

TEORIA Y ANALISIS DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS

Por **A. E. Fitzgerald**, Vicepresidente de Actividades Académicas, Decano de Facultad, Northeastern University.

Charles Kingsley, Jr., Profesor Adjunto de Ingeniería Eléctrica, Massachusetts Institute of Technology.

Alexander Kusko, Alexander Kusko, Inc., Ingenieros Consultores, Profesor de Ingeniería Eléctrica, Massachusetts Institute of Technology.



EDITORIAL HISPANO EUROPEA
BARCELONA (ESPAÑA)

Encuentra más libros en:

www.librosdejoe.com

Colección dirigida por **Alfonso Enseñat Badias**
Dr. Ingeniero Industrial. Profesor de la E. T. S. I. I. B.
Depto. de Ingeniería Eléctrica de la Universidad Politécnica de Barcelona

Título de la edición original:
Electric Machinery.

Traducida por: **Enrique Belza Valls.**

Es propiedad, 1975
© **McGraw-Hill Book Company.**
Nueva York (E.E. U.U.)

Editorial Hispano Europea.
Bori y Fontestá, 6-8. Barcelona-6 (España)

Depósito Legal: B. 6614-1975

ISBN: 84-255-0392-2

IMPRESO EN ESPAÑA

PRINTED IN SPAIN

GROBES, S. A. - París, 157-159 - Barcelona-11

Prólogo

A lo largo de sus dos últimas ediciones se ha pretendido presentar en este libro un estudio coordinado de los procesos, dispositivos y sistemas relacionados con la conversión de energía electromecánica. Se ha procurado resaltar los conceptos físicos de tensión, par, fuerza y producción por creer que en ellos residen los conocimientos más permanentes y valiosos para el profesional. Asimismo, se ha prestado especial atención a las funciones más sobresalientes, a las limitaciones y a las máquinas, como partes de un sistema conjunto. Para cumplir estos objetivos dentro de las necesidades de hoy y de mañana, se ha reestructurado el texto, redactando nuevamente múltiples apartados y añadiendo un considerable volumen de materias nuevas.

Probablemente el hecho más importante acaecido en los últimos años ha sido el de la introducción de semiconductores de potencia en su empleo con máquinas, con lo que se han salvado o reducido algunas limitaciones de orden técnico o económico antes existentes en los campos de control, funcionamiento o aplicaciones. Las perspectivas que se prevén en el desarrollo de estas combinaciones durante las próximas décadas son muy amplias, por lo que de acuerdo con ello se ha añadido también abundante material relativo a dispositivos estáticos.

También ha intervenido un tercer autor, tanto para contar con la colaboración de un experto en estas materias como para reflejar en el texto los puntos de vista de un ingeniero práctico con amplia experiencia (género muy raro en el mundo pedagógico de hoy).

Para adaptarse mejor a las corrientes modernas se ha añadido al primer capítulo una introducción a los circuitos magnéticos: esperamos que este tema, junto con el estudio de los transformadores con núcleo, constituirá la base necesaria para el conocimiento de los dispositivos de conversión de energía. Asimismo se ha añadido un apéndice relativo a circuitos trifásicos para puntualizar algunos de los aspectos más sencillos de la teoría de circuitos, de importancia en la manipulación de la energía.

En este libro se contienen más temas de los que normalmente pueden ser tratados en el tiempo de que se dispone en un cursillo típico. Por otra parte, en los cursos normales el programa y orden de materias vienen fijados por circunstancias locales y por los deseos y entusiasmo individuales de los instructores, motivo por el cual hemos procurado dar la máxima flexibilidad sin menoscabo de la continuidad. Hojeando el libro durante una o dos horas, el instructor podrá seleccionar diversos cursos, de contenido y secuencias distintos.

Durante el planteamiento y redactado del libro, hemos incurrido en deuda con numerosas personas. Por nuestra parte deseáramos conocer los comentarios y sugerencias de tantos instructores como han hecho uso de las últimas ediciones.

A. E. FITZGERALD
CHARLES KINGSLEY, Jr.
ALEXANDER KUSKO

Indice

Prólogo	V
1. Circuitos magnéticos y transformadores	1
1-1. Circuitos magnéticos, 2.— 1-2. Funcionamiento con corriente alterna, 8.— 1-3. Propiedades de los materiales, 11.— 1-4. Circuitos magnéticamente acoplados, 20.— 1-5. Condiciones en vacío, 23.— 1-6. Efectos de la corriente secundaria. Transformadora ideal, 27.— 1-7. Reactancia de transformadores y circuitos equivalentes, 30.— 1-8. Aspectos técnicos del análisis de transformadores, 35.— 1-9. Transformadores en circuitos trifásicos, 47.— 1-10. El sistema de cálculo con valores relativos, 52.— 1-11. Autotransformadores. Transformadores de múltiples circuitos, 56.— 1-12. Resumen, 64.— Problemas, 67.	
2. Conversión electromecánica de energía. Fundamentos	75
2-1. Balance energético, 76.— 2-2. Energía en sistemas magnéticos con excitación simple, 78.— 2-3. Fuerza mecánica y energía, 83.— 2-4. Funciones de estado, variables, coenergía, 85.— 2-5. Sistemas de campo eléctrico con excitación simple, 92.— 2-6. Sistemas de campo magnético con excitación múltiple, 97.— 2-7. Ecuaciones dinámicas, 101.— 2-8. Técnicas analíticas, 105.— 2-9. Resumen, 111.— Problemas, 112.	
3. Máquinas rotativas: Conceptos básicos	123
3-1. Conceptos elementales, 123.— 3-2. Tensiones inducidas, 137.— 3-3. F.M.M. de los devanados distribuidos, 142.— 3-4. Campos magnéticos giratorios, 149.— 3-5. El par en máquinas de polos no salientes, 155.— 3-6. Resumen, 164.— Problemas, 166.	

4. Máquinas rotativas: Consideraciones técnicas	171
4-1. Introducción a las máquinas síncronas polifásicas, 171.— 4-2. Introducción a las máquinas de inducción polifásicas, 174.— 4-3. Funcionamiento del colector, 178.— 4-4. Introducción a las máquinas de corriente continua, 181.— 4-5. Los problemas de las máquinas, 188.— 4-6. Saturación magnética, 191.— 4-7. Excitación, 195.— 4-8. Pérdidas, 198.— 4-9. Características nominales y calentamiento, 201.— 4-10. Refrigeración de las máquinas eléctricas, 205.— 4-11. Resumen, 207.— Problemas, 207.	
5. Máquinas de corriente continua	215
5-1. Reacción del inducido, 215.— 5-2. Conmutación y polos auxiliares de conmutación, 218.— 5-3. Devanado de compensación, 221.— 5-4. Principios analíticos: Circuito eléctrico, 223.— 5-5. Principios analíticos: Circuito magnético, 227.— 5-6. Análisis del funcionamiento en régimen permanente, 230.— 5-7. Regulación de la velocidad de los motores, 240.— 5-8. Resumen. Empleo de máquinas de corriente continua, 245.— Problemas, 248.	
6. Máquinas síncronas: Régimen permanente	263
6-1. Ondas de flujo y de f.m.m. en máquinas síncronas, 263.— 6-2. Las máquinas síncronas como impedancias, 269.— 6-3. Características en circuito abierto y en cortocircuito, 271.— 6-4. Características en régimen permanente, 280.— 6-5. Característica potencia-ángulo en régimen permanente, 285.— 6-6. Efecto de los polos salientes. Introducción a la teoría de las dos reacciones, 291.— 6-7. Característica de potencia-ángulo en máquinas de polos salientes, 298.— 6-8. Acoplamiento de generadores síncronos, 304.— 6-9. Resumen, 307.— Problemas, 308.	
7. Motores de inducción: Régimen permanente	313
7-1. Flujo y ondas de f.m.m. en máquinas de inducción, 313.— 7-2. Circuito equivalente, 318.— 7-3. Análisis del circuito equivalente, 321.— 7-4. Potencia y par según el teorema de Thevenin, 325.— 7-5. Curvas normalizadas par-deslizamiento, 331.— 7-6. Efectos de la resistencia del rotor. Rotores de doble jaula, 335.— 7-7. Regulación de velocidad de los motores de inducción, 344.— 7-8. Resumen, 349.— Problemas, 350.	
8. Dispositivos estáticos para la regulación de motores	357
8-1. Aplicación de los dispositivos estáticos de regulación, 357.— 8-2. Introducción a los circuitos rectificadores, 363.— 8-3. Accionamiento de motores de corriente continua, 372.— 8-4. Introducción a los inversores, 389.— 8-5. Sistemas de accionamiento de motores de corriente alterna por regulación de frecuencia, 398.— 8-6. Resumen, 402.— Problemas, 403.	

9. Máquinas de corriente continua: Consideraciones dinámicas	407
9-1. La máquina de corriente continua ideal, 407.— 9-2. Ecuaciones dinámicas, 409.— 9-3. Funciones de transferencia y diagramas de bloques de máquinas de corriente continua, 410.— 9-4. Un regulador de velocidad elemental, 423.— 9-5. Metadinamos y amplidinas, 430.— 9-6. Efectos de la saturación. Generadores autoexcitados, 433.— 9-7. Resumen, 437.— Problemas, 438.	
10. Máquinas de corriente alterna, período transitorio y dinámica	447
10-1. Fenómenos transitorios en máquinas síncronas: Circuitos acoplados, 447.— 10-2. Fenómenos transitorios en máquinas síncronas: Imagen física aproximada, 450.— 10-3. Reactancias y constantes de tiempo en máquinas síncronas, 456.— 10-4. Circuito equivalente en condiciones transitorias, 459.— 10-5. Aplicación a transitorios en sistemas, 463.— 10-6. Transitorios eléctricos en máquinas de inducción, 468.— 10-7. Dinámica de máquinas síncronas, 472.— 10-8. Dinámica de las máquinas de inducción, 480.— 10-9. Resumen, 484.— Problemas, 484.	
11. Motores fraccionales de corriente alterna	493
11-1. Motores de inducción monofásicos. Examen cualitativo, 494.— 11-2. Arranque y marcha de los motores de inducción y síncronos monofásicos, 499.— 11-3. Motores serie. Motores universales, 507.— 11-4. Teoría de campos rotativos en motores de inducción monofásicos, 510.— 11-5. Funcionamiento desequilibrado de máquinas bifásicas simétricas. Concepto de componente simétrica, 518.— 11-6. Motores bifásicos para sistemas de control, 525.— 11-7. Motores de impulsos, 532.— 11-8. Tacómetros de corriente alterna, 536.— 11-9. Síncros y sincrotransformadores, 538.— 11-10. Resumen, 542.— Problemas, 543.	
Apéndice A. Circuitos trifásicos	549
A-1. Generación de tensiones trifásicas, 549.— A-2. Tensiones, intensidades y potencias trifásicas, 552.— A-3. Circuitos conectados en Y o en Δ , 557.— A-4. Análisis de circuitos trifásicos equilibrados: Diagramas unifilares, 563.— A-5. Otros sistemas polifásicos, 565.	
Apéndice B. Tensiones y campos magnéticos en los devanados de alterna distribuidos	567
B-1. Tensiones inducidas, 567.— B-2. Ondas de f.m.m., 574.	
Apéndice C. Tabla de constantes y factores de conversión a unidades MKS	579
Índice alfabético de materias	581

Circuitos magnéticos y transformadores

El objeto de este libro es el de estudiar los dispositivos empleados en la conversión de energía mecánica en eléctrica y viceversa, con especial atención a las máquinas electromagnéticas rotativas de gran importancia y difusión —motores y generadores que suministran la energía de la que depende la sociedad industrializada. Se ha prestado especial atención a los distintos y amplios aspectos de la conversión electromecánica de la energía, no sólo por su importancia en otras máquinas distintas de las rotativas sino también para fijar puntos de vista.

Se estudian asimismo los transformadores, que si bien no son convertidores de energía electromecánica, desempeñan un papel importante en el problema conjunto de la conversión de energía. Además, sus detalles analíticos están bajo muchos aspectos íntimamente relacionados con los de los motores y generadores. Los conceptos sobre el funcionamiento de los transformadores tienen además la ventaja adicional de servir de ayuda en el estudio de las máquinas.

Prácticamente en todos los transformadores y máquinas eléctricas se emplean materiales magnéticos para guiar los campos que actúan de intermediarios en la transmisión y conversión de la energía. La relación entre la magnitud de los campos magnéticos y los circuitos eléctricos con los que se concatenan juega un papel importante en la descripción del funcionamiento de los distintos tipos de equipos que se tratan en este libro. El material magnético fija las dimensiones del equipo y su capacidad, y constituye una limitación debido a la saturación, y a la pérdida en el rendimiento. En este capítulo partiremos de las leyes físicas por las que se rigen los campos magnéticos en estructuras relativamente sencillas, describiremos los materiales empleados, y finalmente se tratará de los transformadores con cierto detalle. En los capítulos siguientes se hará uso continuo de los conceptos básicos de los circuitos magnéticos expuestos en el presente.

1-1. CIRCUITOS MAGNETICOS

La forma de actuar los campos magnéticos se deduce de las leyes de Maxwell completadas con datos relativos a las distintas relaciones, que introducen los parámetros correspondientes a los diferentes materiales recorridos por dichos campos. En las máquinas y transformadores estudiados en este libro, sus frecuencias y magnitudes son tales que permiten despreciar la intervención de las corrientes de desplazamiento en las leyes de Maxwell considerando el caso como *casí estático*. Con esto queremos significar que los campos magnéticos bajo condiciones de tiempo variables son los mismos que en condiciones estáticas para un mismo nivel eléctrico. Bajo un punto de vista práctico, esto supone que podemos resolver todos los problemas de circuitos magnéticos como si fueran estáticos, introduciendo posteriormente cualquier variación en el tiempo. De otra forma, la resolución de problemas relativos a los circuitos magnéticos, dada la configuración actual de las máquinas, sería una labor extremadamente dificultosa.

La ley fundamental que relaciona corrientes eléctricas y campos magnéticos es la de Ampere:

$$\int_s J \cdot da = \oint \mathcal{H} \cdot dl \quad (1-1)$$

en la que J es la densidad de corriente y \mathcal{H} la excitación específica o intensidad del campo magnético. En el sistema MKS, J viene expresada en ampere por metro cuadrado, y \mathcal{H} en ampere vueltas por metro. La fórmula 1-1 establece que la integral de línea de \mathcal{H} a lo largo del contorno de una superficie a través de la cual pasa la densidad de corriente J , es igual a la corriente total a través de ella. Aplicando la fórmula 1-1 al núcleo simple de la Fig. 1-1, el primer miembro se convierte sencillamente en el producto Ni de espiras por ampere, mientras que el segundo miembro se convierte en el producto $\mathcal{H}_c l_c$ de la intensidad por la longitud media del núcleo. Más adelante demostraremos que \mathcal{H}_c puede considerarse como constante a lo largo de todo el recorrido l_c . La fórmula se convierte así en:

$$Ni = \mathcal{H}_c l_c \quad (1-2)$$

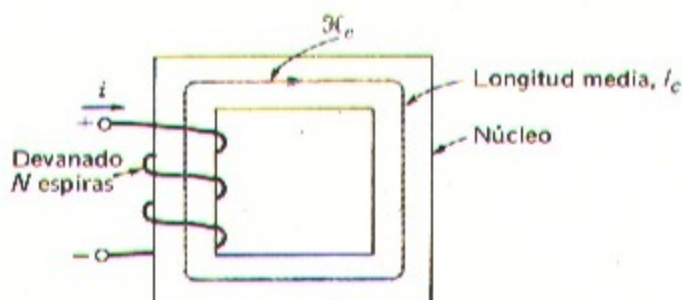


Fig. 1-1. Circuito magnético simple.

Los amper-vueltas Ni pueden proceder de uno o de varios bobinados, siendo en este caso Ni el total de todos ellos. La dirección de \mathcal{H}_c respecto a Ni viene dada matemáticamente por la fórmula 1-1, pero prácticamente se deduce por la regla de la mano derecha.

La intensidad de campo \mathcal{H} origina, allá donde exista, una densidad de flujo \mathcal{B} , cuyo valor es:

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H} \quad (1-3)$$

\mathcal{B} se mide en weber por metro cuadrado, siendo 1 weber = 10^8 líneas del campo magnético. El factor μ es la permeabilidad, siendo ésta una propiedad del material. En el sistema M K S, la permeabilidad en el vacío es $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ weber/amper-vueltas metro. En los materiales ferromagnéticos, se acostumbra expresar la permeabilidad como permeabilidad relativa μ_r respecto a la del vacío, es decir: $\mu = \mu_r \mu_0$. Los valores de μ_r de los materiales empleados en las máquinas acostumbran estar comprendidos entre 2.000 y 6.000. La ecuación 1-1 debe satisfacerse para cualquier recorrido en el espacio que quede concatenado con el bobinado de la Fig. 1-1. Los valores de \mathcal{H} a lo largo de dichos recorridos son independientes de que el trayecto discorra a través del material o en espacio vacío, por consiguiente, la densidad de flujo \mathcal{B} producida por \mathcal{H} será sumamente pequeña en todas partes excepto en el hierro del núcleo. Cuando se estudian los circuitos magnéticos con el fin de determinar el flujo y su densidad en los distintos puntos del núcleo, generalmente puede desprejarse el campo existente fuera de él. Sin embargo, cuando existen dos o más bobinados en un circuito magnético, como ocurre en los transformadores y en las máquinas rotativas, los campos exteriores al núcleo, llamados de dispersión, adquieren gran importancia en la determinación del acoplamiento entre ellos.

Los transformadores se devanan sobre núcleos cerrados como el de la figura 1-1, pero las máquinas o dispositivos de conversión de energía provistos de una parte móvil, deben tener necesariamente entrehierros en sus núcleos. En la figura 1-2 se representa un circuito magnético con entrehierro. Al aplicar a estos circuitos la fórmula 1-1, ésta se transforma en:

$$Ni = \mathcal{H}_c l_c + \mathcal{H}_g g \quad (1-4)$$

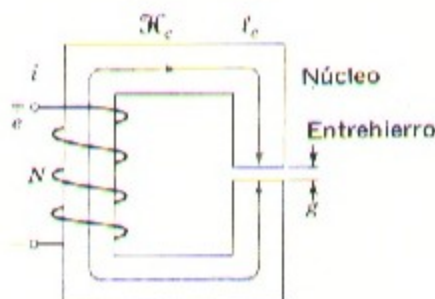


Fig. 1-2. Circuito magnético con entrehierro.

siendo \mathcal{H}_g la intensidad en el entrehierro. El flujo ϕ es continuo a lo largo del circuito magnético, y viene dado por la fórmula

$$\phi = \int_s \mathcal{B} \cdot da \quad (1-5)$$

Dentro de un núcleo puede considerarse uniforme la densidad de flujo en toda el área A_c de una sección, de forma que el flujo total en ella será:

$$\phi = \mathcal{B}_c A_c \quad (1-6)$$

La fórmula 1-4 puede expresarse en función de las densidades de flujo en el núcleo y en el entrehierro, o en función del flujo total:

$$Ni = \frac{\mathcal{B}_c}{\mu_c} l_c + \frac{\mathcal{B}_g}{\mu_0} g \quad (1-7)$$

$$Ni = \frac{\phi l_c}{A_c \mu_c} + \frac{\phi}{A_g \mu_0} g \quad (1-8)$$

El término Ni se representa por \mathcal{F} y se denomina *fuerza magnetomotriz* o *f.m.m.*

Los coeficientes del segundo miembro se denominan, *permeancia* \mathcal{P} o *reluctancia* \mathcal{R} , siendo:

$$\mathcal{R}_c = \frac{1}{\mathcal{P}_c} = \frac{l_c}{\mu_c A_c} \quad (1-9)$$

con lo que la ecuación 1-8 se convierte en:

$$\mathcal{F} = \phi(\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g) \quad (1-10)$$

Existen dificultades para resolver ϕ en la fórmula 1-10 dadas \mathcal{F} y las dimensiones geométricas, debido a que la permeabilidad μ_c no es una constante, sino que depende de \mathcal{B}_c . Puede escribirse:

$$\phi = \frac{\mathcal{F} / \mathcal{R}_g}{1 + \mathcal{R}_c / \mathcal{R}_g} = \frac{\mathcal{F} / \mathcal{R}_g}{1 + (\mu_0 / \mu_c) (l_c / g) (A_g / A_c)} \quad (1-11)$$

En un circuito magnético clásico, el término $(\mu_0 l_c A_g / \mu_c g A_c)$ es mucho menor que la unidad; por lo que el funcionamiento del circuito viene determinado únicamente por la

reluctancia del entrehierro. Dicha reluctancia, puesto que depende de μ_0 es independiente de la densidad de flujo.

Ejemplo 1-1

Un circuito magnético como el de la figura 1-2 tiene las siguientes dimensiones: $A_c = 9 \text{ cm}^2$; $A_g = 9 \text{ cm}^2$; $g = 0,050 \text{ cm.}$; $l_c = 30 \text{ cm.}$; $N = 500$ espiras. Tomando para el hierro $\mu_r = 5000$, hallar: (a) La corriente i cuando $\mathcal{B}_c = 1 \text{ weber/m}^2$. (b) El flujo ϕ y el flujo concatenado $\lambda = N\phi$.

SOLUCION

(a) Según la ecuación 1-4, los amper-vueltas en este circuito serán:

$$Ni = \frac{\mathcal{B}_c l_c}{\mu_r \mu_0} + \frac{\mathcal{B}_g g}{\mu_0}$$

y puesto que $\phi = \mathcal{B}_c A_c = \mathcal{B}_g A_g$, la corriente será:

$$\begin{aligned} i &= \frac{\mathcal{B}_c}{\mu_0 N} \left(\frac{l_c}{\mu_r} + g \right) \\ &= \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times 500} (0,6 + 5,0) 10^{-4} \\ &= 0,89 \text{ amp} \end{aligned}$$

Obsérvese que la reluctancia en los 30 cm. de hierro es únicamente $0,6/5,0 = 0,12$ de la reluctancia en los 0,050 cm. del entrehierro.

(b) De la fórmula 1-6

$$\phi = \mathcal{B}_c A_c = 1 \times 9 \times 10^{-4} = 9 \times 10^{-4} \text{ wb.}$$

$$\lambda = N\phi = 500 \times 9 \times 10^{-4} = 0,45 \text{ wb.-espiras}$$

Al cruzar el entrehierro las líneas de fuerza del campo magnético tienden a separarse, con lo que la densidad de flujo \mathcal{B}_g en el mismo es menor que la \mathcal{B}_c existente en el núcleo; ello obliga a introducir una corrección cuando se pretende calcular con mayor detalle un circuito magnético. Dicha corrección consiste generalmente en sumar el espesor del entrehierro a sus dimensiones transversales. Por ejemplo, si la sección del núcleo es de $3 \times 3 \text{ cm.}$, el área corregida del entrehierro de 0,05 cm. será $A_g = (3 + 0,05)(3 + 0,05) = 9,3 \text{ cm.}^2$, con lo que su reluctancia será aproximadamente un 3 por ciento menor que sin la corrección.

Ejemplo 1-2

El circuito magnético de la Fig. 1-3 tiene dos ramas paralelas concatenadas ambas con el bobinado. Hállese el flujo y su densidad en cada una de las ramas. Despréciense el efecto de los bordes en los entrehierros así como la dispersión del campo, y considérese que la permeabilidad del hierro es tan elevada que todos los amper-vueltas del bobinado se consumen en los entrehierros.

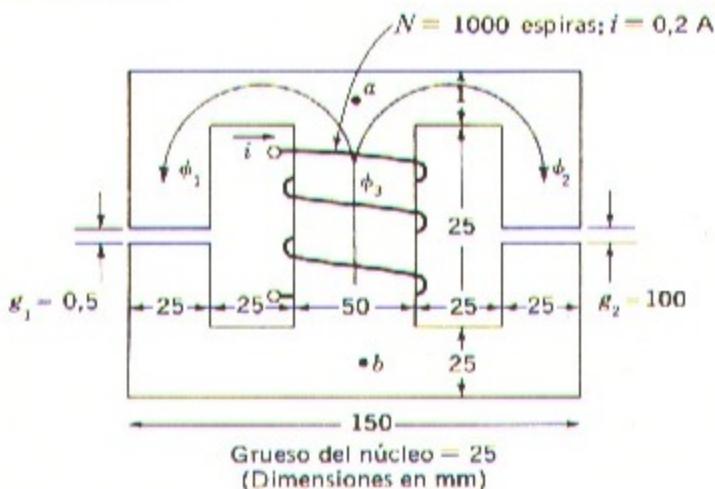


Fig. 1-3. Doble circuito magnético paralelo.

SOLUCION

En la Fig. 1-4 se representa un circuito eléctrico análogo al circuito magnético del problema.

La tensión de la batería representa la f.m.m. del bobinado; las resistencias R_1 y R_2 representan las reluctancias \mathcal{R}_1 y \mathcal{R}_2 de los entrehierros, y las corrientes i_1 e i_2 representan los flujos ϕ_1 y ϕ_2 .



Fig. 1-4. Circuito eléctrico análogo al circuito magnético de la Fig. 1-3.

La sección en los entrehierros es:

$$A_{g1} = A_{g2} = 6,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

y sus espesores:

$$g_1 = 5 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

$$g_2 = 10 \times 10^{-4} \text{ m.}$$

Las reluctancias de los entrehierros se deducen de la fórmula 1-9, y son:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{g_1}{\mu_0 A_{g1}} = \frac{5 \times 10^{-4}}{(4\pi \times 10^{-7}) (6,25 \times 10^{-4})} = 6,37 \times 10^5 \text{ amp-vueltas/Wb.}$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{10 \times 10^{-4}}{(4\pi \times 10^{-7}) (6,25 \times 10^{-4})} = 12,74 \times 10^5 \text{ amp-vueltas/Wb.}$$

Los flujos en las ramas se calculan con la fórmula 1-10.

$$\phi_1 = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}_1} = \frac{1000 \times 0,2}{6,37 \times 10^5} = 3,1 \times 10^{-4} \text{ Wb.}$$

$$\phi_2 = \frac{1.000 \times 0,2}{12,74 \times 10^5} = 1,6 \times 10^{-4} \text{ Wb.}$$

$$\phi_3 = \phi_1 + \phi_2 = 4,7 \times 10^{-4} \text{ Wb.}$$

El área de los entrehierros es igual a la de las ramas:

$$A_{e1} = A_{e2} = 6,25 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

Las densidades de flujo se hallan con la fórmula 1-6:

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\phi_1}{A_{e1}} = \frac{3,1 \times 10^{-4}}{6,25 \times 10^{-4}} = 0,496 \text{ Wb/m}^2$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{\phi_2}{A_{e2}} = \frac{1,6 \times 10^{-4}}{6,25 \times 10^{-4}} = 0,256 \text{ Wb/m}^2$$

$$\mathcal{B}_3 = \frac{\phi_3}{A_{e3}} = \frac{4,7 \times 10^{-4}}{12,5 \times 10^{-4}} = 0,376 \text{ Wb/m}^2$$

1-2. FUNCIONAMIENTO CON CORRIENTE ALTERNA

Cuando un campo magnético es susceptible de variar con el tiempo, se crea en el espacio un campo eléctrico \mathcal{E} de acuerdo con la ley de Faraday:

$$\oint \mathcal{E} \cdot dt = - \frac{d}{dt} \int_n \mathcal{B} \cdot da \quad (1-12)$$

en la que la integral de línea está tomada alrededor de la superficie a través de la que pasa \mathcal{B} .

El valor de \mathcal{E} se mide en volt por metro. En estructuras magnéticas que comprenden bobinados, como es la de la Fig. 1-2, la variación del campo magnético en el núcleo origina una fuerza electromotriz (f.e.m.) en los terminales, cuyo valor es:

$$e = N \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \quad (1-13)$$

en la que $\lambda = N\varphi$ es el *flujo concatenado* que se mide en weber-vueltas. El símbolo φ se emplea para designar el valor instantáneo del flujo variable con el tiempo.

En un circuito magnético en el que exista una relación lineal entre \mathcal{B} y \mathcal{H} por ser constante la permeabilidad del material, o por existir un entrehierro dominante, se puede definir la relación entre λ e i por medio de la *inductancia* L , o sea:

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (1-14)$$

Puede expresarse también la inductancia en función del campo:

$$L = \frac{N^2 \mathcal{B} A}{\mathcal{H} l} = N^2 \mu \frac{A}{l} = N^2 \mathcal{G} \quad (1-15)$$

que pone en evidencia la forma geométrica. La inductancia se mide en henry o weber-vueltas por amper. Sustituyendo la fórmula 1-14 en la 1-13 tendremos:

$$e = \frac{d}{dt} (Li) \quad (1-16)$$

En circuitos magnéticos estáticos la inductancia es fija, y la fórmula se reduce a la conocida forma $L di/dt$. En las máquinas, la inductancia puede ser variable con el tiempo, por lo que la expresión de la fórmula será:

$$e = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dt} \quad (1-17)$$

La potencia en los terminales del devanado de un circuito magnético nos da la medida de la energía que fluye en el circuito procedente de tal devanado. La potencia en los terminales de la Fig. 1-1 es:

$$p = ie = i \frac{d\lambda}{dt} \quad (1-18)$$

siendo su unidad el watt, o julio por segundo. La variación de energía en un circuito magnético durante el intervalo de tiempo t_1 a t_2 es:

$$W_{\text{camp}} = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i \, d\lambda \quad (1-19)$$

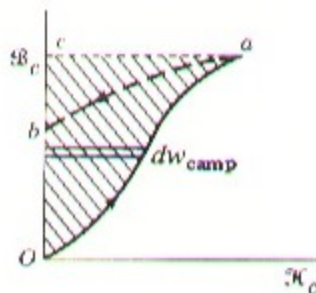


Fig. 1-5. Característica $B_c = H_c$ y energía del campo magnético.

Expresando la fórmula 1-19 en función del campo tendremos:

$$W_{\text{camp}} = \int_{0}^{B_c} \left(\frac{H_c l_c}{N} \right) (A_c N) \, dB_c = A_c l_c \int_{0}^{B_c} H_c \, dB_c \quad (1-20)$$

El factor de $A_c l_c$ puede considerarse como el volumen del núcleo, por lo que $H_c \, dB_c$ es la densidad de energía magnética en el mismo. Si en el circuito magnético existen materiales ferromagnéticos, la relación se apartará más o menos de ser lineal, como ocurre en la curva ascendente Oa de la Fig. 1-5, y las integrales de la fórmula 1-20 deberán determinarse gráficamente. Debido a la histéresis y a las corrientes parásitas, la relación entre H_c y B_c no es de simple valuación.

La curva descendente está representada por la línea de trazos ab de la Fig. 1-5. Cuando H_c se reduce a cero, únicamente una parte de la energía absorbida por el campo durante el período de crecimiento es restituida al circuito, estando esta parte representada por el área de abc . El resto de la energía queda, en parte almacenada en la energía cinética de los electrones productores del flujo residual, y en parte se disipa en pérdidas debidas a la histéresis y a las corrientes parásitas. La energía total absorbida en el proceso de ascenso y

descenso Oab está representada por el área $OabO$ de la Fig. 1-5. Si la variación tiene lugar con suficiente lentitud, de forma que puedan desprejarse los efectos de las corrientes parásitas, las curvas características Oa y ab serán las de magnetización y desmagnetización. En condiciones cíclicas, las pérdidas por histéresis pueden determinarse por el área comprendida en la curva o lazo de histéresis de la figura 1-6.

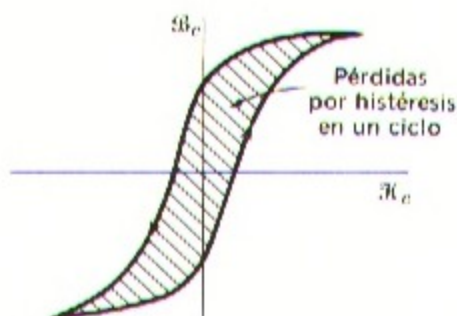


Fig. 1-6. Curva de histéresis simétrica.

Ejemplo 1-3

En el circuito magnético del ejemplo 1-1 y Fig. 1-2, determínese: (a) La f.e.m. e para $B_c = 1 \text{ sen } 377t$ weber/m². (b) Las reluctancias \mathcal{R}_c y \mathcal{R}_g . (c) La inductancia L . (d) La energía para $B_c = 1$ weber/m².

SOLUCION

(a) El valor de λ hallado anteriormente es de 0,45 weber-vueltas para $B_c = 1$ weber/m². Por consiguiente, teniendo en cuenta la variación senoidal de B_c , el flujo concatenado será

$$\lambda = 0,45 \text{ sen } 377t \text{ wb-vueltas}$$

y la f.e.m. deducida de la fórmula 1-13 es:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = 170 \cos 377t \text{ V}$$

(b) Las reluctancias pueden calcularse con la fórmula 1-9.

$$\mathcal{R}_c = \frac{l_c}{\mu_r \mu_0 A_c} = \frac{0,3}{5000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{-4}} = 5,3 \times 10^4 \text{ amp-vueltas/weber}$$

$$\mathcal{R}_g = \frac{g}{\mu_0 A_g} = \frac{5 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7} \times 9 \times 10^{-4}} = 44,2 \times 10^4 \text{ amp-vueltas/weber}$$

(c) La inductancia, deducida de la fórmula 1-14 es:

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{0,45}{0,89} = 0,51 \text{ H}$$

Puede calcularse también por la fórmula 1-15:

$$\begin{aligned} L &= N^2 \Phi = N^2 \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g} \\ &= \frac{(500)^2}{(5,3 + 44,2)10^4} = 0,51 \text{ H} \end{aligned}$$

(d) La energía, según la fórmula 1-19 es:

$$\begin{aligned} W_{\text{camp}} &= \int_0^\lambda i \, d\lambda = \int_0^\lambda \frac{\lambda}{L} \, d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L} \\ &= \frac{(0,45)^2}{2 \times 0,51} = 0,20 \text{ julios} \end{aligned}$$

1-3. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES

En las máquinas y transformadores se utiliza una gran variedad de materiales magnéticos en cuanto a sus tipos y formas, que van desde chapas finas estampadas, de acero al silicio, hasta piezas macizas de hierro para los rotores de alternadores síncronos y para las piezas polares de las máquinas de corriente continua. Todos los materiales ferromagnéticos utilizados en las máquinas se caracterizan por poseer una permeabilidad relativa elevada y una relación no lineal entre \mathcal{B} y \mathcal{H} . Las características del material no pueden definirse simplemente por medio de unas pocas constantes numéricas, sino que es preciso valerse de familias de curvas que relacionen ciertas variables con otras, tales como el espesor y la frecuencia, tomadas como parámetros.

La curva de histéresis \mathcal{B} - \mathcal{H} constituye la indicación básica de las propiedades magnéticas. Dicha curva muestra la relación instantánea entre la densidad de flujo \mathcal{B} y la intensidad magnética \mathcal{H} a lo largo de un ciclo completo. Un material dado tiene distinta curva \mathcal{B} - \mathcal{H} para cada valor distinto de la densidad de flujo máxima en los extremos del lazo. La figura 1-7 muestra la curva típica de histéresis relativa a un determinado acero ya mecanizado, con densidades de flujo máximas de 1 y de 1,5 weber/m² en la que puede verse que la relación entre \mathcal{B} y \mathcal{H} es no lineal y multiforme. La curva de histéresis \mathcal{B} - \mathcal{H} pone de manifiesto un fenómeno físico, pero es de poca aplicación práctica; la principal información que facilita es la relación existente entre los valores máximos de \mathcal{B} y de \mathcal{H} en los

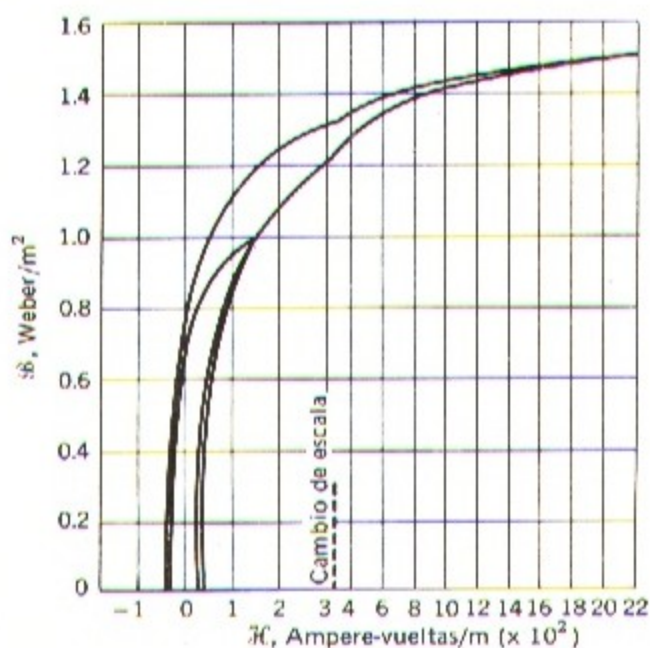


Fig. 1-7. Ejemplo de curvas B - H de un acero típico, para $B_{\max} = 1$ weber/m² y $B_{\max} = 1,5$ weber/m².

extremos del lazo. Esta información queda resumida en la *curva de magnetización normal*, o de corriente continua, que es la curva que se obtiene uniendo entre sí los extremos de una serie de curvas de histéresis B - H que cubran todo el campo de densidades de flujo.

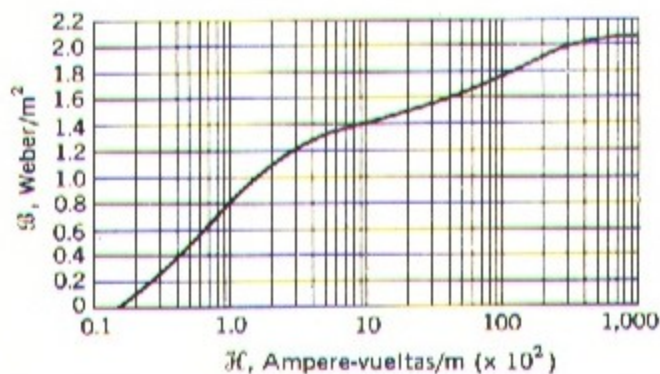


Fig. 1-8. Curva de magnetización con corriente continua de un acero típico.

En la Fig. 1-8 se representa la curva de magnetización de un acero en chapas, terminado de mecanización. Las curvas de magnetización con corriente alterna serán estudiadas más adelante. Las de corriente continua permiten calcular los circuitos magnéticos con mayor precisión que la obtenida en los ejemplos 1-1 y 1-2.

Ejemplo 1-4

Supongamos que el material de la Fig. 1-2 tiene la curva de magnetización con continua de la Fig. 1-8. Hállese la corriente i para $\mathcal{B}_c = 1$ weber/m².

SOLUCION

El valor de \mathcal{H}_c para $\mathcal{B}_c = 1$ weber/m² se lee en la Fig. 1-8, en donde hallamos que:

$$\mathcal{H}_c = 1,6 \times 10^2 \text{ amper-vueltas/m.}$$

La f.m.m. en el núcleo es:

$$\mathcal{F}_c = \mathcal{H}_c l_c = 1,6 \times 10^2 \times 0,3 = 48 \text{ amper-vueltas}$$

La f.m.m. en el entrehierro es:

$$\mathcal{F}_g = \mathcal{H}_g g = \frac{\mathcal{B}_g g}{\mu_0} = \frac{5 \times 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7}} = 396 \text{ amper-vueltas}$$

De donde, la corriente será:

$$i = \frac{\mathcal{F}_c + \mathcal{F}_g}{N} = \frac{444}{500} = 0,89 \text{ A}$$

Obsérvese que la permeabilidad relativa concuerda con la tomada en el ejemplo 1-1:

$$\mu_r = \frac{\mathcal{B}_c}{\mu_0 \mathcal{H}_c} = \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times 1,6 \times 10^2} = 5000$$

Ejemplo 1-5

El problema del ejemplo 1-2 se resolvió bajo el supuesto de que podía despreciarse la f.m.m. en las partes de hierro del circuito; admitamos ahora que el material de dichas partes responda a las características de la Fig. 1-8.

Hállese las densidades de flujo en las tres ramas del circuito.

SOLUCION

El problema puede resolverse gráficamente o por aproximaciones sucesivas, ya que la curva de magnetización no está definida por una función analítica. Emplearemos el proce-

dimiento de aproximaciones sucesivas, tomando como primera aproximación la solución del ejemplo 1-2.

Las longitudes de cada uno de los tres ramales, tomadas entre los puntos *a* y *b* son:

$$l_1 = 0,250 \text{ m}$$

$$l_2 = 0,250 \text{ m}$$

$$l_3 = 0,125 \text{ m}$$

Los valores de \mathcal{H}_c para la primera aproximación, tomados en la fig. 1-8 serán:

$$\text{para } \mathcal{B}_1 = 0,496 \text{ wb/m}^2 \quad \mathcal{H}_1 = 0,53 \times 10^2 \text{ amper-vueltas/m}$$

$$\mathcal{B}_2 = 0,256 \quad \mathcal{H}_2 = 0,30 \times 10^2$$

$$\mathcal{B}_3 = 0,376 \quad \mathcal{H}_3 = 0,40 \times 10^2$$

Las f.m.m. de las tres ramas serán:

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{H}_1 l_1 = 0,250 \times 0,53 \times 10^2 = 13,25 \text{ amper-vueltas}$$

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{H}_2 l_2 = 0,250 \times 0,30 \times 10^2 = 7,5$$

$$\mathcal{F}_3 = \mathcal{H}_3 l_3 = 0,125 \times 0,40 \times 10^2 = 5,0$$

Para hallar las densidades de flujo en segunda aproximación, restaremos las f.m.m. del núcleo así calculadas de los amper-vueltas del bobinado, y el valor resultante lo aplicaremos a los entrehierros:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \frac{\mu_0}{g_1} (Ni - \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_3) \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7}}{5,08 \times 10^{-4}} (200 - 18,6) = 0,45 \text{ weber/m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2 &= \frac{\mu_0}{g_2} (Ni - \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_3) \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7}}{10,2 \times 10^{-4}} (200 - 12,7) = 0,233 \text{ weber/m}^2 \end{aligned}$$

El flujo ϕ_3 en el ramal del centro viene dado por:

$$\phi_3 = \mathcal{B}_1 A_1 + \mathcal{B}_2 A_2$$

$$\text{y } \mathcal{B}_3 = \frac{\phi_3}{A_3} = \frac{\mathcal{B}_1 A_1 + \mathcal{B}_2 A_2}{A_3} = \frac{\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2}{2} = 0,342 \text{ weber/m}^2$$

Los nuevos valores de \mathcal{H} se toman de la fig. 1-8:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 &= 0,48 \times 10^2 \text{ amper-vueltas/m} \\ \mathcal{H}_2 &= 0,30 \times 10^2 \\ \mathcal{H}_3 &= 0,38 \times 10^2\end{aligned}$$

Si empleamos estos segundos valores de \mathcal{H} para calcular \mathcal{B} en tercera aproximación, obtendremos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= 0,45 \frac{200 - 17,0}{200 - 18,6} = 0,454 \text{ weber/m}^2 \\ \mathcal{B}_2 &= 0,233 \frac{200 - 12,4}{200 - 12,7} = 0,234 \text{ weber/m}^2 \\ \mathcal{B}_3 &= \frac{\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2}{2} = 0,344 \text{ weber/m}^2\end{aligned}$$

Las sucesivas aproximaciones de \mathcal{B} convergen rápidamente hacia su valor final. Como puede verse, los resultados hallados difieren aproximadamente un 10 % de los calculados en el ejemplo 1-2 en el que se despreció la f.m.m. en el núcleo.

Tal como se ha visto en el apartado 1-2, los materiales magnéticos ocasionan una pérdida de energía cada vez que quedan sometidos a un ciclo \mathcal{B} - \mathcal{H} ; esta pérdida se divide en dos partes, una de ellas debida a las corrientes parásitas y la otra a la histéresis; la primera es debida a las pérdidas I^2R por efecto joule de las corrientes que circulan por el material tendiendo a oponerse a las variaciones en la densidad del flujo, y la segunda lo es a la energía gastada en orientar, en la dirección del campo, las partículas elementales del material. Dichas pérdidas dependen de la composición del material, particularmente del contenido de silicio en tanto por ciento; de la frecuencia; del espesor del material medido en un plano normal al campo, y de la densidad máxima del flujo. En los equipos eléctricos, las pérdidas en los núcleos se disipan en forma de calor y son parte de las pérdidas totales del propio equipo. La Fig. 1-9 indica las pérdidas en el núcleo, expresadas en watt por kilogramo, en función de la densidad de flujo y para una frecuencia dada; pueden trazarse también curvas de pérdidas en función de las frecuencias, tomando la densidad de flujo como parámetro.

Para el estudio de las características de un material magnético excitado con corriente alterna se consideran generalmente los *volt-amper por kilogramo de material*, P_a , como una función de la densidad de flujo, preferiblemente a emplear la curva de magnetización que relaciona \mathcal{B} con \mathcal{H} .

En los transformadores, bobinas de reacción y una pequeña parte de máquinas rotativas, el material magnético de su estructura trabaja todo él con igual densidad de flujo, por lo que pueden calcularse los volt-amper necesarios para la excitación multiplicando su

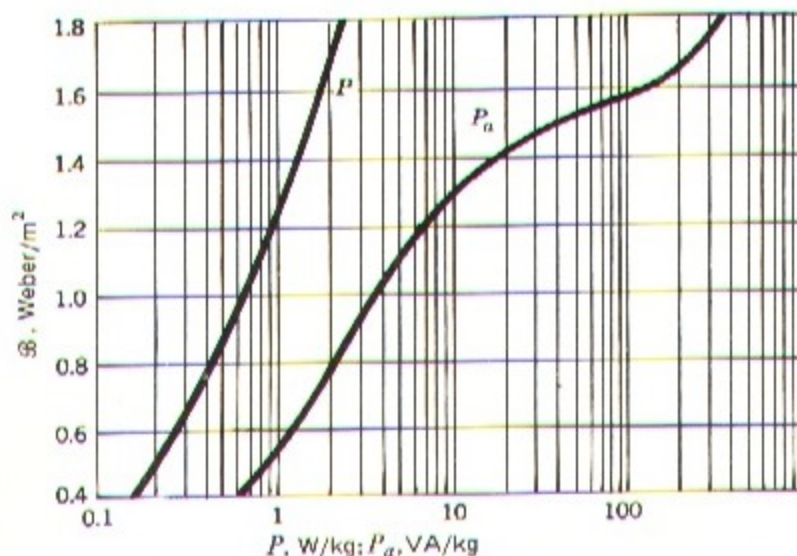


Fig. 1-9. Curvas de pérdidas en el núcleo y de volt-ampere eficaces de excitación, correspondientes a un acero típico.

peso por P_a . Puede comprobarse la justificación de P_a aplicando tensión al bobinado del circuito magnético de la Fig. 1-1.

$$v = \sqrt{2} V \text{ sen } 2\pi ft \quad (1-21)$$

siendo V la tensión eficaz. Por medio de la fórmula 1-13 puede determinarse la densidad de flujo:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_c &= \frac{1}{N A_c} \int v dt \\ \mathcal{B}_c &= \frac{-\sqrt{2} V}{N A_c 2\pi f} \cos 2\pi ft \\ \mathcal{B}_c &= \mathcal{B}_{\max} \cos 2\pi ft \end{aligned} \quad (1-22)$$

en donde,

$$\mathcal{B}_{\max} = \frac{\sqrt{2} V}{N A_c 2\pi f} = \frac{V}{4,44 N A_c f} \quad (1-23)$$

pudiéndose expresar la tensión eficaz V en función de la densidad máxima de flujo \mathcal{B}_{\max}

$$V = 4,44 \mathcal{B}_{\max} A_c N f \quad (1-24)$$

Como veremos más adelante en este mismo capítulo, cuando \mathcal{B}_c es senoidal, la forma de onda de \mathcal{H}_c difiere notablemente de serlo. Podemos considerar unos valores eficaces de \mathcal{H}_c y de la intensidad de corriente I tales que

$$I = \frac{\mathcal{H}_{ef} \cdot l_c}{N} \quad (1-25)$$

El producto VI son los volt-ampere eficaces de entrada en el bobinado de la Fig. 1-1 necesarios para la excitación del material magnético con la densidad de flujo máxima \mathcal{B}_{max}

$$VI = 4,44f(\mathcal{B}_{max} \mathcal{H}_{ef})(A_c l_c) \quad (1-26)$$

Si la densidad del material magnético es ρ_c , su peso será $A_c l_c \rho_c$ y los volt-ampere por kilogramo serán:

$$P_a = \frac{VI}{A_c l_c \rho_c} = \frac{4,44f}{\rho_c} (\mathcal{B}_{max} \mathcal{H}_{ef}) \quad (1-27)$$

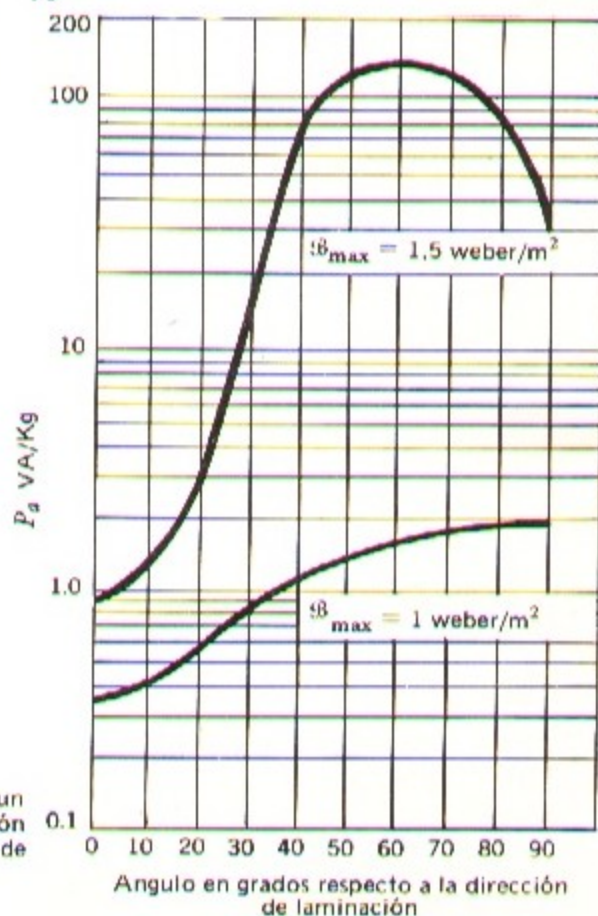


Fig. 1-10. Curvas de excitación de un acero de grano orientado en función del ángulo respecto a la dirección de laminación.

$\mathcal{B}_{max} = 1$ y $1,5$ weber/m²

Para una frecuencia dada f , P_a depende únicamente de B_{max} , ya que \mathcal{H}_{ef} es a su vez función de dicho B_{max} , y es independiente del número de espiras y de las dimensiones geométricas. La figura 1-9 muestra las características correspondientes a un acero típico.

En casi todos los transformadores y en ciertas máquinas eléctricas se emplean chapas de acero que tienen una dirección de magnetización preferente en la que las pérdidas son bajas y la permeabilidad alta: dicho material se denomina *acero de grano orientado*. Esta propiedad es debida a la estructura del cristal de aleación hierro-silicio, que es cúbica centrada, con un átomo en cada vértice y otro en el centro. La más fácil magnetización se obtiene en dirección de las aristas del cubo; existiendo mayor dificultad en dirección de las diagonales de las caras y aún más siguiendo las diagonales del cubo. Mediante tecnologías adecuadas se puede conseguir que la mayoría de los cubos queden alineados en la dirección, del laminado, dirección que en consecuencia será la más favorable para la magnetización. Los aceros de grano orientado son superiores a los no orientados en cuanto a tener menos pérdidas y requerir menor \mathcal{H} , por lo que pueden hacerse trabajar con mayor densidad de flujo que éstos. En la Fig. 1-10 se representan curvas de magnetización según distintos ángulos respecto a la dirección más favorable, en las que se puede apreciar la notable influencia que tiene la posición adoptada.

Ejemplo 1-6

El núcleo magnético de la Fig. 1-11 está construido del acero eléctrico laminado cuyas características se muestran en la Fig. 1-9. El devanado se excita con la tensión necesaria para producir en el acero una densidad de flujo $B = 1,5 \text{ sen } 377t \text{ weber/m}^2$. El acero ocupa un 0,94 del volumen total del núcleo (*factor de relleno*). La densidad del acero es de $7,65 \text{ g/cm}^3$. Hállese: (a) la tensión aplicada; (b) la corriente máxima; (c) la corriente eficaz; (d) las pérdidas en el núcleo; (e) la corriente eficaz si se sustituye el material por un acero de grano orientado situado respecto al campo en la dirección más favorable.

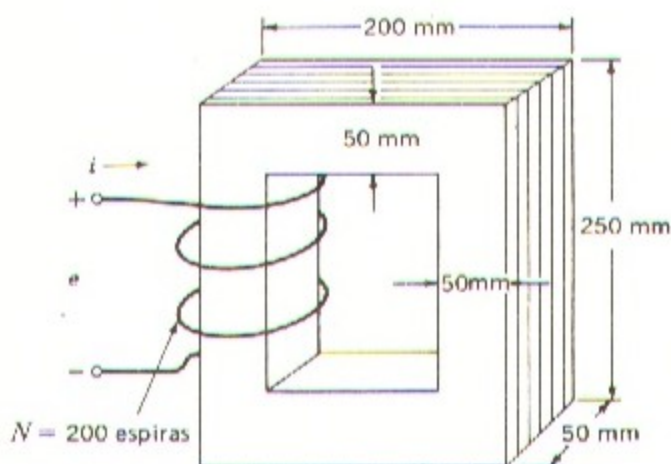


Fig. 1-11. Reactancia con núcleo de chapas laminadas.

SOLUCION

(a) La tensión, según la fórmula 1-13 es:

$$e = N \frac{d\phi}{dt} = NA_c \frac{dB}{dt} = 200 \times 25 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \times 0,94 \\ \times 1,5 \times 377 \cos 377t = 282 \cos 377t \text{ volts}$$

(b) La Fig. 1-8 da la intensidad magnética $\mathcal{H} = 22 \times 10^2$ amper-vueltas/m correspondiente a $B_{\text{max}} = 1,5$ weber/m²

$$l_c = 150 + 150 + 200 + 200 = 700 \text{ mm} = 0,7 \text{ m}$$

La corriente máxima es:

$$I = \frac{22 \times 10^2 \times 0,70}{200} = 7,7 \text{ A}$$

(c) La corriente eficaz se deduce del valor de P_a dado en la Fig. 1-9 para $B_{\text{max}} = 1,5$ weber/m²

$$P_a = 39,6 \text{ VA/kg}$$

El volumen y peso del núcleo es:

$$V_c = 0,0025 \times 0,94 \times 0,7 = 0,00164 \text{ m}^3 = 1640 \text{ cm}^3$$

$$W_c = 1640 \times 7,65 = 12546 \text{ g} = 12,546 \text{ Kg.}$$

Los volt-amper totales y la corriente son:

$$P_a = 39,6 \text{ VA/Kg} \times 12,546 \text{ Kg} = 497 \text{ VA}$$

$$I = \frac{P_a}{V} = \frac{497}{282 \times 0,707} = 2,5 \text{ A}$$

(d) Las pérdidas específicas en el núcleo, deducidas de la Fig. 1-9 son $P = 3,5$ watt/kg. Las pérdidas totales son:

$$P = 3,5 \times 12,546 = 44 \text{ W}$$

(e) Para el acero de grano orientado, los volt-ampere por kilogramo a 0° y $1,5$ weber/m² se encuentran en la Fig. 1-10:

$$P_a = 1,9 \text{ VA/kg}$$

La corriente eficaz es:

$$I = \frac{1,9 \times 12,546}{282 \times 0,707} = 0,12 \text{ A}$$

Con la corriente de excitación de $2,5$ A requeridos por el primer material a $1,5$ weber/m², el de grano orientado podría trabajar por encima de los $1,8$ weber/m², lo que supone un aumento del 20 por ciento.

1-4. CIRCUITOS MAGNETICAMENTE ACOPLADOS

Antes de iniciar el estudio de las máquinas eléctricas es conveniente considerar ciertos aspectos de la teoría de circuitos acoplados magnéticamente, resaltando el efecto de transformador. Aun cuando los transformadores estáticos no son propiamente dispositivos de conversión de energía, son elementos indispensables en muchos de los sistemas de conversión constituyendo uno de los principales factores del gran auge alcanzado en el empleo de corrientes alternas, ya que posibilitan la producción de energía eléctrica, su transmisión y su empleo a las tensiones más económicas o convenientes en cada caso.

También se emplean mucho los transformadores en circuitos electrónicos y de control, de pequeña potencia y corrientes débiles, para cumplir ciertas funciones tales como: el equilibrado de las impedancias de un generador y sus cargas con objeto de conseguir la máxima transmisión de potencia; el dejar dos circuitos aislados entre sí, o bloquear una corriente continua sin interrumpir el paso de la alterna de uno a otro circuito.

Por otra parte, el transformador es uno de los dispositivos más sencillos comprendiendo dos o más circuitos eléctricos acoplados entre sí a través de un circuito magnético común, y en su análisis intervienen los principios esenciales que servirán para el estudio de las máquinas.

En esencia, un transformador consta de dos o más devanados concatenados por un campo magnético común. Si se conecta uno de ellos, que recibe el nombre de *primario*, a un suministro de corriente alterna se engendrará un flujo alterno cuya magnitud dependerá de la tensión primaria y del número de espiras. El flujo engendrado se concatena con el otro devanado, llamado *secundario*, induciendo en él una tensión cuyo valor depende del número de sus espiras. Proporcionando convenientemente el número de espiras de uno y otro devanado puede conseguirse prácticamente cualquier relación que se desee entre las tensiones primaria y secundaria, o sea cualquier relación de transformación.

La acción de transformación, requiere únicamente la existencia de un flujo alterno concatenado con los dos devanados y constituye una simple utilización del concepto de inducción mutua. La acción existirá también aun cuando haya aire en lugar del núcleo, pero la efectividad será mucho mayor con núcleo de hierro o de material ferromagnético, porque con ello se confina el flujo obligándolo a un trayecto dado comprendiendo ambos devanados, y además porque su permeabilidad es muy superior a la del aire. Un transformador de este tipo se denomina *transformador de núcleo*, y a él pertenecen la mayoría de los utilizados en la práctica. En el estudio que sigue se considerarán casi exclusivamente los transformadores de núcleo.

Con objeto de reducir las pérdidas debidas a las corrientes parásitas, generalmente los núcleos están formados por un paquete de chapas finas laminadas: en la Fig. 1-12 se representan dos tipos distintos de construcción. En el de la Fig. 1-12 *a*, los devanados están bobinados alrededor de dos columnas de un núcleo rectangular, mientras que en el de la Fig. 1-12 *b*, denominado *tipo blindado*, dichos devanados están situados en la rama central de un núcleo de tres columnas.

Los núcleos de los transformadores que trabajen a frecuencias de hasta unos pocos centenares de ciclos como máximo, están formados generalmente de chapas laminadas de acero al silicio de unos 0,35 mm de espesor. El acero al silicio reúne unas cualidades apreciables, tales como bajo coste, pocas pérdidas y alta permeabilidad con grandes densidades de flujo (10 a 14 kilolíneas/cm²). Los núcleos de transformadores pequeños utilizados en circuitos de comunicación de poca potencia y frecuencias altas se hacen muchas veces de materiales ferromagnéticos sinterizados, tales como el "permalloy".

La mayor parte del flujo queda confinado en el núcleo, concatenado por consiguiente con ambos devanados. Aun cuando el flujo de dispersión, que interesa a un devanado pero no al otro, es únicamente una pequeña fracción del flujo total, tiene gran importancia en el funcionamiento del transformador. Puede reducirse la dispersión subdividiendo los devanados en varias secciones colocando éstas tan próximas entre sí como sea posible. En

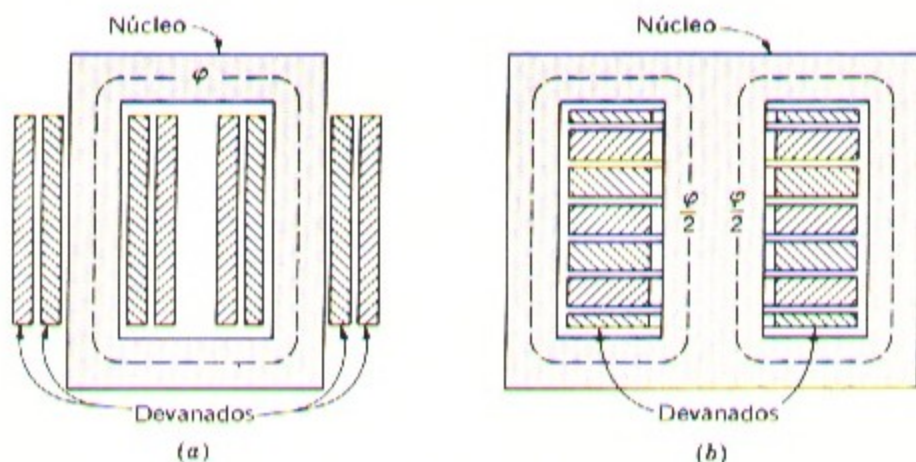


Fig. 1-12. Transformador normal (a) y blindado (b).

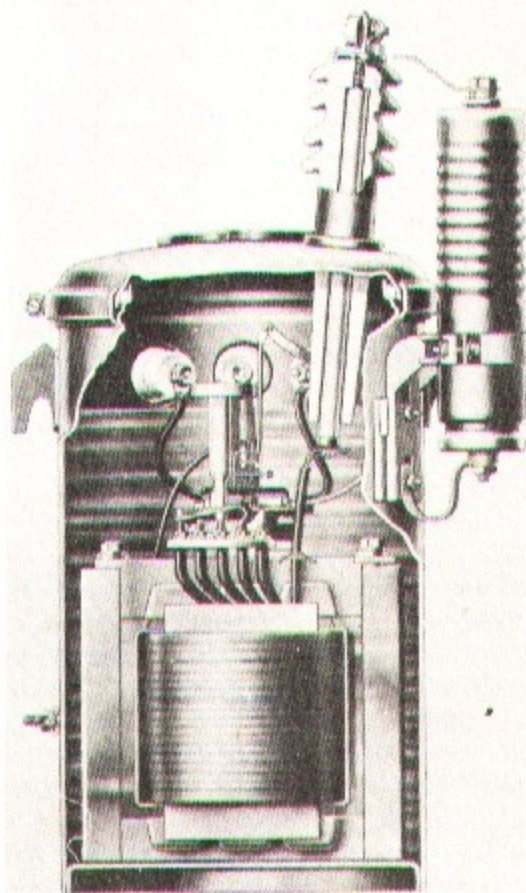


Fig. 1-13. Vista interior de un transformador autoprotegido típico en la gama de potencias de 2 a 25 KVA, 7200:240/120 V. Sólo tiene un aislador de salida de alta y un pararrayos porque uno de los conductores de la línea de 7200 V y uno de los extremos del primario están conectados a tierra. (General Electric Company.)

el tipo de construcción de núcleo, cada devanado consta de dos secciones situadas una en cada columna del núcleo, siendo concéntricas entre sí las bobinas del primario y del secundario. En el tipo blindado pueden usarse también bobinas concéntricas, o emplear un cierto número de bobinas planas colocando alternativamente las primarias y las secundarias.

La Fig. 1-13 muestra la construcción interior de un *transformador de distribución* semejante a los utilizados en los sistemas de servicios públicos para suministrar a los

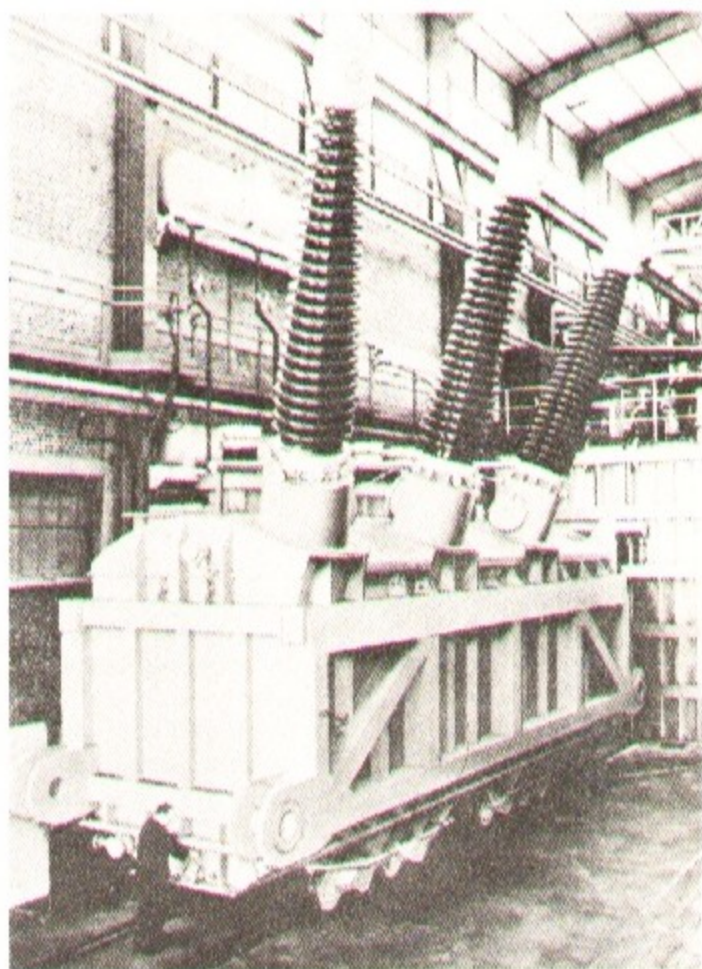


Fig. 1-14. Transformador trifásico de 660 MVA, 50 Hz empleado para elevar la tensión de 20 kV de un generador hasta la de 504 kV de la línea de transporte. (CEM La Havre, asociada francesa de Brown Boveri Corporation.)

abonados la tensión adecuada a sus necesidades. En la Fig. 1-14 puede verse un transformador de gran potencia,

1-5. CONDICIONES EN VACIO

Consideremos el transformador de la Fig. 1-15 con el secundario en circuito abierto, y con una tensión alterna v_1 aplicada en los terminales del primario: en estas condiciones circulará por el primario una pequeña corriente i_ϕ denominada *de excitación*, que creará

un flujo alterno en el circuito magnético, cuyo flujo a su vez inducirá en el propio primario una f.e.m. dada por la fórmula

$$e_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad (1-28)$$

en la que λ_1 es el flujo concatenado con el primario, φ el flujo (supuesto todo él confinado en el núcleo) y N_1 el número de espiras primarias. La tensión e_1 vendrá dada en volt si φ lo está en weber.

La ley de Lenz dice que e_1 es una fuerza contraelectromotriz de polaridad, respecto a la de v_1 , como se indica con + y - en la Fig. 1-15. Esta fuerza contraelectromotriz, junto con la caída de tensión en la resistencia r_1 del primario deben compensar la tensión v_1 aplicada, o sea:

$$v_1 = r_1 i_1 + e_1 \quad (1-29)$$

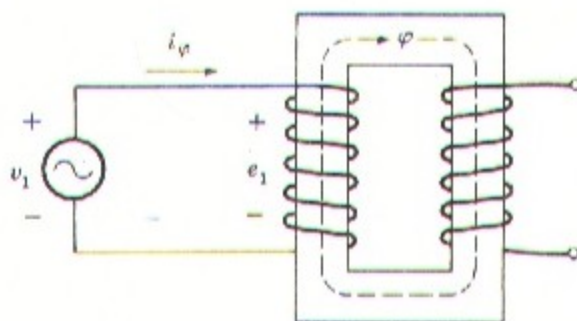


Fig. 1-15. Transformador con el secundario abierto.

En la mayor parte de los aparatos de potencia, la caída de tensión en vacío es muy pequeña, y por consiguiente la fuerza electromotriz inducida e_1 es de valor muy próximo a la tensión aplicada v_1 . Como además las ondas de tensión y de flujo son casi senoidales, puede simplificarse mucho el análisis. Si el flujo instantáneo es:

$$\varphi = \phi_{\max} \text{ sen } \omega t \quad (1-30)$$

La tensión inducida será:

$$e_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} = \omega N_1 \phi_{\max} \text{ cos } \omega t \quad (1-31)$$

en la que ϕ_{\max} es el valor máximo del flujo, y $\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia en Hz. En

los sentidos positivos señalados en la Fig. 1-15 la f.e.m. inducida adelanta en 90° al flujo. El valor eficaz de la f.e.m. inducida es:

$$E_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N_1 \phi_{\max} = 4,44 f N_1 \phi_{\max} \quad (1-32)$$

Si la caída de tensión en la resistencia es despreciable, la fuerza contraelectromotriz se iguala a la tensión aplicada. En estas condiciones si se aplica al devanado una tensión senoidal, se creará en el núcleo un flujo variable también senoidalmente, cuyo valor máximo ϕ_{\max} satisfará la condición de que E_1 de la ecuación 1-32, iguale al valor eficaz v_1 de la tensión aplicada, es decir que:

$$\phi_{\max} = \frac{V_1}{4,44 f N_1} \quad (1-33)$$

El flujo queda pues determinado únicamente por la tensión aplicada, su frecuencia y el número de espiras del devanado: esta importante relación se aplica no sólo a los transformadores sino también a cualquier otro dispositivo alimentado con corriente senoidal, siempre que la caída de tensión en la resistencia sea despreciable. La corriente de excitación depende de las propiedades magnéticas del núcleo, y se regula por sí misma de forma que produzca la f.m.m. necesaria para crear el flujo indicado en la fórmula 1-33.

Debido a que las propiedades magnéticas del hierro no obedecen a una función lineal, la forma de onda de la corriente de excitación difiere de la forma de onda del flujo. Puede hallarse gráficamente la curva de la corriente de excitación en función del tiempo, partiendo de las características magnéticas del material de que está formado el núcleo, siguiendo el procedimiento indicado en la Fig. 1-16.

En la Fig. 1-16a están trazadas las ondas senoidales de tensión e_1 y de flujo ϕ , de acuerdo con las fórmulas 1-30 a 1-33, y en la 1-16b la curva de histéresis correspondiente

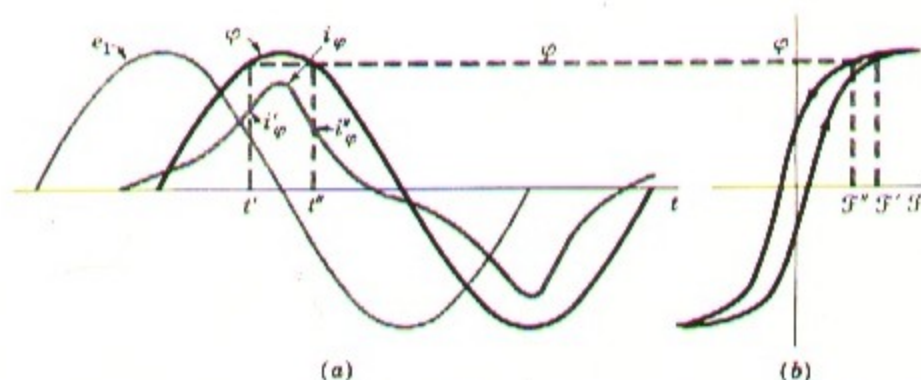


Fig. 1-16. Fenómenos de excitación. (a) Ondas de tensión, flujo e intensidad de excitación. (b) Ciclo de flujo-f.m.m. correspondiente.

al núcleo, de la que se pueden deducir los valores de la f.m.m. correspondientes a cada valor del flujo. Por ejemplo, en el momento t' el flujo instantáneo es φ' , aumentando: la f.m.m. es \mathcal{F}' leída sobre la rama ascendente de la curva de histéresis; el correspondiente valor $i'\varphi$ de la corriente de excitación en el momento t' se señala en la Fig. 1-16a. Análogamente en el momento t'' el flujo tiene el mismo valor instantáneo φ' que antes, pero ahora descendiendo, por lo que los valores de la f.m.m. y de la corriente serán \mathcal{F}'' e $i''\varphi$ respectivamente. De esta forma se va trazando por puntos la curva de la corriente de excitación $i\varphi$ como puede verse en la ya mencionada figura 1-16a.

Analizando la curva de la corriente de excitación por el método de las series de Fourier, se hallará una onda fundamental y una serie de armónicas impares. La fundamental puede, a su vez, reducirse a dos componentes, una en fase con la fuerza electromotriz y la otra retrasada 90° respecto a ella. La componente en fase es debida a la potencia absorbida por la histéresis y por las corrientes parásitas y se denomina *corriente de pérdidas* en el núcleo: deducida esta corriente de la de excitación total, el resto se denomina *corriente magnetizante*, formada por la componente retrasada 90° junto con todas las armónicas. La principal armónica es la tercera, que en los transformadores de potencia típicos puede llegar a valer hasta un 40 % de la corriente de excitación total.

La corriente de excitación es siempre pequeña, del orden del 5 % de la corriente a plena carga, por lo que no es necesario en general tener en cuenta las particularidades de la forma de su onda, salvo cuando se trata de resolver problemas directamente relacionados con los efectos de los armónicos.

En consecuencia, los efectos de los armónicos quedan en general absorbidos por las exigencias, en cuanto a corrientes senoidales se refiere, de otros elementos lineales del circuito.

En estas condiciones, pueden representarse las corrientes de excitación con una *onda senoidal equivalente*, de igual frecuencia, valor efectivo y potencia media que la onda real: esta forma de representación es necesaria para poder trazar el diagrama vectorial. En la Fig. 1-17 los vectores E_1 y φ representan la f.e.m. inducida y el flujo respectivamente, mientras que I_φ representa la corriente senoidal equivalente a la de excitación, retrasada

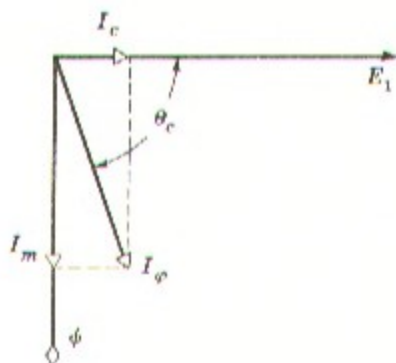


Fig. 1-17. Diagrama vectorial en vacío.

respecto a E_1 de un ángulo de desfase θ_c tal que

$$P_c = E_1 I_\varphi \cos \theta_c \quad (1-34)$$

en la que P_c son las pérdidas en el núcleo.

La componente I_c en fase con E_1 es la corriente debida a dichas pérdidas, y la componente I_m en fase con el flujo representa la onda senoidal equivalente de igual valor eficaz que la corriente magnetizante. En las Figs. 1-9 y 1-10 se representan las pérdidas y los volt-ampere de excitación característicos de dos tipos de aceros al silicio laminados, de alta calidad, empleados en transformadores de potencia y de distribución.

Ejemplo 1-7

En el ejemplo 1-6, se hallaron los siguientes valores de pérdidas en el hierro y de volt-ampere de excitación para el núcleo de la Fig. 1-1, siendo $\mathfrak{B} = 1,5 \text{ wb/m}^2$,

$$P_c = 44 \text{ W} \quad (VI)_{ef} = 497 \text{ VA}$$

la tensión inducida era de $282/\sqrt{2} = 199 \text{ V}$ eficaces cuando el devanado tenía 200 espiras.

Hállese el factor de potencia, la corriente de pérdidas I_c y la corriente magnetizante I_m .

SOLUCION

$$\text{Factor de potencia: } \cos \theta_c = \frac{44}{497} = 0,089$$

$$\theta_c = 84,9^\circ \quad \text{sen } \theta_c = 0,996$$

$$\text{Corriente de excitación: } I_\varphi = \frac{497}{199} = 2,5 \text{ A (eficaz)}$$

$$\text{Corriente de pérdidas: } I_c = \frac{44}{199} = 0,22 \text{ A (eficaz)}$$

$$\text{Corriente magnetizante: } I_m = I_\varphi \text{ sen } \theta_c = 2,5 \text{ A (eficaz)}$$

Siendo θ_c muy próximo a 90° , la diferencia entre los valores eficaces de la corriente de excitación I_φ y de su componente magnetizante I_m es prácticamente despreciable.

1-6. EFECTOS DE LA CORRIENTE SECUNDARIA TRANSFORMADORA IDEAL

Para establecer en primera aproximación una teoría cuantitativa, consideremos un transformador como el representado esquemáticamente en la Fig. 1-18, con N_1 espiras en el devanado primario y N_2 en el secundario, y admitamos que la resistencia de los

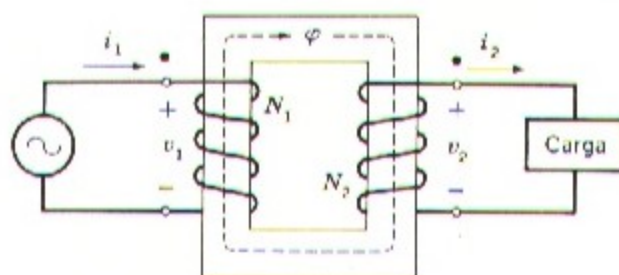


Fig. 1-18. Transformador ideal con carga.

devanados es despreciable y que la totalidad del flujo está confinado en el núcleo y concatenado con ambas bobinas, que las pérdidas en el hierro son también despreciables, y que la permeabilidad del núcleo es tan elevada que podemos asimismo despreciar la corriente de excitación necesaria para mantener el flujo.

En la práctica no se alcanzan nunca estas propiedades aun cuando se aproxime mucho a ellas, denominándose *transformador ideal* a un transformador hipotético que las poseyera.

Cuando se aplica una tensión v_1 variable con el tiempo a los terminales del primario, se crea en el núcleo un flujo ϕ tal que la fuerza contraelectromotriz inducida adquiere un valor igual al de la tensión aplicada, siempre en el supuesto de que la resistencia del devanado es despreciable, o sea:

$$v_1 = e_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt} \quad (1-35)$$

El flujo, concatenado también con el devanado secundario, induce en él una f.e.m. e_2 y una tensión v_2 de igual valor en sus bornes,

$$v_2 = e_2 = N_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (1-36)$$

Dividiendo 1-35 por 1-36 tendremos:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (1-37)$$

De donde se deduce que en un transformador ideal las tensiones están en razón directa al número de espiras de sus devanados.

Conectemos ahora una carga en el secundario: aparecerá en él una intensidad i_2 y una f.m.m. $N_2 i_2$, que de no ser neutralizada en el primario alterará el flujo en el núcleo y el equilibrio existente entre la tensión aplicada y la fuerza contraelectromotriz desaparecerá, naciendo en consecuencia una intensidad i_1 y una f.m.m. primaria de compensación tales que:

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \quad (1-38)$$

De esta forma repercute en el primario la corriente existente en el secundario. Obsérvese por las referencias direccionales señaladas en la Fig. 1-18 que las f.m.m. debidas a i_1 e i_2 están en oposición, es decir, que se compensan. La f.m.m. resultante en el núcleo debe ser cero de acuerdo con el supuesto de que la corriente de excitación de un transformador ideal es nula. De la fórmula 1-38 se deduce:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \quad (1-39)$$

Es decir, que en un transformador ideal, las intensidades están en razón inversa al número de espiras de los respectivos devanados. Obsérvese además que de las fórmulas 1-37 y 1-39 se desprende que:

$$v_1 i_1 = v_2 i_2 \quad (1-40)$$

es decir, que la potencia instantánea de alimentación es igual a la potencia instantánea de salida, condición necesaria ya que se han despreciado todas las causas originarias de pérdida de potencia activa o reactiva.

Para un estudio más avanzado consideremos el caso de que la tensión aplicada sea senoidal y la carga una impedancia, pudiéndose así emplear la representación vectorial. La Fig. 1-19a es un esquema simplificado, y los terminales señalados con puntos se corresponden con los señalados de igual forma en la Fig. 1-18: dichos terminales son de la

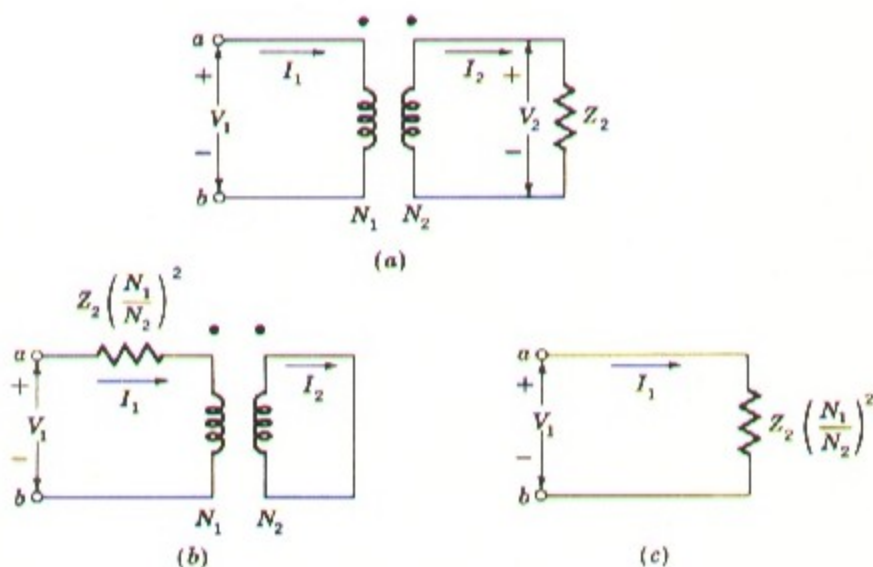


Fig. 1-19. Tres circuitos idénticos entre sí vistos desde los terminales ab si el transformador es ideal.

misma polaridad, es decir, que si recorremos los devanados primario y secundario de la Fig. 1-18 comenzando por los extremos señalados, podremos observar que ambos están enrollados sobre el núcleo en el mismo sentido con relación al flujo. Por consiguiente, si se comparan ambos devanados, las diferencias de tensión entre los terminales marcados y los no marcados de cada uno de ellos tienen la misma polaridad instantánea: dicho de otra forma, las tensiones V_1 y V_2 de la Fig. 1-19a están en fase, y asimismo están en fase las intensidades I_1 e I_2 . El hecho de que sus f.m.m. se equilibren es debido a que sus sentidos en los devanados son opuestos.

Las fórmulas 1-37 y 1-39 pueden escribirse en forma vectorial:

$$V_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 \quad \text{y} \quad V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \quad (1-41)$$

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{N_1}{N_2} I_1 \quad (1-42)$$

de las que se deduce,

$$\frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \frac{V_2}{I_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2 \quad (1-43)$$

siendo Z_2 la impedancia de la carga. En consecuencia, y por lo que a sus efectos se refiere, una impedancia Z_2 en el circuito secundario puede sustituirse por una impedancia equivalente Z_1 en el primario, teniendo en cuenta que:

$$Z_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2 \quad (1-44)$$

Por tanto, los tres circuitos de la Fig. 1-19 no se distinguen entre sí en lo que se refiere a su funcionamiento considerado desde los terminales ab . El trasladar de esta forma una impedancia desde uno al otro lado del transformador se denomina *reducir la impedancia al otro lado*. De forma similar pueden reducirse las tensiones e intensidades de uno a otro lado utilizando las fórmulas 1-41 y 1-42 para valorar la equivalencia correspondiente.

Resumiendo: *en un transformador ideal las tensiones quedan transformadas en razón directa al número de espiras, las intensidades en razón inversa al mismo y las impedancias en razón directa a su cuadrado. La potencia y los volt-amper no sufren variación.*

1-7. REACTANCIA DE TRANSFORMADORES Y CIRCUITOS EQUIVALENTES

Para estudiar más a fondo el funcionamiento de los transformadores, hay que tener en cuenta en mayor o menor grado las diferencias existentes entre un transformador real y el ideal descrito en el apartado 1-6. Hay que considerar los efectos de la resistencia de los

devanados, las dispersiones de flujo y las corrientes de excitación. En ocasiones tiene también importancia la capacidad de los devanados, especialmente en problemas en los que se estudie el funcionamiento de transformadores a frecuencias superiores a las audibles, o durante un rápido cambio en las condiciones transitorias como las que se dan en los transformadores de impulsos o en los de potencia debido a sobretensiones motivadas por descargas atmosféricas o desconexiones. Los problemas de altas frecuencias van más allá del objeto de este tratado y por tanto no se tendrán en cuenta las capacidades de los devanados en los estudios que siguen.

Hay dos procedimientos de análisis con los que pueden tenerse en cuenta las diferencias existentes respecto a las condiciones ideales: (1) técnica del circuito equivalente basado en razonamientos físicos, y (2) planteamiento matemático basado en la teoría clásica de circuitos acoplados magnéticamente. Los dos procedimientos se emplean continuamente, y ambos tienen gran paralelismo en las teorías de las máquinas rotativas. A continuación se exponen las técnicas de los circuitos equivalentes, por constituir un buen ejemplo de las consideraciones implicadas en la traslación de conceptos físicos a una teoría cuantitativa.

El flujo total concatenado con el devanado primario puede dividirse en dos partes: el flujo mutuo, confinado esencialmente en el hierro del núcleo, y que es debido al efecto combinado de las corrientes primaria y secundaria, y el flujo primario de dispersión concatenado únicamente con el devanado primario. En la Fig. 1-20 se han señalado estos flujos en un transformador elemental, en el que para mayor sencillez los dos devanados se hallan situados en dos ramas opuestas del núcleo. En un transformador real en el que los devanados estuvieran intercalados, los detalles del mapa representativo del flujo serían más complicados, pero en esencia sería lo mismo. Puesto que el flujo disperso hace la mayor parte de su recorrido a través del aire, tanto su propio valor como el de la tensión

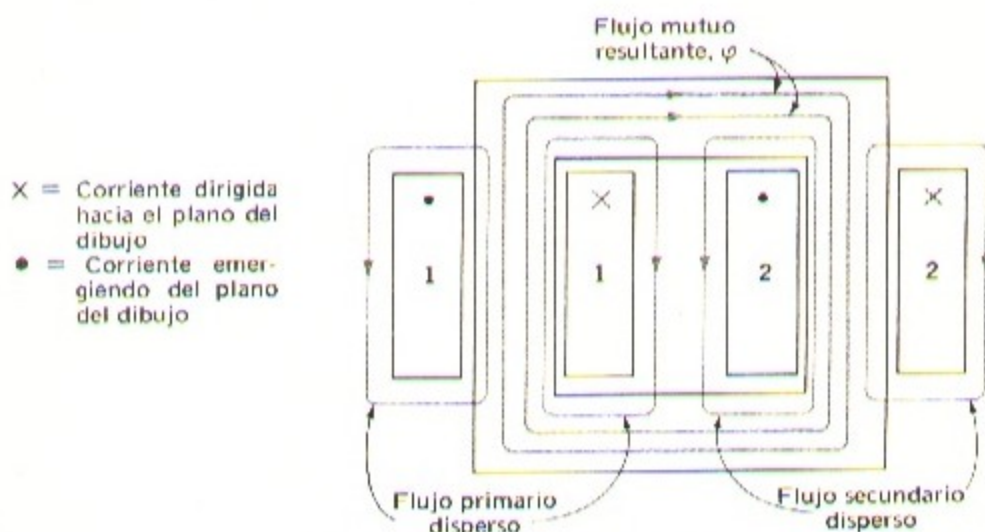


Fig. 1-20. Componentes del flujo.

inducida por él, varían linealmente con la corriente primaria I_1 . El efecto en el circuito primario es el mismo que el de cualquier flujo concatenado con el devanado primario del transformador, y puede simularse atribuyendo a dicho devanado una *inductancia de dispersión* (igual al flujo de dispersión concatenado con el primario por unidad de corriente primaria) o una *reactancia de dispersión* x_{l1} (igual a $2\pi f$ veces la inductancia de dispersión). Además habrá una caída de tensión en la resistencia efectiva r_1 del bobinado.

A la tensión aplicada V_1 se oponen vectorialmente tres tensiones: la caída $I_1 r_1$ en la resistencia del primario, la caída $I_1 x_{l1}$ debida al flujo de dispersión primario, y la fuerza contraelectromotriz E_1 inducida en el primario por el flujo mutuo resultante. Todas estas tensiones están apropiadamente comprendidas en el circuito equivalente de la fig. 1-21a.

El flujo mutuo resultante concatena con ambos devanados, y es engendrado por la acción combinada de sus f.m.m. Hay que tener en cuenta que la corriente primaria debe satisfacer dos necesidades del circuito magnético: debe no solamente (1) contrarrestar el efecto desmagnetizante de la corriente secundaria, sino también (2) producir una f.m.m. suficiente para crear el flujo mutuo resultante. De acuerdo con este aspecto físico es conveniente descomponer la corriente primaria en dos componentes: una de carga y otra de excitación. La componente de carga I'_2 se define como aquella componente de la corriente del primario que contrarreste exactamente la f.m.m. de la corriente secundaria I_2 , esto es:

$$I'_2 = \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (1-45)$$

que relaciona las corrientes secundarias con las primarias igual que en un transformador ideal.

La *componente de excitación* i_e es la corriente primaria adicional necesaria para producir el flujo mutuo resultante, y es una corriente no senoidal del tipo descrito en el apartado 1-5.

La corriente de excitación puede considerarse sustituida por una corriente senoidal equivalente, tal como se ha visto en el apartado 1-5, que a su vez se descompone en dos: la componente I_c correspondiente a las pérdidas en el hierro, en fase con la fuerza contraelectromotriz E_1 , y la componente magnetizante I_m retrasada 90° respecto a E_1 . En el circuito equivalente de la Fig. 1-21b se tiene en cuenta la corriente senoidal equivalente a la de excitación por medio de un circuito conectado entre bornes de E_1 , formado por una resistencia no inductiva de conductancia g_c en paralelo con una inductancia sin pérdidas de susceptancia b_m . Como alternativa puede conectarse en E_1 una combinación de resistencias y reactancias. En la conexión en paralelo (Fig. 1-21b) la potencia $E_1^2 g_c$ cubre las pérdidas en el hierro debidas al flujo mutuo resultante. Si admitimos que g_c es constante, las pérdidas en el hierro variarán como E_1^2 , o como $\phi_{m \max}^2 f^2$ si la onda es senoidal, siendo $\phi_{m \max}$ el máximo valor del flujo mutuo resultante. La susceptancia magnetizante b_m varía con la saturación del hierro. Considerando constante la inductancia correspondiente a b_m , la corriente magnetizante es independiente de la frecuencia, y directamente proporcional al flujo mutuo resultante. Tanto g_c como b_m se determinan normalmente para la tensión y frecuencia nominales, admitiendo que no varían con las

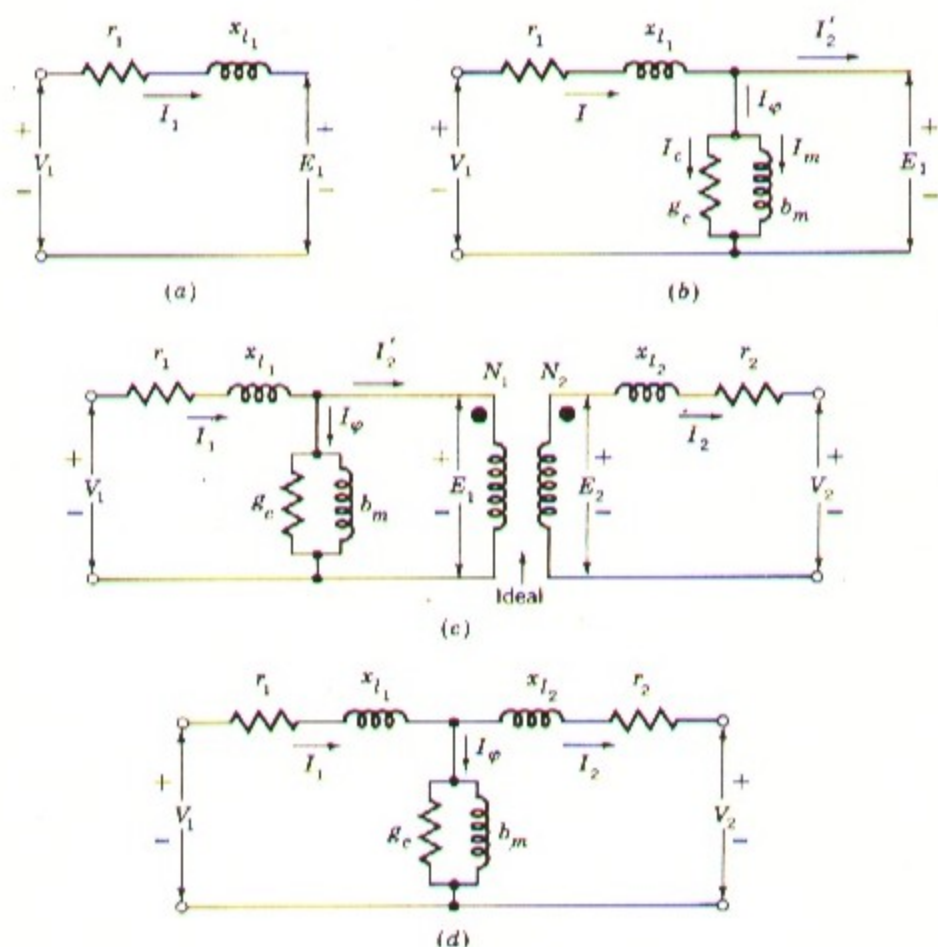


Fig. 1-21. Pasos sucesivos en el desarrollo del circuito equivalente de un transformador.

pequeñas desviaciones que respecto a dichos valores nominales se produzcan en un funcionamiento normal.

El flujo mutuo resultante φ induce en el secundario una f.e.m. E_2 y puesto que dicho flujo está concatenado con ambos devanados, la relación entre las tensiones inducidas es:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (1-46)$$

al igual que en un transformador ideal.

Esta transformación de tensiones así como la transformación de intensidades según la fórmula 1-45 pueden reflejarse en el circuito equivalente introduciendo en él un transfor-

mador ideal tal como se ha hecho en la Fig. 1-21c. Sin embargo, la f.e.m. E_2 no coincide con la tensión en bornes del secundario debido a la resistencia de éste y a que la corriente secundaria I_2 crea a su vez un *flujo de dispersión* secundario (véase Fig. 1-20). La diferencia entre la tensión V_2 en los terminales y la tensión inducida E_2 es debida a la caída de tensión en la resistencia r_2 del devanado secundario y en la reactancia de dispersión secundaria x_{f2} , como se muestra en la parte de la derecha de E_2 en el circuito equivalente de la Fig. 1-21c. Por consiguiente, un transformador real equivale a un transformador ideal con el aditamento de impedancias exteriores. Reduciendo todas las cantidades al primario o al secundario, puede trasladarse el transformador ideal de la Fig. 1-21c a la derecha o a la izquierda respectivamente del circuito equivalente, cosa que corrientemente se hace, quedando así dibujado dicho circuito como en la Fig. 1-21d en la que no se incluye el transformador ideal, y todas las tensiones, intensidades e impedancias están reducidas a un mismo lado. Para evitar complicaciones en la notación, se han empleado los mismos signos para los valores reducidos de la Fig. 1-21d que los que se emplearon para los valores *reales* en la Fig. 1-21c. En lo sucesivo emplearemos casi siempre los valores reducidos, debiéndose únicamente recordar a cuál de los dos lados del transformador lo han sido todas las cantidades que intervengan. El circuito de la Fig. 1-21d se conoce frecuentemente con el nombre de *circuito en T* del transformador.

Ejemplo 1-8

Un transformador de distribución de 50 kVA, 2400/240 V, tiene una impedancia de dispersión en el devanado de alta tensión de $0,72 + j 0,92$ ohm, y de $0,0070 + j 0,0090$ ohm en el de baja tensión. A la tensión y frecuencia nominales la admitancia $Y\varphi$ de la rama en derivación que da cuenta de la corriente de excitación es de $(0,324 - j 2,24) \times 10^{-2}$ siemens, contemplada desde el lado de baja.

Dibújese el circuito equivalente: (a) reducido al lado de alta, y (b) reducido al lado de baja, señalando en ambos casos el valor numérico de las impedancias.

SOLUCION

En las figuras 1-22a y 1-22b se representan los dos circuitos pedidos, en los que el lado de alta tensión se ha numerado con 1, y el de baja con 2. Las tensiones señaladas en las placas de identificación de los transformadores de potencia se basan en la relación entre los números de espiras de los devanados, despreciando la pequeña caída de tensión en las impedancias de dispersión cuando está en carga. Puesto que en este caso se trata de un transformador de relación 10/1, las impedancias se reducirán de uno a otro lado multiplicando o dividiendo por 100. El valor de una impedancia es mayor cuando está reducida al lado de alta que cuando lo está al de baja, y puesto que la admitancia es inversa de la impedancia, para reducir aquélla de uno a otro lado del transformador deberá emplearse un coeficiente que será el inverso del utilizado para las impedancias: el valor de una admitancia es menor cuando está reducido al lado de alta que cuando lo está al de baja.

El transformador ideal puede dibujarse en el esquema tal como se ha hecho con línea de trazos en la Fig. 1-22, o puede omitirse su representación dando por supuesta su existencia y correspondiéndose sus terminales con las letras representadas.

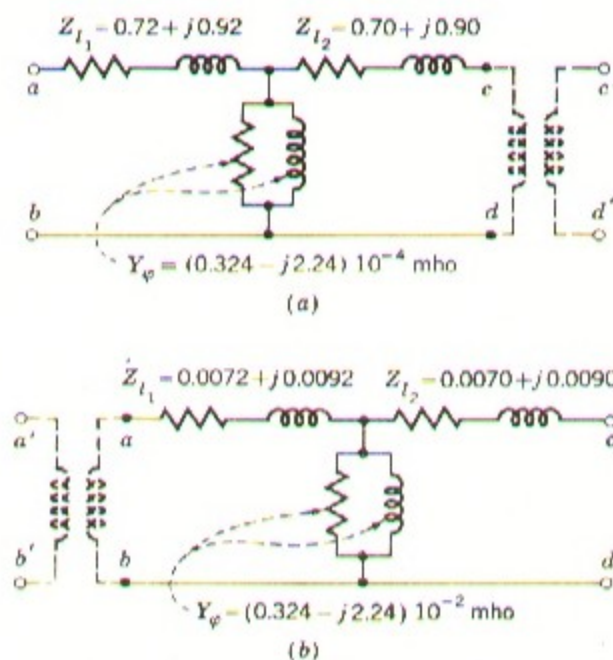


Fig. 1-22. Circuito equivalente del transformador del ejemplo 1-8.

1-8. ASPECTOS TECNICOS DEL ANALISIS DE TRANSFORMADORES

En estudios técnicos en los que figure un transformador como elemento del circuito se acostumbra a aceptar una o más formas aproximadas del circuito equivalente de la Fig. 1-21 en lugar de tomar éste íntegramente. Las aproximaciones que se pueden admitir en cada caso particular dependen principalmente de razonamientos físicos basados en el orden de magnitud de las cantidades despreciadas. En este apartado se mencionan las aproximaciones más comunes, y se exponen los métodos de ensayo para determinar las constantes de un transformador.

a. Transformadores de potencia - Circuitos equivalentes aproximados

En la Fig. 1-23 se han resumido los circuitos equivalentes aproximados de más corriente empleo en el estudio de transformadores de potencia a frecuencia constante. Todas las cantidades que aparecen en estos circuitos pueden estar reducidas indistintamente al primario o al secundario, y se ha omitido la representación del transformador ideal. Con frecuencia puede aliviarse considerablemente la labor de cálculo desplazando el circuito

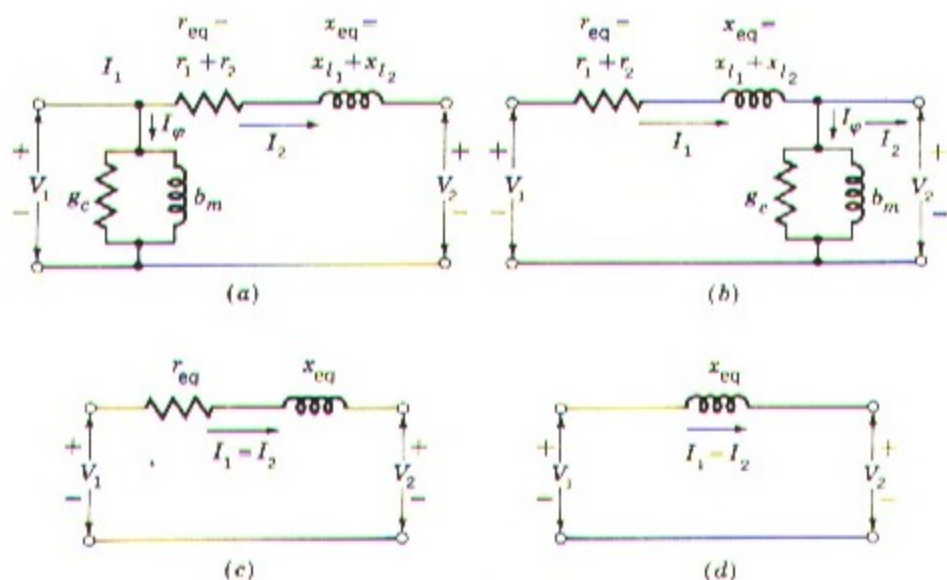


Fig. 1-23. Circuitos equivalentes aproximados.

derivado que representa la corriente de excitación, desde el centro del circuito en T hacia los terminales, ya sean del primario ya del secundario, tal como se ve en las Figs. 1-23a y b. El ramal en serie es la combinación de las resistencias y de las reactancias de dispersión reducidas todas al mismo lado: en ocasiones a esta impedancia se la denomina *impedancia equivalente*, y a sus componentes *resistencia equivalente* r_{eq} y *reactancia equivalente* x_{eq} respectivamente, como puede verse en las Figs. 1-23a y b.

