P_p = (x_p, y_p, z_p)$ , la proyección de perspectiva de  $(x, y, z)$  sobre el plano de proyección en  $z = d$ , usamos los triángulos similares de la figura 6.31 para escribir las razones

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}, \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}. \tag{6.1}$$

Al multiplicar cada lado por  $d$  se obtiene

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d}, \quad y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d}. \tag{6.2}$$

La distancia  $d$  es un factor de escala que se aplica a  $x_p$  y  $y_p$ . La división entre  $z$  ocasiona que la proyección de perspectiva de los objetos más distantes sea más pequeña que la de los objetos cercanos. Se permiten todos los valores de  $z$  excepto  $z = 0$ . Puede haber puntos detrás del centro de proyección en el eje  $z$  negativo o entre el centro de proyección y el plano de proyección.

La transformación de la ecuación (6.2) se puede expresar como una matriz de  $4 \times 4$ :

$$M_{\text{per}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}. \tag{6.3}$$

Al multiplicar el punto  $P = [x \ y \ z \ 1]^T$  por la matriz  $M_{\text{per}}$  se obtiene un punto homogéneo general  $[X \ Y \ Z \ W]^T$ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = M_{\text{per}} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{6.4}$$

o

$$[X \ Y \ Z \ W]^T = \left[ x \ y \ z \ \frac{z}{d} \right]^T. \tag{6.5}$$

Ahora, al dividir entre  $W$  (que es igual a  $z/d$ ) y eliminar la cuarta coordenada para regresar a tres dimensiones, se tiene

$$\left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}\right) = (x_p, y_p, z_p) = \left(\frac{x}{z/d}, \frac{y}{z/d}, d\right); \quad (6.6)$$

estas ecuaciones son el resultado correcto de la ecuación (6.1), más la coordenada  $z$  transformada de  $d$ , que es la posición del plano de proyección sobre el eje  $z$ .

Una formulación alternativa de la proyección de perspectiva coloca el plano de proyección en  $z = 0$  y el centro de proyección en  $z = -d$ , como se muestra en la figura 6.32. Por semejanza de triángulos se obtiene

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z+d}, \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z+d}. \quad (6.7)$$

Multiplicando por  $d$  se obtiene

$$x_p = \frac{d+x}{z+d} = \frac{x}{(z/d)+1}, \quad y_p = \frac{d+y}{z+d} = \frac{y}{(z/d)+1}. \quad (6.8)$$

La matriz es

$$M'_{\text{per}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Esta formulación permite que  $d$ , la distancia al centro de proyección, tienda a infinito.

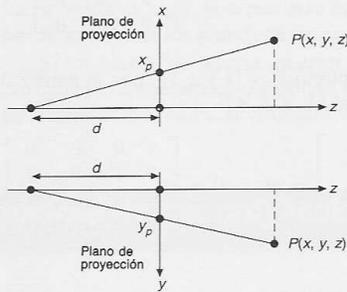


Figura 6.32 Proyección de perspectiva alternativa.

La proyección ortográfica sobre un plano de proyección en  $z = 0$  es bastante sencilla. La dirección de la proyección es igual que la de la normal al plano de proyección, es decir, el eje  $z$  en este caso. De esta manera, el punto  $P$  se proyecta como

$$x_p = x, \quad y_p = y, \quad z_p = 0. \quad (6.10)$$

Esta proyección se expresa con la matriz

$$M_{\text{ort}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Observe que conforme  $d$  tiende a infinito, la ecuación (6.9) se convierte en la ecuación (6.11). Esto se debe a que la proyección ortográfica es un caso especial de la proyección de perspectiva.

$M_{\text{per}}$  se aplica únicamente al caso especial en el cual el centro de proyección está en el origen;  $M_{\text{ort}}$  se aplica sólo si la dirección de proyección es paralela al eje  $z$ . Existe una formulación general, citada en [FOLE90], que no sólo elimina estas restricciones, sino que además integra las proyecciones paralela y de perspectiva.

En esta sección hemos visto cómo formular  $M_{\text{per}}$ ,  $M_{\text{per}}$  y  $M_{\text{ort}}$ , casos en los cuales el plano de proyección es perpendicular al eje  $z$ . En la sección 6.6 eliminaremos esta restricción y consideraremos el recorte implicado por los volúmenes de vista finitos.

### Ejemplo 6.2

**Problema:** La matriz  $M_{\text{per}}$  define una proyección de perspectiva de un punto. Describa una matriz que defina una proyección de perspectiva de dos puntos y su relación con la matriz  $M_{\text{per}}$  que acabamos de obtener. ¿Cuál es la forma de la matriz que define una perspectiva de tres puntos?

**Respuesta:** Como se propuso en la sección 6.4.1, es necesario orientar el plano de vista de manera que corte más de un eje, el eje  $z$  en este caso. Por ejemplo, especificaremos una rotación sobre el eje  $y$  para que el plano de vista corte tanto el eje  $x$  como el  $z$ . La nueva matriz se obtiene postmultiplicando  $M_{\text{per}}$  por la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen} \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen} \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $\theta$  es el ángulo de rotación sobre el eje  $y$ . La matriz resultante es

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta/d & 0 & \cos \theta/d & 0 \end{bmatrix}$$

Observe la aparición de un término distinto de cero en la posición  $a_{41}$  de la matriz compuesta. Esto indica un punto de fuga en el eje  $x$ . Si realizáramos una composición similar con una rotación sobre el eje  $x$ , un término distinto de cero en  $a_{42}$  indicaría un punto de fuga en el eje  $y$ . Si se combinaran rotaciones sobre los ejes  $x$  y  $y$ , se produciría una perspectiva de tres puntos.

## 6.6 Implantación de proyecciones geométricas planas

Dado un volumen de vista y una proyección, consideremos cómo se aplica la *operación de vista* de recorte y proyección. Como lo sugiere el modelo conceptual para la vista (Fig. 6.2), recortáramos las líneas con respecto al volumen de vista calculando sus intersecciones con cada uno de los seis planos que definen el volumen de vista. Las líneas que quedaran después del recorte se proyectarían sobre el plano de vista, a través de la solución de ecuaciones simultáneas para la intersección de los proyectores con el plano de vista. Después las coordenadas del sistema de mundo tridimensional se transformarían al sistema bidimensional del dispositivo. Sin embargo, se requieren numerosos cálculos para este proceso, repetidos para gran cantidad de líneas, lo que implica gran tiempo de computación. Por fortuna hay un procedimiento más eficiente, basado en la estrategia "divide y vencerás", para descomponer un problema difícil en una serie de problemas más sencillos.

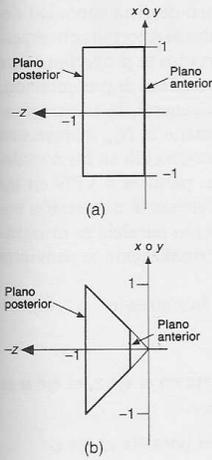
Es más fácil hacer recortes con respecto a ciertos volúmenes de vista que con respecto al general (los algoritmos de recorte se analizan en la sección 6.6.3). Por ejemplo, es fácil calcular las intersecciones de una línea con los planos de un volumen de vista de proyección paralela definido por los seis planos

$$x = -1, \quad x = 1, \quad y = -1, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = -1. \quad (6.12)$$

Esta situación también se aplica al volumen de vista de proyección de perspectiva definido por los planos

$$x = z, \quad x = -z, \quad y = z, \quad y = -z, \quad z = -z_{\min}, \quad z = -1. \quad (6.13)$$

Estos volúmenes de vista canónicos se presentan en la figura 6.33.



**Figura 6.33** Los dos volúmenes de vista canónicos, para las proyecciones (a) paralela y (b) de perspectiva.

Nuestra estrategia es encontrar las **transformaciones de normalización**  $N_{par}$  y  $N_{per}$  que transformen un volumen de vista de proyección paralela o de perspectiva a su volumen de vista canónico paralelo o de perspectiva, respectivamente. Después de esto, se lleva a cabo el recorte y se realiza una proyección a dos dimensiones, usando las matrices de la sección 6.5. Esta estrategia presenta el riesgo de dedicar esfuerzo a la transformación de puntos que posteriormente se descartan en la operación de recorte, pero al menos es sencillo efectuar el recorte.

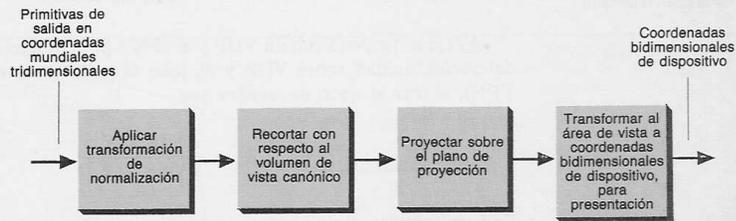
En la figura 6.34 se muestra la secuencia de procesos. Podemos reducir esta secuencia a una de transformación-recorte-transformación si combinamos los pasos 3 y 4 para formar una sola matriz de transformación. Con las proyecciones de perspectiva, también se requiere una división para establecer la correspondencia entre coordenadas homogéneas y coordenadas tridimensionales. Esta división viene después de la segunda transformación de la secuencia combinada. En la sección 6.6.4 se presenta una estrategia alternativa de recorte en coordenadas homogéneas.

