Materia: VISIÓN
Profesor: Dr. Félix Calderón Solorio
Alumno: Sergio Jhovanne Domínguez González

1. Demostrar las propiedades de la transformada de Fourer mediante el uso de imágenes.
2. Demostrar la transformada de Fourier en dos dimensiones para las señales
   - Impulso unitario
   - Constante

Propiedades

Linealidad

Esta propiedad nos dice que es equivalente multiplicar dos señales por determinado factor cada una y después sumarlas a multiplicar las transformadas de Fourier por los mismos factores respectivamente y llevar a cabo la suma en el dominio de la frecuencia, es decir:

$$ax(n) + by(n) \longrightarrow aX(k) + bY(k)$$

En las imágenes se muestra primero las imágenes originales y la comparación de las opera-

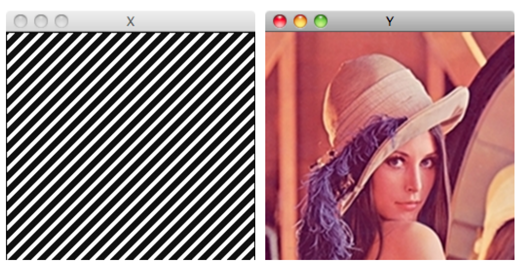


Figura 1: Imágenes originales.

ciones en ambos dominios. Las imagenes x y y fueron multiplicadas respectivamente por los factores $a = 2{,}0$ y $b = 5{,}0$.

(a) Suma en el tiempo.

(b) Transformada inversa de la suma en frecuencia.

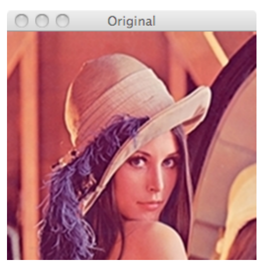
Figura 2: Comparación de resultados en tiempo y frecuencia.

Desplazamiento en tiempo

Esta propiedad nos nos dice que desplazar una imagen en el dominio del tiempo es equivalente a multiplicar su transformada de Fourier por la exponencial compleja que correspondiente a n_0 y m_0, es decir:

$$x(n-n_0, m-m_0) \longrightarrow e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n_0k+m_0l)}X(k)$$

En las imágenes anteriores se muestra la equivalencia de las operaciones en los dos dominios



(a) Imagen original.

(b) Imagen desplazada en tiempo.

(c) Transformada inversa de operación en frec .

Figura 3: Comparación de resultados en tiempo y frecuencia.

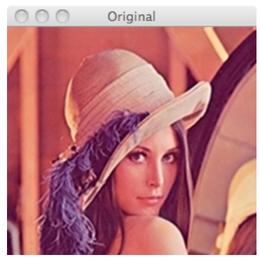
con un desplazamiento en el tiempo de $n_0 = 50$ y $m_0 = 80$.

Desplazamiento en frecuencia

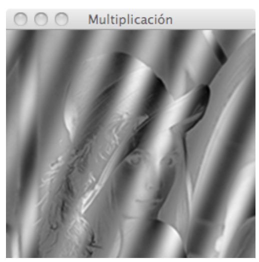
Desplazar una señal, en este caso una imagen, en el dominio de la frecuencia equivale a multiplicar la imagen original en el dominio del tiempo por la exponencial compleja correspondiente a n_0 y m_0, es decir:

$$e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n_0 k + m_0 l)} x(n) \longrightarrow X(k - k_0, l - l_0)$$

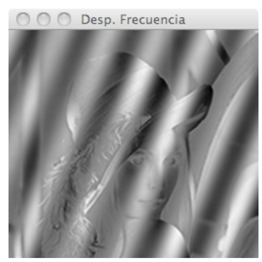
En las imágenes se muestra la equivalencia de estas operaciones en ambos dominios con un



(a) Imagen original.



(b) Operacion en dominio del tiempo.



(c) Transformada inversa de despl en frec.

Figura 4: Comparacion de resultados en tiempo y frecuencia.

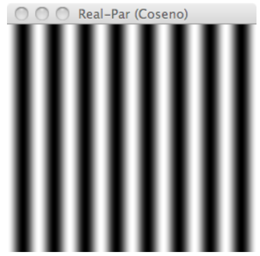
desplazamiento en frecuencia de $n_0 = 2$ y $m_0 = 5$.

Simetría de señal real y par

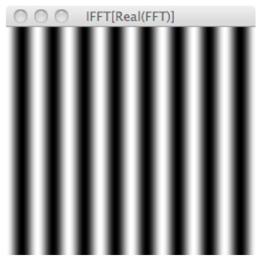
Esta propiedad nos dice que la transformada de Fourier de una señal real y par es una señal con parte real únicamente y que también es par, es decir:

$$x(n, m) \text{ real y par } \longrightarrow X(k, l) \text{ real y par}$$

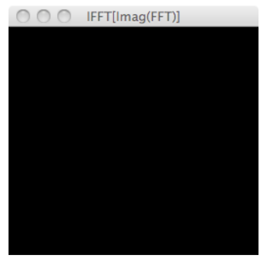
Con el objeto de visualizar mejor lo que se explica acerca de esta propiedad, en las imágenes se muestra ambas partes (real e imaginaria) al aplicar transformada inversa y con lo cual se observa que sólo hay la parte real.



(a) Imagen real-par.



(b) Parte real de la transformada inversa.



(c) Parte imag. de la transformada inversa.