Al despreciar la caída de tensión originada por la corriente de excitación en las impedancias de dispersión primaria y secundaria se comete un error, pero en general este error es insignificante en la mayor parte de los problemas relativos a transformadores de potencia.

Puede conseguirse una nueva simplificación prescindiendo completamente de la corriente de excitación como se ha hecho en la Fig. 1-23c, en la que la representación del transformador ha quedado reducida a una impedancia equivalente en serie. Si se trata de un gran transformador (varios centenares de kVA, o más), la resistencia equivalente r_{eq} es pequeña frente a la reactancia equivalente X_{eq} pudiéndose en consecuencia despreciar muchas veces, resultando así la Fig. 1-23d. Los circuitos de las Figs. 1-23c y d son suficientemente precisos para la mayor parte de los problemas relativos a sistemas de potencias normales. Por último, en los casos en que las tensiones e intensidades vengan fijadas casi totalmente por circuitos exteriores al transformador, así como cuando no se requiera un alto grado de precisión, puede despreciarse completamente la impedancia del transformador considerando a éste como ideal según lo descrito en el apartado 1-6.

Los circuitos de la Fig. 1-23 tienen además la ventaja de que las resistencias y reactancias equivalentes totales r_{eq} y x_{eq} pueden determinarse mediante ensayos muy sencillos,

mientras que la medición del valor de las reactancias de dispersión x_{e1} y x_{e2} es una labor verdaderamente dificultosa.

Ejemplo 1-9

El transformador de 50 kVA, 2400/240 V cuyos datos se han dado en el ejemplo 1-8 se emplea para rebajar la tensión en el extremo de salida de una línea de impedancia $0,30 + j 1,60$ ohm. La tensión V_g en la cabecera de la línea es de 2400 V.

Hállese la tensión en los terminales del secundario cuando la carga conectada absorbe la intensidad nominal del transformador, siendo el factor de potencia de la carga de 0,8 en retraso. Despréciense las caídas de tensión en el transformador y en la línea debidas a la corriente de excitación.

SOLUCION

En la Fig. 1-24a se representa el circuito con todas las cantidades reducidas al lado de alta tensión (primario); el transformador está representado por sus impedancias equivalentes como en la Fig. 1-23c. El valor de la impedancia equivalente, deducido de la Fig. 1-22a, es $Z_{eq} = 1,42 + j 1,82$ ohm, y la impedancia conjunta de línea y transformador en serie es: $Z = 1,72 + j 3,42$ ohm. La intensidad en carga, deducida de los datos del transformador y reducida al lado de alta tensión, es: $I = 50.000/2400 = 20,8$ A.

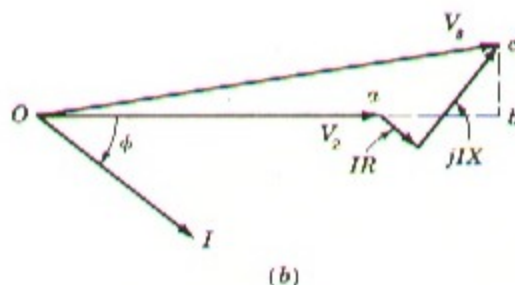
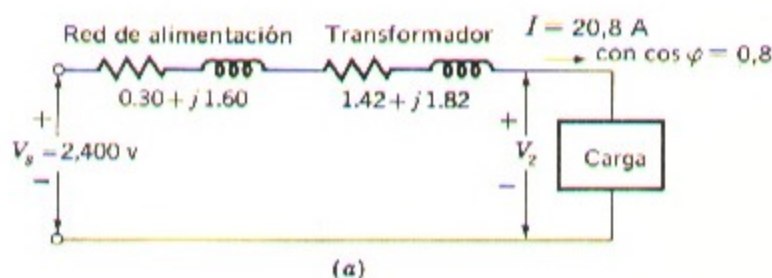


Fig. 1-24. Circuito equivalente y diagrama vectorial del ejemplo 1-9.

En la Fig. 1-24b está representado el diagrama vectorial referido al lado de alta tensión; de él se deduce:

$$Ob = \sqrt{V_s^2 - (bc)^2}$$

y
$$V_2 = Ob - ab$$

Obsérvese que:

$$bc = IX \cos \phi - IR \sin \phi$$

$$ab = IR \cos \phi + IX \sin \phi$$

siendo R y X las resistencias y reactancias compuestas respectivamente. Por tanto:

$$bc = (20,8) (3,42) (0,80) - (20,8) (1,72) (0,60) = 35,5 \text{ V}$$

$$ab = (20,8) (1,72) (0,80) + (20,8) (3,42) (0,60) = 71,4 \text{ V}$$

Haciendo operaciones comprobaríamos que Ob es muy próximo a V_s , o sea a 2400 V, por consiguiente $V_2 = 2329$ V reducido al lado de alta tensión.

La tensión real en bornes del secundario será 2329/10, es decir:

$$V_2 = 233 \text{ V}$$

b. Transformadores a frecuencia variable - Circuitos equivalentes aproximados

Para acoplar entre sí distintos dispositivos en circuitos electrónicos de comunicaciones, medición y control, se emplean a menudo pequeños transformadores con núcleos de hierro que trabajan a frecuencias audibles, y que se conocen con el nombre de *transformadores de audio*, o a *frecuencia audible*. Sus principales funciones son las de elevar tensiones contribuyendo así a la ganancia total en amplificadores, y las de actuar como transformadores de impedancias para conseguir la relación óptima entre la impedancia aparente de una carga y la de su alimentador. También pueden cumplir otras funciones auxiliares, tales como las de dar paso por su primario a una corriente continua sin que intervenga en el circuito secundario.

El empleo de transformadores para equilibrar impedancias se basa en las propiedades de transformación reflejadas en la fórmula 1-44. Por ejemplo, los osciladores y amplificadores dan su mejor rendimiento cuando trabajan con una impedancia de carga comprendida dentro de un cierto orden de magnitud, pudiéndose modificar mediante acoplamiento con un transformador la impedancia aparente de la carga para aproximarla a su valor óptimo: un transformador destinado a este uso se denomina *de salida*.

Cuando la frecuencia varía dentro de un margen amplio es necesario que los valores instantáneos de la tensión de salida sean lo más rigurosamente posible proporcionales a las tensiones instantáneas de entrada: ello supone que a cualquier frecuencia corresponda

siempre la misma amplificación de tensión y que el desplazamiento de fase sea igual a cero. La *característica de amplitud-frecuencia* (denominada también, por abreviación, *característica de frecuencia*) es una curva que indica la relación entre la tensión en carga en el secundario y la tensión interna de alimentación en el primario, en función de la frecuencia, siendo de desear que dicha curva sea lo más plana posible. La *característica de fase* es otra curva que indica el ángulo de fase de la tensión de salida con relación a la de alimentación, puesto también en función de la frecuencia, siendo conveniente que dicho ángulo sea lo más pequeño posible. Estas características dependen no sólo del transformador sino también de las constantes de los circuitos primario y secundario completos.

Como ejemplo de aplicación técnica de las aproximaciones, consideremos un amplificador acoplado a su carga a través de un transformador de salida. El amplificador equivale a una fuente de tensión E_G en serie con una resistencia interior r_G , y la carga puede considerarse como una resistencia r_L , tal como se muestra en la Fig. 1-25a en la que el transformador está representado por el circuito equivalente de la Fig. 1-25c prescindiendo de las pérdidas en el hierro. A veces hay que tener en cuenta las capacidades dispersas de los devanados a las altas frecuencias audibles, sobre todo si la impedancia de la alimentación supera unos pocos centenares de ohm.

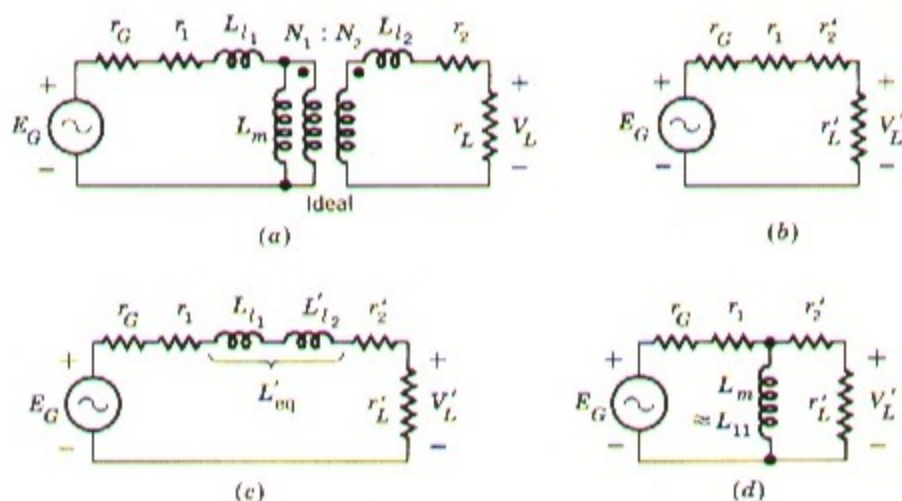


Fig. 1-25. Circuito equivalente de un transformador de salida. (a) Circuito equivalente completo, (b) circuito equivalente aproximado en la zona media de audio-frecuencias, (c) equivalencia a alta frecuencia, (d) equivalencia a baja frecuencia.

El estudio de un circuito correctamente diseñado abarca tres gamas de frecuencias:

1. A frecuencias intermedias (alrededor de 500 Hz) ninguna de las inductancias tiene importancia y el circuito equivalente se reduce a una red de resistencias como puede verse en la Fig. 1-25b en la que se han reducido todas las cantida-

des al primario como se deduce de los símbolos utilizados. El análisis de este circuito demuestra que la relación entre las tensiones en la carga V_L y de entrada E_G es:

$$\frac{V_L}{E_G} = \frac{N_2 r'_L}{N_1 R'_{se}} \quad (1-47)$$

siendo

$$R'_{se} = r_G + r_1 + r_2' + r'_L \quad (1-48)$$

En esta zona intermedia, que generalmente abarca varias octavas, la relación de tensiones es muy aproximadamente constante, es decir que la curva característica es plana y el defase nulo.

- Al aumentar la frecuencia, las reactancias de dispersión del transformador van adquiriendo importancia, y el circuito equivalente para la zona de frecuencias audibles altas puede verse en la Fig. 1-25c. El análisis del circuito demuestra que a estas frecuencias:

$$\frac{V_L}{E_G} = \frac{N_2 r'_L}{N_1 R'_{se}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega L'_{eq}/R'_{se})^2}} \quad (1-49)$$

en la que L'_{eq} es la inductancia de dispersión equivalente.

La relación relativa de tensiones, respecto a su valor medio, es:

$$\text{Relación relativa de tensiones} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega L'_{eq}/R'_{se})^2}} \quad (1-50)$$

La tensión de salida queda retrasada respecto a la de entrada de un ángulo:

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{\omega L'_{eq}}{R'_{se}} \quad (1-51)$$

En la mitad derecha de la Fig. 1-26 pueden verse las curvas que dan la relación relativa de tensiones y el ángulo de fase en función de la proporción entre reactancia y resistencia $\omega L'_{eq}/R'_{se}$.

- A bajas frecuencias las reactancias de dispersión pueden despreciarse, pero la influencia del circuito magnetizante en derivación va creciendo a medida que decrece su reactancia. La inductancia del circuito de magnetización casi se iguala al coeficiente de autoinducción L_{11} del primario.

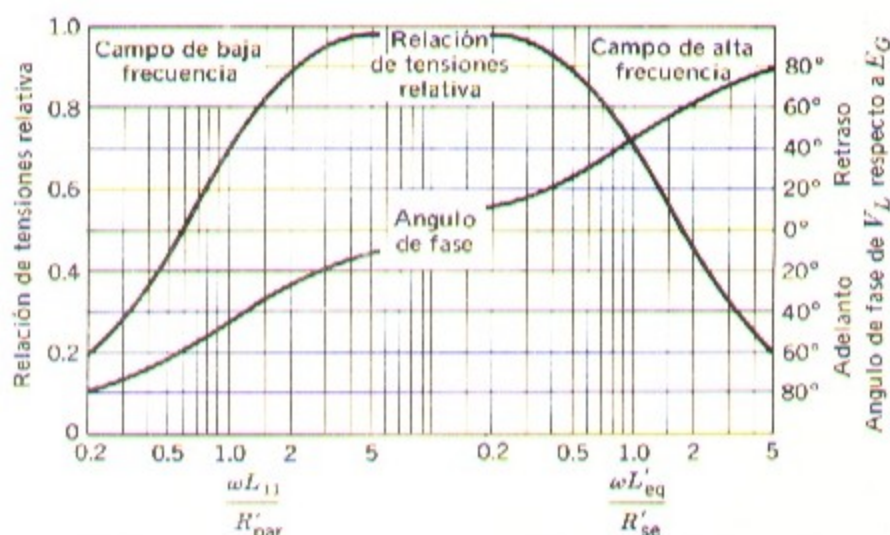


Fig. 1-26. Características normalizadas de frecuencia de los transformadores de salida.

El circuito equivalente para bajas frecuencias es el representado en la figura 1-25d del que:

$$\frac{V_L}{E_G} = \frac{N_2 r'_L}{N_1 R'_{se}} \frac{1}{\sqrt{1 + R'_{par}/\omega L_{11}}^2} \quad (1-52)$$

en donde
$$R'_{par} = \frac{(r_G + r_1)(r'_2 + r'_L)}{r_G + r_1 + r'_2 + r'_L} \quad (1-53)$$

La relación relativa de tensiones, respecto a su valor medio, es:

$$\text{Relación relativa de tensiones} = \frac{1}{\sqrt{1 + (R'_{par}/\omega L_{11})^2}} \quad (1-54)$$

y el ángulo de avance de la tensión de salida respecto a la de entrada es:

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{R'_{par}}{\omega L_{11}} \quad (1-55)$$

La relación relativa de tensiones, así como el ángulo de fase en función de la proporción entre la reactancia y la resistencia $\omega L_{11}/R'_{par}$, vienen dados por las curvas de la mitad izquierda de la Fig. 1-26. Los puntos en los que la relación relativa de tensiones vale 0,707 se denominan puntos de *media potencia*. De la fórmula 1-50 se deduce que el

punto superior de media potencia corresponde a una frecuencia f_h para la que se igualan la reactancia de dispersión equivalente $\omega_h L'_{eq}$ y las resistencias en serie R'_{se} , es decir:

$$f_h = \frac{R'_{se}}{2\pi L'_{eq}} \quad (1-56)$$

y asimismo, de la fórmula 1-54 se deduce que el punto inferior de media potencia corresponde a una frecuencia f_l para la que se iguala la reactancia ωL_{11} y las resistencias en paralelo R'_{par} , es decir:

$$f_l = \frac{R'_{par}}{2\pi L_{11}} \quad (1-57)$$

La anchura de banda puede definirse como la relación

$$\frac{f_h}{f_l} = \frac{R'_{se} L_{11}}{R'_{par} L'_{eq}} \quad (1-58)$$

Para conseguir una anchura de banda muy amplia se requiere que la relación entre la autoinductancia y la inductancia de dispersión sea alta, o que el coeficiente de acoplamiento sea lo más próximo posible a la unidad.

Las capacidades dispersas de los devanados tienen una influencia apreciable sobre las características a frecuencias audibles altas, tendiendo a provocar puntas en la relación de tensiones para aquellas frecuencias en que entran en resonancia las capacidades y las inductancias dispersas. La altura de la punta depende de las impedancias del circuito así como de la inductancia del transformador y de las capacidades parásitas. Estas capacidades son de difícil cálculo, por lo que las características de frecuencia-respuesta de un circuito dado, generalmente, se determinan mediante ensayos. El estudio precedente debe considerarse más como una exposición de los efectos de las inductancias del transformador que como un análisis preciso.

c. Transformadores de impulsos - Consideraciones cualitativas¹

Muchos de los circuitos empleados en aplicaciones tales como el radar, la televisión o los computadores digitales se denominan circuitos *digitales* o *de impulsos* puesto que las ondas de tensiones e intensidades están formadas por impulsos: en tales circuitos pueden figurar transformadores, denominados por tal motivo *transformadores de impulsos*, cuyas funciones son idénticas a las desempeñadas en otros circuitos, es decir: variar la amplitud de un impulso de tensión; acoplar entre sí distintos escalones de un amplificador de impulsos; modificar los niveles de impedancias, o aislar ciertos elementos de las corrientes continuas.

¹ Para un análisis cuantitativo véase Reuben Lee, "Electronic Transformers and Circuits", John Wiley & Sons, Inc. Nueva York, 1947.

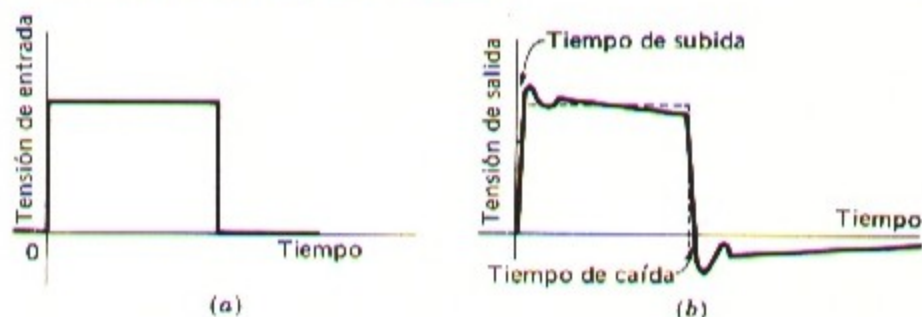


Fig. 1-27. (a) Onda cuadrada de tensión de entrada en un transformador de impulsos, y (b) la correspondiente onda de tensión de salida.

Para cumplir correctamente con estas funciones es preciso que el transformador reproduzca lo más fielmente posible en los bornes de su secundario la forma del impulso de entrada. En la Fig. 1-27a puede verse un impulso de entrada de forma cuadrada, cuyo ancho abarca corrientemente desde una fracción hasta unos veinte microsegundos, siendo bastante mayor el tiempo que transcurre entre un impulso y el siguiente. Para determinar la forma del impulso de salida debe atenderse más al período transitorio que al permanente: en la Fig. 1-27b se muestra un ejemplo típico.

La respuesta al frente delantero del impulso se determina con el auxilio del circuito equivalente a alta frecuencia, incluyendo las capacidades parásitas. Debido a la existencia de inductancias de dispersión, se requiere un *tiempo de subida* apreciable hasta que la tensión de salida alcanza su valor teórico, y al existir capacidades parásitas generalmente se producirán oscilaciones amortiguadas. Para acortar al mínimo el tiempo de subida, las inductancias de dispersión deben reducirse lo máximo posible.

La respuesta a la parte horizontal superior del impulso se determina por medio del circuito equivalente a baja frecuencia de la Fig. 1-25d. La tensión de salida no puede mantenerse horizontal por cuanto ello equivaldría a transmitir una corriente continua a través del transformador; en realidad la forma del impulso de salida muestra un tramo descendente, o sea una disminución de tensión (véase la Fig. 1-27b). Naturalmente, si el tiempo fuera suficientemente largo, la tensión llegaría a descender hasta cero, cosa que no ocurre porque la duración del impulso es pequeña en relación a este tiempo. La inclinación de la parte superior puede mantenerse dentro de límites admisibles construyendo los núcleos con un material de alta permeabilidad magnética.

Al cesar la tensión de entrada al final del impulso, transcurre un tiempo apreciable hasta que la tensión en el secundario se anula totalmente, apareciendo una depresión seguida de una oscilación amortiguada, manteniéndose negativa la tensión durante un tiempo relativamente largo. En efecto, durante este período se descarga la energía del campo magnético cesante a través de las capacidades parásitas y de las resistencias del circuito. La forma del impulso resultante es la que corresponde a un circuito *RLC* en paralelo.

Los transformadores de impulsos son de pequeñas dimensiones, y tienen relativamente pocas espiras con objeto de reducir al mínimo las inductancias de dispersión: sus núcleos

son de ferrita o de cintas enrolladas de aleaciones de alta permeabilidad tales como el HiperSil (un acero especial al silicio de alta permeabilidad) o permalloy.

Puesto que el tiempo que transcurre entre dos impulsos sucesivos es largo comparado con el de los propios impulsos, la carga promedio que ha de soportar el transformador es ligera, lo que permite que soporten impulsos de potencia sorprendentemente alta aun siendo muy pequeños.

d. Ensayos en cortocircuito y en circuito abierto

Para determinar las constantes de los circuitos equivalentes de la Fig. 1-23 y medir las pérdidas de potencia de un transformador se utilizan métodos de ensayo muy sencillos que consisten en medir la tensión, intensidad y potencia de entrada en el primario estando el secundario en cortocircuito y en circuito abierto o en vacío.

Con el secundario en cortocircuito basta una tensión primaria del orden del 2 al 12 por ciento de la nominal para conseguir la corriente de plena carga: en esta prueba se acostumbra a tomar, por motivos de conveniencia, el lado de alta como primario. Si V_{sc} , I_{sc} y P_{sc} representan respectivamente la tensión aplicada, la corriente primaria y la potencia de entrada, la impedancia en cortocircuito Z_{sc} y sus componentes R_{sc} y X_{sc} de resistencia y reactancia referidas al primario serán:

$$Z_{sc} = \frac{V_{sc}}{I_{sc}} \quad (1-59)$$

$$R_{sc} = \frac{P_{sc}}{I_{sc}^2} \quad (1-60)$$

$$X_{sc} = \sqrt{Z_{sc}^2 - R_{sc}^2} \quad (1-61)$$

La Fig. 1-28 representa el circuito equivalente con el secundario en cortocircuito. La tensión inducida en el secundario por el flujo resultante en el núcleo es igual a la caída de tensión en el mismo devanado debido a las impedancias de dispersión: con la intensidad nominal, esta tensión es únicamente del uno al seis por ciento de la tensión nominal: el valor del flujo correspondiente es pequeño, lo que permite despreciar totalmente la corriente de excitación y las pérdidas en el hierro. Por consiguiente, la admitancia de excitación, punteada en la Fig. 1-28, puede suprimirse, y las intensidades primaria y



Fig. 1-28. Circuito equivalente con el secundario en cortocircuito.

secundaria casi se igualan cuando ambas están reducidas al mismo lado. La potencia de entrada equivale prácticamente a las pérdidas totales en el cobre de los dos devanados, y la tensión aplicada equivale a la caída en las impedancias de dispersión del primario y del secundario combinadas Z_{eq} .

La resistencia equivalente y la reactancia, reducidas al primario, son prácticamente iguales a las resistencia y reactancia en cortocircuito dadas por las fórmulas 1-60 y 1-61 respectivamente. Naturalmente, la impedancia equivalente puede transferirse de uno a otro lado en la forma habitual. En las raras ocasiones en que debe recurrirse al circuito equivalente en T de la Fig. 1-21d, pueden obtenerse unos valores aproximados de las resistencias y de las reactancias de dispersión que corresponden a cada uno de los devanados admitiendo que $r_1 = r_2 = 0,5 r_{eq}$ y que $x_{l1} = x_{l2} = 0,5 x_{eq}$ siempre que todas las impedancias estén reducidas al mismo lado.

Estando el secundario en circuito abierto y aplicando al primario la tensión nominal, circula por éste una corriente de excitación cuyo valor no es más que del 2 al 6 por ciento de la corriente a plena carga. Si el transformador está destinado a trabajar con una tensión distinta de la suya nominal, las pruebas deberán hacerse a esta otra tensión. En general para los ensayos en circuito abierto se toma como primario el devanado de baja. La caída de tensión en la impedancia de dispersión primaria debida a la débil corriente de excitación, es totalmente despreciable, con lo que la tensión aplicada V_1 es prácticamente igual a la f.e.m. E_1 inducida por el flujo resultante en el núcleo: también son prácticamente despreciables las pérdidas en el cobre del primario debidas a la misma pequeña corriente de excitación, con lo que resulta que la potencia de entrada P_1 es prácticamente igual a la potencia P_c perdida en el hierro, es decir, que la admitancia de excitación $Y_e = g_c - jb_m$ de la Fig. 1-21d es casi igual a la admitancia $Y_{oc} = g_{oc} - jb_{oc}$ en circuito abierto determinada por la tensión aplicada V_1 , la corriente de excitación I_e y la potencia de entrada P_1 medida en el primario estando el secundario en vacío: por tanto, la admitancia de excitación y sus componentes conductancia y susceptancia valen, muy aproximadamente:

$$Y_e = Y_{oc} = \frac{I_e}{V_1} \quad (1-62)$$

$$g_c = g_{oc} = \frac{P_1}{V_1^2} \quad (1-63)$$

$$b_m = b_{oc} = \sqrt{Y_{oc}^2 - g_{oc}^2} \quad (1-64)$$

Naturalmente, los valores así obtenidos están reducidos al lado utilizado como primario en el ensayo. Cuando se utilizan los circuitos equivalentes de las Figs. 1-23c y d, con el ensayo en circuito abierto se determinan las pérdidas en el hierro, y se comprueba el valor de la intensidad de la corriente de excitación. Algunas veces se mide también la tensión en bornes del secundario en circuito abierto para comprobar la relación del número de espiras.

Ejemplo 1-10

Al hacer el ensayo en cortocircuito del transformador de 50 kVA, 2400/240 V del ejemplo 1-8, estando los aparatos de medida conectados en el lado de alta se han obtenido los siguientes valores: 48 V, 20,8 A y 617 W.

En el ensayo en circuito abierto, utilizando el lado de baja como primario, los aparatos de medida situados en dicho lado dan las siguientes indicaciones: 240 V, 5,41 A y 186 W.

Determinar el rendimiento y la caída interna de tensión a plena carga, con un factor de potencia de 0,8 en retraso.

SOLUCION

La impedancia equivalente, la resistencia y la reactancia del transformador (reducidas al lado de alta, lo que indicamos con el subíndice H) deducidas del ensayo en cortocircuito son:

$$Z_{eqH} = \frac{48}{20,8} = 2,31 \text{ ohm}$$

$$r_{eqH} = \frac{617}{20,8^2} = 1,42 \text{ ohm}$$

$$X_{eqH} = \sqrt{2,31^2 - 1,42^2} = 1,82 \text{ ohm}$$

La intensidad a plena carga en el primario es:

$$I_H = \frac{50.000}{2400} = 20,8 \text{ A}$$

Pérdidas en el cobre	$= I_H^2 r_{eqH} = 20,8^2 \cdot 1,42$	$= 617 \text{ W}$
Pérdidas en el hierro		$= 186 \text{ W}$
Total pérdidas a plena carga		$= 803 \text{ W}$
Potencia de salida	$= 50.000 \cdot 0,80$	$= 40.000 \text{ W}$
Potencia de entrada		$= 40.803 \text{ W}$

$$\frac{\text{Potencia perdida}}{\text{Potencia de entrada}} = \frac{803}{40.803} = 0,0197$$

El rendimiento de cualquier dispositivo transmisor de potencia es:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada}}$$

que puede expresarse también como:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Potencia de entrada} - \text{Pérdidas}}{\text{Potencia de entrada}} = 1 - \frac{\text{Pérdidas}}{\text{Potencia de entrada}}$$

El rendimiento del transformador para la carga señalada es, pues:

$$\text{Rendimiento} = 1 - 0,0197 = 0,980$$

Entendemos por caída interna de tensión de un transformador la variación que experimenta la tensión en bornes del secundario cuando la carga varía desde cero hasta su valor máximo, y generalmente se expresa en tanto por ciento respecto al valor en plena carga. Utilizaremos el circuito equivalente de la Fig. 1-23c con todos los datos reducidos al lado de alta. Supongamos que se ajusta la tensión primaria de tal forma que la secundaria adquiera su valor nominal cuando se trabaja a plena carga, es decir que la tensión secundaria reducida al primario sea de $V_{2H} = 2400$ V. Con el diagrama vectorial de la Fig. 1-29 se puede calcular el valor requerido de la tensión primaria.

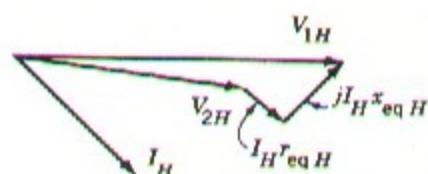


Fig. 1-29. Diagrama vectorial del ejemplo 1-10.

$$\begin{aligned} V_{1H} &= V_{2H} + I_H (r_{eqH} + jx_{eqH}) \\ &= 2400 + 20,8 (0,80 - j0,60) (1,42 + j1,82) \\ &= 2446 + j13 \end{aligned}$$

El valor de V_{1H} es pues de 2446 V. Si manteniendo este valor se suprime la carga, la tensión en el secundario en circuito abierto será también de 2446 V reducida al lado de alta; por consiguiente,

$$\text{Caída interna de tensión} = \frac{2446 - 2400}{2400} \cdot 100 = 1,92 \%$$

1-9. TRANSFORMADORES EN CIRCUITOS TRIFASICOS

Tres transformadores monofásicos pueden conectarse de cualquiera de las formas indicadas en la Fig. 1-30 para formar un grupo trifásico. En los cuatro esquemas de que consta la figura, los devanados primarios se han dibujado en el lado izquierdo y contrariamente, los secundarios en el derecho; a cada devanado primario le corresponde el secunda-

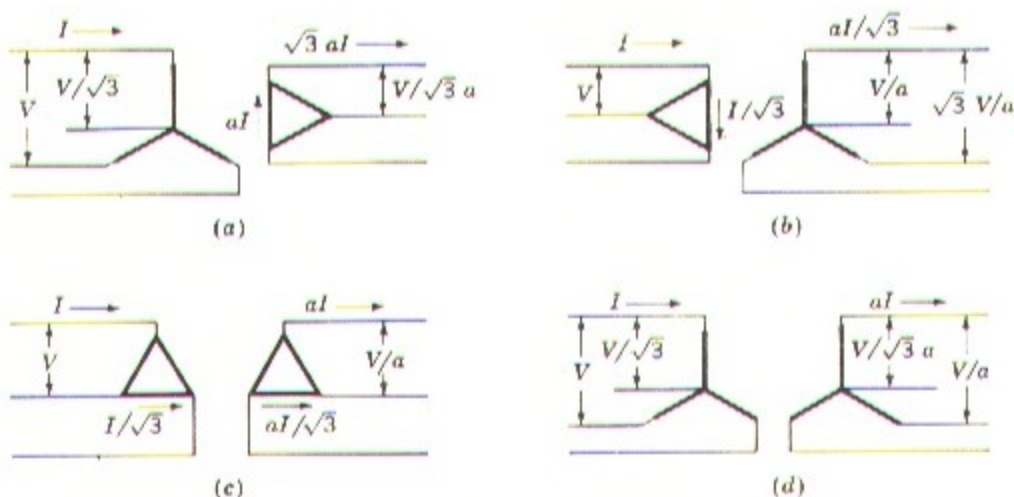


Fig. 1-30. Conexiones corrientes en transformadores trifásicos. Los devanados de los transformadores están representados por las líneas de trazo grueso.

rio dibujado paralelo a él. En las mismas figuras se indican las tensiones e intensidades resultantes, supuestos los transformadores ideales, cuando la tensión entre fases es V , la intensidad en la línea es I , y la relación N_1/N_2 entre primario y secundario es a .

Puede observarse que dada una tensión entre fases y los kVA totales, los kVA nominales de cada transformador serán siempre igual a un tercio del total del grupo, independientemente de la forma de conexión, pero que las tensiones e intensidades nominales sí dependerán de ello.

La conexión Y- Δ se emplea generalmente para reducir de alta a media o baja tensión, siendo una de las razones la posibilidad de tener un neutro puesto a tierra en el lado de alta, cosa que se ha demostrado conveniente en muchos casos. Por el contrario, la conexión Δ -Y se utiliza generalmente para elevar la tensión. La conexión Δ - Δ tiene la ventaja de que puede eliminarse un transformador, por avería o para su repaso, mientras los otros dos siguen funcionando como un grupo trifásico, si bien con la potencia reducida al 58 % de la del grupo completo; esta situación se conoce como conexión *delta abierta* o *conexión en V*. La conexión Y-Y se emplea muy raramente debido a fenómenos relacionados con las corrientes de excitación.

En lugar de utilizar tres transformadores monofásicos para formar un grupo, puede emplearse un solo transformador trifásico, con sus seis devanados montados en un núcleo común y contenido todo ello en una cuba única. El transformador trifásico tiene las ventajas de su menor coste, menos peso, requerir menos espacio y tener un rendimiento algo más elevado. La Fig. 1-31 es la fotografía del interior de un gran transformador trifásico.

El cálculo de un circuito trifásico equilibrado en el que intervengan transformadores puede hacerse operando con uno solo de dichos transformadores ya que para los otros dos existen idénticas condiciones, salvo por lo que se refiere al desplazamiento de fases propio

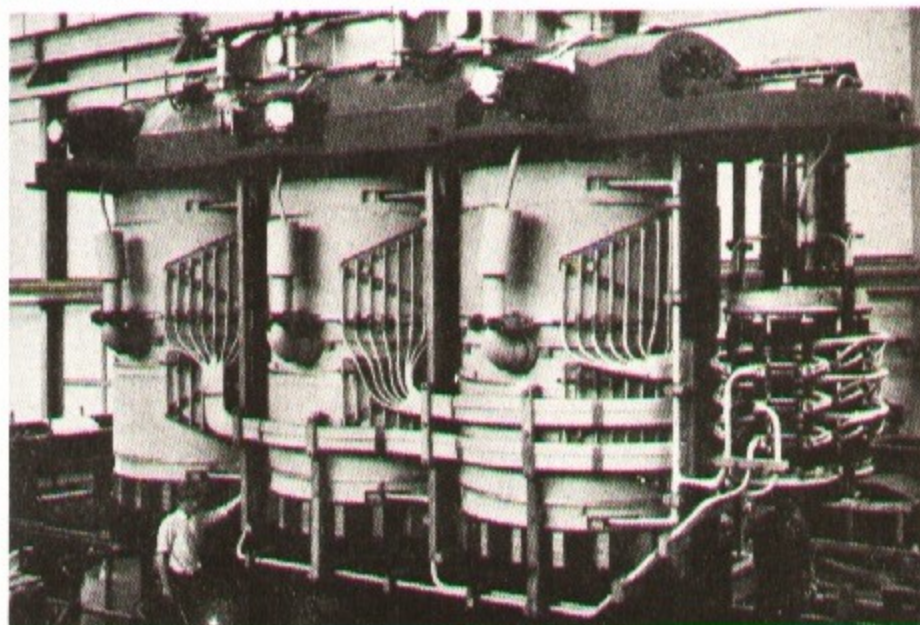


Fig. 1-31. Transformador trifásico de 200 MVA, 50 Hz, triple devanado, 210/80/10,2 KV, desprovisto de su cubierta. El devanado de 210 KV tiene un conmutador accionable en carga para el ajuste de tensión. (*Brown Boveri Corporation.*)

de los sistemas trifásicos. En general es conveniente hacer los cálculos entre una fase y neutro partiendo de una conexión en Y, puesto que de esta forma las impedancias del transformador pueden sumarse directamente en serie con las de la línea de transmisión. Las impedancias de la línea pueden reducirse de uno a otro lado del grupo utilizando el cuadrado de la relación de transformación de tensión entre fases. Cuando se trata de grupos conectados en Y- Δ o en Δ -Y pueden reducirse todas las cantidades al lado conectado en Y, y en caso de grupos Δ - Δ en serie con la línea de transmisión, es conveniente reemplazar las impedancias del transformador conectadas en Δ por impedancias equivalentes en conexión Y. Es sabido que un circuito equilibrado conectado en Δ de Z_{Δ} ohm por fase, equivale a un circuito equilibrado conectado en Y de Z_Y ohm por fase, siempre que se cumpla la igualdad.

$$Z_Y = 1/3 \cdot Z_{\Delta} \quad (1-65)$$

Ejemplo 1-11

Tres transformadores monofásicos de 50 kVA, 2400/240 idénticos al del ejemplo 1-10 se conectan en Y- Δ para formar un grupo trifásico de 150 kVA destinado a rebajar la tensión en el extremo de una línea de $0,15 + j1,00$ ohm de impedancia por fase, alimentada en su cabecera a la tensión de 4160 V entre fases. Los secundarios de los transforma-

dores alimentan una carga trifásica equilibrada a través de una línea de $0,0005 + j0,0020$ ohm de impedancia por fase.

Hállese la tensión compuesta, o entre fases, aplicada a la carga cuando ésta absorbe la intensidad nominal de los transformadores, siendo el factor de potencia igual a 0,8 retrasado.

SOLUCION

Los cálculos por fase pueden hacerse reduciendo todos los valores al lado de alta del grupo, conectado en Y. La tensión en el extremo de la línea de alimentación equivale a una tensión V_s de valor

$$V_s = \frac{4160}{\sqrt{3}} = 2400 \text{ V entre fase y neutro}$$

Dada la relación de transformación, la intensidad nominal en el lado de alta es de 20,8 A por fase en Y. La impedancia de la línea de baja, reducida al lado de alta valiéndose del cuadrado de la relación de tensiones entre fases, es de:

$$\left(\frac{4160}{240} \right)^2 (0,0005 + j0,0020) = 0,15 + j0,60 \text{ ohm}$$

y la impedancia conjunta de las líneas de alta y de baja en serie, reducidas naturalmente al lado de alta, es:

$$Z_{\text{líneas}} = 0,30 + j1,60 \text{ ohm por fase en Y}$$

La impedancia equivalente del grupo reducida al lado de alta conectado en Y, deducida del Ejemplo 1-10, es:

$$Z_{\text{eqH}} = 1,42 + j1,82 \text{ ohm por fase en Y}$$

El circuito equivalente para una fase, reducido al primario conectado en Y, es exactamente el mismo de la Fig. 1-24a y la solución es por tanto la misma del ejemplo 1-9, de donde se desprende que la tensión en la carga, reducida al lado de alta, es de 2329 V entre fase y neutro. La tensión real en la carga es:

$$V_{\text{carga}} = 233 \text{ V, tensión compuesta}$$

Esta es la tensión entre fases puesto que los secundarios están conectados en Δ .

Ejemplo 1-12

Tres transformadores como el del ejemplo 1-9 se conectan Δ - Δ y se les alimenta a través de una línea trifásica de 2400 V de tensión compuesta y de 0,8 ohm de reactancia por fase. La reactancia equivalente de cada transformador, reducida al lado de alta, es de

1,82 ohm y se suponen despreciables todas las resistencias del circuito. En su cabecera la línea está conectada al secundario de otro transformador, trifásico, con conexión Y- Δ , siendo su potencia nominal total de 500 kVA y la relación de tensiones de 24.000/2400 V entre fases. La reactancia equivalente de este transformador es de 2,76 ohm por fase en Δ , reducida al lado de 2400 V. La tensión compuesta aplicada a los bornes del primario es de 24.000 V.

Se produce un cortocircuito trifásico entre bornes de 240 V del transformador de salida. Calcúlese la intensidad de cortocircuito en régimen permanente en la línea de 2400 V, en los devanados primario y secundario del transformador de salida, y en los terminales de 240 V.

SOLUCION

Los cálculos deberán hacerse entre fase y neutro valiéndose de las equivalencias correspondientes, y reduciendo todos los datos a la línea de 2400 V. La tensión de alimentación es pues de

$$\frac{2400}{\sqrt{3}} = 138 \text{ V, tensión simple}$$

En el transformador de alimentación:

$$X_{\text{eq}} = \frac{2,76}{3} = 0,92 \text{ ohm equivalente por fase en Y}$$

En el transformador de salida:

$$X_{\text{eq}} = \frac{1,82}{3} = 0,61 \text{ ohm equivalente por fase Y}$$

Línea de alimentación:

$$X = 0,80 \text{ ohm por fase en Y}$$

$$\text{Reactancia total} = \text{suma de react.} = 2,33 \text{ ohm}$$

$$\text{Intensidad en la línea de 2400 V} = \frac{1385}{2,33} = 594 \text{ A}$$

$$\text{Intensidad en los devanados de 2400 V} = \frac{594}{\sqrt{3}} = 342 \text{ A}$$

$$\text{Intensidad en los devanados de 240 V} = 3420 \text{ A}$$

$$\text{Intensidad en los terminales de 240 V} = 5940 \text{ A}$$

1-10. EL SISTEMA DE CALCULO CON VALORES RELATIVOS

Muy frecuentemente, los cálculos concernientes a máquinas, transformadores o conjuntos de máquinas se llevan a cabo basándose en el sistema de valores relativos, es decir, expresando todas las cantidades como fracción decimal de un valor base apropiadamente elegido. Todos los cálculos se hacen con estos valores relativos, en lugar de hacerse con las conocidas unidades volt, ampere, ohm, etc.

Este proceder tiene dos ventajas: la primera de ellas es que las constantes de las máquinas o transformadores, cuando se expresan de esta forma referidas a la potencia indicada, guardan una relación numérica sencilla, lo que permite una rápida comprobación de los resultados. La segunda ventaja es la de liberar al operador de la preocupación de reducir las cantidades desde uno a otro lado de los transformadores, lo que en sistemas complicados que comprendan varios transformadores con diferentes relaciones entre sus números de espiras tiene gran importancia ya que elimina una de las posibles causas de error. Este sistema también se emplea mucho en analizadores y computadores analógicos y digitales para el estudio de las condiciones transitorias y dinámicas.

Los valores tales como: tensión V , intensidad I , potencia P , potencia reactiva Q , volt-ampere VA , resistencia R , reactancia X , impedancia Z , conductancia G , susceptancia B y admitancia Y pueden pasarse a la forma relativa, de la siguiente forma:

$$\text{Valor relativo} = \frac{\text{Valor real}}{\text{Valor base adoptado}} \quad (1-66)$$

En la que el valor real se expresa en volt, ampere, ohm, etc. Dentro de ciertos límites, los valores base pueden elegirse arbitrariamente, pero deben guardar entre sí determinada proporción para que se cumplan regularmente las leyes eléctricas normales. Para un sistema monofásico tendremos:

$$P_{\text{base}}, Q_{\text{base}}, VA_{\text{base}} = V_{\text{base}} I_{\text{base}} \quad (1-67)$$

$$R_{\text{base}}, X_{\text{base}}, Z_{\text{base}} = \frac{V_{\text{base}}}{I_{\text{base}}} \quad (1-68)$$

$$G_{\text{base}}, B_{\text{base}}, Y_{\text{base}} = \frac{I_{\text{base}}}{V_{\text{base}}} \quad (1-69)$$

Normalmente se eligen primeramente los valores de VA_{base} y V_{base} , y los de I_{base} y demás se deducen de las fórmulas 1-67 a 1-69.

El valor de VA_{base} debe mantenerse invariable en todo el sistema considerado: cuando existe un transformador, V_{base} es distinto para cada uno de sus lados, pero ambos deben guardar la misma relación que el número de espiras de los devanados. Generalmente se elige como base la respectiva tensión nominal. La operación de reducir cantidades a uno

de los lados del transformador se hace automáticamente al determinar las bases y los valores relativos por medio de las fórmulas 1-66 a 1-69. En resumen, el procedimiento consiste en trasladar todas las cantidades a valores relativos, operando con éstos en todas las técnicas de análisis de circuitos acostumbradas, y trasladar nuevamente a unidades corrientes los resultados obtenidos.

Cuando existe un solo dispositivo eléctrico, como por ejemplo un transformador, generalmente se toma como valor base de potencia, el correspondiente a la nominal del propio dispositivo. Las características de los transformadores de potencia o de distribución no varían mucho de unos a otros cuando se expresan en valores relativos tomando como base los respectivos valores nominales. Por ejemplo, la corriente de excitación acostumbra a estar comprendida entre 0,02 y 0,06, la resistencia equivalente entre 0,005 y 0,02 (los valores menores, aplicables a transformadores grandes) y la reactancia equivalente entre 0,015 y 0,10 (los valores mayores aplicables a transformadores grandes de alta tensión). Análogamente, los valores relativos correspondientes a las constantes de máquinas síncronas y de inducción están comprendidos dentro de límites relativamente estrechos.

Cuando intervienen varios aparatos en el sistema, el valor base de la potencia deberá elegirse arbitrariamente, de forma que dicho valor se mantenga el mismo en todo el conjunto. Los valores relativos pueden pasarse de una determinada base (en voltampere) a otra, mediante las siguientes relaciones, siempre que se mantenga la misma tensión base.

$$(P, Q, V, A, G, B, Y)_{\text{rel. base 2}} = (P, Q, V, A, G, B, Y)_{\text{rel. base 1}} \frac{(VA)_{\text{base 1}}}{(VA)_{\text{base 2}}} \quad (1-70)$$

$$(R, X, Z)_{\text{rel. base 2}} = (R, X, Z)_{\text{rel. base 1}} \frac{(VA)_{\text{base 2}}}{(VA)_{\text{base 1}}} \quad (1-71)$$

Ejemplo 1-13

La corriente de excitación, medida en el lado de baja de un transformador de 50 kVA, 2400/240 V es de 5,41 A. La impedancia equivalente reducida al lado de alta es de $1,42 + j1,82$ ohm.

Tomando como base el valor nominal del transformador.

- Expresar en valores relativos la corriente de excitación en el lado de baja y en el de alta.
- Expresar en valores relativos la impedancia equivalente en el lado de alta y en el de baja.

SOLUCION

Los valores base de la tensión y de la intensidad son:

$$\begin{aligned} V_{\text{base } H} &= 2400 \text{ V} & V_{\text{base } X} &= 240 \text{ V} \\ I_{\text{base } H} &= 20,8 \text{ A} & I_{\text{base } X} &= 208 \text{ A} \end{aligned}$$

(Los subíndices *H* y *X* indican los lados de alta y de baja respectivamente.)

De la fórmula 1-68 se deduce:

$$Z_{\text{base } H} = \frac{2400}{20,8} = 115,2 \text{ ohm}$$

$$Z_{\text{base } X} = \frac{240}{208} = 1,152 \text{ ohm}$$

a. De la fórmula 1-66:

$$I_{\omega X} = \frac{5,41}{208} = 0,0260 \text{ valor relativo}$$

La corriente de excitación referida al lado de alta es de 0,541 A, por lo que su valor relativo será:

$$I_{\omega H} = \frac{0,541}{20,8} = 0,0260$$

Los valores relativos son los mismos cualquiera que sea el lado a que estén reducidos. La relación entre los números de espiras, necesaria para reducir de uno a otro lado las intensidades en ampere, ya queda implícita al fijar los valores base de las corrientes correspondientes a cada uno de ellos, teniendo en cuenta que el valor base de los volt-ampere es el mismo para ambos, y que los valores base de las tensiones están en la misma proporción que los números de espiras.

b. Teniendo en cuenta la fórmula 1-66 y el valor de $Z_{\text{base } H}$ tendremos:

$$Z_{\text{eq } H} = \frac{1,42 + j1,82}{115,2} = 0,0123 + j0,0158 \text{ valor relativo}$$

La impedancia equivalente reducida al lado de baja es de $0,0142 + j0,018$ ohm. Su valor relativo es:

$$Z_{\text{eq } X} = \frac{0,0142 + j0,018}{1,152} = 0,0123 + j0,0158$$

Puede verse que los valores son los mismos, quedando implícitos los factores de transformación en los valores base.

Cuando se aplica este procedimiento a un sistema trifásico, se eligen los valores base de

tal forma que si el sistema es equilibrado guarden entre sí las siguientes relaciones:

$$(P_{\text{base}} \cdot Q_{\text{base}} \cdot VA_{\text{base}}) \text{ en trifásico} = 3 VA_{\text{base por fase}} \quad (1-72)$$

$$V_{\text{base (compuesta)}} = \sqrt{3} V_{\text{base (simple)}} \quad (1-73)$$

$$I_{\text{base (por fase } \Delta)} = \frac{1}{\sqrt{3}} I_{\text{base (por fase Y)}} \quad (1-74)$$

Para operar con sistemas trifásicos, en general se eligen primeramente los valores base de los kVA en trifásico y de la tensión compuesta, deduciéndose los valores de la tensión y de la intensidad por fase mediante las fórmulas 1-72 a 1-74 y aplicando las fórmulas 1-67 a 1-69 para fijar sus valores base. Por ejemplo, el valor base de impedancias conectadas en Y viene dado por la fórmula 1-68, siendo V_{base} la tensión simple e I_{base} la intensidad por fase en Y. Tomando como V_{base} la tensión compuesta y como I_{base} la intensidad por fase en Δ , la misma fórmula 1-68 dará el valor base para impedancias conectadas en Δ . Dividiendo la fórmula 1-73 por la 1-74 tendremos:

$$Z_{\text{base (por fase } \Delta)} = 3Z_{\text{base (por fase Y)}} \quad (1-75)$$

Los factores $\sqrt{3}$ y 3 que relacionan los valores de los volt, ampere u ohm en Δ o en Y, están asimismo implícitos en el sistema, pues automáticamente intervienen en los valores base, de forma que pueden resolverse problemas trifásicos como si fueran monofásicos, sin necesidad de prestar atención a la forma de estar conectados los transformadores, cuidando sólo de pasar los volt, ampere y ohm a valores relativos y viceversa.

Ejemplo 1-14

Resolver por el procedimiento de los valores relativos el ejemplo 1-12, tomando como bases 150 kVA en trifásico y las tensiones nominales. El valor relativo de la reactancia del transformador trifásico de alimentación de 500 kVA es de 0,08 al tomar como base sus valores nominales. La reactancia de la línea de 2400 V es de 0,80 ohm por fase, y la del transformador de salida es de 0,0158 (valor relativo) como se ha calculado en el ejemplo 1-13.

SOLUCION

Pasando la reactancia del transformador de alimentación a la base de 150 kVA tendremos:

$$X_{\text{alimentador}} = 0,08 \frac{150}{500} = 0,024 \text{ valor relativo}$$

En la línea de 2400 V:

$$V_{\text{base}} = \frac{2400}{\sqrt{3}} = 1385 \text{ V tensión simple}$$

$$I_{\text{base}} = \frac{50.000}{1385} = 36,1 \text{ A por fase en Y}$$

$$Z_{\text{base}} = \frac{1385}{36,1} = 38,3 \text{ ohm por fase en Y}$$

De donde:

$$X_{\text{línea}} = \frac{0,80}{38,3} = 0,021 \text{ valor relativo}$$

Para el transformador de salida:

$$X_{\text{salida}} = 0,0158 \text{ valor relativo}$$

$$\text{Reactancia total} = \text{suma} = 0,0608 \text{ valor relativo}$$

$$\text{Corriente de cortocircuito} = \frac{1,00}{0,0608} = 16,4 \text{ valor relativo}$$

Lo que permite calcular las intensidades en distintos puntos del circuito. Por ejemplo, la intensidad en la línea de 2400 V es de $16,4 \cdot 36,1 = 594 \text{ A}$. Compárese este valor con el resultado del ejemplo 1-12.

(Nota: Se puede demostrar que la reactancia de 0,08 (valor relativo) del transformador de alimentación es coherente con el valor de 2,76 ohm por fase dado en el ejemplo 1-12.)

1-11. AUTOTRANSFORMADORES - TRANSFORMADORES DE MÚLTIPLES CIRCUITOS

Los principios estudiados en los tres apartados precedentes se han referido concretamente a transformadores con dos devanados, aunque generalmente pueden aplicarse también a transformadores con diferente número de ellos. En este apartado se considerarán distintos aspectos relacionados con autotransformadores y con transformadores de múltiples devanados.

a. Autotransformadores

Considerado desde los terminales, puede conseguirse el mismo efecto de transformación de tensiones, intensidades e impedancias con el esquema de la Fig. 1-32a que con el transformador normal de dos devanados de la Fig. 1-32b. En la Fig. 1-32a la parte de devanado bc es común a ambos circuitos primario y secundario: a este dispositivo se le denomina *autotransformador*, y en realidad no es otra cosa que un transformador normal conectado de forma especial, con la única diferencia estructural de que el devanado ab debe estar provisto de un mayor aislamiento. El funcionamiento de un autotransformador se rige por las mismas consideraciones fundamentales estudiadas para los transformadores de dos devanados separados. En los autotransformadores las reactancias de dispersión y las pérdidas son menores y la corriente de excitación más débil. Si la relación de transformación no difiere mucho de ser 1/1, el coste es menor que con dos devanados, pero existe el inconveniente de que los lados de alta y de baja tensión están eléctricamente conectados.

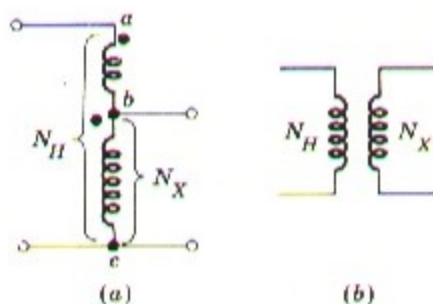


Fig. 1-32. Comparación entre un autotransformador (a) y un transformador de dos devanados (b).

Ejemplo 1-15

El transformador de 50 kVA, 2400/240 V de los ejemplos 1-10 y 1-11 se conecta a manera de autotransformador tal como se indica en la Fig. 1-33 en la que ab es el devanado de 240 V y bc el de 2400 V. (Se supone que el aislamiento del devanado de baja puede resistir la tensión de 2640 V a tierra.)

- Calcúlense las tensiones nominales V_H y V_X en los lados de alta y de baja tensión respectivamente, cuando el transformador se conecta como un autotransformador.
- Calcúlense los kVA nominales del autotransformador.
- En el ejemplo 1-10 se dan los datos relativos a las pérdidas. Calcúlese el rendimiento a plena carga trabajando como autotransformador, siendo 0,80 el factor de potencia.

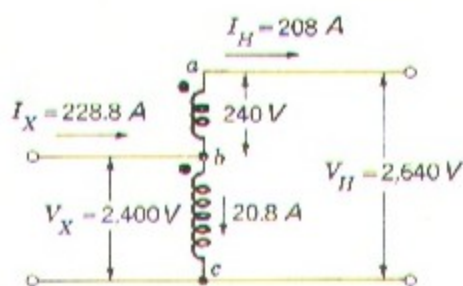


Fig. 1-33. Autotransformador del ejemplo 1-15.

SOLUCION

a. Puesto que el devanado bc de 2400 V está conectado al circuito de baja tensión, $V_X = 2400$ V.

Cuando $V_{bc} = 2400$ V, en el devanado ab se induce una tensión $V_{ab} = 240$ V, en fase con V_{bc} (se desprecia la caída de tensión debida a la impedancia de dispersión). La tensión en el lado de alta será pues:

$$V_H = V_{ab} + V_{bc} = 2.640 \text{ V}$$

b. Trabajando como un transformador normal de dos devanados, a la potencia indicada de 50 kVA la intensidad nominal en el secundario de 240 V es de $50.000/240 = 208$ A, pero trabajando como autotransformador el secundario está en serie con el circuito de alta tensión por lo que la intensidad nominal I_H en éste será la misma. La potencia indicada es en este caso:

$$\frac{V_H I_H}{1000} = \frac{2640 \cdot 208}{1000} = 550 \text{ kVA}$$

Este cálculo puede hacerse también en el lado de baja tensión resaltando las propiedades de transformación de las corrientes. Si la intensidad nominal en el devanado de 240 V es de 208 A, la intensidad en el de 2400 V debe crear una fuerza magnetomotriz igual y opuesta (despreciando la corriente de excitación) y por tanto deberá ser de 20,8 A en la dirección indicada por la flecha (Fig. 1-33). La intensidad I_X en el lado de baja funcionando como autotransformador será pues:

$$I_X = 208 + 20,8 = 228,8 \text{ A}$$

y la potencia indicada:

$$\frac{V_X I_X}{1000} = \frac{2400 \cdot 228,8}{1000} = 550 \text{ kVA}$$

Obsérvese que este transformador cuya potencia nominal es de 50 kVA pasa a ser de 550 kVA cuando funciona como autotransformador. La mayor potencia en este caso es debida a que no deben transformarse por inducción electromagnética la totalidad de los 550 kVA; de hecho, lo único que hace el transformador es elevar en 240 V una corriente de 208 A, lo que equivale a 50 kVA.

- c. Con la conexión a manera de autotransformador y las tensiones e intensidades indicadas en la Fig. 1-33, las pérdidas serán las mismas que en el ejemplo 1-10, es decir, 803 W, pero la potencia de salida, con el factor de potencia 0,8, es de $0,8 \cdot 550.000 = 440.000$ W.

El rendimiento es ahora:

$$1 - \frac{803}{440.803} = 0,9982$$

Rendimiento tan elevado porque las pérdidas son las correspondientes a la transformación de tan sólo 50 kVA.

b. Transformadores de múltiples devanados

Para interconectar tres o más circuitos de distintas tensiones se emplean frecuentemente transformadores de tres o más devanados, llamados corrientemente *transformadores multicircuito*, o *transformadores de devanado múltiple*: un transformador de este tipo es menos costoso y más eficiente que el número equivalente de transformadores normales de dos circuitos. Para suministrar potencia a equipos electrónicos generalmente se emplean transformadores con un primario y dos secundarios, y los transformadores de distribución de potencia para usos domésticos acostumbran a tener dos secundarios a 120 V conectados en serie: los circuitos de alumbrado se conectan a los devanados de 120 V mientras que las cocinas, calentadores y otros aparatos similares se alimentan a 240 V de los dos secundarios en serie². Una red de distribución muy extensa puede surtirse de dos o más líneas de transmisión de distintas tensiones mediante un grupo trifásico de transformadores multicircuitos. Los grupos trifásicos utilizados para interconectar dos líneas de transporte a distintas tensiones tienen en general un tercer juego de devanados, *terciarios*, que suministran la tensión necesaria para los servicios auxiliares de la subestación o para una distribución local. Pueden conectarse al terciario condensadores estáticos, o síncronos, con objeto de corregir el factor de potencia o regular la tensión, y en ciertas ocasiones se coloca en los grupos trifásicos un devanado terciario conectado en Δ para formar un circuito para el tercer armónico de la corriente de excitación.

Los problemas creados con el empleo de transformadores de múltiples devanados se refieren principalmente a la influencia de las impedancias de dispersión en la regulación de

² En España, y en general en Europa, es más frecuente la distribución de potencia valiéndose de transformadores trifásicos con el secundario conectado en Y, lo que permite disponer de un neutro derivado del centro de la Y.

Para usos domésticos se suministra la tensión simple (una fase y neutro) y para usos industriales la tensión compuesta (dos o tres fases). (N. del T.)

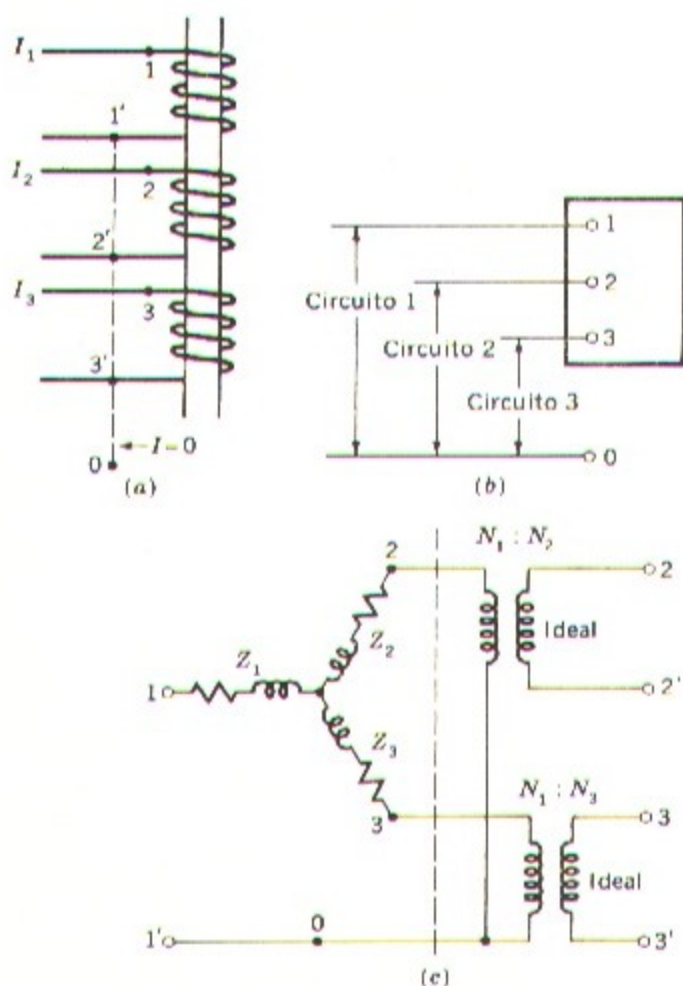


Fig. 1-34. (a) Transformador elemental de tres devanados. (b) y (c) Sucesivos pasos para el trazado de su circuito equivalente.

la tensión, a las corrientes de cortocircuito y a la distribución de la carga entre los diferentes circuitos, problemas que pueden resolverse mediante un circuito equivalente similar al utilizado para el estudio de transformadores normales de dos circuitos, si bien aquéllos son más complicados por tener en cuenta las impedancias de dispersión asociadas a cada par de devanados. Todas las cantidades se reducen en estos circuitos a una base común, ya sea empleando la relación del número de espiras como factor, o bien expresando todas las cantidades en valores relativos. En general, se desprecia la corriente de excitación.

En el estudio que sigue, nos limitaremos a considerar los transformadores de tres devanados, de los que puede verse en la Fig. 1-34a una representación esquemática: el devanado primario es el señalado 1-1'. Las cantidades secundarias y terciarias están reduci-

das al primario y los devanados 2-2' y 3-3' representan respectivamente los equivalentes del secundario y del terciario, tomando como base la relación 1/1/1 entre los números de espiras.

Los terminales 1', 2' y 3' son de igual polaridad y pueden considerarse conectados entre sí y a un terminal común 0 como se indica con línea de trazos, y de esta forma pueden considerarse los tres circuitos exteriores conectados a los bornes 1, 2 y 3 respectivamente y al borne común 0. Despreciando la corriente de excitación, la suma vectorial de las intensidades I_1 , I_2 e I_3 es igual a cero, y también lo será la corriente que circula por la conexión entre el terminal 0 y la unión de los terminales 1', 2' y 3', por lo que puede suprimirse dicha conexión sin alterar por ello las cosas. De esta forma el transformador equivale a la disposición de la Fig. 1-34b en la que la caja es una red con tres terminales que contiene las impedancias representativas de la caída de tensión en las impedancias de dispersión. Por lo que a sus efectos en el circuito exterior se refiere, una red con tres terminales equivale a tres impedancias conectadas ya sea en Δ o en Y, siendo en general la disposición en Y la más conveniente. Por consiguiente, el transformador equivale al circuito situado a la izquierda de la línea de trazos en la Fig. 1-34c siendo las impedancias Z_1 , Z_2 y Z_3 las que equivalen por sus efectos a las impedancias de dispersión de los tres pares de devanados. Los factores correspondientes para reducir todos los valores a, por ejemplo, el primario pueden representarse explícitamente por medio de transformadores ideales tal como puede verse en la parte derecha de la citada Fig. 1-34c, en la que los terminales 2-2' y 3-3' de dichos transformadores ideales equivalen a los términos reales de los devanados secundario y terciario. La inclusión de los transformadores ideales en el circuito equivalente hace innecesario que exista en éste una conexión conductiva entre los tres circuitos. Corrientemente se prescinde de los transformadores ideales, considerando que los circuitos exteriores están conectados entre el punto común 0 y los terminales 1, 2 y 3 del lado izquierdo de la figura respectivamente: únicamente hay que recordar que todos los valores están reducidos a una base común.

Este circuito equivalente representa los fenómenos de impedancia relativos a tres devanados bobinados sobre un núcleo magnético único: es aplicable con igual eficacia al comportamiento externo de autotransformadores o de transformadores de devanados separados, si bien los fenómenos internos difieren de uno a otro caso.

Las impedancias de la Fig. 1-34c pueden deducirse prácticamente de los resultados obtenidos en tres ensayos simples de cortocircuito. Es decir, que si Z_{12} es la impedancia de cortocircuito de los circuitos 1 y 2 estando el 3 abierto, de la observación del circuito equivalente (Fig. 1-34c) se deduce:

$$Z_{12} = Z_1 + Z_2 \quad (1-76)$$

y análogamente:

$$Z_{13} = Z_1 + Z_3 \quad (1-77)$$

$$Z_{23} = Z_2 + Z_3 \quad (1-78)$$

en las que Z_{13} es la impedancia de cortocircuito de los circuitos 1 y 3 estando el 2 abierto, y Z_{23} la de los circuitos 2 y 3 estando abierto el 1. Los valores de estas impedancias de cortocircuito están todos reducidos a la misma base. Resolviendo las

ecuaciones 1-76 a 1-78 tendremos:

$$Z_1 = \frac{1}{2}(Z_{12} + Z_{13} - Z_{23}) \quad (1-79)$$

$$Z_2 = \frac{1}{2}(Z_{23} + Z_{12} - Z_{13}) \quad (1-80)$$

$$Z_3 = \frac{1}{2}(Z_{13} + Z_{23} - Z_{12}) \quad (1-81)$$

Ejemplo 1-16

Los resultados obtenidos en tres ensayos de cortocircuito realizados sobre un transformador monofásico de 7960/2400/600 V, han sido los siguientes:

<i>Prueba</i>	<i>Devanado excitado</i>	<i>Devanado en cortocircuito</i>	<i>Tensión aplicada en V</i>	<i>Intensidad en devanado excitado, A</i>
1	1	2	252	62,7
2	1	3	770	62,7
3	2	3	217	208

Pueden despreciarse las resistencias. La potencia indicada del devanado primario de 7960 V es de 1000 kVA, la del secundario de 2400 V es de 500 kVA, y la del terciario de 600 V de 500 kVA.

- Calcúlese en valores relativos las impedancias del circuito equivalente de este transformador, tomando como bases los 1000 kVA y las tensiones nominales.
- Se reúnen tres transformadores como el descrito para formar un grupo trifásico de 3000 kVA conectado Y- Δ - Δ destinado a suministrar potencia a 2400 V y a 600 V para los servicios auxiliares de una central generadora. El primario en Y se conecta a las barras principales de 13800 V. Calcúlese en valores relativos las corrientes de cortocircuito y la tensión en terminales del secundario si se produce un cortocircuito trifásico en los bornes del terciario, manteniéndose la tensión de alimentación de 13800 V en el primario. Empléense las bases de 3000 kVA en trifásico y las tensiones nominales.

SOLUCION

- Convirtamos primeramente los datos del cortocircuito en valores relativos con base 1000 kVA por fase.

En el primario:

$$V_{\text{base}} = 7960 \text{ V}$$

$$I_{\text{base}} = \frac{1000}{\sqrt{3}} = 125,4 \text{ A}$$

En el secundario: $V_{\text{base}} = 2400 \text{ V}$

$$I_{\text{base}} = \frac{1000}{2,4} = 416 \text{ A}$$

Los resultados de los ensayos, expresados en valores relativos, son los siguientes:

Prueba	Devanados	V	I
1	1-2	0,0316	0,500
2	1-3	0,0967	0,500
3	2-3	0,0905	0,500

La impedancia de cortocircuito Z_{12} deducida de la primera prueba es:

$$Z_{12} = \frac{0,0316}{0,500} = 0,0632 \text{ valor relativo}$$

y en forma análoga, de las pruebas 2 y 3 se deduce:

$$Z_{13} = \frac{0,0967}{0,500} = 0,1934 \text{ valor relativo}$$

$$Z_{23} = \frac{0,0905}{0,500} = 0,1810 \text{ valor relativo}$$

Los valores correspondientes al circuito equivalente se calculan con las fórmulas 1-79 a 1-81:

$$Z_1 = jX_1 = j0,0378 \text{ valor relativo}$$

$$Z_2 = jX_2 = j0,0254 \text{ valor relativo}$$

$$Z_3 = jX_3 = j0,1556 \text{ valor relativo.}$$

b. La tensión compuesta que servirá de base para el primario conectado en Y es de $\sqrt{3} \cdot 7960 = 13.800 \text{ V}$, es decir, que la tensión en barras tiene el valor relativo 1,00.

Estando los terciarios en cortocircuito, del circuito equivalente se desprende

$$I_{sc} = \frac{V_1}{Z_1 + Z_3} = \frac{V_1}{Z_{13}} = \frac{1,00}{0,1934} = 5,18 \text{ valor relativo}$$

Si la caída de tensión motivada por la intensidad de carga del secundario es pequeña frente a la motivada por la intensidad de cortocircuito, la tensión en bornes del

secundario se igualará a la existente en el punto de unión de las tres impedancias Z_1 , Z_2 y Z_3 de la Fig. 1-34c, por tanto:

$$V_2 = I_{9c}Z_3 = 5,18 \cdot 0,1556 = 0,805 \text{ valor relativo}$$

1-12. RESUMEN

En los dispositivos electromecánicos en los que intervienen campos magnéticos se utilizan materiales ferromagnéticos para guiar y concentrar los campos. Puesto que la permeabilidad de estos materiales es varios millares de veces superior a la del ambiente que los rodea, la mayor parte del flujo queda confinado en trayectorias bien definidas convirtiéndose así el campo en un circuito magnético. Las frecuencias son suficientemente bajas para poder considerar el campo como casi estático. La analogía existente con un circuito eléctrico resistivo ayuda a comprender los conceptos involucrados: en la tabla 1-1 se muestran dichas analogías.

TABLA 1-1
CANTIDADES ANALOGAS EN CIRCUITOS MAGNETICOS
Y ELECTRICOS

F.m.m. = Ni	F.e.m. = E
Flujo ϕ	Intensidad I
Reluctancia \mathcal{R}	Resistencia R
Permeancia $\mathcal{P} = 1/\mathcal{R}$	Conductancia $G = 1/R$
Densidad de flujo $B = \phi/A$	Densidad de corriente $J = I/A$
Fuerza magnetizante H	Gradiente de potencial \mathcal{E}
Permeabilidad μ	Conductividad σ

Las leyes de Kirchoff relativas a intensidades y tensiones pueden aplicarse por analogía a los circuitos magnéticos, quedando para ello enunciadas de la siguiente forma: (1) La suma de los flujos $\Sigma\phi$ concurrentes en un nudo es igual a cero, y (2) la suma de las caídas por reluctancia $\Sigma\phi\mathcal{R}$ a lo largo de un circuito cerrado es igual a la suma de la f.m.m. ΣNi .

A efectos de cálculo, los circuitos magnéticos difieren de los eléctricos en dos puntos importantes: (1) la dispersión es mayor, y (2) la reluctancia de una rama del circuito magnético es función del flujo en la misma: al aumentar el flujo el circuito tiende a saturarse; por consiguiente, tanto la permeabilidad como la reluctancia pueden variar según sean las condiciones en cada caso, y es raro poderse valer directamente de la aplicación numérica de su analogía con el circuito eléctrico: el valor de esta analogía

reside principalmente en servir de guía para el planteamiento del proceso. Para análisis cuantitativos se utilizan en general métodos gráficos basados en las características $B-H$ del material del núcleo.

La analogía con el circuito eléctrico desaparece completamente cuando se relaciona una pérdida de potencia análoga a I^2R de un circuito eléctrico con un flujo uniforme en un circuito magnético: los fenómenos físicos de conducción y de ferromagnetismo son de naturaleza completamente distinta entre sí, y además las pérdidas en el hierro por histéresis y por corrientes parásitas aparecen únicamente cuando el flujo es variable.

Existen distintos materiales ferromagnéticos con gran variedad en sus características: cuando se requieren propiedades magnéticas especiales se recurre a aleaciones de hierro con otros metales, siendo la de mayor uso en la construcción de transformadores, reactancias, electroimanes y máquinas rotativas una aleación conteniendo una pequeña cantidad (2 a 4 %) de silicio, que puede adquirirse en el mercado, preparada en finas hojas laminadas (de 0,35 a 0,65 milímetros de espesor) denominadas *chapa magnética* y destinadas a la construcción de elementos sometidos a campos alternos. En las Figs. 1-9 y 1-10 se muestran las propiedades magnéticas de dos tipos de chapas de acero.

El acero de grano orientado de la Fig. 1-10 tiene mejores propiedades magnéticas cuando el campo está dirigido en la dirección del laminado: se trata del material más comúnmente empleado en los núcleos de transformadores.

Aun cuando en un transformador estático no hay conversión electromecánica de energía, su funcionamiento tiene muchos puntos de semejanza con el de las máquinas rotativas de corriente alterna. Las consideraciones que sobre estos puntos se hacen a continuación servirán a manera de avance de los procesos que intervienen en la teoría de las máquinas de corriente alterna que se estudiarán en los capítulos siguientes.

Tanto en los transformadores como en las máquinas rotativas se engendra un campo por la acción combinada de las corrientes en los devanados. En un transformador con núcleo, la mayor parte de este flujo queda confinada en el núcleo y se concatena con todos los devanados: este flujo mutuo resultante induce en los devanados tensiones proporcionales a sus números de espiras y de ahí nacen sus propiedades de transformación. En las máquinas rotativas la mayor parte del flujo atraviesa el entrehierro y concatena con los devanados del rotor y del estator. Las tensiones inducidas en estos devanados por el flujo mutuo resultante en el entrehierro son similares a las inducidas por el flujo resultante en el núcleo de un transformador, con la diferencia de que en las máquinas rotativas existe un movimiento mecánico junto con una conversión electromecánica de energía. El par asociado al proceso de conversión es debido a la acción mutua entre el flujo del entrehierro y el campo magnético de las corrientes en el rotor.

Asimismo, tanto en los transformadores como en las máquinas hay, además del flujo mutuo útil, otros flujos de dispersión que concatenan con uno de los devanados sin hacerlo con el otro, y aun cuando el cuadro de los flujos de dispersión es más complicado en las máquinas, sus efectos son esencialmente los mismos. En ambos casos los flujos de dispersión inducen tensiones en los devanados que se tienen en cuenta como caídas de tensión en reactancias de dispersión, y también en ambos casos dichos flujos de dispersión discurren principalmente por el aire, siendo su valor casi proporcional a las intensidades

que los originan, por lo que en general se suponen constantes las reactancias de dispersión, independientemente del grado de saturación del circuito magnético principal.

Bajo el punto de vista de los devanados, los fenómenos de inducción son esencialmente los mismos en los transformadores que en las máquinas, si bien los fenómenos internos que dan lugar a las variaciones en el tiempo de los flujos concatenados son distintos. En una máquina rotativa la variación de flujo concatenado es debida al movimiento relativo entre el campo y el devanado, mientras que en un transformador dicha variación es debida al aumento y disminución de un campo magnético estático, no existiendo movimiento mecánico alguno ni originándose ninguna conversión electromecánica de energía.

El flujo resultante en el núcleo de un transformador induce en el primario una fuerza contraelectromotriz que junto con la caída de tensión en la resistencia y en la reactancia de dispersión primarias debe equilibrar la tensión aplicada. Siendo bastante pequeña en general la caída de tensión en la resistencia y en la reactancia de dispersión, la fuerza contraelectromotriz es aproximadamente igual a la tensión aplicada, y el flujo en el núcleo se ajustará por sí mismo a ello. Lo mismo debe suceder en los devanados del estator de un motor de corriente alterna: el flujo resultante en el entrehierro deberá ajustarse por sí mismo para inducir una fuerza contraelectromotriz aproximadamente igual a la tensión aplicada. Tanto en los transformadores como en las máquinas rotativas, la f.m.m. resultante de todas las corrientes se ajustará por sí misma de forma que el flujo creado sea precisamente el necesario para que se cumpla ese equilibrio de tensiones. En cualquier dispositivo electromagnético de corriente alterna en el que la caída de tensión en las resistencias y en las reactancias de dispersión sea pequeña, el flujo resultante viene determinado muy aproximadamente por la tensión aplicada y por la frecuencia, y las intensidades tomarán por sí mismas el valor necesario para generar la f.m.m. requerida para crear dicho flujo.

En un transformador, la intensidad en el secundario depende de la tensión inducida en él, de su impedancia de dispersión y de la carga eléctrica aplicada. En un motor de inducción, la intensidad en el secundario (rotor) depende de la tensión inducida en él, de su impedancia de dispersión y de la carga mecánica aplicada a su eje. En esencia se producen los mismos fenómenos en el devanado primario de un transformador que en los devanados de las armaduras (estator) de los motores de inducción o síncronos: en los tres casos la intensidad primaria se regula por sí misma de forma que la f.m.m. conjunta de todas las corrientes genere el flujo requerido por la tensión aplicada.

Podrían citarse otros ejemplos de estas semejanzas básicas. Si se exceptúan los rozamientos mecánicos y la resistencia del aire, las pérdidas en los transformadores y en las máquinas son esencialmente las mismas, como son también esencialmente los mismos los ensayos que se realizan para determinar las pérdidas y las constantes del circuito equivalente: una prueba en circuito abierto, o sin carga, informa sobre los requerimientos de la excitación (y de los rozamientos y resistencia del aire en las máquinas rotativas) mientras que la prueba en cortocircuito junto con la medición de las resistencias, informa sobre las reactancias de dispersión y las pérdidas en el cobre. Otro ejemplo lo constituye la forma de considerar los efectos de la saturación magnética: tanto en los transformadores como en las máquinas rotativas de corriente alterna se admite generalmente que las reactancias

de dispersión no quedan afectadas por la saturación, y que la saturación del circuito magnético principal viene dada por el flujo mutuo resultante o por el flujo en el entrehierro.

PROBLEMAS

1-1. Determinar la intensidad en corriente continua que debe circular por la bobina de la Fig. 1-35 para que en la rama central del núcleo exista un flujo de $7,5 \times 10^{-4}$ weber. Despréciense la dispersión magnética, el efecto de bordes y la reluctancia del hierro.

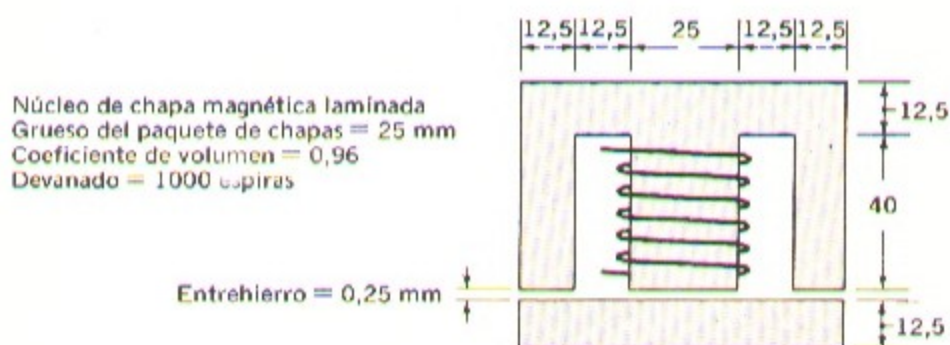


Fig. 1-35. Reactancia con entrehierro.

Si se alimenta la bobina con corriente alterna senoidal de 120 V de tensión eficaz, en lugar de hacerlo con corriente continua como en el caso anterior, determinéense las pérdidas en el hierro y el valor eficaz de la corriente magnetizante. Despréciense la influencia de los armónicos y la caída de tensión en la resistencia de la bobina.

1-2. Las bobinas del circuito magnético de la Fig. 1-36 se conectan en serie de tal forma que las f.m.m. en A y B tienden ambas a dirigir el flujo hacia el ramal central C en

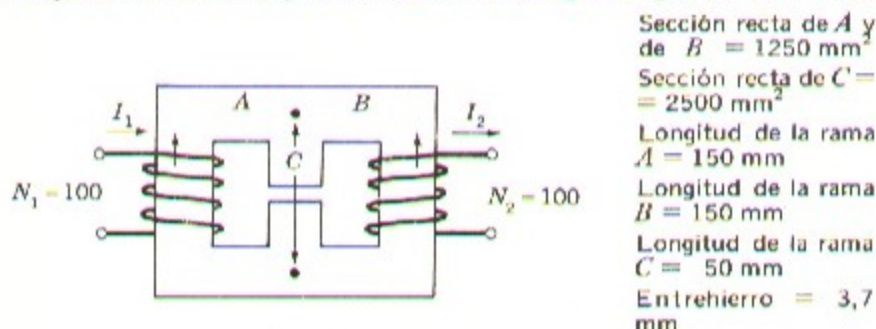


Fig. 1-36. Circuito magnético del problema 1-2.

la misma dirección. El material es acero y el volumen útil ocupado por él (factor de relleno) es de 0,94 del volumen total. Desprecíese el efecto de bordes y la dispersión.

- Determinar la intensidad en amperes necesaria para que la densidad de flujo sea de $0,6 \text{ weber/m}^2$.
- ¿Cuál será la energía en joules almacenada en el campo magnético del entrehierro?

1-3. A un devanado sin resistencia, de 1000 espiras, bobinado sobre un núcleo de hierro cerrado de 10^{-3} m^2 de sección recta, se le aplica una tensión alterna de forma cuadrada de frecuencia 50 Hz . Los semiciclos positivo y negativo son iguales y de amplitud E volt.

- Trazar las curvas de tensiones y flujos en función del tiempo.
- Hállese el máximo valor permisible para E para que la densidad máxima de flujo no supere $1,00 \text{ weber/m}^2$.

1-4. Los datos de la mitad superior de la curva de histéresis simétrica correspondiente al núcleo del problema 1-3 son los siguientes:

\mathcal{B} , webers/m ²	0	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	0.95	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	0.2	0
\mathcal{H} , amp-vueltas/m	48	52	58	73	85	103	135	193	80	42	2	-18	-29	-40	-45	-48

La longitud media del recorrido del flujo en el núcleo es de $0,30 \text{ m}$.

Hállese gráficamente las pérdidas por histéresis, expresadas en watt, siendo la densidad máxima de flujo de $1,00 \text{ weber/m}^2$ y la frecuencia 50 Hz .

1-5. En la Fig. 1-37 se representa una bobina enrollada sobre un núcleo de sección rectangular, de hierro laminado de alta permeabilidad. Se supone que la permeabilidad del hierro es infinita, y se desprecia la dispersión magnética y el efecto de bordes en el entrehierro g . El devanado es de cobre aislado, siendo su resistividad de ρ ohm-m, y se admite que el espacio ocupado por el cobre es una fracción K_w del volumen total de la bobina, estando el resto ocupado por el aislamiento.

- Calcúlese la longitud media l de una espira de la bobina.
- Dedúzcase una fórmula para expresar la potencia eléctrica de entrada en la bobina para una densidad de flujo continuo especificada \mathcal{B} . Esta fórmula deberá expresarse en función de \mathcal{B} , ρ , μ_0 , l , K_w , y de las dimensiones dadas. Obsérvese que dicha fórmula resulta independiente del número de espiras si se admite que el factor K_w no depende de dicho número.
- Dedúzcase una fórmula para expresar la energía magnética almacenada, en función de \mathcal{B} y de las dimensiones dadas.

d. Dedúzcase de b y c una fórmula para expresar la constante de tiempo L/r de la bobina.

1-6. Las dimensiones del dispositivo de la Fig. 1-37 son:

$$a = h = w = 1 \text{ cm}$$

$$b = 2 \text{ cm} \quad g = 0,2 \text{ cm}$$

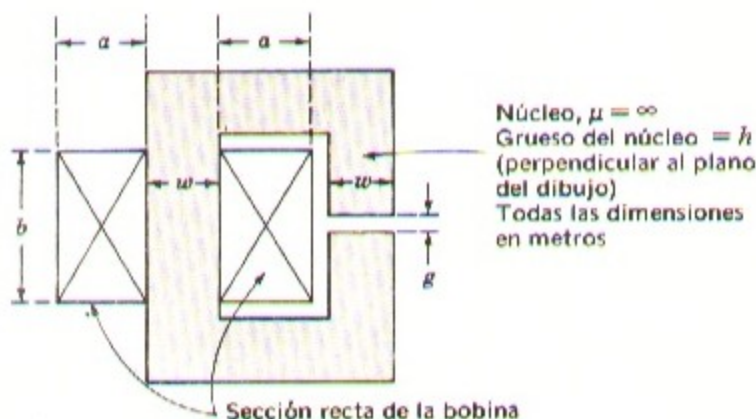


Fig. 1-37. Inductancia con núcleo de hierro.

El factor de ocupación del cobre es $K_w = 0,7$ y la resistividad del cobre $1,73 \text{ ohm-cm}$.

La bobina se alimenta con una tensión constante de 50 V y la densidad de flujo en el entrehierro es de 1 weber/m^2 .

Hállese la potencia de entrada en la bobina, la intensidad en la misma, el número de espiras, la resistencia de la bobina, su inductancia, la constante de tiempo, y la sección del hilo de cobre redondeada a la sección normalizada más aproximada.

1-7. Un transformador de 500 kVA , y 11.000 V de tensión nominal en el primario, absorbe $3,35 \text{ A}$ y 2960 W en vacío, a la tensión y frecuencia nominales. Otro transformador tiene un núcleo cuyas dimensiones lineales son iguales a las del anterior multiplicadas por $\sqrt{2}$. El material magnético y el espesor de sus chapas es el mismo en ambos transformadores.

Si los devanados primarios de los dos transformadores tienen el mismo número de espiras, ¿cuál será la intensidad y la potencia en vacío del segundo de ellos al aplicarle al primario una tensión de 22.000 V ?

1-8. La densidad de flujo y las pérdidas en el hierro de un transformador que trabaja a 6600 V , son respectivamente de $70 \text{ kilolíneas/m}^2$ y 2500 W . Supongamos que se duplican las dimensiones lineales del núcleo, que se reducen a la mitad los números de espiras de

los dos devanados, y que el nuevo transformador así formado se alimenta con una tensión de 13.200 V.

¿Cuál será la densidad de flujo y las pérdidas en el hierro de este segundo transformador si su núcleo está formado del mismo material e igual espesor de chapas que el del primero?

1-9. Las resistencias y las reactancias de dispersión de un transformador de distribución de 10 KVA, 50 Hz, 2400/240 V son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} r_1 = 4,20 \text{ ohm} & r_2 = 0,0420 \text{ ohm} \\ x_{l1} = 5,50 & x_{l2} = 0,0550 \end{array}$$

indicando con el subíndice 1 los datos del devanado de 2400 V y con 2 el de 240 V. Cada una de las cantidades está referida a su propio lado del transformador.

- Hállese la impedancia equivalente reducida al lado de alta y al de baja.
- Hállese la tensión en los bornes de alta cuando el transformador suministra sus kVA nominales a una carga aplicada en su lado de baja, siendo la tensión aplicada a dicha carga de 240 V y el factor de potencia de 0,8 en retraso.

1-10. Una carga monofásica de 180 kW, con factor de potencia 0,85 en adelanto y tensión de 2250 V se alimenta a través de una línea de 33.000 V, de impedancia igual a $105 + j360$ ohm, y de un transformador de 33.000/2400 V cuya impedancia equivalente, reducida a su lado de baja, es de $0,26 + j1,08$ ohm.

- Calcúlese la tensión en la cabecera de la línea.
- Calcúlese la tensión en los bornes del primario del transformador.
- Calcúlese la potencia activa y reactiva de entrada en la cabecera de la línea.

1-11. Cuando un transformador de 50 kVA, 2300/230 V, trabaja en vacío a la tensión nominal la potencia de entrada es de 200 W y el factor de potencia 0,15. Cuando trabaja con su carga nominal, las caídas de tensión en las resistencias y en las reactancias de dispersión totales son de 1,2 y 1,8 por ciento respectivamente de la tensión nominal.

Determinése la potencia de entrada y el factor de potencia cuando el transformador suministra 30 kW con factor de potencia 0,8 en retraso y tensión de 230 V a una carga conectada a su lado de baja.

1-12. Un generador de energía que puede ser representado por una tensión eficaz constante de 5 V en serie con una resistencia interior de 2000 ohm se conecta a una resistencia de 50 ohm a través de un transformador ideal. Trácese la gráfica de la potencia en miliwatt suministrada a la resistencia, en función de la relación del transformador, cubriendo la gama de relaciones comprendidas entre 0,1 y 10,0.

1-13. En un transformador de salida de audiofrecuencia la relación entre los números de espiras del primario y del secundario es de 31,6. La inductancia primaria medida con el

secundario en circuito abierto es de 19,6 henry, y medida con el secundario en cortocircuito es de 0,207 henry. La resistencia de los devanados es despreciable.

Este transformador se emplea para conectar una carga de 8 ohm a una alimentación que puede representarse por una f.e.m. interna de frecuencia variable en serie con una impedancia interna de 5000 ohm de resistencia. Calcúlense los siguientes extremos que están relacionados con las características de frecuencia del circuito.

- La frecuencia superior de media potencia.
- La frecuencia inferior de media potencia.
- La media geométrica de estas frecuencias.
- La relación entre las tensiones en la carga y en la alimentación para la frecuencia c.

1-14. Un transformador de salida de audiodiferencia cuyas espiras están en la relación 17,32 se utiliza para acoplar un generador de resistencia interior 3000 ohm con una carga resistiva de 10 ohm. Las frecuencias superior e inferior de media potencia son de 50 y 10.000 Hz. Despreciando las pérdidas en el hierro y la resistencia de los devanados, hállese:

- La autoinducción del primario.
- La inductancia de dispersión equivalente, reducida al primario.

1-15. En las pruebas de un transformador de distribución de 20 kVA, 2400/240 V se obtuvieron los siguientes resultados

	<i>Tensión</i>	<i>Intensidad</i>	<i>Potencia</i>
Con el devanado de alta en circuito abierto	240	1,066	126,6
Con el devanado de baja en cortocircuito	57,4	8,34	284

- Calcúlese el rendimiento a plena carga con su tensión nominal y factor de potencia 0,8.
- Supongamos que el factor de potencia de la carga es variable, mientras que la intensidad y tensión en el secundario se mantienen constantes. Por medio de un diagrama vectorial hállese cuál es el factor de potencia de la carga con el que la caída de tensión interna es máxima, y cuánto vale ésta.

1-16. a. Demuéstrese que en un transformador trabajando con una tensión de salida y un factor de potencia constantes, el máximo rendimiento corresponde a una carga en kVA en la que las pérdidas en el cobre sean iguales a las pérdidas en el hierro. Recuérdese que las pérdidas en el hierro se mantienen constantes, mientras que las del cobre varían con el cuadrado de la carga en kVA.

- Determinense los kVA de salida para que el transformador del problema 1-15 trabaje a su máximo rendimiento.

1.17. Los bornes de alta de un grupo trifásico formado por tres transformadores monofásicos se conectan a una línea trifásica de 13.800 V de tensión entre fases. Los bornes de baja se conectan a las barras de una subestación de 1500 kVA nominales y 2300 V entre fases.

Determinar la tensión, intensidad y kVA nominales de cada transformador, tanto en el primario como en el secundario, cuando están conectados en las siguientes formas:

- Devanados de alta en Y, devanados de baja en Δ .
- Devanados de alta en Δ , devanados de baja en Y.
- Devanados de alta en Y, devanados de baja en Y.
- Devanados de alta en Δ , devanados de baja en Δ .

1-18. La fig. 1-38 representa un grupo trifásico de transformadores de 2400/240 V conectados Δ - Δ . Los secundarios ab , bc y ca tienen sendas sendas derivaciones centrales p , q , r . Despreciando las caídas de tensión en las impedancias de dispersión, y alimentando el primario a su tensión nominal trácese un diagrama vectorial, tomando como referencia la tensión V_{ab} en el secundario, en el que se muestren las tensiones ab , bc , ca , pq , qr , rp , ap , bp y cp , y hállese la magnitud de cada una de ellas.

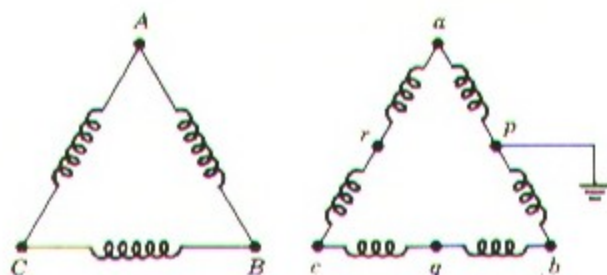


Fig. 1-38. Grupo transformador del problema 1-18.

1-19. Un grupo formado por tres transformadores idénticos de 100 kVA, 2400/120 V, conectados en Δ -Y se alimenta a través de una línea de impedancia $0,80 + j 0,30$ ohm por fase. La tensión en la cabecera de la línea se mantiene invariable a 2400 V tensión compuesta. La prueba de uno de los transformadores con su devanado de baja cortocircuitado ha dado los siguientes resultados:

$$V_H = 52,0 \text{ V} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

$$I_H = 41,6 \text{ A} \quad P = 950 \text{ W}$$

- Hállese la tensión entre fases en el secundario cuando el grupo suministra su intensidad nominal a una carga trifásica equilibrada con factor de potencia 1,00.

- b. Calcúlense las intensidades en el primario y en el secundario del transformador y en los conductores de la línea cuando se produce un cortocircuito trifásico franco entre los terminales secundarios.

1-20. Un transformador de dos devanados, de 5 kVA, 480/120 V debe utilizarse a manera de autotransformador para suministrar a 480 V energía procedente de un generador de 600 V. Probado como un transformador normal de dos devanados, a su potencia indicada y factor de potencia 0,8 en retraso, el rendimiento fue de 0,965.

- Trácese el esquema de conexiones para trabajar como autotransformador.
- Calcúlense los kVA nominales en ese caso.
- Calcúlese el rendimiento del autotransformador a plena carga y 0,80 de factor de potencia.

1-21. La fig. 1-39 muestra un autotransformador de triple devanado que alimenta dos cargas, L_1 y L_2 . Despreciando las caídas de tensión y la corriente de excitación, hállese las intensidades en los devanados en cada uno de los siguientes casos:

- $L_1 = 360$ kVA, $L_2 = 0$.
- $L_1 = 0$, $L_2 = 120$ kVA.
- $L_1 = 360$ kVA, $L_2 = 120$ kVA, ambas con el mismo factor de potencia.

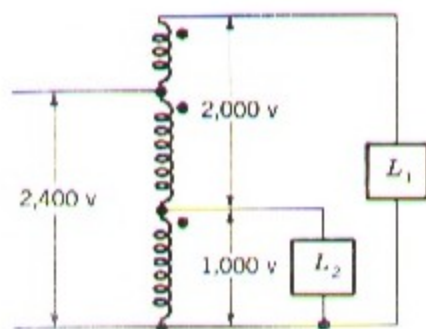


Fig. 1-39. Autotransformador con tres devanados del problema 1-21.

1-22. Un grupo trifásico formado por tres transformadores monofásicos de triple devanado se utiliza para rebajar la tensión de 110 kV en trifásico de una línea de transporte.

Los datos relativos a uno de los transformadores son los siguientes:

Valores nominales:

- Primario 1: 10.000 kVA, 63.500 V.
- Secundario 2: 5000 kVA, 11.000 V.
- Terciario 3: 5000 kVA, 7580 V.

Reactancias de cortocircuito, con base 5000 kVA:

$$X_{12} = 0,071 \text{ valor relativo.}$$

$$X_{23} = 0,054 \text{ valor relativo.}$$

$$X_{13} = 0,092 \text{ valor relativo.}$$

Las resistencias se consideran despreciables.

Dichos transformadores se conectan en Y- Δ -Y. Los secundarios conectados en Δ alimentan a su intensidad nominal una carga equilibrada con factor de potencia 0,8, y los terciarios alimentan, también con su intensidad nominal, otra carga igualmente equilibrada con factor de potencia 1,00.

- Calcúlese la tensión compuesta primaria necesaria para mantener en bornes del secundario su tensión nominal.
- Calcúlese la tensión compuesta en bornes del terciario cuando se dan las condiciones establecidas en *a*.
- Si se mantiene la tensión primaria al valor calculado en *a*, ¿cuál será la tensión en el terciario si se suprime la carga del secundario? Considérese que la carga terciaria es una resistencia constante.

Conversión electromecánica de energía. Fundamentos

Aunque la energía eléctrica raramente es obtenible o utilizable directamente en esta forma, se convierten a ella otras clases de energía debido a la facilidad en su manejo y transporte pudiéndose volver nuevamente a la forma deseada en el lugar de utilización. Un ejemplo típico lo constituye un reactor nuclear cuya energía se convierte en eléctrica en una central térmica, siendo transportada y distribuida en esta forma hasta los puntos de utilización en los que se produce una nueva conversión de energía eléctrica en mecánica mediante electromotores. Un segundo ejemplo lo constituye la conversión de la energía de las ondas de presión del sonido en energía eléctrica, su transporte en esta forma y su nueva reconversión, como sucede en los sistemas telefónicos.

En esta obra nos referimos al proceso de conversión electromecánica de energía, que tiene lugar por medio de los campos eléctricos o magnéticos del dispositivo de que se trate. Aun cuando tales dispositivos de conversión se basan todos ellos en principios físicos similares, su forma y estructura depende de las funciones a que se destina cada uno de ellos. Los equipos de medida y control, que frecuentemente pertenecen a la categoría de los transductores, operan generalmente con señales muy pequeñas y una relación lineal entre la entrada y la salida; entre los ejemplos que se podrían citar figuran los micrófonos, pickups y altavoces. En una segunda categoría de dispositivos figuran aquellos capaces de ejercer una fuerza, tales como los relés, solenoides y electroimanes, y por último, en una tercera categoría se incluyen los que realizan una conversión continua de energía como son los motores y los generadores.

Al igual que ha sucedido en otras ramas de la ingeniería, los dispositivos de conversión se crearon y utilizaron antes de ser bien conocidos los pormenores de su funcionamiento. El presente capítulo está dedicado a los fundamentos de la conversión electromecánica y al análisis de tales dispositivos.

El objeto de este análisis es en primer término el de facilitarnos la comprensión de cómo tiene lugar la conversión, en segundo el de familiarizarnos con las técnicas para el

proyecto y mejora de equipos para usos específicos, y por último enseñarnos a desarrollar modelos de equipos con los que estudiar su funcionamiento en un conjunto. En este capítulo se trata de los dispositivos de las dos primeras categorías antes citadas, es decir, los transductores de señales y los que ejercen una fuerza, dejando para el resto del texto los mecanismos de conversión continua de energía.

Partiremos del concepto de balance de energía exponiendo las fórmulas con las que deducir las fuerzas originadas por los campos. Seguidamente se irán introduciendo distintos elementos eléctricos y mecánicos del circuito, expresando sus efectos por medio de ecuaciones diferenciales, describiendo los métodos para resolverlas en algunos casos especiales y se desarrollarán modelos para explicar el funcionamiento de los elementos de un sistema.

2-1. BALANCE ENERGETICO

El *principio de conservación de energía*, es un principio general aplicable a todo sistema físico en el que no se cree ni se destruya masa alguna, que establece que en tal caso tampoco se crea ni se destruye energía, sino que simplemente cambia de forma. Este principio junto con las leyes relativas a los campos magnéticos y eléctricos, a los circuitos eléctricos y a la mecánica newtoniana constituye un procedimiento idóneo para hallar las relaciones características de un acoplamiento electromecánico. Tratándose de frecuencias y velocidades relativamente pequeñas, la radiación electromagnética es prácticamente despreciable prevaleciendo las condiciones de un campo casi estático. En la conversión electromecánica de energía, ésta aparece en cuatro formas, que según el principio de conservación están ligadas entre sí de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Energía eléctrica} \\ \text{de entrada} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Energía mecáni-} \\ \text{ca de salida} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Aumento de} \\ \text{energía al-} \\ \text{macenada en} \\ \text{el campo} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Energía con-} \\ \text{vertida en} \\ \text{calor} \end{array} \right) \quad (2-1)$$

Esta ecuación es aplicable a todos los dispositivos de conversión; está escrita de forma que los términos de energía eléctrica y mecánica tienen signo positivo cuando se trata de un motor, pero es igualmente válida si se trata de un generador, aun cuando en este caso dichos términos son de signo negativo.