Los lectores que estén familiarizados con PHIGS notarán que los volúmenes de vista canónicos de las ecuaciones (6.12) y (6.13) son diferentes de los **volúmenes de vista por omisión** de PHIGS: el cubo unidad de 0 a 1 en  $x$ ,  $y$  y  $z$  para la proyección paralela y la pirámide con ápice en  $(0.5, 0.5, 1.0)$  y lados que pasan por el cuadrado unidad de 0 a 1 en  $x$  y  $y$  en el plano  $z = 0$  para la proyección de perspectiva. Los volúmenes de vista canónicos se definen para simplificar las ecuaciones de recorte y para ofrecer la consistencia entre proyecciones paralelas y de perspectiva que se analiza en la sección 6.6.4. Por otra parte, los volúmenes de vista por omisión de PHIGS se definen de manera que la visualización bidimensional sea un caso especial de la visualización tridimensional.

En las secciones 6.6.1 y 6.6.2 se obtienen las transformaciones de normalización para las proyecciones paralela y de perspectiva que se usan como primer paso en la secuencia de transformación-recorte-transformación.

### 6.6.1 El caso de la proyección paralela

En esta sección obtendremos la transformación de normalización  $N_{par}$  para proyecciones paralelas, a fin de transformar posiciones de coordenadas de mundo de



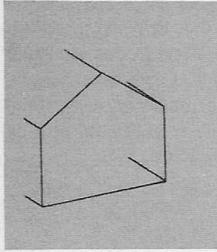
**Figura 6.34** Implantación de la visualización tridimensional.

manera que el volumen de vista se transforme al volumen de vista canónico definido por la ecuación (6.12). Las coordenadas transformadas se recortan con respecto a este volumen de vista canónico y los resultados recortados se proyectan sobre el plano  $z = 0$ , para luego transformarse al área de vista con fines de presentación.

La transformación  $N_{\text{par}}$  se deriva para el caso más general, la transformación paralela oblicua (en lugar de ortográfica). De esta manera,  $N_{\text{par}}$  incluye una transformación de sesgo que hace que la dirección de proyección en las coordenadas de visualización sea paralela a  $z$ , incluso si no es paralela a VPN en las coordenadas  $(u, v, n)$ . Al incluir este sesgo podemos efectuar la proyección sobre el plano  $z = 0$  con sólo asignar  $z = 0$ . Si la proyección paralela es ortográfica, el componente de sesgo de la transformación de normalización se convierte en la identidad.

La serie de transformaciones que conforma  $N_{\text{par}}$  es la siguiente:

1. Trasladar VRP al origen.
2. Rotar VRC de manera que el eje  $n$  (VPN) se convierta en el eje  $z$ , el eje  $u$  se convierta en el eje  $x$  y el eje  $v$  se convierta en el eje  $y$ .
3. Sesgar de manera que la dirección de proyección sea paralela al eje  $z$ .
4. Trasladar y escalar al volumen de vista canónico de proyección paralela de la ecuación (6.12).



**Figura 6.35**  
Proyección paralela final  
de la casa recortada.

En PHIGS, los pasos 1 y 2 definen la **matriz de orientación de vista** y los pasos 3 y 4 definen la **matriz de correspondencia de visualización**.

En la figura 6.37 se muestra la secuencia de transformaciones aplicada a un volumen de vista de proyección paralela y al bosquejo de una casa; en la figura 6.35 se presenta la proyección paralela que se obtiene como resultado.

El paso 1 es simplemente la traslación  $T(-VRP)$ . Para el paso 2, usamos las propiedades de las matrices ortogonales especiales analizadas en las secciones 5.3 y 5.7 e ilustradas en la obtención de las ecuaciones (5.64) y (5.65). Los vectores fila de la matriz de rotación necesaria para llevar a cabo el paso 2 son los vectores unidad rotados en  $R$  a los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . VPN gira el eje  $z$ , de manera que

$$R_z = \frac{\text{VPN}}{\|\text{VPN}\|} \quad (6.14)$$

El eje  $u$ , perpendicular a VUP y a VPN y por consiguiente el producto cruz del vector unidad sobre VUP y  $R_z$  (que se halla en la misma dirección que VPN), se rota al eje  $x$ , de manera que

$$R_x = \frac{\text{VUP} \times R_z}{\|\text{VUP} \times R_z\|} \quad (6.15)$$

En forma similar, el eje  $v$ , que es perpendicular a  $R_z$  y  $R_x$ , se rota al eje  $y$ , para que

$$R_y = R_z \times R_x \quad (6.16)$$

Por lo tanto, la rotación en el paso 2 está indicada por la matriz

$$R = \begin{bmatrix} r_{1x} & r_{2x} & r_{3x} & 0 \\ r_{1y} & r_{2y} & r_{3y} & 0 \\ r_{1z} & r_{2z} & r_{3z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

donde  $r_{1x}$  es el primer elemento de  $R_x$ , etcétera.

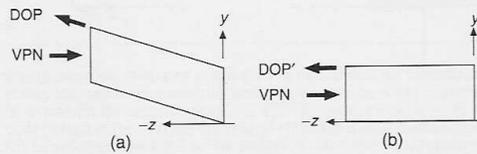
El tercer paso es sesgar el volumen de vista a lo largo del eje z para que todos sus planos sean normales a uno de los ejes del sistema de coordenadas. Esto se hace determinando el sesgo que se aplicará a la dirección de proyección (DOP) para que coincida con el eje z. Recuerde que DOP es el vector de PRP al centro de la ventana (CW) y que PRP se especifica en el sistema VRC. Los dos primeros pasos de la transformación han hecho que VRC corresponda al sistema de coordenadas mundiales, de manera que PRP está ahora en coordenadas mundiales. Por lo tanto, DOP es CW - PRP. Dado

$$\text{DOP} = \begin{bmatrix} dop_z \\ dop_y \\ dop_x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{CW} = \begin{bmatrix} \frac{u_{\text{máx}} + u_{\text{mín}}}{2} \\ \frac{v_{\text{máx}} + v_{\text{mín}}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{PRP} = \begin{bmatrix} prp_u \\ prp_v \\ prp_n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

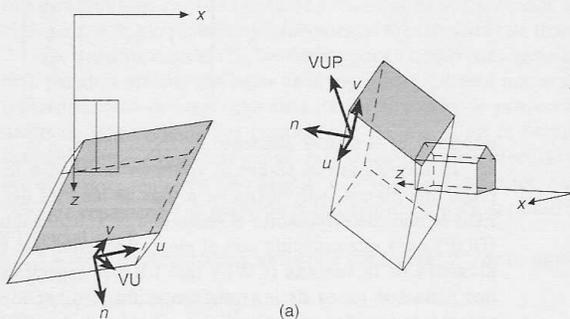
entonces

$$\begin{aligned} \text{DOP} &= \text{CW} - \text{PRP} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{u_{\text{máx}} + u_{\text{mín}}}{2} & \frac{v_{\text{máx}} + v_{\text{mín}}}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}^T - [prp_u \quad prp_v \quad prp_n \quad 1]^T. \end{aligned} \quad (6.19)$$

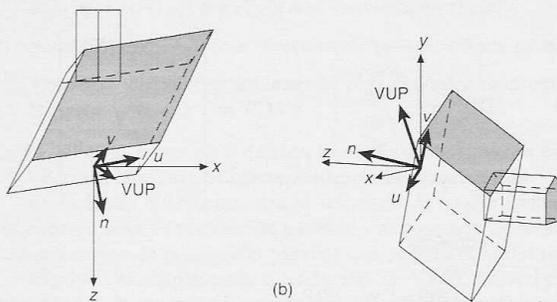
En la figura 6.36 se muestra la DOP especificada y la DOP' transformada que deseamos.



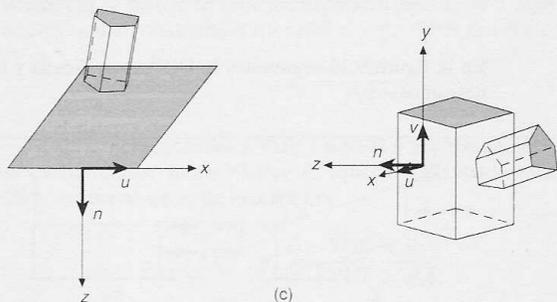
**Figura 6.36** Ilustración del sesgo usando como ejemplo la vista lateral del volumen de vista. El paralelogramo en (a) se sesga al rectángulo en (b); VPN no cambia porque es paralela al eje z.