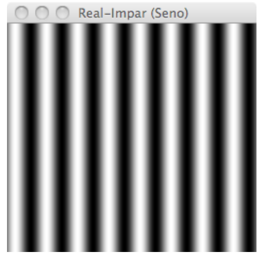
Figura 5: Operadores de ventana.

Simetría de señal real e impar

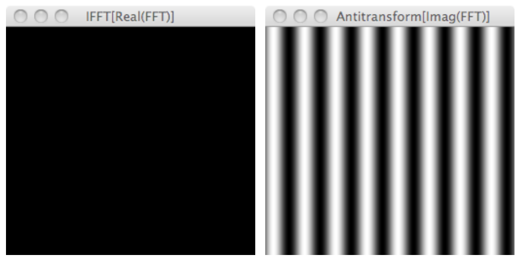
Esta propiedad nos dice que la transformada de Fourier de una señal real e impar es una señal con parte imaginaria únicamente y que es impar, es decir:

$$x(n) \text{ real y par } \longrightarrow X(k) \text{ real y par}$$

Para visualizar mejor lo que se explica acerca de esta propiedad, en las imágenes se muestra ambas partes (real e imaginaria) al aplicar transformada inversa y con lo cual se observa que sólo hay parte imaginaria.



(a) Imagen real-par.



(b) Parte real de la transformada inversa. (c) Parte imag de la transformada inversa.

Figura 6: Operadores de ventana.

Parseval

Esta propiedad nos habla de que la transformada de Fourier es una operación conservativa ya que al aplicarla, la magnitud del resultado es igual a la magnitud de la señal original.

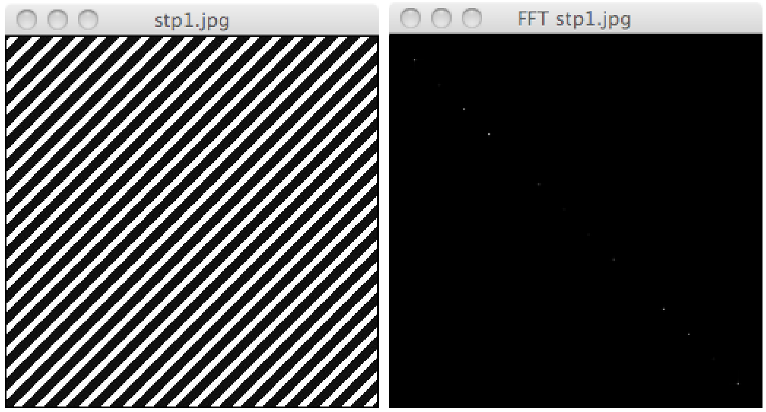
$$\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} \mid x(n,m) \mid \longrightarrow NM \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} \mid X(k,l) \mid$$

Al obtener la magnitud de ambas imágenes se obtuvieron los siguientes resultados:

$$Magnitud(Imagen) = 1.875586515 \times 10^9$$

$$Magnitud(TF(Imagen)) = 1.8755865149999826 \times 10^9$$

con lo cual se comprueba la relación de Parseval.



(a) Imagen original.

(b) Magnitud de la transformada de Fourier.

Figura 7: Imagen en tiempo y frecuencia.

Demostraciones

La transformada de Fourer en dos dimensiones se expresa:

$$X(k,l) = \frac{1}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} x(n,m)e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(nk+ml)}$$

Impulso un itario

$$\delta(n-n_o, m-m_o) = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}kn_0+\frac{2\pi}{M}lm_0\right)}$$

$$\delta(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n=0 \text{ y } m=0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La transformada de Fourier, de acuerdo a su expresión, la calculamos:

$$X(k,l) = \frac{1}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} \delta(n-n_0, m-m_0)e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(nk+ml)}$$

Tenemos entonces que para cualquier valor de $m \neq m_0$ y $n \neq n_0$ la función impulso unitario $\delta(n,m) = 0$.
Por lo tanto la sumatoria se reduce a:

$$X(k,l) = \frac{1}{NM}e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(n_0k+m_0l)} = \frac{1}{NM}e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}n_0k+\frac{2\pi}{NM}m_0l\right)}$$

Constante

Consideramos:

$$x(n,m) = C$$

La transformada de Fourier, de acuerdo a su expresión, es:

$$X(k,l) = \frac{1}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} Ce^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(nk+ml)}$$

$$X(k,l) = \frac{C}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(nk+ml)} = \frac{C}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{M-1} e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(ml)}\right] e^{-j\left(\frac{2\pi}{NM}\right)(nk)}$$

La sumatoria interna equivale a M para $l = 0$ y 0 para $l \neq 0$ y la externa eqivale a MN para $k = 0$ y 0 para $k \neq 0$ por lo cual:

$$FFT(C) = C\delta(k,l)$$

Conculsiones

Con el desarrollo de esta tarea se logró una mejor comprensión de la transformada de Fourier la cual tiene aplicaciones importantes en el tratamiento deseñales y diseño de filtros digitales gracias a que, al aplicarla, nos permite representar una señal en el dominio de la frecuencia y, a su vez, al aplicar la transformada inversa, regresar a la señal original en el dominio del tiempo. Principalmente se observó que gracias a sus propiedades es posible realizar ciertas operaciones en el dominio del tiempo y obtener los mismos resultados al hacerlas en el dominio de la frecuencia, algo que podemos aprovechar dependiendo de las características del problema que queramos resolver ya que podemos deducir en que dominio conviene más realizar la operación.