La conversión irreversible de energía en calor es debida a tres causas: una parte de la energía eléctrica se convierte directamente en calor en las resistencias del circuito recorrido por la corriente; una parte de la energía mecánica generada es absorbida por los rozamientos y por la resistencia del aire, convirtiéndose en calor, y por último una parte de la energía absorbida por los campos de acoplamiento se convierte también en calor por las pérdidas en el núcleo (caso de acoplamiento magnético) o las pérdidas en el dieléctrico (caso de acoplamiento eléctrico).

Si las pérdidas totales de energía se desglosan en sus tres componentes, es decir, se separan las pérdidas en el sistema eléctrico, en el mecánico y en los campos, y cada una de estas partes se agrupa con el término correspondiente a la ecuación 2-1, ésta se convertirá en:

$$\left(\begin{array}{c} \text{Energía eléctrica} \\ \text{de entrada, menos} \\ \text{pérdidas en las} \\ \text{resistencias} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Energía mecánica} \\ \text{de salida, más} \\ \text{pérdidas por rozamiento y resistencia} \\ \text{del aire} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Aumento de energía} \\ \text{almacenada} \\ \text{en el campo de} \\ \text{acoplamiento, más} \\ \text{pérdidas correspondientes} \end{array} \right) \quad (2-2)$$

El primer miembro de esta ecuación puede expresarse en función de las intensidades y tensiones en los circuitos eléctricos del sistema. Consideremos, por ejemplo, el dispositivo de conversión de energía representado esquemáticamente en la Fig. 2-1.

La energía eléctrica de entrada en el tiempo elemental dt es $v_T i dt$, siendo v_T la tensión instantánea en bornes e i la intensidad instantánea. La energía perdida en las resistencias eléctricas es $i^2 r dt$, siendo r el valor de dicha resistencia. Por consiguiente, el primer miembro de la ecuación 2-2 será:

$$dW_{\text{elec}} = v_T i dt - i^2 r dt \quad (2-3)$$

$$dW_{\text{elec}} = (v_T - ir) i dt \quad (2-4)$$

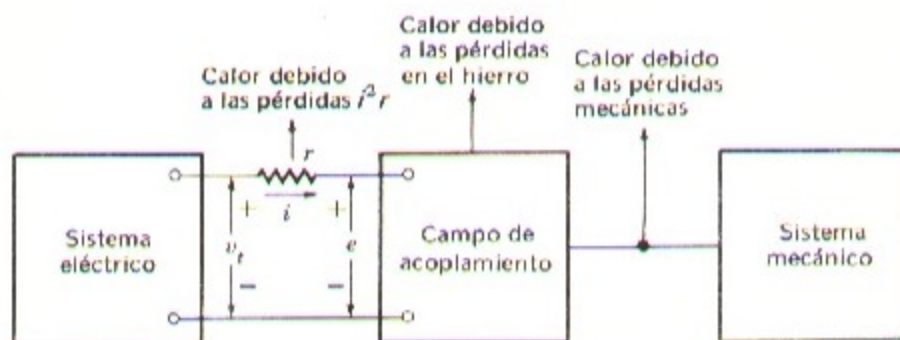


Fig. 2-1. Representación general de la conversión electromecánica de energía.

en las que dW_{elec} es la energía de entrada neta después de haber tenido en cuenta las pérdidas en la resistencia. Para que el sistema de acoplamiento absorba energía del circuito eléctrico es necesario que el campo origine una reacción en él, reacción que no es otra que la f.e.m. representada en la Fig. 2-1 por la tensión e . En los dispositivos electromagnéticos, por ejemplo, es la tensión inducida por el campo magnético. La reacción en la

entrada es un elemento esencial en todo proceso de transferencia de energía entre un circuito eléctrico y otro medio cualquiera. El campo de acoplamiento puede compararse a un almacenamiento de energía que la va suministrando hacia el sistema de salida al mismo tiempo que la repone por medio de su reacción con el sistema de entrada. Para que las tensiones queden correctamente equilibradas, la f.e.m. e debe valer:

$$e = v_t - ir \quad (2-5)$$

que sustituida en la fórmula 2-4 nos da:

$$dW_{elec} = ei dt \quad (2-6)$$

Si el suministro de energía eléctrica procede de más de un circuito, la energía de entrada total será la suma de todos los términos de la fórmula 2-6.

El primer término del segundo miembro de la ecuación 2-2 es la energía total convertida a forma mecánica, que difiere de la energía mecánica útil por las pérdidas debidas a rozamientos y resistencia del aire en las partes animadas de movimiento. El último término de dicho segundo miembro es la energía total absorbida por el campo de acoplamiento, comprendida la energía almacenada y las pérdidas.

De cuanto antecede se desprende que la resistencia de los circuitos, los rozamientos y la resistencia del aire, si bien existen siempre, no tienen un papel importante en el proceso de conversión de la energía, y pueden considerarse como pérdidas en los sistemas eléctrico y mecánico respectivamente a ambos lados del elemento de acoplamiento tal como se indica en el esquema de la Fig. 2-1.

El proceso básico de conversión de energía comprende el campo de acoplamiento y su acción y reacción frente a los sistemas eléctrico y mecánico. Actuando como motor, la suma de la energía absorbida por el campo de acoplamiento y la energía interna convertida a forma mecánica puede igualarse siempre a la energía eléctrica interna, relacionada ésta con la intensidad de carga y la f.e.m. e originada por el campo. La fórmula 2-2 puede escribirse en forma diferencial:

$$dW_{elec} = ei dt = dW_{camp} + dW_{mec} \quad (2-7)$$

en la que dW_{mec} es la energía diferencial convertida a forma mecánica y dW_{camp} la energía diferencial absorbida por el campo de acoplamiento.

La ecuación 2-7 constituye, junto con la ley de Faraday de las tensiones inducidas, la base fundamental para el análisis de los dispositivos o equipos de conversión de energía.

2-2. ENERGÍA EN SISTEMAS MAGNÉTICOS CON EXCITACION SIMPLE

En el capítulo 1 se ha tratado primordialmente de los circuitos magnéticos con núcleo cerrado, utilizados en los transformadores; en ellos, la energía queda almacenada en los campos de dispersión y en el propio núcleo, pero no toma parte directamente en el

proceso de transformación de la tensión. En este capítulo se trata de la conversión de energía; los circuitos magnéticos tienen entrehierros entre las partes fijas y las móviles en los que el campo magnético existente almacena una considerable cantidad de energía: este campo constituye propiamente el medio de conversión sirviendo a manera de depósito de energía entre los sistemas eléctrico y mecánico.

a. Tensión inducida y potencia eléctrica

Consideremos en primer lugar un sistema formado por una bobina de excitación y su correspondiente campo magnético tal como se representa esquemáticamente en la Fig. 2-2. Podemos escribir:

$$v_t = ir + e \quad (2-8)$$

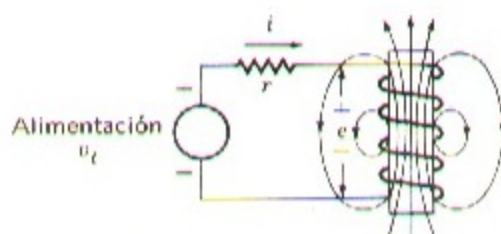


Fig. 2-2. Sistema magnético elemental con excitación simple.

Si el flujo es creciente, la f.e.m. e inducida en la bobina tiende a oponerse a la corriente, como se representa con los signos $+$ y $-$ en la figura. Al ser el flujo creciente, su derivada respecto al tiempo es positiva y el valor instantáneo de la fuerza contraelectromotriz viene dado por:

$$e = + \frac{d\lambda}{dt} \quad (2-9)$$

en la que λ es el valor instantáneo del flujo concatenado con el circuito, y t es el tiempo.

En un devanado en el que todo el flujo φ esté concatenado con sus N espiras, el flujo λ será $N\varphi$ y la fórmula 2-8 puede escribirse:

$$v_t = ir + \frac{d\lambda}{dt} = ir + N \frac{d\varphi}{dt} \quad (2-10)$$

En los dispositivos reales una pequeña parte del flujo se dispersa a través del espacio ocupado por las espiras, y por consiguiente se concatena con sólo una parte de ellas. Al pretender calcular el flujo total concatenado deberá tenerse en cuenta el que realmente lo

hace con cada una de las espiras; los efectos producidos por esta concatenación parcial pueden estimarse considerando que el flujo es $\varphi = \lambda/N$, siendo φ el flujo equivalente que concatene con el total de las N espiras. En la mayor parte de dispositivos provistos de núcleo ferromagnético, los efectos de esta concatenación parcial son relativamente leves, ya que la mayor parte del flujo queda confinado en el núcleo interesando por consiguiente a todo el devanado.

De la fórmula 2-6 se desprende que la energía diferencial dW_{elec} suministrada por el generador en el tiempo dt es:

$$dW_{\text{elec}} = ei dt \quad (2-11)$$

después de haber separado las pérdidas $i^2 r dt$ transformadas en calor, en la bobina.

De las fórmulas 2-11 y 2-9 se deduce:

$$dW_{\text{elec}} = i d\lambda = Ni d\varphi = \mathfrak{F} d\varphi \quad (2-12)$$

siendo $\mathfrak{F} = Ni$ la fuerza magnetomotriz, o *f.m.m.* de la bobina.

Esta última ecuación 2-12 muestra que las variaciones de flujo abarcado por un circuito son función de la energía que fluye en el mismo. El flujo puede variar debido a un cambio en la excitación, a un movimiento mecánico o a ambas cosas simultáneamente. Por ejemplo, en el relé representado en la Fig. 2-3 el campo magnético crea una fuerza que tiende a cerrar el entrehierro, y si la armadura es susceptible de moverse, ello producirá una variación de flujo. La energía eléctrica de entrada viene dada por la fórmula 2-12 en la que ya se tienen en cuenta todos los factores que puedan ser causa de una modificación del flujo.

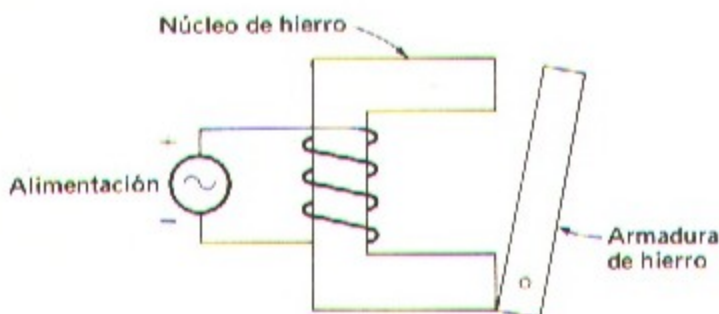


Fig. 2-3. Relé magnético.

b. Energía en el campo magnético

En la ecuación de equilibrio 2-7 la energía relativa al campo magnético viene determinada por la *f.m.m.* de la bobina y por la configuración del material magnético y del devanado. El campo da origen a fuerzas mecánicas, pero si no existe movimiento no

existirá tampoco trabajo alguno. Si por ejemplo inmovilizamos en una posición fija la armadura del relé de la Fig. 2-3, la ecuación 2-7 queda reducida al caso especial

$$dW_{\text{elec}} = dW_{\text{camp}} + 0 \quad (2-13)$$

Puede hallarse la energía del campo, para una determinada configuración, por la energía suministrada por el generador al crear el campo *considerando que su configuración es fija*. Teniendo en cuenta las ecuaciones 2-12 y 2-13 tendremos:

$$dW_{\text{camp}} = i d\lambda = \mathcal{F} d\varphi \quad (2-14)$$

que dice que para una configuración dada, la energía eléctrica de entrada $i d\lambda$ relacionada con una variación de flujo queda absorbida por el campo.

Al variar el flujo concatenado entre λ_1 y λ_2 o el flujo entre φ_1 y φ_2 , la energía absorbida por el campo será:

$$\Delta W_{\text{camp}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i(\lambda) d\lambda = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \mathcal{F}(\varphi) d\varphi \quad (2-15)$$

en donde se han empleado las notaciones funcionales $i(\lambda)$ y $\mathcal{F}(\varphi)$ para hacer resaltar el hecho de que λ y φ son las variables de integración. Si el flujo inicial es nulo, la energía absorbida por el campo cuando quede establecido el flujo concatenado λ o el flujo φ , será:

$$W_{\text{camp}} = \int_0^{\lambda} i(\lambda) d\lambda = \int_0^{\varphi} \mathcal{F}(\varphi) d\varphi \quad (2-16)$$

En estas ecuaciones la f.m.m. es función del flujo, dependiendo la relación entre ambos de la forma geométrica de la bobina y del núcleo, así como de las propiedades magnéticas del material.

En el relé de la Fig. 2-3 existen dos orígenes de pérdidas eléctricas: la resistencia del devanado y las corrientes parásitas e histéresis del núcleo. Cuando el flujo, por reajuste de la intensidad i , crece desde φ_1 hasta φ_2 para volver luego a φ_1 no se recupera toda la energía suministrada por el generador, debido a dichas pérdidas. Si suponemos que los elementos origen de las pérdidas se separan y se incluyen en el generador eléctrico, el relé devolverá toda la energía después de haber pasado el flujo de φ_1 a φ_2 y retornado a φ_1 . En este caso se dice que el relé constituye un *sistema conservador*.

Un sistema conservador tiene la propiedad de que su energía depende únicamente de su *estado*, fijado éste por las variables independientes que lo determinan. En el caso del relé, la variable independiente φ fija el estado, de conformidad con la fórmula 2-16. En consecuencia, la energía a cualquier valor de φ es independiente del camino seguido hasta llegar a él, siendo esto igualmente cierto para $N\varphi$ o sea λ . Recuérdese que se ha supuesto que el relé no tiene pérdidas y que su posición mecánica es fija cuando se define su estado por medio de la variable independiente φ . Más adelante se introducirá el movimiento mecánico. Los mecanismos de conversión electromagnética de energía se construyen con entrehierros para separar las partes fijas de las móviles. La mayor parte de la f.m.m. de los

devanados se emplea en salvar la reluctancia de los entrehierros, de forma que la mayor parte de la energía queda almacenada en dichos entrehierros para ser restituida al generador cuando se reduce el campo. Debido a la simplicidad de las relaciones resultantes, al calcular dispositivos reales se prescinde muchas veces de la no linealidad magnética y de las pérdidas, pudiéndose corregir posteriormente por procedimientos semiempíricos los resultados así hallados. En consecuencia, se realizan los cálculos bajo el supuesto de que el flujo y la f.m.m. son directamente proporcionales en todo el circuito magnético tal como lo son en el aire. La relación entre el flujo φ y la f.m.m. \mathcal{F} viene dada por la reluctancia $\delta\mathcal{R}$ y la permeancia \mathcal{P} :

$$\delta\mathcal{R} = \frac{\mathcal{F}}{\varphi} \quad (2-17)$$

$$\mathcal{P} = \frac{\varphi}{\mathcal{F}} = \frac{1}{\delta\mathcal{R}} \quad (2-18)$$

Habiendo prescindido de la no linealidad y de la histéresis, la reluctancia y la permeancia serán constantes, si lo son φ y \mathcal{F} , por lo que valiéndonos de las fórmulas 2-16 a 2-18 podremos escribir:

$$W_{\text{camp}} = \frac{1}{2}i\lambda = \frac{1}{2}\mathcal{F}\varphi = \frac{1}{2}\delta\mathcal{R}\varphi^2 \quad (2-19)$$

y bajo el mismo supuesto de prescindir de la no linealidad la autoinducción L de la bobina, expresada en Henry, viene dada por el flujo concatenado por ampere, o sea:

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\varphi}{i} = N^2\mathcal{P} \quad (2-20)$$

la que sustituida en la ecuación 1-19 dará la energía almacenada en el campo a inductancia constante,

$$W_{\text{camp}} = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{L} \quad (2-21)$$

La energía asociada al campo se distribuye en todo el espacio ocupado por él. En un medio magnético sin pérdidas y de permeabilidad uniforme la densidad de energía es

$$w_{\text{camp}} = \frac{1}{2} \mathcal{H}\mathcal{B} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{B}^2}{\mu} \quad (2-22)$$

en la que w_{camp} viene expresado en joule por metro cúbico, la intensidad \mathcal{H} del campo magnético en ampere-vueltas por metro, la densidad de flujo \mathcal{B} en weber por metro cuadrado y la permeabilidad μ en unidades MKS.

En las consideraciones anteriores se ha expresado la relación campo-energía en tres formas distintas, siendo pertinente comentar ahora brevemente cada una de ellas. En la ecuación 2-22 la energía almacenada queda expresada en función de las propiedades del campo por volumen específico o relativo; este punto de vista es el del proyectista, que piensa basándose en las propiedades del material, intensidades de campo, densidades de flujo y conceptos análogos, y a partir de aquí fija las formas geométricas y disposiciones de cualquier elemento conociendo las posibilidades por unidad de volumen de los materiales disponibles. En la ecuación 2-21 la energía del campo está expresada en función del flujo concatenado y de las inductancias, conceptos muy corrientes particularmente cuando no tiene importancia el hecho de no existir una relación lineal: es el punto de vista del analizador del circuito. Excepción hecha de las dificultades que se originan si se pretende tener en cuenta la ya citada no linealidad, puede desarrollarse la teoría de las características operatorias de un dispositivo de conversión electromagnética de energía partiendo del supuesto que tal dispositivo es un elemento del circuito con inductancia variable en el tiempo: sin embargo, esta forma de considerar las cosas no da idea clara de los fenómenos internos y no dice nada sobre las dimensiones físicas. En la ecuación 1-19, la energía está expresada en función del conjunto del campo; en cierta forma este punto de vista está comprendido entre los otros dos, pues efectivamente puede traducirse tanto al lenguaje del proyectista como al del analizador. En este texto se hará uso, en distintos lugares, de los tres puntos de vista.

2.3. FUERZA MECANICA Y ENERGIA

En la Fig. 2-4 está representado el relé de la Fig. 2-3, que constituye un ejemplo de dispositivo electromagnético de conversión de energía, al que se ha aplicado una fuerza mecánica f_{mec} que actúa manteniendo la armadura en una determinada posición x . En principio habíamos supuesto que la armadura estaba fija en relación al campo magnético sin considerar las fuerzas que la inmovilizaban. En la citada Fig. 2-4 se representa también

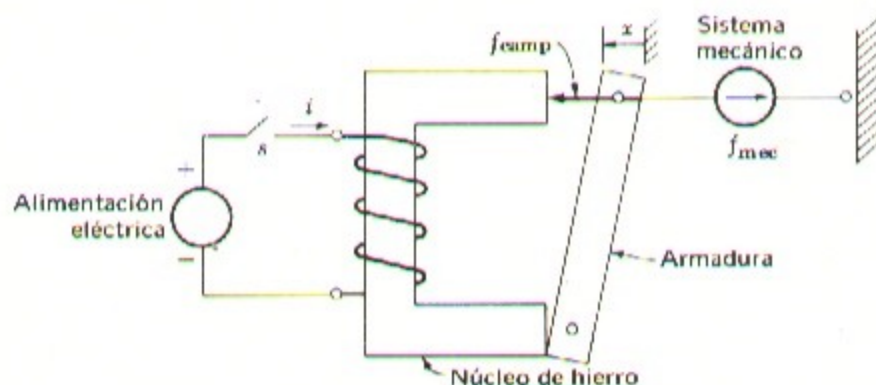


Fig. 2-4. Relé obtenido por una fuerza mecánica exterior.

la fuerza f_{camp} originada por el campo magnético y que tiende a desplazar la armadura en la dirección x . En condiciones estáticas y admitiendo que no existen fuerzas de rozamiento, las dos fuerzas existentes, o sea la del campo y la mecánica, deberán equilibrarse:

$$f_{\text{camp}} = f_{\text{mec}} \quad (2-23)$$

Si la armadura es susceptible de desplazarse un espacio dx , el campo ejercerá sobre ella un trabajo dW_{mec} ya que su fuerza y el espacio recorrido tienen el mismo sentido:

$$dW_{\text{mec}} = f_{\text{camp}} dx \quad (2-24)$$

De igual forma, ya que la fuerza mecánica y el desplazamiento tienen sentidos opuestos, el trabajo desarrollado por dicha fuerza será negativo, es decir, que habrá una *absorción* de energía:

$$dW_{\text{mec}} = f_{\text{mec}} dx = f_{\text{camp}} dx \quad (2-25)$$

Si se acelera o se carga mecánicamente la armadura de la Fig. 2-4, las dos fuerzas actuantes, la originada por el campo y la mecánica, ya no serán iguales y la ecuación 2-23 deberá reemplazarse por una ecuación diferencial que tenga en cuenta todas las fuerzas existentes.

Volviendo a las ecuaciones 2-7 y 2-12, por sustitución en la 2-25 tendremos:

$$dW_{\text{elec}} = i d\lambda = dW_{\text{camp}} + f_{\text{mec}} dx \quad (2-26)$$

que es más general que la 1-14 para la variación de la energía del campo magnético en un sistema de excitación simple. Si la armadura se mantiene inmóvil dx será igual a cero y toda variación en la energía del campo procederá del suministro eléctrico como en la ecuación 2-14:

$$dW_{\text{camp}} = i d\lambda \quad (2-27)$$

y si por el contrario es el flujo concatenado el que permanece constante, $d\lambda$ será igual a cero, y la variación en la energía del campo procederá totalmente del sistema mecánico

$$dW_{\text{camp}} = -f_{\text{mec}} dx \quad (2-28)$$

La condición de que $d\lambda = 0$ se cumplirá aplicando una tensión nula a los terminales del devanado sin resistencia del relé de la Fig. 2-4. Sin embargo, es necesario que λ sea finito para que exista una fuerza f_{camp} al transferir al campo energía procedente del sistema mecánico: por ejemplo, podemos partir de una corriente i en el devanado estando la armadura en una determinada posición x , y seguidamente cortocircuitar los terminales.

En la ecuación 2-22 podemos ver que la densidad de energía w_{camp} en el entrehierro es constante si lo es ω , o sea que la energía total del campo W_{camp} es proporcional al volumen del entrehierro. Si x crece, se reduce dicho volumen transfiriéndose energía del campo magnético al sistema mecánico, y si por el contrario x se reduce debido a la acción de la fuerza mecánica, se transferirá energía del sistema mecánico al campo magnético de acuerdo con la ecuación 2-28.

Las ecuaciones 2-27 y 2-28 muestran la verdadera naturaleza del campo magnético como medio de acoplamiento entre los sistemas eléctrico y mecánico. Cualquiera de los dos sistemas puede introducir o extraer energía del campo según sean las condiciones impuestas a las variables independientes λ y x . En algunas máquinas o dispositivos la energía del campo magnético se mantiene constante durante todo el proceso de conversión, pues las aportaciones y extracciones eléctricas y mecánicas en cada momento son iguales entre sí, mientras que en otras máquinas, como por ejemplo los motores de corriente alterna monofásicos, el proceso es mucho más complicado originándose intercambios durante cada revolución del eje.

2-4. FUNCIONES DE ESTADO, VARIABLES, COENERGIA

La energía es una *función de estado* de un sistema conservador. La ecuación 2-26 escrita de la siguiente forma:

$$dW_{\text{camp}}(\lambda, x) = i\lambda - f_{\text{mec}} dx \quad (2-26)$$

muestra que la energía del campo magnético de un sistema con excitación simple desprovisto de pérdidas es función de dos variables independientes, λ y x . La diferencial de la energía $dW_{\text{camp}}(\lambda, x)$ puede expresarse matemáticamente en función de las derivadas parciales:

$$dW_{\text{camp}}(\lambda, x) = \frac{\partial W_{\text{camp}}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial W_{\text{camp}}}{\partial x} dx \quad (2-29)$$

Puesto que las variables λ y x son independientes, los coeficientes de los términos semejantes de las ecuaciones 2-26 y 2-29 deberán ser iguales entre sí, lo que nos conduce a las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$i = \frac{\partial W_{\text{camp}}(\lambda, x)}{\partial \lambda} \quad (2-30)$$

$$f_{\text{mec}} = f_{\text{camp}} = - \frac{\partial W_{\text{camp}}(\lambda, x)}{\partial x} \quad (2-31)$$

La ecuación 2-30 para la corriente i se corresponde con la ecuación 2-27 para la energía del campo cuando la armadura se mantiene fija, es decir, cuando $dx = 0$, y la ecuación 2-31 para la fuerza mecánica f_{mec} (que es igual a la fuerza del campo f_{camp}), se corresponde con la 2-28 de la energía del campo cuando el flujo concatenado es constante: $d\lambda = 0$.

Obsérvese que hasta ahora se ha expresado siempre la energía en función de la variable eléctrica λ y en la ecuación 2-31 la fuerza se encuentra como función del flujo concatenado λ . Una vez obtenida la fórmula para la fuerza, si se desea puede expresarse ésta en función de i utilizando las ecuaciones del sistema conectado. Como alternativa, para determinar la fuerza en función de λ puede utilizarse otra función de estado distinta de la energía, denominada *coenergía*, que nos dará la fuerza en función de la corriente. La elección de una u otra función de estado es simple cuestión de conveniencia que depende de la variable que se pretenda determinar en el resultado, o de los datos iniciales de que se disponga correspondientes al sistema en estudio.

La coenergía W'_{camp} es una función de i y de x tal como

$$W'_{camp}(i, x) = i\lambda - W_{camp}(\lambda, x) \quad (2-32)$$

que puede deducirse de la ecuación 2-26, utilizando la diferencia de $i\lambda$

$$d(i\lambda) = i d\lambda + \lambda di \quad (2-33)$$

y la diferencial de $dW_{camp}(\lambda, x)$ de la ecuación 2-26, para llevar a cabo la transformación.

La diferencial de la coenergía es:

$$dW'_{camp}(i, x) = d(i\lambda) - dW_{camp}(\lambda, x) \quad (2-34a)$$

Substituyendo las ecuaciones 2-33 y 2-26 en la 2-34a, tendremos:

$$dW'_{camp}(i, x) = i d\lambda + \lambda di - i d\lambda + f_{mec} dx \quad (2-34b)$$

que queda reducida simplemente a:

$$dW'_{camp}(i, x) = \lambda di + f_{mec} dx \quad (2-34c)$$

Al igual que se hizo en la ecuación 2-29 para la energía $W_{camp}(\lambda, x)$, puede expresarse la diferencial de la coenergía de la siguiente forma:

$$dW'_{camp}(i, x) = \frac{\partial W'_{camp}}{\partial i} di + \frac{\partial W'_{camp}}{\partial x} dx \quad (2-34d)$$

y puesto que las variables i y x son ahora independientes, los coeficientes de los términos semejantes de las ecuaciones 2-34c y 2-34d deberán ser iguales entre sí, resultando de ello

las ecuaciones paramétricas:

$$\lambda = \frac{\partial W'_{\text{camp}}(i, x)}{\partial i} \quad (2-35)$$

$$f_{\text{mec}} = f_{\text{camp}} = + \frac{\partial W'_{\text{camp}}(i, x)}{\partial x} \quad (2-36)$$

Compárense las ecuaciones 2-31 y 2-36: la primera expresa la fuerza en función del flujo concatenado y la segunda lo hace en función de i . El calcular la fuerza a partir de la energía o de la coenergía depende en general de las variables requeridas en cada caso.

En un sistema con excitación simple y la armadura fija, $dx = 0$, la coenergía se determina a partir de la ecuación 2-34c

$$W'_{\text{camp}} = \int_0^i \lambda di \quad (2-37)$$

En un sistema lineal en el que λ sea proporcional a i , es decir, de inductancia constante al variar λ , o μ constante al variar \mathcal{B} , la coenergía expresada con los datos del circuito es:

$$W'_{\text{camp}} = \int_0^i Li di = \frac{1}{2} Li^2 \quad (2-38)$$

La densidad de coenergía es:

$$w'_{\text{camp}} = \int_0^{\infty} \mathcal{B} d\mathcal{H} = \int_0^{\infty} \mu \mathcal{H} d\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mu \mathcal{H}^2 \quad (2-39)$$

y la coenergía total expresada con los datos del campo:

$$W'_{\text{camp}} = \frac{1}{2} \lambda i = \frac{1}{2} \mathcal{F} \varphi = \frac{1}{2} \mathcal{F}^2 \quad (2-40)$$

Estas tres últimas fórmulas constituyen la contrapartida de las 2-21, 2-22 y 2-19 de la función energía respectivamente.

En un sistema lineal, la energía y la coenergía tienen valores numéricos iguales; por ejemplo $\frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 / L$; $\frac{1}{2} \mu \mathcal{H}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{B}^2 / \mu$; $\frac{1}{2} \mathcal{F}^2 = \frac{1}{2} \mathcal{H} \varphi^2$. Si el sistema no es lineal, es decir, si λ e i , o bien \mathcal{B} y \mathcal{H} no son proporcionales, no siempre ambas funciones tienen el mismo valor numérico. La Fig. 2-5 es una interpretación gráfica de la energía y coenergía en un sistema no lineal. El área comprendida entre la curva $\lambda-i$ y el eje vertical, dada por la integral de $i d\lambda$, es la energía, y el área comprendida entre dicha curva y el eje horizontal, dada por λdi , es la coenergía. La suma de ambas en un sistema con excitación simple es, por definición:

$$W_{\text{camp}} + W'_{\text{camp}} = \lambda i \quad (2-41)$$

La fuerza creada por el campo del dispositivo de la Fig. 2-4 para unos determinados valores de x e i o λ , ha de ser independiente de que el cálculo se haya realizado valiéndose

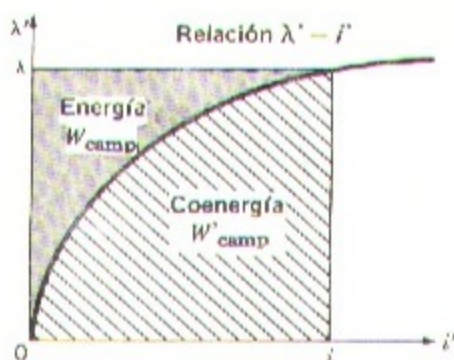


Fig. 2-5. Interpretación gráfica de la energía y coenergía en un sistema con excitación

de la energía o de la coenergía. este aserto puede demostrarse por un procedimiento gráfico. Supongamos que la armadura está en una posición x tal que determine que el dispositivo esté actuando en el punto a de la Fig. 2-6a. La derivada parcial de la ecuación 2-31 puede interpretarse como el límite de $-\Delta W_{\text{camp}}/\Delta x$, cuando $\Delta x \rightarrow 0$ siendo λ constante. Si variamos Δx , la variación de $-\Delta W_{\text{camp}}$ estará representada por el área de la superficie sombreada en dicha figura, por lo que la fuerza será: $f_{\text{camp}} = (\text{área sombreada})/\Delta x$ cuando Δx tiende a cero. Por otra parte, la derivada parcial de la ecuación 2-36 puede interpretarse como el límite de $\Delta W'_{\text{camp}}/\Delta x$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ siendo i constante: este caso está representado en la Fig. 2-6b y la fuerza será $f_{\text{camp}} = (\text{área sombreada})/\Delta x$

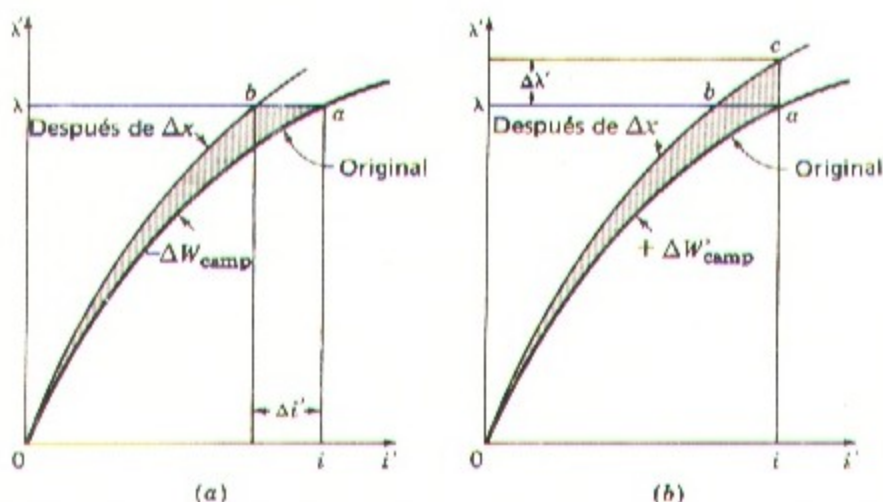


Fig. 2-6. Efecto de Δx sobre la energía y coenergía en un dispositivo de excitación simple. (a) Variación de energía manteniendo λ constante. (b) Variación de coenergía manteniendo i constante.

cuando Δx tiende a cero. Las zonas sombreadas en ambas figuras difieren entre sí únicamente en el pequeño triángulo abc de lados Δi y $\Delta \lambda$, por lo que en el límite las áreas de dichas zonas motivadas por Δx con λ o i constantes son iguales, es decir, que el valor de la fuerza es independiente de que su cálculo se haya realizado a partir de la energía o de la coenergía como se quería demostrar.

Las ecuaciones 2-31 y 2-36 expresan la fuerza mecánica de origen eléctrico en función de las derivadas parciales de la energía y de la coenergía $W_{\text{camp}}(\lambda, x)$ y $W'_{\text{camp}}(i, x)$. Es necesario tener en cuenta dos puntos esenciales sobre el particular: (1) las variables en función de las cuales deberán expresarse y (2) sus signos algebraicos. Naturalmente, la fuerza depende físicamente del valor de x y del campo magnético, y el campo puede expresarse en función del flujo concatenado λ , de la corriente i o de otras variables con éstas relacionadas. Sin embargo, hay una gran diferencia, matemáticamente considerado, entre la función de energía utilizada y las variables en que está expresada. Se ha indicado ya que el empleo de una u otra formas como base de un análisis es meramente una cuestión de conveniencia que depende de los datos de partida, y de los que se pretende determinar.

Los signos algebraicos de las ecuaciones 2-31 y 2-36 indican que la fuerza del campo actúa en el sentido en que tiende a disminuir la energía almacenada en el campo magnético siendo el flujo constante, o a aumentar la coenergía a intensidad constante. En un sistema con excitación simple la fuerza actúa sobre los distintos elementos tendiendo a aumentar la inductancia, así como a reducir la reluctancia del circuito magnético concatenado con el devanado.

Ejemplo 2-1

La característica $\lambda-i$ de un circuito magnético se representa frecuentemente por una línea quebrada como puede verse en la Fig. 2-7. Se considera que el circuito es lineal hasta el punto a y está saturado desde a hasta b . Hállese la energía W_{camp} y la coenergía W'_{camp} del circuito magnético en los puntos a y b .

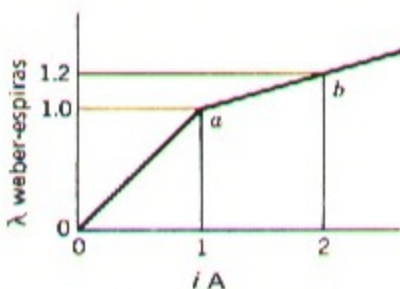


Fig. 2-7. Línea quebrada aproximada a la característica $\lambda - i$

SOLUCION

La energía, según la ecuación 2-16, es:

$$W_{\text{camp}} = \int_0^\lambda i \, d\lambda$$

La energía en el punto a , teniendo en cuenta que la ecuación de la curva $0a$ es $\lambda = i$, será:

$$W_{\text{camp}} = \int_0^{1.0} \lambda \, d\lambda = 0,5 \text{ joule}$$

En el punto b existe la energía adicional

$$\Delta W_{\text{camp}} = \int_{1.0}^{1.3} (5\lambda - 4) \, d\lambda = 0,3 \text{ joule,}$$

luego la energía total en b es de 0,8 joule.

La coenergía viene dada por la ecuación 2-37:

$$W'_{\text{camp}} = \int_0^i \lambda \, di$$

y en el punto a , siendo $i = 1 \text{ A}$, tendremos:

$$W'_{\text{camp}} = \int_0^{1.0} i \, di = 0,5 \text{ joule.}$$

Como puede verse, en el punto a son iguales la energía y la coenergía.

En el punto b existe la coenergía adicional

$$\Delta W'_{\text{camp}} = \int_{1.0}^{2.0} (0,2 i + 0,8) \, di = 1,1 \text{ joule,}$$

siendo la total en dicho punto de 1,6 joule, superior, como puede comprobarse, a los 0,8 joule de energía existentes en el mismo.

EJEMPLO 2-2

El circuito magnético de la Fig. 2-8 está construido de acero moldeado. El rotor puede girar libremente alrededor de un eje normal al dibujo. Las dimensiones son las indicadas en la figura.

- Dedúzcase una fórmula, expresada en unidades MKS, para el par actuante sobre el rotor en función de las dimensiones y del campo magnético en los dos entrehierros. Despréciase el efecto de bordes.
- Debido a la saturación del acero, la densidad máxima de flujo en las zonas del entrehierro en las que están enfrentados la armadura y el rotor, es de aproximadamente 2 weber/m^2 . Calcúlese el par máximo en Nw-m , si las dimensiones son: $r_1 = 25 \text{ mm}$, $h = 25 \text{ mm}$, $g = 2,5 \text{ mm}$.

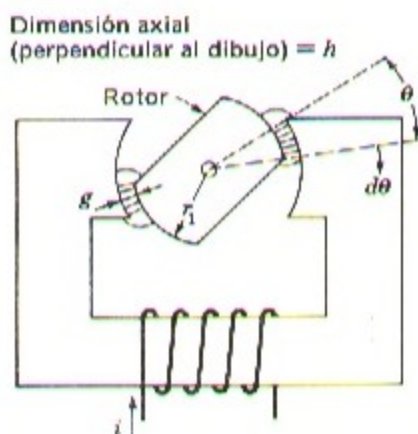


Fig. 2-8. Sistema magnético del ejemplo 2-2.

SOLUCION

El par T puede obtenerse de la derivada de la coenergía del campo respecto al ángulo θ , según la ecuación 2-36.

- a. Utilizaremos como variable independiente la intensidad \mathcal{H} del campo en el entrehierro por estar ligada a la variable i en los terminales por la relación $Ni = 2g\mathcal{H}$. La densidad de coenergía del campo, según la ecuación 2-39, es $\mu_0\mathcal{H}^2/2$ y el volumen de las dos zonas de entrehierro interesadas es $2gh(r_1 + 0,5g)\theta$, por lo que la coenergía total del campo es

$$W' = \mu_0\mathcal{H}^2 gh(r_1 + 0,5g)\theta$$

$$T = \frac{\partial W'(\mathcal{H}\theta)}{\partial \theta}$$

$$T = \mu_0\mathcal{H}^2 gh(r_1 + 0,5g) = \frac{2g^2 gh(r_1 + 0,5g)}{\mu_0}$$

El sentido de actuación del par es tendiendo a alinear el rotor con los polos del estator.

- b. Sustituyendo valores en la fórmula, siendo $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ tendremos:

$$T = \frac{2^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-3} (25 \cdot 10^{-3} + 0,5 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3})}{4\pi 10^{-7}} \text{ Nw-m}$$

y $T = 5,22$ Newton-metro

Los dispositivos provistos de hierro móvil encuentran multitud de aplicaciones en aparatos destinados a ejercer una fuerza mecánica o producir un par. Algunos de ellos, tales como los elevadores y platos magnéticos, se utilizan para sostener piezas de material ferromagnético; otros, tales como las bobinas con núcleo de hierro, los relés y los contactores, para ejercer una fuerza a una determinada distancia; otros actúan sobre un muelle antagonista, de forma que la desviación de un índice indique el valor eficaz de la tensión o intensidad del circuito al que están conectados; en otros, tales como los receptores telefónicos de hierro móvil y los electroimanes que accionan los servomecanismos de regulación de motores hidráulicos, se requiere que la fuerza o el par sean muy aproximadamente proporcionales a una señal eléctrica, y que la respuesta dinámica sea lo más rápida posible. En el apartado 2-7 se estudiarán las condiciones dinámicas de los sistemas acoplados electromagnéticamente.

2-5. SISTEMAS DE CAMPO ELECTRICO CON EXCITACION SIMPLE

Un sistema de conversión de energía por campo eléctrico puede tratarse en forma análoga a lo ya visto para un campo magnético a fin de determinar la fuerza que se origina en el campo eléctrico y la tensión aplicada a los terminales del circuito. La elección de las variables independientes determina si la función de estado corresponde a la energía o a la coenergía, y la forma de las ecuaciones paramétricas.

a. Balance energético

La Fig. 2-9 representa un dispositivo de campo eléctrico con excitación simple. Los terminales se alimentan con una intensidad I procedente de un generador cuyas pérdidas están representadas por el elemento G en derivación. El plato móvil está unido a un sistema mecánico no detallado en la figura. La variación de energía correspondiente a

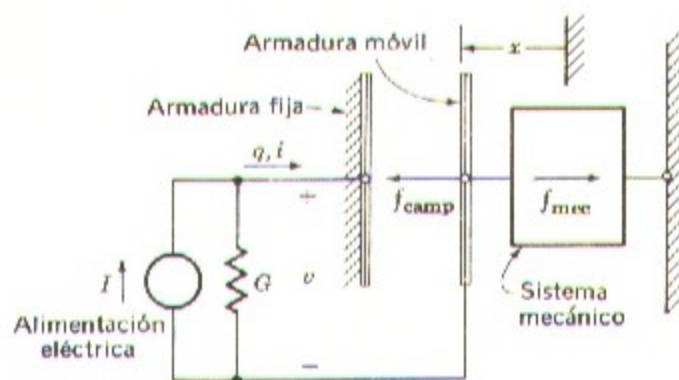


Fig. 2-9. Dispositivo de campo eléctrico con excitación simple.

cada cambio en el sistema puede representarse por la ecuación:

$$dW_{\text{elec}} = dW_{\text{camp}} + dW_{\text{mec}} \quad (2-42)$$

Representando con i y q respectivamente la intensidad y la carga en el sistema, la energía eléctrica en los terminales será:

$$dW_{\text{elec}} = vi dt = v dq \quad (2-43)$$

y la energía mecánica exterior:

$$dW_{\text{mec}} = f_{\text{mec}} dx \quad (2-44)$$

introduciendo estas dos últimas ecuaciones en la 2-42 tendremos:

$$v dq = dW_{\text{camp}} + f_{\text{mec}} dx \quad (2-45)$$

correspondiente al balance de energía del sistema, supuesto éste exento de pérdidas ya que el elemento G está incluido en el generador y admitimos que en el resto del dispositivo no existen pérdidas en el dieléctrico, por rozamientos ni por otras causas. El sistema es conservador, y toda la energía suministrada puede recuperarse.

b. Energía

La ecuación 2-45 ordenada de la siguiente forma

$$dW_{\text{camp}} = v dq - f_{\text{mec}} dx \quad (2-45a)$$

muestra que la energía del campo eléctrico puede suministrarse a través de los terminales eléctricos o del equipo mecánico. La expresión de la energía en función de las variables independientes q y x es correcta, ya que la energía es una función de estado independientemente de cómo ha sido introducida. Por tanto, si el sistema mecánico se mantiene fijo, $dx = 0$, la energía procedente de los terminales eléctricos será:

$$W_{\text{camp}} = \int_0^q v dq \quad (2-46)$$

y si, por el contrario, el circuito eléctrico se mantiene *abierto* para que $dq = 0$, la energía será:

$$W_{\text{camp}} = \int_0^x f_{\text{mec}} dx \quad (2-47)$$

para valorar estas integrales precisamos conocer la dependencia entre v y q y entre f_{mec} y x .

En un campo eléctrico en el que q sea proporcional a v , es decir, en el que la permitividad o capacidad inductiva específica ϵ sea constante, v y q están relacionadas por la capacidad

$$C = \frac{q}{v} \quad (2-48)$$

y la energía del circuito, procedente de la ecuación 2-46, es:

$$W_{\text{camp}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (2-49)$$

y sustituyendo en ésta el valor de C de la 2-48:

$$W_{\text{camp}} = \frac{1}{2} vq \quad (2-50)$$

La analogía entre los casos de campos eléctricos y magnéticos se hace más evidente si expresamos la densidad de energía como función del gradiente de potencial \mathcal{E} y de la densidad de flujo del campo eléctrico $\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$:

$$W_{\text{camp}} = \int_0^{\mathcal{D}} \mathcal{E} d\mathcal{D} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{D}^2}{\epsilon} \quad (2-51)$$

Compárense las ecuaciones 2-49, 2-50 y 2-51 con las 2-19, 2-21 y 2-22.

c. Variables, coenergía

La energía del campo eléctrico es función de las variables independientes q y x . Por ejemplo: un condensador plano simple, en el que A sea la superficie de las armaduras, x su distancia y ϵ_0 la permitividad, tendrá una capacidad $C = \epsilon_0 A/x$, y aplicando la ecuación 2-49 tendremos la energía $W_{\text{camp}} = \frac{1}{2} q^2 x / \epsilon_0 A$, que evidentemente es función de q y de x . El haber elegido la energía como función de estado para describir el sistema tiene por consecuencia el que la fuerza f_{mec} resulte ser función de q y de x . Si el análisis del conjunto resultara más fácil considerando la fuerza como función de v y de x debería tomarse la coenergía como función de estado.

La coenergía $W'_{\text{camp}}(v, x)$ del sistema de campo eléctrico es $vq - W_{\text{camp}}(q, x)$, lo que teniendo en cuenta la ecuación 2-45a de la energía y desarrollando $d(vq)$, tendremos:

$$dW'_{\text{camp}}(v, x) = d(vq) - dW_{\text{camp}}(q, x) = q dv + f_{\text{mec}} dx \quad (2-52)$$

Puede calcularse la coenergía manteniendo fija la parte mecánica, o sea que $dx = 0$, y elevando hasta v la tensión de todo el sistema de tal forma que toda la coenergía proceda de los terminales eléctricos:

$$W'_{\text{camp}}(v, x) = \int_0^v q dv \quad (2-53)$$

En un sistema lineal en el que v es proporcional a q , ϵ es constante y la capacidad puede definirse como anteriormente. La fórmula de la coenergía del circuito es:

$$W'_{\text{camp}}(v, x) = \frac{1}{2} C v^2 \quad (2-54)$$

en la que C es función de x . La densidad de coenergía es:

$$W'_{\text{camp}} = \frac{1}{2} \epsilon \mathcal{E}^2 \quad (2-55)$$

d. Fuerza

Puede calcularse la fuerza ejercida por el campo eléctrico sobre la parte mecánica partiendo indistintamente de la energía o de la coenergía. La energía es función de q y de x ; su diferencial es:

$$dW_{\text{camp}}(q, x) = \frac{\partial W_{\text{camp}}}{\partial q} dq + \frac{\partial W_{\text{camp}}}{\partial x} dx \quad (2-56)$$

Los coeficientes de los términos de esta ecuación deben ser respectivamente iguales a los de los términos semejantes de la 2-45, deduciéndose de aquí las ecuaciones paramétricas de las tensiones y fuerzas

$$v = \frac{\partial W_{\text{camp}}(q, x)}{\partial q} \quad (2-57)$$

$$f_{\text{mec}} = f_{\text{camp}} = - \frac{\partial W_{\text{camp}}(q, x)}{\partial x} \quad (2-58)$$

La coenergía es función de v y de x ; su diferencial es:

$$dW'_{\text{camp}}(v, x) = \frac{\partial W'_{\text{camp}}}{\partial v} dv + \frac{\partial W'_{\text{camp}}}{\partial x} dx \quad (2-59)$$

Los coeficientes de los términos de esta última ecuación deben ser respectivamente iguales a los de los términos semejantes de la 2-52, deduciéndose de aquí las ecuaciones paramétricas de las cargas y fuerzas:

$$q = \frac{\partial W'_{\text{camp}}(v, x)}{\partial v} \quad (2-60)$$

$$f_{\text{mec}} = f_{\text{camp}} = + \frac{\partial W'_{\text{camp}}(v, x)}{\partial x} \quad (2-61)$$

Las ecuaciones 2-58 y 2-61 relativas a un sistema de campo eléctrico se corresponden con las 2-31 y 2-36 relativas a un sistema de campo magnético.

Ejemplo 2-3

Hállese la fuerza que se ejerce entre dos platos paralelos de área $A = 1 \text{ m}^2$ cada uno, entre los que existe un campo eléctrico al gradiente nominal de descarga disruptiva en el aire de 3×10^6 volt/metro. Empleése la energía y la coenergía.

SOLUCION

Utilizando el modelo de la Fig. 2-9, la distancia entre armaduras puede representarse por $(x_0 - x)$, y la capacidad es: $C = A\epsilon_0/(x_0 - x)$. La energía, dada por la ecuación 2-49, es:

$$W_{\text{camp}}(q, x) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{q^2 (x_0 - x)}{A\epsilon_0}$$

y la fuerza, según la 2-58:

$$f_{\text{camp}} = - \frac{\partial W_{\text{camp}}(q, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{A\epsilon_0}$$

Siendo $q = \mathcal{D}A = \mathcal{E}\epsilon_0 A$, la fuerza será:

$$f_{\text{camp}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 \epsilon_0 A = \frac{1}{2} (3 \times 10^6)^2 \left(\frac{1}{36\pi} \times 10^9 \right) (1) = \frac{1}{8\pi} \times 10^3 \text{ newtons}$$

La coenergía, según la fórmula 2-54, es:

$$W'_{\text{camp}}(v, x) = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} v^2 \frac{A\epsilon_0}{(x_0 - x)}$$

y la fuerza, según la 2-61:

$$f_{\text{camp}} = \frac{\partial W'_{\text{camp}}(v, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} v^2 \frac{A\epsilon_0}{(x_0 - x)^2}$$

Siendo la tensión $v = \mathcal{E}(x_0 - x)$, la fuerza será

$$f_{\text{camp}} = \frac{1}{2} \mathcal{E}^2 \epsilon_0 A = \frac{1}{2} (3 \times 10^6)^2 \left(\frac{1}{36\pi} \times 10^9 \right) (1) = \frac{1}{8\pi} \times 10^3 \text{ newtons}$$

Como no podía por menos de suceder, ambas funciones de estado dan el mismo resultado para la fuerza. Obsérvese que las variables eléctricas q y v figuran en forma explícita en las derivadas.

Resulta de interés comparar la fuerza que se crea en un metro cuadrado de superficie limitando un campo magnético con el valor hallado en el ejemplo. En éste se tomó como valor del campo eléctrico el gradiente correspondiente a la rigidez dieléctrica del aire: para el campo magnético se puede tomar un valor $\mathcal{B} = 1,6 \text{ wb/m}^2$ que corresponde a un nivel de saturación típico en los materiales ferromagnéticos. La energía total en un volumen de $A = 1 \text{ m}^2$ de superficie y $(x_0 - x)$ de espesor podemos deducirla de la ecuación 2-22,

$$W_{\text{camp}}(\mathcal{B}, x) = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{B}^2 A (x_0 - x)}{\mu_0}$$

y la fuerza de la 2-31:

$$\begin{aligned} f_{\text{camp}} &= - \frac{\partial W_{\text{camp}}(\mathcal{B}, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{B}^2 A}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(1,6)^2}{4\pi \times 10^{-7}} = \frac{0,32}{\pi} \times 10^7 \text{ newtons} \end{aligned}$$

La fuerza actuante sobre las superficies que limitan el campo es unas 25.000 veces mayor cuando éste es magnético que cuando es eléctrico al gradiente considerado. Este ejemplo explica por qué en la práctica los dispositivos de conversión de energía utilizan como medio de acoplamiento los campos magnéticos preferiblemente a los eléctricos.

Las fuerzas actúan sobre los distintos elementos en el sentido que tienda a aumentar la capacidad; por ejemplo, tienden a aproximar los electrodos entre sí y a desplazar el material dieléctrico hacia las zonas de mayor gradiente e introducirlo entre los electrodos.

2-6. SISTEMAS DE CAMPO MAGNETICO CON EXCITACION MULTIPLE

Los dispositivos con excitación simple se emplean generalmente para engendrar fuerzas no precisadas, como en los relés, solenoides o productores de fuerza en general. Si se precisa que las fuerzas sean proporcionales a una señal eléctrica o que la señal lo sea a una fuerza o a una velocidad, deberán emplearse aparatos dotados de dos o más circuitos para la excitación o para el intercambio de energía. Frecuentemente se utilizan imanes permanentes para uno de los circuitos de excitación. En general, en la mayor parte de aparatos, uno de los circuitos sirve para fijar el valor del campo eléctrico o magnético mientras que el otro recibe las señales: como ejemplo se pueden citar los altavoces, medidores de par, pickups y tacómetros. Todos los tipos de motores y generadores conocidos, salvo raras excepciones, constituyen otros tantos ejemplos de mecanismos de conversión continua de energía.

En la Fig. 2-10 está representado un dispositivo sencillo con dos conexiones eléctricas y una mecánica. Para definir el sistema se requieren tres variables independientes que pue-

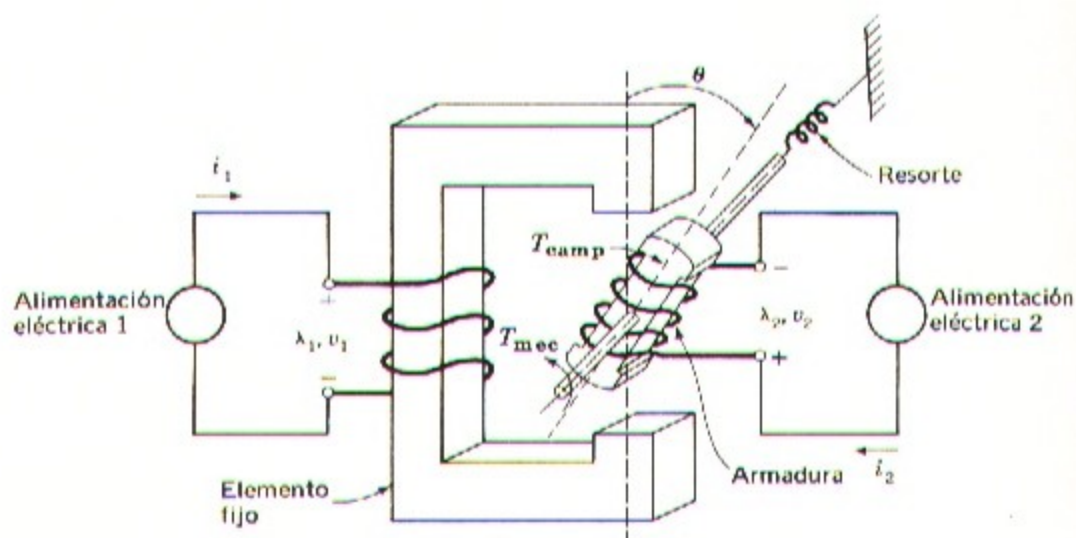


Fig. 2-10. Sistema magnético elemental con excitación múltiple.

den ser: los flujos concatenados λ_1 , λ_2 y el ángulo θ , o las intensidades i_1 , i_2 y dicho ángulo θ^1 . Si se emplean los flujos concatenados, las ecuaciones paramétricas son una extensión de las 2-30 y 2-31.

$$i_1 = \frac{\partial W_{\text{camp}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_1} \quad (2-62)$$

$$i_2 = \frac{\partial W_{\text{camp}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_2} \quad (2-63)$$

$$T_{\text{camp}} = - \frac{\partial W_{\text{camp}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta} \quad (2-64)$$

en las que la energía viene dada por:

$$W_{\text{camp}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \int_0^{\lambda_1} i_1 d\lambda_1 + \int_0^{\lambda_2} i_2 d\lambda_2 \quad (2-65)$$

y el sistema se mantiene fijo en la posición θ .

En un sistema lineal, la relación entre λ e i se expresa en función de las inductancias

$$\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 \quad (2-66a)$$

$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \quad (2-66b)$$

¹ Véase, por ejemplo: H. H. Woodson and J. R. Melcher, "Electromechanical Dynamics", Parte I, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1968, Cap. 3.

Resolviendo i_1 e i_2 en estas ecuaciones, sustituyendo en 2-65, e integrando, resulta:

$$W_{\text{camp}}(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{1}{2}\Gamma_{11}\lambda_1^2 + \Gamma_{12}\lambda_1\lambda_2 + \frac{1}{2}\Gamma_{22}\lambda_2^2 \quad (2-66c)$$

en las que

$$\Gamma_{11} = L_{22}/D$$

$$\Gamma_{22} = L_{11}/D$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = -L_{12}/D$$

$$D = L_{11}L_{22} - L_{12}^2$$

que son generalmente funciones de θ .

Si se utilizan las intensidades para definir el estado de un sistema, las ecuaciones paramétricas son extensiones de las 2-35 y 2-36.

$$\lambda_1 = \frac{\partial W'_{\text{camp}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_1} \quad (2-67)$$

$$\lambda_2 = \frac{\partial W'_{\text{camp}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_2} \quad (2-68)$$

$$T_{\text{camp}} = \frac{\partial W'_{\text{camp}}(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} \quad (2-69)$$

en las que la coenergía viene dada por:

$$W_{\text{camp}}(i_1, i_2, \theta) = \int_0^{i_1} \lambda_1 di_1 + \int_0^{i_2} \lambda_2 di_2 \quad (2-70)$$

manteniéndose el sistema fijo en θ .

Combinando las ecuaciones 2-66a y 2-66b con la 2-70 para un sistema lineal tendremos:

$$W_{\text{camp}}(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + L_{12}i_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 \quad (2-71)$$

en la que las inductancias generalmente son funciones de θ .

Para los sistemas con más de dos pares de terminales eléctricos se asignan variables independientes adicionales a dichos terminales y se procede en idéntica forma que cuando eran sólo dos.

Ejemplo 2-4

En el sistema representado en la Fig. 2-10, las inductancias en Henry son: $L_{11} = (3 + \cos 2\theta) \times 10^{-3}$; $L_{12} = 0,1 \cos \theta$; $L_{22} = 30 + 10 \cos 2\theta$. Hállese el par $T_{\text{camp}}(\theta)$ cuando las intensidades son: $i_1 = 1$ A; $i_2 = 0,01$ A.

SOLUCION

Puesto que el par puede expresarse mejor como función de las intensidades i_1 e i_2 que por flujos concatenados, utilizaremos la coenergía como función de estado del sistema. Siendo conocidas las inductancias, la coenergía viene dada por la ecuación 2-71, es decir:

$$W'_{\text{camp}} = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + L_{12}i_1i_2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2$$

y el par por la 2-69:

$$T_{\text{camp}} = + \frac{\partial W'_{\text{camp}}}{\partial \theta} = -1 \times 10^{-3} i_1^2 \text{ sen } 2\theta - 0,1 i_1 i_2 \text{ sen } \theta - 10 i_2^2 \text{ sen } 2\theta$$

con intensidades $i_1 = 1$ A e $i_2 = 0,01$ A, el par será:

$$T_{\text{camp}} = -2 \times 10^{-3} \text{ sen } 2\theta - 10^{-3} \text{ sen } \theta \text{ Nw-m.}$$

El par puede representarse con el diagrama de la Fig. 2-11. El primer término, dependiente de $-\text{sen } 2\theta$, se denomina par de reluctancia, que actúa tendiendo a alinear la

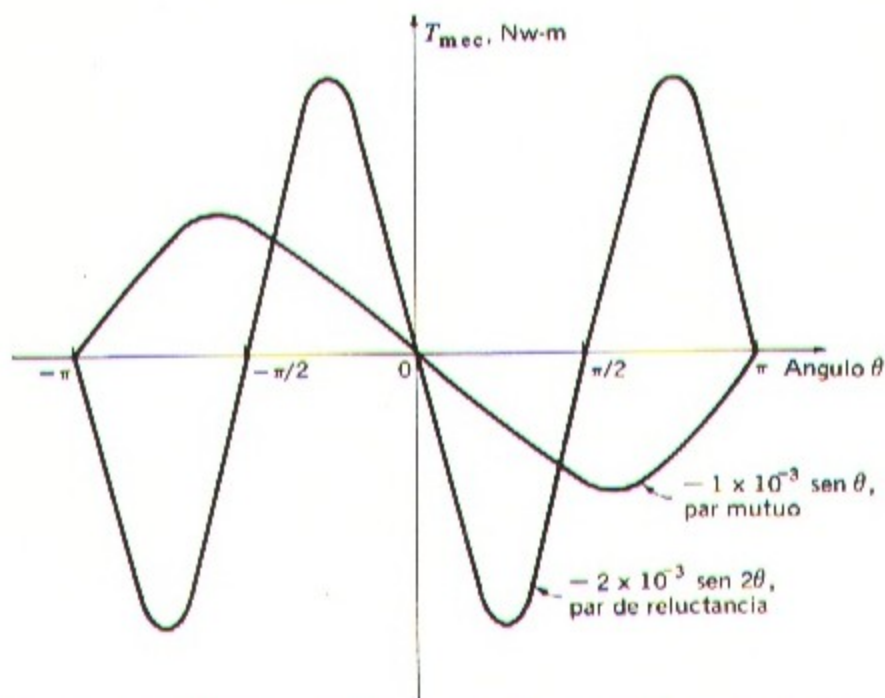


Fig. 2-11. Gráfica de las componentes del par en un dispositivo con excitación múltiple.

armadura con el equipo fijo aumentando con ello las inductancias $L_{11}(\theta)$ y $L_{22}(\theta)$, y el hecho de depender de 2θ determina que tal tendencia de alineación es independiente de la polaridad. El segundo término, dependiente de $-\sin \theta$, es el par que tiende a aumentar la inductancia mutua $L_{12}(\theta)$ y éste sí está influenciado por la polaridad.

Si L_{11} y L_{22} son independientes de θ , desaparece el par de reluctancia, restando únicamente la influencia de L_{12} para la producción del par resultante. El signo negativo indica que el par actúa en sentido antagónico.

2-7. ECUACIONES DINAMICAS

Hasta ahora hemos deducido unas fórmulas que expresan las fuerzas creadas en un sistema de conversión electromecánica de energía en función de ciertas variables eléctricas y de los desplazamientos mecánicos; estas fórmulas se refieren a un sistema conservador, ya que todas las pérdidas se atribuyeron a los sistemas eléctrico y mecánico de entrada o salida. Pero los dispositivos de conversión actúan siempre como medio de acoplamiento entre un sistema eléctrico y otro mecánico, por lo que es de interés conocer no tan sólo cómo actúa en sí mismo el convertidor, sino cómo actúa el sistema electromecánico completo, con el dispositivo de conversión incluido.

En la Fig. 2-12 se representa esquemáticamente un sistema sencillo de conversión con sus elementos básicos, cuyos detalles pueden variar de uno a otro dispositivo. El sistema representado consta de tres partes: el equipo eléctrico exterior, el convertidor de energía y el equipo mecánico exterior. El equipo eléctrico está representado simplemente por una fuente de tensión v_0 y resistencia R , aunque también podría representarse por un generador de intensidad y una conductancia G en paralelo, siendo la ecuación correspondiente a esta parte eléctrica:

$$v_0 = iR + \frac{d\lambda}{dt} \quad (2-72)$$

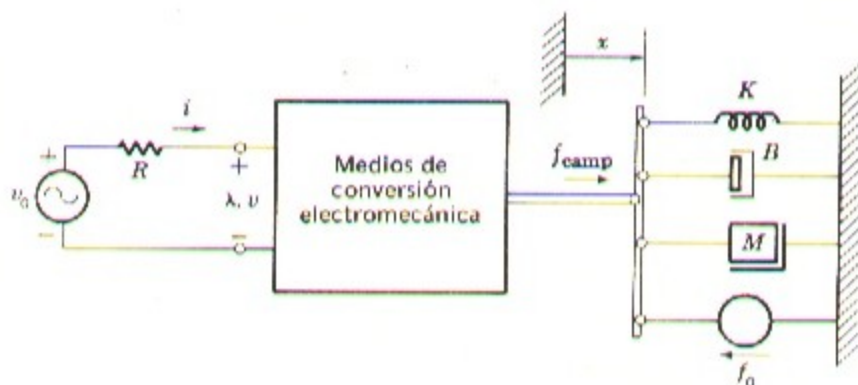


Fig. 2-12. Modelo de sistema electromecánico con excitación simple.

Si el flujo concatenado λ puede expresarse como $\lambda = L(x)i$, la ecuación se convierte en

$$v_0 = iR + L(x)\frac{di}{dt} + i\frac{dL(x)}{dx}\frac{dx}{dt} \quad (2-73)$$

El término $L di/dt$ corresponde a la tensión debida a la autoinducción, y el $i(dL/dx)(dx/dt)$ a la debida a la velocidad, siendo este último el que motiva la transferencia de energía entre el sistema eléctrico exterior y el dispositivo de conversión. En un sistema con excitación múltiple deben escribirse para cada par de entrada las ecuaciones correspondientes a la 2-72, y si las λ deben desarrollarse en función de las inductancias como en la ecuación 2-73, se requerirán los términos correspondientes a las autoinducciones y a las inducciones mutuas.

La citada Fig. 2-12 muestra en la parte mecánica un resorte K , un amortiguador B y una masa M . Cada uno de estos elementos relaciona la fuerza, el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la siguiente forma:

$$f_K = K(x - x_0) \quad (2-74)$$

$$f_B = B\frac{dx}{dt} \quad (2-75)$$

$$f_M = M\frac{d^2x}{dt^2} \quad (2-76)$$

siendo x_0 el valor de x cuando el resorte no está solicitado y la fuerza mecánica aplicada f_0 es nula.

La ecuación de equilibrio de fuerzas referida al equipo mecánico es:

$$f_{\text{camp}} = f_K + f_B + f_M + f_0 \quad (2-77)$$

$$f_{\text{camp}} = K(x - x_0) + B\frac{dx}{dt} + M\frac{d^2x}{dt^2} + f_0 \quad (2-78)$$

La fuerza f_{camp} de origen eléctrico se calcula por las derivadas de la energía o de la coenergía del medio convertidor como ya se ha visto anteriormente.

Las ecuaciones diferenciales para el sistema completo de la Fig. 2-12, siendo arbitrarias las alimentaciones de entrada $v_0(t)$ y $f_0(t)$, son:

$$v_0(t) = iR + L(x)\frac{di}{dt} + i\frac{dL(x)}{dx}\frac{dx}{dt} \quad (2-79)$$

$$-f_0(t) = M\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + K(x - x_0) - f_{\text{camp}}(x, i) \quad (2-80)$$

Las funciones $L(x)$ y $f_{\text{camp}}(x,i)$ dependen de la forma de estar construido el equipo de conversión.

Ejemplo 2-5

La Fig. 2-13 representa en sección un electroimán, en el que el núcleo cilíndrico de masa M puede desplazarse verticalmente guiado por unos casquillos de bronce de grueso t y diámetro medio d . La permeabilidad del bronce, igual a la del espacio ambiente, es $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ unidades MKS.

El núcleo cilíndrico está suspendido de un resorte de elasticidad K Nw/m, y longitud l_0 cuando está libre, y en dicho núcleo actúa una fuerza f_T procedente del equipo mecánico

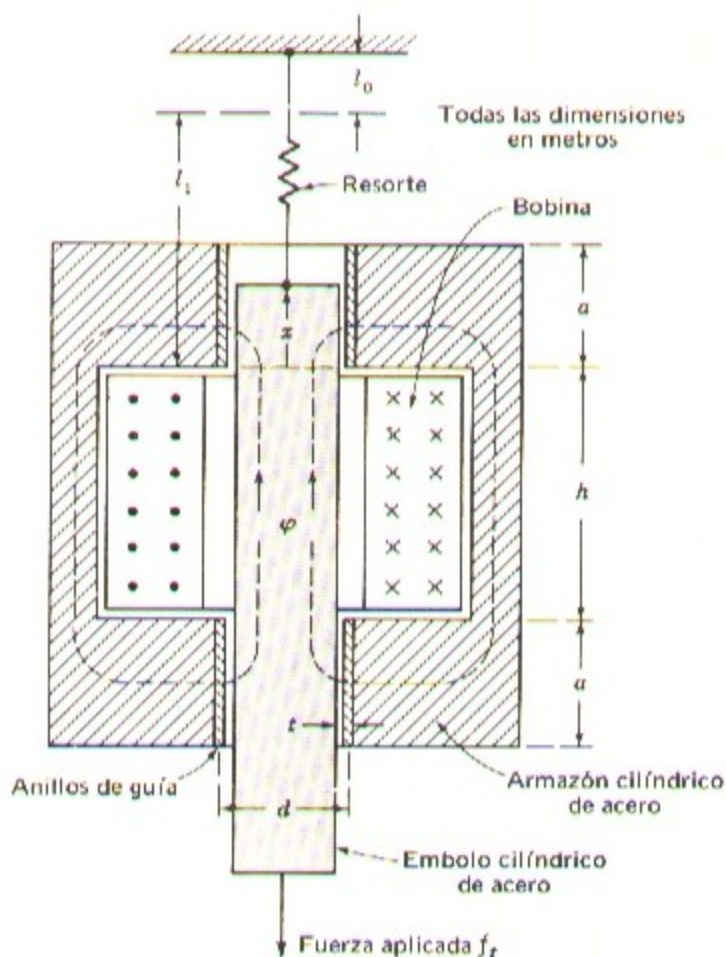


Fig. 2-13. Electroimán del ejemplo 2-5.

a él conectado, tal como se indica en la citada figura. Admitamos que la fuerza de rozamiento es linealmente proporcional a la velocidad, y que el coeficiente de rozamiento es de B Nw-seg/m. El devanado tiene N espiras y R ohm de resistencia; la tensión e intensidad en sus terminales es de v_t e i respectivamente. Se desprecian los efectos de la dispersión y de la reluctancia del acero.

Dedúzcanse las ecuaciones dinámicas correspondientes al movimiento del sistema electromecánico, es decir, las ecuaciones diferenciales que expresen las variables dependientes i y x en función de v_t , f_t y de las constantes y dimensiones dadas.

SOLUCION

Expresemos la inductancia como una función de x . Entonces se podrán expresar los términos del acoplamiento, es decir, la fuerza magnética f_{comp} y la f.e.m. inducida e en función de x e i , sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones de los sistemas mecánico y eléctrico.

La reluctancia del circuito magnético es la de los dos casquillos de guía en serie, con el flujo en sentido radial a ellos, como se ve en la línea punteada φ de la figura. Puesto que t es muy pequeño frente a d la densidad de flujo en los casquillos es prácticamente uniforme cualquiera que sea la distancia radial: en una zona en la que la densidad de flujo es uniforme, la reluctancia es:

$$\frac{\text{Longitud del recorrido del flujo en la dirección del campo}}{\mu(\text{área perpendicular al campo})}$$

La reluctancia del casquillo superior es:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{\mu_0 \pi dx}$$

suponiendo que el campo está concentrado en la zona comprendida entre el borde superior del núcleo y el borde inferior del casquillo.

De forma análoga, la reluctancia del casquillo inferior es:

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{\mu_0 \pi da}$$

y la reluctancia total

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 = \frac{t}{\mu_0 \pi d} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{x} \right) = \frac{t}{\mu_0 \pi da} \frac{a+x}{x}$$

La permeancia es:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}} = \frac{\mu_0 \pi da}{t} \frac{x}{a+x}$$

y por consiguiente, la inductancia será:

$$L = N^2 \Phi = \frac{\mu_0 \pi daN^2}{t} \frac{x}{a+x} = L' \frac{x}{a+x} \quad (2-81)$$

siendo:

$$L' = \frac{\mu_0 \pi daN^2}{t} \quad (2-82)$$

La fuerza magnética que levanta el núcleo actuando en el sentido positivo de x es:

$$f_{\text{camp}} = \frac{+\partial W'_{\text{camp}}(i,x)}{\partial x} = +\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = +\frac{1}{2} L' \frac{ai^2}{(a+x)^2} \quad (2-83)$$

La fuerza contraelectromotriz inducida en el devanado es:

$$e = \frac{d}{dt}(Li) = L \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (2-84)$$

$$e = L' \frac{x}{a+x} \frac{di}{dt} + L' \frac{ai}{(a+x)^2} \frac{dx}{dt} \quad (2-85)$$

Sustituyendo la fuerza magnética en la ecuación diferencial del movimiento del equipo mecánico tendremos:

$$-f_t + \frac{1}{2} L' \frac{ai^2}{(a+x)^2} = M \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} - K(l_1 - x) + Mg \quad (2-86)$$

y la ecuación de tensión del sistema eléctrico será:

$$v_r = Ri + e = Ri + L' \frac{x}{a+x} \frac{di}{dt} + L' \frac{ai}{(a+x)^2} \frac{dx}{dt} \quad (2-87)$$

Las ecuaciones 2-86 y 2-87 son las soluciones pedidas, que son válidas únicamente mientras el borde superior del núcleo queda comprendido entre los dos bordes de su casquillo, es decir, mientras $0,1 a < x < 0,9 a$, que es el campo de trabajo normal de un solenoide.

2-8. TECNICAS ANALITICAS

En este capítulo se han descrito dispositivos relativamente sencillos, con uno o dos pares de terminales eléctricos y uno mecánico con movimiento en general limitado: en los

capítulos siguientes se estudiarán dispositivos más complicados que permiten la conversión de energía en forma continua. Las técnicas analíticas que aquí veremos son aplicables a los sistemas sencillos, pero los principios en que se basan son igualmente válidos para los más complicados.

a. Objeto del análisis

Alguno de los dispositivos descritos hasta ahora, tales como los relés y electroimanes que funcionan esencialmente en condiciones de "todo" o "nada", tienen movimientos relativamente amplios, y su análisis tiene por objeto determinar las fuerzas en función de los desplazamientos y la reacción en la fuente de energía: en el presente capítulo se han estudiado ya los cálculos en este sentido. Si es necesario que intervengan ciertos detalles del movimiento, tales como el valor de los desplazamientos en función del tiempo a partir del momento en que se comunica energía al sistema, será preciso resolver las ecuaciones diferenciales no lineales de la forma de las 2-79 y 2-80.

Contrariamente a los anteriores, otros dispositivos tales como los altavoces, pickups y transductores de diversos tipos que convierten una señal eléctrica en mecánica y viceversa, trabajan con movimientos muy limitados. En ellos se consigue que la relación entre las variables eléctricas y mecánicas sea prácticamente lineal proyectando adecuadamente el dispositivo o limitando su campo de aplicación a la zona en que realmente lo sea. En cualquier caso, las ecuaciones diferenciales son lineales pudiéndose resolver para la respuesta transitoria, la de frecuencia, o el circuito equivalente según los casos.

b. Movimiento amplio

Las ecuaciones diferenciales de un dispositivo con excitación simple deducidas en el ejemplo 2-5 tienen la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}L' \frac{ai^2}{(a+x)^2} = M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + K(x-l_1) + f_t \quad (2-88)$$

$$v = iR + L' \frac{x}{a+x} \frac{di}{dt} + \frac{L'ai}{(a+x)^2} \frac{dx}{dt} \quad (2-89)$$

Un problema típico que se resuelve con estas ecuaciones es el de determinar el desplazamiento $x(t)$ cuando se aplica una tensión $v = V$ en el momento $t = 0$. Corrientemente se trata de hallar el tiempo que necesita la armadura para desplazarse desde su posición inicial $x(0)$ en el momento $t = 0$ a otra posición dada $x = X$ cuando se aplica una tensión $v = V$ en el momento $t = 0$. No existe una solución general para estas ecuaciones diferenciales, en las que están implicados productos de las variables x e i y sus derivadas, y que son no lineales; pueden resolverse por técnicas numéricas o con computadores digitales. Puede prepararse un programa para la resolución o tener ya un programa tipo preparado e introducir en él los coeficientes correspondientes al problema particular planteado.

En muchos casos pueden simplificarse los problemas relativos a movimientos amplios resolviéndolos por métodos relativamente sencillos. Por ejemplo, si el devanado está co-

nectado a la fuente de tensión a través de una resistencia elevada, el término iR es predominante en el segundo miembro en la ecuación 2-89 comparado con los términos en que interviene di/dt y $d\phi/dt$; puede así considerarse que $i = V/R$ e introducir este valor directamente en la 2-88; idéntica suposición puede hacerse si el devanado está alimentado por un transistor que actúa como una fuente de intensidad.

La citada suposición de que $i = V/R$ permite resolver fácilmente dos casos: el primero de ellos cuando el movimiento mecánico del dispositivo está influenciado más bien por la acción de amortiguadores que por la inercia, como sucede en los relés provistos de frenos o amortiguadores que retrasan el movimiento, o en dispositivos con poca inercia: en estos casos, la ecuación diferencial 2-88 queda reducida a:

$$f(x) = \frac{1}{2} L \cdot \frac{a}{(a+x)^2} \left(\frac{V}{R} \right)^2 - K(x - l_1) = B \frac{dx}{dt} \quad (2-90)$$

El primer miembro, $f(x)$, es la diferencia existente entre la fuerza de origen eléctrico y la del resorte del dispositivo de la Fig. 2-13. La velocidad para cualquier valor de x es sencillamente $dx/dt = f(x)/B$, y el tiempo t necesario para alcanzar la posición $x = X$ viene dado por:

$$t = \int_0^X \frac{B}{f(x)} dx \quad (2-91)$$

puediéndose resolver esta ecuación por vía analítica o gráficamente.

El segundo caso que puede resolverse fácilmente es cuando el movimiento mecánico está influenciado por la inercia más bien que por otras causas, que es lo que sucede en general cuando no existen amortiguadores o frenos. En estos casos, la ecuación 2-88 se reduce a:

$$f(x) = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2-92)$$

La aceleración para cualquier valor de x es $d^2x/dt^2 = f(x)/M$, y la velocidad $v(x)$ también para cualquier valor de x viene dada por:

$$f(x) = \frac{M}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (2-93)$$

$$v(x) = \frac{dx}{dt} = \left[\frac{2}{M} \int_0^X f(x) dx \right]^{1/2} \quad (2-94)$$

Esta última puede resolverse analítica o gráficamente para hallar tanto $v(x)$ como el valor del tiempo t necesario para alcanzar una determinada posición x .

c. Linealización

Los dispositivos definidos por ecuaciones diferenciales no lineales tales como las 2-88 y 2-89, darán respuestas no lineales a las señales de entrada cuando se utilicen como transductores. Para obtener con ellos un funcionamiento lineal deben limitarse las desviaciones de los desplazamientos y de los valores eléctricos alrededor de una posición central de equilibrio, posición que viene determinada ya sea por la f.m.m. creada por una corriente o por un imán permanente actuando sobre un muelle antagonista, ya sea mediante un par de devanados creando sendas f.m.m. cuyas fuerzas se equilibran en dicha posición. El equilibrio debe ser estable, es decir, que la armadura debe regresar espontáneamente a su posición primitiva después de haberla desviado ligeramente de ella.

La condición de equilibrio se determina por medio de las ecuaciones 2-88 y 2-89 igualando a cero las derivadas respecto al tiempo; así tendremos:

$$\frac{1}{2} L' \frac{aI_0^2}{(a + X_0)^2} = K(X_0 - l_1) + f_{t0} \quad (2-95)$$

$$V_0 = I_0 R \quad (2-96)$$

en las que $i = I_0$, y $x = X_0$ cuando existe el equilibrio. Puede expresarse la situación fuera de la posición de equilibrio haciendo $i = I_0 + i_1$ y $x = X_0 + x_1$ y prescindiendo de los productos de segundo orden de los incrementos.

De las ecuaciones 2-88 y 2-89 tendremos:

$$\frac{1}{2} \frac{L'a(I_0 + i_1)^2}{(a + X_0 + x_1)^2} = M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B \frac{dx_1}{dt} + K(X_0 + x_1 - l_1) + f_{t0} + f_1 \quad (2-97)$$

$$V_0 + v_1 = (I_0 + i_1)R + \frac{L'(X_0 + x_1)}{a + X_0 + x_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{L'a(I_0 + i_1)}{(a + X_0 + x_1)^2} \frac{dx_1}{dt} \quad (2-98)$$

desarrollando y suprimiendo los términos de las condiciones de equilibrio que se anulan entre sí, quedarán unas ecuaciones diferenciales lineales en función de los incrementos de primer orden de las variables:

$$\frac{L'aI_0 i_1}{(a + X_0)^2} = M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B \frac{dx_1}{dt} + K' x_1 + f_1 \quad (2-99)$$

$$v_1 = i_1 R + \frac{L'(X_0)}{a + X_0} \frac{di_1}{dt} + \frac{L'aI_0}{(a + X_0)^2} \frac{dx_1}{dt} \quad (2-100)$$

La constante K' representa el efecto de las fuerzas debidas al muelle y a la componente del campo magnético proporcionales a x_1 . Pueden escribirse estas ecuaciones en forma

más compacta expresándolas en función de la autoinducción L_0 en la posición de equilibrio y del coeficiente de conversión de energía K_0 .

$$K_0 i_1 = M \frac{d^2 x_1}{dt^2} + B \frac{dx_1}{dt} + K' x_1 + f_1 \quad (2-101)$$

$$v_1 = i_1 R + L_0 \frac{di_1}{dt} + K_0 \frac{dx_1}{dt} \quad (2-102)$$

d. Funciones de transferencia y esquemas de conjunto

El estudio de sistemas valiéndose de sus ecuaciones es bastante engorroso y confuso, salvo que las que intervengan sean muy pocas y relativamente sencillas: en caso contrario, es útil representar el sistema mediante un diagrama de bloques o una gráfica de señales-respuesta. Estas técnicas son corrientes en el estudio analítico de las características de sistemas, tales como estabilidad, precisión y frecuencia de respuesta, y han sido altamente desarrolladas para el estudio de sistemas de control. La programación para la resolución de problemas con un computador analógico está íntimamente relacionada con las técnicas analíticas basadas en los diagramas de bloques.

El diagrama de bloques es una forma gráfica de representar las ecuaciones de un sistema: cada etapa representa una operación matemática, estando las distintas etapas interconectadas entre sí de acuerdo con las exigencias del sistema. Trazando el diagrama se hace innecesario resolver ecuaciones simultáneas, y aquél de por sí ya indica el camino a seguir al combinar dichas ecuaciones simultáneas. Además pueden conseguirse de él valiosas informaciones sin necesidad de llegar a una solución analítica completa.

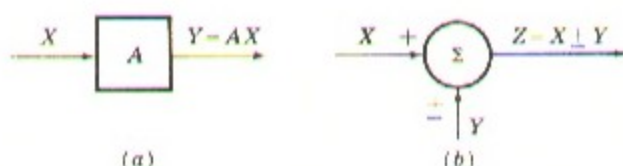


Fig. 2-14. Símbolos de un diagrama de bloques.

En la Fig. 2-14 se indican los símbolos empleados en los diagramas correspondientes a sistemas lineales. En la Fig. 2-14 a, X es una variable de *entrada* e Y una de *salida*. Pueden ser funciones del tiempo o funciones de amplitud y frecuencia. El operador A es la función de transferencia representando la operación matemática para hallar Y a partir de X . Si X e Y son funciones del tiempo, A es un operador diferencial $A(p)$ siendo p el operador d/dt . Si X e Y son magnitudes complejas, A es un operador, $A(s)$, donde s es la frecuencia compleja $s = \delta + j\omega$. Para régimen senoidal permanente, las variables senoidales X e Y son fasores y $s = j\omega$. Los signos de la Fig. 2-14 b representan adición o sustracción.

Ejemplo 2-6

Dibújese el diagrama de bloques, en el dominio de la frecuencia compleja, para el circuito de la Fig. 2-15, siendo $e_1(t)$ la entrada y $e_2(t)$ la salida.

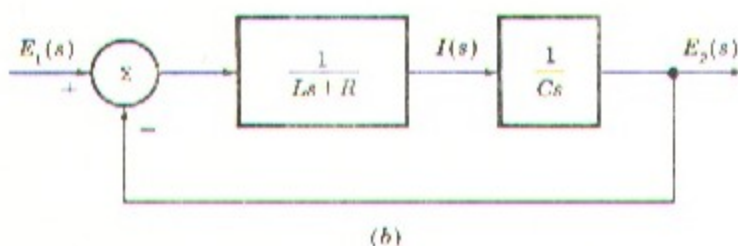
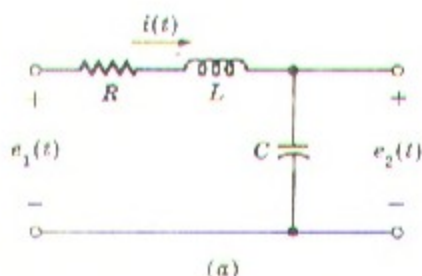


Fig. 2-15. (a) Diagrama del circuito, y (b) diagrama de bloques de la función de transferencia, correspondiente al ejemplo 2-6.

SOLUCION

Las ecuaciones diferenciales pueden escribirse en la forma:

$$e_1(t) - e_2(t) = Lpi + Ri; \quad e_2(t) = \frac{1}{Cp} i$$

que transformadas al dominio de s y ordenadas se convierten en:

$$\frac{E_1(s) - E_2(s)}{Ls + R} = I(s) \quad E_2(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

La Fig. 2-15 b representa el diagrama de bloques.

En un sistema lineal puede hallarse la respuesta variable de salida correspondiente a cada una de las entradas considerando que todas las demás son nulas. La respuesta total

correspondiente a varias entradas puede conocerse por superposición. Las distintas etapas pueden combinarse por medio de unas sencillas reglas, de las que la Fig. 2-16 representa dos de ellas. Por ejemplo, en la Fig. 2-16 b,

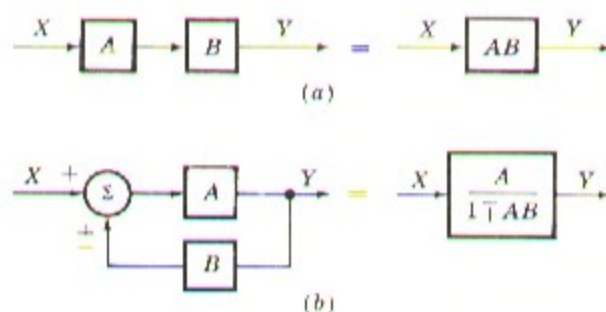


Fig. 2-16. Operaciones algebraicas básicas en un diagrama de bloques.

$$Y = A(X \pm BY) \quad \text{o bien,} \quad Y = \frac{A}{1 \mp AB} X \quad (2-103)$$

2-9. RESUMEN

Los campos magnéticos y electrostáticos constituyen el asiento de la energía almacenada. Cuando la energía del campo está influenciada por la configuración de los elementos mecánicos que lo limitan, nacerán fuerzas mecánicas tendiendo a mover dichos elementos de tal forma que haya una transmisión de energía desde el campo hacia el sistema mecánico.

Los sistemas magnéticos con excitación simple se han visto en el apartado 2-2. Si las pérdidas eléctricas y mecánicas se separan del mecanismo de conversión electromecánica y se atribuyen a los sistemas eléctrico y mecánico exteriores, podrá considerarse el dispositivo de conversión como un sistema conservador. Su energía es una función de estado que queda definida por sus variables independientes λ y x y puede expresarse en función de los datos del campo, del circuito eléctrico o del circuito magnético.

En el apartado 2-4 se ha ampliado el concepto de función de estado para introducir la coenergía como función de i y de x . Las fuerzas originadas por el campo y que actúan sobre las partes móviles se han deducido como derivadas parciales de la energía o coenergía expresadas con las variables independientes adecuadas. Las fuerzas actúan siempre en el sentido que tiende a aumentar la autoinductancia del sistema, y su valor es independiente del método de análisis seguido. La energía o coenergía puede introducirse en el sistema ya sea a través de los terminales eléctricos o a través del equipo mecánico, dependiendo de las condiciones impuestas a las variables.

En el apartado 2-5 se han deducido las fórmulas correspondientes a las fuerzas originadas por un campo eléctrico, utilizando las variables q y v . Se han empleado las funciones

de estado de energía y de coenergía, expresadas en función del campo y del circuito. En el ejemplo 2-3 se demuestra que la fuerza creada por un campo magnético con densidad de flujo correspondiente a la saturación de los materiales magnéticos excede ampliamente a la creada por un campo eléctrico con gradiente correspondiente a la rigidez dieléctrica del aire; la fuerza actúa en el sentido de aumentar la capacidad del sistema, ya sea moviendo las superficies metálicas o el dieléctrico.

Todas las máquinas rotativas y los transductores que trabajan con señales están provistos de devanados o excitaciones múltiples. El análisis de estos sistemas de campos magnéticos valiéndose de la energía o de la coenergía se ha estudiado en el apartado 2-6 introduciendo el empleo de la autoinducción y de la inducción mutua para expresar la función de estado.

Los dispositivos de conversión de energía operan como intermediarios entre un sistema eléctrico y otro mecánico; su funcionamiento queda descrito en el apartado 2-7 por medio de las ecuaciones diferenciales que incluyen los términos del acoplamiento entre ambos sistemas. Las ecuaciones son generalmente no lineales, pudiéndose resolver con el auxilio de computadores o por procedimientos matemáticos si es necesario. Normalmente la solución deseada se refiere a unas ciertas condiciones dadas, pudiéndose operar en la forma vista en el apartado 2-8; la condición más corriente es la de que las señales sean de pequeña amplitud con lo que las ecuaciones correspondientes resultan ser lineales.

En este capítulo se ha tratado de los principios básicos aplicables al proceso de conversión electromecánica de la energía, con especial atención al acoplamiento por campos magnéticos. Las máquinas rotativas y los transductores de movimiento lineal trabajan básicamente de igual forma. Lo que resta de este texto está dedicado casi por completo a la conversión electromecánica de energía mediante máquinas rotativas, en sus dos aspectos de las características dinámicas de las máquinas como componentes que son del sistema, y su funcionamiento en régimen permanente. Las máquinas rotativas no son más que un conjunto relativamente complicado de circuitos eléctricos y magnéticos, que varían según los distintos tipos de máquinas; en éstas, los elementos del acoplamiento —par y tensión inducida— pueden determinarse valiéndose de los principios expuestos en este capítulo.

PROBLEMAS

2.1. La figura 2-17 representa un electroimán. Despréciense el efecto de bordes y la dispersión de flujo, y admítase que toda la reluctancia del circuito reside en el entrehierro g comprendido entre el pistón móvil y el núcleo central. El devanado tiene una inductancia de 1,00 H cuando $g = 1,00$ cm.

Si se excita el devanado con una intensidad constante de 1,00 A, calcúlese:

- La energía en joule almacenada en el campo magnético cuando $g = 1$ cm.
- La fuerza magnética f en newton que actúa sobre el pistón cuando $g = 1$ cm.
- La fuerza f cuando $g = 0,5$ cm.
- El trabajo mecánico en joule desarrollado por la fuerza f cuando el pistón puede moverse lentamente desde $g = 1$ cm hasta $g = 0,5$ cm.

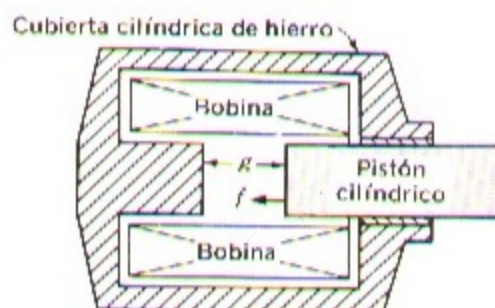


Fig. 2-17. Electroimán con núcleo cilíndrico móvil del problema 2-1.

2-2. El electroimán cilíndrico de la Fig. 2-18 se emplea para accionar interruptores, maniobrar válvulas u otras aplicaciones en las que sea necesario aplicar una fuerza relativamente grande sobre un elemento que sufra un desplazamiento relativamente pequeño.

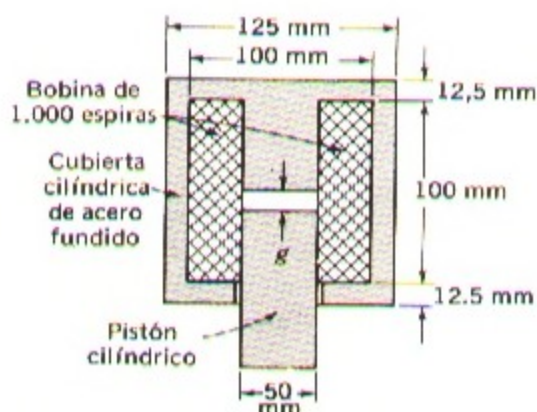


Fig. 2-18. Electroimán con núcleo cilíndrico móvil.

Cuando la intensidad en la bobina es nula, el núcleo móvil se apoya en un tope dejando un entrehierro $g = 12$ mm. Excitando la bobina con una corriente continua de suficiente intensidad, el núcleo se eleva hasta otro tope existente, quedando el entrehierro $g = 2,5$ mm. Dicho núcleo móvil puede desplazarse libremente en sentido vertical. El espacio o entrehierro entre el pistón y la carcasa es de 0,2 mm. Despréciense la dispersión de flujo y el efecto de bordes en los entrehierros, así como la f.m.m. en el hierro. El devanado tiene 1000 espiras y está excitado con una intensidad continua de 3 A.

- Calcúlense las densidades de flujo en Wb/m^2 entre el pistón y el núcleo central cuando g adquiere los valores de 2,5, 5,0 y 12 mm.
- Calcúlense los valores en W/seg de la energía almacenada en el campo magnético en cada uno de los casos anteriores.
- Calcúlense en henry los valores correspondientes de la inductancia del devanado.

2-3. En la siguiente tabla se dan los datos relativos a la curva de magnetización del hierro del circuito magnético del dispositivo del problema 2-2:

Flujo $\text{Wb/m}^2 \times 10^{-3}$	1	1,5	2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,75
F.m.m. amper-vueltas	60	95	150	250	305	425	600	725

Trácese las curvas de magnetización del circuito magnético completo (flujo en Wb /f.m.m. total en amper-vueltas) en las siguientes condiciones:

- Entrehierro $g = 12$ mm.
- Entrehierro $g = 2,5$ mm.
- A partir de estas curvas hállese gráficamente la energía y la coenergía del campo magnético, con los entrehierros a y b siendo de 3 A la intensidad en el devanado.

2-4. La constante de tiempo L/r del devanado de excitación de un generador de corriente continua de 10 kW, 1150 r.p.m., excitación derivación es de 0,15 seg. En condiciones normales de trabajo las pérdidas $i^2 r$ en su devanado de excitación son de 350 W. Calcúlense en W/seg a energía almacenada en el campo magnético cuando trabaja en dichas condiciones.

2-5. En el dispositivo de la Fig. 2-18, el entrehierro entre la carcasa y el núcleo móvil se considera uniforme e igual a 0,2 mm de espesor. El devanado tiene 1000 espiras y circula por él una intensidad constante de 3 A. Despréciese la dispersión de flujo y el efecto de bordes.

- Si el núcleo móvil puede desplazarse lentamente reduciendo el entrehierro g desde 12 a 2,5 mm, ¿cuál será el trabajo mecánico, en joule, desarrollado?
- En las condiciones señaladas en a , ¿cuál será la energía suministrada por el sistema eléctrico? (en exceso sobre las pérdidas por calentamiento en la bobina).

2-6. Hállese para el dispositivo del problema 2-5 una fórmula que dé en newton la fuerza magnética f que actúa sobre el pistón, en función del entrehierro g en metros, siendo de 3 A la intensidad constante que circula por la bobina. Trácese la curva de f como función de g . A partir del área limitada por esta curva de fuerza-desplazamiento,

calcúlese el trabajo mecánico desarrollado por el pistón cuando moviéndose lentamente reduce el entrehierro desde 12 a 2,5 mm, y compárese el resultado con el hallado para el problema 2-5a.

2-7. En el problema 2-3 figuran los datos de la curva de magnetización del hierro del circuito magnético. Trácese las curvas de magnetización del circuito magnético completo (flujo en Wb/f.m.m. total en ampere-vueltas) en las siguientes condiciones.

- Entrehierro $g = 12$ mm.
- Entrehierro $g = 2,5$ mm.
- A partir de estas curvas hállese gráficamente el trabajo desarrollado por el núcleo móvil cuando se desplaza lentamente desde $g = 12$ mm hasta $g = 2,5$ mm siendo de 3 A la intensidad constante en la bobina. Compárese con el resultado del problema 2-5a.
- Hállese también la energía suministrada por el sistema eléctrico (en exceso sobre las pérdidas por calentamiento de la bobina) y compárese con el resultado del problema 2-5b.

2-8. Consideremos el solenoide con núcleo de hierro de la Fig. 2-19. El núcleo móvil de hierro tiene una masa M , está suspendido de un muelle y va guiado verticalmente por unos espaciadores no magnéticos de espesor t y permeabilidad μ_0 . Supóngase que la permeabilidad del hierro es infinita, y despréciese el efecto de bordes y la dispersión del campo. Todas las cantidades están expresadas en unidades MKS.

- Hállese la inductancia de la bobina en función de la posición x del pistón. ¿En qué condiciones la fórmula resulta más exacta?
- Exprésese la fuerza magnética que actúa sobre el pistón en función de la intensidad i en la bobina.
- Suponiendo que las dimensiones son:

$$w = 5 \text{ cm} \quad d = 4 \text{ cm} \quad t = 0,1 \text{ cm}$$

¿Cuál es la fuerza máxima aproximada que se puede esperar que actúe sobre el núcleo móvil sin llegar a la saturación del hierro?

2-9. En la fig. 2-20 se representa vista de frente a y en sección b una máquina simple de corriente continua de dos polos. Debido a un error de montaje el núcleo está desplazado axialmente 12 mm respecto a su posición correcta; otros datos son los siguientes:

Espesor de cada entrehierro = 2,5 mm.

Diámetro del rotor = 50 mm.

Densidad de flujo en el entrehierro = 8 kilolíneas/cm²

Angulo abarcado por cada expansión polar = 100°

El espesor de los entrehierros puede considerarse uniforme bajo las expansiones polares y el rotor puede equipararse a un cilindro liso.

Hállese la fuerza axial que tiende a centrar el rotor.

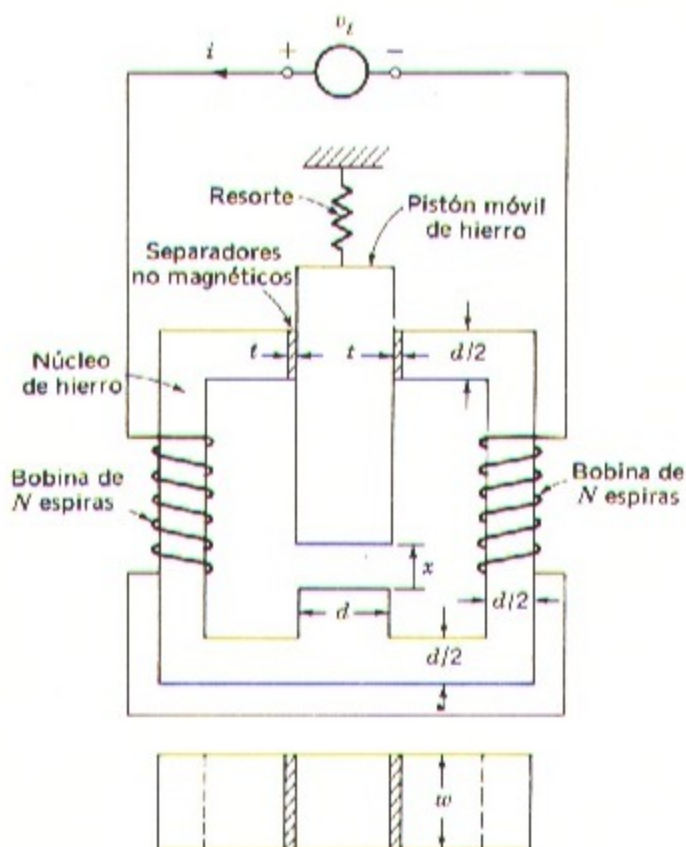


Fig. 2-19. Electroimán del problema 2-8.

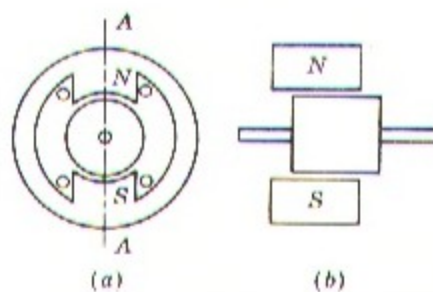


Fig. 2-20. Máquina de continua simplificada del problema 2-9

2-10. En la Fig. 2-21 se representa la forma general del flujo disperso creado por una corriente de intensidad i circulando por un conductor rectangular alojado en el interior de una ranura practicada en el hierro. Supóngase que el flujo de dispersión φ_s cruza la ranura normalmente a ella en la zona comprendida entre su borde superior y el del conductor.

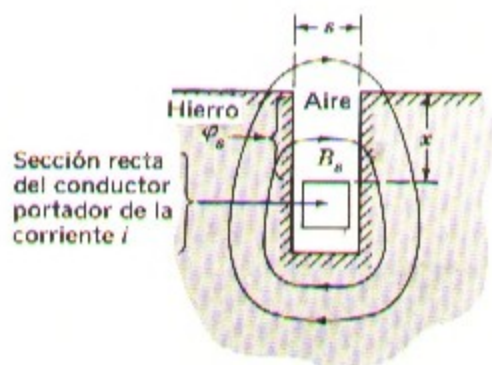


Fig. 2-21. Conductor alojado en una ranura del problema 2-10.