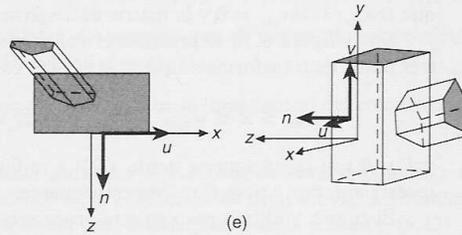
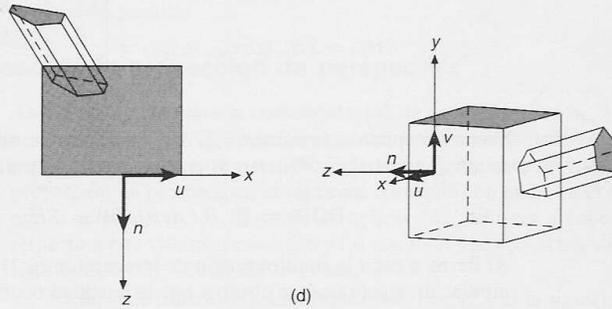
(a)



(b)



(c)



**Figura 6.37** Resultados en diversas etapas de la secuencia de visualización de proyección paralela. En todos los casos se presenta una proyección paralela superior y fuera de eje. (a) Se presenta la situación de vista original. (b) VRP ha sido trasladado al origen. (c) El sistema de coordenadas  $(u, v, n)$  se ha hecho rotar para que quede alineado con el sistema  $(x, y, z)$ . (d) El volumen de vista se ha sesgado para que la dirección de proyección (DOP) sea paralela al eje  $z$ . (e) El volumen de vista se ha trasladado y escalado al volumen de vista canónico de proyección paralela. Los parámetros de vista son  $VRP = (0.325, 0.8, 4.15)$ ,  $VPN = (0.227, 0.267, 1.0)$ ,  $VUP = (0.293, 1.0, 0.227)$ ,  $PRP = (0.6, 0.0, -1.0)$ , ventana =  $(-1.425, 1.0, -1.0, 1.0)$ ,  $F = 0.0$ ,  $B = -1.75$ . (Figuras creadas con un programa escrito por L. Lu, The George Washington University.)

El sesgo se puede obtener con la matriz de sesgo  $(x, y)$  de la ecuación (5.45) de la sección 5.7. Con coeficientes  $shx_{\text{par}}$  y  $shy_{\text{par}}$ , la matriz de sesgo es

$$SH_{\text{par}} = SH_{xy}(shx_{\text{par}}, shy_{\text{par}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & shx_{\text{par}} & 0 \\ 0 & 1 & shy_{\text{par}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Como se explicó en la sección 5.7,  $SH_{xy}$  no afecta a  $z$  mientras añade los términos  $z \cdot shx_{\text{par}}$  y  $z \cdot shy_{\text{par}}$ . Queremos encontrar valores para  $shx_{\text{par}}$  y  $shy_{\text{par}}$  tales que

$$DOP' = [0 \ 0 \ dop_z \ 0]^T = SH_{\text{par}} \cdot DOP. \quad (6.21)$$

Al llevar a cabo la multiplicación de la ecuación (6.21), seguida por cierta manipulación algebraica, se observa que la igualdad ocurre si

$$shx_{\text{par}} = \frac{dop_x}{dop_z}, \quad shy_{\text{par}} = \frac{dop_y}{dop_z}. \quad (6.22)$$

Observe que, para una proyección ortográfica,  $dop_x = dop_y = 0$ , de manera que  $shx_{\text{par}} = shy_{\text{par}} = 0$  y la matriz de sesgo se reduce a la identidad.

En la figura 6.38 se presenta el volumen de vista después de aplicar estos tres pasos de transformación. Las cotas del volumen son

$$u_{\min} \leq x \leq u_{\max}, \quad v_{\min} \leq y \leq v_{\max}, \quad B \leq z \leq F; \quad (6.23)$$

y  $F$  y  $B$  son las distancias desde VRP a lo largo de VPN, hasta los planos de recorte anterior y posterior, respectivamente.

El cuarto y último paso en este proceso es transformar el volumen de vista sesgado al volumen de vista canónico. Este paso se logra trasladando al origen el centro frontal del volumen de vista de la ecuación (6.23) y escalando al tamaño  $2 \times 2 \times 1$  del volumen de vista canónico final de la ecuación (6.12). Las transformaciones son

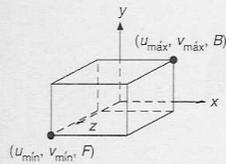
$$T_{\text{par}} = T \left( -\frac{u_{\max} + u_{\min}}{2}, -\frac{v_{\max} + v_{\min}}{2}, -F \right), \quad (6.24)$$

$$S_{\text{par}} = S \left( \frac{2}{u_{\max} + u_{\min}}, \frac{2}{v_{\max} + v_{\min}}, \frac{1}{F - B} \right). \quad (6.25)$$

Si  $F$  y  $B$  no se han especificado (porque no se efectúan recortes de plano anterior y posterior), se puede usar cualquier par de valores que satisfaga  $B \leq F$ . Los valores 0 y 1 son satisfactorios.

En resumen, tenemos

$$N_{\text{par}} = S_{\text{par}} \cdot T_{\text{par}} \cdot SH_{\text{par}} \cdot R \cdot T(-VRP). \quad (6.26)$$



**Figura 6.38**  
Volumen de vista después de los pasos de transformación 1 a 3.

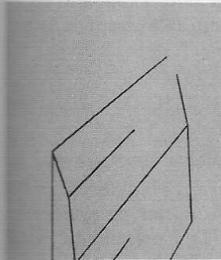
$N_{\text{par}}$  transforma un volumen de vista arbitrario de proyección paralela al volumen de vista canónico de proyección paralela y por ende permite que las primitivas de salida se recorten con respecto al volumen de vista canónico de la proyección paralela.

### 6.6.2 El caso de la proyección de perspectiva

Ahora desarrollaremos la transformación de normalización  $N_{\text{per}}$  para proyecciones de perspectiva.  $N_{\text{per}}$  transforma posiciones de coordenadas mundiales de manera que el volumen de vista se convierta en el volumen de vista canónico de la proyección de perspectiva, la pirámide truncada con ápice en el origen definida por la ecuación (6.13). Después de aplicar  $N_{\text{per}}$ , se lleva a cabo el recorte con respecto a este volumen canónico y los resultados se proyectan sobre el plano de vista usando  $M_{\text{per}}$  (obtenida en la sección 6.5).

La serie de transformaciones que conforma  $N_{\text{per}}$  es la siguiente:

1. Trasladar VRP al origen.
2. Hacer rotar VRC de manera que el eje  $n$  (VPN) se convierta en el eje  $z$ , el eje  $u$  se convierta en el eje  $x$  y el eje  $v$  se convierta en el eje  $y$ .
3. Trasladar de manera que el centro de proyección (COP), indicado por PRP, esté en el origen.
4. Sesgar de manera que la línea central del volumen de vista se convierta en el eje  $z$ .
5. Escalar para que el volumen de vista se convierta en el volumen de vista canónico de la proyección de perspectiva, la pirámide derecha truncada que es definida por los seis planos de la ecuación (6.13).

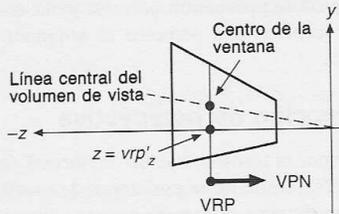


**Figura 6.39**  
Proyección de perspectiva final de la casa recortada.

En la figura 6.41 se muestra la aplicación de esta secuencia de transformaciones a un volumen de vista de proyección de perspectiva y a una casa. En la figura 6.39 se presenta la proyección de perspectiva resultante.

Los pasos 1 y 2 son los mismos que para la proyección paralela:  $R \cdot T(-\text{VRP})$ . El paso 3 es una traslación del centro de proyección (COP) al origen, como se requiere para el volumen de vista canónico de perspectiva. COP se especifica con respecto a VRP en VRC por medio de  $\text{PRP} = (prp_u, prp_v, prp_n)$ . Los VRC se han transformado a coordenadas mundiales con los pasos 1 y 2, por lo cual la especificación de COP en VRC está ahora en coordenadas mundiales. Por consiguiente, la traslación para el paso 3 es simplemente  $T(-\text{PRP})$ .

Para calcular el sesgo del paso 4, se examina la figura 6.40, donde se muestra una vista lateral del volumen de vista después de los pasos 1 a 3 de la transformación. Observe que la línea central del volumen de vista, que pasa por el origen y el centro de la ventana, no es igual que el eje  $-z$ . El propósito del sesgo es transformar la línea central al eje  $-z$ . La línea central del volumen de vista



**Figura 6.40** Sección transversal del volumen de vista después de los pasos 1 a 3 de la transformación.

cambia de PRP (que ahora está en el origen) a CW, el centro de la ventana. Por lo tanto, es igual que la dirección para la proyección paralela, o sea, CW - PRP. En consecuencia, la matriz de sesgo es  $SH_{par}$ , ¡igual que para la proyección paralela! Otra manera de considerar esta situación es que la traslación de -PRP en el paso 3, que llevó el centro de proyección al origen, también trasladó CW en -PRP; por consiguiente, después del paso 3, la línea central del volumen de vista pasa por el origen y CW - PRP.

Después de aplicar el sesgo, la ventana (y por lo tanto el volumen de vista) está centrada en el eje  $z$ . Los cotas de la ventana en el plano de proyección son

$$-\frac{u_{m\acute{a}x} - u_{m\acute{i}n}}{2} \leq x \leq \frac{u_{m\acute{a}x} - u_{m\acute{i}n}}{2}, \quad (6.27)$$

$$-\frac{v_{m\acute{a}x} - v_{m\acute{i}n}}{2} \leq y \leq \frac{v_{m\acute{a}x} - v_{m\acute{i}n}}{2}.$$

El VRP, que antes del paso 3 estaba en el origen, ha sido trasladado en el paso 3 y sesgado en el paso 4. La definición de  $VRP'$  como VRP después de las transformaciones de los pasos 3 y 4 es

$$VRP' = SH_{par} \cdot T(-PRP) \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T. \quad (6.28)$$

El componente  $z$  de  $VRP'$ , designado como  $vrp'_z$ , es igual a  $-prp_n$  ya que el sesgo  $(x, y) SH_{par}$  no afecta las coordenadas  $z$ .

El paso final es un escalamiento a lo largo de los tres ejes para crear el volumen de vista canónico definido por la ecuación (6.13) y presentado en la figura 6.42. De esta manera, el escalamiento se puede considerar como un proceso de dos subpasos. En el primero, se escala diferencialmente en  $x$  y en  $y$  para obtener los dos planos inclinados que acotan la pendiente unidad del volumen de vista. Este subpaso se lleva a cabo escalando la ventana para que su media altura y su media anchura sean  $-vrp'_z$ . Los factores de escalamiento apropiados para  $x$  y  $y$  son  $-2 \cdot vrp'_z / (u_{m\acute{a}x} - u_{m\acute{i}n})$  y  $-2 \cdot vrp'_z / (v_{m\acute{a}x} - v_{m\acute{i}n})$ , respectivamente.

En el segundo subpaso se escala uniformemente a lo largo de los tres ejes (para mantener las pendientes unidad), de manera que el plano de recorte posterior en  $z = vrp'_z + B$  se convierta en el plano  $z = -1$ . El factor de escalamiento para este subpaso es  $-1/(vrp'_z + B)$ . El factor de escalamiento tiene signo negativo para que el factor de escalamiento sea positivo, ya que  $vrp'_z + B$  es negativo.

Al unir estos dos subpasos se obtiene la transformación de escalamiento de la perspectiva:

$$S_{\text{per}} = S \left( \frac{2vrp'_z}{(u_{\text{máx}} - u_{\text{mín}})(vrp'_z + B)}, \frac{2vrp'_z}{(v_{\text{máx}} - v_{\text{mín}})(vrp'_z + B)}, \frac{-1}{vrp'_z + B} \right). \quad (6.29)$$

Al aplicar el escalamiento a  $z$  cambian las posiciones del plano de proyección y de los planos de recorte a las nuevas posiciones:<sup>1</sup>

$$z_{\text{proy}} = -\frac{vrp'_z}{vrp'_z + B}, \quad z_{\text{mín}} = -\frac{vrp'_z + F}{vrp'_z + B}, \quad z_{\text{máx}} = -\frac{vrp'_z + B}{vrp'_z + B} = -1. \quad (6.30)$$

En resumen, la transformación de normalización de la visualización que convierte el volumen de vista de la proyección de perspectiva en el volumen de vista canónico es

$$N_{\text{per}} = S_{\text{per}} \cdot SH_{\text{par}} \cdot T(-\text{PRP}) \cdot R \cdot T(-\text{VRP}). \quad (6.31)$$

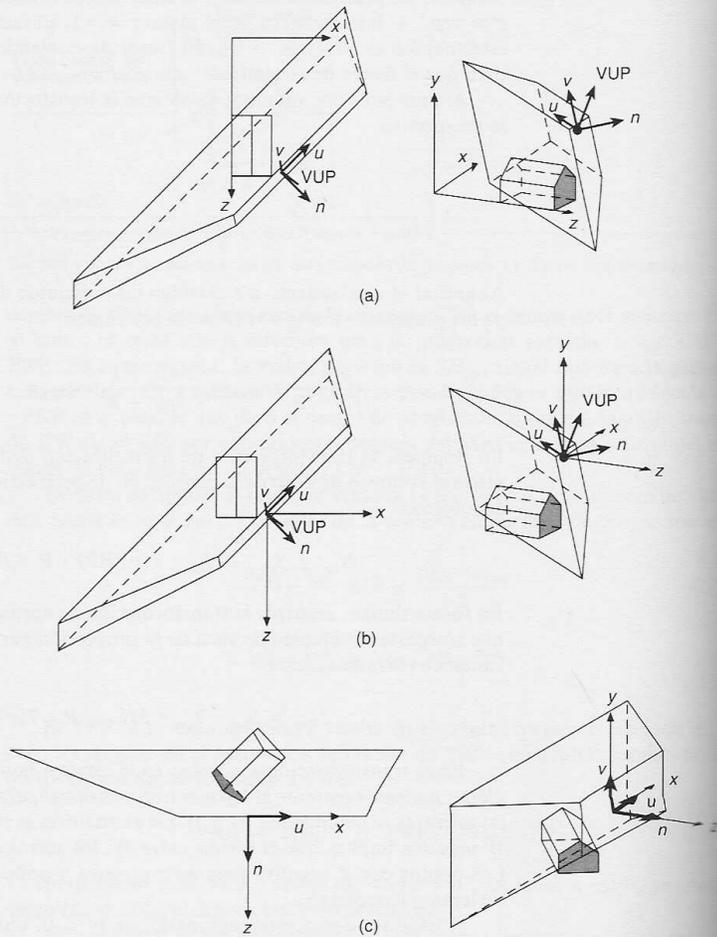
En forma similar, recuerde la transformación de normalización de visualización que convierte el volumen de vista de la proyección paralela al volumen de vista canónico correspondiente:

$$N_{\text{par}} = S_{\text{par}} \cdot T_{\text{par}} \cdot SH_{\text{par}} \cdot R \cdot T(-\text{VRP}). \quad (6.26)$$

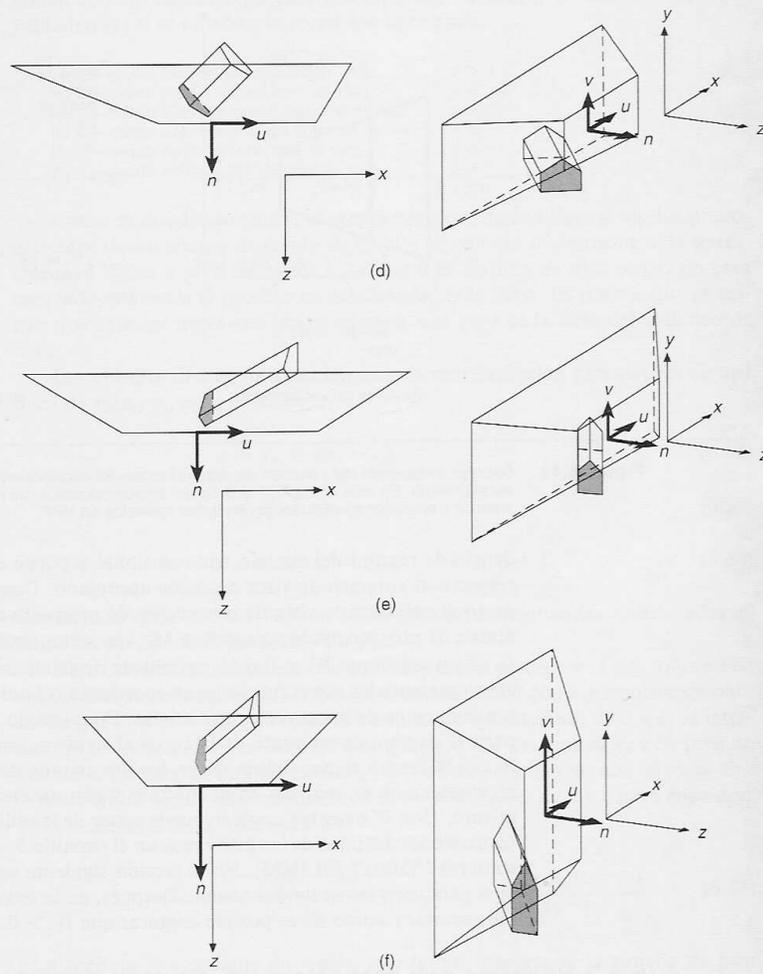
Estas transformaciones ocurren en el espacio homogéneo. ¿En qué condiciones podemos regresar al espacio tridimensional para el recorte? La respuesta es: mientras se cumpla que  $W > 0$ . Esta condición es fácil de comprender. Una  $W$  negativa implica que al dividir entre  $W$ , los signos de  $Z$  y  $z$  serán opuestos. Los puntos con  $Z$  negativa tendrán  $z$  positiva y podrían presentarse incluso si tuvieran que recortarse.