- Dedúzcase la fórmula que da la densidad de flujo B_s en la zona comprendida entre los bordes superiores de conductor y de ranura.
- Dedúzcase una fórmula que dé el flujo de dispersión φ_s que cruza la ranura por encima del conductor, en función de la altura x , del ancho s , y de la longitud l del conductor alojado, medida en el sentido perpendicular al plano de la figura.
- Dedúzcase, utilizando unidades MKS, la expresión de la fuerza f creada por el campo magnético sobre un conductor de longitud l . ¿En qué dirección actuará dicha fuerza sobre el conductor?
- Calcúlese el valor de la fuerza que actuará sobre un conductor de 0,30 m de longitud alojado en una ranura de 25 mm de ancho cuando por él circula una intensidad de 1000 A.

2-11. Las autoinducciones e inducción mutua de dos bobinas, expresadas en henry en función del desplazamiento x en metros, tienen los siguientes valores:

$$L_{11} = 1 + x$$

$$L_{22} = 2(1 + x)$$

$$L_{12} = 1 - x$$

Las resistencias se consideran despreciables.

- Calcúlese el trabajo mecánico desarrollado al variar x desde 0 hasta +1,0 m si las intensidades, supuestas constantes, son: $I_1 = +10$ A e $I_2 = 5$ A.

- b. La fuerza engendrada en a ¿tiende a aumentar o a disminuir x ?
- c. Durante el movimiento indicado en a ¿cuánta es la energía suministrada por la fuente 1, y cuánta por la 2?
- d. Calcúlese el valor medio de la fuerza desarrollada cuando $x = 0,5$ m, si se pone en cortocircuito la bobina 2, y se aplica a la 1 una tensión senoidal de 377 V eficaces, siendo la frecuencia de 50 Hz.

2-12. En la siguiente tabla se indican los valores de las autoinducciones L_{11} y L_{22} , así como el valor absoluto de la inducción mutua L_{12} del dispositivo de la Fig. 2-22, correspondientes a dos posiciones angulares θ_0 del rotor, siendo θ_0 el ángulo formado por el eje del rotor respecto a un eje de referencia horizontal:

θ_0	L_{11}	L_{22}	L_{12}
45°	0,60	1,10	0,30
75°	1,00	2,00	1,00

Estos valores vienen dados en henry, y puede admitirse que varían linealmente con θ_0 en el campo $45^\circ < \theta_0 < 75^\circ$.

Calcúlese el par electromagnético en newton-metros en cada uno de los siguientes casos, estando el rotor fijo en la posición $\theta_0 = 60^\circ$ (aproximadamente la posición dibujada en la figura), e indicando el sentido en que dicho par tiende a hacer girar el rotor.

- a. $i_1 = 10$ A, $i_2 = 0$
- b. $i_1 = 0$, $i_2 = 10$ A.
- c. $i_1 = 10$ A, $i_2 = 10$ A ambas en la dirección de las flechas de la Fig. 2-22.
- d. $i_1 = 10$ A en la dirección de la flecha, e

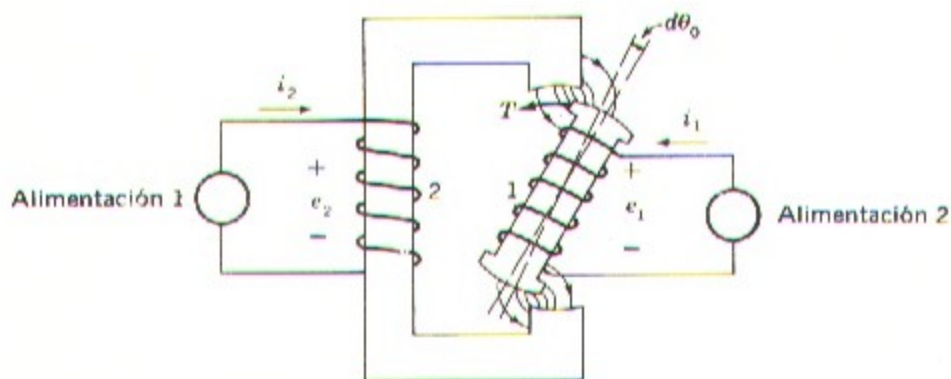


Fig. 2-22. Sistema magnético elemental con excitación múltiple.

$i_2 = 10$ A en sentido contrario.

- e. $i_1 = 10$ A valor eficaz de una corriente alterna senoidal, estando la bobina 2 cerrada en cortocircuito. En este caso el valor buscado del par es el correspondiente a su valor medio en el tiempo; despréciase la resistencia de la bobina 2.

2-13. Los valores de las autoinducciones e inducción mutua de dos bobinas, montadas una de ellas en un estator y la otra en un rotor, son:

$$L_{11} = 0,20 \text{ mH}$$

$$L_{22} = 0,10 \text{ mH}$$

$$L_{12} = 0,05 \cos \theta \text{ mH}$$

siendo θ el ángulo formado por los ejes de ambas bobinas, las cuales están conectadas en serie circulando por ellas una intensidad:

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

- Expresese el valor instantáneo T del par en el rotor, en función de la posición angular θ .
- Expresese el valor del par medio T_m en función de θ .
- Calcúlese T_m cuando $I = 10$ A y $\theta = 90^\circ$.
- Trácese tres curvas de T_m en función de θ cuando I vale respectivamente 5, 7,07 y 10 A.
- Se fija al rotor un muelle antagonista que tiende a situarlo en la posición $\theta = 90^\circ$. El par antagonista debido al muelle es proporcional a la desviación angular respecto $\theta = 90^\circ$, y vale 0,004 Nw-m cuando el rotor se sitúa en $\theta = 0^\circ$. Indíquese cómo se puede deducir de las curvas del apartado *d* la posición angular del conjunto rotor-muelle, cuando la intensidad en las bobinas es de $I = 5, 7,07$ y 10 A respectivamente. Trácese la curva que relaciona θ con I , siendo suficiente para ello hacerlo con valores numéricos a estima.

Nota: Este problema muestra el principio en que se basan los amperímetros dinamo-métricos de c.a.

2-14. En la Fig. 2-23 se representa en sección un electroimán cilíndrico. El núcleo móvil puede desplazarse en la dirección de x y está retenido por un resorte en hélice cuya constante es K_x . La posición de dicho núcleo cuando la bobina está desexcitada es D , y su masa es M . La sección transversal del entrehierro es A , y la bobina tiene N espiras. Despréciense el rozamiento, la dispersión de flujo, el efecto de bordes, la reluctancia del hierro y la resistencia de la bobina.

La densidad de flujo en el entrehierro, trabajando en régimen senoidal permanente, es:

$$B(t) = B_m \sin \omega t$$

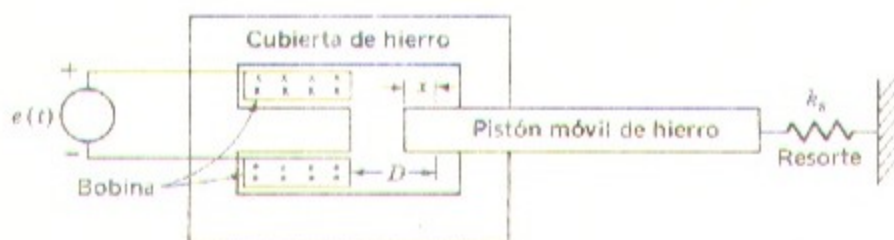


Fig. 2-23. Electroimán del problema 2-14.

- Expresese en función de B_m , ω y t , la fuerza magnética que actúa sobre el núcleo móvil.
- Escribese la fórmula de la tensión $e(t)$ en bornes de la bobina, en función de B_m , ω y t .
- Escribese la ecuación diferencial del movimiento del núcleo en función de B_m , ω , t y x .
- Estando el sistema en régimen permanente, resuélvase para la posición $x(t)$. Obsérvese que en la solución debe existir una parte constante X_0 y otra $x_1(t)$ variable en el tiempo.

2-15. Considérese un electroimán semejante al de la Fig. 2-13, pero en el que la longitud del núcleo cilíndrico de acero sea $a + h$.

Hállense las ecuaciones dinámicas del movimiento del sistema.

2-16. El dispositivo del problema 2-15 tiene los siguientes datos:

$$a = 2 \text{ cm}, \quad h = 6 \text{ cm}, \quad d = 2 \text{ cm}, \quad t = 0,05 \text{ cm},$$

Espiras: $N = 1000$.

Resistencia de la bobina: $r = 100 \text{ ohm}$.

Masa del vástago: $M = 0,2 \text{ Kg}$.

Constante del muelle: $K = 6,25 \text{ Nw/cm}$.

Siendo $i = 0$, el vástago queda situado a $x = 0,25 \text{ cm}$.

Fuerza exterior aplicada = 0.

Rozamientos: despreciables.

Tensión aplicada a la bobina: 10 V.

- Hállese la posición de equilibrio; ¿es estable?
- Háganse lineales las ecuaciones dinámicas del movimiento, para pequeños incrementos en la tensión aplicada. Dese los valores numéricos de los parámetros en unidades MKS.

2-17. Dos devanados, montados uno de ellos en un estator y el otro en un rotor, tienen las siguientes autoinducciones e inducción mutua:

$$L_{11} = 2,20 \text{ H} \quad L_{22} = 1,00 \text{ H}$$

$$L_{12} = 1,414 \cos \theta_0 \text{ H}$$

siendo θ_0 el ángulo formado por los ejes de ambos devanados: se consideran nulas las resistencias de éstos.

Cerrando en cortocircuito el devanado 2, y circulando por el 1 una intensidad función del tiempo $i = 14,14 \sin \omega t$:

- Expresese el valor en Nw-m del par instantáneo en función de θ_0 estando el rotor fijo.
- Calcúlese en Nw-m el par medio cuando $\theta_0 = 45^\circ$.
- Si el rotor es susceptible de moverse, ¿girá continuamente o tenderá a permanecer estacionario? En este último caso, ¿a qué valor de θ_0 ?

2-18. La Fig. 2-24 representa un condensador con una armadura fija y la otra susceptible de desplazarse en la dirección de x . Su capacidad es:

$$C = \frac{1}{x} \mu\text{f}$$

estando x expresado en metros. No existen pérdidas eléctricas ni mecánicas.

En las condiciones iniciales $E = 200 \text{ V}$ y $x = 0,01 \text{ m}$.

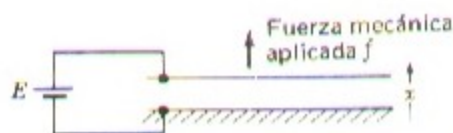


Fig. 2-24. Condensador de armadura móvil del problema 2-18.

Luego se somete al siguiente ciclo:

- Manteniendo $E = 200 \text{ V}$, x aumenta hasta $0,02 \text{ m}$.
- Manteniendo $x = 0,02 \text{ m}$, E se rebaja hasta 100 V .
- Manteniendo $E = 100 \text{ V}$, x se rebaja hasta $0,01 \text{ m}$.
- Manteniendo $x = 0,01 \text{ m}$, E se aumenta hasta 200 V , cerrándose así el ciclo.

Hállese el trabajo mecánico desarrollado durante el anterior ciclo cerrado. La energía ¿fluye de la batería, o hacia ella?

Máquinas rotativas: Conceptos básicos

El objeto de este capítulo es el de estudiar las aproximaciones o errores en que se incurre al considerar una máquina real como un simple modelo matemático, así como el de aplicar al análisis de dicho modelo los principios básicos expuestos en el capítulo 2 fijando al mismo tiempo algunos conceptos sencillos relativos a las máquinas tipo básicas.

3-1. CONCEPTOS ELEMENTALES

La ley de Faraday, $e = d\lambda/dt$, expresa cuantitativamente las tensiones inducidas por un campo magnético variable, originándose una conversión electromecánica de energía cuando la variación de flujo está acompañada de un movimiento mecánico. En las máquinas rotativas las tensiones se inducen en los devanados o grupos de bobinas haciéndolos girar mecánicamente dentro del campo magnético, o bien haciendo girar, también mecánicamente, el campo que atraviesa dichos devanados, o por último diseñando el circuito magnético de tal forma que varíe la reluctancia al girar el rotor. Por cualquiera de estos procedimientos el flujo concatenado con una determinada bobina varía cíclicamente induciendo en ella una tensión. Conectando entre sí un grupo de bobinas de tal forma que todas las tensiones inducidas en cada una de ellas contribuyan positivamente al fin deseado, se obtendrá un *devanado inducido*, del que la Fig. 3-1 muestra un ejemplo correspondiente a una máquina de continua en la que el inducido es la parte móvil o *rotor*. En la Fig. 3-2 puede verse el inducido de un generador de alterna, *alternador* o *generador sincrónico*: en este caso el inducido es la parte fija de la máquina o *estator*.

Las bobinas se devanan sobre núcleos de hierro con objeto de que la circulación del flujo a través de ellas sea de la mayor efectividad posible. Puesto que el hierro está sometido a un flujo magnético variable se inducirán en él corrientes parásitas, y para reducir al mínimo las pérdidas originadas por tal motivo, los núcleos y armaduras de

hierro se construyen a base de paquetes de chapas finas laminadas como puede verse en la Fig. 3-3 que corresponde a una máquina de corriente alterna. El circuito magnético se cierra a través del hierro del otro elemento de la máquina, en el que están situadas las bobinas de excitación o devanado inductor que actúa de fuente primaria de flujo: en pequeñas máquinas pueden emplearse también imanes permanentes.

a. Máquinas síncronas elementales

Estudiando las tensiones inducidas en la máquina síncrona muy simplificada de la Fig. 3-4 puede llegarse a una idea preliminar sobre la forma de actuar un generador de corriente alterna. Salvo raras excepciones el devanado inducido de las máquinas síncronas está ubicado en el estator mientras que el inductor lo está en el rotor como muestra la figura. El devanado inductor se excita con corriente continua que llega hasta él a través de contactos o escobillas de carbón apoyadas sobre anillos rozantes. Esta disposición de los dos devanados viene impuesta generalmente por razones prácticas de construcción: es preferible que el devanado inductor, de menor potencia, esté situado en el rotor. El devanado inducido está formado por una bobina única de N espiras, representada en la

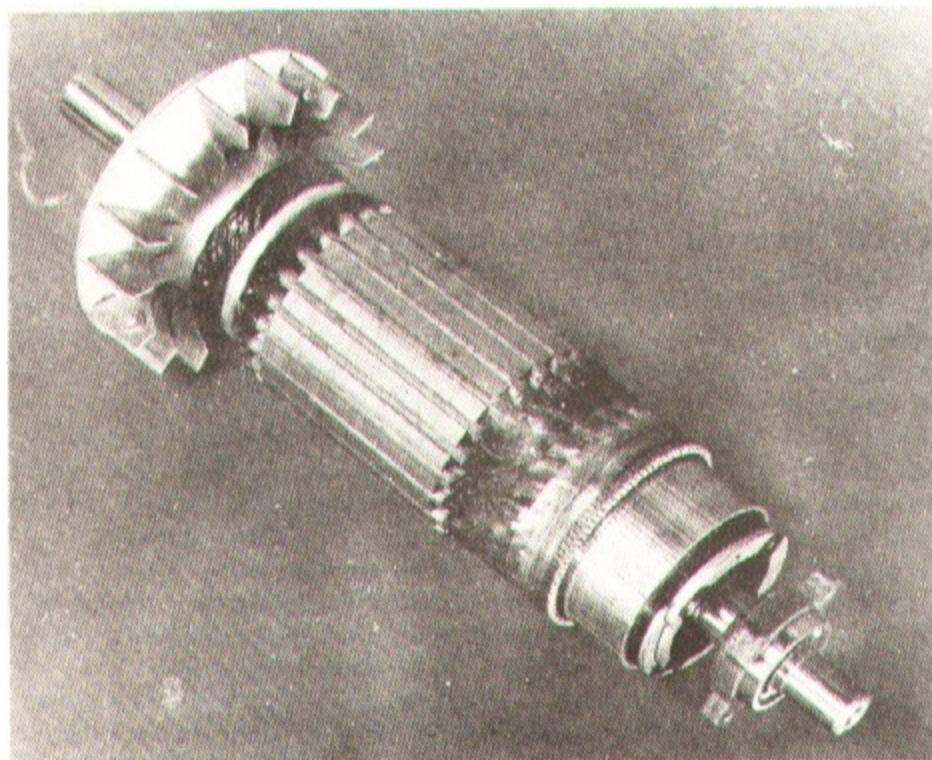


Fig. 3-1. Inducido de un motor de continua. (General Electric Company.)

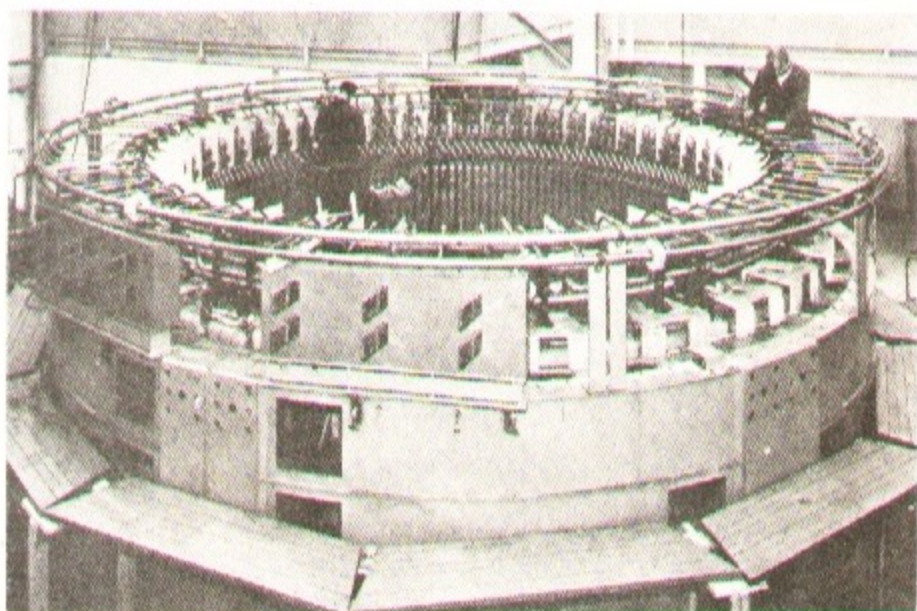


Fig. 3-2. Estator de un generador hidráulico trifásico de 190 MVA, 12 kV, 375 r.p.m. Los conductores están huecos y por su interior circula agua de refrigeración. (Brown Boveri Corporation.)

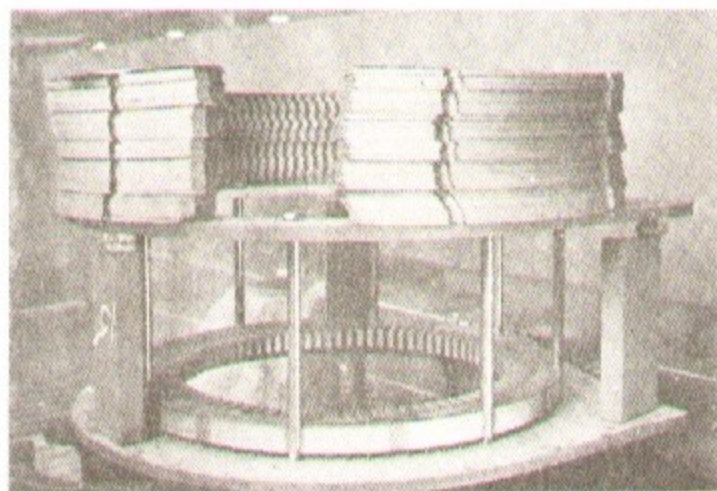


Fig. 3-3. Núcleo de estator en construcción para un motor de alterna. (Westinghouse Electric Corporation.)

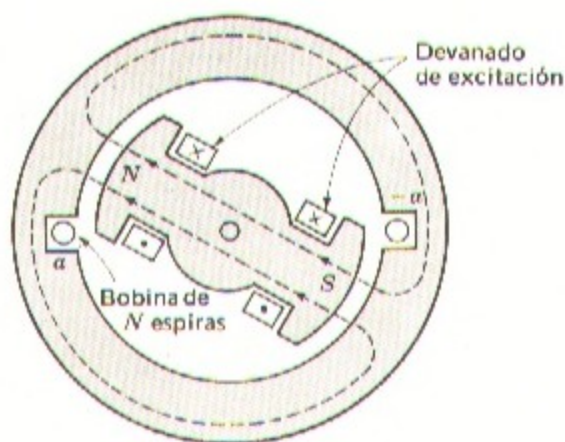


Fig. 3-4. Generador síncrono elemental.

figura por las secciones a y $-a$ de sus laterales alojados en dos ranuras diametralmente opuestas practicadas en la periferia interior del estator (Fig. 3-4).

Los conductores que forman los laterales de esta bobina son paralelos al eje de la máquina y están conectados en serie mediante conexiones no representadas en la figura. El rotor gira con movimiento uniforme en virtud de una potencia mecánica aplicada a su eje. Las líneas del flujo están representadas en la figura por la línea de trazos. En la Fig. 3-5 *a* se representa la distribución radial de la densidad de flujo \mathcal{B} en el entrehierro en función del ángulo θ : en las máquinas reales puede conseguirse que la onda de la densidad de flujo tenga una forma aproximadamente senoidal perfilando adecuadamente las expansiones polares. Al girar el rotor, la onda de flujo barre los laterales a y $-a$ de la bobina induciéndose en ella una tensión (Fig. 3-5 *b*) que es función del tiempo y que tiene la misma forma que la distribución espacial de \mathcal{B} . La tensión inducida pasa por un ciclo completo de valores por cada revolución de la máquina de dos polos de la Fig. 3-4. Su frecuencia en ciclos por segundo (herz) es igual a la velocidad del rotor en revoluciones

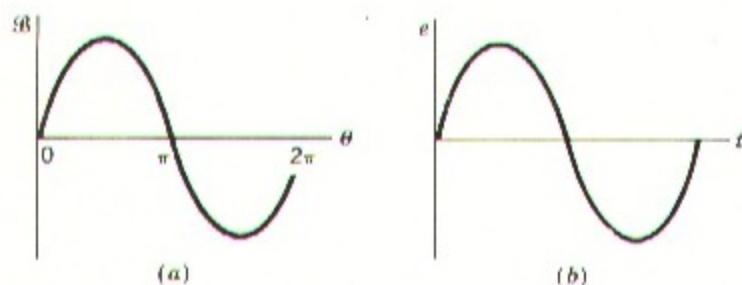


Fig. 3-5. (a) Distribución espacial de la densidad de flujo, y (b) onda de tensión inducida correspondiente.

por segundo, es decir, que la frecuencia eléctrica está sincronizada con la velocidad mecánica, razón por la cual estas máquinas se denominan *síncronas*. Por consiguiente, una máquina síncrona de dos polos debe girar a 3000 r.p.m. para generar una tensión de 50 Hz.

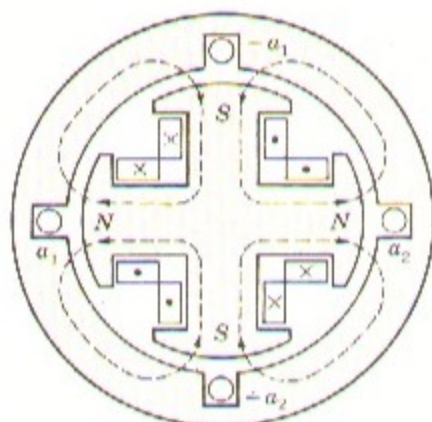


Fig. 3-6. Generador síncrono elemental de 4 polos.

La mayor parte de máquinas síncronas tienen más de dos polos. A manera de ejemplo la Fig. 3-6 representa un alternador elemental monofásico de cuatro polos, en el que las bobinas inductoras están conectadas de forma que los polos sean alternativamente un norte y un sur. A lo largo de la periferia, la distribución de flujo abarca dos ondas o ciclos completos como puede verse en la Fig. 3-7.

En este caso el devanado inducido consta de dos bobinas $a_1, -a_1$ y $a_2, -a_2$ unidas en serie por medio de sus conexiones extremas. El espacio abarcado por cada bobina equivale a una semionda del flujo, y la tensión inducida recorre dos ciclos completos por cada revolución del rotor: la frecuencia f en herz es el doble que la velocidad en revoluciones por segundo.

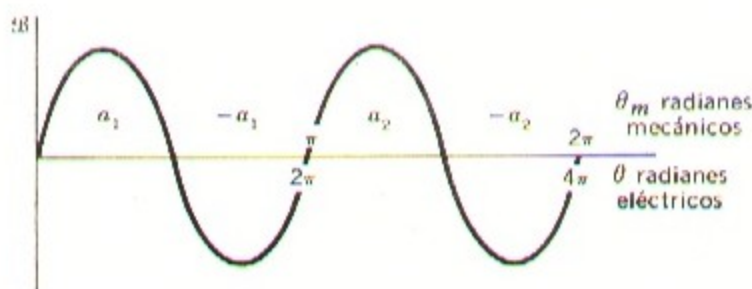


Fig. 3-7. Distribución espacial de la densidad de flujo en un generador síncrono de 4 polos.

Cuando en una máquina existen más de dos polos puede considerarse únicamente un par de ellos teniendo en cuenta que las condiciones eléctricas, magnéticas y mecánicas relativas a cada uno de los restantes pares de polos no son más que una repetición de las existentes para el par considerado. Por este motivo resulta más conveniente expresar los ángulos en *grados o en radianes eléctricos*, más que en unidades geométricas o mecánicas corrientes. Un par de polos o un ciclo de distribución del flujo en una máquina de P polos equivale a 360 grados eléctricos o a 2π radianes eléctricos, y puesto que en una revolución completa existen $P/2$ ondas o ciclos, tendremos que

$$\theta = \frac{P}{2} \theta_m \quad (3-1)$$

siendo θ el ángulo en unidades eléctricas y θ_m el ángulo geométrico. La tensión inducida en cada bobina de una máquina de P polos completa un ciclo cada vez que es barrida por un par de polos, es decir $P/2$ veces por revolución. La frecuencia de la onda de tensión será, por tanto:

$$f = \frac{P}{2} \frac{n}{60} \quad (3-2)$$

siendo n la velocidad mecánica en r.p.m. y $n/60$ la misma velocidad expresada en revoluciones por segundo. La frecuencia angular de la tensión es:

$$\omega = \frac{P}{2} \omega_m \quad (3-3)$$

siendo ω_m la velocidad mecánica expresada en radianes por segundo.

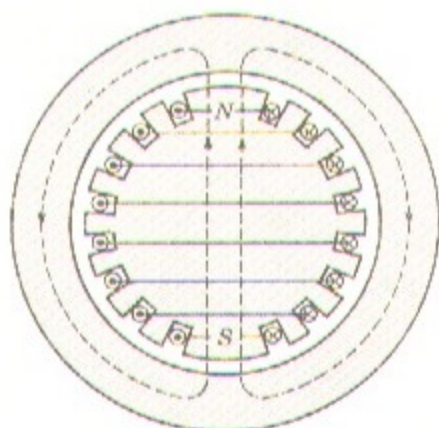


Fig. 3-8. Devanado inductor elemental de dos polos sobre rotor cilíndrico.

Los rotores de las Fig. 3-4 y 3-6 son de *polos salientes* con los devanados concentrados, mientras que el representado esquemáticamente en la Fig. 3-8 es de *polos no salientes* o *cilíndrico*, en el que el devanado está *distribuido*, alojado en ranuras y dispuesto de forma que el campo engendrado es de dos polos y aproximadamente senoidal. La razón práctica por la que algunos generadores tienen el rotor de polos salientes mientras que otros lo tienen cilíndrico puede comprenderse observando la fórmula 3-2. La mayor parte de los sistemas de potencia trabajan a la frecuencia de 50 Hz. Las turbinas hidráulicas trabajan a velocidades relativamente bajas por lo que se requiere un número de polos relativamente alto para obtener la frecuencia deseada, y por ello la construcción con polos salientes es característica de los generadores hidroeléctricos, ya que se adapta mejor a esta situación. Contrariamente, las turbinas de vapor o de gas funcionan a gran velocidad, por lo que los generadores accionados por estas máquinas, o *turboalternadores*, acostumbran a tener sólo dos o cuatro polos siendo el rotor cilíndrico o de tambor; estos rotores están formados por una o varias piezas de acero forjado como puede verse en las Figs. 3-10 y 3-11. La Fig. 3-9 corresponde al rotor de un gran alternador hidroeléctrico.

Salvo muy raras excepciones, todos los generadores síncronos son trifásicos debido a las ventajas que tiene este sistema en la producción, transmisión y utilización de potencias fuertes. Para la creación de tres tensiones defasadas de 120 grados eléctricos, se precisan por lo menos tres bobinas desplazadas asimismo en el espacio 120 grados eléctricos entre sí. En la figura 3-12 *a* está representada una máquina trifásica elemental de dos polos con una bobina por fase, señaladas éstas con las letras *a*, *b* y *c* respectivamente. En una máquina elemental de cuatro polos, como la de la Fig. 3-12 *b*, se requerirán por lo menos dos grupos de tres bobinas, y en general una máquina de P polos requerirá $P/2$ grupos. Las dos bobinas correspondientes a cada fase de la Fig. 3-12 *b* se conectan en serie de forma que se sumen sus respectivas tensiones, y las tres fases así formadas pueden conectarse entre sí en Y o en Δ ; la Fig. 3-12 *c* corresponde a la conexión en Y.

Cuando un generador síncrono suministra potencia a una carga, la corriente inducida crea un campo en el entrehierro que gira a velocidad de sincronismo como se verá más adelante en el apartado 3-4. Este flujo reacciona con el creado por la corriente de excitación, naciendo así un par electromagnético debido a la tendencia que muestran ambos campos a alinearse entre sí. En un generador, este par se opone al movimiento, por lo que para mantener la rotación deberá aplicarse un par mecánico mediante una máquina motriz o motor primario; así pues, el par electromagnético es el elemento en virtud del cual una mayor demanda de potencia eléctrica de salida exige una mayor potencia mecánica de entrada.

La contrapartida del generador síncrono es el *motor síncrono*. Puede verse en la Fig. 3-13 una vista en corte correspondiente a un motor trifásico síncrono de 50 Hz. El devanado inducido (generalmente el estator) se alimenta con corriente alterna, y el inductor (generalmente el rotor) con corriente de excitación continua. El campo magnético de la corriente del estator gira a velocidad de sincronismo. Para que el par electromagnético se mantenga constante es necesario que los campos del rotor y del estator sean de amplitud uniforme y el movimiento relativo del uno respecto al otro sea nulo. En un motor síncrono su velocidad de régimen viene fijada por el número de polos y por la frecuencia de la corriente de alimentación exactamente igual que lo expuesto para los

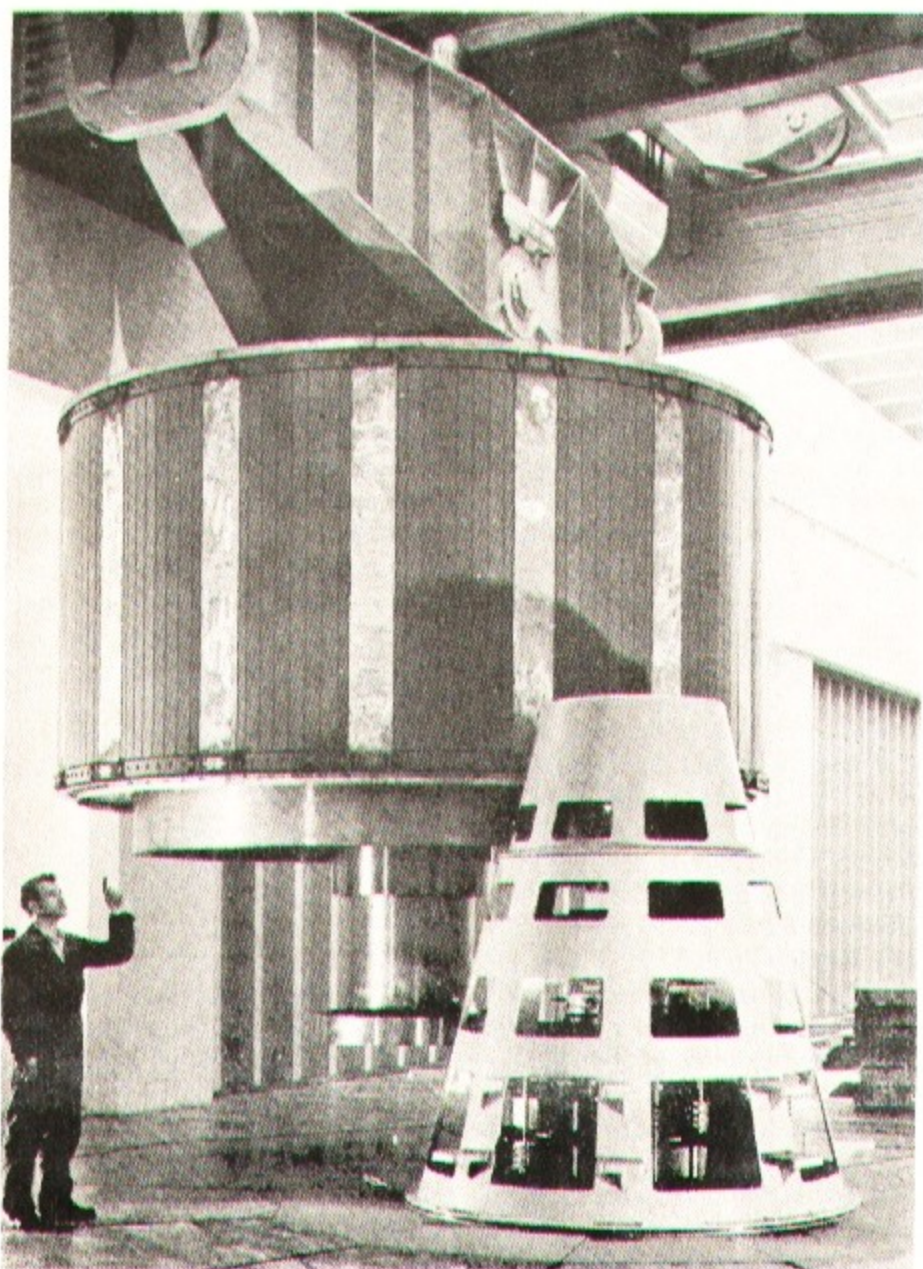


Fig. 3-9. Rotor refrigerado con agua del generador hidroeléctrico de 190 MVA cuyo estator es el de la Fig. 3-2. (*Brown Boveri Corporation.*)

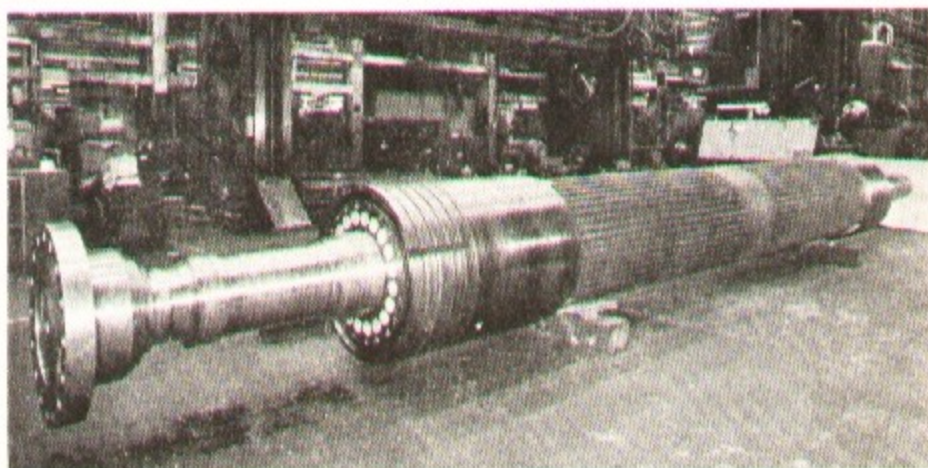


Fig. 3-10. Rotor de un turbogenerador de dos polos, 3600 r.p.m. (*Westinghouse Electric Corporation.*)

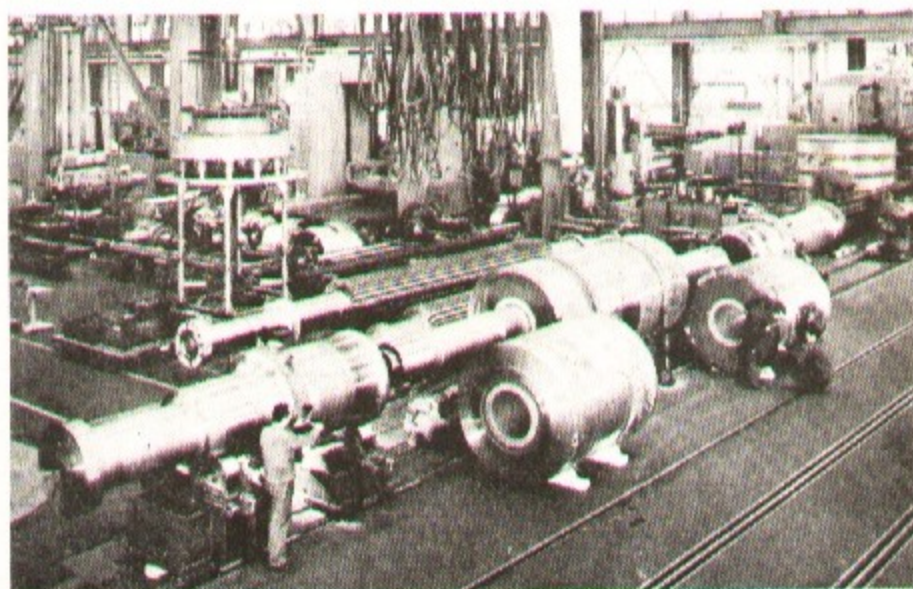


Fig. 3-11. Partes de un rotor formado de varias piezas destinado a un turbogenerador trifásico de 1333 MVA, 4 polos, 1800 r.p.m. Las distintas piezas forjadas se empotrarán en caliente sobre el eje antes de terminar su mecanización y de labrar las ranuras para los devanados. El peso total del rotor es de unos 200.000 Kg. Este generador es el mismo representado en la Fig. 4-23. (*Brown Boveri Corporation.*)

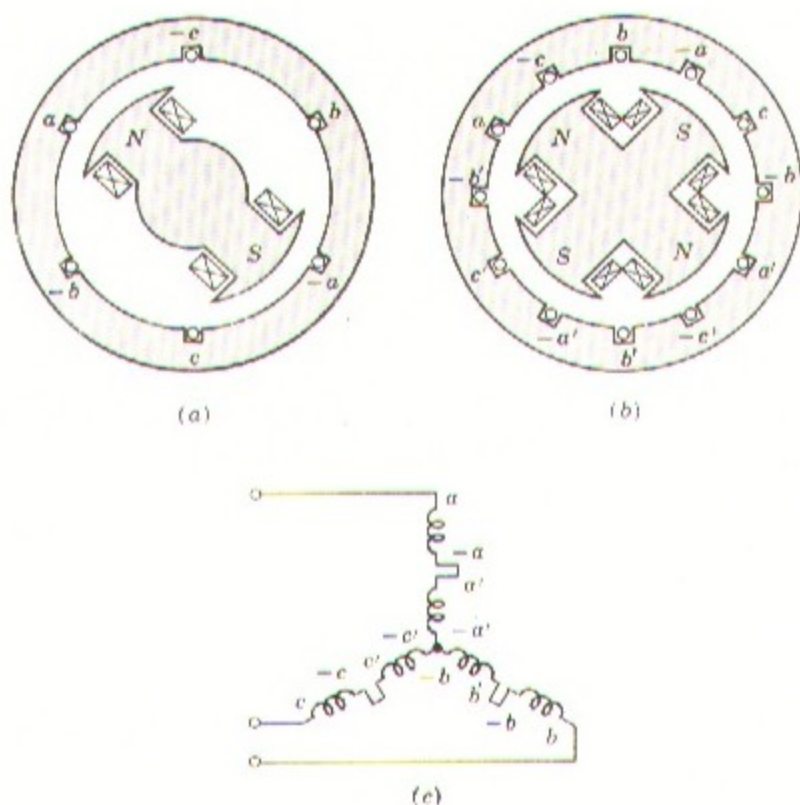


Fig. 3-12. Generadores trifásicos elementales. (a) De dos polos. (b) De cuatro polos. (c) Conexión en Y de los devanados.

generadores síncronos en las fórmulas 3-2 y 3-3. Por consiguiente, un motor síncrono alimentado con una corriente alterna de frecuencia constante girará a una velocidad también constante.

El par electromagnético de un motor actúa en la misma dirección del movimiento venciendo así el par opuesto por el arrastre de la carga mecánica.

La fuerza contraelectromotriz inducida en los devanados en virtud del movimiento, se opone a la tensión e intensidad aplicadas. Tanto si se trata de un generador como si de un motor, siempre existe un par electromagnético y una fuerza contraelectromotriz, siendo éstos los fenómenos más esenciales en la conversión electromecánica de la energía: estos fenómenos se estudiarán cuantitativamente en el capítulo 4, y luego con mayor detalle en los capítulos 6 y 10.

b. Máquinas elementales de corriente continua

El devanado inducido de un generador de corriente continua o dinamo está situado en el rotor tomándose la corriente de él a través de escobillas de carbón. El devanado

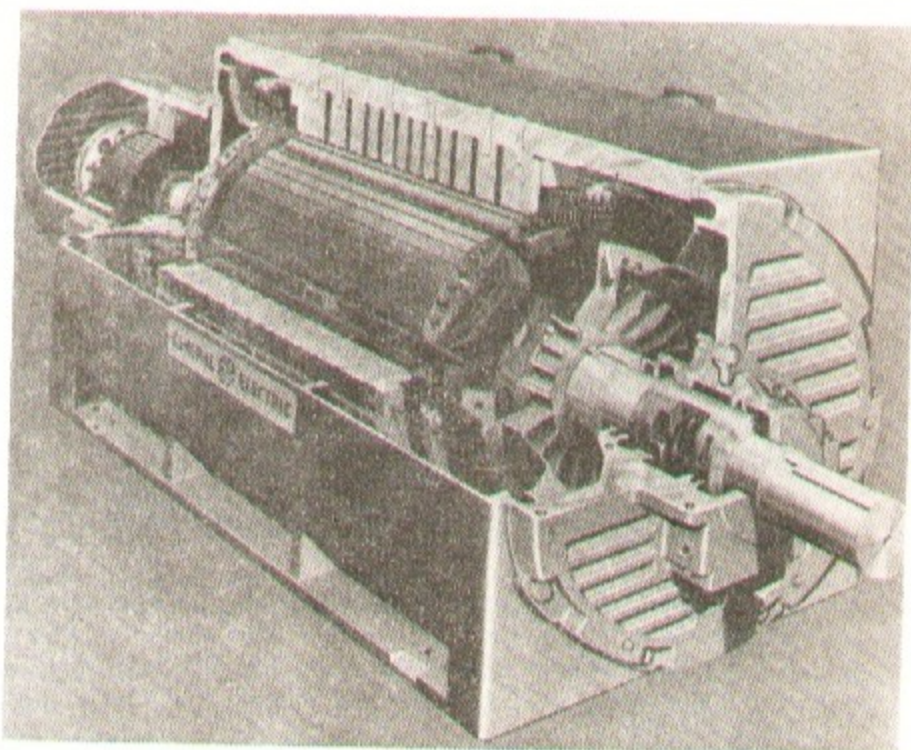


Fig. 3-13. Vista en sección de un motor síncrono de alta velocidad. La excitatriz que se ve en el extremo izquierdo del rotor es un pequeño generador de alterna con un rectificador giratorio de semiconductores acoplado. (*General Electric Company.*)

inductor está en el estator y se excita con corriente continua. Las Figs. 3-14 y 3-15 corresponden a una fotografía y a una vista en sección de sendos motores de continua.

En la Fig. 3-16 se representa esquemáticamente una dinamo muy elemental de dos polos. El devanado inducido se reduce a una única bobina con N espiras cuyos laterales, representados por a y $-a$, están situados paralelamente al eje sobre dos generatrices diametralmente opuestas del rotor: el rotor gira a velocidad uniforme arrastrado mecánicamente por su eje. El flujo en el entrehierro se distribuye según una onda aproximadamente plana como puede verse en la Fig. 3-17 *a* en lugar de hacerlo en la forma senoidal vista en las máquinas de alterna.

La rotación de la bobina induce en ella una tensión función del tiempo, cuya forma de onda es semejante a la de la distribución espacial de la densidad de flujo.

Aun cuando el fin perseguido es el de engendrar una tensión continua, la tensión inducida en una bobina única es siempre alterna, por lo que se requiere rectificarla posteriormente, lo que en ocasiones se realiza en el exterior mediante, por ejemplo, rectificadores de semiconductores: en este caso, la máquina no es más que un alternador con el aditamento de un rectificador externo. En las dinamos clásicas la rectificación se

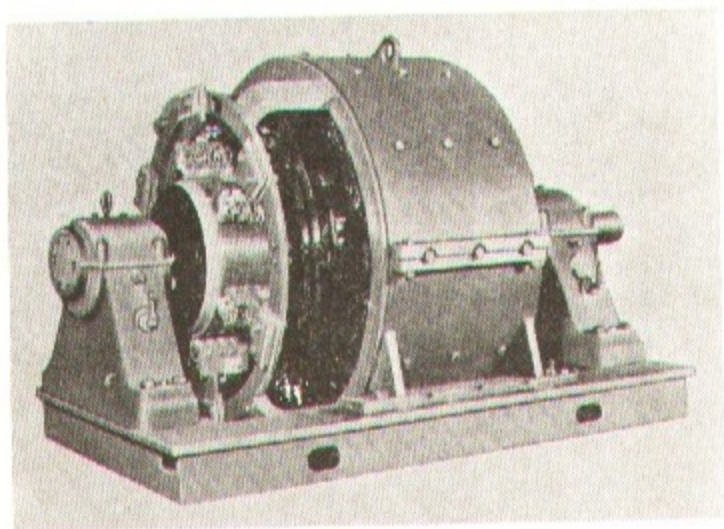


Fig. 3-14. Motor de continua grande en el que se ve el soporte de las escobillas y el colector. (*Westinghouse Electric Corporation.*)

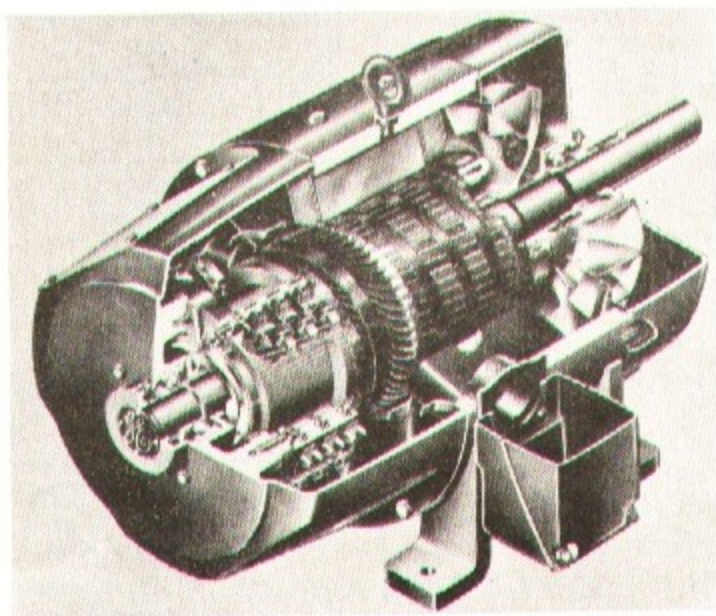


Fig. 3-15. Vista en sección de un motor de continua clásico. (*General Electric Company.*)

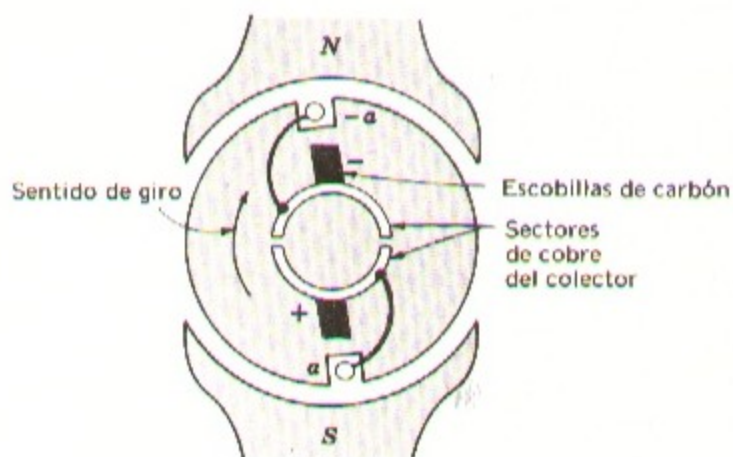


Fig. 3-16. Máquina de continua elemental con colector.

hace mecánicamente por medio del *colector*, que es un cilindro formado por segmentos de cobre (*delgas*) aislados entre sí con mica y montado el conjunto sobre el mismo eje del rotor aunque eléctricamente aislado de él. Unas escobillas fijas que se apoyan sobre la superficie del colector conectan el devanado inducido con el circuito exterior: en las Figs.

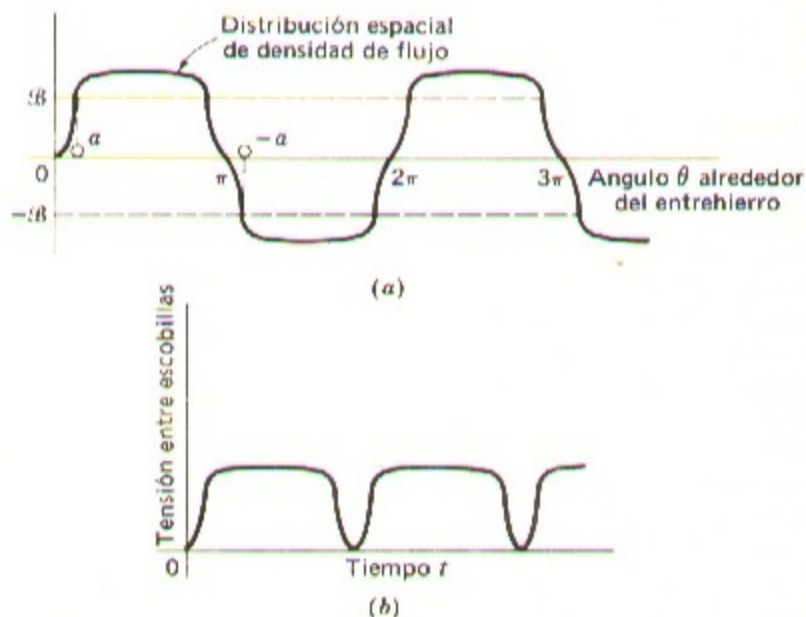


Fig. 3-17. (a) Distribución espacial de la densidad de flujo en el entrehierro de una máquina de corriente continua elemental, y (b) onda de tensión entre escobillas.

3-14 y 3-15 pueden verse las escobillas y el colector. La necesidad de proceder a la conmutación es el motivo por el cual en las máquinas de continua el inducido se sitúa en el rotor. En un generador elemental el colector sería de la forma indicada en la Fig. 3-16, con el que, para el sentido de rotación señalado, el lado de bobina que en cualquier momento se halla bajo el polo sur queda siempre conectado a la escobilla positiva, y el que se halla bajo el polo norte a la negativa. El conmutador realiza una rectificación de onda completa, transformando la onda de tensión entre escobillas a la forma de la Fig. 3-17 *b*, con lo que en el circuito exterior siempre circulará la corriente en un mismo sentido. Es evidente que la máquina de la Fig. 3-16 se ha simplificado hasta el punto de no resultar útil en la práctica, por lo que posteriormente se tratará de colectores más realistas.

Si circula una intensidad por el circuito exterior derivado de las escobillas, nacerá un par debido a la interacción entre los campos magnéticos del rotor y del estator: si la máquina actúa como generador este par se opone al movimiento, y si actúa como motor, par y movimiento tendrán el mismo sentido. Obsérvese que la función desarrollada por las tensiones inducidas y por el par electromagnético en las máquinas síncronas puede aplicarse igualmente a las de corriente continua. En el capítulo 4, y luego con más detalle en los capítulos 5 y 9, veremos cómo puede conseguirse una gran variedad en las características operatorias.

c. Máquinas de inducción elementales

Las *máquinas de inducción* constituyen un tercer tipo de máquinas, en las que tanto en el estator como en el rotor circulan corrientes alternas. El ejemplo más clásico lo constituyen los motores de inducción en los que la corriente alterna se aplica directamente al devanado del estator y por inducción (a manera de transformador) en el rotor. Estas máquinas pueden considerarse como un transformador en el que la potencia eléctrica se transmite entre el estator y el rotor al mismo tiempo que se produce un cambio de frecuencia y aparece una potencia mecánica. Aun cuando los motores de inducción son los de más corriente uso raramente se emplean como generadores, ya que sus características y funcionamiento como tales son inadecuados para muchas aplicaciones. También pueden utilizarse las máquinas de inducción como cambiadores de frecuencia.

El devanado del estator en un motor de inducción es esencialmente igual que en uno sincrónico. En el rotor, el devanado se cierra eléctricamente sobre sí mismo siendo muy frecuente que carezca de terminales exteriores: las corrientes que circulan por él se forman por inducción de las que circulan por el estator, de manera similar a lo que ocurre en un transformador. La Fig. 3-18 muestra una vista en corte de un motor de inducción. La relación entre velocidad y par es generalmente tal, que al aumentar la carga en el eje la velocidad baja ligeramente: esta característica se estudiará en el capítulo 4, y luego con mayor detalle en los capítulos 7 y 10.

Como puede apreciarse, existen distintos tipos de máquinas basadas todas ellas en los mismos principios fundamentales y teniendo cada una de ellas sus propias características y aplicaciones. Evidentemente, para la buena comprensión de la teoría básica se precisa un estudio previo de la interacción entre campos magnéticos. Siendo la geometría de las

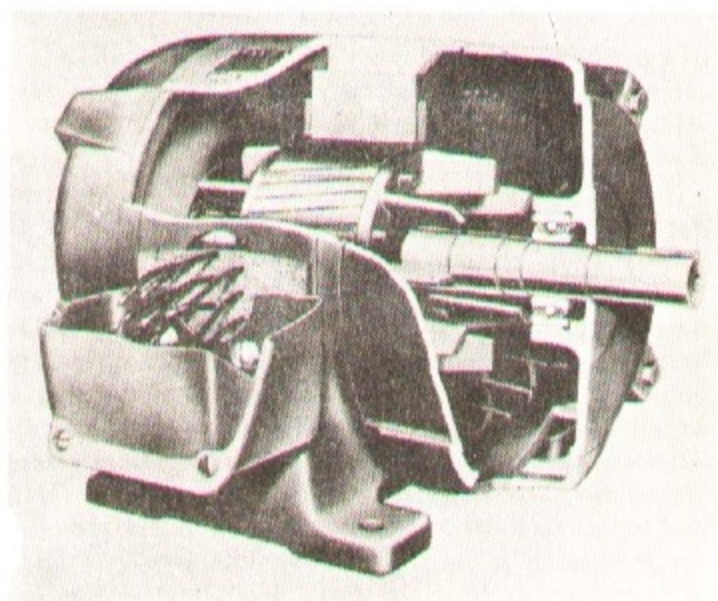


Fig. 3-18. Vista en corte de un motor de inducción. (Westinghouse Electric Corporation.)

máquinas rotativas harto complicada para permitir una solución directa mediante la teoría de campos, se hace necesario crear un modelo matemático sencillo, admitiendo simplificaciones razonablemente aproximadas.

3-2. TENSIONES INDUCIDAS

El estudio de las tensiones inducidas en cualquiera de los devanados de una máquina rotativa se reduce a determinar la tensión inducida en las bobinas simples y sumar seguidamente las tensiones individuales de todas las que forman el devanado completo, teniendo en cuenta la forma en que están conectadas entre sí. La naturaleza de las tensiones inducidas se ha visto ya en el apartado 3-2, y ahora se determinará su magnitud valiéndose de la ley de Faraday.

a. Máquinas de corriente alterna

La Fig. 3-19 representa la sección de una máquina elemental de corriente alterna. El devanado inducido está formado por una bobina única de N espiras cuyos laterales están ubicados en sendas ranuras practicadas en la superficie interior del estator. La bobina abarca 180 grados eléctricos, o sea un paso polar completo. Para mayor sencillez, la máquina representada es de sólo dos polos y el hecho de que sea de polos salientes es únicamente a efectos del dibujo. La densidad de flujo \mathcal{B} creada por el devanado inductor

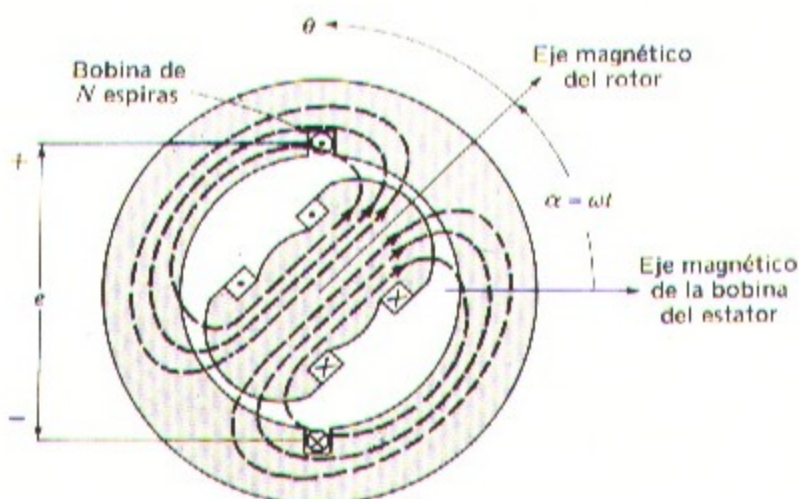


Fig. 3-19. Máquina elemental de alterna de dos polos, con bobina de N espiras en el estator.

del rotor puede admitirse que tiene una distribución senoidal a lo largo de la superficie del estator. El rotor gira a la velocidad angular uniforme de ω radianes eléctricos por segundo.

Cuando los polos del rotor están alineados con el eje magnético de la bobina del estator, el flujo concatenado con ésta es $N\Phi$, siendo Φ el flujo por polo en el entrehierro. Para la distribución senoidal supuesta de la densidad de flujo tendremos:

$$\mathcal{B} = B_p \cos \theta \quad (3-4)$$

siendo B_p el valor máximo o de pico en el centro del polo del rotor, y θ el ángulo en radianes eléctricos medido desde el eje magnético del mismo. El flujo por polo en el entrehierro es la integral de la densidad de flujo a través del área correspondiente, es decir, que en una máquina de dos polos

$$\Phi = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} B_p \cos \theta \, l r \, d\theta = 2B_p l r \quad (3-5)$$

siendo l la longitud axial del estator y r su radio en el entrehierro.

En una máquina de P polos:

$$\Phi = \frac{2}{P} 2B_p l r \quad (3-6)$$

puesto que el área correspondiente a cada polo es $2/P$ veces la que tendría una máquina de dos polos de igual longitud y diámetro.

Al girar el rotor, el flujo concatenado varía como el coseno del ángulo α formado por los ejes magnéticos de las bobinas del rotor y del estator. Girando a la velocidad angular uniforme ω , el flujo concatenado con la bobina inducida será:

$$\lambda = N \Phi \cos \omega t \quad (3-7)$$

en la que el tiempo t se empieza a contar, considerándolo igual a cero, desde el momento en que la máxima densidad de flujo coincide con el eje magnético de la bobina del estator. Según la ley de Faraday, la tensión inducida en dicha bobina es:

$$e = - \frac{d\lambda}{dt} = \omega N \Phi \sin \omega t - N \frac{d\Phi}{dt} \cos \omega t \quad (3-8)$$

El signo menos que aparece en esta última fórmula implica las referencias direccionales de la Fig. 3-19 correspondientes a un generador, es decir, que al decrecer el flujo abarcado por la bobina se induce en ella una tensión de signo tal que tienda a producir una corriente que se oponga a la disminución del flujo abarcado.

El primer término del segundo miembro de la ecuación 3-8 es la tensión inducida debida al movimiento relativo entre bobina y campo, y el segundo término de dicho miembro es la tensión inducida a manera de transformador, que existirá únicamente si hay variación en la amplitud de onda de la densidad de flujo. En la mayor parte de máquinas rotativas la amplitud de la onda de flujo en el entrehierro es constante cuando trabajan en condiciones estables normales: en este caso la tensión inducida se reduce simplemente a la debida al movimiento

$$e = \omega N \Phi \sin \omega t \quad (3-9)$$

Esta ecuación se deduce directamente de la ley de Faraday. Por otra parte, la tensión e inducida en un conductor de longitud l que se mueve con velocidad lineal v dentro de un campo magnético uniforme de densidad de flujo B viene dada por la fórmula del flujo cortado

$$e = Blv \quad (3-10)$$

siendo B , l y v ortogonales entre sí. Interpretando correctamente esta fórmula, es aplicable también a las máquinas rotativas facilitando un nuevo procedimiento para el estudio de las tensiones. Para demostrar que efectivamente la ecuación 3-10 es aplicable a las máquinas rotativas, vamos a deducirla a partir de la 3-9.

Sustituyendo la ecuación 3-6 en la 3-9 tendremos:

$$e = \omega N \frac{2}{p} 2B_p l r \sin \omega t \quad (3-11)$$

$$e = \frac{2}{p} \omega r (2lN) B_p \sin \omega t \quad (3-12)$$

Pero B_p sen ωt es la densidad de flujo B_{bob} en el lado a de la bobina (Fig. 3-19), $2\omega/P$ es la velocidad mecánica angular ω_m y $2lN$ es la longitud activa total de conductores en ambos lados de la bobina: por tanto, en una bobina concentrada abarcando un paso polar completo

$$e = B_{bob}(2lN)r\omega_m = B_{bob}(2lN) \quad (3-13)$$

siendo $v = r\omega_m$ la velocidad lineal del conductor respecto al campo. Aun cuando los conductores se hallan alojados en ranuras, puede calcularse la tensión partiendo del concepto de flujo cortado, fórmula 3-10, exactamente igual que si dichos conductores fueran extraídos de las ranuras y situados directamente en el campo del entrehierro.

Tratándose de corrientes alternas tienen en general más interés los valores de tensión e intensidad eficaces que los instantáneos. Según la ecuación 3-9 el valor máximo de la tensión inducida es:

$$E_{max} = \omega N \Phi = 2\pi f N \Phi \quad (3-14)$$

y el valor eficaz:

$$E_{ef} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N \Phi = 4,44 f N \Phi \quad (3-15)$$

siendo f la frecuencia en herz. Estas ecuaciones son de idéntica forma que las relativas a la f.e.m. en transformadores. El movimiento relativo entre la bobina y una onda de distribución espacial de densidad de flujo de amplitud constante en una máquina rotativa tiene los mismos efectos, en cuanto a tensiones se refiere, que la variación de flujo y bobinas fijas de un transformador. En efecto, el movimiento de rotación introduce el elemento tiempo y transforma la distribución espacial de la densidad de flujo en una variación en el tiempo de la tensión.

La tensión inducida es monofásica; para obtener un sistema trifásico se requieren tres bobinas desplazadas 120 grados eléctricos entre sí, como queda esquemáticamente representado en la Fig. 3-12. En este caso, la ecuación 3-15 da la tensión eficaz por fase si N es el número total de espiras en serie por fase. Todos estos devanados elementales son concentrados y abarcan un paso polar, ya que los dos lados de cualquier bobina están separados 180 grados eléctricos y todas sus espiras están concentradas en un par de ranuras. En la práctica, las bobinas del devanado inducido correspondientes a cada fase se distribuyen entre un cierto número de ranuras como puede apreciarse en la Fig. 3-2. Un devanado distribuido aprovecha más el hierro y el cobre y mejora la forma de la onda. En los devanados distribuidos es preciso aplicar un factor de reducción $K\omega$ ya que las f.e.m. inducidas en cada una de las bobinas que forman un grupo de fase están algo defasadas entre sí; al conectarlas en serie, su suma vectorial es menor que la suma aritmética (véanse más detalles en el Apéndice B. En general, $K\omega$ vale, para un devanado trifásico, entre 0,85 y 0,95).

Tratándose de devanados distribuidos la ecuación 3-15 se convierte en:

$$E_{ef} = 4,44fK\omega N_{fase} \Phi \text{ volt eficaces por fase} \quad (3-16)$$

siendo N_{fase} el número de espiras en serie por fase.

b. Máquinas de corriente continua

Aun cuando el fin propuesto es el de obtener una tensión continua, evidentemente la tensión engendrada en las bobinas inducidas debido al movimiento es siempre una tensión alterna, debiéndose rectificar posteriormente la onda.

Con el colector elemental descrito en el apartado 3-1 *b* se consigue una rectificación mecánica, que en el caso de una bobina única como la de la Fig. 3-16 es una rectificación de onda completa. Siempre bajo el supuesto de una distribución senoidal del flujo, la forma de la onda de tensión entre escobillas toma la forma indicada en la Fig. 3-20. La tensión media, o continua, entre escobillas es:

$$E_a = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \omega N \Phi \sin \omega t \, d(\omega t) = \frac{2}{\pi} \omega N \Phi \quad (3-17)$$

En máquinas de corriente continua es en general más conveniente expresar la tensión E_a en función de la velocidad mecánica ω_m rad/seg o n r.p.m. Sustituyendo la ecuación 3-3 en la 3-17 tendremos, para una máquina de P polos

$$E_a = \frac{PN}{\pi} \Phi \omega_m = 2PN\Phi \frac{n}{60} \quad (3-18)$$

El devanado de bobina única aquí supuesto carece de realidad práctica: se hará necesario examinar luego con mayor atención la acción del colector. Sin embargo, los resultados de la ecuación 3-18 son suficientemente correctos para la mayor parte de los devanados distribuidos para corriente continua, siempre que N se tome como número total de espiras en serie comprendidas entre los terminales del inducido. Normalmente, la tensión se expresa en función del número total de conductores activos Z_a y del número a de ramales

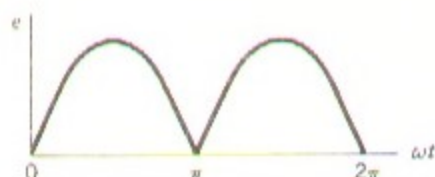


Fig. 3-20. Tensión entre escobillas de una máquina de corriente continua elemental.

paralelos en el devanado. Ya que dos laterales de bobina forman una espira, y $1/a$ de éstas están conectadas en serie, el número total de espiras en serie será $N = Z_a/2a$, que sustituyendo en 3-18 da:

$$E_a = \frac{PZ_a}{2\pi a} \Phi \omega_m = \frac{PZ_a}{a} \Phi \frac{n}{60} \quad (3-19)$$

Tenemos ya la forma de expresar cuantitativamente el valor de la tensión eficaz inducida en las máquinas de alterna, fórmula 3-16, o la tensión media entre escobillas en las de continua, fórmula 3-19.

Seguidamente estudiaremos los campos magnéticos producidos por la corriente de los devanados inducidos.

3-3. F.M.M. DE LOS DEVANADOS DISTRIBUIDOS

La mayor parte de los inducidos tienen el devanado distribuido, es decir, repartido sobre un determinado número de ranuras alrededor de la periferia del entrehierro, como puede apreciarse en las fotografías de las Figs. 3-1 y 3-2. Las bobinas individuales se conectan entre sí de forma que el campo magnético resultante tenga el mismo número de polos que el devanado inductor.

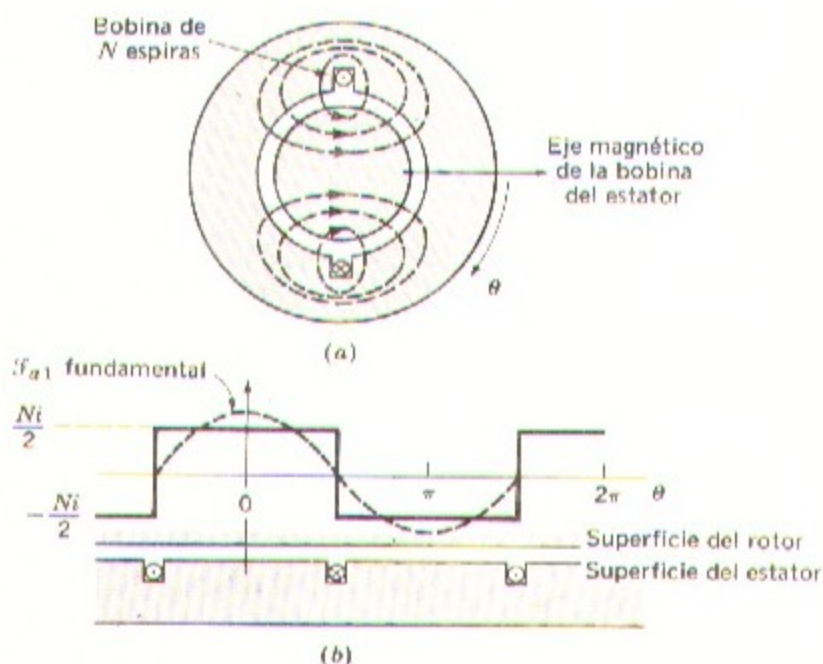


Fig. 3-21. F.m.m. de una bobina concentrada de paso diametral.

Al igual que lo ya realizado para el estudio de las tensiones inducidas, los campos magnéticos de los devanados distribuidos pueden estudiarse por aproximación analizando el campo producido por una bobina única de N espiras abarcando un paso polar completo tal como está representado en la Fig. 3-21 *a*. El sentido de las corrientes está representado por un punto si es tal que la corriente surge del dibujo hacia el observador y por una cruz en caso contrario. Para mayor simplicidad se ha representado un rotor cilíndrico coaxial. La forma del campo magnético creado por la corriente de la bobina se ha señalado con líneas de trazos en la figura indicada. Puesto que la permeabilidad del hierro del inducido e inductor es muy superior que la del aire es suficiente, para el objeto actual, suponer que toda la reluctancia del circuito magnético está localizada en los dos entrehierros. Es evidente que por razón de simetría la intensidad \mathcal{H} del campo en el entrehierro en la posición angular θ respecto a un polo es igual, aunque de sentido contrario, que la existente en la posición $\theta + \pi$ respecto al otro polo.

Alrededor de cada uno de los circuitos cerrados representados por líneas de trazos en la Fig. 3-21 *a* la f.m.m. es Ni , o bien, la f.m.m. en cada polo es $Ni/2$ ampere-vueltas por polo, siendo i la intensidad de la corriente en la bobina. La Fig. 3-21 *b* representa el desarrollo del anterior devanado, y la f.m.m. a lo largo de tal desarrollo está distribuida según la línea quebrada, variando su amplitud de $\pm Ni/2$. Imaginando que las ranuras son suficientemente estrechas, al pasar de uno a otro lado de una bobina, la f.m.m. experimenta una variación brusca de valor Ni .

a. Máquinas de corriente alterna

Al proyectar máquinas de corriente alterna, se pone especial cuidado en repartir el devanado de forma tal que la distribución espacial de la f.m.m. sea lo más aproximadamente posible senoidal: fijaremos la atención en la componente fundamental.

La onda rectangular de la f.m.m. de la bobina concentrada de paso diametral de la Fig. 3-21 *b* puede descomponerse por el método de Fourier en una componente fundamental y una serie de armónicos impares. La componente fundamental \mathcal{F}_{a1} es:

$$\mathcal{F}_{a1} = \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} \cos \theta \quad (3-20)$$

siendo θ el ángulo medido desde el eje de la bobina del estator: esta componente fundamental está representada con línea de trazos en la citada figura 3-21 *b*, y su amplitud es:

$$F_{1\text{ punto}} = \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} \quad (3-21)$$

correspondiendo este máximo a la posición alineada con el eje magnético de la bobina.

Consideremos ahora las consecuencias de distribuir el devanado entre varias ranuras. La Fig. 3-22*a*, por ejemplo, representa el devanado inducido de la fase *a* en una máquina trifásica de dos polos; las fases *b* y *c* ocuparán las ranuras que aparecen vacías en la figura. Los tres devanados, correspondientes a las fases *a*, *b* y *c* son idénticos entre sí, y están

situados de forma que el ángulo formado por sus respectivos ejes magnéticos es de 120 grados eléctricos. De momento fijaremos nuestra atención en la f.m.m. de la fase a solamente, posponiendo el estudio del efecto de las tres fases hasta el apartado 3-4. El devanado se dispone en doble capa; cada bobina de n_c espiras tiene uno de sus lados en el fondo de una ranura y el otro en la parte exterior de otra distante un paso polar de la primera. Esta disposición en doble capa simplifica los problemas de conexión entre bobinas.

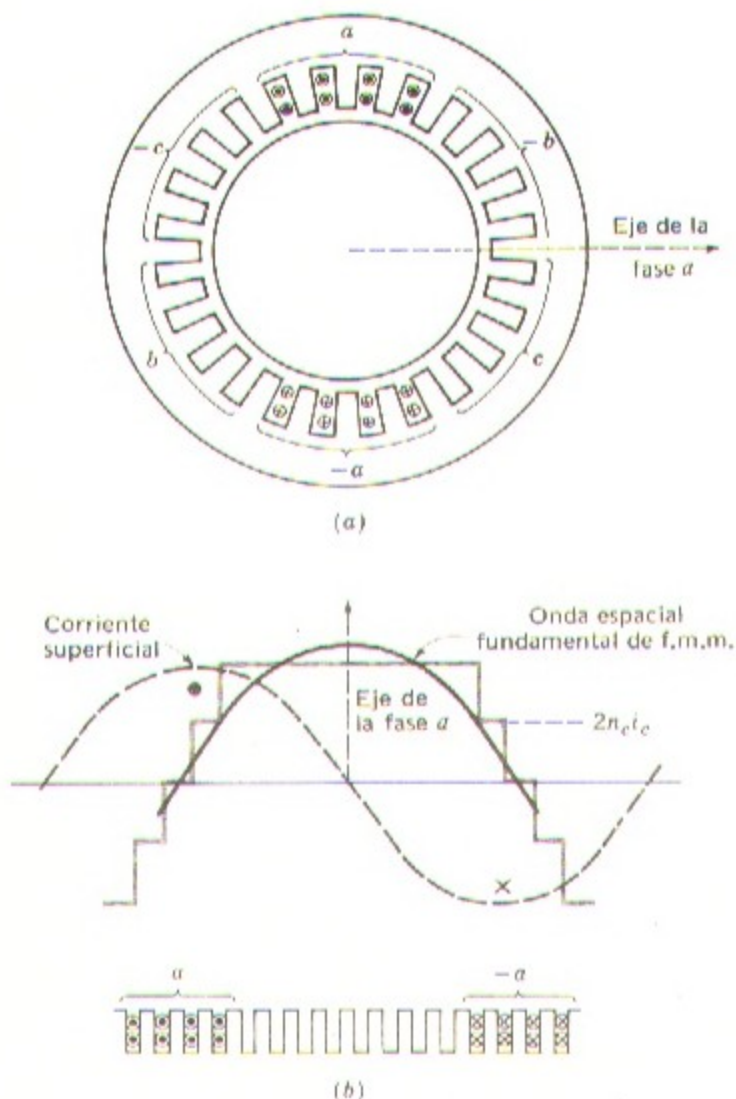


Fig. 3-22. F.m.m. de una fase de un devanado trifásico distribuido de dos polos con bobinas de paso diametral.

La Fig. 3-22 *b* representa el desarrollo lineal de un polo en uno de estos devanados. La onda de la f.m.m. tiene una serie de escalonamientos de altura $2n_c i_c$ cada uno de ellos, es decir, igual a los ampere-conductores en la ranura ya que i_c es la intensidad en la bobina. Su componente fundamental es la senoide dibujada en la figura: como puede observarse, la onda de la f.m.m. de un devanado distribuido se aproxima más a una senoide que la de una bobina concentrada única como la de la Fig. 3-21.

La onda fundamental resultante de la f.m.m. en un devanado distribuido es menor que la suma de las componentes fundamentales de cada una de las bobinas individuales, ya que los ejes magnéticos de éstas no coinciden todos con la dirección de la resultante.

La ecuación 3-20 modificada, relativa a un devanado distribuido de P polos, con N_{fase} espiras en serie por fase es:

$$\mathcal{F}_{a1} = \frac{4}{\pi} k\omega \frac{N_{\text{fase}}}{P} i_a \cos \theta \quad (3-22)$$

en la que el factor $4/\pi$ procede del análisis por las series de Fourier de la onda rectangular de una bobina concentrada de un paso polar, como en la fórmula 3-20, y el factor $k\omega$ tiene ya en cuenta la distribución del devanado (véanse más detalles en el apéndice B). Puede atenuarse el efecto de los armónicos en las máquinas de corriente alterna con el empleo de bobinas de paso distinto al polar, así como por otros procedimientos.

La fórmula 3-22 define la componente espacial fundamental de la onda de f.m.m. creada por la corriente en la fase a , que es igual que la onda de f.m.m. que crearía una corriente superficial senoidal que circulara, perfectamente distribuida, por la periferia interior del estator como la representada con línea de trazos en la Fig. 3-22 *b*. La onda de la f.m.m. es estacionaria, y su distribución espacial alrededor de la periferia es función de $\cos \theta$; su punto máximo coincide con el eje magnético de la fase a , y el valor en dicho punto es proporcional a la corriente instantánea i_a ; por consiguiente, si $i_a = I_m \cos \omega t$, el valor máximo que alcanzará la punta será:

$$F_{\text{max}} = \frac{4}{\pi} k\omega \frac{N_{\text{fase}}}{P} I_m \quad (3-23)$$

En el apartado 3-4 se estudiarán los efectos de las corrientes trifásicas circulando por las tres fases.

b. Máquinas de corriente continua

Debido a las restricciones que impone la conexión del devanado con el colector, la distribución de la f.m.m. en el inducido de las máquinas de continua se aproxima más a la forma triangular que a la senoidal de las máquinas de alterna. La Fig. 3-23 muestra la sección esquemática del inducido de una máquina de dos polos (en la práctica es usual que exista un mayor número de ranuras), en la que la dirección de las corrientes se ha señalado con puntos y cruces. El devanado equivale a una bobina enrollada sobre el inducido creando un campo magnético de eje vertical. Al girar el inducido, la conexión

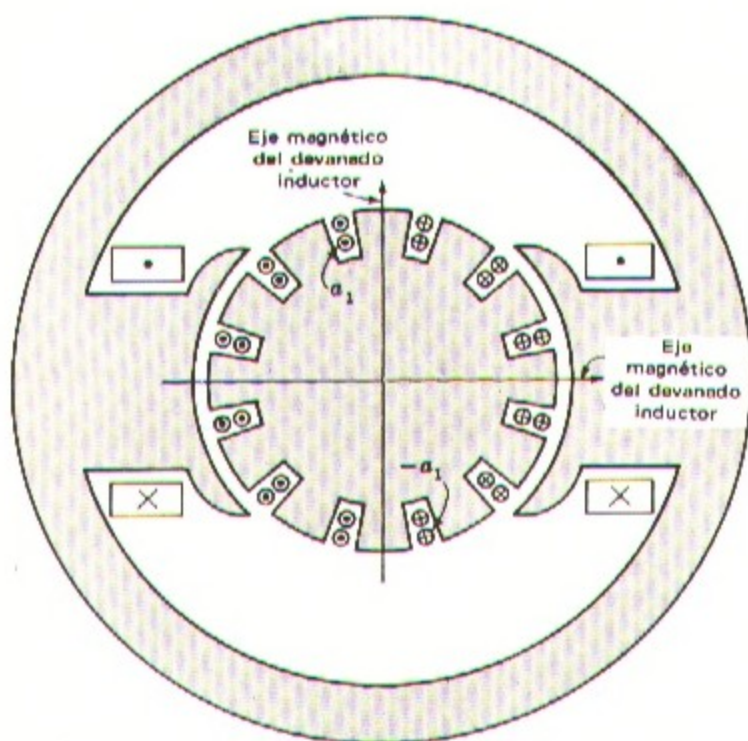


Fig. 3-23. Sección recta de una máquina de continua de dos polos.

entre bobinas y circuito exterior varía por obra del colector, de tal forma que el campo magnético del propio inducido es siempre perpendicular al campo inductor, resultando un par continuo unidireccional. En el apartado 4-3 se describe la actuación del colector.

En la Fig. 3-24 *a* está representado el desarrollo de este devanado, y en la 3-24 *b* la onda de f.m.m., que bajo el supuesto de ranuras estrechas tiene forma escalonada; la altura de cada escalón es igual al número $2n_c i_c$ de ampere-conductores en una ranura, siendo n_c el número de espiras de cada bobina e i_c la intensidad de corriente en la misma, suponiendo que se trata de un devanado de doble capa con bobinas de paso igual al polar. La onda de f.m.m. adquiere su máximo valor en correspondencia con el eje magnético del inducido que coincide con la línea media entre los dos polos inductores.

Este devanado equivale a una bobina de $12n_c i_c$ ampere-vueltas distribuida alrededor del inducido y por tanto, si existe simetría, el valor máximo de la f.m.m. es de $6n_c i_c$ ampere-vueltas en cada polo del inducido.

La forma escalonada de la onda puede sustituirse aproximadamente por la forma triangular representada en las Figs. 3-24 *b* y 3-24 *c*. En un devanado real con mayor número de ranuras por polo, la distribución efectiva es muy aproximada a la triangular, que equivale exactamente a la distribución de f.m.m. que produciría una corriente superficial uniformemente distribuida alrededor del inducido, circulando en los sentidos indica-

dos con el punto y la cruz, corriente que en la citada Fig. 3-24 *c* está representada por su distribución rectangular.

Es conveniente, para un estudio preliminar, descomponer la onda de la f.m.m. de devanados distribuidos a una serie de Fourier. La componente fundamental de la onda triangular de la Fig. 3-24 *c* es la senoide representada en la misma, cuyo valor de punta es $8/\pi^2 = 0,81$ de la altura del triángulo: esta onda fundamental equivale exactamente a la

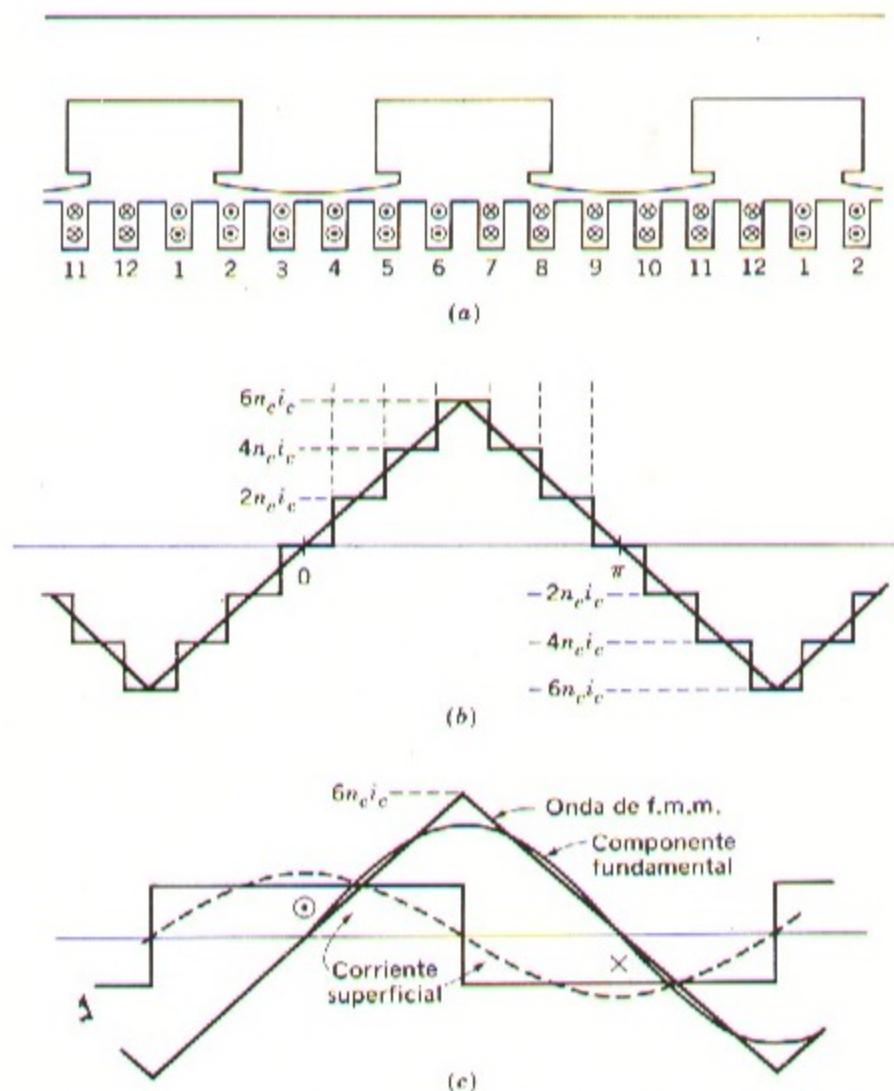


Fig. 3-24. (a) Desarrollo de la máquina de continua de la Fig. 3-23. (b) Onda de f.m.m. (c) Onda triangular equivalente a la de la f.m.m., su componente fundamental, y corriente superficial rectangular equivalente.

que produciría una corriente superficial distribuida senoidalmente alrededor del inducido, cuyo valor de punta fuera igual al de la componente fundamental de la corriente rectangular antes mencionada: dicha distribución senoidal de corriente está representada con línea de trazos sobre la misma figura.

Es de notar que la distribución de la f.m.m. depende únicamente de la disposición del devanado y de la simetría respecto a los polos de la estructura magnética, mientras que la distribución de la densidad de flujo depende no sólo de la f.m.m. sino también de las condiciones del circuito magnético, particularmente de la dimensión de los entrehierros, de los efectos de las aberturas de las ranuras y de la forma de las expansiones polares. El proyectista debe tener en cuenta estos efectos mediante la representación gráfica del flujo, pero todos estos detalles no son de interés en este momento.

En muchos casos la estructura magnética de las máquinas posee más de dos polos, como sucede en la representada esquemáticamente en la Fig. 3-25a, que posee cuatro. El devanado inductor crea una polaridad alternada norte-sur-norte-sur, y los conductores del inducido están repartidos en cuatro zonas de ranuras en las que las corrientes tienen alternativamente sentidos opuestos, como se indica en la figura con un sombreado distinto de las respectivas zonas. La Fig. 3-25 b corresponde a la representación desarrollada de la misma máquina, y en ella puede verse la distribución triangular de la f.m.m. inducida.

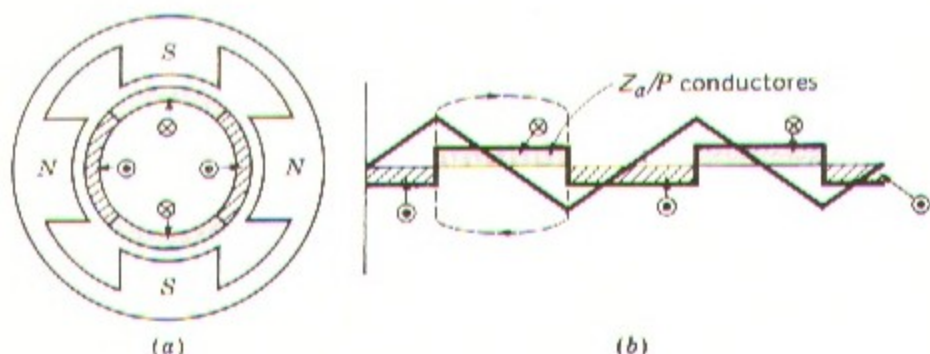


Fig. 3-25. (a) Sección recta de una máquina de continua de cuatro polos, y (b) desarrollo de la corriente superficial y de la onda de f.m.m.

Admitiendo que existe simetría tanto en los devanados como en los campos de cada polo, todos los pares formados por dos polos consecutivos son idénticos entre sí, y por ello pueden determinarse las condiciones magnéticas existentes en el entrehierro analizando únicamente un par cualquiera, es decir, 360 grados eléctricos.

El valor de punta de la onda de f.m.m. del inducido es:

$$F_a = \frac{1}{2} \frac{Z_a}{P} \frac{i_a}{a} \quad \text{ampere-vueltas por polo} \quad (3-24)$$

siendo Z_a el número total de conductores en el devanado inducido, P el número de polos,

i_a la corriente en el inducido y a el número de circuitos en paralelo en el devanado inducido, es decir, que i_a/a es la intensidad en cada conductor. Esta ecuación procede directamente de integrar a lo largo del circuito punteado de la Fig. 3-25 *b*, que cruza dos veces el entrehierro y comprende Z_a/P conductores conduciendo la intensidad i_a/a cada uno de ellos y todos en la misma dirección. En forma más resumida:

$$F_a = \frac{N_a}{P} i_a \quad (3-25)$$

siendo $N_a = Z_a/2a$ el número de espiras en serie inducidas. El valor de punta de la componente fundamental de la onda triangular de f.m.m. de la Fig. 3-25 *b* es: $(8/\pi^2) (N_a/P)i_a$.

Para el estudio preliminar de máquinas, tanto de corriente alterna como de continua, partiremos del supuesto de una distribución espacial de f.m.m. de forma senoidal: con este supuesto pueden obtenerse resultados muy satisfactorios en los problemas relativos a máquinas de alterna, ya que en éstas puede distribuirse el devanado de forma que se reduzcan al mínimo los efectos de los armónicos. En las máquinas de continua, los problemas existentes para la conexión del devanado con el colector determinan que la forma de la onda se aproxime más a la triangular que a la senoidal, no obstante, aun partiendo de esta última forma, se ponen de manifiesto los rasgos esenciales de la teoría de máquinas de continua. Si es necesario, pueden corregirse luego los resultados para tener en cuenta las posibles discrepancias significativas.

Para nuestro modelo matemático, emplearemos siempre una máquina de dos polos, y los resultados que se obtengan podrán aplicarse directamente a una máquina de P polos recordando que tanto el ángulo como la velocidad angular eléctricos θ y ω están relacionados con el ángulo geométrico θ_m y velocidad angular mecánica ω_m de acuerdo con las fórmulas 3-1 y 3-3.

Simplificaremos aún más el estudio preliminar suponiendo que las superficies del estator y del rotor que limitan el entrehierro son cilindros lisos concéntricos.

3-4. CAMPOS MAGNETICOS GIRATORIOS

Para comprender bien la teoría de las máquinas de alterna polifásicas es necesario estudiar previamente el campo magnético engendrado por un devanado polifásico: estudiaremos en particular las f.m.m. correspondientes a un devanado trifásico como los existentes en el estator de las máquinas trifásicas síncronas o de inducción, prestando especial atención a las de dos polos o a un par de polos de un devanado que contenga P .

En las máquinas trifásicas, los devanados correspondientes a cada una de las fases están desplazados entre sí 120 grados eléctricos alrededor del entrehierro tal como están las bobinas $a, -a; b, -b$, y $c, -c$ en la Fig. 3-26, las cuales aun cuando están dibujadas como concentradas abarcando un paso pólar puede considerarse que representan un devanado distribuido creador de una onda senoidal de f.m.m. centrada con el eje

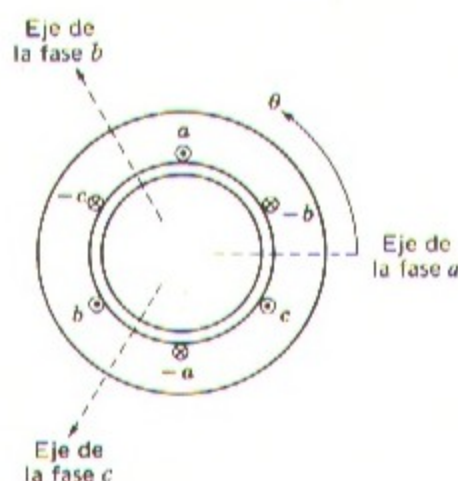


Fig. 3-26. Esquema de devanado trifásico de dos polos en el estator.

magnético de la respectiva fase. Por consiguiente, las tres componentes senoidales de la f.m.m. están desplazadas 120 grados eléctricos en el espacio, pero cada fase está excitada por una corriente alterna cuya magnitud varía senoidalmente con el tiempo. Estando las tres fases equilibradas, sus corrientes instantáneas son:

$$i_a = I_m \cos \omega t \quad (3-26)$$

$$i_b = I_m \cos (\omega t - 120^\circ) \quad (3-27)$$

$$i_c = I_m \cos (\omega t - 240^\circ) \quad (3-28)$$

siendo I_m la intensidad máxima, y tomando como origen de tiempos el instante en el que la intensidad de la fase a pasa por un máximo positivo. Siendo abc la secuencia de fases, la Fig. 3-27 representa el valor instantáneo de la intensidad en cada una de ellas, y los puntos y cruces en los laterales de las bobinas en la Fig. 3-26 indican el sentido de las mismas.

Las respectivas ondas de f.m.m. varían senoidalmente con el tiempo: cada una de ellas representa una f.m.m. estacionaria y pulsatoria senoidalmente, distribuida alrededor del entrehierro, con su punta dirigida en el sentido del eje magnético de su fase y de amplitud proporcional al valor instantáneo de la corriente: en otras palabras, es una onda estacionaria en el espacio que varía senoidalmente con el tiempo. Cada una de estas tres componentes puede representarse por un vector dirigido en el sentido del eje magnético de su correspondiente fase y de longitud proporcional a su intensidad instantánea. La f.m.m. resultante es la suma de las componentes debidas a cada una de las tres fases.

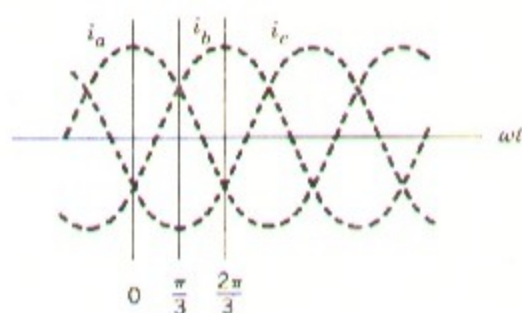


Fig. 3-27. Corrientes trifásicas instantáneas.

a. Análisis gráfico

Consideremos el estado de cosas en el momento $t = 0$, es decir, cuando la corriente en la fase a pasa por su máximo I_m (Fig. 3-27). En este momento, la f.m.m. de dicha fase a adquiere su valor máximo F_{max} dado por la ecuación 3-23 y representado en la Fig. 3-28 a por el vector $F_a = F_{\text{max}}$ dibujado sobre el eje magnético de la propia fase. En este mismo momento, las intensidades i_b e i_c son ambas iguales entre sí e iguales a $I_m/2$ en sentido negativo, como puede verse por los puntos y cruces en la misma figura: sus correspondientes f.m.m. están representadas por los vectores F_b y F_c , ambos iguales a $F_m/2$, situados en sentido negativo sobre los ejes magnéticos de las fases b y c . La resultante, obtenida sumando las contribuciones individuales de las tres fases, es un vector $F = 3/2 F_{\text{max}}$ centrado sobre el eje de la fase a , que representa una onda espacial senoidal con su semionda positiva centrada con el eje magnético de la fase a y de amplitud igual a $2/3$ veces la correspondiente a la de dicha fase sola.

Después de un cierto tiempo, cuando $\omega t_1 = \pi/3$ las corrientes en a y b son positivas y de valor igual a la mitad de su máximo, mientras que en c es negativa y de valor máximo. En la Fig. 3-28 b están representados los componentes individuales de la f.m.m. y su resultante, siendo la amplitud de ésta la misma que cuando t era igual a cero, pero habiendo girado en el espacio 60 grados eléctricos en sentido levógiro. De igual forma, cuando $\omega t_2 = 2\pi/3$ (cuando la intensidad en fase b pasa por su máximo positivo, y en las a y c por su semimáximo negativo) se obtiene la misma distribución de la f.m.m. resultante, pero girada otros 60 grados eléctricos en el mismo sentido, con lo que ahora queda centrada con el eje magnético de la fase b (Fig. 3-28 c). Así pues, al transcurrir el tiempo, la onda de f.m.m. resultante conserva su forma senoidal y su amplitud, pero va girando alrededor del entrehierro, es decir, que tendremos un campo giratorio de movimiento uniforme. Determinando la distribución en un instante cualquiera se obtendrán siempre resultados que concuerdan con lo expuesto.

Transcurrido un ciclo, la f.m.m. resultante debe hallarse nuevamente en la posición de la Fig. 3-28 a , es decir, que en una máquina de dos polos el campo dará una revolución completa por cada ciclo, y en una de P polos dará $2/P$ revoluciones por ciclo.

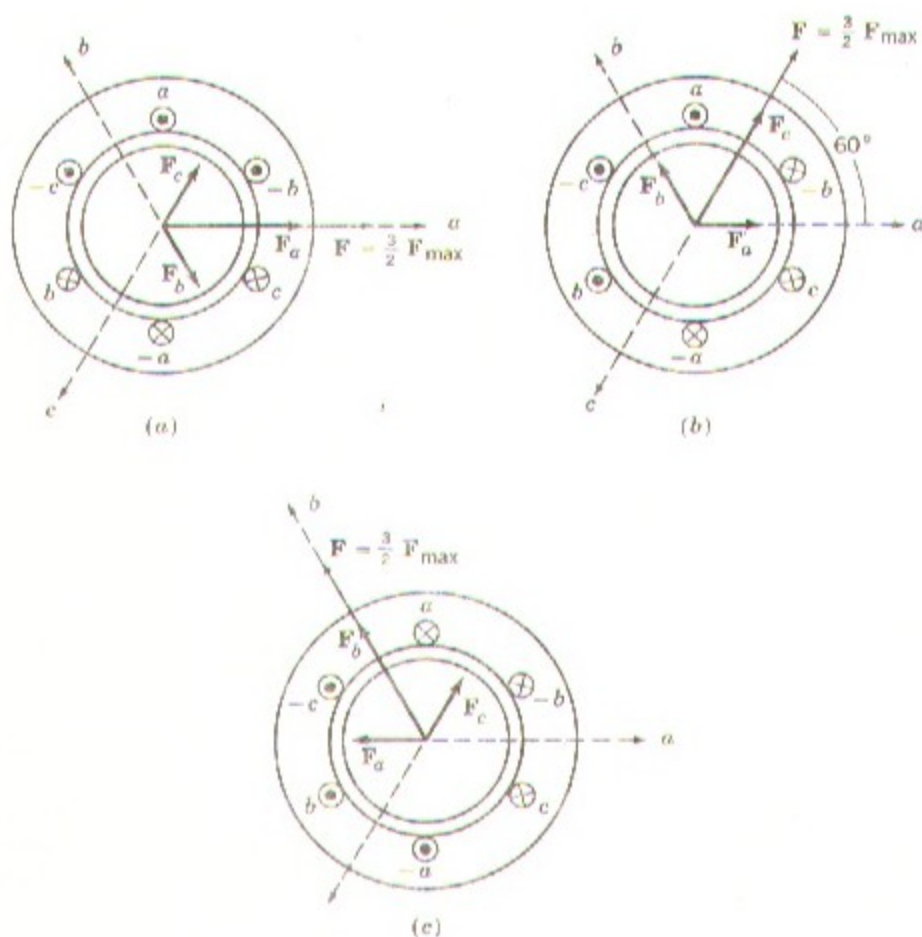


Fig. 3-28. Demostración de la creación de un campo magnético rotativo por medio de corrientes trifásicas.

b. Estudio analítico

Para estudiar analíticamente el campo resultante situemos el origen de los ángulos θ en el eje de la fase a (Fig. 3-26). En el momento t , las tres fases contribuyen en la f.m.m. existente en un punto cualquiera θ del entrehierro.

La contribución de la fase a es

$$F_{a(\text{punto})} \cos \theta$$

siendo $F_{a(\text{punto})}$ la amplitud de la onda componente en el instante t .