¿Cuándo podemos estar seguros de que  $W > 0$ ? Las rotaciones, las traslaciones, los escalamientos y los sesgos (según lo definido en el capítulo 5) aplicados a puntos, líneas y planos, mantendrán  $W > 0$ ; de hecho,  $W = 1$ . Por lo tanto, ni  $N_{\text{per}}$  ni  $N_{\text{par}}$  afectarán la coordenada homogénea de los puntos transformados, y por lo general no será necesaria la división entre  $W$  para establecer la correspon-

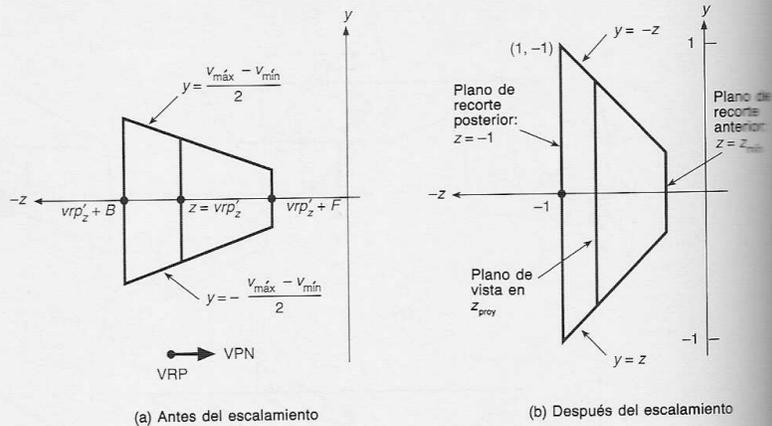
<sup>1</sup>  $z_{\text{mín}}$  y  $z_{\text{máx}}$  se nombran con base en su relación de valor absoluto, ya que  $z_{\text{mín}}$  es algebraicamente mayor que  $z_{\text{máx}}$ .



**Figura 6.41** Resultados en diversas etapas de la secuencia de vista de proyección de perspectiva. En todos los casos se presenta una proyección paralela superior y fuera de eje. (a) Se presenta la situación original de vista. (b) VRP se ha trasladado al origen. (c) El sistema de coordenadas  $(u, v, n)$  se ha hecho coincidir para que quede alineado con el sistema  $(x, y, z)$ . (d) El centro de proyección (COP) se ha trasladado al origen. (e) El volumen de vista se ha sesgado de manera que la dirección de proyección (DOP) sea paralela al eje  $z$ . (f) El volumen de vista se ha escalado al volumen de vista canónico de la proyección de perspectiva. Los



parámetros de vista son  $VRP = (1.0, 1.275, 2.6)$ ,  $VPN = (1.0, 0.253, 1.0)$ ,  $VUP = (0.414, 1.0, 0.253)$ ,  $PRP = (1.6, 0.0, 1.075)$ , ventana =  $(-1.325, 2.25, -0.575, 0.575)$ ,  $F = 0$ ,  $B = -1.2$ . (Figuras creadas con un programa escrito por L. Lu, The George Washington University.)



**Figura 6.42** Sección transversal del volumen de vista (a) antes del escalamiento y (b) después del escalamiento. En este ejemplo,  $F$  y  $B$  tienen signos opuestos, de manera que los planos anterior y posterior se encuentran en lados opuestos de VRP.

dencia de regreso del espacio tridimensional y puede efectuarse el recorte con respecto al volumen de vista canónico apropiado. Después del recorte con respecto al volumen de vista de proyección de perspectiva, es necesario aplicar la matriz de proyección de perspectiva  $M_{per}$  que comprende la división.

Es posible que  $W < 0$  si las primitivas de salida incluyen curvas y superficies representadas como funciones en coordenadas homogéneas y mostradas como segmentos de líneas rectas conectadas. Por ejemplo, si el signo de la función para  $W$  cambia de un punto de la curva al siguiente sin que cambie el signo de  $X$ ,  $X/W$  tendrá signos diferentes en los dos puntos de la curva. Las B-splines racionales que se analizan en el capítulo 9 son un ejemplo de este comportamiento. Una  $W$  negativa también puede surgir de la utilización de algunas transformaciones distintas de las que vimos en el capítulo 5, como sería el caso de las sombras "falsas" [BLIN88]. En la sección siguiente se analizan varios algoritmos para recortes tridimensionales. Después, en la sección 6.6.4, se analiza cómo recortar cuando no es posible asegurar que  $W > 0$ .

### 6.6.3 Recortes con respecto a un volumen de vista canónico en tres dimensiones

Los volúmenes de vista canónicos son un prisma de  $2 \times 2 \times 1$  en las proyecciones paralelas y la pirámide regular truncada derecha para proyecciones de perspectiva. Los algoritmos de recorte de Cohen-Sutherland y Cyrus-Beck que vimos en el capítulo 3 se pueden extender fácilmente a tres dimensiones.

La extensión del algoritmo bidimensional de Cohen-Sutherland para el volumen de vista canónico paralelo usa un código de región de seis bits; un bit es verdadero(1) si se satisface la condición apropiada:

bit 1 — punto encima del volumen de vista	$y > 1$
bit 2 — punto debajo del volumen de vista	$y < -1$
bit 3 — punto a la derecha del volumen de vista	$x > 1$
bit 4 — punto a la izquierda del volumen de vista	$x < -1$
bit 5 — punto detrás del volumen de vista	$z < -1$
bit 6 — punto enfrente del volumen de vista	$z > 0$

Como en dos dimensiones, se acepta trivialmente una línea si los dos puntos extremos tienen código de región de ceros y se rechaza trivialmente si la operación **and** lógica a nivel de bit de los códigos es distinta de sólo ceros. En caso contrario comienza el proceso de subdivisión de la línea. Es posible que se tengan que calcular hasta seis intersecciones, una para cada lado del volumen de vista.

Los cálculos de una intersección usan la representación paramétrica de una línea de  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  a  $P_1(x_1, y_1, z_1)$

$$x = x_0 + t(x_1 - x_0), \quad (6.32)$$

$$y = y_0 + t(y_1 - y_0), \quad (6.33)$$

$$z = z_0 + t(z_1 - z_0) \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (6.34)$$

Conforme  $t$  varía de 0 a 1, las tres ecuaciones proporcionan las coordenadas de todos los puntos de la línea, de  $P_0$  a  $P_1$ .

Para calcular la intersección de una línea con el plano  $y = 1$  del volumen de vista, reemplazamos la variable  $y$  de la ecuación (6.33) con 1 y resolvemos para hallar que  $t = (1 - y_0)/(y_1 - y_0)$ . Si  $t$  está fuera del intervalo de 0 a 1, la intersección se encuentra en la línea infinita que pasa por los puntos  $P_0$  y  $P_1$  pero no está en la porción de la línea entre  $P_0$  y  $P_1$ , de manera que no nos interesa. Si  $t$  se halla en  $[0, 1]$ , su valor se sustituye en las ecuaciones de  $x$  y  $z$  para encontrar las coordenadas de la intersección:

$$x = x_0 + \frac{(1 - y_0)(x_1 - x_0)}{y_1 - y_0}, \quad z = z_0 + \frac{(1 - y_0)(z_1 - z_0)}{y_1 - y_0}. \quad (6.35)$$

El algoritmo usa códigos de región que hacen innecesaria la prueba de  $t$  en  $[0, 1]$ .

Los bits de código de región para recortes con respecto al volumen de vista canónico de perspectiva son como sigue:

bit 1 — punto encima del volumen de vista	$y > -z$
bit 2 — punto debajo del volumen de vista	$y < z$
bit 3 — punto a la derecha del volumen de vista	$x > -z$

bit 4 — punto a la izquierda del volumen de vista  $x < z$   
 bit 5 — punto detrás del volumen de vista  $z < -1$   
 bit 6 — punto enfrente del volumen de vista  $z > z_{\min}$

El cálculo de las intersecciones de líneas con los planos inclinados es bastante sencillo. En el plano  $y = z$ , donde la ecuación (6.33) debe ser igual a la ecuación (6.34),  $y_0 + t(y_1 - y_0) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ . Entonces,

$$t = \frac{z_0 - y_0}{(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0)}. \quad (6.36)$$

Al sustituir  $t$  en las ecuaciones (6.32) y (6.33) para  $x$  y  $y$  se obtiene

$$x = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)(z_0 - y_0)}{(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0)}, \quad y = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)(z_0 - y_0)}{(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0)}. \quad (6.37)$$

Sabemos que  $z = y$ . Ahora queda claro por qué se escogió este volumen de vista canónico: las pendientes unitarias de los planos hacen más sencillo el cálculo de intersecciones que otras pendientes arbitrarias.

Hay otros algoritmos de recorte [CYRU78; LIAN84] basados en expresiones paramétricas para las líneas, los cuales pueden ser más eficientes que el sencillo algoritmo de Cohen-Sutherland. Véanse los capítulos 6 y 19 de [FOLE90].

#### 6.6.4 Recortes en coordenadas homogéneas

Hay dos razones para efectuar recortes en coordenadas homogéneas. La primera tiene que ver con la eficiencia: es posible transformar el volumen de vista canónico de proyección de perspectiva a un volumen de vista canónico de proyección paralela, de manera que siempre es posible usar un solo procedimiento de recorte sencillo, optimizado para el volumen de vista canónico de proyección paralela. Sin embargo, el recorte debe hacerse en coordenadas homogéneas para garantizar la corrección de los resultados. Este tipo de procedimiento de recorte suele proporcionarse en las implantaciones de hardware de la operación de vista. La segunda razón es que hay puntos que surgen como resultado de transformaciones homogéneas poco usuales y de la utilización de *splines* paramétricas racionales (Cap. 9) que pueden tener  $W$  negativa y por lo tanto pueden recortarse correctamente en coordenadas homogéneas pero no en tres dimensiones.

En lo que se refiere a los recortes, puede demostrarse que la transformación del volumen de vista canónico de proyección de perspectiva al volumen de vista canónico de proyección paralela es

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + z_{\min}} & \frac{-z_{\min}}{1 + z_{\min}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad z_{\min} \neq -1. \quad (6.38)$$

Recuerde, de la ecuación (6.30), que  $z_{\min} = -(vrp'_z + F)/(vrp'_z + B)$ , y de la ecuación (6.28) que  $VRP' = SH_{\text{par}} \cdot T(-PRP) \cdot [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$ . En la figura 6.43 se presenta el resultado de la aplicación de  $M$  al volumen de vista canónico de proyección de perspectiva.

La matriz  $M$  se integra con la transformación de normalización  $N_{\text{per}}$  de la proyección de perspectiva:

$$N'_{\text{per}} = M \cdot N_{\text{per}} = M \cdot S_{\text{per}} \cdot SH_{\text{par}} \cdot T(-PRP) \cdot R \cdot T(-VRP). \quad (6.39)$$

Al usar  $N'_{\text{per}}$  en lugar de  $N_{\text{per}}$  para las proyecciones de perspectiva y seguir usando  $N_{\text{par}}$  para las proyecciones paralelas, podemos recortar con respecto al volumen de vista canónico de proyección paralela en lugar de hacerlo con el volumen de vista canónico de proyección de perspectiva.

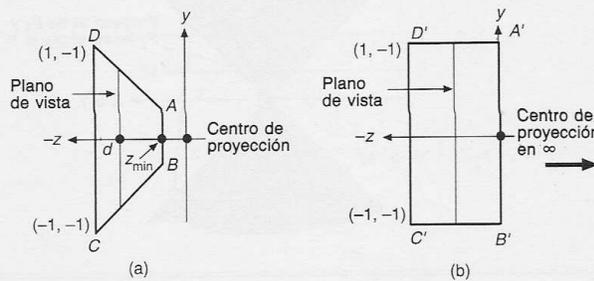
El volumen de vista de proyección paralela tridimensional está definido por  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $-1 \leq z \leq 0$ . Para hallar las desigualdades correspondientes en coordenadas homogéneas se reemplaza  $x$  por  $X/W$ ,  $y$  por  $Y/W$  y  $z$  por  $Z/W$ , para obtener

$$-1 \leq X/W \leq 1, \quad -1 \leq Y/W \leq 1, \quad -1 \leq Z/W \leq 1. \quad (6.40)$$

Las ecuaciones de plano correspondientes son

$$X = -W, \quad X = W, \quad Y = -W, \quad Y = W, \quad Z = -W, \quad Z = 0. \quad (6.41)$$

Para comprender la forma de usar estos límites y planos, hay que considerar por separado los casos de  $W > 0$  y  $W < 0$ . En el primer caso, las desigualdades de la ecuación (6.40) se pueden multiplicar por  $W$  sin alterar su sentido.



**Figura 6.43** Vistas laterales del volumen de vista de perspectiva normalizada antes (a) y después (b) de la aplicación de la matriz  $M$ .

En el segundo caso, la multiplicación cambia el sentido. Este resultado se puede expresar como

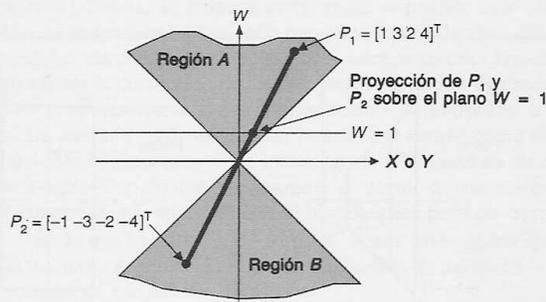
$$W > 0: -W \leq X \leq W, \quad -W \leq Y \leq W, \quad -W \leq Z \leq 0, \quad (6.42)$$

$$W < 0: -W \geq X \geq W, \quad -W \geq Y \geq W, \quad -W \geq Z \geq 0. \quad (6.43)$$

En nuestro caso (recorte de líneas ordinarias y puntos) sólo hay que usar la región indicada por la ecuación (6.42), ya que antes de la aplicación de  $M$  todos los puntos visibles tienen  $W > 0$  (normalmente,  $W = 1$ ).

Sin embargo, como veremos en el capítulo 9, en ocasiones es conveniente representar los puntos directamente en coordenadas homogéneas con coordenadas  $W$  arbitrarias. Por lo tanto, podemos tener  $W < 0$ , lo cual significa que el recorte se debe efectuar con respecto a las regiones indicadas por las ecuaciones (6.42) y (6.43). En la figura 6.44 se muestran estas regiones como  $A$  y  $B$ , y también se ilustra por qué hay que emplear ambas regiones.

El punto  $P_1 = [1 \ 3 \ 2 \ 4]^T$  en la región  $A$  se transforma al punto tridimensional  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4})$ , que se encuentra en el volumen de vista canónico  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $-1 \leq z \leq 0$ . El punto  $P_2 = -P_1 = [-1 \ -3 \ -2 \ -4]^T$ , que *no* está en la región  $A$  pero *sí* en la región  $B$ , se transforma al mismo punto tridimensional que  $P_1$ , específicamente, a  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4})$ . Si el recorte sólo se aplicara a la región  $A$ ,  $P_2$  se descartaría de manera incorrecta. Esta posibilidad se presenta porque los puntos  $P_1$  y  $P_2$  en coordenadas homogéneas difieren por un multiplicador constante  $(-1)$ , y sabemos que estos puntos homogéneos corresponden al mismo punto tridimensional (en el plano  $W = 1$  de espacio homogéneo).

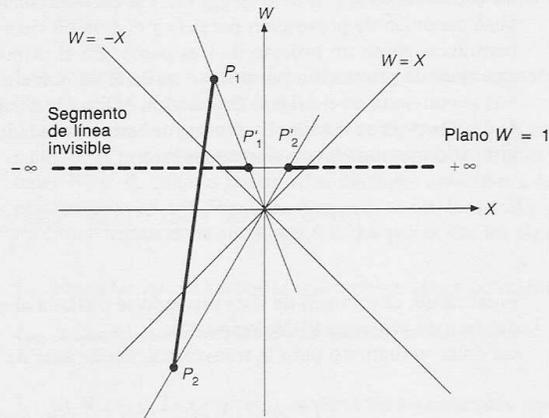


**Figura 6.44** Los puntos  $P_1$  y  $P_2$  corresponden al mismo punto en el plano  $W = 1$ , al igual que los demás puntos en la línea que pasa por el origen y los dos puntos. Los recortes en coordenadas homogéneas exclusivamente con respecto a la región  $A$  rechazarán de manera incorrecta el punto  $P_2$ .

Existen dos soluciones para este problema de los puntos en la región  $B$ . Una es recortar dos veces todos los puntos, una vez con respecto a cada región. Sin embargo, la duplicación de recortes es costosa. Una mejor solución es cambiarle el signo a los puntos, como  $P_2$ , con una  $W$  negativa, y después recortarlos. Así mismo, podemos recortar de manera correcta una línea cuyos puntos extremos se encuentran en la región  $B$  de la figura 6.44 si multiplicamos los puntos extremos por  $-1$  para colocarlos en la región  $A$ .

Otro problema se presenta con las líneas como  $P_1P_2$ , presentada en la figura 6.45, cuyos puntos extremos tienen valores opuestos de  $W$ . La proyección de la línea sobre el plano  $W = 1$  es de dos segmentos, uno de los cuales va a  $+\infty$  y el otro a  $-\infty$ . En este caso la solución es recortar dos veces, una con respecto a cada región, con la posibilidad de que cada recorte devuelva un segmento de línea visible. Una manera sencilla de hacerlo es recortando la línea con respecto a la región  $A$  para cambiarle el signo a los dos puntos extremos de la línea, y luego recortar de nuevo con respecto a la región  $A$ . Este método conserva una de las razones originales para hacer los recortes en las coordenadas homogéneas: usar una sola región de recorte. Los lectores que estén interesados en conocer más detalles pueden consultar [BLIN78a].

Dada la ecuación (6.41), es posible utilizar el algoritmo de Cohen-Sutherland o de Cyrus-Beck para efectuar los recortes. En [LIAN84] se presenta el código para el método de Cyrus-Beck. La única diferencia es que el recorte es en cuatro dimensiones, no en tres.