De igual forma, la contribución de las bases *b* y *c* es:

$$F_{b(\text{punta})} \cos(\theta - 120^\circ)$$

y

$$F_{c(\text{punta})} \cos(\theta - 240^\circ)$$

respectivamente. Los 120 grados de desplazamiento son debidos a que la máquina está devanada de tal forma que los ejes correspondientes a cada una de las tres fases están desfasados 120 grados eléctricos entre sí. La f.m.m. resultante en el punto θ será por tanto:

$$\bar{s}(\theta) = F_{a(\text{punta})} \cos \theta + F_{b(\text{punta})} \cos(\theta - 120^\circ) + F_{c(\text{punta})} \cos(\theta - 240^\circ) \quad (3-29)$$

Pero la amplitud de la onda de f.m.m. varía en el tiempo de acuerdo con las variaciones de intensidad, y por consiguiente, tomando arbitrariamente como origen de tiempos el momento en que la intensidad en la fase *a* pasa por su máximo positivo tendremos:

$$F_{a(\text{punta})} = F_{a(\text{max})} \cos \omega t \quad (3-30)$$

$$F_{b(\text{punta})} = F_{b(\text{max})} \cos(\omega t - 120^\circ) \quad (3-31)$$

y

$$F_{c(\text{punta})} = F_{c(\text{max})} \cos(\omega t - 240^\circ) \quad (3-32)$$

$F_{a(\text{max})}$, $F_{b(\text{max})}$ y $F_{c(\text{max})}$ son los valores máximos en el tiempo de las amplitudes $F_{a(\text{punta})}$, $F_{b(\text{punta})}$ y $F_{c(\text{punta})}$. Aquí aparecen los 120 grados de desplazamiento debido a que las tres intensidades están desfasadas en el tiempo dichos 120 grados. Puesto que las tres fases están equilibradas y por consiguiente tienen la misma amplitud, $F_{a(\text{max})}$, $F_{b(\text{max})}$ y $F_{c(\text{max})}$ serán iguales entre sí pudiéndose representar todas ellas simplemente con el símbolo F_{max} . De acuerdo con esto, la ecuación 3-29 se convierte en:

$$\bar{s}(\theta, t) = F_{\text{max}} \cos \theta \cos \omega t + F_{\text{max}} \cos(\theta - 120^\circ) \cos(\omega t - 120^\circ) + F_{\text{max}} \cos(\theta - 240^\circ) \cos(\omega t - 240^\circ) \quad (3-33)$$

Cada uno de los tres sumandos o componentes del segundo miembro de la ecuación 3-33 es una onda estacionaria pulsatoria. En dichos sumandos la función trigonométrica de θ indica que la distribución en el espacio es una senoide estacionaria, mientras que la función trigonométrica de t indica que su amplitud es pulsatoria en el tiempo.

El primer sumando expresa la componente debida a la fase *a*, mientras que el segundo y el tercero expresan las debidas a las fases *b* y *c* respectivamente.

Utilizando la conocida transformación trigonométrica

$$\cos \alpha \cos \beta = 1/2 \cos(\alpha - \beta) + 1/2 \cos(\alpha + \beta) \quad (3-34)$$

podremos expresar cada una de las componentes de la ecuación 3-33 en función de los

cosenos de sumas y diferencias de ángulos, es decir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\theta, t) = & 1/2F_{\max} \cos(\theta - \omega t) + 1/2F_{\max} \cos(\theta + \omega t) + \\ & + 1/2F_{\max} \cos(\theta - \omega t) + 1/2F_{\max} \cos(\theta + \omega t - 240^\circ) + \\ & + 1/2F_{\max} \cos(\theta - \omega t) + 1/2F_{\max} \cos(\theta + \omega t - 480^\circ) \end{aligned} \quad (3-35)$$

Los tres términos en los que interviene el coseno de los ángulos $\theta + \omega t$, $\theta + \omega t - 240^\circ$ y $\theta + \omega t - 480^\circ$ son tres senoides iguales defasadas 120 grados entre sí (obsérvese que un ángulo de 480° en retraso es igual a uno de $480^\circ - 360^\circ = 120^\circ$ también en retraso): siendo su suma igual a cero, y por consiguiente la ecuación 3-35 se reduce a:

$$\mathfrak{F}(\theta, t) = 3/2F_{\max} \cos(\theta - \omega t) \quad (3-36)$$

que constituye la expresión de la onda de f.m.m. resultante.

Esta onda es una función senoidal del ángulo θ : su amplitud es constante y su fase en el espacio viene dada por el ángulo ωt que es función lineal del tiempo. Este ángulo ωt determina la rotación del campo completo alrededor del entrehierro a la velocidad angular uniforme ω , es decir, que en un momento dado t_x la onda es una senoide en el espacio con su máximo positivo desplazado ωt_x radianes eléctricos del punto fijado como origen de θ , y en otro momento posterior t_y , el mismo máximo está desplazado ωt_y del citado origen, habiendo girado $\omega(t_y - t_x)$ alrededor del entrehierro. En el instante $t = 0$, la intensidad en la fase a pasa por un máximo y la punta positiva de la onda de f.m.m. coincide con el eje de dicha fase; transcurrido un tercio de ciclo es la intensidad en la fase b la que pasa por su máximo y la punta positiva de la onda estará orientada según el eje de la misma, y así sucesivamente.

La velocidad angular de la onda, o del campo, es $\omega = 2\pi f$ radianes eléctricos por segundo. En una máquina de P polos su velocidad de giro es de

$$\omega_m = \frac{2}{P} \omega \quad \text{radianes/seg.} \quad (3-37)$$

o bien,
$$n = \frac{120f}{P} \quad \text{r.p.m.} \quad (3-38)$$

resultados que concuerdan con las ecuaciones 3-2 y 3-3.

En general se podría demostrar que un devanado de q fases excitado por una corriente q -fásica equilibrada engendrará un campo magnético giratorio de amplitud constante, siempre que los devanados de cada una de las fases estén desfasados entre sí $2\pi/q$ radianes eléctricos en el espacio. La amplitud constante será $q/2$ veces mayor que la contribución máxima de una fase cualquiera, y la velocidad será $\omega = 2\pi f$ radianes eléctricos por segundo.

Un devanado polifásico excitado por una corriente polifásica equilibrada produce los mismos efectos que el giro de un imán permanente alrededor de un eje normal al mismo, o que la rotación de un inductor excitado con corriente continua.

3-5. EL PAR EN MAQUINAS DE POLOS NO SALIENTES

El funcionamiento de cualquier dispositivo electromagnético, como componente de un sistema electromecánico, puede definirse en función de las ecuaciones de tensión según la ley de Kirchhoff y de su par electromagnético. En este apartado deduciremos las ecuaciones de tensiones y de par relativas a una máquina elemental ideal: los resultados obtenidos pueden aplicarse luego a máquinas más complejas. Para la deducción partiremos de dos puntos de vista distintos, demostrando que básicamente ambos provienen de las mismas ideas.

El primer punto de partida es esencialmente el mismo del apartado 2-6: consideraremos la máquina como un elemento del circuito cuya impedancia depende de la posición angular del rotor. Los flujos concatenados y la coenergía del campo magnético se expresarán en función de las intensidades e inductancias: así puede determinarse el par por la derivada parcial de la energía o coenergía del campo respecto al ángulo, y la tensión en bornes como suma de la caída Ri en las resistencias y de la tensión inducida $d\lambda/dt$ según la ley de Faraday. Como resultado tendremos una serie de ecuaciones diferenciales no lineales que definirán el comportamiento dinámico de la máquina.

El segundo punto de partida considera la máquina como dos grupos de devanados, uno en el estator y otro en el rotor, que crean sendos campos magnéticos en el entrehierro. Haciendo algunos supuestos pertinentes respecto a estos campos se puede llegar, en función de sus datos, a expresiones sencillas para los flujos concatenados y para la energía almacenada en el entrehierro, y en función de estas cantidades calcular el par y las tensiones. Así, el par queda expresado como la tendencia de dos campos a alinearse entre sí al igual que sucede con los imanes permanentes, y la tensión inducida se expresa como resultado del movimiento relativo entre un campo y un devanado. Estas expresiones conducen a una imagen física sencilla del funcionamiento normal en régimen permanente de las máquinas rotativas.

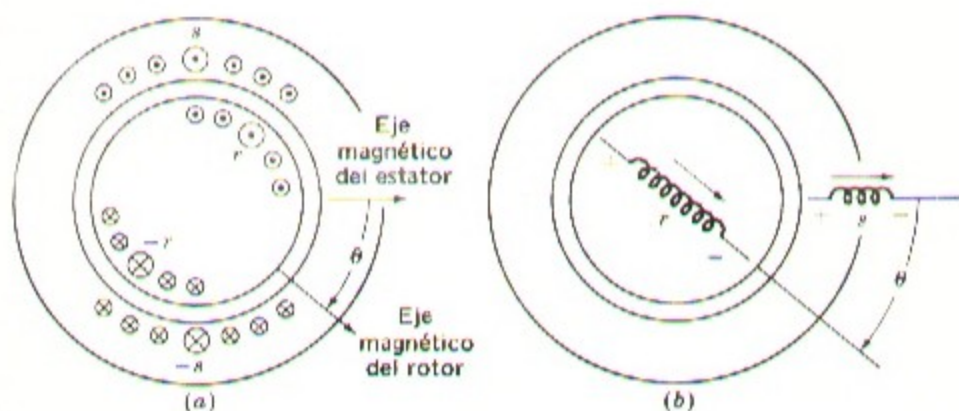


Fig. 3-29. Máquina elemental de dos polos con entrehierro liso. (a) Distribución de los devanados. (b) Representación esquemática.

a. Estudio partiendo del circuito acoplado

Consideremos la máquina elemental de la Fig. 3-29 con un devanado en el estator y otro en el rotor, distribuidos entre un cierto número de ranuras de forma que la onda de distribución de f.m.m. en el espacio sea aproximadamente senoidal. En la Fig. 3-29 *a* los laterales de bobina $s, -s$ y $r, -r$ señalan la posición central de la zona abarcada por los conductores que forman los devanados distribuidos, pudiéndose representar también estos devanados en la forma hecha en la Fig. 3-29 *b*, en la que figura también la dirección de las intensidades y de las tensiones. Se ha admitido que una intensidad circulando en la dirección de la flecha crea en el entrehierro un campo de igual dirección, de forma que con una sola flecha quedan indicadas ambas direcciones, de corriente y de flujo. El estator y el rotor son cilindros concéntricos habiéndose despreciado las aberturas de las ranuras, con lo que en nuestro modelo elemental no se incluyen los efectos de los polos salientes, que serán estudiados en otro capítulo. Asimismo supondremos que la reluctancia del hierro, tanto en el rotor como en el estator, es despreciable.

Bajo estos supuestos, las autoinductancias del rotor L_{rr} y del estator L_{ee} son constantes, pero la inductancia mutua estator-rotor depende del ángulo θ formado por los ejes magnéticos de sus respectivos devanados. La inductancia mutua tiene un máximo positivo cuando $\theta = 0$ ó 2π ; se anula cuando $\theta = \pm \pi/2$, y tiene un máximo negativo cuando $\theta = \pm \pi$. Si las ondas de distribución de f.m.m. son senoidales y el entrehierro uniforme, la distribución espacial de la onda de flujo en el entrehierro es también senoidal, y la inductancia mutua es:

$$\mathcal{L}_{er}(\theta) = L_{er} \cos \theta \quad (3-39)$$

en la que se ha empleado la letra cursiva \mathcal{L} para indicar una inductancia que es función del ángulo eléctrico θ , mientras que L mayúscula indica un valor constante, que es el de la inductancia mutua cuando coinciden los ejes magnéticos de rotor y estator. En función de las inductancias los flujos concatenados en el rotor λ_r , y en el estator λ_e , son:

$$\lambda_e = L_{ee}i_e + \mathcal{L}_{er}(\theta)i_r = L_{ee}i_e + L_{er}i_r \cos \theta \quad (3-40)$$

$$\lambda_r = \mathcal{L}_{er}(\theta)i_e + L_{rr}i_r = L_{er}i_e \cos \theta + L_{rr}i_r \quad (3-41)$$

y en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \lambda_e \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ee} & \mathcal{L}_{er}(\theta) \\ \mathcal{L}_{er}(\theta) & L_{rr} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i_e \\ i_r \end{bmatrix}$$

Las tensiones en terminales v_e y v_r son:

$$v_e = R_e i_e + p \lambda_e \quad (3-42)$$

$$v_r = R_r i_r + p \lambda_r \quad (3-43)$$

siendo R_e y R_r las resistencias de los respectivos devanados y p el operador derivado respecto al tiempo d/dt . Cuando el rotor gira, θ debe considerarse como variable. Derivando las ecuaciones 3-40 y 3-41 y sustituyendo los resultados en las 3-42 y 3-43 tendremos:

$$v_e = R_e i_e + L_{ee} p i_e + L_{er} \cos \theta (p i_r) - L_{er} i_r \sin \theta (p \theta) \quad (3-44)$$

$$v_r = R_r i_r + L_{rr} p i_r + L_{er} \cos \theta (p i_e) - L_{er} i_e \sin \theta (p \theta) \quad (3-45)$$

siendo $p\theta$ la velocidad instantánea ω en radianes eléctricos por segundo. En una máquina de dos polos θ y ω coinciden con los valores instantáneos del ángulo geométrico θ_m y de la velocidad mecánica ω_m respectivamente, mientras que en una de P polos dichos valores están relacionados según las ecuaciones 3-1 y 3-3. Los segundos y terceros términos del segundo miembro de las ecuaciones 3-44 y 3-45 son tensiones inducidas $L di/dt$ semejantes a las inducidas en circuitos estáticos acoplados tales como los devanados de los transformadores. Los cuartos términos son debidos al movimiento mecánico, y son proporcionales a la velocidad instantánea: son términos de acoplamiento que relacionan el intercambio de potencia entre los sistemas eléctrico y mecánico.

El par electromagnético puede determinarse valiéndose de la coenergía del campo magnético en el entrehierro. De la ecuación 2-71:

$$W'_{\text{camp}} = 1/2 L_{ee} i_e^2 + 1/2 L_{rr} i_r^2 + L_{er} i_e i_r \cos \theta \quad (3-46)$$

y de la 2-69:

$$T = + \frac{\partial W'_{\text{camp}}(\theta_m, i_e i_r)}{\partial \theta_m} = + \frac{\partial W'_{\text{camp}}(\theta, i_e i_r)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{d\theta_m} \quad (3-47)$$

siendo T el par electromagnético que actúa en el sentido positivo de θ_m . Las derivaciones deben hacerse respecto al ángulo geométrico real θ_m ya que estamos operando con variables mecánicas. Las derivadas de las ecuaciones 3-46 y 3-1 nos dan, para una máquina de P polos:

$$T = - \frac{P}{2} L_{er} i_e i_r \sin \theta = - \frac{P}{2} L_{er} i_e i_r \sin \frac{P}{2} \theta_m \quad (3-48)$$

viendo T expresado en newton-metros. El signo negativo que aparece en esta última ecuación indica que el par electromagnético actúa en el sentido en que tiende a enfrentar los campos magnéticos de rotor y estator.

Las ecuaciones 3-44, 3-45 y 3-48 constituyen un conjunto de tres ecuaciones diferenciales que relacionan entre sí las variables eléctricas v_e , i_e , v_r , i_r y las variables mecánicas T y θ_m . Estas ecuaciones, junto con las limitaciones impuestas a las variables eléctricas por la red exterior conectada a sus terminales (alimentación o carga e impedancias exteriores) o a las variables mecánicas (pares aplicados, inercia, fricciones y resistencia del aire)

determinan el comportamiento del dispositivo como elemento de acoplamiento. Salvo algunos casos especiales, la resolución es dificultosa al existir ecuaciones diferenciales no lineales. No entraremos aquí en su resolución, pero las utilizamos como medio de ir desarrollando la teoría de máquinas rotativas.

Consideremos una máquina de entrehierro uniforme que contenga varios devanados tanto en el estator como en el rotor: podremos aplicar a ella los mismos principios generales aplicados al modelo elemental de la Fig. 3-29. Cada devanado tiene su propia autoinducción y su inducción mutua con los restantes. Las autoinducciones y las inducciones mutuas entre pares de devanados situados en el mismo lado del entrehierro son constantes bajo el supuesto de que el entrehierro es uniforme y la saturación magnética despreciable, pero entre devanados situados a uno y otro lado del entrehierro su inducción mutua varía con el coseno del ángulo formado por sus respectivos ejes magnéticos. El par nace de la tendencia a enfrentarse los campos creados por los devanados del rotor con los creados por los del estator, y puede expresarse como suma de términos semejantes a la ecuación 3-48.

Ejemplo 3-1

Consideremos la máquina rotativa elemental de la Fig. 3-29. Su eje está acoplado a un sistema que puede ceder o absorber energía mecánica dentro de una amplia gama de velocidades. Esta máquina puede conectarse y trabajar de distintas formas: por ejemplo, supóngase que el devanado del rotor se excita con una corriente continua I_r y el del estator se conecta a una red de alterna capaz de absorber o ceder energía eléctrica.

Sea la corriente en el estator

$$i_e = I_e \cos \omega_e t$$

elijendo como origen de tiempos, $t = 0$, el momento en el que la corriente del estator pasa por su valor punta.

- Hállese la fórmula del par magnético desarrollado por la máquina al variar la velocidad actuando sobre el sistema mecánico acoplado a su eje.
- Hállese la velocidad en la que se consigue un par medio no nulo, siendo la frecuencia en el estator de 50 Hz.
- Con las excitaciones citadas, ¿cuáles son las tensiones inducidas en los devanados del estator y del rotor cuando la máquina gira a la velocidad de sincronismo?

SOLUCION

- a. La ecuación 3-48 aplicada a una máquina de dos polos es:

$$T = -L_{er} i_e i_r \sin \theta_m$$

que dadas las condiciones de este problema se convierte en:

$$T = -L_{er} I_e I_r \cos \omega_e t \sin (\omega_m t \pm \delta)$$

en la que ω_m es la velocidad angular en sentido dextrógiro comunicada al rotor por el sistema mecánico, y δ es la posición angular del rotor en el instante $t = 0$.

Con la transformación trigonométrica

$$\begin{aligned} \text{sen } A \cos B &= 1/2 \text{ sen } (A + B) + 1/2 \text{ sen } (A - B) \\ T &= -1/2 L_{er} I_e I_r \left\{ \text{sen } [(\omega_m + \omega_e)t + \delta] + \text{sen } [(\omega_m - \omega_e)t + \delta] \right\} \end{aligned}$$

El par consta de dos términos senoidales, variables con el tiempo, de frecuencias $\omega_m + \omega_e$ y $\omega_m - \omega_e$.

b. Excepto cuando $\omega_m = \pm \omega_e$, el par medio a lo largo de un tiempo suficientemente grande es cero. Si $\omega_m = + \omega_e$ el par será:

$$T = -1/2 L_{er} I_e I_r [\text{sen } (2\omega_e t + \delta) + \text{sen } \delta]$$

El primer término senoidal es una componente cuyo valor promedio es cero, y el segundo término es el par, de valor promedio

$$T_{pr} = -1/2 L_{er} I_e I_r \text{ sen } \delta$$

El otro caso, en el que $\omega_m = - \omega_e$, se reduce simplemente a que la rotación sea en sentido contrario. El signo negativo en la fórmula del par magnético indica que éste tiende a disminuir δ : la máquina no es más que una máquina síncrona monofásica ideal. (En máquinas síncronas polifásicas el sentido de giro viene determinado por la secuencia de fases, como se ha visto en el apartado 3-4.)

Si la frecuencia de la corriente del estator es de 50 Hz,

$$\omega_m = \omega_e = 2\pi \cdot 50 \quad \text{radianes/segundo,}$$

equivalentes a 50 revoluciones por segundo, o 3000 r.p.m.

c. Siendo $\omega_m = \omega_e$, la tensión inducida en el estator es, según el segundo y cuarto términos de la ecuación 3-44,

$$e_e = -\omega_e L_{ee} I_e \text{ sen } \omega_e t - \omega_e L_{er} I_r \text{ sen } (\omega_e t + \delta)$$

y la inducida en el rotor, según el tercero y cuarto términos de la ecuación 3-45, es de:

$$\begin{aligned} e_r &= -\omega_e L_{er} I_e [\text{sen } \omega_e t \cos (\omega_e t + \delta) + \cos \omega_e t \text{ sen } (\omega_e t + \delta)] \\ &= -\omega_e L_{er} I_e \text{ sen } (2\omega_e t + \delta) \end{aligned}$$

La corriente del estator induce en el rotor una tensión de frecuencia doble.

b. Estudio partiendo del campo magnético

En el estudio anterior las características del dispositivo, vistas desde sus terminales eléctricos y mecánicos, quedan expresadas en función de las inductancias: este procedimiento penetra poco en los fenómenos internos y no da idea de los efectos de las dimensiones físicas. Estudiando el asunto en función de la interacción de los campos magnéticos en el entrehierro se suplirán algunas de estas deficiencias.

Las intensidades en los devanados de la máquina crean flujos magnéticos en el entrehierro que cierran su circuito a través del hierro del estator y del rotor. En estas condiciones aparecen sendos polos magnéticos, tanto en el estator como en el rotor, centrados con sus respectivos ejes magnéticos, como puede verse, para una máquina de dos polos y entrehierro liso, en la Fig. 3-30 *a*. El par nace debido a la tendencia de los dos campos componentes a alinear entre sí sus respectivos ejes, como sucede con dos varillas imanadas libres de pivotar por sus centros alrededor de un eje común, y su valor es proporcional al producto de las amplitudes de las ondas de f.m.m. del estator y del rotor, siendo a su vez función del ángulo δ_{er} formado por sus respectivos ejes magnéticos. Demostraremos que en una máquina de entrehierro liso, el par es proporcional al seno de δ_{er} .

La mayor parte del flujo creado por los devanados (aproximadamente el 90 % en máquinas clásicas) cruza el entrehierro y concatena con ambos devanados: este flujo se denomina *flujo mutuo*. Una pequeña proporción del flujo, sin embargo, no cruza el entrehierro concatenando con uno solo de los devanados, sea el del estator o el del rotor, constituyendo respectivamente el *flujo disperso del estator* y el *flujo disperso del rotor* en el que se comprende la dispersión en las ranuras, en los extremos del dentado, en las conexiones de bobinas y los armónicos del campo. A efectos del par, únicamente interviene el flujo mutuo; los de dispersión influyen en el rendimiento de la máquina en virtud de las tensiones inducidas en su propio devanado, y su influencia en las características eléctricas se toma en consideración a través de *inductancias de dispersión* al igual que en los transformadores.

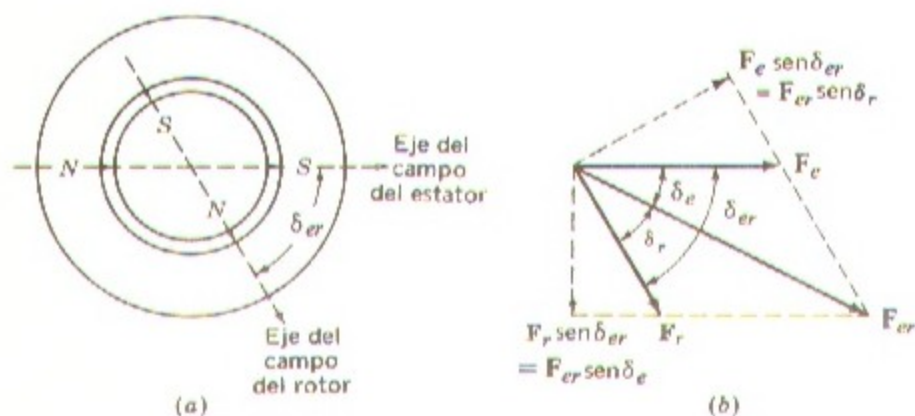


Fig. 3-30. Máquina de dos polos simplificada. (a) Modelo elemental, y (b) diagrama vectorial de las ondas de f.m.m.

Así pues, el análisis debe realizarse en función del flujo mutuo: deduciremos la fórmula de la coenergía almacenada en el entrehierro en función de las f.m.m. del estator y del rotor, y del ángulo δ_{er} formado por sus respectivos ejes. Seguidamente podrá calcularse el par por la derivada parcial de la coenergía respecto al ángulo δ_{er} .

Admitiremos que la componente tangencial del campo en el entrehierro es despreciable frente a la componente radial, es decir, que el flujo mutuo cruza normalmente el entrehierro, y admitiremos también que el espesor g de éste es pequeño comparado con su radio: con estos supuestos, la densidad de flujo es prácticamente la misma en la superficie del rotor que en la del estator o en cualquier punto intermedio: de esta forma, el campo en el entrehierro queda reducido a un campo radial \mathcal{H} o \mathcal{H} , cuya intensidad varía con el ángulo alrededor de la periferia. En estas condiciones, la integral de \mathcal{H} a lo largo del espesor del entrehierro es simplemente $\mathcal{H}g$, igual a la f.m.m. \mathcal{F}_{er} resultante de los dos devanados, es decir:

$$\mathcal{H}g = \mathcal{F}_{er} \quad (3-49)$$

en la que \mathcal{F} corresponde a la onda de f.m.m., como función del ángulo alrededor de la periferia.

Las ondas de f.m.m. del estator y del rotor son ambas senoidales defasadas entre sí δ_{er} grados eléctricos, y pueden representarse mediante los vectores F_e y F_r , trazados sobre los respectivos ejes magnéticos como se muestra en la Fig. 3-30 *b*. La f.m.m. resultante F_{er} que actúa en el entrehierro, es la suma de las dos anteriores, y por consiguiente es también vectorial, siendo su valor de punta, deducido trigonométricamente como diagonal de un paralelogramo:

$$F_{er}^2 = F_e^2 + F_r^2 + 2F_e F_r \cos \delta_{er} \quad (3-50)$$

en la que las F representan los valores punta de las respectivas ondas de f.m.m.

El campo radial resultante \mathcal{H} es también senoidal en el espacio, siendo su valor de punta, deducido de la ecuación 3-49:

$$\mathcal{H}_{punta} = \frac{F_{er}}{g} \quad (3-51)$$

Consideremos ahora la coenergía almacenada en el campo del entrehierro. La densidad de coenergía en un punto en el que la intensidad del campo es \mathcal{H} vale

$$\frac{\mu_0}{2} \mathcal{H}^2$$

en unidades MKS. La densidad de coenergía media en todo el volumen del entrehierro es:

$$\frac{\mu_0}{2} (\text{valor medio de } \mathcal{H}^2)$$

El valor medio del cuadrado de una onda senoidal es igual a la mitad de su valor punta, por consiguiente

$$\text{Densidad media de coenergía} = \frac{\mu_0}{2} \frac{H_{\text{punta}}^2}{2} = \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{F_{\text{ex}}}{g} \right)^2 \quad (3-52)$$

y la coenergía total:

$$\begin{aligned} W'_{\text{camp}} &= (\text{densidad media de coenergía}) (\text{volumen del entrehierro}) \\ &= \frac{\mu_0}{4} \left(\frac{F_{\text{ex}}}{g} \right)^2 \pi D l g = \frac{\mu_0 \pi D l}{4g} F_{\text{er}}^2 \end{aligned} \quad (3-53)$$

en la que D es el diámetro medio del entrehierro, l su longitud axial, g su espesor radial y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$, estando todas las dimensiones en metros.

Según la ecuación 3-50, podremos expresar ahora la coenergía almacenada en el entrehierro en función de los valores punta de las amplitudes de las ondas de f.m.m. del estator y del rotor y del defase entre ellas, y así tendremos:

$$W'_{\text{camp}} = \frac{\mu_0 \pi D l}{4g} (F_e^2 + F_r^2 + 2F_e F_r \cos \delta_{\text{er}}) \quad (3-54)$$

De aquí podremos deducir el par electromagnético T en función de la interacción entre campos, por medio de la derivada parcial de la coenergía respecto al ángulo. Para una máquina de dos polos tendremos:

$$T = + \frac{\partial W'_{\text{camp}}}{\partial \delta_{\text{er}}} = - \frac{\mu_0 \pi D l}{2g} F_e F_r \sin \delta_{\text{er}} \quad (3-55)$$

Esta ecuación aplicada a una máquina de P polos da el par correspondiente a cada par de ellos: el par total de la máquina será:

$$T = - \frac{P}{2} \frac{\mu_0}{2} \frac{\pi D l}{g} F_e F_r \sin \delta_{\text{er}} \quad (3-56)$$

Esta importante ecuación demuestra que el par es proporcional a los valores punta F_e y F_r de las ondas de f.m.m. del estator y del rotor, y de su ángulo eléctrico de defase δ_{er} . El signo negativo indica que ambos campos tienden a alinearse entre sí.

Sobre el rotor y el estator actúan sendos pares, iguales y de sentido contrario: el último se transmite a las fundaciones de la máquina a través de su estructura.

Haciendo referencia a la Fig. 3-30 *b*, puede verse que $F_r \sin \delta_{\text{er}}$ es la componente de F_r en cuadratura con F_e y que $F_e \sin \delta_{\text{er}}$ es la componente de F_e en cuadratura con F_r , por consiguiente, el par es proporcional al producto vectorial de uno de los campos con la

componente del otro en cuadratura con él. Obsérvese también en la figura que:

$$F_e \sin \delta_{er} = F_{er} \sin \delta_r \quad (3-57)$$

y
$$F_r \sin \delta_{er} = F_{er} \sin \delta_e \quad (3-58)$$

Con lo que se puede expresar el par en función de la onda de f.m.m. *resultante* F_{er} sustituyendo la 3-37 o la 3-58 en la 3-56.

$$T = - \frac{P}{2} \frac{\pi}{2} \frac{\mu_0 D l}{g} F_e F_{er} \sin \delta_e \quad (3-59)$$

$$T = - \frac{P}{2} \frac{\pi}{2} \frac{\mu_0 D l}{g} F_r F_{er} \sin \delta_r \quad (3-60)$$

La observación de las ecuaciones 3-56, 3-59 y 3-60 muestra que puede expresarse el par en función de los campos engendrados independientemente por cada una de las corrientes, como en la 3-56, o en función del campo resultante y uno cualquiera de los componentes, como en las 3-59 y 3-60, *cuidando de tomar en cada caso el ángulo adecuado, formado por los ejes de los respectivos campos*. Para el análisis de máquinas es muy conveniente poder razonar ágilmente en cualquiera de estos términos.

En las citadas ecuaciones 3-56, 3-59 y 3-60, se han expresado los campos en función de los valores de punta de sus ondas de f.m.m.: si se prescinde de la saturación magnética es evidente que podrían expresarse también en función de sus ondas de densidad de flujo o en el del flujo total por polo. El valor punta B del campo debido a una onda de f.m.m. distribuida senoidalmente en el entrehierro uniforme de una máquina es $\mu_0 F/g$, siendo F el valor punta de dicha onda. Por ejemplo, la f.m.m. resultante F_{er} produce una onda de densidad de flujo resultante cuyo valor punta es $\mu_0 F_{er}/g$. Por tanto,

$$T = - \frac{P}{2} \frac{\pi D l}{2} B_{er} F_r \sin \delta_r \quad (3-61)$$

La saturación de los materiales magnéticos en cuanto a la densidad de flujo se refiere constituye una de las limitaciones inherentes al proyecto de aparatos electromagnéticos. Debido a dicha saturación en los dientes del inducido, el valor punta de la densidad de flujo resultante en el entrehierro B_{er} , queda limitado a aproximadamente 1 weber/m². El máximo valor de la f.m.m. está limitado por el calentamiento de los devanados y por otras exigencias de diseño. Ya que en la ecuación 3-61 aparecen en forma explícita la densidad de flujo y la f.m.m. resultante, esta fórmula es de aplicación idónea a efectos de proyecto.

Recordando que el flujo resultante por polo es:

$$\Phi = (\text{valor medio de } \mathcal{B} \text{ frente a un polo}) (\text{superficie del polo}) \quad (3-62)$$

y que el valor medio de una senoide a lo largo de una semionda es $2/\pi$ veces su valor de punta, tendremos:

$$\Phi = \frac{2}{\pi} B \frac{\pi D l}{P} = \frac{2 D l}{P} B \quad (3-63)$$

de donde B es el valor de punta correspondiente a la densidad de flujo. Sustituyendo esta última ecuación en la 3-61 se llega a:

$$T = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{2} \right)^2 \Phi_{er} F_r \sin \delta_r \quad (3-64)$$

en la que Φ_{er} es el flujo resultante del efecto combinado de las f.m.m. de estator y rotor.

Resumiendo; hemos llegado a distintas formas para expresar el par en una máquina de entrehierro uniforme en función de sus campos magnéticos. En todas ellas se pone de manifiesto que el par es proporcional a los campos actuantes y al seno del ángulo eléctrico formado por sus ejes. El signo negativo indica que el par electromagnético actúa en el sentido que tiende a reducir el ángulo de defase entre ambos campos. La fórmula 3-64 es la preferible para el estudio preliminar de máquinas tipo.

Una última observación hay que hacer respecto a las ecuaciones del par y al camino seguido hasta llegar a ellas. No hay ningún inconveniente en que las ondas de f.m.m. y de densidad de flujo permanezcan estacionarias en el espacio o que sean móviles como se ha visto en el apartado 3-4. Si los campos magnéticos de estator y rotor son de amplitud constante y giran ambos a igual velocidad, se creará un par invariable, debido a la tendencia que tienen a alinearse entre sí de acuerdo con las ecuaciones vistas.

3-6. RESUMEN

En este capítulo se ha hecho la descripción, breve y elemental, de tres tipos de máquinas rotativas: síncronas, de inducción y de continua, siendo los principios básicos de todas ellas esencialmente los mismos. Las tensiones se inducen merced al movimiento relativo de un campo magnético respecto a un devanado, y el par nace de la interacción entre los campos magnéticos de los devanados del estator y del rotor. Las características de los diversos tipos de máquinas quedan determinadas por la forma de conectar y excitar las bobinas, aun cuando, como ya queda dicho, todas se basan en principios similares.

El estudio de las máquinas rotativas se apoya en las fórmulas de las tensiones inducidas y de los pares electromagnéticos, que tomadas en conjunto expresan el acoplamiento entre los sistemas mecánico y eléctrico. Se han admitido varias aproximaciones simplificadoras con objeto de desarrollar la teoría en forma suficientemente amplia evitando el engorro y confusión a que puede conducir un exceso de detalle. Al estudiar las máquinas de corriente alterna se ha supuesto que las tensiones e intensidades varían senoidalmente con el tiempo, y que la distribución espacial de la densidad de flujo y de la f.m.m. en el

entrehierro son asimismo senoidales, con lo que la ley de Faraday conduce a la ecuación 3-16 para la tensión eficaz inducida en máquinas de alterna, y a la 3-19 para la tensión media entre escobillas en las de continua. Al analizar la f.m.m. de los devanados de alterna distribuidos, se ha puesto de manifiesto con las ecuaciones 3-22 y 3-23 que la componente fundamental es la de mayor importancia, mientras que en las máquinas de continua, la distribución de la f.m.m. del devanado inducido es más bien triangular (ecuación 3-24); no obstante, en el estudio preliminar desarrollado en este capítulo se ha supuesto una distribución senoidal tanto en las máquinas de alterna como en las de continua. En el capítulo 5 veremos este asunto con mayor detalle en lo que a las de continua se refiere.

Se ha visto también que la f.m.m. creada por un devanado trifásico alimentado por una corriente equilibrada produce en el entrehierro un campo magnético de amplitud constante que gira a la velocidad de sincronismo, como se demuestra con la Fig. 3-28 y ecuación 3-36. La importancia de este hecho no puede ser desestimada, ya que significa que el par variable de frecuencia doble, relacionado con la componente, también de frecuencia doble, de la potencia instantánea en un sistema monofásico, queda eliminado en un sistema trifásico equilibrado como se demuestra en el Apéndice A. ¡Imaginemos un generador de varios megawatt de potencia a 50 Hz, o un motor de muchos caballos sometidos a pulsaciones de varios megawatt de potencia instantánea a 100 Hz! El descubrimiento de los campos giratorios condujo a la invención de los sencillos, robustos y eficientes motores polifásicos de inducción, que arrancan por sí mismos, que veremos brevemente en el apartado 4-2 y con mayor detalle en el capítulo 7 (un motor de inducción monofásico no arranca por sí mismo, sino que requiere un devanado auxiliar de puesta en marcha como veremos en el capítulo 11), y también ha permitido la construcción de alternadores síncronos de gran potencia. El gran auge en el empleo de corrientes trifásicas en la generación, transporte y utilización de energía es debido a los campos giratorios en motores y alternadores.

Habiendo supuesto una distribución senoidal de los campos en el entrehierro, se han deducido las fórmulas del par magnético, cuyo símil físico sería el de dos imanes, uno de ellos en el estator y el otro unido al rotor como se representa esquemáticamente en la Fig. 3-30 *a*. El par actúa en el sentido en que tiende a alinear los imanes. Con objeto de llegar a un análisis cuantitativo suficiente sin demasiadas complicaciones de detalle se ha supuesto que el entrehierro es liso y que la reluctancia en el hierro de los circuitos magnéticos es despreciable, reservándonos tratar nuevamente esta cuestión en los capítulos 5 y 6.

En el apartado 3-5 se ha deducido el par magnético partiendo de dos puntos de vista distintos, basados ambos en los principios fundamentales expuestos en el capítulo 2. El primero de ellos considera la máquina como un conjunto de circuitos acoplados magnéticamente cuyas inductancias dependen de la posición angular del rotor (apartado 3-5 *a*), y el segundo la estudia a partir de los campos magnéticos en el entrehierro (apartado 3-5 *b*). Se ha demostrado que puede expresarse el par como producto de los campos del rotor y del estator y del seno del ángulo formado por sus respectivos ejes magnéticos, como en la ecuación 3-56, o de cualquiera de las formas derivadas de la misma. Los dos puntos de vista se complementan, y entre ambos ayudan a comprender el funcionamiento de las máquinas.

Este capítulo, basado en los principios en que se apoya la teoría de las máquinas rotativas, es evidentemente incompleto dejando sin contestar muchas cuestiones: ¿Cómo debemos aplicar estos principios para determinar las características de las máquinas síncronas, de inducción o de continua? ¿Cuáles son los problemas prácticos que en las máquinas reales presentan el hierro, el cobre y los aislamientos? ¿Qué consideraciones de orden técnico o económico influyen en la aplicación de las máquinas rotativas? ¿Cuáles son los factores físicos que limitan el campo en el que las máquinas pueden trabajar con eficiencia? En el capítulo 4 se estudiarán algunos de estos problemas, y tomados en conjunto, los capítulos 3 y 4 sirven como introducción al estudio más detallado de que son objeto los capítulos 5 al 11.

PROBLEMAS

3-1. El objeto de este problema es el de demostrar que el devanado inducido de algunas máquinas (por ejemplo las de continua) es aproximadamente equivalente a una corriente laminar uniforme, siendo esta equivalencia tanto más aproximada cuanto mayor sea el número de ranuras en las que se distribuya el devanado: Para ello consideremos un inducido con S ranuras distribuidas uniformemente sobre 360 grados eléctricos, o sea sobre un par de polos. El espesor del entrehierro se supone uniforme, la abertura de las ranuras muy pequeña y la reluctancia del hierro despreciable.

Dibújese el desarrollo de 360 grados eléctricos del inducido, como en la Fig. 3-24 *a*, y numérense las ranuras del 1 al 8 empezando por la izquierda. El devanado consta de ocho bobinas de una sola espira cada una por las que circula una corriente continua de intensidad 10 A. En los laterales de bobina situados en las ranuras 1 al 4 el sentido de la corriente es desde el observador hacia el plano del dibujo, y en los situados en las ranuras 5 al 8 en sentido contrario, es decir, emergiendo del plano del dibujo.

- a.* Supongamos que las ocho bobinas están colocadas con uno de sus laterales en la ranura 1 y el otro en la 5, permaneciendo vacías las restantes. Dibújese la onda rectangular de f.m.m. generada por estas bobinas.
- b.* Si de las ocho bobinas cuatro de ellas tienen un lateral en la ranura 1 y el otro en la 5 mientras que las otras cuatro los tienen en las ranuras 3 y 7, dibújense las ondas de f.m.m. creadas por cada uno de los grupos, y superpónganse estas componentes para tener la onda resultante.
- c.* Consideremos ahora que dos bobinas están situadas en las ranuras 1 y 5, otras dos en las 2 y 6, dos más en las 3 y 7 y las dos últimas en las 4 y 8. Superpónganse las respectivas ondas rectangulares componentes para obtener la resultante. Obsérvese que puede racionalizarse y simplificarse el trabajo recordando que la onda de f.m.m. es simétrica respecto a su eje y que forma un escalonamiento frente a cada ranura que está íntimamente relacionado con el número de amperes-conductores alojados en la misma.
- d.* Dibújese la onda de f.m.m. resultante en el caso de que el inducido tuviera 16 ranuras en los 360 grados eléctricos, alojándose un solo lateral de bobina en cada una de ellas.

e. Compárese cada una de las ondas resultantes desde (a) hasta (d) con un triángulo isósceles, y obsérvese que la aproximación es tanto mayor cuanto más distribuido esté el devanado.

3-2. La Fig. 3-31 muestra la sección transversal de una máquina con un devanado ff en el rotor y dos devanados iguales aa y bb en el estator. La autoinducción de cada uno de

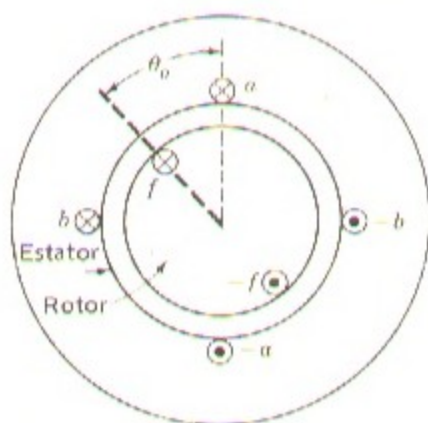


Fig. 3-31. Máquina síncrona elemental, bifásica, con rotor cilíndrico, del problema 3-2.

los devanados del estator es L_{aa} henry, y la del devanado del rotor L_{ff} henry. El entrehierro es uniforme. Los dos devanados del estator están en cuadratura y la inductancia mutua entre cada uno de ellos y el del rotor depende de la posición angular θ_0 de éste, pudiéndose admitir que:

$$M_{af} = M \cos \theta_0 \quad M_{bf} = M \sin \theta_0$$

siendo M el valor máximo de la inductancia mutua. La resistencia de cada uno de los devanados del estator es de R_a ohm.

- Dedúzcase una fórmula general del par T en función del ángulo θ_0 , de las inductancias, y del valor instantáneo de las corrientes i_a , i_b e i_f . ¿Puede aplicarse esta fórmula a máquina parada? ¿y cuando el rotor gira?
- Supóngase que el rotor se mantiene inmóvil y que las intensidades continuas en los devanados son: $I_a = 5$ A, $I_b = 5$ A, $I_f = 10$ A, todas ellas en los sentidos señalados con puntos y cruces en la Fig. 3-31. Si el rotor es susceptible de moverse: ¿girá continuamente, o tenderá a detenerse? En este último caso, ¿en qué valor de θ_0 ?

- c. Excitado el rotor con una corriente continua de intensidad I_f , y el estator con una corriente bifásica equilibrada tal que:

$$i_a = \sqrt{2} I_a \cos \omega t \quad i_b = \sqrt{2} I_a \sin \omega t$$

el rotor gira a velocidad de sincronismo, de forma que su posición angular instantánea es $\theta_0 = \omega t - \delta$, el ángulo de fase que fija la posición del rotor en el instante $t = 0$. Se trata de una máquina síncrona bifásica elemental. Hállese y discútase la fórmula del par en estas condiciones.

- d. Hállese la fórmula de la tensión instantánea en los terminales de los devanados a y b siendo las condiciones las descritas en el párrafo anterior.

3-3. La Fig. 3-32 representa la sección transversal de una máquina con dos devanados idénticos aa y bb en el estator, situados en cuadratura sobre un núcleo de acero laminado. El rotor, también de acero, es de polos salientes con un devanado f conectado a un colector de anillos rozantes. El conjunto es una máquina síncrona bifásica elemental de polos salientes.

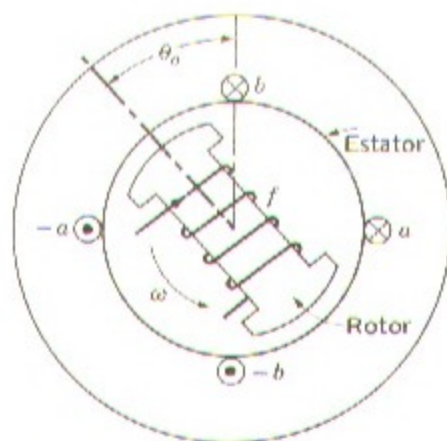


Fig. 3-32. Máquina síncrona elemental, bifásica, de polos salientes del problema 3-3.

Debido a que el entrehierro no es uniforme, las autoinducciones e inducciones mutuas de los devanados del estator son función de la posición angular θ_0 del rotor:

$$L_{aa} = L_0 + L_2 \cos 2\theta_0$$

$$L_{bb} = L_0 - L_2 \cos 2\theta_0$$

$$M_{ab} = L_2 \sin 2\theta_0$$

siendo L_0 y L_2 unas constantes positivas. Las inducciones mutuas entre el devanado del rotor y los del estator son también función de θ_0

$$M_{af} = M \cos \theta_0 \quad M_{bf} = M \sin \theta_0$$

siendo M una constante positiva. La autoinducción L_{ff} del devanado del rotor es constante e independiente de θ_0 .

El devanado del rotor o inductor f se alimenta con corriente continua de intensidad I_f , y los del estator con una tensión bifásica equilibrada, siendo sus correspondientes intensidades:

$$i_a = \sqrt{2} I_a \cos \omega t \quad i_b = \sqrt{2} I_a \sin \omega t$$

El rotor gira a la velocidad de sincronismo, siendo su posición angular instantánea

$$\theta_0 = \omega t - \delta$$

en la que δ es el ángulo de posición del rotor en el momento $t = 0$.

- Hállese y discútase la fórmula del par electromagnético que actúa sobre el rotor.
- ¿Puede esta máquina trabajar como motor? ¿y como generador? Explíquese.
- ¿Continuará girando la máquina si la corriente de excitación I_f se iguala a cero? Si esto es así, dése la fórmula del par y su explicación física.

3-4. En la Fig. 3-33 vemos un rotor de dos polos que gira en el interior de un estator liso provisto de una bobina de 100 espiras. El rotor crea un flujo distribuido senoidalmente en la superficie del estator, siendo de $0,8 \text{ wb/m}^2$ el valor punta de la onda de densidad de flujo cuando la intensidad en el rotor es de 10 A. El circuito magnético es lineal, el diámetro interior del estator de 0,10 m. y su longitud axial también de 0,10 m. El rotor gira a la velocidad de 50 rev/seg.

- Hallar la tensión instantánea inducida en la bobina del estator, estando ésta en circuito abierto, cuando la corriente de excitación es de 10 A, y tomando como origen de tiempos el momento en que el eje del rotor pasa por la posición vertical.



Fig. 3-33. Generador elemental del problema 3-4.

- b. Si excitamos ahora el rotor con una corriente alterna senoidal de 50 Hz, de intensidad 7,07 A valor eficaz, a cada media revolución se invertirá el sentido de dicha corriente; supongamos dispuestas las cosas de forma que cada vez que el eje magnético del rotor pase por su posición vertical tenga lugar una inversión, es decir, que en cada uno de esos instantes la corriente sea cero.

Hállese la fórmula de la tensión instantánea inducida en el estator en circuito abierto, tomando como origen de tiempos el momento en que el eje magnético del rotor pasa por su posición vertical.

Este esquema puede considerarse como el de un generador de continua carente de colector. El razonamiento es el siguiente: Si invertimos alternativamente las semiondas de la tensión inducida según el párrafo *a* invirtiendo la polaridad en el devanado de excitación del rotor, obtendremos en el estator una corriente continua pulsatoria: explíquese cómo funcionaría este dispositivo.

3-5. Un pequeño alternador trifásico de cuatro polos tiene el devanado inducido concentrado, conectado en Y como se representa esquemáticamente en las Figs. 3-12 *b* y 3-12 *c*. Cada bobina (representada por sus lados, por ejemplo *a*, - *a*) tiene dos espiras, y todas las espiras de una misma fase están conectadas en serie. El flujo por polo es de 0,25 wb y está distribuido senoidalmente en el espacio. El rotor gira a 1500 r.p.m.

- Hállese la tensión eficaz inducida entre una fase y el neutro (tensión simple).
- Hállese la tensión eficaz inducida entre fases (tensión compuesta).
- Sea *abc* el orden de secuencia de las fases y tómesese como origen de tiempos el momento en que el flujo concatenado con la fase *a* sea máximo. Escribáse las ecuaciones de tiempo de las tensiones respecto al neutro en los terminales de *a*, *b* y *c*.
- En las mismas condiciones del párrafo anterior, escribáse las ecuaciones de las tensiones entre fases *a* y *b*, entre *b* y *c* y entre *c* y *a*.

3-6. En una máquina bifásica equilibrada, los dos devanados están desplazados en el espacio de 90 grados eléctricos entre sí, y las intensidades en ellos están defasadas en el tiempo también 90 grados eléctricos. Búsquese el proceso para llegar a una ecuación semejante a la 3-36 aplicable a la onda giratoria de f.m.m. en una máquina como la descrita.

3-7. En el apartado 3-4, seguidamente después de haber deducido y discutido la ecuación 3-38 se dijo: "En general se podría demostrar que un devanado de *q* fases excitado por una corriente *q*-fásica equilibrada engendrará un campo magnético giratorio de amplitud constante, siempre que los devanados de cada una de las fases estén defasados entre sí $2\pi/q$ radianes eléctricos en el espacio. La amplitud constante será $q/2$ veces mayor que la contribución máxima de una fase cualquiera, y la velocidad será $\omega = 2\pi f$ radianes eléctricos por segundo".

Demuéstrense las anteriores afirmaciones.

Máquinas rotativas: Consideraciones técnicas

En el apartado 3-1 se han visto someramente las formas estructurales y el funcionamiento de las máquinas rotativas de tipos corrientes. En los cuatro apartados siguientes de este capítulo se estudiarán los principios en que se funda la teoría de las máquinas rotativas basándonos en las fórmulas de la tensión y del par expuestas en los apartados 3-2 y 3-5, así como en los campos magnéticos giratorios del apartado 3-4. El estudio desarrollado en este lugar no será ni completo ni estrictamente riguroso: algunos detalles que serán aclarados más adelante se mencionarán aquí únicamente por encima. El objetivo principal es el de dejar sentadas unas bases, apoyándonos en razonamientos físicos relativamente sencillos, que sirvan para el análisis completo que se desarrolla en los capítulos 5 a 11.

También se pretende en este capítulo examinar algunos de los problemas relacionados con las aplicaciones prácticas de las máquinas. Muchos de estos problemas están vinculados a factores físicos que limitan las condiciones en las que las máquinas pueden actuar eficientemente: entre estos factores podemos citar la saturación y los efectos de las pérdidas en el rendimiento y calentamiento de las mismas. En este capítulo se estudiarán estos problemas, que son comunes a todos los tipos de máquinas.

4-1. INTRODUCCION A LAS MAQUINAS SINCRONAS POLIFASICAS

Tal como se indicó en el apartado 3-1 *a*, en una máquina síncrona el devanado del inducido se alimenta con corriente alterna, mientras que el del inductor lo hace con una corriente continua de excitación. El devanado del inducido está casi siempre fijo en el estator, y generalmente es un bobinado tal como se ha descrito en el capítulo 3, mientras que el devanado inductor está en el rotor. El rotor de construcción cilíndrica que se

muestra en las Figs. 3-11 y 3-12 se emplea en turbogeneradores de 2 o 4 polos. La construcción con polos salientes que puede verse en la Fig. 3-9 se adapta mejor a generadores hidroeléctricos multipolares de baja velocidad, así como a la mayor parte de motores síncronos. La potencia en corriente continua requerida para la excitación, que oscila alrededor del uno por ciento de la potencia nominal de la máquina, procede generalmente, a través de anillos rozantes, de un generador de corriente continua denominado *excitatriz*, montado casi siempre sobre el mismo eje de la máquina principal. En grupos turbogeneradores grandes se emplean también excitatrices de corriente alterna y rectificadores estáticos. En el apartado 4-7 se describe uno de estos dispositivos.

Un generador síncrono único, suministrando potencia a una impedancia genera una tensión cuya frecuencia viene fijada por la velocidad de la máquina que lo mueve, de acuerdo con la fórmula 3-2. La intensidad y el factor de potencia vendrán determinados por la excitación del generador y por las impedancias del mismo y de la carga aplicada.

En general las máquinas síncronas se conectan a sistemas en los que a su vez van conectadas también otras máquinas síncronas, y entonces las tensiones y frecuencias en bornes del inducido quedan fijadas por las del sistema. Una fuente a tensión y frecuencia constantes recibe el nombre de *red de potencia infinita*. Cuando en el devanado del estator circula una corriente polifásica equilibrada, se crea en el entrehierro un campo magnético que gira a la velocidad de sincronismo (fórmulas 3-37 ó 3-38), determinada ésta por la frecuencia del sistema, mientras que el campo magnético engendrado por la corriente continua en el devanado del rotor gira con éste. Para que nazca y se mantenga un par motor constante y unidireccional es necesario que los campos giratorios del estator y del rotor se desplacen a la misma velocidad, y por tanto el rotor deberá moverse precisamente a la velocidad de sincronismo. Un motor síncrono no tiene de por sí par de arranque alguno, por lo que para ponerlo en marcha y acelerarlo hasta la velocidad de sincronismo se requiere un medio auxiliar tal como es el arranque como motor de inducción, según se describe brevemente hacia el final del apartado 4-2.

El comportamiento de un motor síncrono en condiciones de marcha puede apreciarse observando la fórmula 3-64 del par: así

$$T = \frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{2} \right)^2 \Phi_{er} F_r \operatorname{sen} \delta_r \quad (4-1)$$

en la que el signo negativo de la ecuación 3-64 se ha omitido, entendiéndose que el par electromagnético actúa en un sentido tal que tiende a alinear entre sí los dos campos en acción. En condiciones normales, la caída de tensión en la resistencia del devanado del estator es despreciable, y el flujo de dispersión en el inducido es pequeño frente al flujo resultante en el entrehierro Φ_{er} . En consecuencia, la tensión generada por el flujo pulsatorio en el entrehierro debe equilibrar casi la tensión en bornes V_t de la fórmula 3-16; así pues:

$$\Phi_{er} = \frac{V_t}{4,44/k\omega N_{fase}} \quad (4-2)$$

Por tanto, cuando los bornes del estator están conectados a una red polifásica equilibrada de "potencia infinita", el flujo resultante en el entrehierro Φ_{er} es aproximadamente constante independientemente del par sobre el eje.

La f.m.m. F_r creada en el rotor viene determinada por la corriente de excitación y es también constante en condiciones normales de trabajo. Las variaciones en el par requeridas por distintas cargas se manifiestan por la variación del ángulo δ_r , como se muestra en la curva ángulo-par de la figura 4-1, en la que los valores positivos de T representan una acción motor, y los valores positivos de δ_r representan ángulos eléctricos de retraso del campo del rotor respecto al campo resultante en el entrehierro.

Con una carga ligera en el eje, se requiere un par electromagnético relativamente pequeño, por lo que también será pequeño δ_r . Al añadir carga al eje, el rotor debe retrasarse respecto al campo giratorio del estator hasta tanto δ_r adquiera el valor necesario para crear el nuevo par motor requerido. El reajuste es un proceso dinámico que va acompañado de una disminución transitoria de la velocidad de giro del rotor, y de una serie de oscilaciones mecánicas amortiguadas del mismo alrededor de su nueva posición, movimiento que se denomina oscilación pendular o *penduleo*.

En la práctica pueden producirse también variaciones en la densidad de flujo resultante debido a factores (tales como la saturación y las pérdidas por dispersión de flujo) de los que se ha prescindido en las anteriores consideraciones. Puede observarse experimentalmente en laboratorio el proceso de reajuste del rotor a su nueva posición después de una variación de carga, iluminando la máquina con un foco estroboscópico de frecuencia de destellos tal que el rotor aparezca como inmóvil cuando gira a su velocidad normal de sincronismo.

Cuando δ_r vale 90° eléctricos se consigue, para una tensión y corriente de excitación dadas, la potencia y el par máximos posibles, denominados *potencia y par motor críticos* o límite. Si la demanda de potencia excede de este valor, el motor pierde velocidad debido al mayor par requerido en el eje, desapareciendo así el sincronismo ya que los campos del rotor y del estator ya no permanecerán estacionarios el uno respecto al otro.

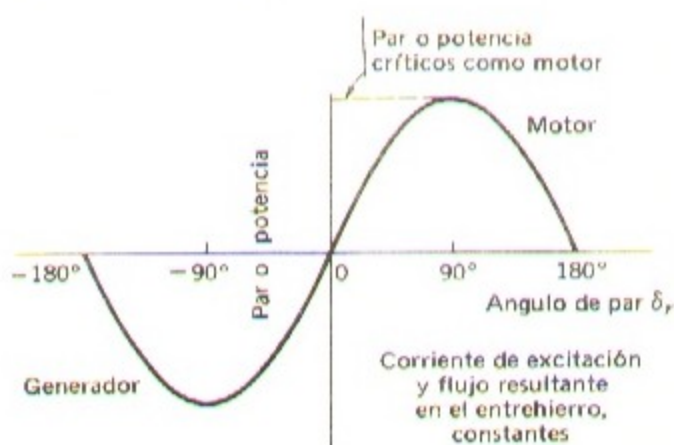


Fig. 4-1. Curva par-ángulo de una máquina síncrona

Cuando se da esta circunstancia, normalmente el motor es desconectado de la línea mediante la acción de interruptores automáticos. Este fenómeno se conoce con el nombre de *pérdida de fase* o *pérdida de sincronismo*. El par crítico limita la sobrecarga instantánea máxima que puede aplicarse a un motor. Aumentando, ya sea la corriente de excitación, ya sea la tensión en bornes, se aumenta el valor del par motor crítico.

En la figura 4-1 se representa la interrelación entre la acción generador y motor, y su influencia en el ángulo δ_r de carga: en dicha figura, la acción generador se ha representado simplemente extendiendo la curva del motor hacia la zona negativa. Si una máquina síncrona estuviera conectada a una red de corriente alterna de tensión y frecuencia constantes capaz de absorber o suministrar energía, suministrará energía a dicha red cuando su rotor sea movido mecánicamente de tal forma que el campo magnético del mismo vaya adelantado respecto al campo del estator. Si el par engendrado por la máquina motriz que arrastra el rotor fuera superior al par crítico del generador, se perderá el sincronismo aumentando rápidamente la velocidad, por lo que se requiere en dichas máquinas un regulador de respuesta rápida que actúe sobre el motor primario en evitación de llegar a velocidades peligrosas.

4-2. INTRODUCCION A LAS MÁQUINAS DE INDUCCION POLIFÁSICAS

Tal como se indicó ya en el apartado 3-1 *c*, un motor de inducción se alimenta de corriente alterna, suministrada directamente al estator, y éste a su vez induce corrientes en el rotor, de forma similar a lo que ocurre en un transformador. Al igual que en las máquinas síncronas, el devanado del estator es del tipo descrito en el apartado 3-4. Cuando se excita con una corriente polifásica equilibrada se creará en el entrehierro un campo magnético rotativo que gira a velocidad síncrona, determinada ésta por el número de polos y por la frecuencia f aplicada al estator (fórmula 3-38).

El rotor puede ser uno de uno de los dos tipos que a continuación se citan: *Rotor bobinado*, con un devanado polifásico similar al del estator y con el mismo número de polos que él; los terminales del bobinado del rotor se conectan a sendos anillos rozantes aislados, montados sobre el eje, en los que se apoyan escobillas de carbón, con lo que dichos terminales resultan accesibles desde el exterior tal como se muestra en el corte de la Fig. 4-2. El motor de la figura 3-18 tiene el rotor de *jaula de ardilla* cuyo devanado está formado por varillas conductoras alojadas en ranuras practicadas en el hierro del propio rotor, y cortocircuitadas en ambos extremos mediante los dos platos conductores dispuestos en cada lado del rotor. La gran sencillez y robustez de la construcción en jaula de ardilla constituye una relevante ventaja de los motores de inducción.

Supongamos que el rotor gira a la velocidad constante de n r.p.m. en la misma dirección que el campo rotativo del estator, siendo n_1 la velocidad del sincronismo de ésta dada por la ecuación 3-38. En estas condiciones el rotor se mueve retrasándose respecto al campo del estator a la velocidad $n_1 - n$ r.p.m., o lo que es lo mismo, tiene un *deslizamiento* de $n_1 - n$ r.p.m. Este deslizamiento corrientemente se expresa en forma de fracción de la velocidad de sincronismo, es decir, en forma relativa: llamando s al desliza-

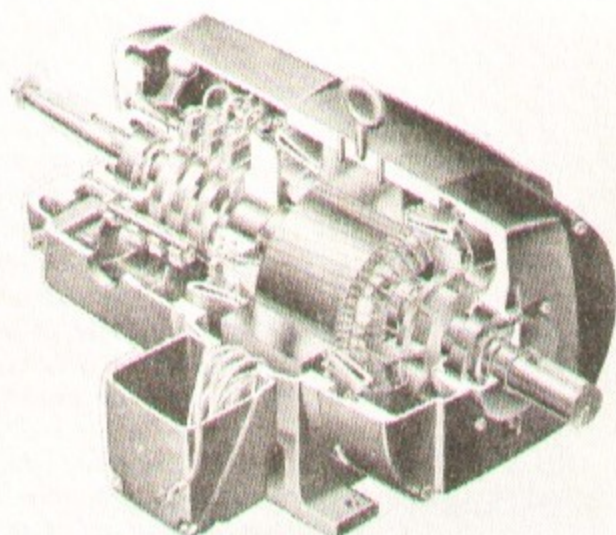


Fig. 4-2. Vista en sección de un motor de inducción trifásico de rotor devanado con anillos rozantes conectados a las tres fases de dicho devanado. (General Electric Company.)

miento tendremos:

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1} \quad (4-3)$$

o bien,

$$n = n_1(1 - s) \quad (4-4)$$

Este movimiento relativo de los conductores del rotor respecto al flujo induce en ellos una tensión de frecuencia sf , llamada *frecuencia de deslizamiento*. Así pues, el funcionamiento eléctrico de una máquina de inducción es similar al de un transformador, pero con la diferencia de existir un cambio de frecuencia. Un motor de inducción con rotor bobinado puede utilizarse como transformador de frecuencia.

Al utilizar una máquina de inducción como motor, se cortocircuitan los terminales del devanado del rotor, y la intensidad que circula por él dependerá del valor de la tensión inducida y de su impedancia a la frecuencia de deslizamiento. En el momento del arranque el rotor está parado, el deslizamiento es $s = 1$, y la frecuencia en el mismo es igual a la f del estator. En estas condiciones, el campo producido por las corrientes rotóricas gira a la misma velocidad que el creado por el estator naciendo un par de arranque que tiende a arrastrar al rotor en la dirección del mismo. Si este par es suficiente para vencer el par resistente opuesto por la carga en el eje, el motor empezará a girar hasta alcanzar su

velocidad de régimen, que nunca puede ser igual a la de sincronismo n_1 , ya que en tal caso no habría movimiento relativo entre los conductores del inducido y el campo inductor, y no se induciría en ellos tensión alguna.

Girando el rotor en la misma dirección que el campo inductor, la frecuencia de las corrientes rotóricas es sf , y el campo creado por ellas girará a sn_1 r.p.m. respecto al rotor, adelantándose al mismo. Pero superponiéndose a este movimiento el movimiento mecánico del propio rotor a n r.p.m., la velocidad del campo del rotor en el espacio será igual a la suma de ambas, o sea:

$$sn_1 + n = sn_1 + n_1(1 - s) = n_1 \quad (4.5)$$

con lo que resulta que ambos campos, el del estator y el del rotor, permanecen estacionarios uno respecto al otro creándose un par constante que mantiene el movimiento del motor. A cualquier velocidad mecánica n que no sea la de sincronismo, existirá un par denominado *asíncrono*.

La Fig. 4-3 muestra la curva característica par-velocidad correspondiente a un motor de inducción clásico de jaula de ardilla. De la ecuación 4-1 pueden deducirse los factores que influyen en la forma de esta curva: de ella se desprende que el flujo en el entrehierro Φ_{er} es aproximadamente constante cuando son constantes la tensión y la frecuencia aplicadas al estator (ecuación 4-2), y recordando que la f.m.m. F_r del rotor es proporcional a la intensidad I_r en el mismo, la ecuación 4-1 se reduce a:

$$T = KI_r \text{ sen } \delta_r \quad (4.6)$$

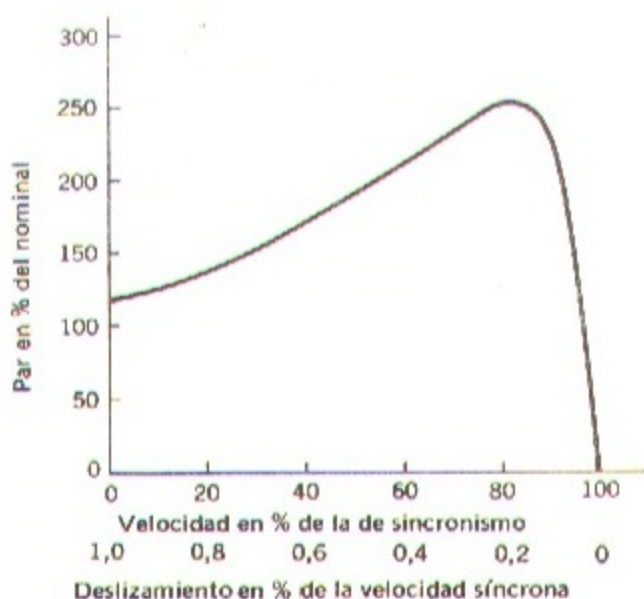


Fig. 4-3. Curva típica par-velocidad de un motor de inducción.

siendo K una constante. La intensidad en el rotor viene determinada por la tensión inducida en el mismo y por su impedancia de dispersión, ambas a la frecuencia de deslizamiento.

La tensión inducida en el rotor es proporcional al deslizamiento, y éste, en condiciones normales de trabajo a plena carga es relativamente pequeño: de 3 a 10 por ciento en motores de jaula de ardilla. La frecuencia en el rotor es asimismo muy pequeña (del orden de 2 a 6 Hz en motores de frecuencia industrial).

En consecuencia, dentro de estos límites la impedancia del rotor es prevalentemente resistiva y su intensidad muy aproximadamente proporcional y en fase con la tensión inducida, la que a su vez es casi proporcional al deslizamiento. Además, la onda de f.m.m. del rotor retrasa aproximadamente 90 grados eléctricos respecto a la onda de flujo resultante, con lo que $\delta_1 \approx 1$ (este punto se estudiará en el apartado 7-1 a). Por todo ello cabe esperar que dentro de la zona en que el deslizamiento es pequeño, el par sea función

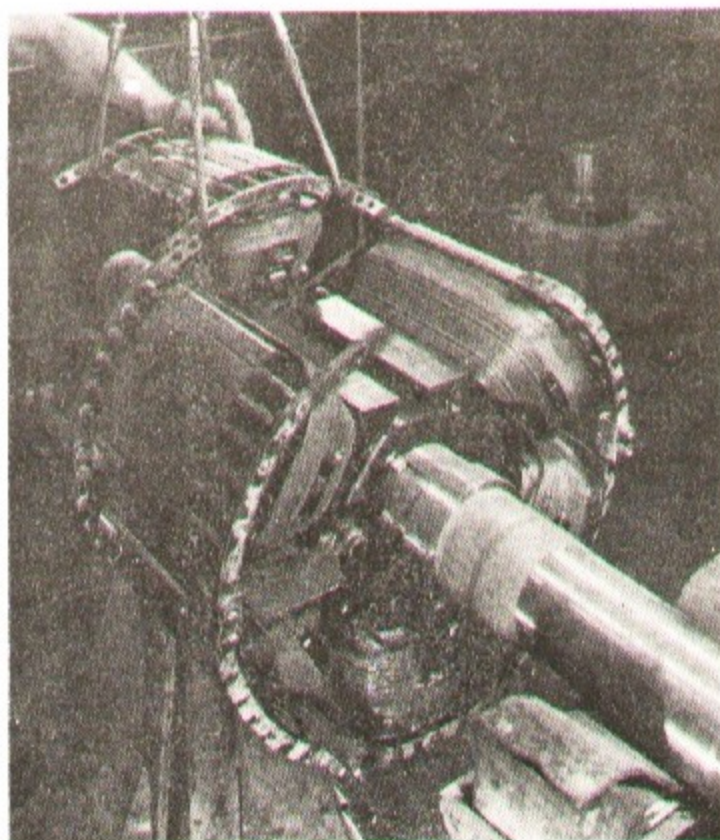


Fig. 4-4. Rotor de motor síncrono de 6 polos, 1200 r.p.m., en el que se ven las bobinas inductoras, el devanado amortiguador sobre los polos y el montaje. (*General Electric Company.*)

lineal de s . Si aumenta el deslizamiento aumenta también la impedancia del rotor debido a incrementarse los efectos de las inductancias de dispersión, y con ello la intensidad varía en menor proporción que el deslizamiento y se retrasa más respecto a la tensión inducida: la onda de f.m.m. también aumenta su retraso respecto del flujo resultante, disminuyendo $\text{sen } \delta_r$.

El resultado es que el par crece con el deslizamiento hasta un cierto valor máximo, decreciendo luego como puede verse en la Fig. 4-3. El valor máximo del par limita la sobrecarga instantánea que puede soportar el motor.

El motor de jaula de ardilla es prácticamente un motor de velocidad constante con una variación porcentual muy pequeña desde su funcionamiento en vacío hasta la plena carga. Puede conseguirse variar la velocidad con el empleo de un rotor bobinado e insertando resistencias exteriores en el circuito del mismo. Dentro del campo normal de funcionamiento, las resistencias exteriores se limitan a aumentar la impedancia del rotor, precisándose así un mayor deslizamiento para conseguir la f.m.m. y el par deseados.

En el apartado 4-1 se indicó que un motor síncrono carece de par de arranque: para conseguir ponerlo en marcha por sí mismo, se le añade un devanado en jaula de ardilla, denominado *devanado amortiguador*, ubicado en las expansiones polares como puede verse en la Fig. 4-4. El motor se pone en marcha como un motor de inducción, sin excitar los devanados del rotor, alcanzándose así una velocidad próxima a la de sincronismo. Si la inercia y la carga no son excesivas, al excitar el inductor con corriente continua el motor alcanzará su velocidad síncrona.

4-3. FUNCIONAMIENTO DEL COLECTOR

Las máquinas de corriente continua difieren en varios aspectos del modelo ideal descrito en el apartado 3-5, y aun cuando los conceptos básicos allí expuestos no dejan de ser válidos, es necesario reconsiderar los supuestos entonces admitidos y modificar el modelo. El punto crucial de la cuestión es el colector mostrado en las figuras 3-1, 3-14 y 3-15.

En la Fig. 4-5 se representa esquemáticamente el devanado inducido de la Fig. 3-23 con el aditamento del colector, escobillas y conexiones entre las bobinas y los segmentos o delgas del colector.

En la figura, el colector está representado por la corona subdividida en segmentos de la parte central: los segmentos están aislados entre sí y respecto al eje, y las escobillas están representadas por los rectángulos negros situados en la parte interior, aun cuando en la realidad se apoyan en la superficie exterior como se ve en las Figs. 3-14 y 3-15. Los laterales de las bobinas, situados en las ranuras, están representados en sección por los pequeños círculos, en los que los puntos y cruces indican el sentido de la corriente hacia o desde el observador como en la Fig. 3-23. Las conexiones de las bobinas o las delgas del colector están representadas por arcos de círculo; las conexiones entre bobinas por la parte posterior del inducido lo están, para las alojadas en las ranuras 1 y 7, por la línea de trazos, y las uniones de estas dos bobinas a segmentos contiguos del colector con los arcos de trazo grueso. Todas las bobinas son idénticas y excepto para las indicadas se han

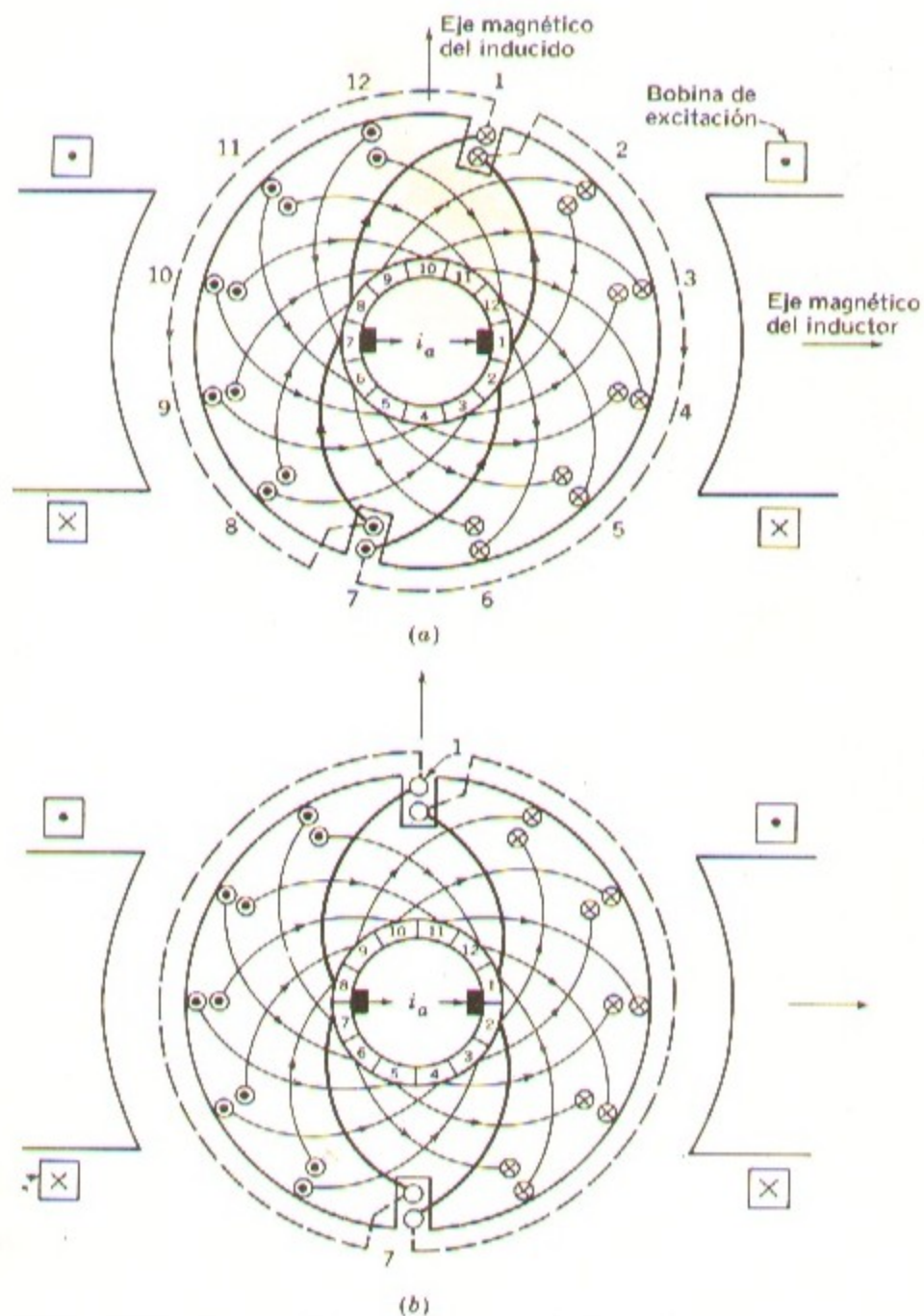


Fig. 4-5. Devanado inducido de una máquina de corriente continua, con colector y escobillas; (a) y (b) sentido de las corrientes en dos posiciones distintas del rotor.

omitido las conexiones entre ellas para mayor claridad de la figura, pero pueden trazarse fácilmente recordando que cada una tiene un lateral en el fondo de una ranura y el otro en la parte exterior de la diametralmente opuesta.

En la Fig. 4-5 *a* las escobillas están en contacto con los segmentos 1 y 7 del colector. La corriente que entra por la escobilla de la derecha se divide por igual entre dos circuitos en paralelo a través del devanado. El primer circuito se dirige hacia el lateral de bobina alojado en el fondo de la ranura 1 para terminar finalmente en la escobilla apoyada en el segmento 7 del colector: el otro circuito se dirige a la bobina exterior de la ranura 6 para terminar igualmente en la escobilla del segmento 7. Pueden comprobarse las direcciones de las corrientes recorriendo ambos circuitos: son las mismas que en la Fig. 3-23. El efecto es el mismo que el de una bobina enrollada en el inducido que tuviera su eje magnético vertical, naciendo un par magnético dextrógiro que tiende a alinear entre sí los campos del inducido y del inductor.

Supongamos que la máquina trabaja como generador arrastrada mecánicamente en sentido levógiro: en la Fig. 4-5 *b* vemos la situación existente después que el rotor haya girado un ángulo igual a la mitad del abarcado por cada segmento del colector. La escobilla de la derecha está ahora en contacto con los dos segmentos 1 y 2, y la de la izquierda con los 7 y 8, con lo que las bobinas de las ranuras 1 y 7 quedan en cortocircuito a través de las propias escobillas: las corrientes en las restantes bobinas tienen las direcciones señaladas, creando un campo magnético de eje vertical igual que antes.

Continuando el movimiento, las escobillas se apoyarán en los segmentos 2 y 8, y las ranuras 1 y 7 pasarán a ocupar la posición que antes ocupaban las 12 y 6 en la Fig. 4-5 *a*. La dirección de las corrientes es semejante a la de dicha figura salvo haberse invertido en las bobinas de las ranuras 1 y 7: el eje magnético del inducido se mantiene en su posición vertical.

Durante el tiempo en que las escobillas están en contacto simultáneo con dos segmentos contiguos del colector, las bobinas a ellos conectadas quedan temporalmente excluidas de los circuitos del devanado, cortocircuitadas por dichas escobillas, verificándose en ellas la inversión de corriente. Teóricamente, la corriente en las bobinas conmutadas debería invertirse linealmente respecto al tiempo, cosa que está lejos de suceder, provocando chispas en las escobillas: en el apartado 5-2 se verá la forma de conseguir una conmutación exenta de chispas. Si la conmutación fuese lineal, la onda de corriente en cada bobina en función del tiempo tendría la forma trapezoidal de la Fig. 4-6.

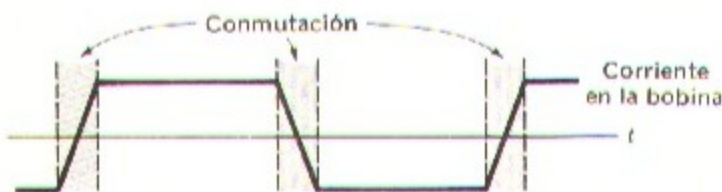


Fig. 4-6. Onda de corriente en una bobina del inducido, con conmutación lineal.

El devanado de la Fig. 4-5 es más sencillo que el que normalmente tienen las máquinas de continua, que en general tienen más ranuras y más segmentos en el colector y que salvo en el caso de pequeñas máquinas acostumbran a tener más de dos polos. No obstante, en él se comprenden los rasgos esenciales de otros devanados más complicados.

4.4. INTRODUCCION A LAS MAQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA

La Fig. 4-7 representa esquemáticamente una máquina de corriente continua. El estator es de polos salientes excitado por una o más bobinas cuyo flujo se distribuye en el entrehierro simétricamente alrededor del eje de los polos inductores o eje principal del campo. Las escobillas están situadas de forma que la conmutación tiene lugar cuando los laterales de la bobina correspondiente están en la zona neutra, media entre los polos. El eje de la onda de f.m.m. del inducido está a 90 grados eléctricos del eje del campo inductor, es decir, que está en cuadratura con él. En el esquema de la Fig. 4-7 *a*, se han situado las escobillas en el eje en cuadratura por ser ésta la posición de las bobinas a las que están conectadas, con lo que la onda de f.m.m. del inducido queda situada alrededor de la línea de escobillas. (La posición geométrica de las escobillas en una máquina real difiere unos 90 grados eléctricos de la posición indicada en el dibujo debido a la forma de las conexiones del colector, como puede verse en la Fig. 4-5.) Para mayor sencillez normalmente se representarán los circuitos como en la Fig. 4-7 *b*.

Aun cuando tanto el par magnético como la tensión inducida son independientes de la forma de la onda de distribución del flujo, continuaremos suponiendo que la distribución de la densidad de flujo en el entrehierro es senoidal. El par puede determinarse partiendo de los campos magnéticos como en el apartado 3-5 *b*.

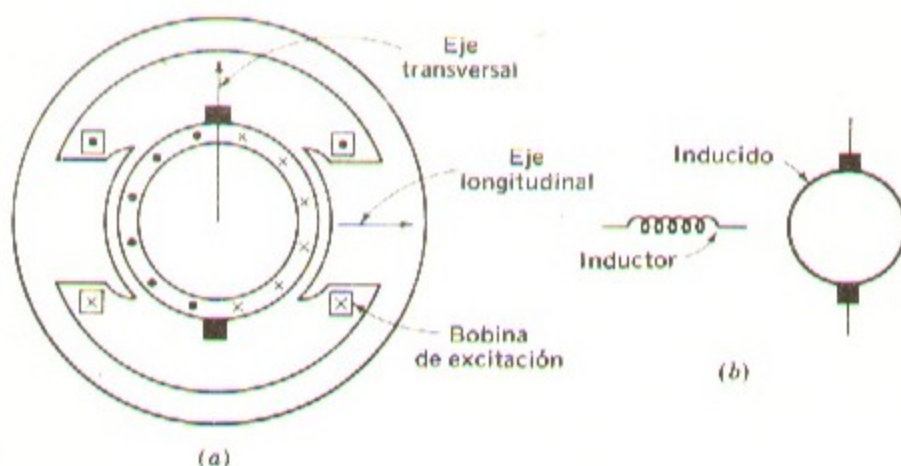


Fig. 4-7. Representación esquemática de una máquina de continua.

Puede expresarse el par en forma similar a la ecuación 3-64, en función de la interacción del flujo de excitación por polo en el entrehierro Φ_d y la componente espacial fundamental F_{a1} de la onda de f.m.m. del inducido. Con las escobillas en cuadratura, el ángulo formado por estos campos es de 90 grados eléctricos y su seno igual a la unidad. Sustituyendo en la ecuación 3-64 tendremos para una máquina de P polos:

$$T = \frac{\pi}{2} \left(\frac{P}{2} \right)^2 \Phi_d F_{a1} \quad (4-7)$$

en la que se ha prescindido del signo negativo por cuanto el sentido positivo del par puede deducirse por razonamientos físicos. El valor punta de la onda triangular de la f.m.m. del inducido viene dado por la fórmula 3-24, y el de su componente fundamental F_{a1} es de $8/\pi^2$ veces este valor. Sustituyendo en la 4-7 tendremos:

$$T = \frac{PZ_a}{2\pi a} \Phi_d i_a = K_a \Phi_d i_a \quad \text{newton-metros,} \quad (4-8)$$

siendo i_a la intensidad en el circuito exterior del inducido, Z_a el número total de conductores en el devanado inducido, a el número de circuitos en paralelo en el mismo, y

$$K_a = \frac{PZ_a}{2\pi a} \quad (4-9)$$

una constante que depende del diseño del devanado.

La tensión rectificadora inducida en el rotor ya fue estudiada en el apartado 3-2 b para una máquina elemental de bobina única, y su forma está indicada en la Fig. 3-20. El efecto de distribuir el devanado en varias ranuras puede verse en la Fig. 4-8, en la que cada una de las senoides rectificadas corresponde a la tensión inducida en cada una de las bobinas, siempre que la conmutación tenga lugar en el momento en que sus laterales pasen por la zona neutra. Visto desde el colector la tensión inducida no es más que la suma de las tensiones rectificadas inducidas en cada una de las bobinas conectadas en serie



Fig. 4-8. Tensiones de bobinas rectificadas, y tensión resultante entre escobillas de una máquina de continua.

entre escobillas, y en la Fig. 4-8 está representada por la línea ondulada e_a . Con unos doce segmentos o delgas por polo en el colector, las ondulaciones se hacen muy pequeñas y la tensión media inducida, observada desde las escobillas, es igual a la suma de las tensiones medias rectificadas correspondientes a todas las bobinas. La ecuación 3-18 nos da la tensión media por bobina

$$e_{a(\text{bob})} = \frac{PN_{\text{bob}}}{\pi} \Phi_d \omega_m \quad (4-10)$$

siendo N_{bob} el número de espiras de una bobina. En un devanado distribuido con C bobinas conectadas en a circuitos paralelos entre escobillas, la tensión en éstas es:

$$e_a = \frac{C}{a} e_{a(\text{bob})} = \frac{PN_{\text{bob}}C}{\pi a} \Phi_d \omega_m \quad (4-11)$$

Pero $N_e C = Z_a/2$ siendo Z_a el número total de conductores activos en el devanado: por tanto

$$e_a = \frac{PZ_a}{2\pi a} \Phi_d \omega_m = K_a \Phi_d \omega_m \quad (4-12)$$

siendo K_a la constante dada por la fórmula 4-9; compárese con la 3-19. La tensión rectificada de un devanado distribuido tiene el mismo valor medio que si estuviera concentrado, pero las ondulaciones se reducen mucho.

Expresando todos los valores de las ecuaciones 4-8 y 4-12 en unidades MKS, de ellas se deduce:

$$e_a i_a = T \omega_m \quad (4-13)$$

Esta sencilla ecuación nos dice que la potencia eléctrica instantánea relacionada con la tensión inducida debida al movimiento, es igual a la potencia mecánica instantánea relacionada con el par magnético, fluyendo dicha potencia en uno u otro sentido según la máquina actúe como generador o como motor.

El flujo en el eje magnético principal es debido a la f.m.m. combinada $\sum N_i \mu_i$ de los devanados inductores, y la relación flujo-f.m.m. para la geometría particular del hierro de una máquina viene dada por la correspondiente *curva de magnetización*, de las que la Fig. 4-9 a es un ejemplo en el que se ha supuesto que la f.m.m. del inducido no tiene influencia sobre el flujo en el eje principal, ya que sus respectivos ejes son perpendiculares entre sí: este punto será reexaminado en el capítulo 5 en el que se estudian más a fondo los efectos de la saturación.

Siendo la f.e.m. inducida proporcional a la velocidad de variación de flujo, en general es más conveniente trazar la curva de magnetización en función de la f.e.m. inducida e_{a0} a la velocidad uniforme ω_{m0} , como se ha hecho en la Fig. 4-9 b. Con un flujo dado, la f.e.m.

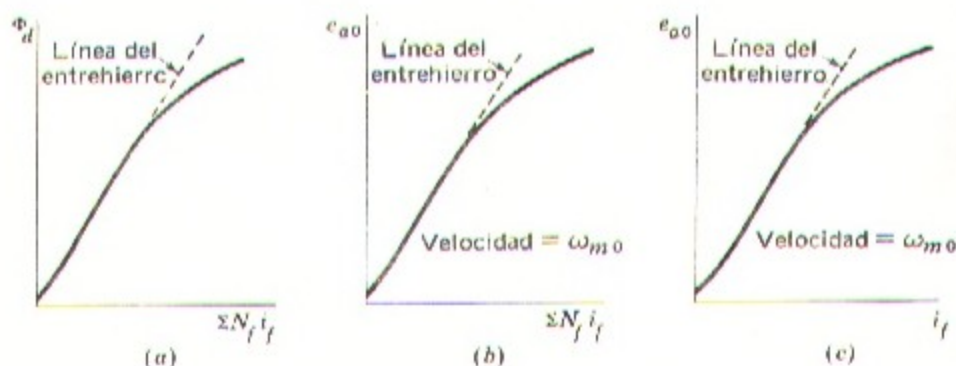


Fig. 4-9. Curvas de magnetización de una máquina de continua.

inducida e_a a cualquier otra velocidad ω_a es proporcional a ésta, es decir, que de la ecuación 4-12 se deduce:

$$\frac{e_a}{\omega_m} = K_a \Phi_d = \frac{e_{a0}}{\omega_{m0}} \quad (4-14)$$

o bien

$$e_a = \frac{\omega_m}{\omega_{m0}} e_{a0} \quad (4-15)$$

La Fig. 4-9 c corresponde a la curva de magnetización con sólo un devanado inductor excitado.

Estas curvas pueden determinarse fácilmente por métodos experimentales, no siendo necesario conocer para ello los detalles constructivos.

Dentro de un amplio campo de los valores de la excitación, la reluctancia del hierro es despreciable frente a la del entrehierro: en esta zona el flujo es linealmente proporcional a la f.m.m. total de los devanados inductores, siendo la permeancia ϕ_d en el eje magnético principal del entrehierro la constante de proporcionalidad, es decir:

$$\Phi_d = \phi_d \Sigma N_f i_f \quad (4-16)$$

La línea de trazos que pasando por el origen coincide con la porción recta de las curvas de magnetización de la Fig. 4-9, constituye la característica en el entrehierro.

Las notables ventajas de las máquinas de continua son consecuencia de la gran variedad de condiciones operativas que se pueden conseguir seleccionando adecuadamente la forma de excitar los devanados inductores que puede ser independiente procedente de una fuente exterior, o *autoexcitado* tomando la energía necesaria de la propia máquina.

En la Fig. 4-10 se representan diferentes formas de conectar el circuito inductor. El procedimiento que se adopte influye profundamente no sólo en las características en régimen permanente que se describirán a continuación, sino también en el comportamiento dinámico de las máquinas en sistemas de control como se verá en el capítulo 9.

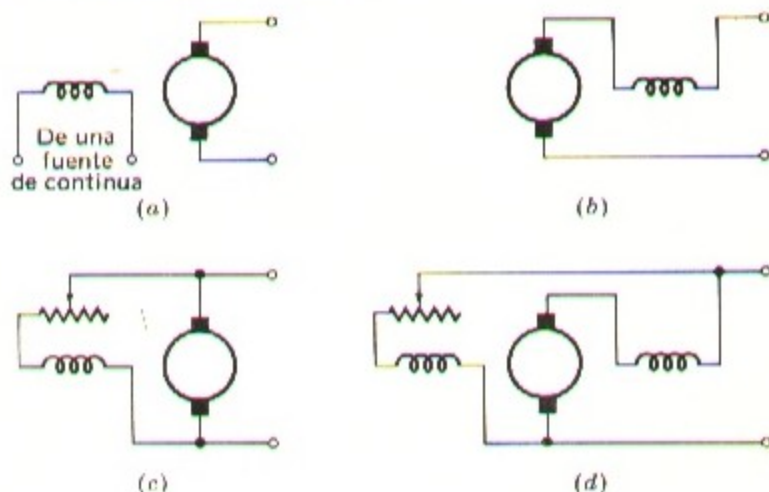


Fig. 4-10. Conexiones del circuito de excitación en máquinas de continua. (a) Excitación independiente; (b) en serie; (c) en derivación; (d) compuesta.

La Fig. 4-10 *a* corresponde al caso de excitación independiente. La corriente de excitación que se requiere es una fracción muy pequeña, del orden del 1 al 3 por ciento, de la intensidad nominal de la máquina. Un pequeño incremento de potencia en el inductor puede regular una potencia relativamente grande en el inducido; desde este punto de vista el generador es un amplificador de potencia, siendo su devanado inductor equivalente a la rejilla de las válvulas termoiónicas, su inducido equivalente al circuito de placa, y la potencia suministrada por el sistema mecánico semejante a la potencia suministrada al circuito de placa. Los generadores con excitación independiente encuentran aplicación en los sistemas de control por realimentación en los que se requiere poder regular la tensión de salida dentro de límites muy amplios.

En los generadores autoexcitados caben tres formas de alimentar los devanados inductores: pueden conectarse en serie con el inducido, como en la Fig. 4-10 *b*, resultando así un generador excitado *en serie*; pueden conectarse en paralelo con dicho inducido, Fig. 4-10 *c*, con lo que se tendrá un generador excitado *en paralelo* o derivación, o bien puede subdividirse el inductor en dos partes (Fig. 4-10 *d*) conectando una de ellas en serie y la otra en paralelo con el inducido, resultando así un generador con excitación compuesta. En los generadores autoexcitados es necesario que exista un cierto magnetismo remanente en su hierro para iniciar la excitación durante su puesta en marcha.

En la Fig. 4-11 pueden verse las curvas características volt-ampere en régimen permanente, supuesta la máquina movida a velocidad uniforme por el motor primario. La relación entre la f.e.m. inducida en régimen permanente E_a y la tensión en terminales V_T es:

$$V_T = E_a - I_a R_a \quad (4-17)$$

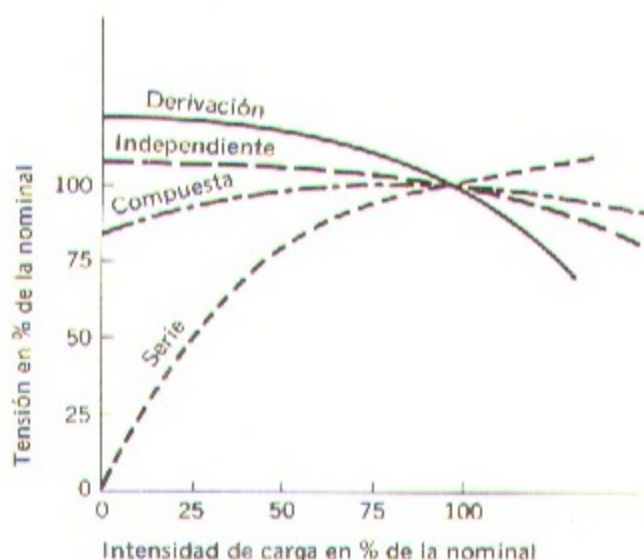


Fig. 4-11. Características tensión-intensidad de generadores de continua.

siendo I_a la intensidad de corriente en el inducido y R_a la resistencia del mismo. En un generador, E_a es mayor que V_t y el par electromagnético T tiende a oponerse al movimiento.

La tensión en bornes de un generador con excitación independiente decrece poco al aumentar la carga, pues sólo es debido a la caída de tensión en la resistencia del devanado inducido, en cambio en un generador excitado en serie, siendo la corriente de excitación la misma que la de carga, el flujo en el entrehierro y por consiguiente la tensión varían ampliamente al variar la carga, motivo por el cual en los generadores apenas tiene aplicación esta forma de excitación. En los generadores excitados en paralelo la tensión decae algo con la carga, pero no en tal cuantía que sea un obstáculo en muchas aplicaciones. El circuito de la excitación compuesta normalmente se conecta de tal forma que la f.m.m. del devanado en serie refuerza la del devanado en paralelo, con la ventaja de que, de esta forma, el flujo por polo puede aumentar con la carga conservándose así la tensión de salida a un valor constante o incluso aumentando ligeramente con la carga. El devanado en paralelo consta en general de un gran número de espiras formadas con conductor de sección relativamente pequeña, mientras que el devanado en serie, situado exteriormente al anterior, es de pocas espiras y conductor de gran sección ya que por él ha de circular toda la intensidad de la corriente inducida.

Tanto en los generadores con excitación derivación como en los de excitación compuesta puede regularse la tensión, dentro de ciertos límites mediante reostatos en el circuito del devanado en paralelo.

Cualquiera de los métodos de excitación citados para los generadores puede emplearse también en los motores, obteniéndose unas características velocidad-par en régimen per-

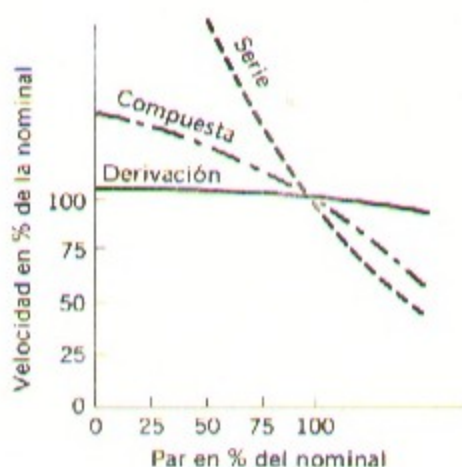


Fig. 4-12. Características velocidad-par de motores de continua.

manente como las representadas en la Fig. 4-12 en las que se ha supuesto que el motor está alimentado a tensión constante. En un motor, la relación entre la f.e.m. inducida en el rotor E_a y la tensión en bornes V_T es:

$$V_T = E_a + I_a R_a \quad (4-18)$$

o bien

$$I_a = \frac{V_T - E_a}{R_a} \quad (4-19)$$

siendo I_a la intensidad de entrada en el inducido. En este caso, la f.e.m. inducida E_a es menor que la tensión en bornes V_T circulando la corriente en sentido contrario que en un generador, actuando el par en el sentido en que tiende a mantener el movimiento del rotor.

En los motores con excitación independiente o en derivación, el flujo es muy aproximadamente constante; un aumento del par va acompañado de un aumento casi proporcional de la intensidad en el inducido y en consecuencia de una ligera disminución de la fuerza contraelectromotriz para permitir el paso de la nueva intensidad aumentada a través de la pequeña resistencia de su devanado, y puesto que la fuerza contraelectromotriz viene determinada por el flujo y la velocidad, ésta deberá bajar algo. El motor derivación, al igual que el de inducción de jaula de ardilla, es de velocidad casi constante con una variación máxima del orden del cinco por ciento entre su marcha en vacío o a plena carga. La línea de trazo continuo de la Fig. 4-12 corresponde a la característica típica de estos motores. Tanto el par máximo como el de arranque están limitados por la máxima intensidad que pueda ser conmutada correctamente.

La velocidad de los motores derivación puede regularse fácilmente mediante un reostato en el circuito inductor con el que se puede variar la intensidad y por consiguiente el

flujo por polo: esta variación de flujo provoca una variación inversa de la velocidad para conservar la fuerza contraelectromotriz en un valor aproximadamente igual a la tensión aplicada: por este procedimiento puede conseguirse una relación de velocidades como de cinco a uno, limitada por las condiciones de la conmutación, pero si se varía también la tensión aplicada al inducido, puede llegarse a una gama de velocidades muy amplia.

En los motores excitados en serie un aumento de carga va acompañado de un aumento de la corriente y por tanto de la f.m.m. del campo inductor (siempre que el hierro no esté totalmente saturado). Ya que el flujo crece con la carga, la velocidad deberá disminuir para conservar el equilibrio entre la tensión aplicada y la fuerza contraelectromotriz: el aumento de intensidad debido al aumento del par es menor que en los motores derivación debido a que también ha aumentado el flujo. Así pues, el motor serie es de velocidad variable con una característica velocidad-par marcadamente inclinada como se ve en la línea de trazos de la Fig. 4-12. Esta característica es ventajosa en aplicaciones en que existan fuertes pares de sobrecarga, ya que la sobrecarga de potencia necesaria para vencerlos queda atenuada por la disminución de velocidad. Asimismo el par de arranque se ve favorecido por el aumento de flujo al aumentar la corriente.

En los motores de excitación compuesta, el devanado en serie puede conectarse de forma que su f.m.m. se sume a la del devanado derivación, o que se reste, teniendo así los motores de excitación compuesta *aditiva* o *diferencial*: estos últimos son muy raramente empleados. La curva de la Fig. 4-12 corresponde al caso aditivo en el que como puede verse, la característica velocidad-par es intermedia entre las de los motores serie y los derivación; la pérdida de velocidad con la carga depende del número relativo de espiras en cada uno de los devanados. No tiene el inconveniente de los motores serie de sufrir una excesiva pérdida de velocidad, conservando, sin embargo, en buena parte sus ventajas.

Las ventajas prácticas de las máquinas de corriente continua residen en la gran variedad de características que se pueden conseguir con las distintas excitaciones: serie, derivación y compuesta, de las que se ha tratado ya brevemente en este apartado, y aun pueden existir muchas más posibilidades añadiendo juegos de escobillas adicionales que permitan tomar distintas tensiones del colector. Los principales rasgos de las máquinas de corriente continua residen en su versatilidad, que permite su adaptación a los sistemas de control, sean manuales o automáticos: estas características se estudiarán en los capítulos 5, 8 y 9 tanto desde el punto de vista del servicio en régimen permanente como en su funcionamiento dinámico.

4.5. LOS PROBLEMAS DE LAS MAQUINAS

Llegados al punto en que estamos, necesitamos reflexionar sobre nuestros objetivos: ¿Cuáles son las características de las máquinas que necesitamos conocer cuantitativamente con suficiente precisión? La respuesta depende del empleo específico a que se han de destinar. La máquina es uno de los componentes de un sistema de conversión electromecánica de energía, y sus características son muchas veces decisivas para la eficiencia del sistema completo.

En la mayor parte de los casos, los motores se alimentan a tensión constante y mueven una carga mecánica cuyo par resistente depende de la velocidad a que es arrastrada. La velocidad en régimen permanente queda fijada por el punto en el que el par que el motor puede dar electromagnéticamente es igual al que la carga puede absorber mecánicamente. Por ejemplo, en la Fig. 4-13 la línea continua es la característica velocidad-par de un motor de inducción, y la línea de trazos el par requerido por un ventilador en función de su velocidad. Cuando motor y ventilador están acoplados, el punto de funcionamiento estable del conjunto está situado sobre la intersección de las dos curvas, que es donde lo que el motor puede dar coincide con lo que el ventilador puede absorber.

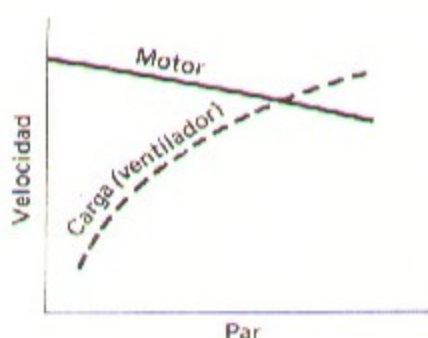


Fig. 4-13. Superposición de las características del motor y de la carga.

Las necesidades de potencia o de par motor varían, naturalmente, según las condiciones del equipo al que se aplican: en algunos casos es suficiente que se mantenga la velocidad aproximadamente constante al variar la carga, como sucede por ejemplo con una bomba hidráulica, mientras que en otros, como por ejemplo la rotación del plato de un tocadiscos, es indispensable mantener una uniformidad perfecta. Algunas veces se requiere una velocidad sincronizada con otra velocidad, como puede ser en el accionamiento de los dos laterales de un puente levadizo. Los motores para grúas o para tracción necesitan en el arranque un gran par con poca velocidad, y luego un par relativamente pequeño a velocidad alta, o dicho de otra forma requieren una característica par-velocidad variable. Otras veces se requiere regular la velocidad y mantenerla uniforme dentro de amplios límites, como es el caso de máquinas herramientas en las que es necesario poder trabajar a una velocidad predeterminada. En cualquier aplicación puede tener importancia: el par de arranque que el motor es capaz de ejercer, el par máximo en funcionamiento y la intensidad absorbida en cada caso.

Para los generadores pueden hacerse unas consideraciones análogas: por ejemplo, la tensión en bornes y la potencia de salida de un generador vienen determinadas por sus propias características y por las de la carga aplicada. La curva de trazo continuo de la Fig. 4-14 indica la tensión en bornes de un generador derivación de corriente continua en función de la intensidad de salida, mientras que la línea de trazos relaciona la tensión e



Fig. 4-14. Superposición de las características de un generador y de la carga.

intensidad de una carga. Cuando se conectan entre sí el generador y la carga, el punto de equilibrio será la intersección de ambas curvas, en el que lo que el generador puede dar es igual a lo que la carga puede absorber. Lo más corriente es que se pretenda mantener constante la tensión cualquiera que sea la carga, pero no es raro tampoco el que un motor se alimente de su propio generador individual para conseguir así una gran flexibilidad y una regulación más precisa; también puede pretenderse que la tensión varíe con la carga de una determinada forma.

El conocimiento de las características par-velocidad de los motores y tensión-corriente en los generadores es de importancia, así como también lo es el conocer los límites entre los que pueden variar dichas características y los medios para conseguir su variación. Además caben otras consideraciones de orden económico como: rendimiento, factor de potencia, coste comparativo y el efecto de las pérdidas en el calentamiento y en los valores nominales de las máquinas. En el análisis que se hace en los capítulos 5 a 8 se estudian y comparan todos estos puntos para los distintos tipos de máquinas. Es cierto que existen otros problemas importantes y complejos relacionados con el proyecto, desarrollo y construcción de las máquinas, para los que este estudio puede ser a manera de introducción pero que van más allá del objeto de este libro.

Para comprender bien el papel desempeñado por las máquinas rotativas en la moderna tecnología no es suficiente el conocimiento de las características en régimen permanente: en muchas aplicaciones en el campo cada vez más extenso del automatismo tiene mayor interés el comportamiento dinámico del sistema electromecánico completo del que la máquina es sólo uno de sus componentes. Por ejemplo, puede ser necesario gobernar la velocidad o la posición de un eje acoplado a una carga relacionándola con una determinada función del tiempo o de otra variable cualquiera: una aplicación industrial típica es la de regular minuciosamente la tracción a la que se somete una larga tira de material, por ejemplo papel continuo, para su recogida en bobina; para ello se requiere una regulación dinámica de sorprendente precisión y de gran rapidez de respuesta. En aplicaciones de este tipo es importante el período transitorio del conjunto del sistema electromecánico, que deberá responder con precisión y rapidez, y las oscilaciones deberán amortiguarse

rápidamente; así pues deberán entrar en consideración no sólo las características eléctricas sino también las mecánicas, tales como la rigidez, inercia y rozamientos, que en realidad adquieren importancia predominante.

Así pues, una teoría adecuada a estos estudios debería ser capaz de tratar el comportamiento dinámico de las máquinas como componentes de un sistema. Puesto que el análisis de un sistema electromecánico completo presenta problemas muy complejos, una teoría de las máquinas apta para este objeto precisará ser simplificada al máximo si bien conservando los rasgos esenciales: esto es lo que se hace en los capítulos 9 y 10.

4.6. SATURACION MAGNETICA

Tanto el par electromagnético como la tensión inducida dependen, en cualquier máquina, de la variación del flujo concatenado con sus devanados. Para una f.m.m. de los devanados dada, el flujo depende de la reluctancia del hierro del circuito magnético y de la de los entrehierros, por lo que la saturación influye apreciablemente en las características de la máquina. Otro aspecto de la saturación, difícil de valorar sin realizar comparaciones teóricas y experimentales, es el de su influencia en las premisas básicas en que se apoyan las aproximaciones en el análisis de máquinas: concretamente, todo lo tratado en relación a las f.m.m. lo ha sido suponiendo despreciable la reluctancia del hierro. Al aplicar las fórmulas resultantes a una máquina en la que el grado de saturación en el hierro es variable, se reemplaza la máquina real por otra ideal equivalente en la que la reluctancia del hierro se desprecia pero el espesor del entrehierro se incrementa en la cuantía necesaria para justificar la caída de potencial magnético en el hierro de la máquina real. Incidentalmente, los efectos de las discontinuidades del entrehierro debidas a las ranuras y canales de ventilación se incluyen también por medio de un entrehierro liso equivalente,



Fig. 4-15. Característica en circuito abierto y línea del entrehierro.

lo que se hace explícitamente durante el cálculo del circuito magnético de la estructura. Se han hecho serios esfuerzos para reproducir correctamente las condiciones magnéticas en el entrehierro, y el cálculo del rendimiento de las máquinas se basa en dichas condiciones. La legitimidad de las aproximaciones admitidas deberá refrendarse por medio de rigurosas pruebas experimentales.

Los principales datos del circuito magnético relacionados con la saturación se desprenden de las *características en vacío* y de las *curvas de magnetización* o de *saturación*. La Fig. 4-15 muestra un ejemplo. Básicamente, esta característica es la curva de magnetización correspondiente a la geometría particular del hierro y del entrehierro de la máquina en estudio. Frecuentemente en las abscisas figura la intensidad de la corriente inductora en lugar de la f.m.m. en ampere-vueltas. Asimismo, la tensión en el inducido cuando no circula corriente por él es directamente proporcional al flujo, si la velocidad es constante, y por ello para mayor comodidad se sitúan en las ordenadas las tensiones en bornes con

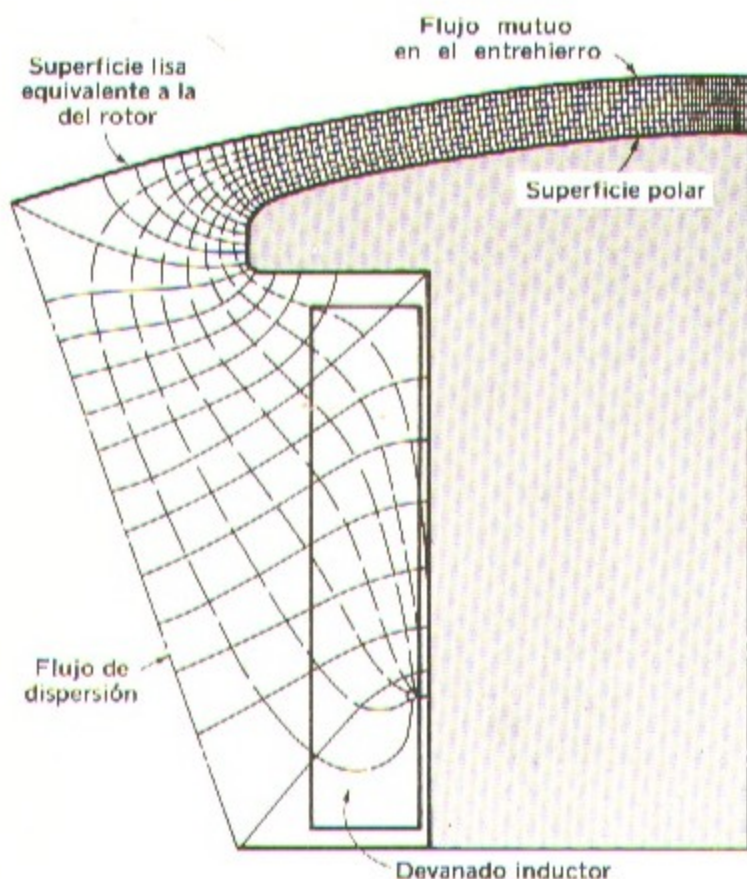


Fig. 4-16. Distribución de flujo alrededor de un polo saliente. Las líneas continuas son líneas de flujo y las de trazos son líneas equipotenciales.

circuito abierto en lugar del flujo por polo en el entrehierro, trazándose la curva para una velocidad fija dada, que en general es la de régimen. La recta tangente a la parte inferior de la curva es la que corresponde al entrehierro, e indica la f.m.m. necesaria para vencer su reluctancia: si no fuera por la intervención de la saturación esta línea coincidiría con la característica en vacío, y por consiguiente la separación entre ambas es una indicación del grado de saturación existente. En una máquina normal, la relación entre la f.m.m. total y la correspondiente al entrehierro varía entre 1,1 y 1,25 para la tensión nominal.

La característica en vacío puede calcularse a partir de los datos del proyecto por métodos que parten del circuito magnético, auxiliados por los gráficos de la distribución del flujo. La Fig. 4-16 es un ejemplo de gráfica de distribución del flujo alrededor de un polo de una máquina de polos salientes. La distribución de flujo en el entrehierro deducida de este gráfico está representada en la Fig. 4-17 en la que aparecen también las componentes fundamental y tercera armónica. La gráfica se ha trazado basándose en una permeabilidad infinita del hierro y una superficie de inducido lisa, compensándose el efecto de las ranuras en el flujo por polo aumentando el espesor del entrehierro. El efecto de las ranuras deberá estudiarse separadamente sea por procedimiento analítico o gráfico, indicándose en las Figs. 4-18 y 4-19 la influencia de una ranura en un campo por lo demás uniforme. Obsérvese que la escala a que está representado el flujo en la Fig. 4-18 se ha aumentado en la zona en que las líneas de flujo se han trazado únicamente hasta su intersección con una línea equipotencial: teniendo esto en cuenta, puede verse que la densidad de flujo en la ranura es notablemente menor que la existente en los dientes. En la Fig. 4-20 puede verse la forma general de la onda de densidad de flujo teniendo en cuenta el efecto de las ranuras, efecto que aparece muy pronunciado debido a que hay pocas ranuras, relativamente anchas, por polo.

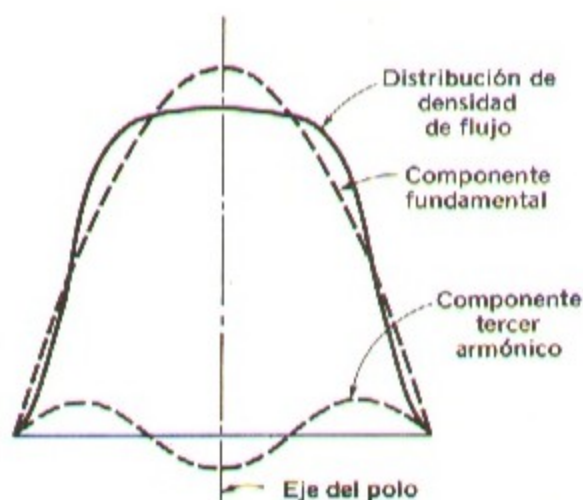


Fig. 4-17. Onda de densidad de flujo correspondiente a la Fig. 4-16, con sus componentes fundamental y tercer armónico.

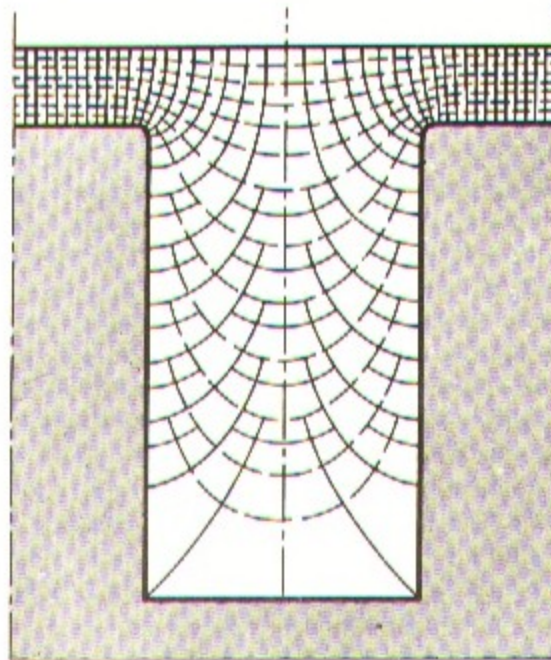


Fig. 4-18. Distribución del flujo en una ranura. Las líneas continuas son de flujo y las de trazos son equipotenciales.

Los gráficos de flujo del tipo de los de las Figs. 4-16 y 4-18 proporcionan resultados cuantitativos precisos, ya que son soluciones gráficas de las ecuaciones de Laplace para las condiciones límites supuestas.

Si una máquina existe realmente, la curva de magnetización se determina generalmente haciéndola funcionar como un generador en vacío, tomando nota de las tensiones en

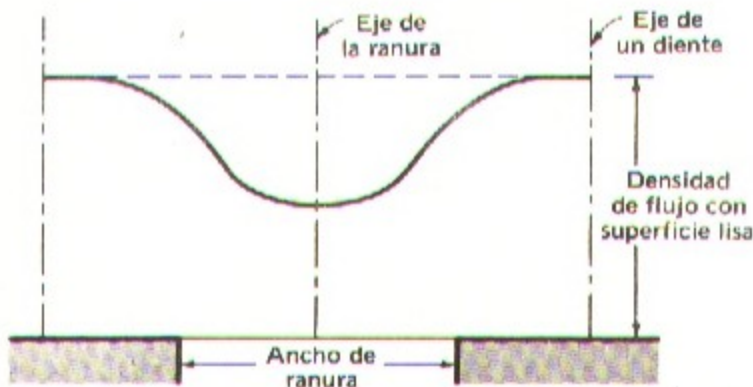


Fig. 4-19. Efectos de una ranura en la densidad de flujo en el entrehierro.

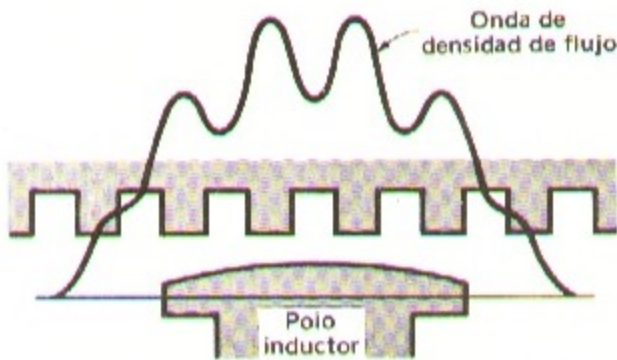


Fig. 4-20. Distribución de flujo del campo principal incluidos los efectos de las ranuras. El efecto aparece exagerado porque sólo se han representado unas pocas ranuras anchas por polo.

bornes correspondiente, a distintos valores de la corriente de excitación: si se trata de un motor de inducción se hace girar la máquina a la velocidad de sincronismo o muy próximo a ella, y se determinan las corrientes magnetizantes correspondientes a una serie de valores de la tensión aplicada al estator.

4-7. EXCITACION

El flujo resultante en el circuito magnético de una máquina es debido a las f.m.m. combinadas de todos sus devanados: en las máquinas de continua clásicas la mayor parte de la f.m.m. efectiva proviene de los devanados inductores. En un transformador, la excitación neta puede proceder del primario, del secundario, o de ambos combinados. La situación es semejante en las máquinas de alterna, si bien en éstas aparecen dos aspectos de importancia en su aplicación.

a. Factor de potencia en máquinas de alterna

El factor de potencia al que trabajan las máquinas de alterna tiene su importancia económica debido al coste de la potencia reactiva: un factor de potencia bajo afecta desfavorablemente de tres formas distintas al sistema. En primer lugar, los generadores, transformadores y equipos de transmisión se dimensionan en función de los kVA en lugar de hacerlo en función de los kW, ya que el calentamiento y las pérdidas dependen principalmente de la tensión e intensidad independientemente de la potencia. Las dimensiones físicas y el coste de los aparatos de alterna es aproximadamente proporcional a sus kVA nominales: las inversiones en generadores, transformadores y demás equipos necesarios para suministrar una potencia dada son aproximadamente inversamente proporcionales al factor de potencia. En segundo lugar, un factor de potencia bajo representa una mayor intensidad, con el consiguiente aumento de pérdidas en el cobre de las máquinas y

equipos. Y por último, el tercer inconveniente es el de que se dificulta la regulación de la tensión.

Los factores que influyen en los kVA reactivos requeridos por un motor pueden comprenderse relacionando éstos con la creación del flujo magnético. Al igual que en cualquier otro dispositivo electromagnético, el flujo resultante necesario para el funcionamiento del motor debe ser creado por una componente magnetizante de la corriente. No existe ninguna diferencia, ni en el circuito magnético ni en el proceso de conversión de energía, tanto si esta corriente magnetizante pertenece al devanado del estator o al del rotor, así como tampoco la hay en un transformador, cualquiera que sea el devanado por el que circule la corriente de excitación; en algunos casos ambos devanados conducen parte de ella. Si toda o parte de la corriente magnetizante se suministra a un devanado de alterna, la entrada en tal devanado deberá comprender una componente reactiva en retraso, ya que la corriente magnetizante retrasa 90 grados respecto a la caída de tensión, y así los kVA reactivos en retraso crean el flujo en el motor.

En un motor de inducción, el único origen posible de la excitación es la alimentación del estator; por consiguiente estos motores trabajan siempre con un factor de potencia en retraso, cuyo valor es muy pequeño cuando se trabaja en vacío, aumentando hasta 85 ó 90 por ciento en plena carga, siendo esta variación debida a la mayor potencia activa requerida al acrecentarse la carga.

En un motor síncrono hay dos posibles formas de excitación: con corriente alterna en el inducido o con corriente continua en el inductor. Si la intensidad en el inductor es la estrictamente necesaria para crear la f.m.m. requerida, no será necesaria ninguna corriente magnetizante o componente reactiva en el estator y el motor funcionará con un factor de potencia igual a la unidad; si dicha intensidad es menor (motor *subexcitado*) la corriente del estator deberá suministrar la f.m.m. en defecto, con lo que el motor trabajará con un cierto factor de potencia en retraso, y por último, si la corriente continua de excitación es superior (motor *sobreexcitado*), el exceso de f.m.m. deberá compensarse con la corriente del estator naciendo así una componente adelantada y el motor trabajará con factor de potencia en adelanto.

Puesto que a las cargas inductivas tales como transformadores o motores de inducción debe suministrárseles una corriente magnetizante, la propiedad de los motores síncronos sobreexcitados de poder absorber una corriente adelantada es muy apreciable, ya que toma una importancia económica considerable. En efecto, un motor síncrono sobreexcitado actúa como un generador de potencia reactiva capacitiva, liberando de esta función al sistema de suministro principal: su efecto es el mismo que el de una batería de condensadores local. En algunas ocasiones se instalan en los sistemas de potencia máquinas síncronas trabajando en vacío con el único objeto de corregir el factor de potencia y regular el suministro de potencia reactiva; estas máquinas, denominadas también *condensadores síncronos* pueden resultar más económicas, cuando se trata de unidades grandes, que los condensadores estáticos.

Tanto las máquinas síncronas como las de inducción pueden autoexcitarse cuando una carga capacitiva suficientemente grande está conectada a los circuitos del estator. En ese caso, la corriente capacitiva excita la máquina pudiendo dar origen a serias sobretensiones o a pares transitorios excesivos. Debido a la capacidad propia de las líneas de transmisión,

puede presentarse este fenómeno cuando un generador sincrónico alimenta una línea larga en vacío o poco cargada, haciéndose a veces necesario el empleo de shunts reactivos en la cabecera de línea para compensar la corriente capacitiva. En los motores de inducción se evita la autoexcitación limitando la capacidad de los condensadores en paralelo, cuando éstos y el motor se conectan como un todo único.

b. Excitación de turbo-generadores

A medida que se ha ido incrementando la potencia de los turbo-generadores han ido aumentando los problemas relativos a su excitación (en grandes unidades se precisan 4000 A o más). El procedimiento clásico consiste en un generador de continua cuya potencia de salida se envía al devanado inductor del alternador a través de escobillas y anillos rozantes: inevitablemente aparecen problemas de enfriamiento y conservación de anillos, colector y escobillas, inconvenientes que se han reducido al mínimo con los procedimientos modernos de excitación que evitan el empleo de escobillas y de contactos deslizantes.

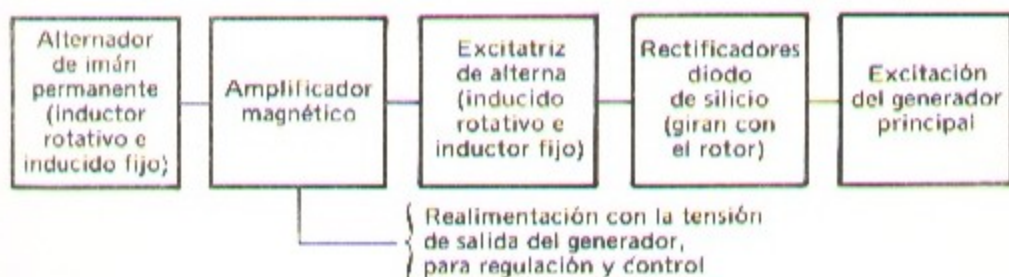


Fig. 4-21. Diagrama de un sistema de excitación sin escobillas.

La Fig. 4-21 es el diagrama esquemático de un sistema moderno. El punto clave del sistema son los rectificadores de silicio, que van montados sobre el mismo eje del rotor del generador, y suministran al inductor la corriente continua de excitación necesaria. Estos rectificadores se alimentan, a lo largo del eje, de una excitatriz de corriente alterna en la que el inducido está en el rotor, y cuyo campo inductor situado en el estator se alimenta a su vez a través de un amplificador magnético, que controla y regula la tensión de salida del generador principal. Para formar un conjunto único carente de contactos deslizantes, la potencia de excitación del amplificador magnético procede del estator de un pequeño alternador de imán permanente que gira arrastrado también por el eje principal. La tensión y frecuencia de la excitatriz de corriente alterna se eligen de la forma más conveniente para el buen funcionamiento del conjunto. La demora de respuesta a una señal de control es siempre pequeña comparada con la constante de tiempo del campo del generador principal. El sistema tiene además la ventaja de prescindir de cortacircuitos y reostatos de campo.

Otro sistema de excitación consiste en utilizar como excitatriz principal un alternador clásico, con el inducido en el estator y el inductor en el rotor, movido éste por el eje común; su frecuencia es de 150 ó 200 Hz. Su potencia de salida pasa a un rectificador estático el que a su vez alimenta la excitación del turbo-generador a través de anillos rozantes.

4-8. PERDIDAS

El conocimiento de las pérdidas en las máquinas es importante en tres aspectos: las pérdidas determinan el rendimiento de la máquina e influyen apreciablemente en el coste del servicio; producen calentamiento, determinando con ello la potencia nominal que puede obtenerse de la máquina sin deterioro de los aislamientos, y por último, en la representación de la máquina deben tenerse en cuenta las caídas de tensión y las componentes de la corriente debidas a la necesidad de cubrir dichas pérdidas.

El rendimiento de la máquina viene dado, al igual que en los transformadores o que en cualquier otro dispositivo de conversión de energía, por la fórmula

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Potencia de salida}}{\text{Potencia de entrada}} \quad (4-20)$$

que puede expresarse también:

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Entrada} - \text{Pérdidas}}{\text{Entrada}} = 1 - \frac{\text{Pérdidas}}{\text{Entrada}} \quad (4-21)$$

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{Salida}}{\text{Salida} + \text{Pérdidas}} \quad (4-22)$$

Las máquinas rotativas trabajan en general con buen rendimiento, salvo si lo hacen muy descargadas. Por ejemplo, el rendimiento a plena carga de la mayor parte de los motores es de alrededor del 74 % para los de un caballo, 89 % para los de 50 caballos, 93 % para los de 500 caballos y 97 % para los de 5.000 caballos. Los motores lentos tienen en general menor rendimiento que los de gran velocidad, siendo la diferencia del orden del 3 al 4 por ciento.

Para calcular el rendimiento generalmente se emplean las fórmulas 4-21 y 4-22 ya que es más corriente medir las pérdidas que medir directamente las potencias de entrada y de salida en carga. La medición de las pérdidas es más conveniente y económica y da resultados más precisos al calcular el rendimiento, ya que un determinado porcentaje de error en su medición repercutirá únicamente en su décima parte sobre el error resultante en el rendimiento calculado. Los rendimientos hallados por medio de la medición de pérdidas pueden servir para comparar distintas máquinas entre sí, siempre que se empleen en todas ellas los mismos métodos de medición y de cálculo, motivo por el cual la

"American National Standards Association (ANSI)" ha puntualizado cuáles son las distintas pérdidas a considerar y cuáles las condiciones para su medición. En el subsiguiente estudio de las pérdidas individualizadas se han tenido en cuenta las normas emitidas en la American National Standard C-50, si bien no de una manera exhaustiva.

1. *Pérdidas en el cobre*, o RI^2 , se originan, naturalmente, en todos los devanados de la máquina. Por convención, estas pérdidas se determinan basándose en la resistencia de los devanados a 75°C , si bien en la realidad dependen de la resistencia efectiva en las condiciones normales de frecuencia y de flujo. El incremento de pérdidas representado por la diferencia entre la resistencia con corriente continua y la resistencia efectiva se incluye en las pérdidas parásitas que veremos más adelante. En los circuitos inductores de las máquinas síncronas, y de corriente continua, únicamente se atribuyen a la propia máquina las pérdidas en el devanado, mientras que las que se producen en los reostatos de regulación del campo o en los equipos complementarios se cargan al conjunto del que la máquina es sólo una parte; íntimamente relacionadas con las pérdidas RI^2 están las pérdidas en los contactos entre escobillas y anillos o colectores, que convencionalmente se desprecian en las máquinas de inducción y en las síncronas, mientras que en las de corriente continua de tipo industrial se admite una caída de tensión total en escobillas de 2 V, cuando éstas son de grafito con conexión flexible.
2. *Pérdidas mecánicas*, debidas al rozamiento en escobillas y cojinetes, a la resistencia del aire y a la potencia necesaria para hacer circular el aire a través del sistema de refrigeración, si existe, ya sea por medio de ventiladores incorporados o exteriores (no se incluye la potencia necesaria para la circulación del aire a través de conductos largos o angostos ajenos a la máquina). Las pérdidas por rozamientos y por resistencia del aire se pueden determinar midiendo la potencia de entrada en la máquina, girando ésta a su propia velocidad pero descargada y sin excitación, aunque muy frecuentemente estas pérdidas se engloban con las pérdidas en el núcleo y se determinan conjuntamente con ellas.
3. *Pérdidas en el núcleo, en circuito abierto o sin carga*, debidas a la histéresis y a las corrientes parásitas originadas por variaciones de la densidad de flujo en el hierro, estando excitado únicamente el devanado inductor principal. En las máquinas de continua y en las síncronas estas pérdidas están localizadas principalmente en el hierro del inducido si bien las pulsaciones de flujo motivadas por las aberturas de las ranuras originarán también pérdidas en el hierro del inductor, particularmente en las expansiones polares; en las máquinas de inducción dichas pérdidas están localizadas principalmente en el hierro del estator.

Las pérdidas en el núcleo, en circuito abierto, pueden determinarse midiendo la potencia de entrada en la máquina cuando ésta funciona descargada, con su velocidad y frecuencia nominales, y con el flujo o tensión normales; del valor así hallado deben deducirse las pérdidas debidas al rozamiento y a la resistencia del aire, y si la máquina gira por sí misma durante el ensayo deberán deducirse también las pérdidas sin carga en el cobre del inducido (en el cobre del estator para los motores de inducción). Corrientemente se toman los datos necesarios

para trazar una curva de pérdidas en el hierro en función de la tensión inducida para valores de esta tensión próximos al nominal. Las pérdidas bajo carga en el hierro se considera que son iguales a las correspondientes a la tensión nominal corregida con la caída de tensión también bajo carga en la resistencia óhmica del inducido (en máquinas de alterna esta corrección es vectorial). En motores de inducción se prescinde muchas veces de esta corrección utilizándose las pérdidas a la tensión nominal. Para calcular posteriormente el rendimiento no es necesario separar las pérdidas en el hierro de las debidas al rozamiento y a la resistencia del aire; la suma de todas ellas constituye la pérdida total de marcha en vacío.

La pérdida por corrientes parásitas es proporcional a los cuadrados del flujo, de la frecuencia y del espesor de las chapas: en condiciones normales puede expresarse con suficiente aproximación:

$$P_e = K_e (B_{\max} f r)^2 \quad (4-23)$$

siendo r el espesor de las chapas, B_{\max} la densidad máxima de flujo, f la frecuencia, y K_e una constante de proporcionalidad cuyo valor depende de las unidades empleadas, del volumen del hierro y de su resistividad. La variación de las pérdidas por histéresis puede expresarse únicamente de forma empírica, siendo la siguiente la más empleada:

$$P_h = K_h f B_{\max}^n \quad (4-24)$$

siendo K_h una constante de proporcionalidad dependiente del volumen y características del hierro así como de las unidades empleadas, y variando el exponente n entre 1,5 y 2,5 tomándose en general el valor 2,0 para una primera estimación. En las ecuaciones 4-23 y 4-24 puede sustituirse la frecuencia por la velocidad y la densidad de flujo por la tensión correspondiente, siempre que se varíe también en consonancia la constante de proporcionalidad: estas sustituciones quedan implícitas cuando el ensayo de las pérdidas en el núcleo se lleva a cabo a la velocidad de régimen y a la tensión apropiada.

Al cargar la máquina, la distribución espacial de la densidad de flujo queda modificada por la f.m.m. de la corriente de carga, y las pérdidas en el núcleo se acrecientan notablemente: los armónicos de la f.m.m. son origen de pérdidas considerables en las proximidades de la superficie del entrehierro. El incremento total de pérdidas en el núcleo se considera como parte de las pérdidas parásitas en carga.

4. *Pérdidas adicionales*, que comprenden las debidas a la distribución no uniforme de la corriente en los conductores, y las adicionales en el núcleo debidas a la distorsión del campo magnético producida por la corriente de carga; estas pérdidas son difíciles de determinar con cierta exactitud. Convencionalmente se evalúan en el 1 % de la potencia suministrada, en las máquinas de continua; en las síncronas o de inducción pueden hallarse experimentalmente.

La anterior clasificación de las pérdidas en una máquina es, desde un punto de vista estricto, un tanto artificiosa. Se ha visto la subdivisión de las pérdidas en el hierro en pérdidas en vacío y en un incremento que nace con la carga, y asimismo la subdivisión de las pérdidas en el cobre en pérdidas óhmicas $R I^2$ y en un incremento debido a la desigual distribución de la corriente en la sección de los conductores, aunándose estos dos incrementos para formar las pérdidas adicionales en carga; esta subdivisión obedece a razones prácticas de facilidad de ensayo, y está justificada por el hecho de que el objetivo principal es el conocimiento de las pérdidas totales y del rendimiento a efectos de comparar distintas máquinas entre sí, teniendo al mismo tiempo valores lo más próximos posible a los reales. No está de más recordar que las pérdidas juegan un papel más que teórico en el funcionamiento de la máquina.

Por ejemplo, en un generador se requiere evidentemente un par mecánico en el eje para vencer las pérdidas en el hierro y en el cobre así como los rozamientos y resistencia del aire, además del necesario para suministrar la energía eléctrica de salida. Estas pérdidas influyen por tanto en la amortiguación de los regímenes transitorios tanto eléctricos como mecánicos. Los distintos componentes de las pérdidas adicionales en carga, aun cuando individualmente sean sólo una pequeña fracción de la potencia nominal, pueden tener una importancia primordial para el proyecto de la máquina.

Así, el calentamiento del rotor es generalmente un factor limitativo en el proyecto de grandes alternadores de gran velocidad, y las pérdidas adicionales en la superficie del propio rotor influyen directamente sobre las dimensiones de un generador de potencia dada. La histéresis y las corrientes parásitas tienen también su influencia, ya que retrasan el flujo respecto a la f.m.m., existiendo por tanto un pequeño ángulo de retraso entre las ondas de f.m.m. rotativas de una máquina y las ondas de densidad de flujo correspondientes; en consecuencia, sobre un material magnético situado en un campo rotativo actuará un par que será proporcional a las pérdidas por histéresis y por corrientes parásitas en el propio material. Aun cuando este par es relativamente pequeño en las máquinas normales, encuentra aplicación directa en los pequeños motores de histéresis.

4-9. CARACTERISTICAS NOMINALES Y CALENTAMIENTO

Uno de los puntos más importantes que se presentan en la aplicación práctica de máquinas, transformadores y en general otros equipos eléctricos es: ¿Cuál es la potencia máxima que se puede obtener? Naturalmente la respuesta depende de varios factores; en las máquinas en general, viene fijada por el tiempo de servicio que se les atribuya. Es condición indispensable que la vida de la máquina no resulte indebidamente mermada a causa de sobrecalentamientos, por consiguiente, el aumento de temperatura debido a las pérdidas estudiadas en los apartados anteriores es decisivo para fijar la potencia nominal.

La vida que se puede esperar de una máquina está íntimamente relacionada con la temperatura de servicio, debido a que la degradación del aislamiento es función de ambos factores: temperatura y tiempo. Esta degradación es causada principalmente por un fenómeno químico de oxidación lenta que endurece los aislamientos volviéndolos frágiles y

quebradizos en detrimento de su duración mecánica y de su rigidez dieléctrica. En general, la degradación, así como la vida del dieléctrico siguen una ley exponencial

$$\text{Vida} = A e^{B/T} \quad (4-25)$$

siendo A y B unas constantes y T la temperatura absoluta. Por tanto, y de acuerdo con la ecuación 4-25, construyendo una gráfica en la que la vida se represente en escala logarítmica, y la inversa de la temperatura absoluta en una escala lineal, la curva resultante será una línea recta; estas gráficas constituyen una buena ayuda para valorar el comportamiento térmico de materiales y sistemas. Según una vieja ley empírica, más o menos caída en desuso, la vida de un aislamiento orgánico se reduce a la mitad por cada 8 a 10° C de aumento de temperatura.

La valoración de los materiales aislantes o de los aislamientos completos se basa en una serie de técnicas y ensayos de envejecimiento acelerado. Según sea el tipo del equipo eléctrico, varían mucho las condiciones de servicio y la vida que se espera de él. Por ejemplo, la vida pretendida puede ser de pocos minutos en algunas aplicaciones militares y en misiles, de 500 a 1.000 horas en algunas aplicaciones electrónicas y aeronáuticas y de 10 a 30 años en equipos industriales, por lo que los métodos de ensayo serán distintos según el tipo de equipo a que se deban referir. Las pruebas de envejecimiento acelerado de los aislamientos se llevan a cabo generalmente sobre modelos preparados al efecto; sin embargo, no son fácilmente aplicables en todos los casos, especialmente cuando se trata del aislamiento de grandes máquinas.

En estas pruebas de vida se pretende simular las condiciones de servicio reales: en general, los ensayos constan de las siguientes etapas.

1. Choque térmico, resultante de elevar la temperatura hasta la de ensayo.
2. Mantenimiento a dicha temperatura.
3. Choque térmico, resultante de enfriar hasta la temperatura ambiente o por debajo de ella.
4. Vibraciones y esfuerzos mecánicos análogos a los que existirán en la aplicación real.
5. Exposición a la humedad.
6. Ensayos dieléctricos para determinar las condiciones del aislamiento.

Se ensaya un número de muestras suficientemente grande para poder analizar los resultados mediante técnicas estadísticas. Estos resultados permiten clasificar los materiales aislantes o los aislamientos mismos en distintas clases de acuerdo con la temperatura.

En las normas de la ANSI, IEEE y National Electrical Manufacturers Association (NEMA) pueden consultarse los límites de temperatura asignados a los aislamientos comercialmente disponibles. La NEMA fija tres clases de aislamientos de principal interés en las máquinas industriales; estas clases son las B, F y H. La clase B comprende la mica, la fibra de vidrio, el amianto y otros materiales análogos junto con las sustancias aglutinantes adecuadas. La clase F comprende también la mica, la fibra de vidrio y otras sustancias sintéticas análogas a las de la clase B pero que deban resistir temperaturas más altas. La clase H destinada a temperaturas aún mayores incluye la goma silicona y mezclas de mica,

fibra de vidrio, amianto, etc., aglomeradas con resinas de silicona apropiadas. La experiencia y los ensayos realizados constituyen la base principal en que se apoyan los criterios de clasificación.

Una vez fijada la clase térmica del aislamiento, el aumento de temperatura admisible en cada una de las partes de una máquina de tipo industrial puede determinarse consultando las Normas del caso. Hay que hacer distinciones según el tipo de máquina de que se trate, el procedimiento empleado para medir la temperatura, la parte de máquina considerada, si ésta es cerrada o no y su forma de enfriamiento (por aire, por aire forzado, por hidrógeno, etc.). También deben hacerse distinciones entre las máquinas de uso general y las destinadas a aplicaciones específicas. Por máquina de *uso general* se entiende una máquina de potencia nominal normalizada de hasta 200 caballos, con características operativas normales, y de construcción mecánica adecuada para trabajar en condiciones normales sin quedar restringida a una determinada aplicación o tipo de aplicación. Por el contrario, se entiende por máquina para *aplicación específica* aquella que ha sido diseñada con unas características o construcción mecánica encaminadas concretamente a una determinada aplicación. Para una misma clase de aislamiento, el aumento de temperatura admitido en una máquina de uso general es menor que el admitido en otra de uso específico, teniéndose así un mayor margen de seguridad en aquella en que las condiciones del servicio son menos conocidas. Esta menor temperatura se compensa en parte atribuyendo a las máquinas de uso general un factor de servicio igual a 1,15 cuando trabajan a su tensión nominal. Multiplicando la potencia indicada por este factor, obtendremos la potencia efectiva que puede suministrar la máquina en servicio continuo si las condiciones son las adecuadas.

En la siguiente tabla se dan algunos ejemplos de temperaturas admisibles según las Normas NEMA, aplicables a motores de inducción, suponiéndose la temperatura ambiente igual a 40° C, y midiéndose el calentamiento de la máquina por el aumento de resistencia de sus devanados.

TEMPERATURA ADMISIBLE, °C

	CLASE B	CLASE F	CLASE H
Motores, con factor de servicio 1,15	90	115	
Motores, con factor de servicio 1	85	110	
Motor cerrado, ventilación forzada	80	105	125
Motor cerrado, sin ventilación	85	110	135

Lo más corriente es definir una máquina por su *potencia nominal en servicio continuo*, que es la potencia de salida (kW en los generadores de continua, kVA y $\cos \varphi$ en los de alterna, y caballos en los motores) a que puede operar indefinidamente sin sobrepasar los límites térmicos establecidos. Con servicio intermitente, periódico, o con carga variable, la máquina tendrá asignada una potencia de corta duración que podrá definirse como la que es capaz de suministrar durante un período de tiempo dado, tiempo que en general está normalizado en 5, 15, 30 ó 60 minutos. Al fijar los datos nominales de la máquina se especifican los de tensión, velocidad y frecuencia, previendo las posibles variaciones en

ellos. Por ejemplo, los motores deben trabajar correctamente con tensiones un 10 por ciento superiores o inferiores a la nominal, y con frecuencias 5 por ciento también superiores o inferiores a la nominal, siendo la variación máxima de la combinación de ambas igual al 10 por ciento. También hay que prever que la máquina pueda soportar una sobrecarga durante un tiempo razonable; el usuario de un motor espera que éste sea capaz de resistir con un margen de seguridad suficiente una sobrecarga de por ejemplo el 25 % a una tensión 90 % de la nominal.

El problema de elegir la máquina adecuada a un determinado servicio es relativamente sencillo cuando la carga se mantiene prácticamente constante. No obstante, en muchos casos la carga de un motor varía más o menos cíclicamente dentro de un amplio campo: el motor de una grúa constituye un ejemplo claro. Bajo el punto de vista térmico, el calentamiento medio del motor debe hallarse estudiando detalladamente las pérdidas durante cada uno de los períodos en que se puede dividir el ciclo. En motores abiertos o semicerrados hay que tener en cuenta las variaciones de ventilación al variar la velocidad.

Algunas veces, para determinar el tamaño de un motor destinado a trabajar a velocidad prácticamente uniforme, se admite que el aumento de temperatura del aislamiento es proporcional al cuadrado de la carga, suposición que sobrevalora el efecto de las pérdidas en el inducido RJ^2 a expensas de las pérdidas en el hierro. El valor medio cuadrático o valor eficaz de la potencia durante un ciclo de carga completo, deducido de la gráfica potencia-tiempo puede calcularse igual que se calculó el valor eficaz de una corriente periódicamente variable: el motor se elige de acuerdo con esta potencia eficaz calculada:

$$\text{Potencia eficaz} = \sqrt{\frac{\sum (\text{potencia})^2}{\text{tiempo en marcha} + (\text{tiempo parada}/K)}} \quad (4-26)$$

siendo K una constante que tiene en cuenta la menor ventilación durante la parada, y que en un motor abierto vale aproximadamente 4. El tiempo empleado en un ciclo completo debe ser corto comparado con el que necesita el motor para alcanzar su temperatura de régimen.

Aunque algo rudimentario, el método de la potencia eficaz se emplea frecuentemente con éxito, pues la necesidad de redondear el resultado para atenerse a la serie de potencias normales existentes en el mercado hace innecesario un cálculo excesivamente preciso: si por ejemplo, del cálculo resulta una potencia efectiva de 87 caballos deberá adquirirse un motor de 100. Hay que tener especial cuidado con los motores que hayan de arrancar o cambiar de sentido de rotación con frecuencia, pues tales maniobras equivalen, térmicamente hablando, a fuertes sobrecargas. Asimismo hay que tener en cuenta que cuando en el ciclo existen puntas de potencia considerables, un motor cuya potencia nominal haya sido elegida exclusivamente por consideraciones técnicas bien puede ser incapaz de dar el par requerido, por lo que en estos casos es frecuente utilizar motores especiales dimensionados para soportar fuertes cargas durante tiempos cortos; estos motores en general pueden producir pares más fuertes que los motores normales de igual potencia, aun cuando térmicamente son menos resistentes, debido a que han sido proyectados con gran densidad de flujo en el hierro y gran intensidad de corriente en el cobre. La relación entre el par que pueden desarrollar y su resistencia térmica aumenta al disminuir el tiempo de

aplicación de la carga: en general se admite mayor aumento de temperatura que en los de uso general. Por ejemplo, un motor de valores nominales 150 c.v. durante 1 hora, con aumento de temperatura de 50° C puede dar el mismo par que otro motor de 200 c.v. de servicio continuo, si bien trabajando continuamente, podrá desarrollar sólo el 80 % de su potencia nominal, es decir, 120 c.v. Un motor de este tipo puede ser la solución ideal para aplicar a una carga que requiera una potencia continua de 120 c.v. pero con puntas de carga que requieran un par como el que podría dar un motor de uso general de 200 c.v.

4-10. REFRIGERACION DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS

En general, los problemas de refrigeración de aparatos eléctricos aumentan en dificultades al aumentar las potencias. Las superficies a través de las que puede dispersarse el calor aumentan aproximadamente con el cuadrado de las dimensiones lineales de la máquina, mientras que el calor engendrado por las pérdidas aumenta con el volumen, es decir, aproximadamente con el cubo de dichas dimensiones. Este problema es muy importante cuando se trata de turbogeneradores grandes, en los que tanto por economía como por exigencias mecánicas, de transporte y de emplazamiento se requiere una gran compacidad, particularmente en los rotores forjados. Aún en máquinas más pequeñas, por ejemplo en generadores de hasta algunos centenares de caballos, se emplea corrientemente la ventilación forzada, por lo que hay que prever canales de ventilación que aseguren que el medio refrigerante arrastre efectivamente todo el calor producido por las pérdidas.

En turbogeneradores, generalmente se emplea el hidrógeno como medio refrigerante en todo sistema de ventilación cerrado. El hidrógeno posee las siguientes propiedades que lo hacen idóneo para este objeto.

1. Su densidad es 0,07 la del aire a igual temperatura y presión, lo que supone que las pérdidas debidas a la ventilación y a la resistencia del fluido sean mucho menores.
2. Su calor específico, a igualdad de peso, es 14,5 veces superior al del aire: esto significa que a igualdad de temperatura y presión, ambos pueden absorber la misma cantidad de calor por unidad de volumen, pero la transferencia de calor por convección entre las partes calientes de la máquina y el gas es considerablemente mayor con hidrógeno que con aire.
3. Al quedar eliminado el polvo, la humedad y el oxígeno, se prolonga la vida del aislamiento y se reducen los gastos de entretenimiento.
4. El peligro de incendio es mínimo: una mezcla de hidrógeno y aire no puede hacer explosión si el contenido de hidrógeno está por encima de aproximadamente un 70 por ciento.

Como consecuencia de los dos primeros puntos, el calor que debe disiparse en iguales condiciones operativas es menor, al mismo tiempo que aumenta la facilidad de disiparlo.

Tanto la máquina como el cambiador de calor para el enfriamiento con agua del hidrógeno deberán encerrarse en una envuelta estanca; el cierre de los cojinetes constituye

un punto delicado. En el interior del sistema de refrigeración se mantiene una ligera sobrepresión por encima de la atmosférica (unos $0,04 \text{ Kg/cm}^2$) de forma que no se pueda formar mezcla explosiva en el interior de la máquina. Con esta presión, la potencia nominal de la máquina se incrementa en aproximadamente un 30 por ciento respecto a la que tendría refrigerada con aire, y al mismo tiempo, el rendimiento a plena carga aumenta en un 0,5 %. Actualmente existe la tendencia a emplear mayores presiones (de 1 a 4 Kg/cm^2); al aumentar la presión desde $0,04$ hasta 1 Kg/cm^2 , puede aumentarse la potencia de salida alrededor de un 15 % y elevándola hasta 2 Kg/cm^2 aún se puede aumentar otro 10 por ciento.

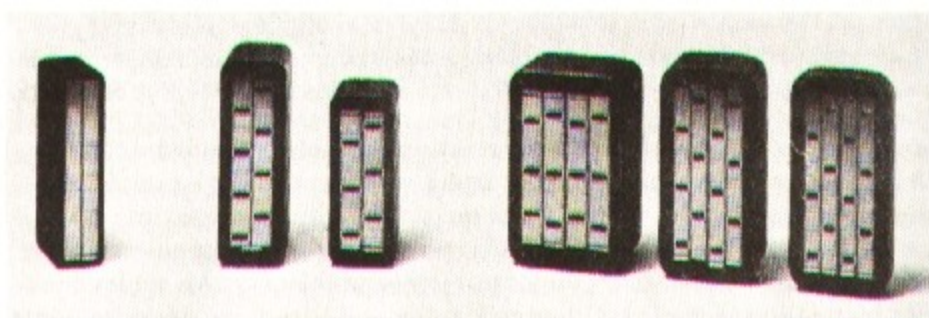


Fig. 4-22. Sección recta de barras para el devanado en dos capas del estator de un turbogenerador. El aislamiento es de resinas sintéticas impregnadas al vacío. Tipo A: refrigerado indirectamente formado por elementos tubulares. Tipo B: refrigerado con agua, doble ancho. Tipo C: refrigerado con agua, cuádruple ancho. (Brown Boveri Corporation.)

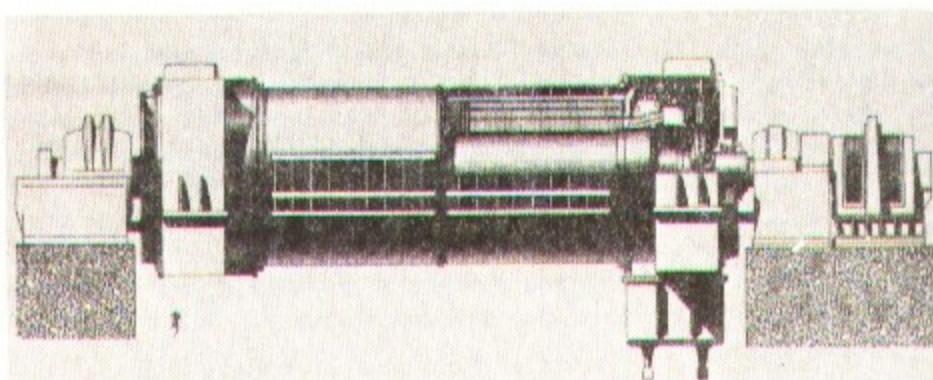


Fig. 4-23. Vista en sección de un turbogenerador de cuatro polos, 1800 r.p.m. 1333 MVA, factor de potencia 0,85, 26 KV, 60 Hz, 4 Kg/cm^2 presión de H^2 . El devanado del estator está refrigerado con agua y el del rotor con hidrógeno. (Brown Boveri Corporation.)

Un nuevo paso que ha permitido duplicar la potencia de un generador de determinado tamaño refrigerado con hidrógeno, ha sido la introducción del enfriamiento interior de los propios conductores haciendo circular el refrigerante (líquido o gas) por huecos o conductos interiores a los mismos o entre sus varias capas. En la Fig. 4-22 se muestran varios ejemplos. Con ello se soslaya la barrera térmica constituida por el aislamiento eléctrico, y las pérdidas en el cobre las absorbe directamente el refrigerante. Para el enfriamiento del rotor, normalmente se usa el hidrógeno y para el estator un refrigerante gaseoso o líquido, que en el primer caso acostumbra a ser hidrógeno, y en el segundo aceite o agua.

La Fig. 4-23 corresponde a la vista en sección de un turbogenerador con los conductores refrigerados, y en las Figs. 3-2 y 3-9 puede verse un generador hidroeléctrico en el que tanto el rotor como el estator están refrigerados con agua.

4-11. RESUMEN

A medida que se va profundizando en el estudio de las máquinas rotativas, van apareciendo diferencias de detalle entre sus distintos tipos. Así por ejemplo, los problemas inherentes al colector son exclusivos de las máquinas de continua; los efectos de la saturación magnética y de los polos salientes son significativos en las máquinas de continua y en las síncronas; la regulación de la velocidad en los motores de inducción tiene también sus problemas propios; para comprender bien los sistemas de regulación de velocidad mediante rectificadores estáticos es necesario estudiar rectificadores y motores conjuntamente; en muchas de las aplicaciones prácticas de las máquinas surgen problemas relacionados con las características dinámicas y transitorias del equipo; los pequeños motores de potencia fraccional tienen sus propios problemas, de entre los cuales su posición de competencia en el mercado no es ciertamente el menor. Los capítulos 5 al 11 están relacionados con algunos de estos problemas.

No hay que olvidar que la eficiencia del servicio de una máquina está limitada básicamente por las propiedades de los materiales de que está construida, por lo que el gran progreso alcanzado a través de los años se apoya principalmente en las mejoras conseguidas en las características de los aceros y de los aislamientos así como en la refrigeración.

Una serie de problemas relacionados con las pérdidas y con la necesidad de disipar el calor por ellas engendrado son comunes a todos los tipos de máquinas. La potencia y demás características nominales de una máquina están íntimamente relacionadas con la posibilidad de hacerla trabajar a temperaturas compatibles con una vida razonablemente larga de los aislamientos y demás elementos que la forman. Las cuestiones relativas a valores nominales, temperaturas admisibles y determinación de pérdidas han sido objeto de normalización por parte de diversos organismos especializados tales como IEEE, NEMA, ANSI y otros; evidentemente estas cuestiones son de gran importancia económica y técnica en el proyecto de instalaciones en las que intervengan máquinas.

PROBLEMAS

4-1. Un motor síncrono con su estator conectado a un sistema polifásico equilibrado trabaja con factor de potencia igual a la unidad, venciendo un par resistente constante

igual a la mitad del correspondiente a la plena carga. Dígase en qué sentido (en el mismo o en el contrario al de rotación) se moverá el rotor, en relación a la onda de densidad de flujo resultante en el entrehierro, al aumentar la corriente de excitación.

4-2. Un motor síncrono alimentado a tensión constante ejerce un par también constante; puede prescindirse de las pérdidas y de la reactancia de dispersión en el inducido. En principio se ajusta la corriente de excitación de forma que el motor trabaje con factor de potencia igual a la unidad. Dígase y razónese cuáles serán los efectos de disminuir la corriente de excitación sobre las magnitudes siguientes:

- El valor de la onda de flujo resultante.
- La componente de la corriente del inducido en fase con la tensión.
- El ángulo de defase δ entre la f.m.m. del inducido y la onda de flujo resultante.

4-3. Hay que suministrar potencia eléctrica a un sistema trifásico de 25 Hz a partir de otro sistema, también trifásico de 60 Hz, mediante un grupo de motor y generador síncronos directamente acoplados.

- ¿Cuál es el mínimo número de polos que debe tener el motor?
- ¿Cuál es el mínimo número de polos que debe tener el generador?
- ¿A qué velocidad, en r.p.m., deberá girar el grupo?

4-4. Un motor de inducción trifásico gira en vacío a unas 1000 r.p.m. y con plena carga a 950 r.p.m., estando alimentado por una corriente trifásica de 50 Hz.

- ¿Cuántos polos tiene el motor?
- ¿Cuál es, en tanto por ciento, el deslizamiento a plena carga?
- ¿Cuál es la frecuencia de la tensión en el rotor?
- ¿Cuáles son las velocidades relativas (1) del campo del rotor respecto al rotor (2) del campo del rotor respecto al estator (3) del campo del rotor respecto al del estator?
- ¿Qué velocidad tendría el rotor con un deslizamiento del 10 por ciento?
- ¿Cuál sería la frecuencia en el rotor a dicha velocidad?
- Repítase el apartado *d*, con el 10 por ciento de deslizamiento.

4-5. Un motor lineal, basado en el mismo principio que los motores de inducción, consiste en un carro que se desliza por un carril. Dicho carril es el desarrollo de un devanado de jaula de ardilla y el carro, que tiene un devanado trifásico de ocho polos, desarrollado, es de las siguientes dimensiones: largo 4 m., ancho 1,20 m. y alto 2 m. La distancia entre ejes de dos polos consecutivos es de 0,45 m. El carro se alimenta con corriente de 50 Hz a través de brazos toma-corrientes que se apoyan sobre carriles situados en una zanja por debajo del nivel del suelo.

- ¿Cuál es la velocidad de sincronismo, en Km/h.?
- ¿Alcanzará el carro esta velocidad? Razónese la respuesta.
- ¿Qué frecuencia de deslizamiento corresponde a una velocidad de 120 Km/h.?

Los motores de inducción lineales se han propuesto para diversas aplicaciones entre las que se cuentan los transportes terrestres a gran velocidad.

4-6. Explíquense los efectos que en la característica normal par-velocidad de un motor de inducción producen las siguientes modificaciones:

- a. Reducción a la mitad de la tensión, manteniendo la frecuencia normal.
- b. Reducción a la mitad tanto de la tensión como de la frecuencia.

Trácese las nuevas características par-velocidad resultantes de las anteriores modificaciones, situándolas en su posición aproximada respecto a la normal. Despréciense los efectos de la resistencia del estator y de la reactancia de dispersión.

4-7. El estator de un motor trifásico de inducción de seis polos, se conecta, estando descargado, a una red de 60 Hz, mientras que el rotor, de tipo devanado, se conecta a una de 25 Hz.

- a. ¿Nace un par de arranque?
- b. ¿Cuál será la velocidad de régimen? Existen dos soluciones posibles, que dependen de las circunstancias del caso particular.
- c. ¿Qué es lo que determina en cuál de las dos velocidades vistas en *b* funcionará el motor en cada caso específico?
- d. Supongamos que la frecuencia de la corriente suministrada al rotor varía entre 0 y 25 Hz. Trácese las curvas que dan la velocidad en r.p.m. en función de la frecuencia, considerando que la frecuencia cero corresponde a una corriente continua.
- e. ¿Qué cambios habría que introducir en las respuestas anteriores si el motor trabajara a plena carga en lugar de estar descargada?

4-8. En la Fig. 4-24 se representa un motor de inducción trifásico, de rotor bobinado, acoplado directamente por su eje a un motor síncrono también trifásico. Los terminales del devanado trifásico del rotor del motor de inducción a la velocidad y sentido de rotación necesarios para que en los anillos rozantes exista una frecuencia de 100 Hz. El devanado del estator de la máquina de inducción es de seis polos.

- a. ¿Cuántos polos deberá tener el devanado del rotor de la máquina de inducción?
- b. Si el campo del estator de la máquina de inducción gira en sentido dextrógiro ¿en qué sentido deberá girar su rotor?
- c. ¿Cuál debe ser la velocidad en r.p.m.?
- d. ¿Cuántos polos deberá tener el motor síncrono?

4-9. El equipo de la Fig. 4-24 se emplea para convertir a otras frecuencias un sistema equilibrado de 50 Hz. El motor síncrono es de dos polos, y mueve el eje de acoplamiento en sentido dextrógiro. La máquina de inducción es de doce polos, y su devanado del estator está conectado a la línea de forma que el campo giratorio lo sea en sentido

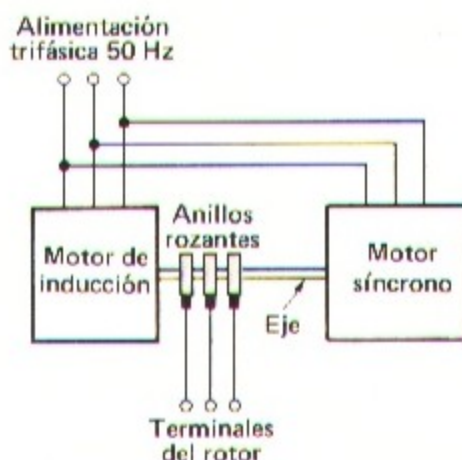


Fig. 4-24. Máquinas de inducción y síncrona de los problemas 4-8 v 4-9 acopladas.

levógiro, es decir, en sentido contrario al del motor síncrono. Los extremos del devanado del rotor terminan en los anillos rozantes.

- a. ¿A qué velocidad gira el motor?
- b. ¿Cuál es la frecuencia en el rotor de la máquina de inducción?

- 4-10. a. Compárense los efectos que produce sobre la velocidad de un motor derivación de corriente continua una variación de la tensión en la línea con los que se producen al variar únicamente la tensión en el inducido, es decir, manteniendo constante la intensidad en la excitación.
- b. Compárense los anteriores efectos con los que se obtienen variando únicamente la corriente en la excitación derivación manteniendo fija la tensión en los terminales del inducido.

4-11. Dígase aproximadamente como quedan afectadas la corriente en el inducido y la velocidad de un motor derivación de corriente continua al introducir los siguientes cambios en sus condiciones operativas.

- a. Reduciendo a la mitad la tensión en los terminales del inducido, manteniendo constantes la corriente de excitación y el par resistente.
- b. Reduciendo a la mitad la tensión en los terminales del inducido, manteniendo constantes la corriente de excitación y la potencia de salida.
- c. Doblando el flujo inductor, manteniendo constantes la tensión en los terminales del inducido y el par resistente.
- d. Reduciendo a la mitad tanto el flujo de excitación como la tensión en el inducido, manteniendo constante la potencia de salida.

- e. Reduciendo a la mitad la tensión en los terminales del inducido, manteniéndose constante el flujo inductor y variando el par resistente con el cuadrado de la velocidad.

Es suficiente indicar únicamente en cada caso el orden de magnitud aproximado de la variación; por ejemplo "la velocidad queda aproximadamente doblada".

4-12. El inducido de una máquina de continua de 25 kW a 250 V tiene una resistencia de 0,10 ohm. En la Fig. 4-25 está representada su curva de magnetización a la velocidad constante de 1200 r.p.m.

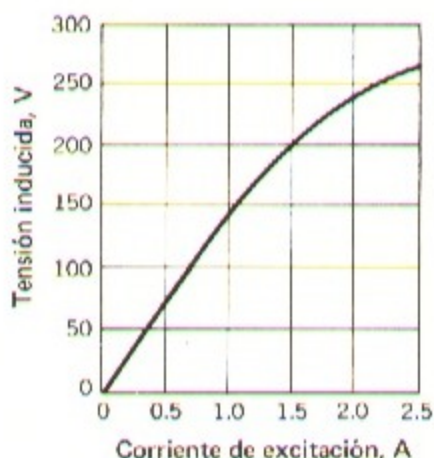


Fig. 4-25. Curva de magnetización a 1200 r.p.m. de la máquina de continua de los problemas 4-12 y 4-13.

Es de excitación independiente, y está movida por un motor síncrono a la velocidad indicada.

Trácese una familia de curvas de la tensión en los terminales del inducido en función de la intensidad en el mismo, para corrientes de excitación constantes de 2,5, 2, 1,5 y 1 A.

4-13. La máquina del problema anterior se hace trabajar como motor con excitación independiente.

- Siendo la corriente de excitación de 2 A trácese una familia de curvas de la velocidad en r.p.m. en función del par en newton-metros, para tensiones aplicadas al inducido de 250, 200, 150 y 100 V.
- Siendo de 200 V la tensión constante aplicada al inducido, trácese una familia de curvas de velocidad en función del par, para corrientes de excitación de 2,5, 2, 1,5 y 1 A.

4-14. Un freno a corrientes parásitas del tipo empleado en las pruebas en carga, necesita que se le aplique un par de 135 Nw-m para girar a 1000 r.p.m. cuando la intensidad en sus bobinas magnetizantes es de 10 A.

Este freno se aplica a un motor serie de continua de 230 V, y potencia nominal 20 c.v. a 1000 r.p.m.

- a. Trácese una familia de cinco curvas par-velocidad correspondientes al freno, cuando la intensidad en sus bobinas es de 6, 8, 10, 12 y 14 A respectivamente. Para los fines de este problema admitamos que el flujo es linealmente proporcional a la intensidad en las bobinas y que el efecto magnético de las corrientes parásitas inducidas en el disco del freno es despreciable; despréciense también los rozamientos y la resistencia del aire.
- b. Sobre el mismo dibujo del punto anterior, trácese una familia de cuatro curvas par-velocidad correspondientes al motor serie, al aplicarle tensiones del 120, 100, 80 y 60 por ciento de la suya nominal. Supóngase que todas las pérdidas son despreciables, que el flujo en el motor es linealmente proporcional a su corriente de excitación, y que la caída de tensión resistiva en los devanados del inducido y del inductor es nula.
- c. Trácese curvas del par y de la velocidad en función de la intensidad en las bobinas del freno, cuando el motor se alimenta con su tensión normal.
- d. Trácese curvas del par y de la velocidad en función de la tensión aplicada al motor cuando la intensidad en las bobinas del freno es de 10 A constantes.

4-15. Los motores trifásicos normales de inducción, a 50 Hz pueden tener 2, 4, 6 ó 8 polos, y 2, 3, 5, 7,5, 10, 15, 20 etc. caballos de potencia nominal. Estos motores desarrollan su potencia nominal con un deslizamiento del orden de 5 %, y pueden ejercer un par igual al 200 % del nominal cuando el deslizamiento es del orden del 15 %.

Escójase el motor más adecuado para una aplicación en la que se requiera un par de 65 Nw-m a unas 1425 r.p.m. durante un período de 30 segundos seguido de otro período de 4 minutos de marcha en vacío, repitiéndose sucesivamente el mismo ciclo.

Especifíquese la potencia y la velocidad de sincronismo nominales.

4-16. Para el accionamiento de un elevador se desea un motor de corriente continua, excitación compuesta. Este motor debe arrastrar continuamente un cable de acero dispuesto entre poleas situadas en la parte alta y baja del elevador. Cuando la carga desciende, el motor actúa de generador devolviendo potencia a la línea, con lo que el par resultante sirve de freno.

El ciclo de operaciones, que se repite continuamente durante todo el día, es el siguiente:

Subida (un minuto) = 75 c.v.

Carga y descarga arriba (dos minutos) = 5 c.v.

Bajada (un minuto) = - 60 c.v.

Carga y descarga abajo (tres minutos) = 5 c.v.

Basándose exclusivamente en el calentamiento, determinar cuál es el motor más pequeño apto para este servicio, siendo los motores disponibles de 25, 30, 40, 50, 60, 75 y 100 c.v.

Además del calentamiento ¿qué otras circunstancias deberían considerarse?

4-17. En el proyecto de una grúa de cuchara destinada a la descarga de barcasas de carbón para situarlo en las carboneras se ha estudiado el ciclo de operaciones con objeto de elegir el motor adecuado: el resultado obtenido se refleja en la siguiente tabla.

Operación	Tiempo seg.	Potencia c.v.
Cerrar la cuchara	6	40
Elevación	10	80
Abrir la cuchara	3	30
Bajada	10	45
Parada	16	0

Debido a las condiciones reinantes deberá usarse un motor cerrado contra el polvo, sin ventilación forzada, y la constante K del tiempo de parada deberá tomarse igual a la unidad.

- Determinar la potencia nominal necesaria, utilizando el método de la potencia eficaz. Escójase el motor adecuado de entre los de existencia normal en el mercado.
- Para la adquisición de este motor se solicita oferta a dos proveedores: en las respectivas ofertas figuran los siguientes datos de garantía y los precios indicados:

Motor	Rendimiento en porcentajes						Precio en pesetas
	Carga: % de la nominal						
	25	50	75	100	125	150	
A	83,4	90,5	90,3	38,-	86,8	85,-	150.000
B	81,3	88,6	90,3	30,6	90,3	85,6	130.000

El coste medio de la energía es de una peseta por kWh. Las cargas anuales sobre el capital invertido son del 25 % y la máquina deberá trabajar unas 2000 horas al año.

¿Cuál de las dos ofertas es más recomendable?

Máquinas de corriente continua

Con objeto de tratar de las máquinas de corriente continua desde una base realista, empezaremos reconsiderando la situación del flujo, y de la f.m.m. en las mismas. Estas reconsideraciones, junto con las que haremos sobre la conmutación en el colector, nos harán ver ciertos fenómenos que limitan la capacidad de las máquinas así como los medios para combatirlos. Ello nos conducirá a conocer los métodos que se pueden emplear para introducir los efectos de la saturación y de la reacción del inducido en el análisis de las máquinas.

Este estudio nos ilustrará sobre las múltiples posibilidades de las máquinas de corriente continua en sí mismas y en combinación con otras máquinas.

5-1. REACCION DEL INDUCIDO

La f.m.m. del inducido afecta de una forma bien definida tanto a la distribución espacial del flujo en el entrehierro como al valor neto del flujo por polo. Los efectos sobre la distribución del flujo tienen gran importancia ya que influyen en los límites entre los que se puede conseguir una conmutación correcta, y el valor del flujo por polo también la tiene, puesto que tanto la tensión inducida como el par desarrollado en el inducido dependen de él.

En este apartado se describirán ambos efectos y los problemas de ellos derivados.

Se ha visto en el apartado 3-3b y Fig. 3-24 que la onda de f.m.m. del inducido es triangular, como sería la onda engendrada por un devanado muy distribuido o por una corriente laminar. En una máquina con las escobillas situadas en la línea neutra la forma de onda teórica de la f.m.m. sería el triángulo de trazos de la Fig. 5-1, en el que los valores positivos corresponden a las zonas en las que las líneas de flujo salen de la superficie del inducido. La dirección de las corrientes en todos los devanados, excepción hecha de los

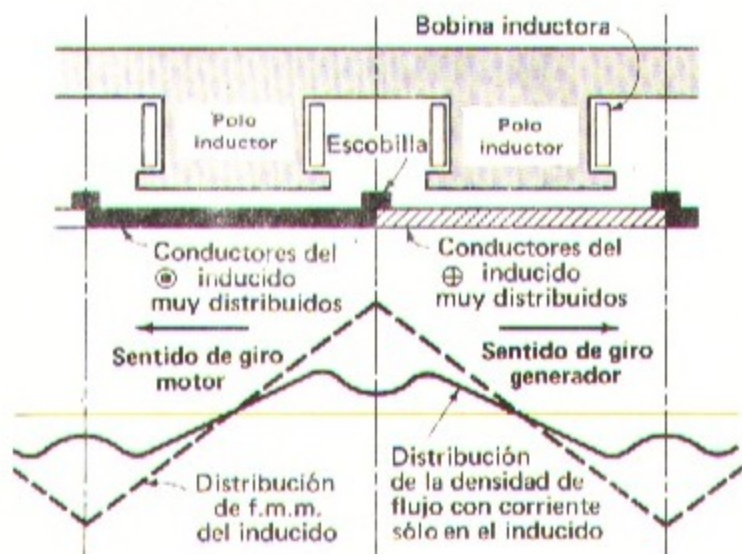


Fig. 5-1. F.m.m. del inducido, y correspondiente distribución de la densidad de flujo con las escobillas situadas en la línea neutra y con corriente sólo en el inducido.

inductores principales, se ha señalado por medio de las zonas negra y rayada. Debido que casi todas las máquinas de continua son de polos salientes, la distribución de flujo será triangular; la curva de trazo continuo de la citada figura corresponde a la distribución de la densidad de flujo estando excitado únicamente el inducido, y como puede apreciarse experimenta una fuerte depresión en el espacio entre polos debido a ser ahí mayor el entrehierro.

La posición de las escobillas sitúa el eje de la f.m.m. del inducido a 90 grados eléctricos del eje del campo principal, y el flujo correspondiente recorre los trayectos representados en la Fig. 5-2: como puede apreciarse, este flujo abarca las expansiones polares interfiriendo por tanto con el flujo del campo principal; a este fenómeno se le denomina *reacción del inducido*, y su consecuencia es evidentemente la de debilitar la densidad de flujo en el entrehierro debajo de una mitad de cada polo e incrementarla debajo de la otra mitad.

Cuando están excitados los dos devanados, el inducido y el inductor, la distribución de la densidad de flujo resultante en el entrehierro toma la forma de la curva de trazo continuo de la Fig. 5-3: la curva de trazos largos sería la de distribución de flujo con solo el inducido excitado, y la de trazos cortos la distribución con excitación únicamente en el inductor. Comparando entre sí estas curvas se aprecia bien la disminución de flujo en una parte de cada polo y el aumento en la otra debidos a la reacción del inducido. En general el flujo total, o sea el representado con trazo continuo, no es la suma algebraica de los otros dos debido a la característica no lineal del hierro del circuito magnético; a consecuencia de la saturación, la disminución de flujo en un semipolo es mayor que el aumento en el otro, y por tanto el flujo total resultante por polo es menor que el que produciría el

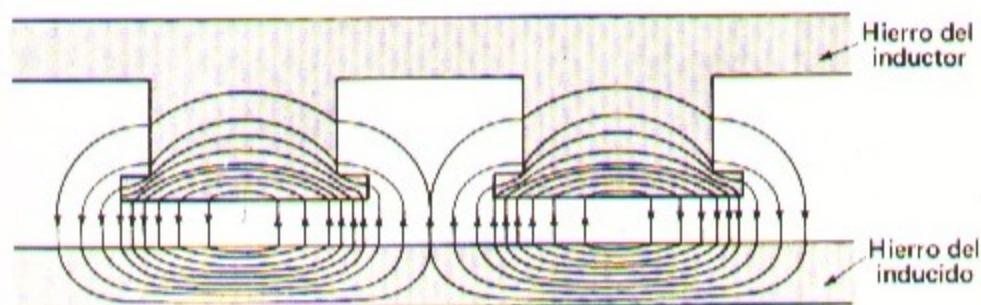


Fig. 5-2. Flujo con corriente sólo en el inducido y escobillas en la línea neutra.

devanado inductor solo, fenómeno que se denomina *efecto desmagnetizante de la reacción del inducido*, y que por ser debido a la saturación es función no lineal de ambas corrientes: la del inductor y la del inducido. Este efecto es ya apreciable con las densidades de flujo a que se trabaja normalmente en las máquinas reales, sobre todo con cargas fuertes, por lo que debe tomarse en consideración al hacer su estudio.

La reacción del inducido produce también una distorsión del flujo que puede tener influencia perjudicial en la conmutación, sobre todo si aquella es excesiva. De hecho, esta distorsión es un factor que limita la sobrecarga de corta duración que puede resistir una máquina de corriente continua. La tendencia a distorsionar la distribución del flujo es mayor en las máquinas tales como los motores derivación, en los que el campo de excitación se mantiene prácticamente constante mientras que el del inducido puede aumentar sustancialmente con cargas fuertes. En cambio, en una máquina excitada en serie la influencia es menor, ya que con la carga aumentan simultáneamente las f.m.m. de los dos devanados.

Al proyectar y construir la máquina pueden aminorarse los efectos de la reacción del inducido: la f.m.m. del campo principal debe ser la que domine en la distribución del flujo, evitando los campos inductores demasiado débiles y los del inducido excesivamente fuertes. La reluctancia del circuito magnético correspondiente al campo del inducido, formado esencialmente por los dientes del inducido, las expansiones polares, y el entrehierro, particularmente el existente junto a los bordes de los polos, debe aumentarse para aumentar el grado de saturación en dichos dientes y polos, lo que se puede conseguir evitando entrehierros demasiado pequeños y utilizando unas expansiones polares biseladas o excéntricas de forma que se aumente el entrehierro junto a sus bordes. Naturalmente, estas disposiciones afectan también al flujo del campo principal, pero mucho menos que al de reacción. La mejor solución, aunque también la más cara, consiste en compensar la f.m.m. del inducido por medio de un devanado situado en la superficie de las expansiones polares; esta solución será estudiada en el apartado 5-3.

Si las escobillas no están situadas en la línea neutra, el eje del campo del inducido no formará 90 grados eléctricos con el del principal, y así existirá no sólo un campo transversal sino también una componente directa magnetizante o desmagnetizante según sea el sentido en que estén desplazadas las escobillas. El decalado de escobillas no es del todo operante debido a la dificultad de situarlas correctamente; no obstante, antes de la inven-

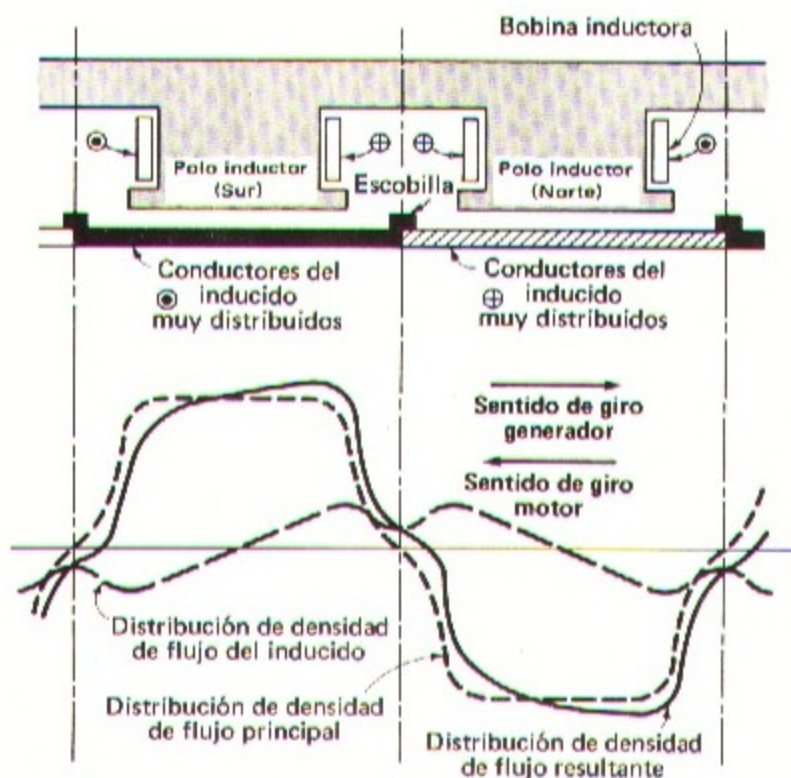


Fig. 5-3. Distribución de la densidad de flujo de los campos principal, del inducido y resultante, estando las escobillas en la línea neutra.

ción de los polos de conmutación fue el procedimiento empleado para conseguir una conmutación satisfactoria, siendo el sentido del decalado tal que se produzca un efecto desmagnetizante.

Un desplazamiento de escobillas en el sentido del movimiento si se trata de un generador, o en sentido contrario si de un motor, produce una f.m.m. desmagnetizante que se puede traducir en una inestabilidad de marcha del motor o en una pérdida excesiva de tensión en el generador. Por medio de una prueba en carga puede comprobarse si la posición de las escobillas es correcta: si están situadas en la línea neutra, la tensión en bornes de un generador o la velocidad de un motor serán las mismas cualquiera que sea el sentido de rotación, siempre que se mantengan invariadas la excitación y la corriente en el inducido.

5-2. CONMUTACION Y POLOS AUXILIARES DE CONMUTACION

Una de las principales limitaciones para el funcionamiento correcto de las máquinas de corriente continua, proviene de la necesidad de suministrar al devanado inducido la inten-

sidad requerida a través del contacto entre escobillas y colector sin excesivas pérdidas ni calentamiento de éstos y sin que se produzcan chispas. El chispeo ennegrece, pica y desgasta tanto el colector como las escobillas, situación que se va acrecentando rápidamente y que termina quemándose el cobre y el carbón; puede ser debido a unas condiciones mecánicas defectuosas tales como vibraciones de las escobillas, rugosidades o desigual desgaste del colector, así como en muchos casos por las condiciones eléctricas: estas últimas están muy influidas por la f.m.m. del inducido y por la onda de flujo resultante.

Tal como ya se indicó en el apartado 4-3, durante la conmutación de una bobina ésta pasa por un período de transición entre uno y otro grupo de bobinas del inducido: al terminar este período, la corriente que por ella circule debe ser igual y de sentido contrario que la que circulaba al comenzarlo. En la Fig. 4-5b el inducido está en una posición intermedia durante la que tiene lugar la conmutación de las correspondientes bobinas, que quedan cortocircuitadas por las escobillas. Durante este período, las escobillas no dejan de conducir la corriente I_a entre el devanado inducido y el circuito exterior. La bobina en cortocircuito constituye un circuito inductivo de resistencia variable con el tiempo en el contacto con las escobillas, en el que en general se induce una tensión y que está acoplado conductiva e inductivamente con el resto del devanado.

El logro de una buena conmutación tiene más de arte empírico que de ciencia cuantitativa, residiendo la principal dificultad para su análisis en el contacto eléctrico entre cobre y carbón, cuya resistencia, no lineal, es función de la densidad de corriente, de su dirección, de la temperatura, del material de las propias escobillas, de la humedad y de la presión atmosférica, y que en ciertos aspectos se asemeja, por su comportamiento, a un gas ionizado. El hecho de más trascendencia consiste en que una densidad de corriente excesivamente grande en una parte de la superficie de la escobilla (y por consiguiente una densidad de energía también excesiva en la superficie de contacto) se traduce en la producción de chispas y en fallos en dicho punto. El medio ambiente tiene también una notable influencia, y a grandes altitudes deben tomarse ciertas precauciones pues de lo contrario las escobillas se desgastarían rápidamente.

Por consiguiente, la base empírica para conseguir una conmutación exenta de chispas consiste en evitar densidades de corriente excesivas en cualquier punto del contacto cobre-carbón; esta base, combinada con el principio de utilizar el material en toda su extensión, nos indica que las condiciones óptimas se consiguen cuando la densidad de corriente en la superficie de contacto de la escobilla es uniforme durante todo el período de conmutación. Estas condiciones se logran cuando la corriente en la bobina conmutada varía linealmente con el tiempo como se indica en la Fig. 4-6.

La circunstancia principal que tiende a favorecer la conmutación lineal es la variación que experimenta la resistencia al variar el área de contacto, ya que ésta disminuye linealmente junto al borde posterior de la escobilla mientras crece en la misma proporción junto al borde anterior. Otros factores eléctricos, por ejemplo la resistencia de la bobina conmutada, influyen también sobre la linealidad: sin embargo, la caída de tensión en el contacto de las escobillas es normalmente suficientemente grande (del orden de 1 V) frente a la caída de tensión en la resistencia de la bobina, que puede prescindirse de ésta. La inductancia tiene mucha más importancia: las tensiones inducidas en la bobina conmutada, ya sea por autoinducción o por inducción mutua respecto a otras bobinas conmutadas

al mismo tiempo (especialmente las situadas en las mismas ranuras), tienden a oponerse a cualquier variación de corriente en ella.

A estas tensiones se las denomina *tensión de reactancia*, y su consecuencia es la de que los valores de la intensidad en la bobina en cortocircuito se retrasan en el tiempo respecto a los que corresponderían a una conmutación lineal.

La inductancia del inducido tiende pues a acrecentar las pérdidas y a producir chispas en el borde posterior de las escobillas. Para mejorar la conmutación deberá reducirse al mínimo la inductancia utilizando bobinas con el menor número posible de espiras, y devanados multipolares cortos. La influencia sobre la conmutación de una tensión de reactancia dada, pierde importancia cuando la caída de tensión en la resistencia de contacto del colector es grande frente a ella, siendo éste uno de los motivos que justifican el empleo de escobillas de carbón con resistencia de contacto relativamente alta. Cuando la consecución de una conmutación correcta se confía a la resistencia de contacto, se tendrá una *conmutación por resistencia*, que actualmente se emplea como procedimiento único exclusivamente en máquinas de muy poca potencia.

Otro punto importante en la conmutación es la tensión de movimiento, inducida en la bobina cortocircuitada, que según sea su signo obstaculiza o ayuda la conmutación. En la Fig. 5-3, por ejemplo, el campo transversal de reacción crea un flujo en la región interpolar. El sentido de la tensión de movimiento en la bobina cortocircuitada es el mismo que el de la corriente bajo el polo inmediato precedente, por consiguiente esta tensión favorece el mantenimiento de la corriente en la dirección primitiva, y al igual que la tensión de reactancia, se opone a su inversión. En beneficio de la conmutación, la tensión de movimiento debería ser opuesta a la de reactancia. En muchas máquinas modernas se disponen las cosas para que la tensión de movimiento compense aproximadamente la de reactancia, para lo cual se intercalan entre los polos principales otros polos, pequeños y estrechos que generan una densidad de flujo apropiada en la zona de conmutación; a estos polos se les denomina *polos auxiliares o de conmutación*.

En la Fig. 5-4 se puede apreciar la situación de dichos polos y la distribución aproximada del flujo por ellos producido cuando están excitados. (En la Fig. 5-6, se ven estos polos, más pequeños, situados entre los principales). La polaridad de cada polo de conmutación debe ser la misma que la del polo principal que le sigue en el sentido de rotación, si se trata de un generador y la contraria si de un motor. La f.m.m. de estos polos auxiliares debe ser la suficiente para neutralizar el campo transversal en la región interpolar y para producir además la densidad de flujo precisa para engendrar una tensión de movimiento en la bobina cortocircuitada que anule la tensión de reactancia. Puesto que tanto la reacción del inducido como la tensión de reactancia son proporcionales a la corriente en el inducido, los arrollamientos de los polos de conmutación deben conectarse en serie con el inducido, y para asegurar un funcionamiento lineal deben trabajar a baja saturación. Con el empleo de los polos auxiliares se asegura una conmutación libre de chispas dentro de un amplio campo de potencias. Para estar de acuerdo con las normas NEMA, las máquinas de uso general deben ser capaces de conmutar correctamente durante un minuto cargas del 150 por ciento de su intensidad nominal en servicio continuo, con la excitación regulada a su valor normal de plena carga.

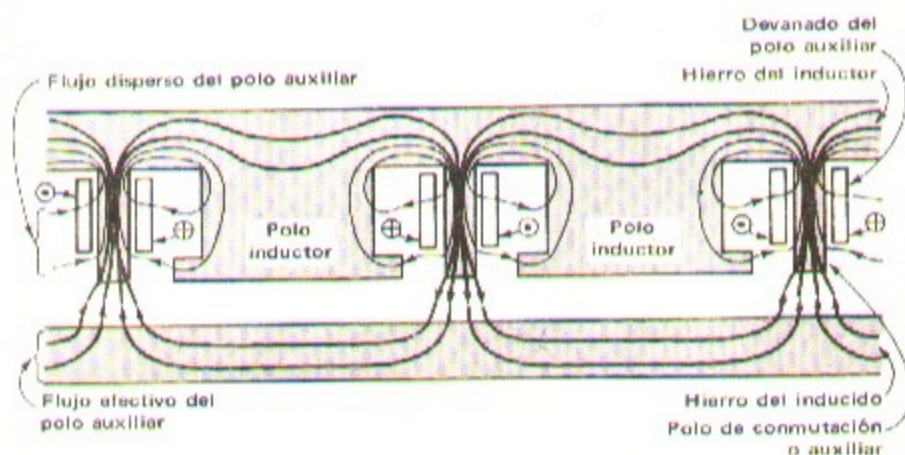


Fig. 5-4. Polos de conmutación o auxiliares y su correspondiente componente de flujo.

5-3. DEVANADOS DE COMPENSACION

En las máquinas sometidas a fuertes sobrecargas, variaciones de carga bruscas, o que trabajen con un campo principal débil, pueden presentarse otros inconvenientes además del chispeo en las escobillas. En el momento en que una de las bobinas del inducido queda situada en la punta de una onda de flujo distorsionada, la tensión inducida en ella puede adquirir un valor suficientemente alto como para producir una descarga disruptiva en el aire entre las delgas contiguas a la que va conectada, originándose un arco entre ellas.

La tensión disruptiva no es muy elevada, ya que el aire en vecindad del colector está en condiciones favorables a la descarga. La tensión máxima admisible entre delgas es del orden de 30 a 40 V, lo que obliga a adoptar valores inferiores a estos, lo que a su vez determina el número mínimo de delgas a emplear en un determinado proyecto. En período transitorio pueden aparecer entre delgas mayores tensiones, inducidas en virtud de las variaciones del flujo de reacción. Observando la Fig. 5-2 puede comprenderse que se induzcan tensiones de esta índole en la bobina situada entre los polos al crecer o disminuir el flujo de reacción representado en el esquema. Analizando el signo de esta tensión inducida puede comprobarse que se suma a la f.e.m. normal de movimiento al bajar la carga de un generador, o al aumentar la de un motor. El chisporroteo entre delgas se va extendiendo rápidamente sobre el colector completo, lo que, además de los efectos destructivos inherentes, equivale a un cortocircuito en la línea. Así pues, aun existiendo los polos de conmutación, la reacción del inducido en los polos principales es siempre una limitación a las condiciones en que la máquina puede operar.

Estas limitaciones, sin embargo, pueden aminorarse considerablemente compensando o neutralizando la f.m.m. de reacción bajo las expansiones polares, compensación que se consigue por medio de *devanados de compensación* (Fig. 5-5) ubicados en ranuras practi-

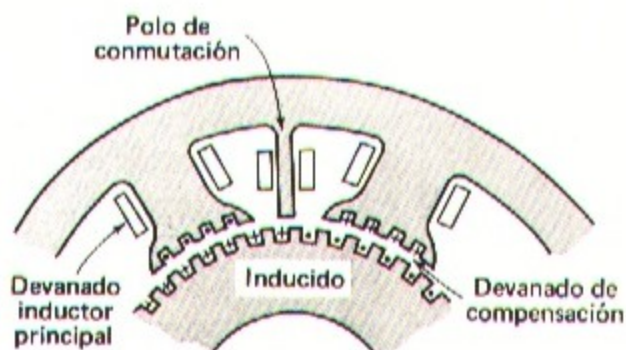


Fig. 5-5. Sección recta de una máquina de continua mostrando el devanado de compensación.

estas en las expansiones polares y cuya polaridad está en oposición a la del devanado inducido. En el estator de la Fig. 5-6 pueden verse tales devanados. Puesto que el eje del devanado de compensación coincide con el del inducido, podrá neutralizarse completamente la reacción de éste bajo los polos dando a aquél un número apropiado de espiras. Este devanado se conecta en serie con el inducido de forma que la intensidad en ambos sea la misma.

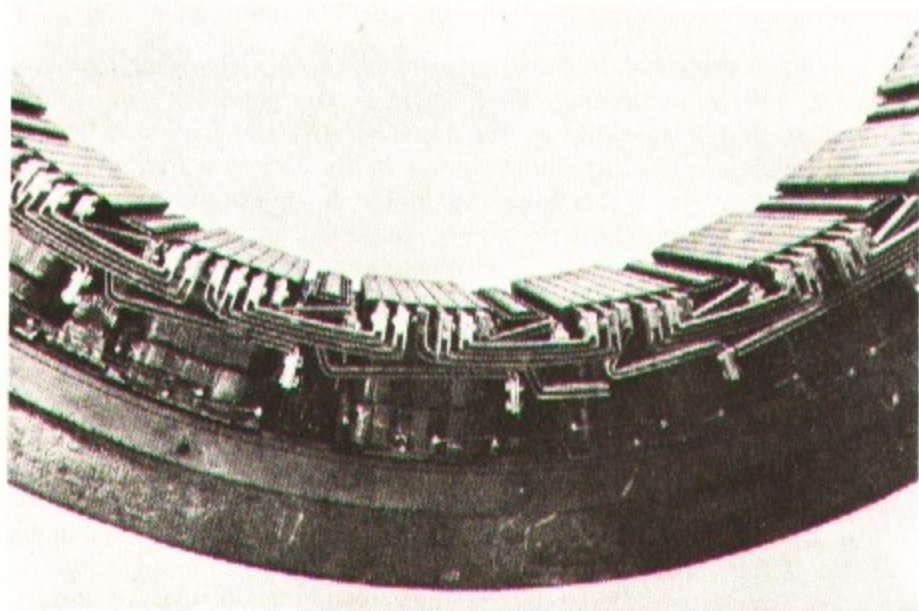


Fig. 5-6. Vista del estator o inductor de un motor de continua en el que pueden verse las bobinas serie y derivación, polos de conmutación y devanado de compensación sobre las superficies polares. (Westinghouse Electric Corporation.)

En conjunto, el campo principal, el de reacción, el devanado de conmutación y el de compensación actúan sobre el flujo en el entrehierro de forma tal que, excepto en la zona de conmutación, la distribución de la densidad de flujo es la misma que tendría el campo principal solo (Fig. 5-3). Por añadidura, el devanado de compensación mejora la velocidad de respuesta, ya que reduce la constante de tiempo del circuito inducido.

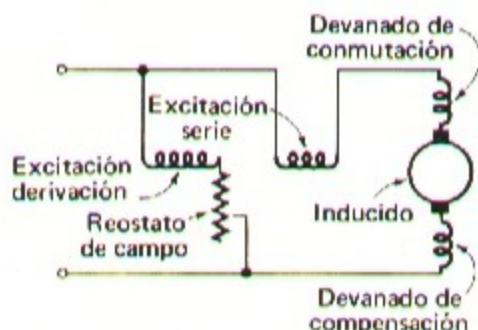


Fig. 5-7. Esquema de conexiones de una máquina de corriente continua.

El principal inconveniente de los devanados compensadores es su coste; se utilizan en máquinas diseñadas para fuertes sobrecargas o variaciones de carga muy rápidas (los motores destinados a factorías siderúrgicas constituyen un buen ejemplo de máquinas sometidas a condiciones muy duras), así como en aquellas otras que deban trabajar dentro de un campo muy amplio de velocidades, regulada ésta por el inductor derivación. La Fig. 5-7 muestra, a manera de resumen esquemático, el circuito de una máquina de excitación compuesta con devanado compensador. La posición relativa de las bobinas en el esquema indica que los campos de conmutación y de compensación actúan según el eje del inducido, y los campos de excitación serie y derivación según el eje de los polos principales.

Con las anteriores disposiciones, el flujo en el entrehierro alrededor de todo el inducido queda completamente controlado.

5-4. PRINCIPIOS ANALITICOS = CIRCUITO ELECTRICO

Según las ecuaciones 4-8 y 4-12, el par electromagnético y la tensión inducida en una máquina de corriente continua son respectivamente:

$$T = K_a \Phi_a I_a \quad (5-1)$$

$$E_a = K_a \Phi_a \omega_m \quad (5-2)$$

siendo
$$K_a = \frac{PZ_a}{2\pi a} \quad (5-3)$$

Se han empleado las letras mayúsculas E_a para la tensión inducida e I_a para la intensidad, con objeto de resaltar que en este capítulo nos referimos principalmente a las condiciones en régimen permanente. El significado de los restantes símbolos es el ya indicado en el apartado 4-4; estas ecuaciones son básicas para el análisis de la máquina. La cantidad $E_a I_a$ se denomina frecuentemente *potencia electromagnética* o *potencia interna*, y de acuerdo con las ecuaciones 5-1 y 5-2 está relacionada con el par electromagnético por la siguiente ecuación:

$$T = \frac{E_a I_a}{\omega_m} \quad (5-4)$$

Las Figs. 5-8 y 5-9 representan gráficamente el balance de potencia en generadores y motores de corriente continua respectivamente, ambos con excitación compuesta. El diagrama de conexiones puede verse en la Fig. 5-10. Si la máquina carece de uno de los dos devanados, sea el serie o el derivación, deberán suprimirse de las figuras las referencias correspondientes.

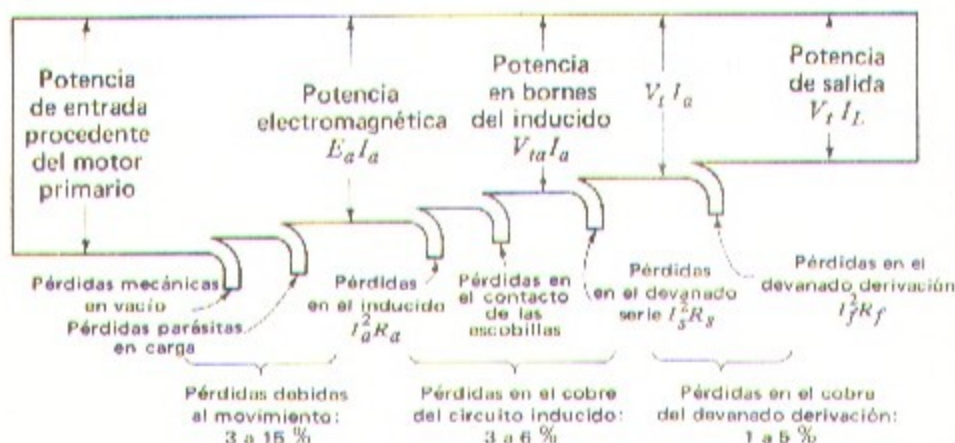


Fig. 5-8. Reparto de potencias en un generador de continua.

En todas las figuras, V_t es la tensión en bornes de la máquina, V_{ta} la tensión en bornes del inducido, I_L la intensidad en la línea, I_a la intensidad en el inductor serie (que es igual a I_a en la conexión de la Fig. 5-10), I_f la intensidad en el inductor derivación y R_a la resistencia del inducido, R_f la resistencia del inductor derivación y R_s la resistencia del inductor serie. En R_a se incluye la resistencia de cualquier devanado de conmutación o de compensación existente. Las pérdidas en el cobre de los circuitos inducido e inductor, así como las pérdidas mecánicas, son las consideradas en principio en el apartado 4-8. En las Figs. 5-8 y 5-9 está indicado en tanto por ciento de la potencia de entrada el valor de dichas pérdidas correspondientes a un generador y a un motor, ambos de uso general y de

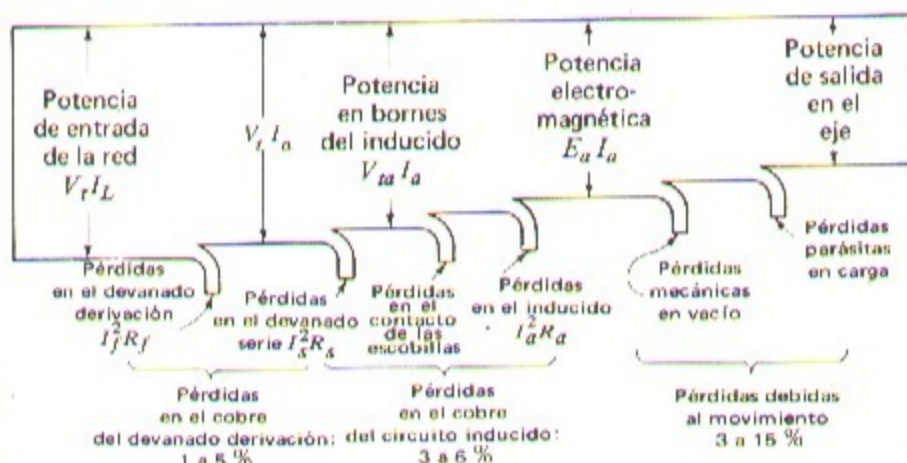


Fig. 5-9. Reparto de potencias en un motor de continua.

potencia comprendida entre 1 y 100 kW el primero y 1 y 100 c.v. el segundo. Los menores porcentajes corresponden a las máquinas de mayor potencia.

La potencia interna o electromagnética difiere de la mecánica en el eje por las pérdidas mecánicas, y de la eléctrica en bornes de la máquina por las pérdidas en el cobre. La potencia electromagnética es la que se puede medir en el punto en que la tensión es E_a , y sumándole o restándole, según se trate de generador o de motor, las pérdidas mecánicas tendremos la potencia en el eje.

La relación entre tensiones e intensidades se desprende directamente del diagrama de conexiones, así tenemos:

$$V_{ta} = E_a \pm I_a R_a \quad (5-5)$$

$$V_t = E_a \pm I_a (R_a + R_s) \quad (5-6)$$

$$I_L = I_a \pm I_f \quad (5-7)$$

en las que el signo más corresponde a los motores y el signo menos a los generadores.

Si la conexión de la máquina es más sencilla que la representada en la Fig. 5-10 quedarán eliminados algunos de los términos de las ecuaciones anteriores. Salvo indicación contraria, se sobreentiende que la resistencia R_a es la del inducido más la de las escobillas; no obstante, en algunos casos se entiende como la del devanado solo, considerando aparte la caída de tensión en las escobillas a la que se atribuye generalmente el valor de 2 V.

En máquinas de excitación compuesta pueden darse otras variantes. En la Fig. 5-10 está representada una *conexión derivación*, en la que el devanado derivación está conectado directamente de los bornes de entrada quedando el devanado serie situado entre él y el

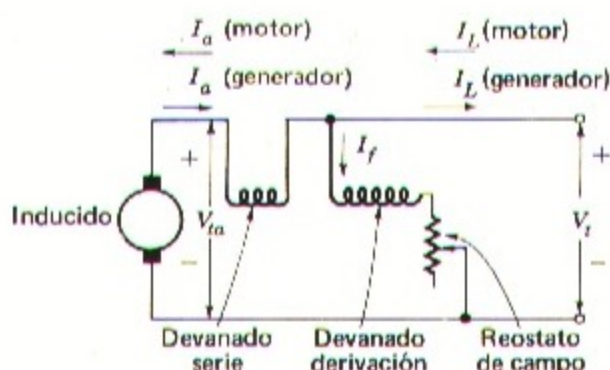


Fig. 5-10. Esquema de conexiones de un motor o generador indicando el sentido de las corrientes.

inducido. Otra posibilidad es la de la Fig. 5-11, *conexión derivación corta* en la que el devanado derivación está conectado directamente a las escobillas quedando el devanado serie situado entre él y los terminales de la línea, con lo que la intensidad en este último será I_L en lugar de I_a como antes, modificándose en consecuencia las ecuaciones de tensión. Sin embargo, la diferencia práctica entre una y otra conexión es tan pequeña que puede prescindirse de ella, y salvo que se indique lo contrario se tratará de estas máquinas como si fueran de conexión derivación larga.

Si bien la diferencia entre la tensión en bornes V_t y la tensión inducida E_a es proporcionalmente muy pequeña cuando se trabaja en condiciones normales, no por eso deja de influir concretamente sobre las características en servicio. En efecto, esta diferencia junto con la resistencia de los circuitos y las exigencias de la conversión de energía, afecta a la intensidad I_a del inducido y por tanto también sobre el campo de reacción. Un estudio completo sobre el funcionamiento de la máquina requiere considerar también los factores que influyen sobre el campo del estator, o más concretamente sobre el flujo neto por polo Φ_d .