**Figura 6.45** La línea  $P_1P_2$  se proyecta como dos segmentos de línea, uno de  $P'_2$  a  $+\infty$  y el otro de  $P'_1$  a  $-\infty$  (se presentan como líneas sólidas gruesas cuando están dentro de la región de recorte y como líneas discontinuas cuando se encuentran fuera de esta región). La línea debe recortarse dos veces, una para cada región.

### 6.6.5 Correspondencia a un área de vista

Las primitivas de salida se recortan en el sistema de coordenadas de la proyección normalizada, también conocido como sistema de coordenadas tridimensional de pantalla. Para nuestro análisis supondremos que se ha usado el volumen de vista canónico de proyección paralela para el recorte (la proyección de perspectiva  $M$  transforma el volumen de vista de proyección de perspectiva al volumen de vista de proyección paralela si esta suposición es incorrecta). Por consiguiente, las coordenadas de todas las primitivas de salida que permanecen se encuentran en el volumen de vista  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0$ .

El programador de PHIGS especifica un área de vista tridimensional con la cual se establecerá la correspondencia del contenido del volumen de vista. El área de vista tridimensional está contenida en el cubo unidad  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ . La cara frontal  $z = 1$  del cubo unidad corresponde al mayor cuadrado que puede inscribirse en la pantalla. Suponemos que la esquina inferior izquierda del cuadrado está en  $(0, 0)$ . Por ejemplo, en una pantalla con resolución horizontal de 1024 y resolución vertical de 800, el cuadrado consiste en los píxeles  $P$  en las localidades  $(P_x, P_y)$  con  $0 \leq P_x \leq 799, 0 \leq P_y \leq 799$ . Presentamos los puntos en el cubo unidad descartando su coordenada  $z$ . De esta manera, el punto  $(0.5, 0.75, 0.46)$  se presentaría en las coordenadas  $(400, 599)$  de la pantalla. En el caso de la determinación de superficies visibles (Cap. 13), la coordenada  $z$  de cada primitiva de salida se emplea para determinar cuáles son visibles y cuáles están ocultas por otras primitivas con  $z$  mayor.

Dada un área de vista tridimensional dentro del cubo unidad, definida por las ecuaciones  $x_{v,\min} \leq x \leq x_{v,\max}$ , etc., la correspondencia entre el volumen de vista canónico de proyección paralela y el área de vista tridimensional se puede considerar como un proceso de tres pasos. En el primero, el volumen de vista canónico de proyección paralela se traslada de manera que su vértice  $(-1, -1, -1)$  se convierta en el origen. Esta acción es llevada a cabo por la traslación  $T(1, 1, 1)$ . Después se escala el volumen de vista trasladado al tamaño del área de vista tridimensional, con el escalamiento

$$S \left( \frac{x_{v,\max} - x_{v,\min}}{2}, \frac{y_{v,\max} - y_{v,\min}}{2}, \frac{z_{v,\max} - z_{v,\min}}{1} \right).$$

Finalmente, el volumen de vista escalado se traslada al vértice inferior izquierdo del área de vista con la traslación  $T(x_{v,\min}, y_{v,\min}, z_{v,\min})$ . Así, el volumen de vista canónico compuesto para la transformación de área de vista tridimensional es

$$M_{VV3DV} = T(x_{v,\min}, y_{v,\min}, z_{v,\min}) \cdot S \left( \frac{x_{v,\max} - x_{v,\min}}{2}, \frac{y_{v,\max} - y_{v,\min}}{2}, \frac{z_{v,\max} - z_{v,\min}}{1} \right) \cdot T(1, 1, 1). \quad (6.44)$$

Observe que esta transformación es similar, pero no igual, a la transformación ventana-área de vista  $M_{wv}$  que se desarrolló en la sección 5.5.

### 6.6.6 Resumen de implantación

Hay dos implantaciones de uso general para la transformación de visualización global. La primera, ilustrada en la figura 6.34 y analizada en las secciones 6.6.1 a 6.6.3, es apropiada cuando las primitivas de salida se definen en tres dimensiones y las transformaciones aplicadas a las primitivas de salida crean una  $W$  negativa. Sus pasos son los siguientes:

1. Extender las coordenadas tridimensionales a coordenadas homogéneas.
2. Aplicar la transformación de normalización  $N_{\text{par}}$  o  $N_{\text{per}}$ .
3. Dividir entre  $W$  para establecer la correspondencia de nuevo a tres dimensiones (en algunos casos se sabe que  $W = 1$  y no es necesaria la división).
4. Recortar en tres dimensiones con respecto al volumen de vista canónico de proyección paralela o de perspectiva, según resulte apropiado.
5. Extender las coordenadas tridimensionales a coordenadas homogéneas.
6. Llevar a cabo la proyección paralela usando  $M_{\text{ort}}$  [Ec. (6.11)] o efectuar la proyección de perspectiva usando  $M_{\text{per}}$  [Ec. (6.3)], con  $d = -1$ .
7. Trasladar y escalar a coordenadas de dispositivo usando la ecuación (6.44).
8. Dividir entre  $W$  para establecer la correspondencia entre coordenadas homogéneas y bidimensionales; la división lleva a cabo la proyección de perspectiva.

Los pasos 6 y 7 se realizan con una multiplicación de matrices y corresponden a las etapas 3 y 4 de la figura 6.34.

La segunda forma de implantar la operación de visualización es necesaria cuando las primitivas de salida se definen en coordenadas homogéneas y pueden tener  $W < 0$ , cuando las transformaciones aplicadas a las primitivas de salida pueden crear una  $W$  negativa, o cuando se implanta un solo algoritmo de recorte. Como vimos en la sección 6.6.4, sus pasos son los siguientes:

1. Extender las coordenadas tridimensionales a coordenadas homogéneas.
2. Aplicar la transformación de normalización  $N_{\text{par}}$  o  $N'_{\text{per}}$  [que incluye  $M$ , Ec. (6.38)].
3. Si  $W > 0$ , recortar en coordenadas homogéneas con respecto al volumen definido por la ecuación (6.42); en caso contrario, recortar en coordenadas homogéneas con respecto a los dos volúmenes de vista definidos por las ecuaciones (6.42) y (6.43).
4. Trasladar y escalar a coordenadas de dispositivos usando la ecuación (6.44).

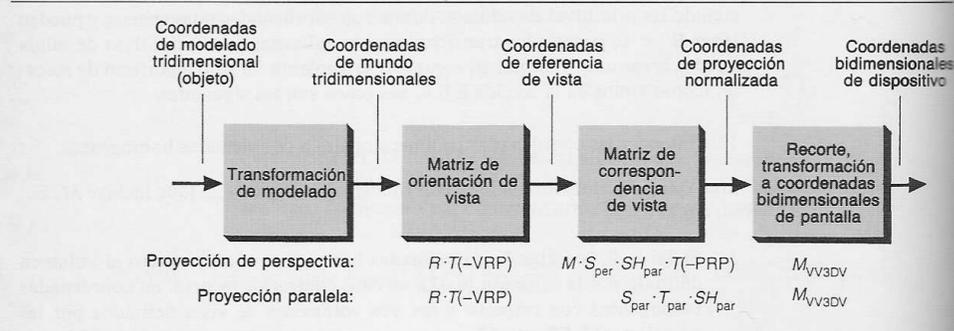
- Dividir entre  $W$  para establecer la correspondencia entre las coordenadas homogéneas y las coordenadas bidimensionales; con la división se realiza la proyección de perspectiva.

## 6.7 Sistemas de coordenadas

En los capítulos 5 y 6 se han usado diferentes sistemas de coordenadas. En esta sección se resumen todos los sistemas y se analiza la relación que existe entre ellos. Así mismo, se presentan los sinónimos utilizados en varias obras de referencia y en paquetes de subrutinas gráficas. En la figura 6.46 se muestra la secuencia de sistemas de coordenadas, usando los términos que generalmente aparecen en este libro; en un paquete de subrutinas gráficas sólo se usan algunos de los sistemas de coordenadas. Para los diversos sistemas de coordenadas, hemos elegido nombres que reflejen el uso común; por lo tanto, algunos de los nombres no son consistentes con otros. Observe que el término *espacio* en ocasiones se usa como sinónimo de *sistema*.

Comenzando por el sistema de coordenadas que está más lejos del dispositivo de presentación, a la izquierda en la figura 6.46, los objetos individuales se definen con un **sistema de coordenadas de objeto**. En PHIGS esto se conoce como **sistema de coordenadas de modelado**, y también es común el término **sistema de coordenadas locales**. Como veremos en el capítulo 7, con frecuencia existe una jerarquía de sistemas de coordenadas de modelado.

Los objetos se transforman a un **sistema de coordenadas de mundo**, el sistema en el cual se representa en el computador una escena o un objeto completo; esto se hace por medio de la **transformación de modelado**. Este sistema también



**Figura 6.46** Sistemas de coordenadas y su relación. Las matrices debajo de cada etapa llevan a cabo la transformación aplicada en la etapa para las proyecciones de perspectiva y paralela.

se conoce como **sistema de coordenadas del problema** o **sistema de coordenadas de la aplicación**.

El **sistema de coordenadas de referencia de vista** se usa en PHIGS como sistema de coordenadas para definir un volumen de vista. También se le llama sistema  $(u, v, n)$  o sistema  $(u, v, VPN)$ . El sistema Core [GSPC79] usaba un sistema de mano izquierda similar, aunque sin nombre. El sistema de mano izquierda se emplea para que, cuando el ojo o la cámara en el origen ve hacia  $+z$ , los valores mayores de  $z$  están más lejos del ojo,  $x$  está a la derecha y  $y$  está hacia arriba.

Otros paquetes, como RenderMan de Pixar [PIXA88], aplican restricciones al sistema de coordenadas de referencia de vista, requiriendo que el origen se encuentre en el centro de proyección y que el plano de vista sea normal al eje  $z$ . A esto lo llamamos **sistema de coordenadas oculares**. RenderMan y otros sistemas emplean el término **sistema de coordenadas de cámara**. Haciendo referencia a la sección 6.6, los tres primeros pasos de la transformación de normalización de proyección de perspectiva hacen la conversión del sistema de coordenadas de mundo al sistema de coordenadas oculares. El sistema de coordenadas oculares en ocasiones es de mano izquierda.

A partir de las coordenadas oculares, pasamos al **sistema de coordenadas de proyección normalizada** o **coordenadas tridimensionales de pantalla**, el sistema de coordenadas del volumen de vista canónico de proyección paralela (y del volumen de vista canónico de proyección de perspectiva después de la transformación de perspectiva). El sistema Core llama a este sistema **coordenadas tridimensionales de dispositivo normalizadas**. En ocasiones el sistema se conoce como **coordenadas tridimensionales de dispositivo lógico**. El término *normalizado* generalmente quiere decir que todos los valores de coordenadas se encuentran en el intervalo  $[0, 1]$  o  $[-1, 1]$ , mientras que el término *lógico* usualmente indica que los valores de coordenadas se hallan en otro intervalo previamente especificado, como  $[0, 1023]$ , que por lo general se define de manera que corresponda al sistema de coordenadas de un dispositivo de uso común. En algunos casos este sistema no está normalizado.

La proyección de tres dimensiones a dos crea lo que se conoce como **sistema de coordenadas bidimensionales de dispositivo**, también llamado **sistema de coordenadas de dispositivo normalizadas**, **sistema de coordenadas de imagen** en [SUTH74a] o **sistema de coordenadas de pantalla** en RenderMan. Otros términos utilizados son **coordenadas de pantalla**, **coordenadas de dispositivo**, **coordenadas bidimensionales de dispositivo** y **coordenadas de dispositivo físico** (a diferencia de la coordenada de dispositivo lógico que mencionamos antes). En RenderMan, la forma física se denomina **coordenadas espaciales de trama**.

Por desgracia, no hay una utilización estándar de muchos de estos términos. Por ejemplo, el término **sistema de coordenadas de pantalla** es usado por distintos autores para referirse a los últimos tres sistemas que analizamos, que abarcan tanto coordenadas bidimensionales como tridimensionales, así como coordenadas lógicas y físicas.

## Ejercicios

6.1 Escriba un programa que acepte una especificación de vista, calcule  $N_{\text{par}}$  y  $N_{\text{per}}$  y presente la casa cuyas coordenadas se definen en la figura 6.18.

6.2 Implante algoritmos de recorte tridimensional para las proyecciones paralela y de perspectiva.

6.3 Muestre que, para una proyección paralela con  $F = -\infty$  y  $B = +\infty$ , el resultado del recorte tridimensional y la proyección a dos dimensiones es igual que el resultado de la proyección a dos dimensiones y el recorte bidimensional.

6.4 Muestre que, si todos los objetos se encuentran frente al centro de proyección y que si  $F = -\infty$  y  $B = +\infty$ , el resultado del recorte en tres dimensiones con respecto al volumen de vista canónico de proyección de perspectiva, seguido por la proyección de perspectiva, es igual que efectuar primero la proyección de perspectiva a dos dimensiones y luego hacer un recorte bidimensional.

6.5 Verifique que  $S_{\text{per}}$  (Sec. 6.6.2) transforme el volumen de vista de la figura 6.42(a) al de la figura 6.42(b).

6.6 Escriba el código para el recorte tridimensional con respecto al cubo unidad. Generalice el código para recortes con respecto a cualquier sólido rectangular con caras normales a los ejes principales. ¿Es el código generalizado más o menos eficiente que el del caso del cubo unidad? Explique su respuesta.

6.7 Escriba el código para el recorte tridimensional con respecto al volumen de vista canónico de proyección de perspectiva. Ahora generalice al volumen de vista definido por

$$-a \cdot z_v \leq x_v \leq b \cdot z_v, \quad -c \cdot z_v \leq y_v \leq d \cdot z_v, \quad z_{\text{mín}} \leq z_v \leq z_{\text{máx}}.$$

Estas relaciones representan la forma general del volumen de vista después de los pasos 1 a 4 de la transformación de normalización de perspectiva. ¿Cuál caso es más eficiente? Explique su respuesta.

6.8 Escriba el código para el recorte tridimensional con respecto a un volumen de vista poliédrico general con seis caras definidas por

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Compare el esfuerzo computacional requerido con el de los siguientes casos:

- Recortes con respecto a alguno de los volúmenes de vista canónicos.
- Aplicar  $N_{\text{par}}$  y luego recortar con respecto al cubo unidad.

6.9 Considere una línea en tres dimensiones entre los puntos de coordenadas mundiales  $P_1 (6, 10, 3)$  y  $P_2 (-3, -5, 2)$  y una pirámide de visualización semi-infinita en la región  $-z \leq x \leq z$ ,  $-z \leq y \leq z$ , acotado por los planos  $z = +x$ ,  $z = -x$ ,  $z = +y$ ,  $z = -y$ . El plano de proyección se encuentra en  $z = 1$ .

- Recorte la línea en tres dimensiones (usando las ecuaciones paramétricas de líneas) y proyéctela al plano. ¿Cuáles son los puntos extremos recortados en el plano?
- Proyecte la línea sobre el plano y recorte las líneas con cálculos bidimensionales. ¿Cuáles son los puntos extremos recortados en el plano?

(Sugerencia: Si sus respuestas en las partes (a) y (b) no son idénticas, ¡intente de nuevo!)

6.10 Muestre lo que sucede si un objeto *detrás* del centro de proyección es proyectado por  $M_{\text{per}}$  y luego recortado. Su respuesta debe demostrar por qué, en términos generales, no se puede proyectar y luego recortar.

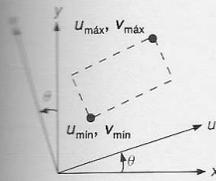


Figura 6.47  
Ventana rotada.

6.11 Considere la operación de vista bidimensional con una ventana rotada. Elabore una transformación normalizada para convertir la ventana al cuadrado unidad. La ventana está especificada por  $u_{\min}$ ,  $v_{\min}$ ,  $u_{\max}$ ,  $v_{\max}$  en el sistema de coordenadas VRC, como en la figura 6.47. Muestre que esta transformación es la misma que para el caso general de  $N_{\text{par}}$  tridimensional cuando el plano de proyección es el plano  $(x, y)$  y VUP tiene un componente  $x$  de  $-\sin \theta$  y un componente  $y$  de  $\cos \theta$  (es decir, la proyección paralela de VUP sobre el plano de vista es el eje  $v$ ).

6.12 ¿Cuál es el efecto de aplicar  $M_{\text{per}}$  a puntos cuya coordenada  $z$  sea menor que cero?

6.13 Diseñe e implante un conjunto de subrutinas de utilidad para generar una matriz de transformación de  $4 \times 4$  a partir de una secuencia arbitraria de transformaciones primitivas  $R$ ,  $S$  y  $T$ .

6.14 Dibuje un árbol de decisión que pueda usar cuando determine el tipo de proyección que empleará al crear una imagen. Aplique este árbol de decisión a las figuras de este capítulo que sean proyecciones de tres dimensiones.

6.15 El volumen de vista canónico para la proyección paralela se consideró como un paralelepípedo rectangular de  $2 \times 2 \times 1$ . Suponga que se usa en cambio el cubo unidad en el octante positivo, con un vértice en el origen.

- Encuentre la normalización  $N'_{\text{par}}$  para este volumen de vista.
- Encuentre el volumen de vista correspondiente de coordenadas homogéneas.

6.16 Proporcione los parámetros de visualización para las vistas frontal, superior y lateral de la casa de la figura 6.18 con el VRP en medio de la ventana. ¿Debe variar PRP para cada una de las vistas? Explique su respuesta.

6.17 Los pares estéreo son dos vistas de la misma escena desde puntos de referencia de proyección ligeramente distintos, pero con el mismo VRP. Sea  $d$  la separación estéreo, es decir, la distancia entre los dos puntos de referencia. Si pensamos en estos puntos de referencia como nuestros ojos, entonces  $d$  es la distancia entre los ojos. Sea  $P$  el punto intermedio entre los ojos. Con base en  $P$ ,  $d$ , VRP, VPN y VUP, obtenga expresiones para los dos puntos de referencia de proyección.