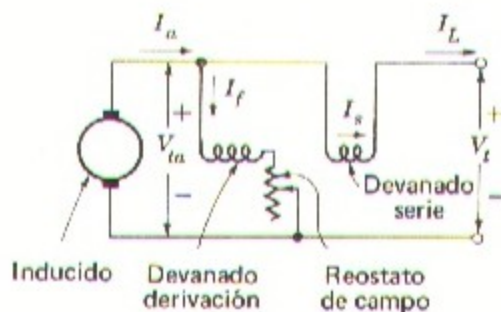


Fig. 5-11. Conexión compuesta corta en un generador.

5-5. PRINCIPIOS ANALITICOS = CIRCUITO MAGNETICO

El flujo por polo es el resultado de las f.m.m. del inducido y del inductor combinadas. La relación entre la tensión inducida E_a y las condiciones del circuito magnético de la máquina es por tanto función de la suma de todas las f.m.m. creada a propósito en los polos principales del estator con el objeto de generar el flujo necesario para el trabajo, es decir, la f.m.m. del campo principal, y seguidamente se irán incluyendo los efectos de la f.m.m. del inducido.

a. Reacción del inducido excluida

Con la máquina en vacío, o despreciando los efectos de la reacción del inducido, la f.m.m. resultante es la suma algebraica de todas las f.m.m. en el eje polar principal. En un generador o motor excitación compuesta normal, con N_f espiras por polo en el devanado derivación y N_s espiras por polo en el devanado serie, tendremos:

$$\text{f.m.m. del campo principal} = N_f I_f \pm N_s I_s \quad (5-8)$$

En esta ecuación pueden aparecer términos adicionales si existen otros devanados para usos especiales que, contrariamente a los de compensación vistos en el apartado 5-3, estén bobinados concéntricamente con los principales.

El signo positivo de la ecuación 5-8 es aplicable cuando las dos f.m.m. se suman, es decir, cuando los dos devanados están conectados en forma acumulativa, y contrariamente, será aplicable el signo menos cuando la conexión sea diferencial, es decir cuando el efecto de ambos devanados sea opuesto. Si la máquina carece de uno cualquiera de los dos devanados desaparecerá, naturalmente, el término correspondiente en la ecuación.

La ecuación 5-8 expresa en ampere-vueltas por polo la f.m.m. de los devanados principales que actúa sobre el circuito magnético principal. La curva de magnetización de las máquinas de corriente continua generalmente viene dada en función de la corriente en el devanado principal únicamente, que es casi siempre el devanado derivación si lo hay. La f.m.m. relativa dada por tal curva, y la dada por la ecuación 5-8 pueden igualarse por uno cualquiera de los dos procedimientos siguientes: primero, multiplicando la intensidad dada en la curva de magnetización por el número de espiras por polo correspondientes al devanado considerado tendremos la curva expresada en ampere-vueltas por polo, y segundo, pueden dividirse por N_f los dos miembros de la ecuación 5-8, convirtiendo las unidades relativas en corriente equivalente en la bobina N_f que produciría la misma f.m.m., es decir,

$$\text{f.m.m. bruta} = I_f + \frac{N_s}{N_f} I_s \text{ ampere equivalentes en el devanado derivación} \quad (5-9)$$

Este segundo procedimiento es más conveniente y el más generalmente empleado.

En la Fig. 5-12 la curva $I_a = 0$ es un ejemplo de la característica de magnetización de

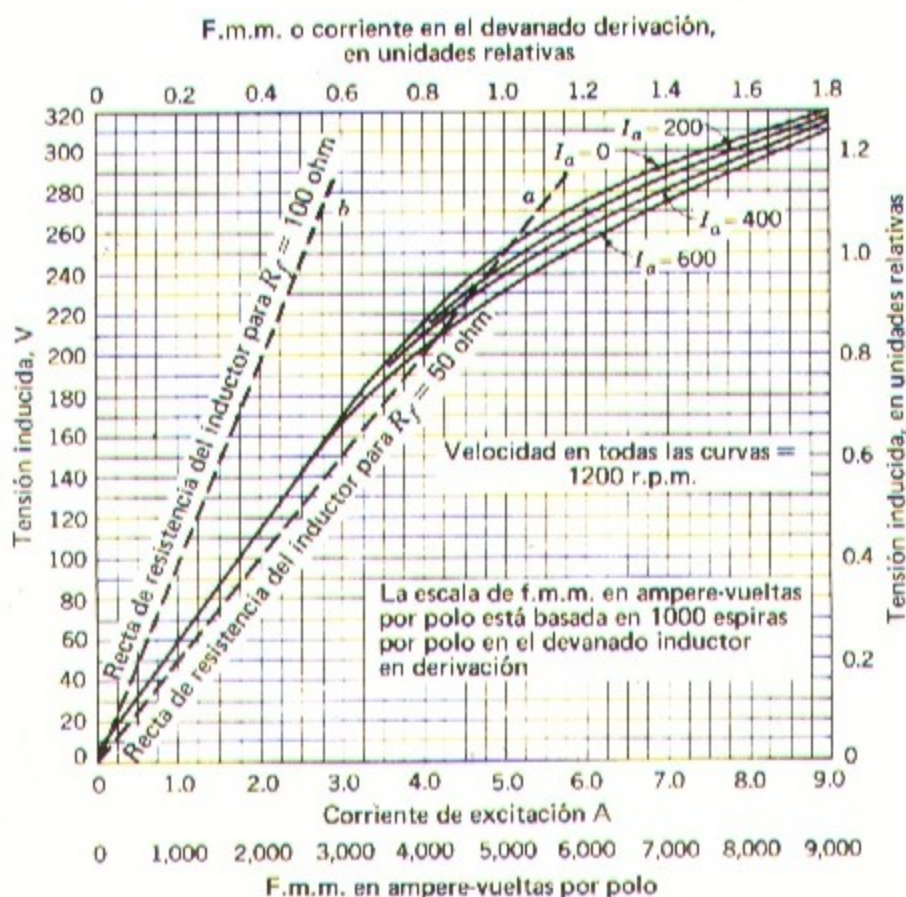


Fig. 5-12. Curvas de magnetización de una máquina de continua de 250 V, 1200 r.p.m.

una máquina en vacío. Los valores numéricos de las escalas situadas a la izquierda y en la parte inferior son representativos de un generador de 100 kW, 250 V y 1200 r.p.m. La escala de la f.m.m. está indicada de dos formas: intensidad en ampere en el devanado derivación y en ampere-vueltas por polo, habiéndose deducido esta segunda de la primera a base de 1000 espiras por polo en dicho devanado. Puede expresarse también la característica en *valores relativos*, como puede verse en la escala superior para la f.m.m. y en la de la derecha para la tensión. En estas escalas se toma como base de la corriente de excitación o f.m.m. relativas aquella intensidad que estando la máquina en vacío induce la tensión nominal cuando la velocidad es la de régimen, y de igual forma, se toma como base de tensión relativa, la tensión nominal.

El trazar las curvas de magnetización basadas en la tensión inducida, en lugar de basarlas en el flujo, se presta a confusiones, ya que la velocidad de una máquina de continua puede no ser constante, y la velocidad interviene en la relación entre flujo y

tensión inducida: por consiguiente, las tensiones indicadas en ordenadas corresponden a una velocidad determinada de la máquina, y la tensión inducida E_a a cualquier otra velocidad ω_m será, de acuerdo con la ecuación 5-2:

$$E_a = E_{a0} \frac{\omega_m}{\omega_{m0}} \quad (5-10)$$

siendo ω_{m0} la velocidad para la que se ha trazado la curva de magnetización, y E_{a0} la correspondiente fuerza electromotriz inducida.

Ejemplo 5-1

Un generador con excitación compuesta en conexión larga es de 100 kW, 400 A. La resistencia del inducido, escobillas incluidas, es de 0,025 ohm, y la del inductor serie 0,005 ohm, su curva de magnetización es la de la Fig. 5-12.

El devanado derivación tiene 1000 espiras por polo, y el devanado serie 3, también por polo.

Calcúlese la tensión en bornes, cuando la intensidad de salida es la normal, siendo la intensidad en el devanado derivación de 4,7 A y la velocidad de 1150 r.p.m. Despréciense la reacción del inducido.

SOLUCION

$$I_s = I_a = I_L + I_f = 400 + 4,7 = 405 \text{ A}$$

De la ecuación 5-9 deduciremos la f.m.m. del campo principal:

$$4,7 + \frac{3}{1000} \times 405 = 5,9 \text{ A equivalentes en el devanado derivación}$$

La curva $I_a = 0$ de la Fig. 5-12 nos da para este valor de intensidad una tensión de 274 V, que haciendo la corrección por velocidad tendremos la f.e.m. real:

$$E_a = 274 \frac{1150}{1200} = 262 \text{ V}$$

Luego,

$$\begin{aligned} V_t &= E_a - I_a(R_a + R_s) \\ &= 262 - 405(0,025 + 0,005) = 250 \text{ V} \end{aligned}$$

b. Efectos de la reacción del inducido

En el apartado 5-1 se expuso que la excitación del devanado inducido tenía un efecto desmagnetizante debido al campo transversal de reacción. El estudio analítico de este

efecto carece de precisión debido a presentarse situaciones no lineales. Un procedimiento aproximado consiste en apoyarse en datos experimentales de la máquina en estudio, o de otra similar de parecida potencia: los ensayos se realizan excitando tanto los inductores como el inducido, y procediendo de forma que se puedan apreciar los efectos que sobre la f.e.m. inducida ejerce la variación de una y otra excitación.

La Fig. 5-12 indica la forma en que se pueden resumir y relacionar los resultados que se obtengan en los ensayos citados. No sólo se traza la curva en vacío ($I_a = 0$), sino que se forma una familia de curvas con distintos valores de I_a . De esta forma, el incluir la reacción del inducido en el estudio de la máquina se reduce simplemente a utilizar la curva de magnetización correspondiente a la intensidad considerada en el inducido. Obsérvese que todas estas curvas dan los valores de la tensión E'_a inducida, y no la tensión en bornes bajo carga. Obsérvese también que todas estas curvas tienden a confundirse con la del entrehierro a medida que decrece la saturación en el hierro.

Las curvas con carga están desplazadas hacia la derecha respecto a la curva en vacío, siendo el desplazamiento función de I_a ; el efecto de la reacción del inducido es pues aproximadamente el mismo que el de una f.m.m. desmagnetizante AR actuando según el eje principal.

Por tanto, puede considerarse que la f.m.m. *neta* en dicho eje principal es:

$$\begin{aligned} \text{f.m.m. neta} &= \text{f.m.m. bruta} - AR \\ &= N_f I_f \pm N_s I_s - AR \end{aligned} \quad (5-11)$$

La curva de magnetización en vacío puede también tomarse como relación entre la f.e.m. inducida y la excitación neta en carga, considerando la reacción del inducido como una f.m.m. desmagnetizante. Dentro del campo normal de operación (desde unos 240 hasta unos 300 V para la máquina de la Fig. 5-12) puede admitirse que el efecto desmagnetizante de la reacción del inducido es aproximadamente proporcional a la corriente en el mismo.

La magnitud de la reacción que aparece en la Fig. 5-12 se ha elegido de forma que sus perniciosos efectos aparezcan muy evidentes en los subsiguientes ejemplos numéricos y problemas relativos a generadores y motores: en una máquina real, bien proyectada, trabajando en condiciones normales, pueden esperarse valores notablemente más bajos.

5-6. ANALISIS DEL FUNCIONAMIENTO EN REGIMEN PERMANENTE

Aun cuando para el estudio de una máquina de corriente continua rigen los mismos principios tanto si se trata de un generador como de un motor, la naturaleza de los problemas que aparecen varía algo de un caso al otro. En un generador la velocidad viene fijada normalmente por la del motor primario que lo mueve, y el problema consiste en determinar la tensión en bornes correspondiente a una carga y excitación dadas, o en hallar la excitación necesaria para una carga y tensión en bornes fijadas. Por otro lado, si se trata de un motor, los problemas que más frecuentemente se presentan son los de determinar la velocidad que corresponde a una carga y excitación dadas, o hallar la

excitación necesaria para alcanzar una determinada velocidad con una carga conocida; la tensión en bornes está supeditada en general a la de la red de suministro. Por consiguiente, las técnicas de aplicación de los principios básicos comunes, difieren en cuanto difieren los problemas a los que se aplican.

a. Análisis de generadores

Los generadores con excitación independiente son los más sencillos de estudiar, ya que en ellos la corriente de excitación no depende de la tensión inducida por el propio generador. Para una carga dada, la excitación principal viene dada por la ecuación 5-9, y la correspondiente tensión inducida E_a se deduce de la curva de magnetización adecuada. Esta tensión, junto con las ecuaciones 5-5 o 5-6 determina la tensión en bornes.

En los generadores autoexcitados, la excitación derivación depende de la tensión en bornes, y la excitación serie de la corriente en el inducido. La relación entre la tensión en bornes y la corriente en el devanado de excitación derivación puede representarse gráficamente por medio de la *recta de resistencia del inductor*, que es 00a de la Fig. 5-12. Esta línea no es más que una representación gráfica de la ley de Ohm aplicada al devanado inductor derivación, y es el lugar geométrico de los puntos representativos de la tensión en bornes en función de la corriente de excitación derivación. La línea que figura en el gráfico ha sido trazada para $R_f = 50$ ohm, y por consiguiente pasa por el origen de coordenadas y por el punto (1 A, 50 V).

Observando la forma de crecer la tensión en un generador derivación sin carga puede verse uno de los aspectos de la relación entre los circuitos magnético y eléctrico. Al cerrar el circuito inductor, la pequeña tensión debida al magnetismo remanente (los 6 V en el origen de la curva de magnetización de la Fig. 5-12) da origen a una débil corriente de excitación: si el flujo creado por los ampere-vueltas resultantes se suma al flujo residual, irán aumentando progresivamente la tensión y la excitación, y si por el contrario los ampere-vueltas iniciales se oponen al magnetismo remanente, deberán invertirse las conexiones del devanado derivación para conseguir la elevación de tensión. La tensión continuará subiendo hasta que las relaciones volt-ampere representadas por la curva de magnetización y por la recta de resistencia del inductor queden ambas satisfechas simultáneamente, es decir, en su punto de intersección, que en la Fig. 5-12 corresponde a 250 V. En este planteamiento se prescinde de la caída de tensión, extremadamente pequeña, debida a la corriente de excitación en la resistencia del inducido.

Obsérvese que si la resistencia del inductor es demasiado alta, como es la de la recta 00b trazada para $R_f = 100$ ohm, la intersección queda muy baja y no se consigue subir la tensión, y obsérvese también que si la recta de resistencia del inducido fuera sensiblemente tangente a la parte baja de la curva de magnetización, lo que en la figura citada ocurriría si $R_f = 57$ ohm, la intersección puede estar en cualquier punto comprendido entre 60 y 170 V, resultando así unas condiciones de funcionamiento muy inestables; a esta resistencia se le denomina *crítica* y por encima de ella no se conseguirá la autoexcitación. El mismo proceso y las mismas conclusiones pueden aplicarse a un generador con excitación compuesta, ya que la f.m.m. creada en el inductor serie por la corriente del inductor derivación con conexión larga, es verdaderamente despreciable.

Evidentemente, la elevación de tensión es un proceso transitorio durante el cual la diferencia entre las ordenadas de la recta de resistencia del inducido y las de la curva de magnetización en un momento cualquiera representa la tensión que hace aumentar la corriente a través de la inductancia del devanado derivación. En el apartado 9-6b se estudiará este proceso transitorio.

En un generador derivación, la curva de magnetización correspondiente a un determinado valor de I_a es el lugar geométrico de los puntos que expresan E_a en función de I_f , y la recta de resistencia del inductor es el lugar geométrico de V_t en función de I_f . Durante el funcionamiento estable, y para cualquier valor de I_f , la distancia vertical entre la recta y la curva es la correspondiente caída $I_a R_a$ en carga. La determinación de la tensión en bornes con una corriente en el inducido dada, se reduce a encontrar dónde la recta y la curva se hallan separadas verticalmente en la distancia apropiada; la tensión en bornes vendrá dada por la ordenada de la recta en ese punto. En un generador excitación compuesta, la f.m.m. del devanado serie desplaza los puntos correspondientes de la recta y de la curva, tanto horizontal como verticalmente: el desplazamiento horizontal equivale a la f.m.m. del devanado serie expresada en amperes equivalentes en el devanado derivación, y el desplazamiento vertical corresponde como antes a la caída $I_a R_a$.

Evidentemente, por el procedimiento expuesto no se alcanza una gran precisión: la incertidumbre que introduce la histéresis magnética en las máquinas de corriente continua impide alcanzar mayor precisión. En general, la curva de magnetización sobre la que trabaja la máquina en cualquier momento está comprendida entre las ramas ascendente y descendente de la curva de histéresis de su circuito magnético, dependiendo esencialmente del historial del hierro inmediatamente antes del momento considerado: para el estudio se toma generalmente la curva de magnetización media, con lo que los resultados obtenidos pueden considerarse correctos como término medio, aun cuando en algún momento dado puedan existir divergencias significativas entre su valor medio y el real.

Ejemplo 5-2

Un generador derivación de 100 kW 250 V 400 A y 1200 r.p.m. tiene la curva de magnetización (incluidos los efectos de la reacción del inducido) de la Fig. 5-12. La resistencia del circuito inducido, incluidas escobillas es de 0,025 ohm. El generador gira a la velocidad constante indicada, y la excitación se ajusta para tener en vacío la tensión nominal.

- a. Determínese la tensión en bornes con una intensidad en el inducido de 400 A.
- b. Se le añade un devanado serie de cuatro espiras por polo, y de resistencia 0,005 ohm. El devanado derivación tiene 1000 espiras por polo. El generador debe ser de tensión constante, de forma que a plena carga dé 250 V estando el reostato del devanado derivación ajustado de forma que en vacío dé también 250 V. ¿Cómo puede lograrse esta condición mediante un reostato en paralelo con devanado serie?

SOLUCION

a. La recta de resistencia del inductor $00a$ (Fig. 5-12) corta a la curva de magnetización en vacío en el punto 250 V 5 A.

Siendo $I_a = 400$ A, tendremos

$$I_a R_a = 400 \times 0,025 = 10 \text{ V}$$

Existe por tanto una distancia vertical de 10 V entre la curva de magnetización con $I_a = 400$ A y la recta de resistencia del inductor; esto sucede con una corriente de excitación de 4,1 A a la que corresponde una tensión $V_f = 205$ V.

La intensidad en la línea será:

$$I_L = I_a - I_f = 400 - 4 = 396 \text{ A}$$

Obsérvese que la distancia vertical de 10 V existe también para una corriente de excitación de 1,2 A y $V_f = 60$ V, siendo el punto $V_f = 205$ el de servicio normal.

b. Para que la tensión en vacío sea de 250 V, la resistencia del devanado derivación debe ser de 50 ohm, por lo que la recta de resistencia del inductor debe ser la $00a$ de la figura. Con plena carga, I_f deberá ser 5 A ya que $V_f = 250$ V, por tanto:

$$I_a = 400 + 5 = 405 \text{ A}$$

y

$$E_a = 250 + 405 (0,025 + 0,005) = 262 \text{ V.}$$

En esta última ecuación no se tiene en cuenta que el reostato en paralelo con el devanado serie reduce la resistencia de ese circuito, cosa permisible dado el grado de precisión alcanzable. De la curva de magnetización correspondiente a los 400 A, podemos deducir que para que E_a sea igual a 262 V se requiere una excitación de 5,95 A equivalente en el devanado derivación (estrictamente considerado, debería emplearse la curva de magnetización correspondiente a $I_a = 405$ A, pero una distinción tan meticulosa carece de sentido).

Según la ecuación 5-9,

$$5,95 = 5,0 + \frac{4}{1000} I_s$$

$$I_s = 238 \text{ A}$$

Es decir, que de los 405 A del inducido únicamente 238 deberán pasar por el devanado serie, para lo cual debe conectarse en paralelo con éste una resistencia de

$$\frac{238 \times 0,005}{405 - 238} = 0,0071 \text{ ohm}$$

b. Análisis de motores

Puesto que la tensión en bornes de un motor está fijada generalmente en un cierto valor constante, no existirá relación entre la excitación derivación y una tensión variable como sucede en los generadores excitación derivación o compuesta; el análisis de motores se asemeja más al de los generadores con excitación independiente, si bien aparece ahora la velocidad como variable importante cuyo valor se trata de hallar.

Esencialmente, el análisis se apoya en las ecuaciones 5-5 y 5-6 que relacionan la tensión en bornes con la f.e.m. inducida, o fuerza contraelectromotriz; en la ecuación 5-9 para la excitación principal; en la curva de magnetización correspondiente a la intensidad en el inducido, como representación gráfica de la relación entre excitación y fuerza contraelectromotriz; en la ecuación 5-1 que relaciona el par electromagnético con el flujo y con la intensidad en el inducido, y en la ecuación 5-2 que relaciona la fuerza contraelectromotriz con el flujo y la velocidad. Estas dos últimas son particularmente significativas; la primera de ellas porque es frecuente estudiar el par en función de la intensidad de los campos del estator y del rotor, y la segunda por constituir el procedimiento usual para calcular la velocidad en determinadas condiciones.

La velocidad del motor correspondiente a una determinada intensidad I_a en el inducido puede calcularse hallando primero, mediante las ecuaciones 5-5 o 5-6, la tensión inducida E_a . Seguidamente se busca la excitación principal valiéndose de la ecuación 5-9. Puesto que la curva de magnetización está trazada para una velocidad ω_{m0} que en general no coincidirá con la velocidad real ω_m , la tensión indicada por dicha curva para el valor de excitación hallado anteriormente corresponderá a las condiciones de flujo correctas, pero a la velocidad ω_{m0} : substituyendo en la ecuación 5-10 se tendrá la velocidad real del motor.

Se habrá observado que el anterior razonamiento parte del supuesto de que la intensidad en el inducido es conocida. Cuando, como es muy frecuente, se trata de hallar la velocidad correspondiente a una potencia o a un par en el eje dado, el procedimiento más sencillo es generalmente el de hacer varios tanteos basados en distintos valores supuestos de I_a . El trazado gráfico de los sucesivos tanteos permite hallar rápidamente la intensidad correcta en el inducido, y la velocidad del motor.

Ejemplo 5-3

Un ejemplo derivación de 100 c.v., 250 V tiene las curvas de magnetización (incluidos los efectos de la reacción del inducido) de la Fig. 5-12. La resistencia del circuito inducido, escobillas comprendidas, es de 0,025 ohm. Las pérdidas mecánicas, sin carga, son de 2000 W y las pérdidas parásitas con carga son del uno por ciento de la potencia de salida. El reostato de campo se regula de forma que la velocidad en vacío sea de 1100 r.p.m.

- a. A manera de ejemplo de cálculo por puntos de la característica velocidad-carga, determínese la velocidad en r.p.m. y la potencia de salida en c.v. correspondientes a una intensidad de 400 A en el inducido.

- b. Supongamos que por considerar la característica hallada en el punto anterior como inadecuada, se añade un devanado serie de compensación consistente en $1 \frac{1}{2}$ espiras por polo conectadas en forma acumulativa, siendo despreciable su resistencia. El devanado derivación tiene 1000 espiras por polo.

Calcúlese la velocidad correspondiente a una intensidad de 400 A en el inducido.

SOLUCION

a. En vacío, $E_a = 250$ V. El correspondiente punto en la curva de 1200 r.p.m. en vacío es

$$E_{a0} = 250 \times \frac{1200}{1100} = 273 \text{ V,}$$

para el que $I_f = 5,90$ A. La corriente de excitación se mantiene constante en este valor.

Para $I_a = 400$ A, la fuerza contraelectromotriz es:

$$E_a = 250 - 400 \times 0,025 = 240 \text{ V}$$

En la Fig. 5-12 vemos que con $I_a = 400$ y $I_f = 5,90$, el valor de E_a sería de 261 V si la velocidad fuera de 1200 r.p.m. La velocidad real será pues:

$$n = \frac{240}{261} \times 1200 = 1100 \text{ r.p.m.}$$

La potencia interna o electromagnética es:

$$E_a I_a = 240 \times 400 = 96\,000 \text{ W}$$

que deducidas las pérdidas mecánicas queda reducida a 94 000 W, y teniendo en cuenta también las pérdidas parásitas quedará una potencia de salida:

$$94\,000 - 0,01 P_0 = P_0,$$

de donde

$$P_0 = 93,1 \text{ kW} = 124,7 \text{ c.v.}$$

Obsérvese que la velocidad con esta carga es la misma que en vacío, lo que indica que la reacción del inducido ha aplanado sensiblemente la curva velocidad-potencia.

b. Con $I_f = 5,90$ A e $I_s = I_a = 400$ A, la f.m.m. principal expresada en ampere equivalentes en el devanado derivación es:

$$5,90 + \frac{1,5}{1000} \times 400 = 6,50$$

De acuerdo con la Fig. 5-12, el valor correspondiente de E_a a 1200 r.p.m. sería de 273 V, y de acuerdo con ello, la velocidad actual es:

$$n = \frac{240}{273} \times 1200 = 1055 \text{ r.p.m.}$$

La potencia de salida es la misma que en (a), y la curva velocidad-potencia es decreciente.

Ejemplo 5-4

Para limitar la corriente de arranque a valores que permitan una conmutación correcta, todos los motores de corriente continua, a excepción de los muy pequeños, se ponen en marcha intercalando resistencias en serie con su inducido, que se eliminan luego, ya sea manual ya sea automáticamente, cuando el motor ha adquirido velocidad suficiente. En la figura 5-13, por ejemplo, los contactores 1A, 2A y 3A eliminan por escalonamientos sucesivos las resistencias R_1 , R_2 y R_3 del reostato de arranque.

Consideremos que un motor deba arrancar con su excitación normal, despreciando la reacción y la inductancia del inducido: se pretende que durante el período de puesta en marcha la intensidad en el inducido, y por tanto el par electromagnético, no superen del doble de su valor nominal, y que se van eliminando las sucesivas resistencias del reostato cada vez que la corriente en el inducido baja hasta su valor nominal. A excepción del punto f, los demás deben resolverse empleando valores relativos, es decir, expresando los resultados como fracción de los valores base (se tomará como valor base de la tensión el valor nominal de la tensión de la línea, como intensidad base la correspondiente a la de plena carga en el inducido, y como resistencia base la relación entre la tensión e intensidad bases).

- ¿Cuál es el valor mínimo, en valor relativo, de la resistencia del inducido que permita el arranque en tres escalonamientos cumpliéndose las condiciones expuestas?
- ¿Por encima de qué valor relativo de la resistencia del inducido serán suficientes dos escalonamientos en el arranque?
- Con la resistencia del inducido calculada en (a), ¿cuál deberá ser el valor relativo de las resistencias R_1 , R_2 y R_3 del reostato de arranque?

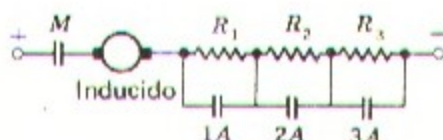


Fig. 5-13. Resistencias de arranque y contactores para aceleración de un motor de continua.

- d. En un motor cuyo inducido tiene la resistencia calculada en (a), los contactores se accionan mediante relés de tensión conectados en paralelo con el inducido (método de la fuerza contraelectromotriz). ¿A qué fracción de la tensión de línea deberán actuar los contactores?
- e. Trácese aproximadamente las curvas de la intensidad en el inducido, el par electromagnético y la velocidad, durante el período de puesta en marcha de un motor cuya resistencia de inducido es la calculada en (a), señalando en la escala de ordenadas los valores relativos correspondientes a determinados momentos significativos de tiempo.
- f. Calcúlense los valores numéricos, en unidades corrientes, de la resistencia del inducido, de los resultados hallados en (c) y (d) y de las ordenadas de (e) para un motor derivación de 10 c.v., 230 V, 500 r.p.m. siendo su intensidad en el inducido a plena carga de 37 A, y cumpliendo las condiciones de (a).

SOLUCION

a. Para que en el momento de cerrar el interruptor M , la corriente en el inducido no exceda del valor relativo 2, deberá cumplirse:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_a = \frac{V_t}{I_a} = \frac{1,00}{2,00} = 0,50$$

Cuando la corriente ha descendido hasta el valor relativo 1,

$$E_{a1} = V_t - I_a(R_1 + R_2 + R_3 + R_a) = 1,00 - 1,00 \times 0,50 = 0,50,$$

que es el valor alcanzado por la fuerza contraelectromotriz en el instante en que se cierre el contacto 1 A, cortocircuitando la resistencia R_1 . Para que en este momento la corriente no exceda del máximo valor tolerado:

$$R_2 + R_3 + R_a = \frac{V_t - E_{a1}}{I_a} = \frac{1,00 - 0,50}{2,00} = 0,25$$

y cuando nuevamente la corriente ha descendido hasta 1,00,

$$E_{a2} = V_t - I_a(R_2 + R_3 + R_a) = 1,00 - 1,00 \times 0,25 = 0,75$$

Repetiendo el razonamiento en los momentos en que se cierran los interruptores 2 A y 3 A tendremos:

$$R_3 + R_a = 0,125$$

$$E_{a3} = 0,875$$

$$R_a = 0,0625$$

y por último

$$E_a \text{ a plena carga} = 0,938$$

El mínimo valor pedido de la resistencia R_a es pues de 0,0625 unidades relativas, ya que si fuera menor, la corriente en el inducido en el momento de cerrar $3 A$ excedería del doble del valor nominal.

b. Si se pretende un reostato con sólo dos escalones, R_3 deberá ser igual a cero, y puesto que en (a) tenemos

$$R_3 + R_a = 0,125$$

se deduce que si R_a es igual o mayor que 0,125 no serán necesarios tres escalones en el reostato.

Con las condiciones de arranque dadas, el reostato de tres escalones es adecuado para motores con resistencia de inducido comprendida entre 0,0625 y 0,125 unidades relativas, lo que en la práctica corresponde a motores derivación de uso general para servicio continuo de unos pocos c.v. de potencia. Como promedio, los motores de hasta unos 10 c.v. cumplen con estos requisitos, si bien el límite de potencia es más bajo en los motores de gran velocidad y más alto en los lentos. Sobrepasando este límite deberán añadirse escalones en el reostato o tolerar mayores puntas de corriente y de par. Los resultados hallados son algo conservadores ya que la resistencia del inducido durante el período transitorio es mayor que en condiciones estáticas.

c. Las resistencias de arranque, en valores relativos, deducidas de las fórmulas del punto (a) son:

$$R_3 = 0,125 - 0,0625 = 0,0625$$

$$R_2 = 0,25 - 0,0625 - 0,0625 = 0,125$$

$$R_1 = 0,50 - 0,0625 - 0,0625 - 0,125 = 0,25$$

d. Inmediatamente antes de cerrarse el contacto $1 A$,

$$V_{ta1} = E_{a1} + I_a R_a = 0,50 + 1,00 \times 0,0625 = 0,563$$

y de igual forma:

$$V_{ta2} = 0,75 + 1,00 \times 0,0625 = 0,813$$

$$V_{ta3} = 0,875 + 1,00 \times 0,0625 = 0,938$$

Los contactos $1 A$, $2 A$ y $3 A$ deberán actuar respectivamente a estas fracciones de la tensión en la línea.

e. Consideremos que el interruptor principal M se cierra en el instante $t = 0$, y que los $1 A$, $2 A$ y $3 A$ en los instantes t_1 , t_2 y t_3 respectivamente. Estos tiempos son desconocidos (si se conoce la inercia del rotor y de la carga y la curva par-velocidad de la carga, pueden calcularse estos tiempos por los procedimientos descritos en el capítulo 9) por lo que de las curvas de corriente, par y velocidad pedidas puede indicarse únicamente su forma general, como puede verse en la Fig. 5-14.

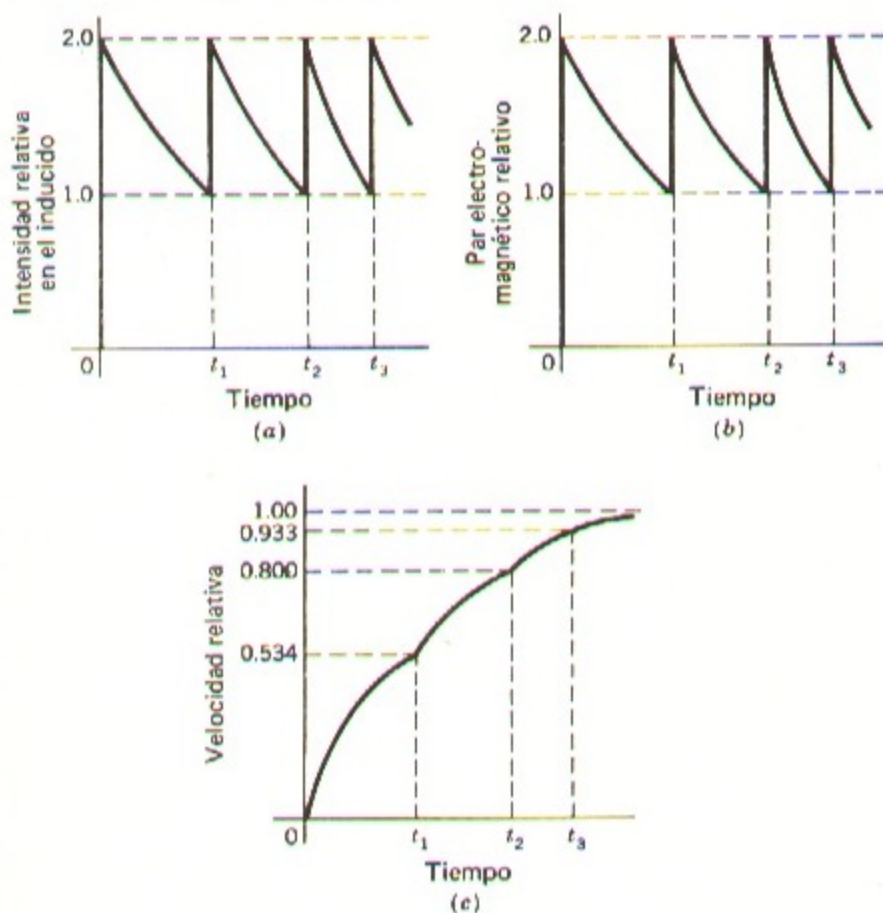


Fig. 5-14. (a) Intensidad en el inducido; (b) par electromagnético y (c) velocidad durante el período de arranque de un motor de continua.

Para señalar la escala de velocidades se parte del hecho de que una fuerza contraelectromotriz $E_a = 0,938$ corresponde a la velocidad de régimen con la carga nominal, es decir, a la velocidad relativa unidad, siendo otras velocidades proporcionales a E_a . Por tanto, las velocidades en los instantes t_1 , t_2 y t_3 serán:

$$n_1 = \frac{0,50}{0,938} \times 1,00 = 0,534$$

$$n_2 = \frac{0,75}{0,938} \times 1,00 = 0,800$$

$$n_3 = \frac{0,875}{0,938} \times 1,00 = 0,933$$

f. Los valores base correspondientes al motor considerado son los siguientes:

Tensión base = 230 V.

Intensidad base en el inducido = 37 A.

Resistencia base del circuito inducido = $230/37 = 6,22$ ohm.

Velocidad base = 500 r.p.m.

Par electromagnético base:

$$\begin{aligned} &= \frac{60}{2\pi n} E_a I_a \\ &= \frac{60}{2\pi \cdot 500} (230 - 37 \times 0,0625 \times 6,22) \times 37 \\ &= 152 \text{ N. m.} \end{aligned}$$

Obsérvese que el par electromagnético nominal ha de ser mayor que el nominal en el eje debido a las pérdidas mecánicas y parásitos.

La resistencia del inducido del motor es:

$$R_a = 0,0625 \times 6,22 = 0,389 \text{ ohm.}$$

En la tabla 5-1 se dan los demás valores pedidos

Tabla 5-1
Valores absolutos del Ejemplo 5-4 f

Parte c	Parte d	Parte e: escalas de la Fig. 5-14
$R_1 = 1,56$ ohm.	Relé 1A = 129V	Intensidad en el Inducido: 1 = 37 A
$R_2 = 0,778$ "	" 2A = 187V	Par electromagnético: 1 = 152 N.m.
$R_3 = 0,389$ "	3A = 216V	Velocidad: 1 = 500 r.p.m.

5-7. REGULACION DE LA VELOCIDAD DE LOS MOTORES

Las máquinas de corriente continua en general se adaptan mucho mejor a la regulación de su velocidad que los de alterna con campos giratorios a velocidad constante. De hecho, esta posibilidad de variar la velocidad dentro de amplios límites ajustándola a las necesidades del servicio es la que ha situado a las máquinas de continua en una sólida posición competitiva para muchas aplicaciones industriales modernas.

Los tres procedimientos más empleados para la regulación de la velocidad son: modificando el flujo, normalmente mediante un reostato de campo en el circuito del devanado

derivación; ajustando las resistencias del circuito del inducido y, variando la tensión en bornes del inducido.

El primero de ellos, o sea el empleo de un *reostato en el circuito del devanado derivación*, es el más empleado de los tres, constituyendo una de las cualidades de los motores derivación aunque, naturalmente, es aplicable también a los de excitación compuesta. El ajuste de la corriente de excitación, y por consiguiente del flujo y de la velocidad, variando convenientemente la resistencia del circuito derivación se logran con gran sencillez, economía y sin aumento sensible de las pérdidas en el motor.

La velocidad mínima conseguible es la que corresponde al campo máximo, o sea anulando totalmente la resistencia del reostato, y la máxima está limitada por los efectos de la reacción del inducido que, cuando el campo es excesivamente débil, es motivo de inestabilidad y de conmutación deficiente. La adición de un devanado estabilizador aumenta considerablemente el campo de velocidades alcanzables, que puede ampliarse aun más con otro devanado de compensación. En motores de pocos caballos provistos de devanado de compensación, el campo de velocidades puede ser de 8 a 1, pero en motores muy grandes, ciertos factores económicos lo limitan a 2 a 1. Como promedio se toma en general 4 a 1.

Para examinar aproximadamente las limitaciones que en la potencia de salida disponible introducen los cambios de velocidad prescindiremos de la influencia de la variación de ventilación y de las pérdidas mecánicas. La corriente máxima I_a en el devanado inducido es la nominal para que el motor no se caliente excesivamente, y la fuerza contraelectromotriz E_a se mantiene constante, ya que el efecto del cambio de velocidad viene compensado por el cambio de flujo que lo motiva: el producto $E_a I_a$, y por consiguiente la potencia disponible, se mantiene prácticamente uniforme en todo el campo de velocidades, por lo que la regulación mediante un reostato en el circuito derivación es una regulación con *potencia constante*. Por otra parte el par varía directamente con el flujo, por lo que alcanzará su valor máximo a la menor velocidad; este procedimiento de regulación es por tanto idóneo para aquellos casos en que se requiera un par elevado a baja velocidad. Cuando un motor regulado de esta forma se utiliza para vencer una carga que exija un par constante cualquiera que sea la velocidad, se deberá elegir su potencia de acuerdo con el producto del par por la velocidad máxima, quedando de esta forma sobredimensionado cuando trabaja a velocidades inferiores: éste es el principal factor económico que limita en la práctica el campo de velocidades de los motores grandes.

La regulación *variando la resistencia del circuito inducido* consiste en rebajar la velocidad insertando resistencias en serie en dicho circuito. Este procedimiento puede utilizarse indistintamente en los motores serie, derivación o excitación compuesta; en estos dos últimos la resistencia en serie debe conectarse entre el devanado derivación y el inducido y nunca entre el motor y la línea. La velocidad de los motores serie generalmente se regula por este método, que actúa en forma análoga a la inserción de resistencias en serie con el rotor para la regulación de velocidad en motores de inducción de rotor devanado.

Para un valor dado de la resistencia en serie con el inducido, la velocidad varía muy ampliamente con la carga ya que depende de la caída de tensión en dicha resistencia, la que a su vez depende de la intensidad requerida por la carga. Por ejemplo, un motor derivación de 1200 r.p.m. cuya velocidad en carga se reduce a 750 r.p.m. mediante resis-

tencias en serie con el inducido, recobrará su velocidad de 1200 r.p.m. al cesar la carga, ya que el efecto de la intensidad en vacío sobre la resistencia es insignificante. Los inconvenientes que reporta la no muy precisa regulación de la velocidad pueden no tener mucha importancia en los motores serie que se utilizan únicamente en aquellos servicios en que sean necesarias o indiferentes las variaciones.

Las pérdidas de potencia en la resistencia exterior son muy crecidas, especialmente cuando se pretende una gran reducción de velocidad; de hecho, si el par resistente es constante, la potencia de entrada en motor y reostato conjuntamente se mantiene uniforme, mientras que la potencia de salida en el eje decrece proporcionalmente con la velocidad, por lo que los costes de ejercicio son relativamente altos si se trabaja con poca velocidad durante períodos largos. Sin embargo, siendo el coste inicial de instalación bastante económico, el procedimiento de las resistencias en serie (o la variante que sobre el mismo veremos en el párrafo siguiente) encuentra aplicación cuando el tiempo en que hay que trabajar a velocidad reducida es pequeño. Contrariamente a lo que sucede con la regulación por el inductor derivación, con regulación por la resistencia del inducido se admite un *par constante*, ya que tanto el flujo como aproximadamente la intensidad en el inducido mantienen su valor aun cuando varíe la velocidad.

Una variante de este procedimiento de regulación consiste en *shuntar el inducido*, como puede verse en la Fig. 5-15 *a* para un motor serie, y en la Fig. 5-15 *b* para un motor derivación. Las resistencias R_1 y R_2 actúan como un divisor de tensión con lo que la tensión en bornes del inducido queda rebajada. Se puede conseguir así una gran flexibilidad ya que son dos las resistencias sobre las que se puede operar para conseguir las condiciones deseadas. En los motores serie se ajusta la velocidad en vacío a un valor finito razonable, y el dispositivo se emplea para trabajar con grandes cargas a poca velocidad. En los motores derivación se mejora apreciablemente la regulación en la zona de bajas velocidades, ya que la velocidad en vacío es inferior a la que correspondería sin las resistencias de regulación.

La regulación por *variación de la tensión en bornes del inducido*, se basa en el hecho de que una variación de tal tensión en un motor derivación va acompañada de una variación análoga de la fuerza contraelectromotriz, y por consiguiente, siendo el flujo constante, de

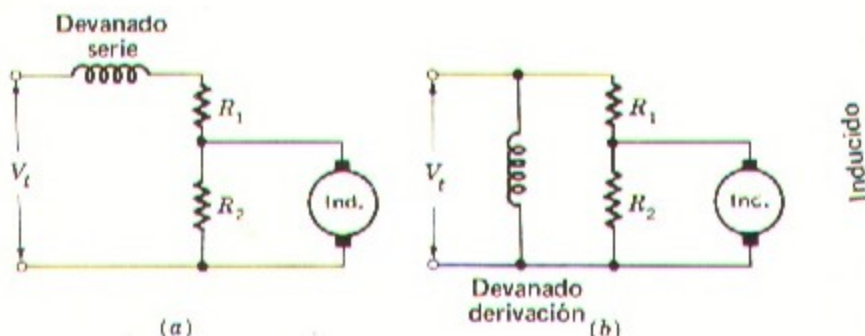


Fig. 5-15. Regulación de velocidad shuntando el inducido (a) en un motor serie, y (b) en un motor derivación.

la correspondiente velocidad. Generalmente, la fuente de energía disponible es una corriente alterna de tensión constante, por lo que se precisará un equipo auxiliar en forma de rectificadores estáticos o de grupo motor-generator para proporcionar la tensión continua necesaria para alimentar el devanado inducido. El gran desarrollo alcanzado por los rectificadores estáticos de gran potencia ha abierto un amplio campo en aquellas aplicaciones en las que es necesaria una regulación muy precisa de la velocidad del motor: estas aplicaciones son de tal importancia que merecen ser tratadas especialmente, como se hace en el capítulo 8.

El esquema típico del sistema, denominado también *sistema Ward-Leonard*, está representado en la Fig. 5-16: consta de un grupo motor-generator que suministra potencia al inducido del motor cuya velocidad se trata de regular.

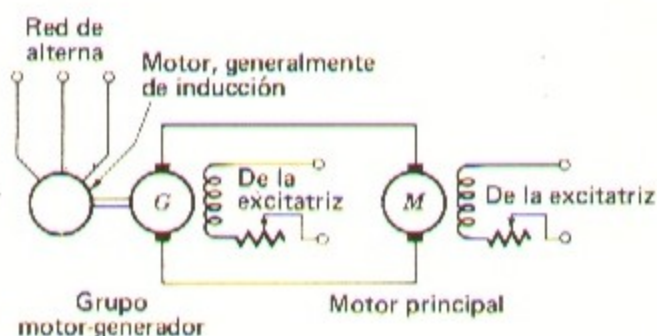


Fig. 5-16. Regulación de velocidad ajustando la tensión en el inducido, o procedimiento Ward Leonard.

La tensión en el inducido del motor principal M se regula ajustando el reostato de la excitación de un generador G de excitación independiente, consiguiéndose así una regulación precisa dentro de un amplio campo de velocidades. Un inconveniente evidente reside en el hecho de ser necesaria la instalación de tres máquinas de plena potencia, en lugar de un motor único. El equipo de regulación se instala en los circuitos inductores de pequeña potencia, preferiblemente a situarlos en los circuitos de potencia principales. La flexibilidad y adaptabilidad del sistema es tal que encuentra frecuentes aplicaciones, ya en sí mismo o en alguna de sus variantes.

Frecuentemente, para conseguir un campo de velocidades lo más amplio posible la regulación de la tensión del generador se combina con la regulación del campo del motor como puede apreciarse por el reostato en el inductor del motor M de la Fig. 5-16. Con esta doble regulación puede definirse como *velocidad base* del motor la que le correspondería con su tensión normal en el inducido y con pleno campo inductor. Las velocidades mayores a la básica se consiguen regulando el campo inductor, y las inferiores regulando la tensión en el inducido. En la gama de velocidades por encima de la básica, el funciona-

miento sólo admite potencia constante tal como se ha visto al estudiar la conexión con reostato en el inductor derivación, mientras que por debajo de dicha velocidad es admisible mantener el par constante como en la regulación por variación de resistencia del inducido, ya que tanto la intensidad en él, como el flujo se mantienen aproximadamente constantes.

Las Fig. 5-17a y 5-17b representan respectivamente el par y la potencia de salida admisible. La característica de par constante es adecuada para muchas aplicaciones en máquinas herramientas en las que la mayor parte de la carga procede de vencer los rozamientos de las partes móviles, lo que requiere un par sensiblemente uniforme.

La regulación de la velocidad y los límites por encima de la velocidad base son también los ya vistos al tratar de la regulación variando el campo inductor derivación: la velocidad máxima no acostumbra a ser superior a cuatro veces la velocidad base y es preferible no sobrepasar de dos veces dicho valor. En la zona de regulación por la tensión en el inducido, aun cuando ciertas condiciones puedan ser determinantes, el principal motivo de limitación reside en el magnetismo remanente del generador. En máquinas clásicas, el límite inferior que permite un funcionamiento regular y estable se encuentra alrededor de 0,1 de la velocidad base, con lo que el campo total de variación abarca como máximo una gama de 40 a 1. Prescindiendo de la reacción del inducido, la pérdida de velocidad entre el funcionamiento en vacío o a plena carga es debida íntegramente a la caída de tensión a plena carga en los devanados inducidos del generador y del motor de corriente continua; esta caída es constante dentro de la zona regulada por variación de tensión, ya que en ella se consideran constantes el par y la intensidad a plena carga. Por consiguiente, la pérdida de velocidad entre el funcionamiento en vacío y a plena carga, medida en r.p.m., es constante con independencia de la velocidad en vacío: de acuerdo con esto, las curvas de par-velocidad son muy aproximadamente una serie de líneas paralelas correspondiendo cada una de ellas a una regulación distinta de la excitación del generador. Una pérdida de velocidad de, por ejemplo, 40 r.p.m. tiene poca importancia si la velocidad en vacío es de

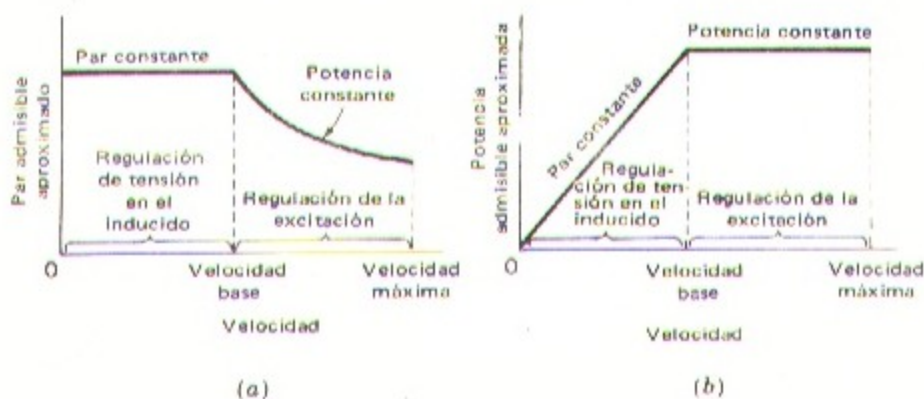


Fig. 5-17. Limitaciones en el par (a) y en la potencia (b) al regular la velocidad combinando los métodos de variar la tensión en el inducido y de variar la excitación.

1200 r.p.m., pero si ésta es de 120 r.p.m. puede llegar a ser de importancia capital y exigir ciertas correcciones en el replanteamiento del sistema.

Cuando se necesita una regulación precisa de la velocidad dentro de un amplio campo, así como para aprovechar al máximo las posibilidades de las máquinas de corriente continua de adaptarse a gran variedad de características, se han introducido ciertas modificaciones de detalle sobre el sistema Ward-Leonard básico. Por ejemplo, el empleo de un generador excitación compuesta de característica plana es un procedimiento sencillo para mejorar la regulación. Pueden usarse también generadores del tipo amplidina, que se estudiarán en el capítulo 9, en lugar del generador principal G de la Fig. 5-16 si se trata de un sistema de pequeña potencia, o para regular la excitación de dicho generador si la potencia es grande: con ello se consigue una gran flexibilidad y se atenúan las limitaciones impuestas por el magnetismo remanente, consiguiéndose una excelente regulación dentro de un campo tan amplio como de 120 a 1. Como podrá verse en el capítulo 9, este método se utiliza frecuentemente en los sistemas de control automático en circuito cerrado.

Cuando el inducido de un motor se alimenta de su propio generador individual de corriente continua, puede influirse sobre la forma de la curva par-velocidad del sistema incorporando ciertos detalles a dicho generador: un ejemplo lo puede constituir el empleo de un generador con triple bobinado de excitación para alimentar el inducido de un motor derivación. Este generador, de uso específico, consta de un devanado de excitación independiente, otro de excitación derivación y un tercero de excitación serie con conexión diferencial: la combinación de los tres permite fijar un límite ajustable al par de salida, y en particular al par y a la corriente si el motor queda bloqueado. En otros sistemas, se consigue limitar mediante controles apropiados el aumento excesivo del par o de la corriente. Los grados de libertad son tales que permiten prever, dentro de amplias posibilidades, cualquier programa.

5-8. RESUMEN. EMPLEO DE MAQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA

Para formarse una idea de las aplicaciones de las máquinas de corriente continua es conveniente hacer una recapitulación de sus más relevantes características junto con consideraciones sobre su posición técnica y económica frente a otros sistemas competitivos de conversión de energía. Para las máquinas en general, su principal ventaja reside en la flexibilidad de funcionamiento y aplicaciones que tienen, y su principal inconveniente en la inversión económica inicial que requieren; no obstante, las ventajas de los motores de corriente continua son tan relevantes que ocupan una posición privilegiada en la industria.

Los generadores de corriente continua son la solución obvia al problema de convertir energía mecánica en energía eléctrica continua. Cuando el punto de utilización está geográficamente alejado del punto de conversión, las ventajas que para la generación, transformación de tensión y transmisión tiene la corriente alterna son tales que determi-

nan el empleo de ésta, transformándola de alterna en continua, si ello es necesario, junto al mismo lugar de utilización¹.

En la transformación de corriente alterna en continua, los grupos motor-generator pueden competir con los rectificadores de arco de mercurio, con los ignitrones y con los rectificadores a base de semiconductores. Sin embargo, cuando se trata de rectificar potencias fuertes, los procedimientos electrónicos presentan muchas veces ventajas económicas decisivas, con lo que los generadores de continua encuentran su principal aplicación en aquellos casos en que es necesario un control flexible y eficaz de la tensión de salida, o en aquellos otros en que la conversión primaria de energía tiene lugar en situación muy próxima al punto de consumo.

En cuanto a los distintos tipos de generadores de corriente continua, los más corrientes son los de excitación independiente, y los de autoexcitación compuesta acumulativa. Los de excitación independiente tienen la ventaja de permitir una gran variación de la tensión de salida, mientras que los autoexcitados pueden dar lugar a inestabilidad cuando se trabaja en la zona de tensiones bajas, en la que la recta de resistencia del inductor es tangente o casi tangente a la curva de magnetización. Los generadores excitación compuesta pueden tener una curva característica de tensión prácticamente plana o incluso algo ascendente con la carga, mientras que en los de excitación derivación o independiente (supuesto que en estos últimos no exista devanado en serie, lo que en la práctica bien puede suceder) la tensión cae algo con la carga salvo que se arbitren otros medios de regulación. En cuanto a lo referente a máquinas de corriente continua para regulación (generadores amplidinas y tipos similares) que se verán en el capítulo 9 son el resultado de un estudio exhaustivo de las distintas posibilidades.

Por lo que a los motores de corriente continua se refiere, las características de cada uno de los distintos tipos son las siguientes: El motor serie sufre una notable disminución de velocidad al aumentar la carga, siendo en general su velocidad en vacío prohibitivamente alta; el par es aproximadamente proporcional al cuadrado de la intensidad mientras la saturación es baja, y a la potencia, variando de 1 a 2, al aumentar dicha saturación. El motor derivación con excitación constante trabaja a una velocidad casi uniforme, que disminuye poco al crecer la carga; el par es aproximadamente proporcional a la corriente en el inducido: una cualidad importante es la de que puede regularse su velocidad dentro de amplios límites actuando sobre el campo inductor, sobre la tensión del inducido o sobre ambos simultáneamente. El motor excitación compuesta es un intermedio entre los dos anteriores, pudiéndosele atribuir las ventajas del uno o del otro según sea la relación entre las intensidades de los campos serie y derivación.

La aptitud de los motores serie de soportar fuertes pares de sobrecarga limitando, sin embargo, en virtud de la pérdida de velocidad, la sobrecarga de potencia, así como el hecho de ser capaces de resistir pares de arranque considerables, los hacen muy adecuados

¹ Para la transmisión a largas distancias de grandes potencias a elevadas tensiones, de 400.000 V o más, por medio de cables aislados, especialmente submarinos, vuelve a ser más conveniente la transmisión en continua, ya que la capacidad de los cables crea problemas con la corriente alterna por la gran intensidad capacitiva que absorben, y porque además el factor de potencia de su dieléctrico es origen de considerables pérdidas y consiguiente calentamiento.

En ambos extremos de la línea se puede transformar la corriente alterna en continua o viceversa, según sean las conveniencias. (N. del T.)

para el accionamiento de elevadores, grúas y para tracción, no teniendo prácticamente competencia en este campo. La regulación de velocidad se hace generalmente variando la resistencia del circuito del inducido. En ciertas ocasiones el motor de inducción con rotor devanado y regulación por la resistencia del inducido puede competir con el motor serie de continua: los argumentos a favor de uno u otro se basan más en la posibilidad y economía de disponer de corriente continua que en las características propias de los motores.

Los motores excitación compuesta con el campo del devanado serie muy dominante se comportan en todo aproximadamente igual que los motores serie, excepto en que el campo del devanado derivación limita la velocidad en vacío a un valor de seguridad aceptable. Los motores excitación compuesta con poco devanado serie compiten con los motores de inducción de jaula de ardilla de alta resistencia en el rotor (motores de *alto deslizamiento*, descritos en el capítulo 7 como motores de inducción de clase D): ambos motores tienen una característica velocidad-carga francamente descendente como es de desear, por ejemplo, cuando se utilizan volantes de inercia para absorber puntas de potencia intermitentes. Para comparar económicamente estos dos tipos de motores deben valorarse el mayor coste inicial de un motor excitación compuesta y el mayor coste de ejercicio debido a las pérdidas en el motor de inducción de fuerte deslizamiento.

Debido a la sencillez, economía y robustez de los motores de inducción de jaula de ardilla, el motor derivación queda en posición desfavorable para servicios a velocidad constante, salvo que ésta sea muy baja ya que entonces el motor de inducción debe ser de numerosos polos lo que dificulta y encarece su construcción: la comparación a estas bajas velocidades es prácticamente la misma que habría que hacer entre los motores síncronos y los de continua.

El motor derivación está caracterizado por su adaptabilidad a servicios que precisen de una velocidad regulable, regulación que se consigue ajustando la resistencia del circuito inducido para velocidades inferiores a las que corresponden con plena excitación, ajustando el campo inductor para velocidades por encima de la indicada, y ajustando la tensión en el inducido o procedimiento Ward-Leonard para velocidades inferiores (y en algunos casos superiores) a las correspondientes a la tensión nominal y plena excitación. Los procedimientos de regulación citados, junto con la posibilidad de introducir devanados de excitación adicionales, tanto en los motores como en los generadores, para lograr en ellos determinadas características, dan una gran flexibilidad a las manipulaciones con corriente continua. Los rectificadores estáticos sólidos que se describen en el capítulo 8 y los generadores de control del capítulo 9 reafirman la posición de las máquinas de continua allá donde un perfecto control de las operaciones sea indispensable.

No hay que olvidar que la elección de un equipo destinado a una instalación que requiera poder regular la velocidad no es una cuestión obvia que pueda resolverse simplemente observando la lista de ventajas e inconvenientes: en general deberán compararse todas las posibilidades específicas, cuantitativas, económicas y técnicas, así como los detalles relativos a las respuestas transitoria y permanente que se verán en el capítulo 9. También desempeñan un papel importante las condiciones locales y las características del equipo motor, tales como: potencia uniforme, par uniforme, o potencia y par variables. Asimismo hay que tener en cuenta que el estudio tanto económico como de característi-

cas debe comprender tanto el motor como el equipo, ya que este último tiene gran importancia para el funcionamiento correcto en las condiciones dadas, y su coste es una parte no despreciable del coste total.

PROBLEMAS

5-1. Un generador excitación compuesta acumulativa con polos de conmutación y escobillas en la línea neutra debe utilizarse como motor.

Si no se cambia nada en sus conexiones internas, el motor ¿será de excitación compuesta acumulativa o diferencial?; la polaridad de los polos de conmutación ¿será correcta?; el sentido de rotación ¿será el mismo o el opuesto al que tenía cuando funcionaba como generador?

5-2. Una máquina de continua autoexcitada, con polos de conmutación, se ajusta de forma que actúe como un generador excitación hipercompuesta. Con máquina parada se invierten las conexiones del devanado derivación y seguidamente se pone en marcha en sentido opuesto; la máquina induce la tensión en bornes normal. Respóndanse, razonando brevemente la contestación, las siguientes preguntas:

La polaridad de la tensión en bornes ¿es la misma de antes? La máquina ¿continúa siendo de excitación compuesta acumulativa? Los polos de conmutación ¿son de polaridad apropiada para una conmutación correcta?

5-3. Un generador derivación de 10 kW, 230 V y 1150 r.p.m. es movido por un motor primario cuya velocidad es de 1195 r.p.m. cuando el generador está en vacío, y desciende a 1150 r.p.m. cuando dicho generador suministra 10 kW, pudiéndose considerar que la pérdida de velocidad es proporcional a la potencia de salida del generador.

Se modifica el generador convirtiéndolo en excitación compuesta mediante la adición de un devanado serie en conexión corta de tal forma que la tensión de 230 V en vacío suba hasta 250 V con la plena carga de 43,5 A. La resistencia del devanado serie es de 0,09 ohm, y la del inducido, escobillas comprendidas, de 0,26 ohm. El devanado derivación tiene 1800 espiras por polo; con objeto de determinar el número de espiras serie necesarias se mueve la máquina como generador de excitación independiente obteniéndose los siguientes datos en carga: tensión en bornes del inducido, 254 V, intensidad en el mismo, 44,7 A, corriente de excitación 1,95 A y velocidad, 1145 r.p.m.

La curva de magnetización a 1195 r.p.m. es la siguiente:

E_a	230	240	250	260	270
I_f	1,05	1,13	1,26	1,46	1,67

Determinése:

- El número de espiras serie por polo necesarias.
- La reacción del inducido en ampere-vueltas de desmagnetización equivalentes por polo cuando $I_a = 44,7$ A.

5-4. Un pequeño generador derivación para empleo en usos aeronáuticos, tiene los siguientes valores nominales: 9 kW, 30 V, 300 A, y está movido por uno de los motores principales del avión a través de una toma de potencia auxiliar. La velocidad del generador es proporcional a la del motor principal, y puede ser cualquiera comprendida entre 4500 y 8000 r.p.m. La tensión en bornes se mantiene constantemente en 30 V, cualquiera que sea la carga y la velocidad, por medio de un regulador de tensión que automáticamente regula un reostato de carbón de resistencia mínima 0,75 ohm. Las resistencias del devanado derivación, de los devanados de los polos de conmutación y del inducido (incluidas escobillas) son respectivamente de 2,5, 0,004 y 0,012 ohm.

Los datos de la curva de magnetización a 4550 r.p.m. son:

I_f	0	2	4	5	6	8	11,7
E_a	1,0	18,0	30,5	33,6	35,5	38	40,5

En una prueba a 4550 r.p.m. se ha necesitado una corriente de excitación de 7 A para mantener la tensión nominal en bornes cuando la carga es la nominal.

Determinense las siguientes características del generador descrito

- Resistencia máxima necesaria en el reostato de campo.
- Máxima potencia disipada en dicho reostato.
- Efecto desmagnetizante de la reacción del inducido con la carga nominal a 4550 r.p.m., expresando en función de la intensidad equivalente en el devanado derivación.

5-5. Admitamos que el efecto desmagnetizante de la reacción del inducido en el generador del problema anterior equivale a una f.m.m. desmagnetizante proporcional a la corriente en el inducido.

- Trácese una curva de la tensión en bornes en función de la intensidad de salida, siendo la resistencia del reostato la mínima, y la velocidad 4550 r.p.m.
- Cuando el aparato está en tierra con los motores a marcha lenta, la velocidad del generador puede ser inferior a 4550 r.p.m. Trácese una curva de la tensión en bornes en función de la velocidad, estando el reostato en su valor mínimo y siendo la intensidad de salida de 300 A. Inclúyase en la escala de velocidades la gama comprendida entre 4550 y 3500 r.p.m., es decir, por debajo de la velocidad normal, y dígase cuál es la velocidad mínima a la que el generador podrá suministrar los 300 A.

5-6. Un motor serie de continua trabaja a 750 r.p.m. cuando la intensidad en la línea es de 80 A y la tensión de 230 V. La resistencia de su inducido es de 0,14 ohm y la de su inductor 0,11 ohm.

Admitiendo que el flujo correspondiente a una intensidad de 20 A sea el 40 por ciento del correspondiente a 80 A, hállese la velocidad del motor cuando la intensidad en la línea es de 20 A a 230 V.

5-7. Un motor serie está diseñado de forma que la densidad de flujo en su hierro sea lo suficientemente baja como para que exista una relación lineal entre el flujo y la corriente de excitación, dentro de su campo normal de trabajo. Los datos nominales de dicho motor son: 50 c.v., 190 A, 220 V y 600 r.p.m.

Las pérdidas a plena carga, expresadas en por ciento de la potencia de entrada son:

Pérdidas en el cobre del inducido (escobillas incluidas)	= 3,7 %
Pérdidas en el cobre del inductor	= 3,2 %
Pérdidas mecánicas	= 2,8 %

Las pérdidas mecánicas pueden considerarse constantes, y la reacción del inducido y pérdidas parásitas pueden despreciarse.

Cuando este motor trabaja a 220 V con intensidad mitad de la normal, cuál será:

- Su velocidad en r.p.m.
- La potencia de salida en el eje, en c.v.

5-8. Un motor serie para ferrocarriles, de 150 c.v., 600 V, 600 r.p.m. tiene una resistencia conjunta de los devanados inductor e inducido, escobillas incluidas, de 0,155 ohm. La corriente a plena carga, con la tensión y a la velocidad nominales es de 206 A. La curva de magnetización a 400 r.p.m. arroja los siguientes datos:

Tensión inducida, V	375	400	425	450	475
Corriente de excitación, A	188	216	250	290	333

Determinar el par de arranque cuando la intensidad de arranque está limitada a 350 A. Admítase que la reacción del inducido equivale a una f.m.m. desmagnetizante proporcional al cuadrado de la velocidad.

5-9. En la placa de un determinado motor figuran los siguientes datos: 230 V, 75, 7 A, 20 c.v., 900 r.p.m. a plena carga, 50° C en 1 hora de funcionamiento, excitación serie.

El devanado inductor tiene 33 espiras por polo, y su resistencia en caliente es de 0,06 ohm, mientras que la del inducido, escobillas incluidas, es de 0,09 ohm, también en caliente. La curva de magnetización a 900 r.p.m. da los siguientes datos:

Ampere-vueltas por polo	500	1000	1500	2000	2500	3000
Tensión inducida	95	150	188	212	229	243

Para conocer la aptitud de este motor en el accionamiento de un funicular, deberán calcularse algunos puntos de la curva velocidad-carga.

- Calcúlese la velocidad del motor cuando la intensidad es igual a $1/3$, $2/3$, 1 y $4/3$ de la indicada en la placa.
- Calcúlese la potencia de salida en el eje cuando las intensidades son las indicadas en el punto anterior. A este objeto, considérese que las pérdidas mecánicas se mantienen constantes al valor determinado por los datos de la placa.
- Calcúlese el par en la polea, expresado en Nw-m. correspondiente a cada uno de los valores hallados en *b*. Ordénense en forma de tabla, para su más cómodo manejo, los resultados de los puntos *a*, *b*, y *c*.
- La velocidad máxima de seguridad es del 250 por ciento de la correspondiente a la plena carga. ¿Cuál es la potencia de entrada del motor en este punto?
- ¿Cuál será el valor de la resistencia que conectada en serie con el motor proporcionará el par electromagnético de plena carga a 500 r.p.m.?

5-10. En un motor derivación de 230 V, 10 c.v., la resistencia de su circuito inducido es de 0,30 ohm. y la de su devanado derivación de 170 ohm. Su velocidad en vacío, con tensión nominal, es de 1200 r.p.m., siendo de 2,7 A la intensidad en su inducido. Con plena carga, y a la misma tensión, la intensidad en la línea es de 38,4 A, y debido a la reacción del inducido el flujo es un cuatro por ciento menor que en vacío.

¿Cuál es la velocidad a plena carga?

5-11. Un ventilador axial de 0,90 m puede suministrar 75 m^3 de aire por minuto a la presión de 12 m.m. columna de agua cuando gira a 1165 r.p.m. Este ventilador tiene la siguiente característica velocidad-carga:

Velocidad, r.p.m.	700	800	900	1000	1100	1200
Potencia de entrada, c.v.	2,9	3,9	5,2	6,7	8,6	11,1

Se pretende moverlo con un motor derivación de 10 c.v., 230 V, 37,5 A, cuatro polos, cuyo inducido tiene $Z = 666$ conductores activos y dos circuitos en paralelo, siendo su resistencia de 0,267 ohm. El flujo por polo en el inducido es de $\Phi = 10^{-2}$ Wb, y la reacción del inducido es despreciable. Las pérdidas mecánicas en vacío (supuestos constantes) son de 600 W, que es un valor típico para un motor semejante.

Determinése la potencia de salida en el eje y la velocidad del motor cuando está acoplado al ventilador.

5-12. Un motor de continua derivación de 100 c.v., 250 V, tiene la curva de magnetización de la Fig. 5-12, siendo la resistencia de su inducido (escobillas incluidas) de 0,025 ohm. La excitación tiene 1000 espiras por polo.

Estando el reostato de campo regulado de forma que la velocidad en vacío sea de 1200 r.p.m., la corriente en el inducido es de 8 A. Si se pretende que la velocidad sea de

950 r.p.m. con una carga que suponga una intensidad de 250 A en el inducido, ¿cuántas espiras serie por polo se deberán añadir? Despréciese el aumento de resistencia que supone este nuevo devanado serie.

5-13. Un motor derivación que trabaja con una tensión en bornes de 230 V absorbe a plena carga una corriente de 38,5 A en su inducido. La velocidad es de 1200 r.p.m. tanto en vacío como a plena carga. Otros datos del motor son:

Resistencia del circuito inducido, escobillas incluidas = 0,21 ohm.

Espiras arrollamiento derivación por polo = 2000

Curva de magnetización, determinada como generador en vacío a 1200 r.p.m.

E_a, V	180	200	220	240	250
I_f, A	0,74	0,86	1,10	1,45	1,70

- Determinése la corriente de excitación en el devanado derivación de este motor en vacío, a 1200 r.p.m., siendo de 230 V la tensión de la línea. Despréciese la caída de tensión en la resistencia del inducido, y la reacción del mismo cuando se trabaja sin carga.
- Determinése en ampere-vueltas por polo la reacción del inducido efectiva al trabajar a plena carga.
- ¿Cuántas espiras serie deberán añadirse para convertir esta máquina en un motor excitación compuesta larga, que gire a 1090 r.p.m. cuando la intensidad en el inducido sea de 38,5 A y la tensión la indicada? El devanado serie tendrá una resistencia de 0,052 ohm.
- Determinése cuál será la velocidad a la tensión de 230 V e intensidad en el inducido de 38,5 A si se añade un devanado serie de 25 espiras por polo y 0,0522 ohm. de resistencia.

5-14. Un motor derivación de 10 c.v., 230 V, tiene 2000 espiras por polo en su devanado de excitación: la resistencia del inducido, escobillas comprendidas, es de 0,20 ohm, la del devanado de conmutación de 0,041 ohm, y la del devanado de excitación derivación (excluido el reostato) de 235 ohm. Trabajando el motor en vacío a su tensión nominal y variando la resistencia del inductor se han obtenido los siguientes datos:

Velocidad, r.p.m.	1110	1130	1160	1200	1240
I_f, A	0,932	0,880	0,830	0,770	0,725

La intensidad en el inducido es despreciable en la marcha en vacío. Cuando el motor trabaja a plena carga la corriente en el inducido es de 37,5 A, la de excitación 0,770 A y la velocidad 1180 r.p.m.

- Calcúlese la reacción del inducido a plena carga, expresándola en ampere-vueltas desmagnetizantes equivalentes por polo.
- Calcúlese el par electromagnético a plena carga.
- ¿Cuál será el par de arranque del motor con la excitación máxima, si se limita a 75 A la intensidad en el inducido? La reacción del inducido en estas condiciones es de 160 ampere-vueltas por polo.
- Proyéctese el devanado serie necesario para tener 1100 r.p.m. a plena carga, siendo de 1200 r.p.m. la velocidad en vacío.

5-15. Un motor derivación de 230 V gira a 1600 r.p.m. igual en vacío que a plena carga. Con plena carga, la corriente en el inducido es de 50 A, siendo la resistencia de éste, incluidas las escobillas y los devanados de conmutación, de 0,20 ohm. El devanado de excitación derivación tiene 1000 espiras por polo, y la curva de magnetización a 1600 r.p.m. da los siguientes datos:

E_a , V	200	210	220	230	240	250
I_f , A	0,80	0,88	0,97	1,10	1,22	1,43

- Calcúlese en ampere-vueltas por polo el efecto desmagnetizante de la reacción del inducido a plena carga.
- Se le añade a esta máquina un devanado inductor serie, con conexión larga, de 5 espiras por polo y 0,05 ohm de resistencia. Hállese la velocidad para la intensidad de plena carga y la tensión nominal, siendo la resistencia del devanado derivación la misma que en el punto (a).
- Estando instalado el devanado serie del punto (b) calcúlese en Nw-m. el par de arranque: la corriente en el inducido está limitada a 100 A, y la excitación derivación es la normal. Admitamos que el efecto desmagnetizante de la reacción del inducido sea de 260 ampere-vueltas por polo.

5-16. A un motor serie de 50 c.v., 230 V se le debe añadir un ligero devanado derivación para prevenir el peligro de que adquiriera una velocidad excesiva cuando la carga sea poca: la resistencia de este nuevo devanado es de 230 ohm. La resistencia conjunta de los polos de conmutación e inducido, incluidas las escobillas es de 0,055 ohm. El devanado serie tiene 24 espiras por polo, siendo su resistencia total de 0,021 ohm.

Antes de instalar el devanado derivación se obtuvieron los siguientes datos experimentales:

Prueba en carga como motor serie (no se midió la potencia de salida)

$$V_T = 230 \text{ V}, \quad I_a = 184 \text{ A}, \quad n = 600 \text{ r.p.m.}$$

Prueba en vacío, con excitación independiente

Tensión aplicada al inducido	Velocidad	Intensidad en el inducido	Excitación
V	r.p.m.	A	A
230	1500	10,-	60
230	1200	9,2	74
230	900	8,-	103
215	700	7,7	135
215	600	7,5	175
215	550	7,2	201
215	525	7,1	225
215	500	7,-	264

- Determinense el número de espiras en derivación por polo si la velocidad en vacío a la tensión nominal ha de ser de 1500 r.p.m. La caída de tensión en las resistencias del inducido, del devanado serie y de los polos de conmutación puede despreciarse en la marcha en vacío.
- Calcúlese la velocidad que resultará después de instalado el devanado derivación cuando el motor trabaje a su tensión normal con una carga que suponga una intensidad de 185 A en la línea. Supóngase que la f.m.m. desmagnetizante debida a la reacción del inducido no varía al añadir el devanado derivación.

5-17. Un motor derivación de corriente continua de 230 V se utiliza para un servicio que requiere poder variar la velocidad entre 0 y 1000 r.p.m. La regulación entre 0 y 500 r.p.m. se hace ajustando desde 0 a 230 V la tensión en bornes del inducido manteniendo constante la excitación, y entre 500 y 1000 r.p.m. debilitando la excitación manteniendo los 230 V en los terminales del inducido. Cualquiera que sea la velocidad, el par resistente es el mismo.

- ¿Cuál será la forma general de la curva de la corriente en el inducido en función de la velocidad, para toda la gama de éstas? Prescíndase de las pérdidas en la máquina y de la reacción del inducido.
- Supóngase que en lugar de mantener un par resistente constante, se pretende que la intensidad en el inducido no supere un valor prefijado. ¿Cuál será la forma general de la curva del par disponible en función de la velocidad? Por lo demás, son válidas las mismas condiciones que en (a).

5-18. a. Dos motores derivación de corriente continua, de velocidad variable, pueden alcanzar un máximo de 1650 r.p.m. y un mínimo de 450 r.p.m., obteniéndose la regulación mediante un reostato de campo.

El motor A arrastra una carga que requiere potencia constante cualquiera que sea la velocidad, mientras que el motor B arrastra otra que requiere par constante. Despréciense todas las pérdidas y la reacción del inducido.

1. Si a 1650 r.p.m. las respectivas potencias de salida son iguales, y la intensidad en los inducidos es de 100 A, ¿cuál será dicha intensidad en cada uno de los motores cuando la velocidad sea de 450 r.p.m.?
 2. Si a 450 r.p.m. las respectivas potencias de salida son iguales, y la intensidad en los inducidos es de 100 A, ¿cuál será dicha intensidad en cada uno de los motores cuando la velocidad sea de 1650 r.p.m.?
- b. Repítase el punto (a) con todas las condiciones iguales excepto que la regulación de velocidad se realice por el método de variar la tensión en el inducido.

5-19. La resistencia del inducido de un motor derivación de 230 V es de 0,1 ohm y la intensidad en el mismo de 100 A cuando la tensión en la línea es la normal. Se coloca una resistencia exterior de un ohm en serie con el inducido, manteniéndose invariado el par y la posición del reostato de campo.

- a. Dígase cuál será en tanto por ciento la variación de la corriente total tomada de la red.
- b. Dígase cuál será la variación en tanto por ciento de la velocidad del motor, indicando si ésta es en aumento o en disminución.

5-20. Una prensa de punzonar trabaja satisfactoriamente cuando está accionada por un motor excitación compuesta de 10 c.v. 230 V siendo su velocidad de 1800 r.p.m. en vacío y de 1200 r.p.m. a plena carga cuando el par es de 65 Nw-m. El motor queda temporalmente fuera de servicio y el único sustituto disponible es otro motor excitación compuesta de las siguientes características:

Potencia nominal = 12,5 c.v. a 230 V
 Intensidad en vacío = 4 A
 Velocidad en vacío = 1820 r.p.m.
 Velocidad a plena carga = 1600 r.p.m.
 Intensidad a plena carga = 57 A
 Par máximo en carga = 65 Nw-m
 Resistencia del inducido = 0,2 ohm
 Corriente de excitación derivación = 1,6 A.

Se desea emplear este motor como solución de emergencia en el accionamiento de la prensa sin introducir ninguna modificación en sus devanados.

- a. ¿Cómo se puede conseguir la regulación de velocidad deseada?
- b. Dibújese el esquema pertinente indicando las especificaciones de los aparatos necesarios.

5-21. Consideremos un motor derivación conectado a una línea de tensión constante, que acciona una carga que requiere un par electromagnético uniforme.

Demuéstrese que si $E_a > 0,5 V_t$ como es lo normal, al aumentar el flujo resultante en el entrehierro disminuye la velocidad, mientras que si $E_a < 0,5 V_t$ (lo que se puede conse-

guir insertando resistencias relativamente altas en serie con el inducido) al aumentar el flujo resultante en el entrehierro aumenta también la velocidad.

5-22. Dos máquinas derivación idénticas de 5 c.v. 230 V, 17 A se van a emplear como motor y generador respectivamente en un grupo Ward-Leonard. El generador está movido por un motor síncrono de 1200 r.p.m. La resistencia del circuito inducido de cada máquina (escobillas comprendidas) es de 0,47 ohm, se desprecia la reacción del inducido.

La curva de magnetización a 1200 r.p.m. es la misma para cada máquina, y arroja los siguientes datos:

I_f, A	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
E_a, V	108	183	230	254	267	276

- Calcúlese los valores máximo y mínimo de la corriente de excitación del generador para conseguir en el motor velocidades comprendidas entre 300 y 1500 r.p.m., siendo la intensidad en el inducido de éste de 17 A, y su corriente de excitación de 0,5 A constantes.
- Calcúlese la regulación de la velocidad del motor en las condiciones de velocidad máxima y mínima halladas en el punto (a).
- Calcúlese la velocidad máxima que se puede conseguir del motor a plena carga si se reduce la corriente de su excitación a 0,2 A y se limita la excitación del generador a 1,10 A.

5-23. Una de las aplicaciones industriales más corrientes de los motores serie de corriente continua es el accionamiento de grúas y aparatos de elevación, lo que exige unas características del motor adecuadas a este empleo.

El motor concreto a que nos referimos es un motor serie de 230 V, totalmente cerrado, siendo la potencia exigida por la grúa de 65 c.v. durante la media hora, con aumento de temperatura de hasta 75° C. El catálogo del constructor da las siguientes características para la tensión de unos 230 V.

TABLA 5-2

Intensidad en la líneas A	Par en el eje Nw - m	Velocidad r.p.m.
50	108	940
100	282	630
150	510	530
200	735	475
250	985	438
300	1230	407
350	1495	385
400	1710	370

La resistencia conjunta del devanado inducido, escobillas incluidas, más el de conmutación es de 0,090 ohm, y la del devanado serie de 0,040 ohm. Puede prescindirse de la reacción del inducido. En el punto *i* de este problema se hacen consideraciones sobre las pérdidas mecánicas y parásitas. El motor se conecta según el esquema de la Fig. 5-18 *a* durante la ascensión, y según el de la Fig. 5-18 *b* durante el descenso: el primero en simplemente una conexión normal con regulación mediante resistencia en serie, y el segundo, para el descenso con frenado dinámico, conecta en shunt el devanado inductor situando una resistencia variable en serie con él. Para comprobar la adecuación tanto del motor como de la regulación a este uso particular deberán trazarse algunas curvas par-velocidad. Sitúense todas estas curvas en una misma hoja con los pares en la escala horizontal y las velocidades en la vertical, abarcando toda la gama de valores que figuran en la tabla 5-2. Prevéanse valores positivos y negativos para la velocidad, correspondiendo los primeros al movimiento de elevación y los segundos al de descenso; prevéanse asimismo valores positivos y negativos del par, correspondiendo los primeros al sentido de izar la carga y los segundos al de bajarla: es decir, empléense los cuatro cuadrantes del sistema normal de coordenadas rectangulares.

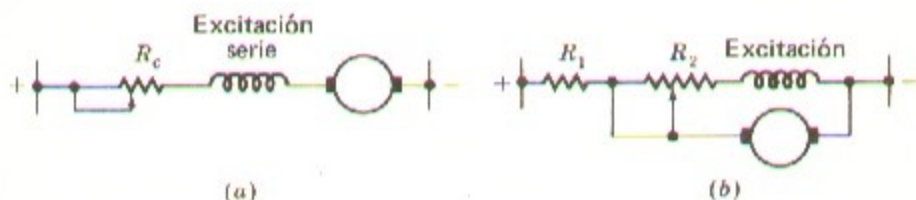


Fig. 5-18. Motor serie para grúa, del problema 5-23. (a) Conexión de subida; (b) conexión de bajada.

- Trácese las curvas par-velocidad, con la conexión de subida (Fig. 5-18 *a*), correspondientes a valores de la resistencia R_c de 0, 0,65 y 1,30 ohm. Si algunas de estas curvas se extienden al cuarto cuadrante estando el par comprendido dentro de la gama prevista, dibújense también dichas curvas y dese una interpretación física de lo que ello significa.
- Analícese si tales características son adecuadas para la operación de subida.
- Con la conexión de bajada (Fig. 5-18 *b*) trácese la curva par-velocidad siendo $R_1 = 0,65$ ohm y estando regulada R_2 a 0,65 ohm. La mayor parte de esta curva está en el cuarto cuadrante, pero si llega a entrar en el tercero trácese también la parte en él situada e intérpretese su significado físico.
- En las condiciones de (c), ¿cuál es la velocidad de descenso que corresponde al par nominal?
- Si R_2 disminuye, ¿cómo quedará afectada la velocidad de (d)? ¿Por qué?
- Si R_1 disminuye, ¿cómo quedará afectada la velocidad de (d)? ¿Por qué?
- ¿Cómo quedaría afectada la velocidad de (d) si se añadiera una resistencia en serie con el inducido del motor? ¿Por qué?

- h.* Analícese si tales características son adecuadas para la operación de descenso.
- i.* ¿Qué supuestos relativos a las pérdidas mecánicas y parásitas se han tenido que admitir (si es que se ha tenido que admitir alguno), debido a la falta de datos completos del motor?

Razónese este punto.

5-24. Hay que proyectar un arrancador automático para un motor derivación de 15 c.v., 230 V, siendo la resistencia de su circuito inducido de 0,162 ohm. Cuando trabaja a la tensión normal con una carga tal que la corriente en su inducido es de 32 A, gira a la velocidad de 1100 r.p.m.; la resistencia de su devanado inductor es de 115 ohm, y cuando trabaja a su potencia nominal la corriente en el inducido es de 56 A.

El motor debe arrancar con una carga que supone un par proporcional a la velocidad, y que ya una vez en marcha absorbe 15 c.v. El devanado inductor se conecta directamente a la entrada de 230 V, y la resistencia en serie con el inducido debe regularse automáticamente de forma que durante el período de puesta en marcha la intensidad en su circuito no supere el 200 por ciento de su valor nominal ni descienda por debajo de éste. Dicho de otra forma; la máquina debe arrancar con una intensidad en el inducido igual al 200 por ciento de la nominal; a medida que el motor vaya adquiriendo velocidad la intensidad bajará y tan pronto haya descendido hasta alcanzar el valor nominal se suprimirá de la resistencia en serie la parte necesaria para subir nuevamente al 200 %, repitiéndose estas maniobras hasta la supresión total de la resistencia.

- a.* ¿Cuál será el valor total de la resistencia de arranque?
- b.* ¿Cuánta resistencia deberá suprimirse en cada paso durante la operación de puesta en marcha?

5-25. En la Fig. 5-19 se representa esquemáticamente la conexión del sistema Ward-Leonard con triple devanado inductor descrito hacia el final del apartado 5-7. El motor de excitación independiente M acciona una pala de gran potencia en una explotación minera

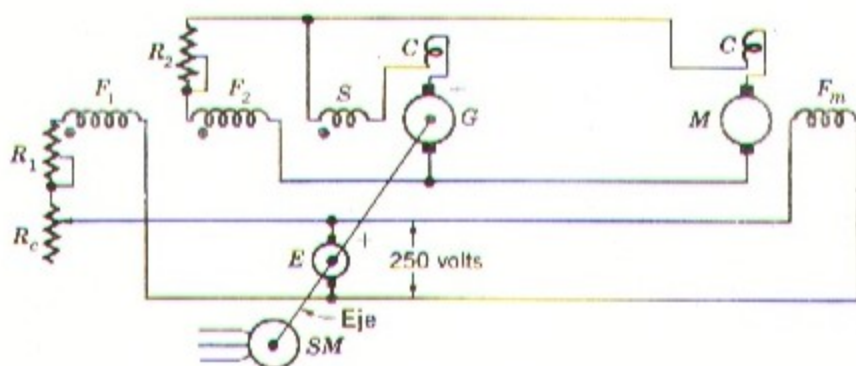


Fig. 5-19. Sistema Ward Leonard con generador de triple devanado de excitación, del problema 5-25.

de carbón a cielo abierto. Dicho motor tiene un devanado de conmutación C y otro de excitación independiente F_m ; su inducido está conectado al inducido de un generador G provisto de un devanado de conmutación C y tres devanados de excitación: uno independiente F_1 de regulación, otro derivación F_2 autoexcitado, y un tercero S en conexión serie diferencial. El objeto de este último S es el de limitar la corriente en el inducido en caso de que el motor quedase encallado o bloqueado. La excitatriz E suministra una tensión constante de 250 V al inductor F_m del motor y al devanado de regulación F_1 del generador. Tanto el generador G como la excitatriz E están accionados por el motor trifásico a 2300 V, SM .

Generador principal G (500 kW, 500 V)

S_1 : una espira por polo; resistencia total = 0,001 ohm.

F_1 : 200 espiras por polo = resistencia, 25 ohm.

F_2 : 100 espiras por polo = resistencia, 12 ohm.

R_1 y R_2 son resistencias fijas.

R_c es el regulador.

Resistencia del inducido más devanado de conmutación = 0,009 ohm.

Reacción del inducido, despreciable.

Curva de magnetización del generador:

Excitación: ampere-vueltas por el polo	500	1000	1500	2000	2500	3000
Tensión inducida: V	250	450	540	585	615	640

Motor M (500 V, 1000 A):

F_m : Excitado a 250 V.

Velocidad en vacío, con 500 V en el inducido = 600 r.p.m.

Resistencia del inducido, más devanados de conmutación, más conexiones = 0,015 ohm.

Reacción del inducido, despreciable.

Se pide lo siguiente:

- Hállese el valor de la resistencia R_2 para el cual la curva de excitación de F_2 coincide con la línea de magnetización del entrehierro.
- Hállese la resistencia R_1 que limita el par con motor bloqueado a un valor máximo de 1,5 en unidades relativas, siendo $R_c = 0$.
- Siendo los valores de R_1 y R_2 los anteriormente hallados y $R_c = 0$ trácense las características volt-ampere del generador y velocidad-par del motor. Empléense unidades relativas tomando como bases = 600 r.p.m., 500 V, 1000 A y el par motor correspondiente a 1000 A.

5-26. En algunos sistemas de propulsión de buques en los que la maniobrabilidad es de importancia capital, se emplean dispositivos de corriente continua: un ejemplo típico lo constituyen los buques rompehielos de hélices gemelas.

Especificaciones

1. Los motores primarios son: cuatro motores diesel de 3000 c.v. a 810 r.p.m. y dos turbinas de gas de 3000 c.v. con velocidad de salida, reducida mediante engranajes, de 810 r.p.m., todo ello dividido por igual entre los dos ejes.
2. Cada motor primario mueve un generador de corriente continua con doble inducido, cada uno de los cuales tiene los siguientes valores nominales: 1600 kW, 900 V, 1180 A. En cada eje, tres motores primarios moviendo seis generadores conectados en paralelo suministran la potencia al motor de propulsión.
3. Cada motor de propulsión es de doble inducido, conectados éstos en paralelo. Cada inducido tiene una potencia nominal de 3150 kW de entrada a 890 V y a la velocidad base (con excitación máxima) de 150 r.p.m. estando el buque inmobilizado por el hielo.
En estas condiciones, las pérdidas en los cables se consideran de 60 kW. Teniendo en cuenta las pérdidas en los motores, la máxima potencia de 6300 kW procedente de tres grupos motor generador dará una potencia de salida de aproximadamente 8000 c.v. por eje, o sean 16000 c.v. totales para el buque.
4. La regulación de los motores de propulsión por debajo de su velocidad base se conseguirá regulando la tensión de los generadores, y ésta a su vez se conseguirá variando la corriente de excitación y la velocidad del motor primario. El sentido de giro de los motores lo determinará la polaridad de los generadores.
5. Con los tres motores primarios por eje suministrando potencia, el motor de propulsión puede transmitir el 100 % de potencia en el eje al 100 % de la velocidad base (150 r.p.m.) estando el buque detenido por el hielo. Cuando el buque rompe el hielo y queda libre, los motores de propulsión pueden aumentar su velocidad, aun manteniendo el 100 % de potencia en el eje, debilitando la excitación hasta llegar al 146 % de la velocidad base (220 r.p.m.) cuando se navega en aguas libres.

Se pide

1. Trácese, en unidades relativas, las curvas de potencia en el eje en función de la velocidad (del propio eje): (a) estando el buque bloqueado, y (b) estando libre. Admítase que la potencia es proporcional al cubo de la velocidad.
2. Sobre la misma hoja señálense, también en unidades relativas, las potencias en el eje estando funcionando: (a) tres, (b) dos, (c) un, grupos motor-generador. Supóngase que las f.e.m. de los generadores se ajustan regulando la velocidad y el flujo de forma que se mantenga la intensidad nominal en sus inducidos. Háganse consideraciones respecto a la potencia consumida en pérdidas.

3. Con dos motores primarios por eje, ¿cuál será la máxima potencia en el mismo y su correspondiente velocidad estando el buque (a) bloqueado, y (b) libre. Repítase lo mismo con un solo motor primario.
4. ¿Qué tipo de excitación es recomendable (a) en los motores, y (b) en los generadores? Es decir: ¿deben ser máquinas derivación autoexcitadas? ¿de excitación independiente con excitatrices individuales de velocidad constante? ¿tomando la excitación de barras generales? ¿a qué tensión? ¿deberán tener devanados serie? ¿algún otro tipo de conexión? A título orientativo puede considerarse que las máquinas de estas potencias absorben para su excitación una potencia del orden del 2 por ciento de la suya nominal.
5. ¿Puede sugerirse alguna otra disposición del equipo eléctrico?

Máquinas síncronas: Régimen permanente

Máquina síncrona es aquella máquina de corriente alterna cuya velocidad en régimen permanente es proporcional a la frecuencia de la corriente que alimenta su inducido. A la velocidad de sincronismo el campo magnético giratorio creado por la corriente en el inducido gira a la misma velocidad que el creado por la corriente de excitación, resultando así un par constante. En el apartado 4-1 se hizo ya un esbozo elemental de la forma de trabajar las máquinas síncronas, haciendo notar la creación del par en función de la interacción entre sus campos magnéticos.

En este capítulo veremos los métodos de análisis aplicados al examen del funcionamiento de máquinas síncronas polifásicas en régimen permanente, considerándolas en principio como de rotor cilíndrico, y extendiéndonos luego sobre el efecto de los polos salientes en los apartados 6-6 y 6-7.

6-1. ONDAS DE FLUJO Y DE FMM EN MAQUINAS SINCRONAS

En las Figs. 6-1 y 6-2 se representa el desarrollo parcial de los devanados inducido e inductor de un generador de rotor cilíndrico. Por lo que al devanado inducido se refiere, éste es del mismo tipo que los expuestos en el apartado 3-4 al estudiar los campos rotativos. Tanto las consideraciones como los resultados obtenidos entonces son aplicables ahora.

En ambas figuras, la f.m.m. espacial fundamental engendrada por el devanado del rotor está representada por la senoide F , y tal como se indica con la designación complementaria B_f dicha onda puede representar también la correspondiente componente de la distribución de densidad de flujo. Tanto en la Fig. 6-1 *a* como en la 6-2 *a* la onda F está representada en el instante en que la f.e.m. inducida en la fase *a* por el campo inductor pasa por su valor máximo, estando su eje adelantado 90° respecto al eje de la fase *a*. La

f.e.m. inducida por el campo de excitación está representada por el vector giratorio E_f en las Figs. 6-1 b y 6-2 b, cuya proyección sobre el eje de referencia de la fase a es proporcional al valor instantáneo de la f.e.m. en la dirección señalada con puntos y cruces en los conductores de dicha fase.

La onda de f.m.m. creada por la corriente en el inducido, llamada también *reacción del inducido*, puede ahora superponerse valiéndose de los principios vistos en el apartado 3-4: recuérdese que una corriente polifásica equilibrada crea en un devanado polifásico simétrico una onda de f.m.m. cuya componente fundamental gira en el espacio a la velocidad de sincronismo, y recuérdese también que la onda de f.m.m. es directamente opuesta a la fase a en el instante en que la corriente en dicha fase es máxima. La Fig. 6-1 a se ha

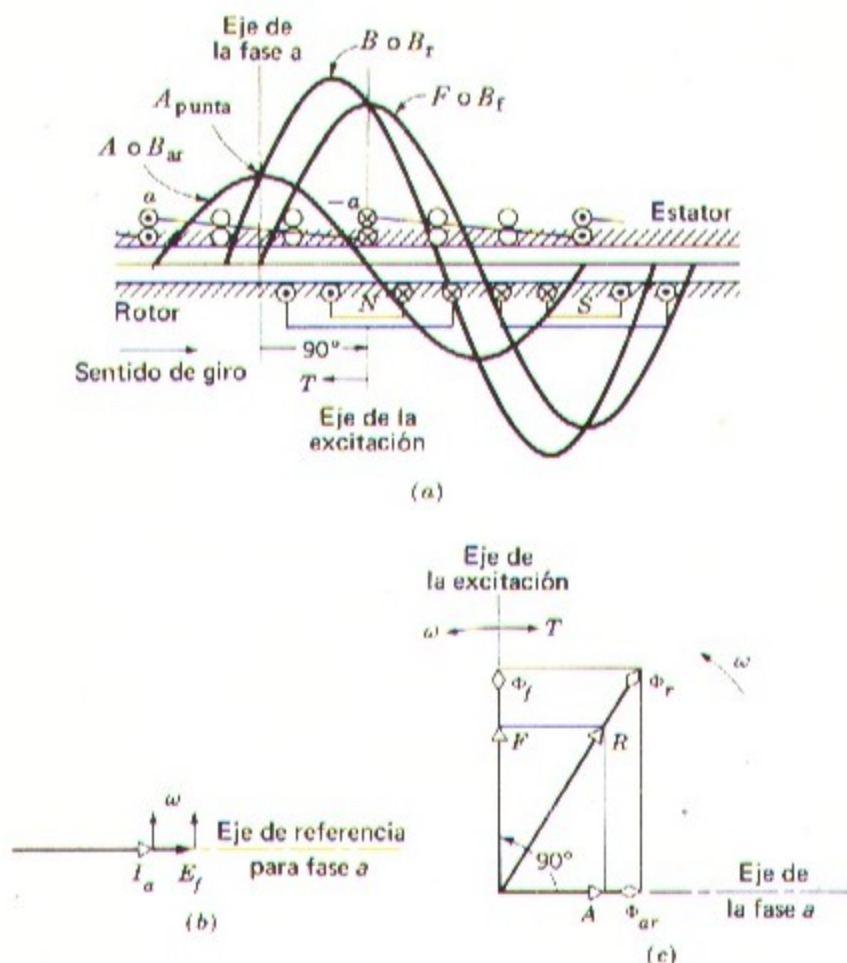


Fig. 6-1. (a) Onda espacial de f.m.m. y de densidad de flujo en un generador síncrono de rotor cilíndrico. Corriente inducida en fase con la tensión inducida por el campo inductor. (b) Diagrama vectorial temporal. (c) Diagrama vectorial espacial.

campo van por delante de la onda de flujo resultante en el entrehierro, como sucede en las Figs. 6-1 y 6-2, el par electromagnético actúa sobre el rotor en sentido opuesto al del movimiento, es decir, que la máquina está actuando como generador, y si por el contrario, dichos polos van retrasados respecto a la onda de flujo resultante en el entrehierro, como en las Figs. 6-3 y 6-4 el par electromagnético actúa en el mismo sentido que la rotación, es decir, que la máquina trabaja como motor. De aquí se deduce que en un generador los polos deben ser arrastrados por delante de la onda de flujo en virtud de un par mecánico suministrado por el motor primario, mientras que en un motor, los polos son retenidos por detrás de dicha onda debido al par resistente de la carga aplicada.

El valor del par puede expresarse en función del flujo fundamental por polo en el entrehierro Φ_r , y el valor punta F de la onda fundamental de f.m.m. del rotor.

De acuerdo con la ecuación 4-1:

$$T = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\text{polos}}{2} \right)^2 \Phi_r F \text{ sen } \delta_{RF} \quad (6-1)$$

siendo δ_{RF} el ángulo, en grados eléctricos, de desfase existente entre las ondas del flujo resultante y la f.m.m. del rotor. Si F y Φ son constantes, la máquina se ajustará por sí misma a las variaciones del par modificando convenientemente el ángulo δ_{RF} .

Ejemplo 6-1

Consideremos una máquina síncrona en la que la resistencia del devanado del estator, la reactancia de dispersión y las pérdidas sean despreciables, y que esté conectada a una red de potencia infinita (es decir, a un sistema de potencia suficientemente grande como para que tanto la tensión como la frecuencia mantengan sus respectivos valores independientemente de la potencia que suministre o reciba). La corriente de excitación del rotor se mantiene constante al valor necesario para que sin carga la corriente en el inducido sea nula.

Descríbase con la ayuda de los diagramas vectoriales, la forma en que la máquina se adaptará por sí misma a las variaciones del par requeridas, considerando tanto el caso de generador como el de motor.

SOLUCION

El flujo Φ_r resultante en el entrehierro induce una tensión E_r en cada una de las fases del estator; ya que se ha supuesto que no existen resistencias ni reactancias de dispersión, E_r deberá ser constantemente igual a la tensión de la red de potencia infinita. Trabajando en vacío, tanto el par como δ_{RF} son iguales a cero, y siendo I_a también igual a cero lo será igualmente A y el diagrama vectorial no será otro que el de la Fig. 6-5 a.

Si se añade una carga mecánica al eje de forma que la máquina pase a trabajar como motor, de momento el rotor disminuirá ligeramente de velocidad debido al par resistivo añadido, es decir, que el campo de dicho rotor deslizará hacia atrás respecto a la onda de flujo en el entrehierro, aumentando en consecuencia el ángulo δ_{RF} naciendo así un par motor.

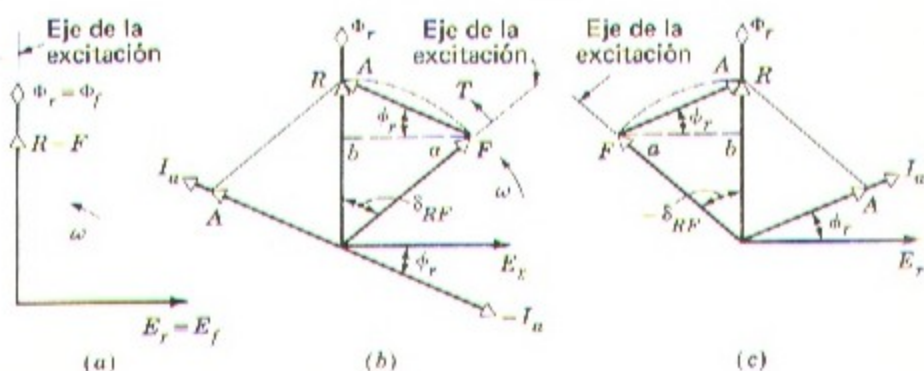


Fig. 6-5. Diagramas vectoriales mostrando los efectos de un par sobre el eje. (a) en vacío; (b) acción motor; (c) acción generador.

Después de un período transitorio se alcanza el régimen permanente a la velocidad de sincronismo cuando δ_{RF} llega a valer lo suficiente para que el par engendrado se equilibre con el par resistivo, como corresponde al punto *m* de la curva par-ángulo de la Fig. 6-6: el diagrama vectorial es ahora el de la Fig. 6-6 *b*. La f.m.m. del campo ya no está en fase con la onda de flujo resultante, y este desfase ha de ser compensado por la reacción del inducido aumentando la intensidad en el mismo hasta el valor necesario para que la potencia eléctrica de entrada se corresponda con la potencia mecánica de salida.

Obsérvese que:

$$F \sin \delta_{RF} = A \cos \phi_r$$

tal como se indica con la línea de trazos *ab*, siendo Φ_r el ángulo eléctrico que forma la intensidad en el estator respecto a la tensión aplicada E_r , ángulo que determina el factor de potencia. Pero $A \cos \phi_r$ es proporcional a la componente activa $I_a \cos \phi_r$ de la potencia en el inducido, y $F \sin \delta_{RF}$ es, según la ecuación 6-1, proporcional al par. Así pues, la componente activa de la potencia eléctrica de entrada es proporcional al par mecánico de salida como evidentemente no podía por menos de suceder.

Si en lugar de cargar el eje con un par resistivo, se impulsa hacia adelante mediante un motor primario, los polos del campo se adelantan a la onda de flujo en un ángulo $-\delta_{RF}$ tal que el par $-T$ opuesto por la máquina en su movimiento se iguale al par motor de la máquina primaria, lo que corresponde al punto *g* de la Fig. 6-6: en el diagrama vectorial de la Fig. 6-5 *c* se aprecian los efectos de la intensidad en el estator y de la reacción del inducido. En estas condiciones la máquina actúa de generador.

Obsérvese en las Figs. 6-5 *b* y 6-5 *c* que para las componentes de F y de A en fase con R se tiene:

$$F \cos \delta_{RF} + A \sin \phi_r = R$$

Es decir, que no solamente la componente activa $I_a \cos \phi_r$ de la intensidad en el estator debe regularse por sí misma para suministrar el par necesario, sino que también debe

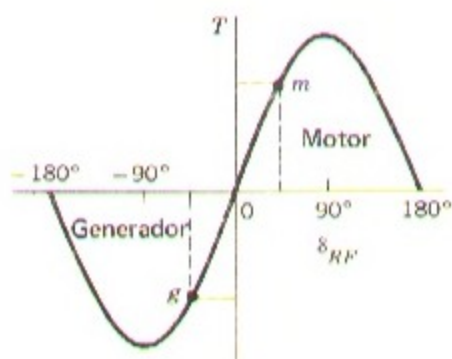


Fig. 6-6. Característica par-ángulo.

ajustarse por sí misma la componente reactiva I_a en ϕ_r de tal forma que la correspondiente componente A en ϕ_r de la f.m.m. de reacción se combine con la componente F con δ_{RF} de la f.m.m. del campo para en conjunto producir la f.m.m. resultante R . Los kVA reactivos pueden en consecuencia regularse variando la excitación.

6-2. LAS MAQUINAS SINCRONAS COMO IMPEDANCIAS

Equiparando los efectos de la reacción del inducido a una reactancia inductiva se obtiene un circuito equivalente, muy útil y sencillo, como representación de una máquina síncrona de rotor cilíndrico funcionando en régimen permanente en un sistema polifásico equilibrado; a objetos de este primer estudio consideraremos una máquina de rotor cilíndrico no saturado. Aun cuando puede parecer que el despreciar la saturación es una simplificación demasiado extremada, luego demostraremos que los resultados a los que de esta forma se llega pueden modificarse para corregir esta circunstancia.

El flujo resultante en el entrehierro de la máquina Φ_r puede considerarse como la suma vectorial de las componentes de flujo debidas a las f.m.m. del inductor y del inducido, representados en la Fig. 6-7 por los vectores Φ_f , Φ_{ar} . En los devanados del inducido estos flujos se manifiestan como f.e.m. inducidas. La tensión resultante E_r puede considerarse como suma vectorial de las tensiones E_f inducida por el campo del rotor, y E_{ar} por el del estator; estas componentes, E_{ar} y E_f son proporcionales a las intensidades en el estator y en el rotor respectivamente, y están retrasadas 90° respecto al flujo que las induce.

El flujo de reacción Φ_{ar} está en fase con la intensidad I_a en el inducido, y en consecuencia la f.e.m. E_{ar} debida a él está retrasada 90° respecto a dicha intensidad.

Tendremos así:

$$E_f - jI_a x_\phi = E_r \quad (6-2)$$

siendo x_ϕ una constante de proporcionalidad que relaciona entre sí los valores eficaces de

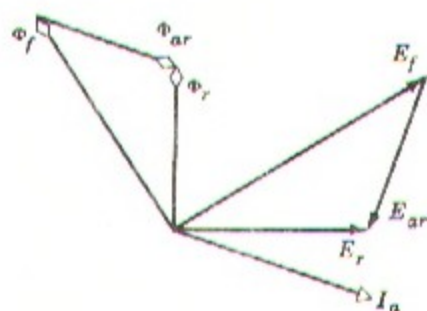


Fig. 6-7. Diagrama vectorial de las componentes del flujo y las correspondientes tensiones.

E_{ar} e I_a . La ecuación 6-2 es aplicable también al circuito de la Fig. 6-8 a en su parte a la izquierda de E_r , por lo que el efecto de la reacción del inducido equivale sencillamente al de una reactancia inductiva x_ϕ , que justifica la componente de tensión inducida por la onda fundamental del flujo de reacción. A esta reactancia se le denomina *reactancia principal* o *de reacción*.

La tensión E_r difiere de la tensión en bornes en la cuantía correspondiente a la caída de tensión en la resistencia del inducido y en la reactancia de dispersión del estator tal como puede verse en la Fig. 6-8 a en la parte de la derecha de E_r , en donde r_a es la resistencia del inducido, x_ϕ la reactancia de dispersión y V_t la tensión en bornes, valores todos ellos por fase (entre fase y neutro en una máquina conectada en Y). La reactancia de dispersión da cuenta de las tensiones inducidas por las componentes del flujo no incluidas en E_r . En estos flujos se incluyen no sólo los de dispersión en las ranuras y dientes del inducido sino también los frontales o de cabeza de bobina y los armónicos nacidos de la divergencia entre la forma real de onda y una senoide, divergencia que siempre existe en la práctica.

Por último, el circuito equivalente de una máquina de rotor cilíndrico no saturado sometida a un sistema polifásico equilibrado queda reducido al expuesto en la Fig. 6-8 b, en el que la máquina está representada (por fase) por su tensión E_f creada por el campo inductor, en serie con una impedancia única, que recibe el nombre de *impedancia total* o *síncrona* y su correspondiente reactancia x_s el de *reactancia total* o *síncrona*, que en

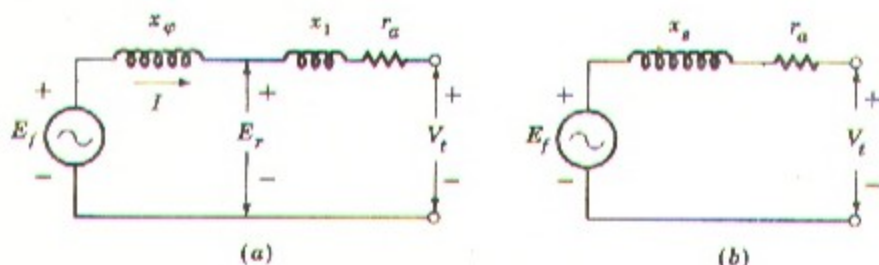


Fig. 6-8. Circuitos equivalentes.

función de las reactancias principal y de dispersión vale:

$$x_s = x_\varphi + x_l \quad (6-3)$$

La reactancia síncrona x_s toma en consideración todos los flujos creados por las corrientes polifásicas equilibradas del estator, mientras que la tensión E_f toma en consideración el flujo creado por la corriente del rotor. En una máquina de rotor cilíndrico no saturado trabajando a frecuencia constante, la reactancia síncrona es también constante, y la tensión inducida por el campo inductor es proporcional a la intensidad que circula por el rotor e igual a la tensión que existiría en bornes del estator si éste estuviera en circuito abierto y tanto la velocidad como la corriente de excitación se mantuvieran constantes.

Es conveniente tener una idea, siquiera aproximada, del orden de magnitud que alcanzan estas impedancias componentes. En máquinas de potencia nominal de hasta unos pocos centenares de kVA, la caída de tensión en la resistencia del estator no llega en general al 1 % de la tensión nominal cuando la intensidad es igual a la nominal de la máquina, es decir que la resistencia del inducido es en general menor que 0,01 unidades relativas cuando se toman como base los datos de la máquina (el sistema de unidades relativas se ha descrito en el apartado 1-10 del capítulo 1). La reactancia de dispersión está normalmente comprendida entre 0,1 y 0,2 unidades relativas, y la reactancia síncrona no difiere mucho de una unidad relativa. En general, la resistencia relativa del inducido aumenta y la reactancia síncrona relativa disminuye al decrecer el tamaño de la máquina. En máquinas pequeñas como las utilizadas en los laboratorios con fines pedagógicos, la resistencia del inducido puede ser de alrededor de 0,05 unidades relativas y su reactancia síncrona de unas 0,5 unidades, también relativas. Salvo en las máquinas muy pequeñas, generalmente se desprecia la resistencia del estator excepto en lo que concierne a sus efectos sobre las pérdidas y el calentamiento.

6-3. CARACTERISTICAS EN CIRCUITO ABIERTO Y EN CORTOCIRCUITO

Para la determinación de las constantes de una máquina síncrona incluyendo los efectos de la saturación, se emplean dos grupos básicos de curvas características, que estudiaremos a continuación. Excepción hecha de algunos reparos que se podrían poner al grado de validez atribuible a ciertos supuestos, este estudio puede aplicarse tanto a las máquinas de rotor cilíndrico como a las de polos salientes.

a. Característica en circuito abierto y pérdidas en vacío

La característica en circuito abierto de una máquina síncrona, al igual que la curva de magnetización de una de continua, es una curva que expresa la tensión en bornes del inducido en circuito abierto en función del campo de excitación, cuando la máquina gira a la velocidad de sincronismo, como puede verse en la curva *OOC* de la Fig. 6-9 a. Frecuentemente esta curva se traza y señala en unidades relativas, como en la Fig. 6-9 b, en la que se ha tomado como base o unidad de tensión el valor nominal de la misma, y

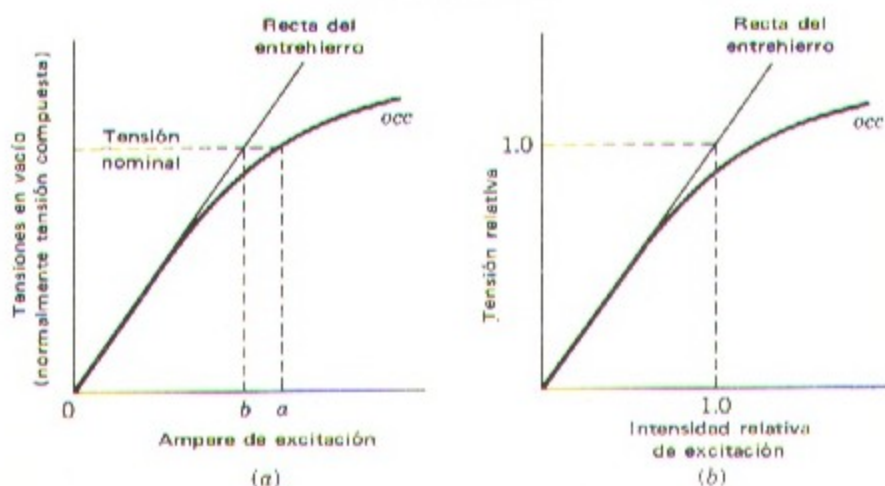


Fig. 6-9. Característica en vacío (a) en función de las tensiones y de la corriente de excitación; (b) en valores relativos.

como unidad de corriente de excitación la que corresponde a dicha tensión nominal sobre la recta del entrehierro. Esencialmente, la característica en circuito abierto representa la relación entre la componente fundamental del flujo en el entrehierro y la f.m.m. en el circuito magnético cuando ésta procede únicamente del devanado inductor. Cuando se trata de una máquina real su característica en circuito abierto se determina experimentalmente moviéndola mecánicamente a la velocidad de sincronismo manteniendo abierto el circuito inducido y midiendo la tensión en bornes correspondiente a una serie de valores de la corriente de excitación. Midiendo la potencia mecánica necesaria para mantener la velocidad síncrona durante la prueba, se podrán conocer las pérdidas totales en vacío que comprenden las pérdidas por rozamiento y por resistencia del aire, así como las pérdidas en el núcleo correspondientes al flujo de la máquina sin carga. Las pérdidas por rozamiento y por resistencia del aire a la velocidad de sincronismo son constantes, mientras que las



Fig. 6-10. Curva de pérdidas en el hierro en vacío.

pérdidas en el núcleo, con circuito abierto, son función del flujo que a su vez es proporcional a la tensión de bornes en vacío.

La potencia necesaria para arrastrar la máquina, sin excitar, a la velocidad de sincronismo corresponde a las pérdidas mecánicas por rozamientos y resistencia del aire; cuando se va excitando el inductor, la potencia necesaria aumentará por corresponder no sólo a las pérdidas citadas sino también a las del núcleo; por consiguiente podrá conocerse el valor de estas últimas por simple diferencia entre los valores de la potencia absorbida en uno u otro caso. La curva de la Fig. 6-10 da las pérdidas en el núcleo en circuito abierto en función de la tensión en bornes, también en circuito abierto.

b. Característica en cortocircuito y pérdidas en carga

Si en una máquina síncrona actuando como generador a la velocidad de sincronismo se le cortocircuitan los bornes del estator mediante unos amperímetros adecuados como se ve en la Fig. 6-11 *a* y se va aumentando gradualmente la corriente de excitación hasta que la intensidad en el inducido alcance un valor máximo, dentro de ser seguro (quizás hasta el doble de su valor nominal) podrán irse obteniendo datos que permitirán relacionar la intensidad del estator en cortocircuito con la intensidad de excitación del rotor: esta relación constituirá la *característica en cortocircuito*. En la figura 6-11 *b* están representadas las características en circuito abierto *OOC* y en cortocircuito *SCC*.

La relación vectorial existente entre la tensión inducida por el campo inductor E_f y la intensidad I_a en el inducido cerrado en cortocircuito polifásico es:

$$E_f = I_a(r_a + jx_s), \quad (6-4)$$

pudiéndose ver en la Fig. 6-12 el correspondiente diagrama vectorial. Siendo la resistencia mucho menor que la reactancia síncrona, la corriente inducida queda retrasada casi 90

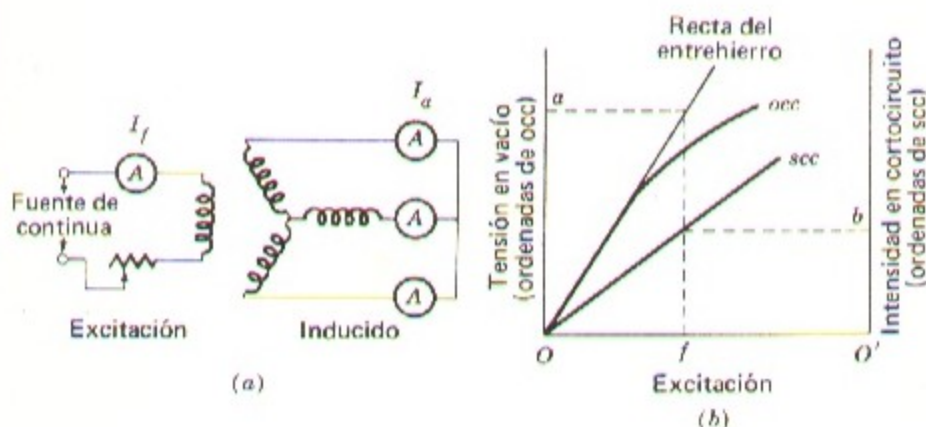


Fig. 6-11. (a) Conexión para la prueba en cortocircuito. (b) Características en vacío y en cortocircuito.

grados respecto a la tensión inducida por el campo de excitación. En consecuencia, la onda de f.m.m. de reacción del inducido está casi alineada con el eje del campo inductor y en oposición a su f.m.m., como indican los vectores A y F que representan la onda de la reacción del inducido y la f.m.m. del inductor respectivamente.

La f.m.m. resultante da origen a la onda de flujo resultante en el entrehierro, la que a su vez genera la tensión E_r igual a la consumida en la resistencia r_a del estator y en la reactancia de dispersión x_l , lo que puede expresarse con la siguiente ecuación:

$$E_r = I_a(r_a + jx_l) \quad (6-5)$$

En la mayor parte de las máquinas síncronas la resistencia del inducido es despreciable, y la reactancia de dispersión está comprendida entre 0,1 y 0,2 unidades relativas, pudiéndose tomar 0,15 como valor representativo, es decir que con la intensidad nominal en el inducido, la caída de tensión en la reactancia de dispersión es de aproximadamente 0,15 unidades relativas. Por tanto, de la ecuación 6-5 se deduce que la tensión inducida, estando el estator en cortocircuito y circulando por él la intensidad nominal, es de 0,15 unidades relativas, o lo que es lo mismo, el flujo resultante en el entrehierro no es más que el 0,15 de su valor a tensión normal. Consecuencia de ello es que la máquina trabaja no saturada, y por tanto la intensidad en cortocircuito es directamente proporcional a la corriente de excitación: esto es válido para corrientes comprendidas entre cero y un valor bastante por encima del nominal.

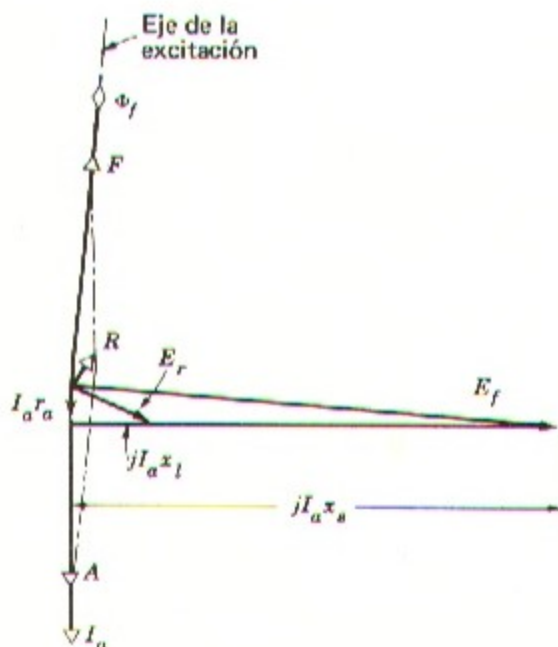


Fig. 6-12. Diagrama vectorial en cortocircuito.

La reactancia síncrona no saturada puede deducirse de los datos en vacío y en cortocircuito. Para cada valor del campo de excitación, tal como $O'f$ de la Fig. 6-11 *b*, la intensidad en cortocircuito es $O'b$ y la tensión inducida Oa tomada sobre la recta del entrehierro: obsérvese que puede tomarse esta tensión sobre la recta del entrehierro por estar trabajando la máquina en cortocircuito en condiciones no saturadas.

Si la tensión por fase que corresponde a Oa es $E_{f(ag)}$ y la corriente por fase correspondiente a $O'b$ es $I_{a(sc)}$, despreciando la resistencia del devanado podremos deducir de la ecuación 6-4 el valor de la reactancia síncrona no saturada $x_{s(ag)}$

$$x_{s(ag)} = \frac{E_{f(ag)}}{I_{a(sc)}} \quad (6-6)$$

indicando el subíndice (*ag*) que las condiciones son las de la recta del entrehierro.

Si $E_{f(ag)}$ e $I_{a(sc)}$ están expresadas en unidades relativas, también lo estará la reactancia y si lo están en Volt y amperes por fase respectivamente, la reactancia lo estará en ohm por fase.

Trabajando en las proximidades de la tensión en bornes nominal, a veces se considera que la máquina equivale a otra, no saturada, cuya curva de magnetización es una recta trazada desde el origen hasta el punto de tensión nominal de la característica en circuito abierto, es decir, la recta de trazos Op de la Fig. 6-13.

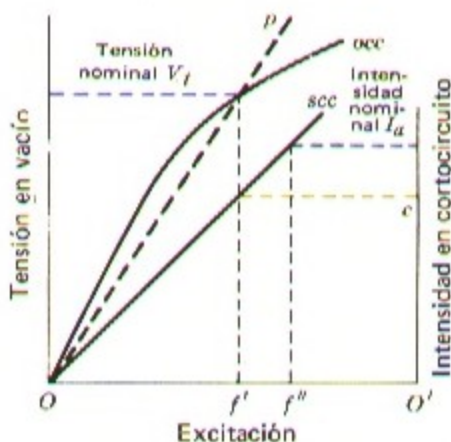


Fig. 6-13. Características en vacío y en cortocircuito.

De acuerdo con esta aproximación, el valor de la reactancia síncrona saturada, a la tensión nominal V_T es:

$$x_s = \frac{V_T}{I_{a(sc)}} \quad (6-7)$$

siendo $I_{a(sc)}$ la intensidad en el inducido $O'c$ tomada de la característica en cortocircuito para la corriente de excitación Oj' correspondiente a la tensión V_T en la característica en circuito abierto, como se muestra en la Fig. 6-13; con esta forma de considerar los efectos de la saturación se obtienen resultados generalmente admisibles si no se requiere una gran precisión.

Denominaremos *relación de cortocircuito* a la relación entre las corrientes de excitación necesarias para obtener la tensión nominal en circuito abierto y la intensidad nominal en cortocircuito, es decir que haciendo referencia a la Fig. 6-13, la relación de cortocircuito será

$$\text{Rel. de cortocircuito} = \frac{Oj'}{Oj''} \quad (6-8)$$

Puede demostrarse que la relación de cortocircuito es la recíproca del valor relativo de la reactancia síncrona saturada dada por la ecuación 6-7.

Ejemplo 6-2

De las características en circuito abierto y en cortocircuito de una máquina síncrona trifásica de 45 kVA, 220 V (entre fases) con seis polos, 50 Hz y conexión Y se han extraído los siguientes datos:

De la característica en circuito abierto:

Tensión compuesta (entre fases) = 220 V

Corriente de excitación = 2,84 A

De la característica en cortocircuito:

Intensidad en el inducido, A	118	152
Corriente de excitación, A	2,20	2,84

De la recta del entrehierro:

Corriente de excitación = 2,20 A

Tensión compuesta (entre fases) = 202 V

Determinense los valores de las reactancias síncronas no saturada y saturada a la tensión nominal de acuerdo con la ecuación 6-7, así como la relación de cortocircuito.

Exprésese la reactancia síncrona en ohm por fase y en unidades relativas, tomando como base los valores nominales de la máquina.

SOLUCION

Con la corriente de excitación de 2,20 A, la tensión simple (entre fase y neutro) en la recta del entrehierro es:

$$E_{f(\text{ag})} = \frac{202}{\sqrt{3}} = 116,7 \text{ V}$$

y para la misma corriente de excitación, la intensidad en el inducido en cortocircuito es:

$$I_{a(\text{sc})} = 118 \text{ A}$$

De la ecuación 6-6 se deduce:

$$x_{s(\text{ag})} = \frac{116,7}{118} = 0,987 \text{ ohm por fase}$$

Obsérvese que la intensidad nominal en el inducido es de $45000/\sqrt{3} (220) = 118 \text{ A}$ y por tanto $I_{a(\text{sc})}$ es igual a una unidad relativa. La correspondiente tensión en la recta del entrehierro es:

$$E_{f(\text{ag})} = \frac{202}{220} = 0,92 \text{ unidades relativas}$$

De las características en circuito abierto y en cortocircuito, junto con la ecuación 6-7, tendremos

$$x_s = \frac{220}{\sqrt{3} (152)} = 0,836 \text{ ohm por fase}$$

En unidades relativas $I'_{a(\text{sc})} = 152/118 = 1,29$, y de la ecuación 6-7:

$$x_s = \frac{1,00}{1,29} = 0,775 \text{ unidades relativas}$$

La relación de cortocircuito la deduciremos de la ecuación 6-8,

$$\text{Relación de cortocircuito} = \frac{2,84}{2,20} = 1,29$$

Si se mide la potencia mecánica requerida por la máquina mientras se está efectuando la prueba de cortocircuito, podrá tenerse información sobre las pérdidas debidas a la corriente inducida. En efecto, la potencia mecánica necesaria para mover la máquina síncrona durante la prueba es igual a la suma de las pérdidas por rozamiento y por resistencia del aire más las debidas a dicha corriente en el inducido; por consiguiente podrán conocerse estas últimas simplemente restando de la potencia total la absorbida por las otras pérdidas citadas.

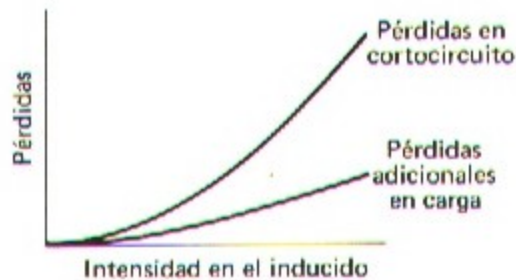


Fig. 6-14. Curvas de pérdidas en cortocircuito debidas a la corriente de carga y pérdidas adicionales.

La Fig. 6-14 representa la curva de pérdidas en cortocircuito debidas a la carga en función de la corriente inducida, curva que como puede verse es aproximadamente parabólica.

Estas pérdidas debidas a la carga comprenden las pérdidas en el cobre del devanado inducido, las pérdidas locales en el núcleo debidas al flujo de reacción disperso, y las pérdidas en el mismo núcleo debidas al flujo resultante; estas últimas son realmente muy pequeñas. Las pérdidas con corriente continua en la resistencia del devanado pueden determinarse por cálculo midiendo previamente el valor de dicha resistencia y corrigiéndolo, si es necesario, a la temperatura del devanado durante la prueba. Para los conductores de cobre:

$$\frac{r_T}{r_t} = \frac{234,5 + T}{234,5 + t} \quad (6-9)$$

siendo r_T y r_t las resistencias a T y t grados centígrados respectivamente. Si de las pérdidas totales debidas a la carga se restan las que corresponderían con corriente continua en las resistencias, el resto es debido al efecto skin y corrientes parásitas en el núcleo originadas por el flujo disperso. (Las pérdidas en el núcleo motivadas por el flujo resultante en la prueba de cortocircuito normalmente se desprecian). Esta diferencia entre las pérdidas en cortocircuito y las correspondientes con corriente continua es debida a la corriente alterna en el inducido, y no es más que la pérdida adicional descrita en el apartado 4-8 que en general se admite que tiene el mismo valor en condiciones normales

de carga que en cortocircuito, siendo función de la corriente en el inducido como se desprende de la curva de la Fig. 6-14.

Al igual que en cualquier dispositivo de corriente alterna, la resistencia efectiva del devanado inducido es igual a la pérdida de potencia atribuible a la intensidad de carga dividida por el cuadrado de dicha intensidad. Admitiendo que la pérdida adicional es función únicamente de la corriente en el inducido, la resistencia efectiva de éste $r_{a(ef)}$ puede deducirse de las pérdidas en cortocircuito; esto es:

$$r_{a(ef)} = \frac{\text{Pérdidas en cortocircuito}}{(\text{intensidad en cortocircuito})^2} \quad (6-10)$$

Si tanto las pérdidas como la intensidad se expresan en unidades relativas, la resistencia efectiva vendrá dada también en unidades relativas, y si se expresan en watt y ampere por fase respectivamente la resistencia efectiva quedará expresada en ohm por fase. Por lo general es suficientemente aproximado en la práctica hallar el valor de $r_{a(ef)}$ correspondiente a la intensidad nominal y considerar este valor como constante.

Ejemplo 6-3

En la máquina síncrona trifásica de 45 kVA con conexión Y del ejemplo 6-2 las pérdidas totales (en las tres fases) debidas a la carga en cortocircuito son de 1,80 kW con la intensidad nominal (118 A) y siendo la temperatura de 25° C. La resistencia en continua del devanado inducido a la temperatura citada es de 0,0335 ohm por fase.

Calcúlese en unidades relativas y en ohm por fase la resistencia efectiva de dicho devanado a 25° C.

SOLUCION

Las pérdidas debidas a la carga expresadas en unidades relativas son:

$$\frac{1,80}{45} = 0,040$$

a $I_a = 1,00$ unidades relativas.

Por consiguiente,

$$r_{a(ef)} = \frac{0,040}{1,00^2} = 0,040 \text{ unidades relativas}$$

Las pérdidas por fase son:

$$\frac{1800}{3} \text{ watt por fase}$$

y en consecuencia, la resistencia efectiva será:

$$r_{a(ef)} = \frac{1800}{3 \times 118^2} = 0,043 \text{ ohm por fase}$$

La relación entre la resistencia en alterna y en continua es:

$$\frac{r_{a(ef)}}{r_{a(cc)}} = \frac{0,043}{0,0335} = 1,28$$

Tratándose de una máquina pequeña, la resistencia relativa es proporcionalmente alta; en máquinas de potencia nominal de unos pocos centenares de kVA dicha resistencia no supera corrientemente las 0,01 unidades relativas.

6-4. CARACTERISTICAS EN REGIMEN PERMANENTE

Las principales características de funcionamiento en régimen permanente son las que relacionan entre sí la tensión en bornes, la corriente de excitación, la corriente en el inducido, el factor de potencia y el rendimiento. A continuación se irá presentando una selección de las curvas de mayor importancia en la aplicación práctica de las máquinas: cada una de ellas puede determinarse por los métodos que se exponen en el presente capítulo.

Consideremos un generador síncrono suministrando potencia de frecuencia constante a una carga receptora cuyo factor de potencia sea asimismo constante. La curva que indica la corriente de excitación necesaria para mantener la tensión nominal en bornes al variar la carga con factor de potencia constante se denomina *característica de regulación*; en la Fig. 6-15 pueden verse tres de estas curvas correspondientes a distintos factores de potencia.

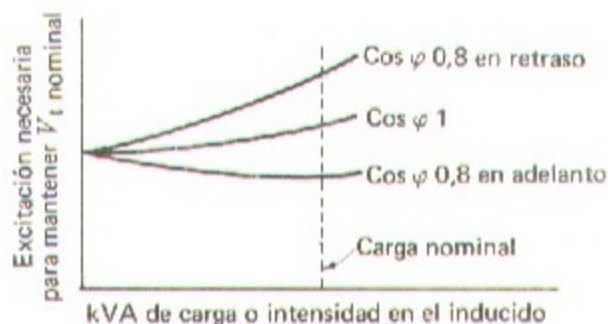


Fig. 6-15. Características de regulación.

Si se mantiene constante la corriente de excitación mientras varía la carga, la tensión en bornes variará también. En la Fig. 6-16 pueden verse distintas curvas que dan la tensión en bornes en función de la intensidad en el inducido, siendo el factor de potencia constante pero distinto en cada una de ellas: estas curvas constituyen la *característica de tensión* o *característica externa*. Cada curva está trazada con una corriente de excitación distinta, que en cada caso es la necesaria para tener la tensión nominal en bornes cuando la corriente en el inducido es la correspondiente a la carga nominal deducida de la característica de regulación de la Fig. 6-15.

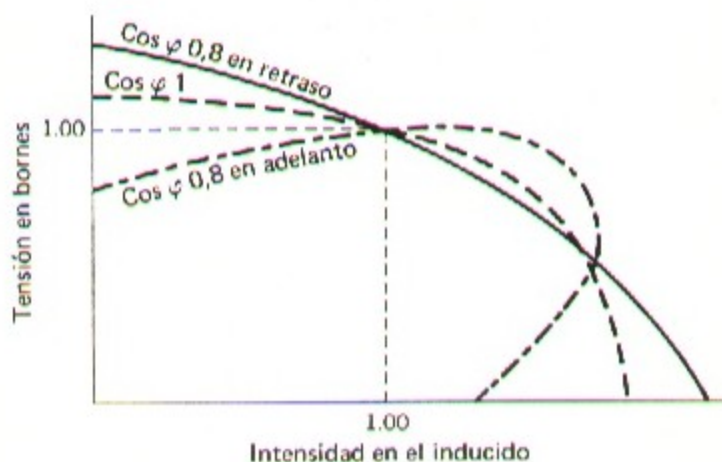


Fig. 6-16. Característica volt-ampere de un generador con excitación constante (característica de tensión o característica externa).

La potencia nominal de los generadores síncronos indica en general la carga máxima en kVA a una determinada tensión y con un factor de potencia dado (normalmente de 0,80, 0,85 ó 0,90 en retraso) que puede soportar continuamente sin sufrir recalentamiento. La potencia activa de salida queda limitada por la potencia del motor primario, y en general no difiere mucho de los kVA nominales. En virtud de los sistemas de regulación existentes, la tensión en bornes de la máquina se mantiene a un valor que difiere como máximo $\pm 5\%$ del valor nominal. Si se fija la carga activa y la tensión, la potencia reactiva de que se podrá disponer está limitada por el calentamiento de los devanados inducido e inductor: en la Fig. 6-17 está representada una serie de curvas de potencia reactiva disponible correspondientes a un gran turbogenerador; de ellas se puede deducir la máxima carga reactiva correspondiente a distintas cargas, trabajando siempre a la tensión nominal. En la región comprendida entre el factor de potencia unidad y el nominal (0,85 en la Fig. 6-17), la limitación viene dada por el calentamiento del inducido, mientras que con menores factores de potencia es el calentamiento del inductor el que constituye dicha limitación. Este grupo de curvas es de gran utilidad para el planteamiento y explotación de sistemas de los que el generador forma parte.

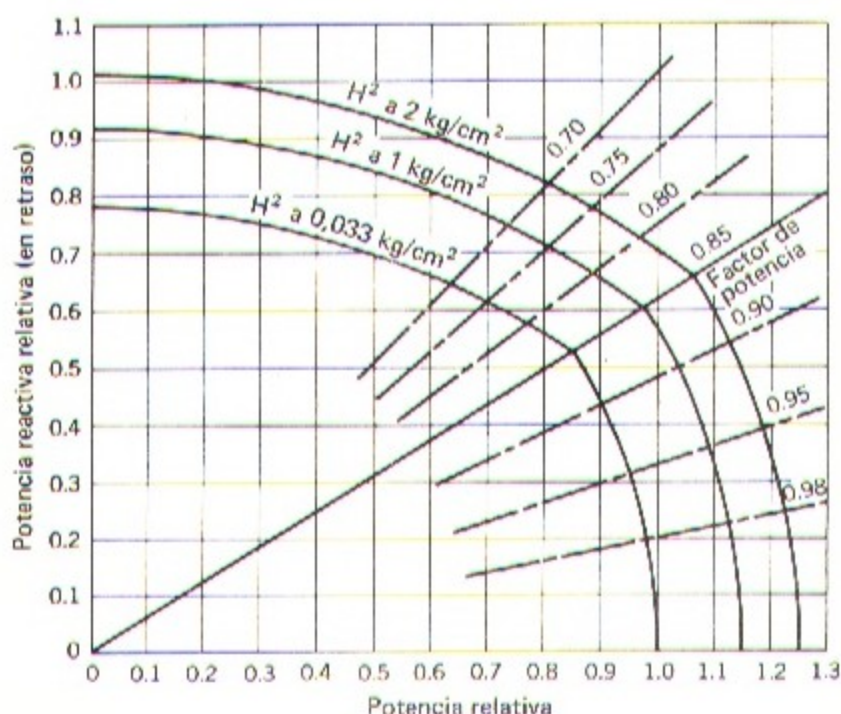
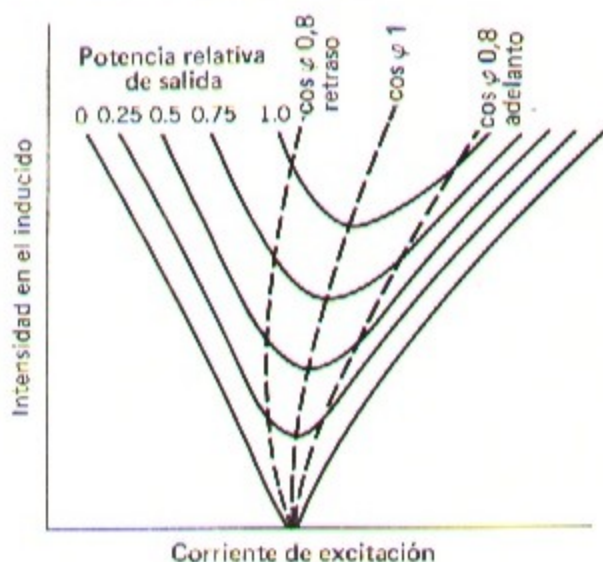


Fig. 6-17. Potencia reactiva disponible en un turbogenerador refrigerado con hidrógeno: factor de potencia 0,85. Como base de kVA se han tomado los nominales con presión de hidrógeno de $0,04 \text{ kg/cm}^2$

En la propia figura 6-17 puede verse la influencia de la presión del hidrógeno sobre la carga que puede soportar la máquina.

Ajustando la excitación de un motor síncrono puede regularse el factor de potencia a que trabaja, y por consiguiente la intensidad en el estator. Se pueden trazar curvas que relacionen la intensidad en el estator con la del rotor manteniéndose constantes la tensión en bornes y la carga en el eje: las curvas así trazadas reciben el nombre de *curvas en V* debido a su peculiar forma, como puede verse en la Fig. 6-18. Para una potencia de salida dada, la mínima intensidad en el inducido se dará evidentemente cuando el factor de potencia sea igual a la unidad, y aumentará cuando disminuya éste; las líneas de trazos corresponden a factores de potencia constantes, y no son más que las curvas características de regulación que muestran cómo ha de variar la corriente de excitación al variar la carga para mantener constante el factor de potencia. Los puntos situados a la derecha de la curva de factor de potencia unidad corresponden a funcionamiento con sobreexcitación y corriente de entrada adelantada, mientras que los situados a la izquierda corresponden a funcionamiento subexcitado y corriente de entrada retrasada. Las curvas características de regulación de un motor síncrono son muy similares a las de un generador representadas en la Fig. 6-15. (Obsérvese el cambio de ejes coordinados al comparar las Figs. 6-15 y 6-18). De hecho, si no fuera por los efectos de la resistencia del devanado inducido,

Fig. 6-18. Curvas V de un motor síncrono.

efectos que por otra parte son muy pequeños, las características de regulación de motor y generador serían idénticas salvo que las curvas con factor de potencia en adelanto o en retraso estarían invertidas.

Al igual que en todas las demás máquinas electromagnéticas, las pérdidas en las síncronas comprenden las que tienen lugar en los devanados $R I^2$, en el núcleo y las mecánicas. El rendimiento se calcula convencionalmente siguiendo los criterios expuestos en las normas aplicables; en el apartado 4-8 se han descrito los principios generales en que se basan las normas de la ANSI.

Con el ejemplo siguiente se pretende mostrar la aplicación práctica de tales normas al caso de máquinas síncronas.

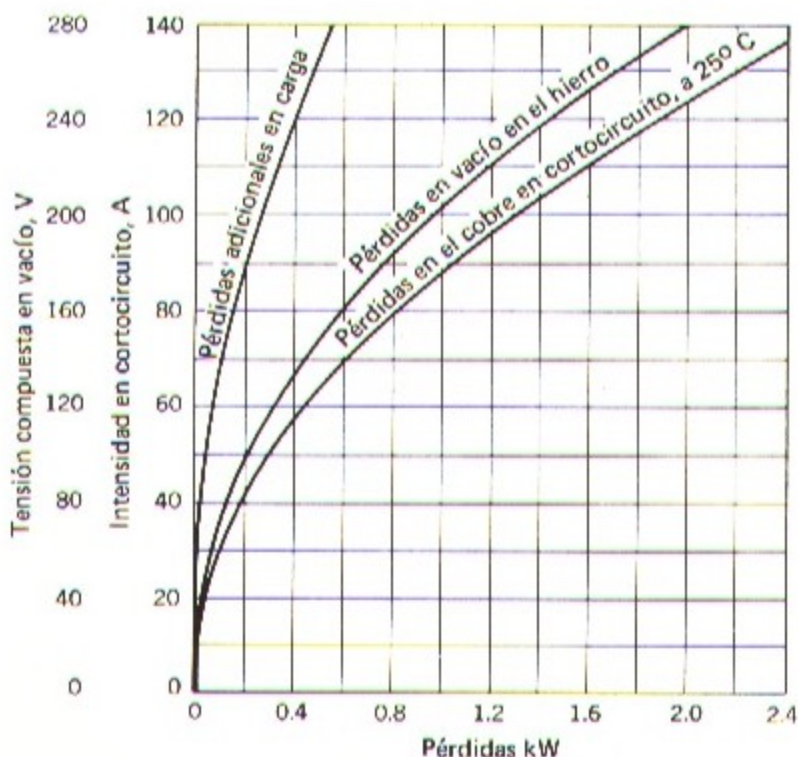
Ejemplo 6-4

En la Fig. 6-19 están representadas las pérdidas correspondientes a la máquina síncrona de 45 kVA objeto de los problemas 6-2 y 6-3. Calcúlese el rendimiento cuando la máquina marcha como motor síncrono con 230 V de tensión en bornes siendo de 45 kW la potencia de entrada en su inducido con factor de potencia 0,8 en adelanto. La corriente de excitación, medida en una prueba en carga en las condiciones citadas, es de $I_f = 5,50$ A.

SOLUCION

En las condiciones de trabajo citadas, la corriente en el estator es:

$$I_a = \frac{45000}{\sqrt{3} (230) (0,80)} = 141 \text{ A}$$



Pérdidas por rozamientos y resistencia del aire = 0,91 kW
 Resistencia del inducido con corriente continua, a 25° C = 0,0335 ohm por fase
 Resistencia del devanado de excitación a 25° C = 29,8 ohm

Fig. 6-19. Pérdidas en el motor síncrono trifásico de 45 kVA, 220 V, 60 Hz, 6 polos conectado en Y del ejemplo 6-4.

Las pérdidas en el cobre deben calcularse teniendo en cuenta la resistencia de los devanados a 75° C. Valiéndonos de la ecuación 6-9 corregiremos las resistencias dadas que pasarán a ser:

Resistencia del inductor r_f a 75° C = 35,5 ohm.

Resistencia del inducido r_a a 75° C = 0,0399 ohm por fase

Las pérdidas en el cobre del rotor son:

$$I_{r_f}^2 = (5,50)^2 (35,5) = 1070 \text{ W} = 1,07 \text{ kW}$$

De acuerdo con las normas de la ANSI, no se cargan a la máquina las pérdidas en el reostato de campo y en la excitatriz.

Las pérdidas en el cobre del estator son:

$$3I_a^2 r_a = (3)(141)^2 (0,0399) = 2380 \text{ W} = 2,38 \text{ kW}$$

De la Fig. 6-19 se deduce que siendo $I_a = 141 \text{ A}$, las pérdidas parásitas debidas a la carga son de 0,56 kW a las que de acuerdo con las normas citadas no se aplica ninguna corrección por temperatura.

Las pérdidas en el núcleo se leen en la curva de pérdidas en circuito abierto para una tensión igual a la tensión interna en la resistencia de la máquina. Las pérdidas parásitas debidas a la carga comprenden las motivadas por el flujo disperso del inducido. Esta tensión interna, en el caso de acción motor es un vector.

$$\begin{aligned} V_t - I_a r_a &= \frac{230}{\sqrt{3}} - 141 (0,80 - j0,60) (0,0399) \\ &= 128,4 - j 3,4 \end{aligned}$$

Su valor es pues de 128,4 V por fase (tensión simple) o 222 V entre bornes (tensión compuesta).

Las pérdidas en el núcleo en circuito abierto, deducidas de la Fig. 6-19 son 1,20 kW, y las pérdidas mecánicas por rozamientos y resistencia del aire son de 0,91 kW. Conocemos ya el valor de cada una de las pérdidas parciales de donde podremos determinar:

$$\text{Pérdidas totales} = 1,07 + 2,38 + 0,56 + 1,20 + 0,91 = 6,12 \text{ kW.}$$

La potencia de entrada es la suma de las potencias en alterna en el estator y en continua en el rotor, o sea:

$$\text{Potencia de entrada} = 46,07 \text{ kW.}$$

De donde:

$$\text{Rendimiento} = 1 - \frac{\text{Pérdidas}}{\text{Entrada}} = 1 - \frac{6,12}{46,07} = 0,867$$

6-5. CARACTERISTICA POTENCIA-ANGULO EN REGIMEN PERMANENTE

La máxima sobrecarga instantánea que puede soportar una máquina síncrona está determinada por el par resistente máximo que se le puede aplicar sin pérdida de sincronismo. En el presente apartado se estudiarán los límites de potencia de sistemas simples al irles aplicando gradualmente cargas crecientes: se incluirán también los efectos de impedancias exteriores que hasta ahora se habían despreciado.

Puesto que una máquina puede representarse como una impedancia única, el estudio de los límites de potencia se reduce simplemente a un caso particular del problema más general de las limitaciones existentes en el paso de potencia a través de una impedancia inductiva, que puede tratarse igualmente de la impedancia de una línea y un grupo de transformadores como de la impedancia síncrona de una máquina.

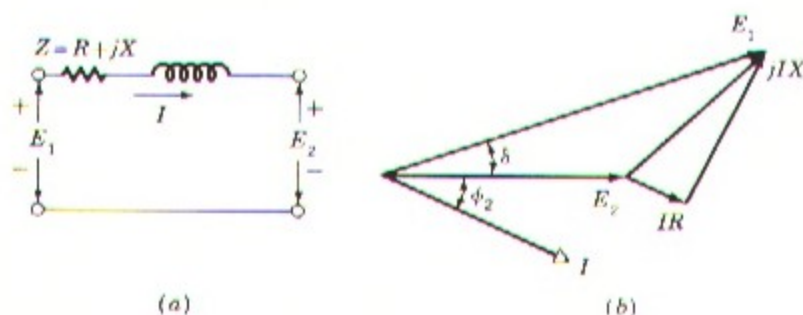


Fig. 6-20. (a) Impedancia entre dos tensiones; (b) diagrama vectorial.

Consideremos el circuito sencillo de la Fig. 6-20 a en el que figuran dos tensiones alternas E_1 y E_2 conectadas por medio de una impedancia Z a través de la cual circula la intensidad I . En la Fig. 6-20 b puede verse el diagrama vectorial del sistema. La potencia P_2 suministrada a los bornes de la carga E_2 a través de la impedancia es:

$$P_2 = E_2 I \cos \phi_2 \quad (6-11)$$

siendo ϕ_2 el ángulo de desfase de I respecto a E_2 . Vectorialmente, la corriente es:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{Z} \quad (6-12)$$

Expresando los vectores de tensión y de impedancia en forma polar,

$$I = \frac{E_1 \angle \delta - E_2 \angle 0^\circ}{Z \angle \phi_z} = \frac{E_1}{Z} \angle \delta - \phi_z - \frac{E_2}{Z} \angle -\phi_z \quad (6-13)$$

en la que E_1 y E_2 son las magnitudes de las correspondientes tensiones; δ es el ángulo de fase en que E_1 adelanta a E_2 ; Z es la magnitud de la impedancia, y ϕ_z su ángulo en forma polar. La parte real de la ecuación vectorial 6-13 es la componente de I en fase con E_2 , de donde:

$$I \cos \phi_2 = \frac{E_1}{Z} \cos(\delta - \phi_z) - \frac{E_2}{Z} \cos(-\phi_z) \quad (6-14)$$

Substituyendo esta última ecuación en la 6-11, teniendo en cuenta que:

$$\cos(-\phi_z) = \cos \phi_z = R/Z$$

tendremos

$$P_2 = \frac{E_1 E_2}{Z} \cos(\delta - \phi_z) - \frac{E_2^2 R}{Z^2} \quad (6-15)$$

$$P_2 = \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta + \alpha_z) - \frac{E_2^2 R}{Z^2} \quad (6-16)$$

siendo:

$$\alpha_z = 90^\circ - \phi_z = \operatorname{tg}^{-1} \frac{R}{X} \quad (6-17)$$

que en general es un ángulo muy pequeño.

En forma análoga, la potencia P_1 en los terminales E_1 de la máquina puede expresarse en la siguiente forma:

$$P_1 = \frac{E_1 E_2}{Z} \sin(\delta - \alpha_z) + \frac{E_1^2 R}{Z^2} \quad (6-18)$$

Si, como es muy frecuente, puede despreciarse la resistencia:

$$P_1 = P_2 = \frac{E_1 E_2}{X} \sin \delta \quad (6-19)$$

Si además de ser despreciable la resistencia las tensiones se mantienen constantes, la potencia máxima será:

$$P_{1(\max)} = P_{2(\max)} = \frac{E_1 E_2}{X} \quad (6-20)$$

lo que sucede cuando $\delta = 90^\circ$

Si se compara la ecuación 6-19 con la 6-1 que nos daba el par en función de la interacción entre las ondas de f.m.m. y de flujo resultante, podrá observarse que ambas tienen la misma forma. Esto no es debido a una coincidencia casual; recordemos que el par y la potencia son linealmente proporcionales entre sí cuando la velocidad es uniforme, como es el caso que estudiamos, de forma que lo que realmente sucede es que al aplicar la ecuación 6-1 específicamente a una máquina ideal de rotor cilíndrico y expresarla en función de los elementos del circuito se convierte en la 6-19. Repasando mentalmente los antecedentes de cada una de dichas expresiones se podrá ver que ambas proceden de las mismas consideraciones fundamentales.

Ejemplo 6-5

Un motor síncrono trifásico con conexión Y, de 2000 c.v., 2300 V, 30 polos, 50 Hz y factor de potencia igual a la unidad tiene una reactancia síncrona de 1,95 ohm por fase. Para el objeto de este problema despreciaremos las pérdidas.

- Calcúlese el par máximo en Nw-m que este motor puede desarrollar si está alimentado por una línea de tensión y frecuencia constantes, llamada corrientemente una *red de potencia infinita*: la excitación se mantiene constante al valor necesario para que con la carga nominal el factor de potencia sea 1.
- Supóngase que el motor en lugar de alimentarse de una red de potencia infinita como en el párrafo *a* lo hace de un turbogenerador trifásico con conexión Y de 1750 kVA, 2300 V, 2 polos y 300 r.p.m. siendo su reactancia síncrona de 2,65 ohm por fase. El generador gira a su velocidad nominal, y las excitaciones del generador y del motor se ajustan de forma que éste trabaje a plena carga con factor de potencia igual a la unidad y tensión en bornes igual al valor nominal. La excitación de ambas máquinas se mantiene constante al valor así determinado, y la carga mecánica en el eje del motor síncrono se va aumentando gradualmente. Calcúlese el par motor máximo en estas nuevas condiciones, así como la tensión en bornes cuando existe dicho par.

SOLUCION

Aun cuando sin lugar a dudas la máquina citada es del tipo de polos salientes, resolveremos el problema como si se tratase de un rotor cilíndrico: esta solución prescinde del par de reluctancia. La máquina real podrá desarrollar un par máximo algo superior al que calcularemos.

a. El circuito equivalente es el de la Fig. 6-21 *a* y el diagrama vectorial a plena carga el de la Fig. 6-21 *b*, en el que E_{fm} es la tensión inducida en el motor por el campo de excitación y x_{sm} su reactancia síncrona.

De los datos nominales del motor, despreciando las pérdidas, tendremos:

$$\text{kVA nominales} = 2000 \times 0,746 = 1492 \text{ kVA en trifásico} = 497 \text{ kVA por fase.}$$

$$\text{Tensión nominal} = \frac{2300}{\sqrt{3}} = 1330 \text{ V tensión simple}$$

$$\text{Intensidad nominal} = \frac{497000}{1330} = 374 \text{ A por fase en Y}$$

$$I_a x_{sm} = 374 \times 1,95 = 730 \text{ V por fase}$$

Del diagrama vectorial a plena carga:

$$E_{fm} = \sqrt{V_t^2 + (I_a x_{sm})^2} = 1515 \text{ V}$$

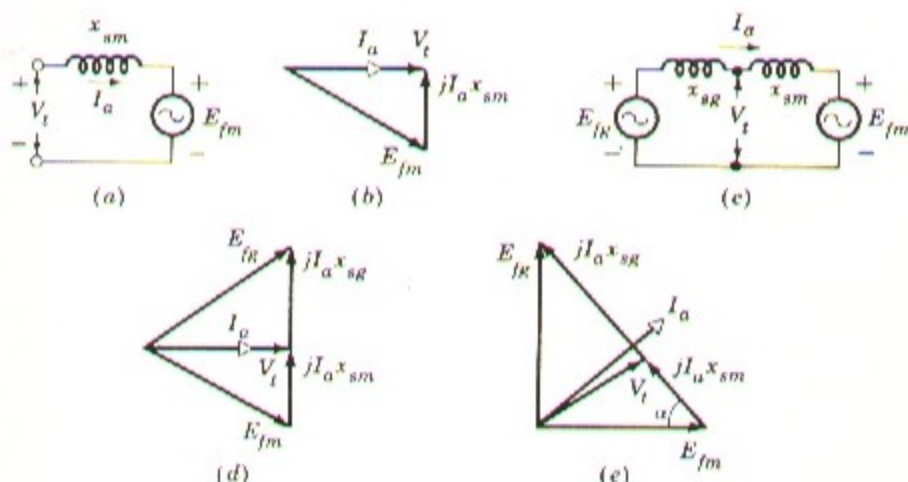


Fig. 6-21. Circuitos equivalentes y diagramas vectoriales del ejemplo 6-5.

Cuando el suministro es de una red de potencia infinita y la excitación es constante, V_t y E_{fm} serán también constantes. Substituyendo en la ecuación 6-20 E_1 por V_t , E_2 por E_{fm} y X por x_{sm} tendremos:

$$\begin{aligned}
 P_{\max} &= \frac{V_t E_{fm}}{x_{sm}} \\
 &= \frac{1330 \times 1515}{1,95} = 1030 \times 10^3 \text{ W por fase} \\
 &= 3090 \text{ kW en trifásico}
 \end{aligned}$$

(En unidades relativas, $P_{\max} = 3090/1492 = 2,07$).

Con 30 polos y 50 Hz, la velocidad de sincronismo es de 3,33 revoluciones por segundo.

$$T_{\max} = \frac{P_{\max}}{\omega_s} = \frac{3090 \times 10^3}{2\pi \times 3,33} = 148 \times 10^3 \text{ Nm}$$

b. Cuando la fuente de alimentación es el turbogenerador, el circuito equivalente se convierte en el de la Fig. 6-21 c, en la que E_{fg} es la tensión en vacío del generador y x_{sg} su reactancia síncrona. El diagrama vectorial a plena carga del motor con factor de potencia 1 es el de la Fig. 6-21 d.

Al igual que antes

$$V_t = 1330 \text{ V a plena carga}$$

$$E_{fm} = 1515 \text{ V}$$

La caída de tensión en la reactancia síncrona del generador es:

$$I_a x_{sg} = 374 \times 2,65 = 991 \text{ V}$$

y del diagrama vectorial

$$E_{fg} = \sqrt{V_t^2 + (I_a x_{sg})^2} = 1655 \text{ V}$$

Ya que tanto las excitaciones como las velocidades de ambas máquinas son constantes, también lo serán E_{fm} y E_{fg} . Substituyendo como antes en la ecuación 6-20 E_1 por E_{fg} , E_2 por E_{fm} , y X por $x_{sg} + x_{sm}$ tendremos:

$$\begin{aligned} P_{\max} &= \frac{E_{fg} E_{fm}}{x_{sg} + x_{sm}} \\ &= \frac{1655 \times 1515}{4,60} = 545 \times 10^3 \text{ W por fase} \\ &= 1635 \text{ kW en trifásico} \end{aligned}$$

(En unidades relativas, $P_{\max} = 1635/1492 = 1,095$)

$$T_{\max} = \frac{P_{\max}}{\omega_s} = \frac{1635 \times 10^3}{2\pi \times 3,33} = 78 \times 10^3 \text{ Nm}$$

Si se aplica al eje del motor un par resistente de valor superior, se perderá el sincronismo: el motor se parará, el generador tenderá a acelerarse y actuarán los interruptores automáticos abriendo el circuito.

Con una excitación dada, la máxima potencia se tiene cuando E_{fg} se adelanta a E_{fm} en 90° como puede verse en la Fig. 6-21 e; del diagrama vectorial

$$I_a(x_{sg} + x_{sm}) = \sqrt{E_{fg}^2 + E_{fm}^2} = 2240 \text{ volts}$$

$$I_a = \frac{2240}{4,60} = 488 \text{ amp}$$

$$I_a x_{sm} = 488 \times 1,95 = 951 \text{ volts}$$

$$\cos \alpha = \frac{E_{fm}}{I_a(x_{sg} + x_{sm})} = \frac{1515}{2240} = 0,676$$

$$\sin \alpha = \frac{E_{fg}}{I_a(x_{sg} + x_{sm})} = \frac{1655}{2240} = 0,739$$

La ecuación vectorial de la tensión en bornes es:

$$\begin{aligned} V_t &= E_{fm} + jI_a X_{sm} = E_{fm} - I_a X_{sm} \cos \alpha + jI_a X_{sm} \operatorname{sen} \alpha \\ &= 1515 - 643 + j703 = 872 + j703 \end{aligned}$$

La magnitud de V_t es:

$$\begin{aligned} V_t &= 1120 \text{ V tensión simple (fase-neutro)} \\ &= 1940 \text{ V tensión compuesta (entre fasces)} \end{aligned}$$

Cuando la alimentación procede del turbogenerador de la parte *b* del problema, su impedancia motiva una baja de la tensión en bornes al aumentar la carga reduciéndose por tanto la potencia máxima, que pasa a ser de 1635 kW en lugar de los 3090 kW que se tenían cuando la alimentación procedía de una red de potencia infinita.

6-6. EFECTO DE LOS POLOS SALIENTES. INTRODUCCION A LA TEORIA DE LAS DOS REACCIONES

a. Flujo y ondas de f.m.m.

El flujo engendrado por la onda de f.m.m. en una máquina de entrehierro uniforme es independiente de la posición espacial de la onda respecto al campo inductor, pero en las máquinas de polos salientes existe una dirección de magnetización preferente determinada por las protuberancias polares. La permeancia es apreciablemente mayor en el sentido del eje polar o principal que en el del eje del espacio entre polos o eje en cuadratura.

Se ha visto ya que la onda del flujo de reacción del inducido se retrasa respecto a la onda del flujo inductor de un ángulo de $90^\circ + \phi_{\text{retr}}$ siendo ϕ_{retr} el ángulo de retraso de la corriente respecto a la f.e.m. inducida. Si dicha corriente I_a retrasa 90° respecto a la f.e.m. E_f , la onda del flujo de reacción del inducido Φ_{ax} es directamente opuesta al flujo Φ_f del campo inductor como puede verse en el diagrama vectorial de la Fig. 6-22 *a*. En la Fig. 6-22 *b* están representadas las ondas de densidad de flujo en la superficie del estator creadas respectivamente por la corriente de excitación y por la componente fundamental de la f.m.m. de reacción del inducido, que gira a la velocidad de sincronismo, en dicha figura se ha prescindido de la influencia de las ranuras. Ambas ondas están formadas por una componente fundamental y por una serie de armónicas impares; la influencia de estos armónicos es en general muy pequeña (véase el apartado 3-3 *a*), por lo que únicamente se tomarán en consideración las componentes fundamentales, que en la citada Fig. 6-22 *a* están representadas por los vectores Φ_f y Φ_{ax} de flujo por polo.

Si la corriente inducida está en fase con la f.e.m., tal como se ve en el diagrama vectorial de la Fig. 6-23 *a*, las condiciones son substancialmente distintas: el eje de la onda de reacción está situado en el espacio interpolar como queda representado en la Fig. 6-23 *b*. La onda del flujo de reacción queda muy distorsionada, constando principal-

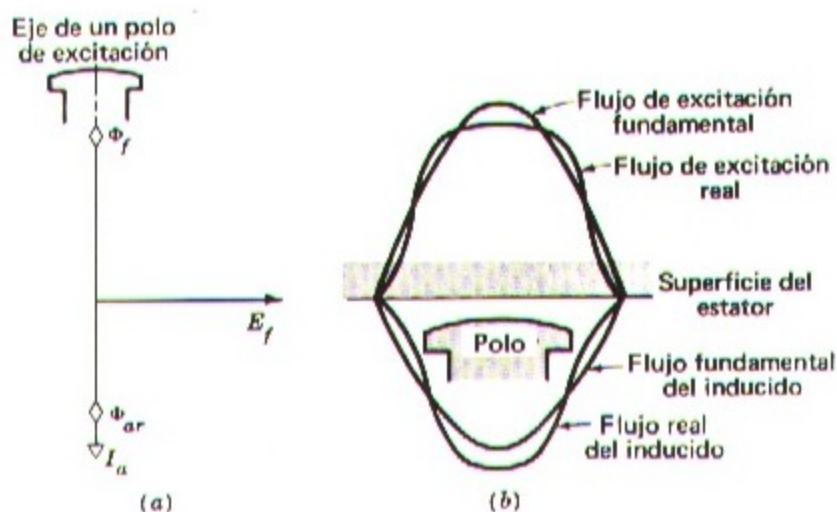


Fig. 6-22. Flujos longitudinales en el entrehierro de una máquina síncrona de polos salientes.

mente de una componente fundamental y de un tercer armónico muy acusado. Este tercer armónico de la onda de flujo induce en las fases del inducido un tercer armónico de f.e.m., pero estas tensiones no deben manifestarse en los bornes.

Debido a la gran reluctancia del entrehierro en el espacio interpolar, la componente fundamental del flujo de reacción del inducido es menor cuando está en cuadratura con el eje de los polos (Fig. 6-23) que lo que sería si estuviera en oposición al eje principal (Fig. 6-22) siempre que la corriente en el inducido sea la misma en ambos casos. Es decir,

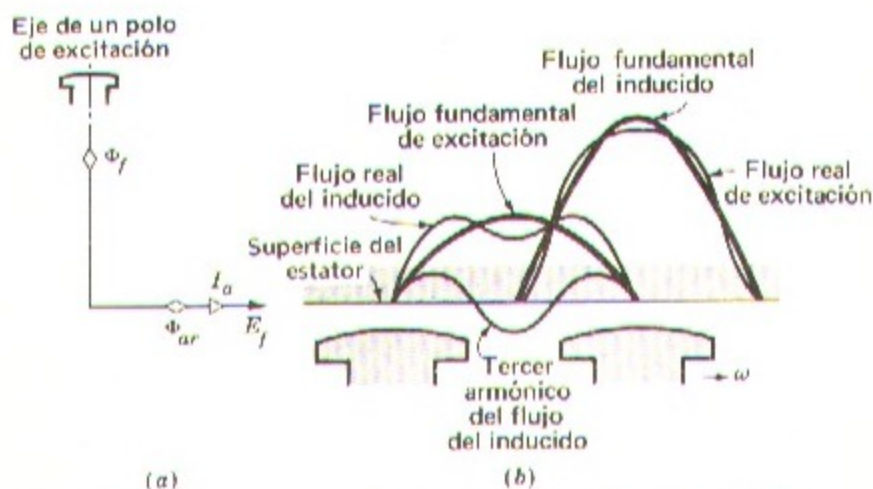


Fig. 6-23. Flujos transversales en el entrehierro de una máquina síncrona de polos salientes.

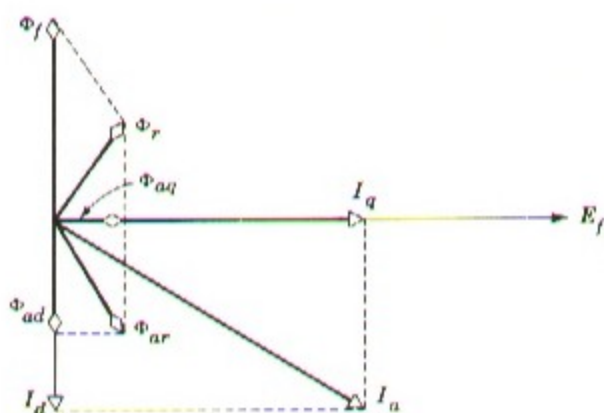


Fig. 6-24. Diagrama vectorial de un generador síncrono de polos salientes.

que la reactancia principal es menor cuando la corriente inducida está en fase con la f.e.m. inducida por el campo inductor (Fig. 6-23) que cuando está en cuadratura con ella (Fig. 6-22 a).

Para estudiar el efecto de los polos salientes se puede descomponer la corriente inducida I_a en dos componentes, una de ellas en cuadratura con la tensión inducida por el campo de excitación E_f y la otra en fase con la misma, tal como está representado en el diagrama vectorial de la Fig. 6-24, que corresponde a un generador de polos salientes, no saturado, trabajando con factor de potencia en retraso. La componente I_d de la corriente inducida, en cuadratura con la tensión, crea un flujo de reacción fundamental Φ_{ad} en la dirección del eje polar o principal al igual que en la Fig. 6-22, mientras que la componente I_q en fase con la tensión inducida por el campo de excitación crea un flujo de reacción fundamental Φ_{aq} en cuadratura con el citado eje, como en la Fig. 6-23. Los subíndices d y q se refieren a la fase en el espacio de los flujos de reacción y no a la fase de tiempo de las componentes de corriente que los engendran; es decir que una magnitud según el eje principal es aquella cuyos efectos magnéticos están centrados con el eje de los polos inductores y una f.m.m. según el eje directo actúa sobre el circuito magnético principal. Análogamente, una magnitud según el eje transversal o en cuadratura es aquella cuyos efectos magnéticos están centrados con el eje del espacio interpolar. En una máquina con circuito magnético no saturado el flujo de reacción del inducido Φ_{ar} es la suma de las dos componentes Φ_{ad} y Φ_{aq} , y al igual que en la Fig. 6-5 el flujo resultante Φ es la suma del flujo Φ_{ax} con el del campo inductor Φ_f .

b. Aspectos del circuito equivalente

Cada una de las componentes I_d e I_q de la intensidad lleva aparejada una componente de la caída de tensión en la reactancia síncrona, de valor $jI_d x_d$ y $jI_q x_q$ respectivamente. Las reactancias x_d y x_q son las reactancias síncronas directa o longitudinal y en cuadratura o transversal. Las reactancias síncronas dan cuenta de los efectos inductivos de todos

los flujos de frecuencia fundamental creados por la corriente en el inducido, incluidos los de dispersión y los de reacción. Por consiguiente los efectos inductivos de las ondas de flujo longitudinal y transversal pueden tomarse en consideración por medio de las reactancias principales $x_{\varphi d}$ y $x_{\varphi q}$, longitudinal y transversal respectivamente, análogas a la reactancia principal x_{φ} en la teoría de rotor cilíndrico.

Las reactancias síncronas longitudinal y transversal son:

$$x_d = x_l + x_{\varphi d} \quad (6-21)$$

$$x_q = x_l + x_{\varphi q} \quad (6-22)$$

siendo x_l la reactancia de dispersión que se supone es la misma para la corriente según el eje longitudinal que según el transversal: compárese con la ecuación 6-3. Como puede verse en el diagrama vectorial de un generador de la Fig. 6-25, la tensión E_f inducida por el campo de la excitación es igual a la suma vectorial de la tensión en bornes V_t , más la caída en la resistencia del devanado inducido $I_a r_a$, más las componentes de la caída en la reactancia síncrona $jI_d x_d + jI_q x_q$.

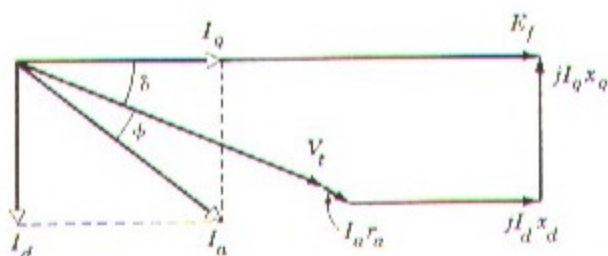


Fig. 6-25. Diagrama vectorial de un generador síncrono.

La reactancia x_q es menor que la x_d debido a la mayor reluctancia del entrehierro en la dirección del eje transversal: corrientemente, x_q está comprendido entre 0,6 y 0,7 x_d , dándose algunos valores típicos en la tabla 6-1. Obsérvese que en los turbogeneradores se

TABLA 6-1
REACTANCIAS TÍPICAS, EN UNIDADES RELATIVAS
(base = KVA nominales de la máquina)

	Motores síncronos rápidos	Motores síncronos lentos	Condensadores síncronos	Generadores Hidro-eléctricos	Turbo-generadores
x_d	mín. 0,65	0,80		0,60	
	med. 0,80	1,10	1,60	1,00	1,15
	max. 0,90	1,50		1,25	
x_q	mín. 0,50	0,60		0,40	
	med. 0,65	0,80	1,00	0,65	1,00
	max. 0,70	1,10		0,80	

aprecia también un ligero efecto de polos salientes no obstante ser máquinas de rotor cilíndrico, siendo ello debido a la influencia de las ranuras sobre la reluctancia transversal.

Para utilizar el diagrama vectorial de la Fig. 6-25 deberá descomponerse la intensidad en el inducido en dos componentes, d y q según los ejes longitudinal y transversal: esta descomposición presupone el conocimiento del ángulo $\phi + \delta$ de defase entre dicha intensidad y la tensión inducida por el campo inductor. Sin embargo frecuentemente se conoce mejor, en forma explícita, el ángulo ϕ del factor de potencia en los terminales de la máquina que el $\phi + \delta$ del factor de potencia interno. En la Fig. 6-26 se repite, con trazo lleno, el diagrama vectorial de la Fig. 6-25: observando este diagrama se puede comprobar

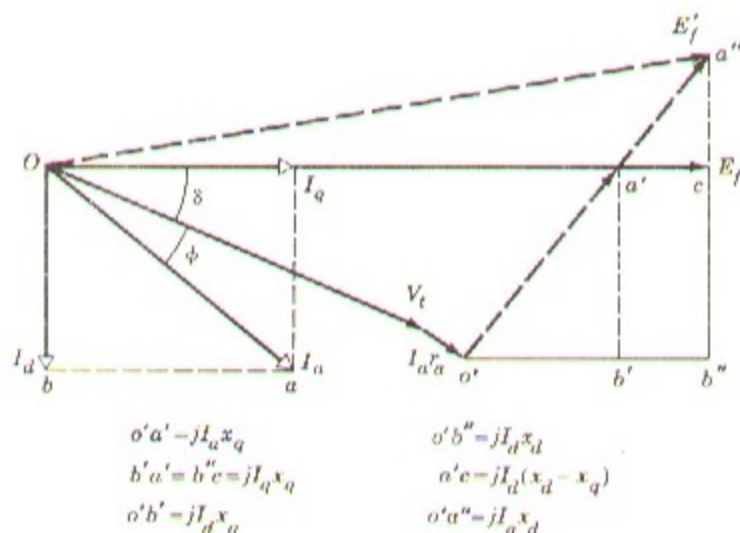


Fig. 6-26. Relaciones entre las componentes de tensión en el diagrama vectorial.

que el vector $o'a'$ perpendicular a I_a , señalado con línea de trazos, es igual a $jI_d x_q$, resultado demostrable geoméricamente por el hecho de que los triángulos $o'a'b'$ y oab son semejantes por tener los respectivos lados perpendiculares entre sí, de donde:

$$\frac{o'a'}{oa} = \frac{b'a'}{ba} \quad (6-23)$$

o bien

$$o'a' = \frac{b'a'}{ba} oa = \frac{jI_q x_q}{I_q} I_a = jI_d x_q \quad (6-24)$$

El vector suma $V_t + I_a r_a + jI_d x_q$ fija la posición angular de la tensión E_f y por consiguiente la de los ejes d y q : físicamente esto ha de ser así ya que todo el campo de excitación en una máquina normal está situado según el eje principal o longitudinal. En el

y en forma vectorial:

$$I_d = 0,832 \angle -90^\circ + 19,4^\circ = 0,832 \angle -70,6^\circ$$

$$I_q = 0,555 \angle 19,4^\circ$$

E_f puede hallarse sumando algebraicamente la longitud

$$a'c = I_d(x_d - x_q)$$

a la magnitud de E_x' , es decir, que el valor de la tensión inducida por el campo inductor es igual a la suma algebraica

$$E_f = E' + I_d(x_d - x_q) =$$

$$= 1,44 + (0,832)(0,40) = 1,77 \text{ unidades relativas}$$

y en forma vectorial:

$$E_f = 1,77 \angle 19,4^\circ$$

En la teoría simplificada expuesta en el apartado 6-2 una máquina síncrona puede representarse por una reactancia única: la reactancia síncrona de la ecuación 6-3. Pero si se trata de esta forma simplificada una máquina de polos salientes, surge la cuestión de ver hasta qué punto queda influida la aproximación. Supongamos que la máquina de polos salientes de las Figs. 6-26 y 6-27 fuera tratada basándonos en las teorías de rotor cilíndrico, es decir, como si tuviera una reactancia síncrona única de valor igual a la reactancia síncrona longitudinal x_d . Con las mismas condiciones anteriores en los bornes, la caída de tensión en dicha reactancia síncrona $jI_a x_d$ sería el vector $o'a''$ y la tensión equivalente inducida por el campo de excitación sería E_f' ; como puede verse en dichas figuras. Puesto que ea'' es perpendicular a E_f , la diferencia de magnitud entre el verdadero valor E_f y el aproximado E_f' será muy pequeña en una máquina normalmente excitada. Calculando nuevamente la tensión inducida por el campo inductor del ejemplo 6-6 teniendo en cuenta lo anteriormente dicho obtendríamos el valor $1,79 \angle 26,6^\circ$.

Por lo que se refiere a las relaciones existentes entre tensión en bornes, corriente inducida, potencia y excitación, dentro del campo normal de trabajo, en general los efectos de los polos salientes son de menor cuantía, y las características de estas máquinas normalmente pueden calcularse con suficiente aproximación basándose en las teorías de rotor cilíndrico. Únicamente con excitaciones débiles adquieren importancia las diferencias en uno u otro caso.

En cuanto a los ángulos de fase de E_f y de E_f' en las figuras 6-26 y 6-27, difieren notablemente entre sí debido al par de reluctancia en las máquinas de polos salientes. Este particular se estudiará en el apartado siguiente.

Substituyendo estas dos últimas ecuaciones en la 6-27 tendremos

$$P = \frac{E_f E_e}{X_d} \operatorname{sen} \delta + E_e^2 \frac{X_d - X_q}{2X_d X_q} \operatorname{sen} 2\delta \quad (6-30)$$

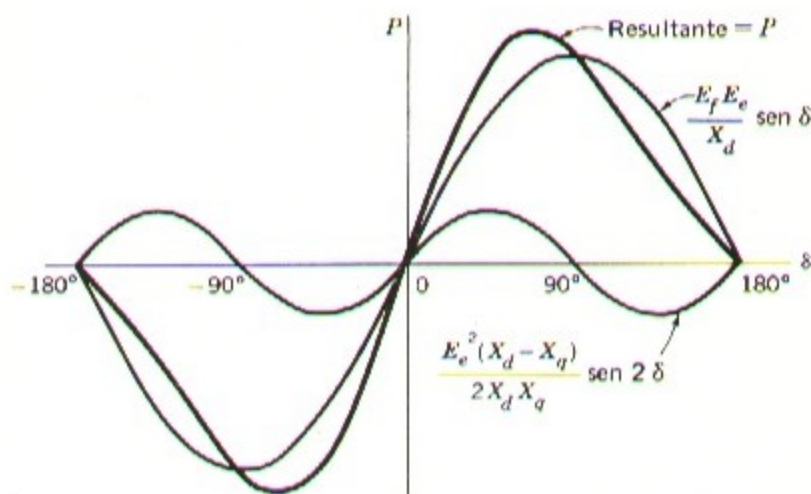


Fig. 6-29. Característica potencia-ángulo de una máquina síncrona de polos salientes mostrando la componente fundamental debida al campo inductor y la segunda armónica debida al par de reluctancia.

En la Fig. 6-29 está representada la curva característica de potencia-ángulo. El primer término es igual a lo obtenido para una máquina de rotor cilíndrico, y no es más que una nueva extensión de los conceptos básicos expuestos en el capítulo 3 para incluir los efectos de reactancias en serie. El segundo término es el que introduce el efecto en los polos salientes, y representa el hecho de que la onda de flujo en el entrehierro crea un par que tiende a alinear los polos inductores en la posición de mínima reluctancia. Este término corresponde a la potencia debida al *par de reluctancia* y es de la misma naturaleza general que el par estudiado en el apartado 2-6: obsérvese que el par de reluctancia es independiente del campo de excitación. Obsérvese también que si $X_d = X_q$ como en una máquina de entrehierro uniforme, no existe una dirección preferente de magnetización y el par de reluctancia se iguala a cero, con lo que la ecuación 6-30 se reduce a ser la ecuación del ángulo de carga de una máquina de rotor cilíndrico cuya reactancia síncrona sea X_d .

En la Fig. 6-30 está representada una serie de curvas características potencia-ángulo correspondientes a diversos valores de la excitación manteniendo constante la tensión en bornes. Únicamente están representados los valores positivos de δ ; las curvas correspondientes a los valores negativos de dicho ángulo serían las mismas, salvo que quedarían invertidos los signos de P , es decir, que las regiones correspondientes a la acción motor o

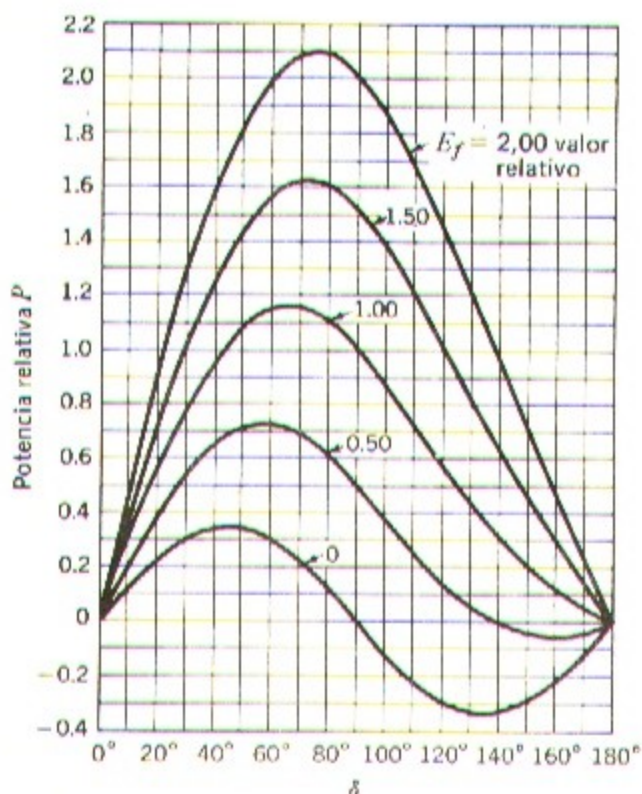


Fig. 6-30. Familia de curvas características potencia-ángulo del sistema de la Fig. 6-28 *a* siendo $E_e = 1,00$, $R = 0$, $X_d = 1,00$ y $X_q = 0,60$.

generador son semejantes siempre que los efectos debidos a la resistencia sean despreciables. Funcionando como generador E_f se adelanta a E_e , y por el contrario, funcionando como motor E_f se retrasa respecto a E_e . El funcionamiento en régimen permanente es estable en el intervalo en el que la inclinación de la curva potencia-ángulo es positiva. Debido al par de reluctancia, una máquina de polos salientes tiene más fuerza que otra equivalente de rotor cilíndrico, es decir, que con la misma tensión y los mismos valores de X_d la máquina de polos salientes alcanza a desarrollar un par dado con menos valor del ángulo δ , y el par máximo de que es capaz es algo mayor que en el caso de rotor cilíndrico.

En la ecuación 6-30 aparecen seis magnitudes: dos variables, que son P y δ y cuatro parámetros E_f , E_e , X_d y X_q . Para simplificar las notaciones llamemos $P_{f \max}$ la potencia máxima debida al campo inductor, y $P_{r \max}$ la debida al par de reluctancia; de esta forma, la ecuación 6-30 se podrá escribir:

$$P = P_{f \max} \operatorname{sen} \delta + P_{r \max} \operatorname{sen} 2 \delta \quad (6-31)$$

y aún puede reducirse el número de parámetros si dividimos esta última ecuación por $P_{f \max}$:

$$\frac{P}{P_{f \max}} = \text{sen } \delta + \frac{P_{r \max}}{P_{f \max}} \text{sen } 2 \delta \quad (6-32)$$

La ecuación 6-32 está en forma normalizada, y siempre que la resistencia sea despreciable puede aplicarse a todas las combinaciones posibles entre una máquina síncrona y un sistema exterior, como en la Fig. 6-28 a.

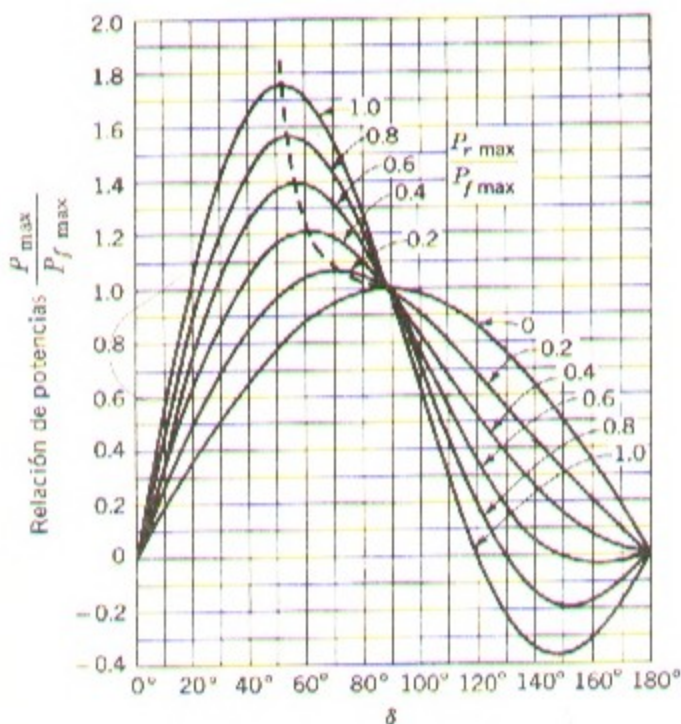


Fig. 6-31. Curvas normalizadas potencia-ángulo para el sistema de la Fig. 6-28 a, siendo $R = 0$.

Partiendo de la ecuación 6-32 puede trazarse una familia de curvas como las de la Fig. 6-31. El valor máximo de $P_{\max}/P_{f \max}$, así como el ángulo δ_{\max} al que corresponde la máxima potencia vienen dados en la Fig. 6-32 en función de la relación $P_{r \max}/P_{f \max}$: estas curvas corresponden a la línea de trazos de la Fig. 6-31 que es el lugar geométrico de los puntos de máximos. En el ejemplo 6-7 se utilizan estas curvas para calcular los límites de potencia en régimen permanente.

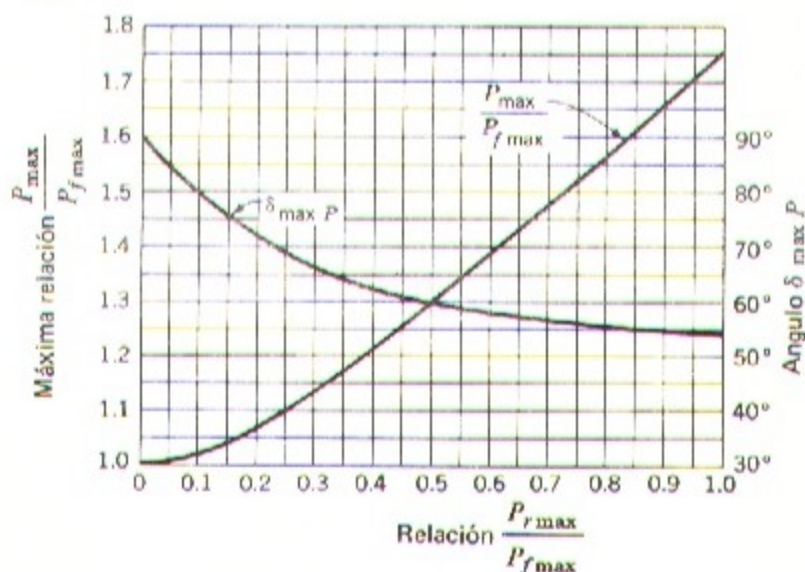


Fig. 6-32. Curvas mostrando los efectos del par de reluctancia sobre el límite de potencia en régimen permanente.

Ejemplo 6-7

El motor síncrono trifásico con conexión Y de 2000 cv, 2300 V y factor de potencia 1 del ejemplo 6-5 tiene las reactancias $x_d = 1,95$ y $x_q = 1,40$ ohm por fase. Se prescinde de todas las pérdidas.

Calcúlese la máxima potencia mecánica en kW que puede desarrollar este motor si se alimenta con potencia eléctrica procedente de una red de potencia infinita (Fig. 6-33 a) a tensión y frecuencias nominales, manteniéndose su excitación constante al valor necesario para que con la potencia nominal el factor de potencia sea igual a la unidad. La carga en el eje se va aumentando gradualmente de forma que se pueda despreciar el penduleo transitorio. Inclúyase el efecto de los polos salientes.

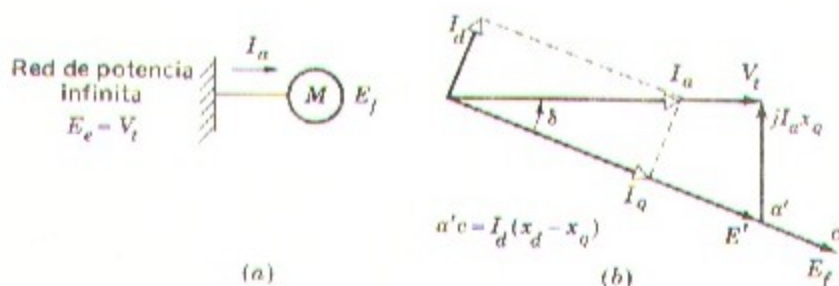


Fig. 6-33. (a) Esquema lineal y (b) diagrama vectorial del motor del ejemplo 6-7.

SOLUCION

El primer paso ha de ser el de calcular la excitación del motor síncrono a plena carga, con su tensión nominal y factor de potencia unidad. Como en el ejemplo 6-5, la tensión en bornes y la intensidad a plena carga son respectivamente de 1330 V tensión simple (entre fase y neutro) y 347 A por fase en Y.

El diagrama vectorial para las condiciones citadas de plena carga es el de la Fig. 6-33 b: la única diferencia esencial entre este diagrama vectorial y el del generador de la Fig. 6-27 es la de que en la Fig. 6-33, I_a representa la intensidad de entrada en el motor.

La ecuación vectorial de tensión será ahora:

$$E_f = V_t - jI_a x_d - jI_q x_q$$

De la Fig. 6-33 b:

$$\begin{aligned} E' &= V_t - jI_a x_q = \\ &= 1330 + j0 - j(374)(1,40) = 1429 \angle -21,5^\circ \end{aligned}$$

Es decir, que el ángulo δ es de $21,5^\circ$ en retraso de E_f respecto V_t . La magnitud de I_d es:

$$I_d = I_a \sin \delta = (374)(0,367) = 137 \text{ A.}$$

La magnitud de E_f puede hallarse ahora sumando numéricamente la longitud $a'c = I_d(x_d - x_q)$ al valor de E' o sea:

$$\begin{aligned} E_f &= E' + I_d(x_d - x_q) \\ &= 1429 + (137)(0,55) = 1504 \text{ V, tensión simple} \end{aligned}$$

Los valores máximos de las componentes de la potencia debidas al campo de excitación y al par de reluctancia pueden calcularse por medio de las ecuaciones 6-31 y 6-32.

$$P_{f \max} = \frac{(1504)(1330)}{1,95} = 1025 \times 10^3 \text{ W por fase}$$

$$P_{r \max} = \frac{(1330)^2(0,55)}{2(1,95)(1,40)} = 178 \times 10^3 \text{ W por fase.}$$

de donde:

$$\frac{P_{r \max}}{P_{f \max}} = 0,174$$

De la Fig. 6-32 deducimos el valor máximo de:

$$\frac{P_{\max}}{P_{f \max}} = 1,05$$

Por tanto, la potencia máxima será:

$$\begin{aligned} P_{\max} &= 1,05 P_{f \max} = (1,05)(1025 \times 10^3) = 1080 \text{ kW por fase} \\ &= 3240 \text{ kW en las tres fases} \end{aligned}$$

Compárese este valor con la potencia máxima $P_{\max} = 3090 \text{ kW}$ hallada en el ejemplo 6-5 en el que se había prescindido del efecto de los polos salientes. El error cometido al prescindir de este efecto es ligeramente inferior al cinco por ciento.

El efecto de los polos salientes sobre el límite de potencia se acrecienta a medida que aumenta la relación $P_{r \max}/P_{f \max}$ como puede verse en la Fig. 6-32: en una máquina normalmente excitada este efecto es como máximo de un pequeño porcentaje y únicamente en el caso de excitaciones débiles llega el par de reluctancia a adquirir cierta importancia: por consiguiente, una máquina de polos salientes puede estudiarse con la teoría más sencilla del rotor cilíndrico, salvo cuando la excitación es muy débil o cuando excepcionalmente se requiera una gran exactitud en los resultados.

6-8. ACOPLAMIENTO DE GENERADORES SINCRONOS

Los generadores síncronos pueden acoplarse en paralelo, y de hecho los sistemas de suministro de energía eléctrica a los grandes centros industriales pueden tener decenas y aun centenas de alternadores trabajando en paralelo interconectados entre sí a través de líneas de centenares de kilómetros, que alimentan cargas diseminadas sobre millares de kilómetros cuadrados. Estos vastos sistemas se han ido desarrollando a pesar de los problemas que representa proyectarlos de forma que se mantenga el sincronismo aun en el caso de que se produzcan disturbios y las complicaciones tanto técnicas como administrativas que hay que solventar para coordinar el trabajo de máquinas y de personal en un sistema tan complejo.

Las razones principales que abogan en favor de la interconexión de sistemas son las de asegurar la continuidad del servicio y las economías que se consiguen en los costes de instalación y de ejercicio.

Para comprender bien los principios del funcionamiento en paralelo en pequeña escala consideremos un sistema elemental formado por dos generadores trifásicos idénticos G_1 y G_2 con sus dos motores primarios PM_1 y PM_2 suministrando potencia a una carga L tal como se representa en el esquema unifilar de la Fig. 6-34. Supongamos que el generador G_1 está alimentando la carga a la tensión y frecuencia nominales estando desconectado el

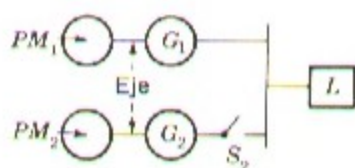


Fig. 6-34. Operación en paralelo de dos generadores síncronos.

generador G_2 . El generador G_2 podrá acoplarse en paralelo con el G_1 moviéndolo a la velocidad de sincronismo y ajustando el reostato de excitación hasta igualar su tensión con la de las barras. Si la frecuencia de la máquina que se pretende acoplar no es exactamente igual a la de las barras, la diferencia vectorial entre su tensión y la existente en las barras irá variando a una frecuencia igual a la diferencia de frecuencias de ambas tensiones, diferencia que puede ser de una fracción de ciclo por segundo. El interruptor S_2 deberá cerrarse en el instante en que ambas tensiones están momentáneamente en concordancia de fase, momento en el que la diferencia de tensión entre bornes del interruptor es igual a cero. Para determinar el momento oportuno de cerrar el interruptor se utiliza un dispositivo denominado *sincroscopio*. Una vez sincronizado G_2 en la forma indicada se puede distribuir la carga tanto activa como reactiva entre las dos máquinas actuando adecuadamente sobre los reguladores de los motores primarios y sobre los reostatos de excitación.

A diferencia de los generadores de continua, los generadores síncronos acoplados en paralelo deben girar exactamente a la misma velocidad (si tienen el mismo número de polos), y en consecuencia, la distribución de la potencia activa entre ambas máquinas depende exclusivamente, casi siempre, de la característica velocidad-potencia de sus respectivos motores primarios. Las rectas inclinadas de trazo continuo, PM_1 y PM_2 de la Fig. 6-35 representan las características velocidad-potencia de dichos motores con abertura constante de sus reguladores: todos los motores primarios tienen su característica velocidad-potencia descendente. La carga total P_L está representada por la recta horizontal AB y las potencias de salida de los generadores (despreciando las pérdidas) son P_1 y

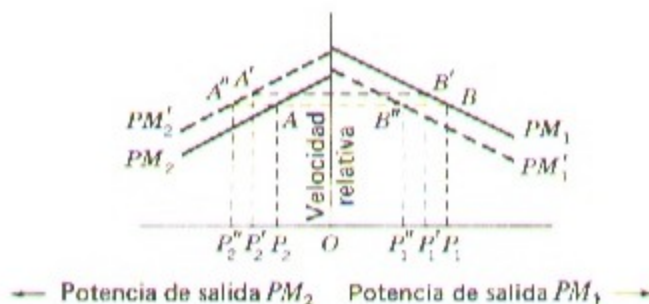


Fig. 6-35. Características velocidad-potencia de los motores primarios.

P_2 . Supongamos que se abre más el regulador de PM_2 trasladándose hacia arriba la característica hasta PM_2' ; la carga será ahora la línea de trazos $A'B'$. Obsérvese que la potencia de salida del generador 2 se ha elevado desde P_2 hasta P_2' mientras que la del generador 1 ha descendido desde P_1 hasta P_1' , y que ha aumentado la frecuencia del sistema: esta frecuencia puede restituirse a su valor normal transfiriendo carga del generador 1 al generador 2 cerrando parcialmente el regulador del motor del primero de forma que su característica pase a ocupar la posición de la línea de trazos PM_1' . La carga total estará ahora representada por $A''B''$ y las potencias de salida de los generadores por P_1'' y P_2'' respectivamente. Como puede apreciarse, la frecuencia del sistema y el reparto de carga activa entre los dos generadores puede ajustarse maniobrando sobre los reguladores de los motores primarios.

Las variaciones de las excitaciones influyen sobre la tensión en bornes y sobre la distribución de los kVA reactivos. Por ejemplo, si se ajustan los dos generadores idénticos de la Fig. 6-34 de forma que las potencias activas y reactivas se distribuyan por igual, el diagrama vectorial correspondiente será el de trazo continuo de la Fig. 6-36 en el que V_f es la tensión en bornes, I_L la intensidad de carga, I_a la corriente en el inducido de cada generador y E_f la tensión inducida debida al campo inductor. La caída de tensión en la reactancia síncrona de cada generador es $jI_a x_s$, y la caída de tensión en la resistencia puede despreciarse. Supongamos ahora que se incrementa la excitación del generador 1; la tensión en barras V_f aumentará, pero podrá restituirse a su valor normal debilitando la excitación del generador 2. Las condiciones finales están representadas por los vectores de trazo discontinuo de la citada Fig. 6-36: no han variado ni la tensión en bornes ni la intensidad y factor de potencia de la carga, y puesto que no se han tocado los reguladores de los motores primarios no han variado tampoco ni la potencia de salida ni la componente en fase de la corriente de los inducidos de las máquinas. Las tensiones E_{f1} y E_{f2} debidas a los campos inductores han modificado su fase de forma que $E_f \text{ sen } \delta$ se mantenga constante. El generador al cual se ha incrementado la excitación suministra ahora la mayor parte de los kVA reactivos retrasados de la carga. En las condiciones representadas por los vectores discontinuos de la Fig. 6-36, el generador 1 está suminis-

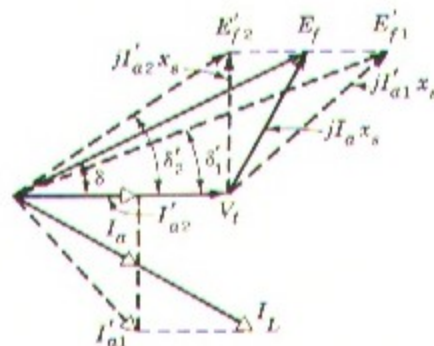


Fig. 6-36. Efectos del cambio de excitación en dos generadores síncronos en paralelo.

trando la totalidad de la energía reactiva y el generador 2 trabaja con factor de potencia igual a la unidad.

Generalmente, los motores primarios se gobiernan mediante reguladores y dispositivos automáticos de regulación de frecuencia, de tal forma que ésta se mantenga muy aproximadamente uniforme en el sistema, y la carga quede repartida entre los generadores en la proporción deseada. La tensión y la distribución de potencia reactiva se regula también automáticamente mediante dispositivos con tomas variables automáticamente que actúan sobre los circuitos de excitación de los generadores y transformadores.

6-9. RESUMEN

La idea física de la forma interna de trabajar una máquina síncrona basada en los campos magnéticos giratorios es relativamente sencilla, y no es más que la interacción entre los campos del estator y del rotor cuando ambos se mantienen estacionarios el uno respecto al otro tal como se expuso en el apartado 3-5. Tanto en el caso de rotor cilíndrico como en el de polos salientes, las f.m.m. y los campos componentes, junto con las tensiones e intensidades con ellos relacionados pueden representarse mediante diagramas vectoriales como los de la Fig. 6-2 b y 6-24. Estos diagramas a su vez nos conducen al concepto de las reactancias síncronas x_s , x_d y x_q . Estas reactancias surgen al sustituir los efectos de la onda giratoria de reacción del inducido por las reactancias magnetizantes x_{ϕ} ó $x_{\phi d}$ y $x_{\phi q}$.

Las reactancias síncronas no saturadas x_s o x_d pueden deducirse de los resultados de dos ensayos; uno en circuito abierto y otro en corto circuito. Estos métodos de ensayo son una variación de las técnicas de ensayo aplicables no sólo a las máquinas síncronas sino también a cualquiera otra cuyo comportamiento sea aproximadamente igual al de un circuito equivalente lineal al que se pueda aplicar el teorema de Thevenin: bajo el punto de vista de este teorema, un ensayo en circuito abierto nos dará la f.e.m. interna, y otro en cortocircuito informará sobre la impedancia interna. Bajo un punto de vista más específicamente aplicado a máquinas electromagnéticas, la prueba en circuito abierto facilitará información relativa a los requerimientos de la excitación, a las pérdidas en el núcleo y a las pérdidas por rozamientos y resistencia del aire en las máquinas rotativas, mientras que la prueba en cortocircuito informa sobre las reacciones magnéticas de la corriente de carga, tales como las pérdidas en el cobre y las parásitas. La única dificultad real es debida a la no linealidad de los fenómenos magnéticos, lo que se puede solventar con bastante aproximación considerando que la máquina es equivalente a otra no saturada cuya curva de magnetización sea la recta Op de la Fig. 6-13 y cuya reactancia síncrona saturada se determina empíricamente como en la ecuación 6-7.

La previsión de las características de una máquina síncrona en régimen permanente se reduce simplemente a estudiar el paso de potencia a través de una impedancia única con tensión en sus bornes constante o fácilmente determinable. El estudio de los límites de potencia máxima posible en una sobrecarga de corta duración es simplemente un caso especial del límite de potencia a través de una impedancia inductiva. Esta potencia máxima a través de tal impedancia puede expresarse en función de las tensiones en sus bornes

Cuando se carga el motor de forma que con 2300 V en sus terminales la corriente sea de 38 A con factor de potencia 0,8, la intensidad en la excitación es de 17,3 A. En estas condiciones ¿cuál es el rendimiento del motor síncrono excluidas las pérdidas de la excitatriz? ¿cuál es la potencia mecánica úti. en c.v. desarrollada?

6-11. El diagrama vectorial de una máquina síncrona de reactancia síncrona x_s constante, trabajando con una tensión en bornes V_T y una tensión inducida por el campo inductor E_f también constantes, muestra que el lugar geométrico del extremo del vector de intensidad en el inducido es una circunferencia.

Tomando como referencia el vector de tensión en bornes, indíquese la posición del centro de dicha circunferencia en el diagrama vectorial y cuál es su radio. Exprésense las coordenadas del centro y el radio en función de V_T , E_f y x_s .

6-12. Un generador síncrono está conectado a una red de potencia infinita a través de dos circuitos trifásicos en paralelo cada uno de los cuales tiene una reactancia de 0,60 valor relativo, incluyendo los transformadores elevadores y reductores instalados en los extremos de las líneas. La reactancia síncrona del generador (que puede ser tratada considerando el rotor cilíndrico) es de 0,90 valor relativo. Se desprecian todas las resistencias, y las reactancias están expresadas tomando como base los valores nominales de la máquina. La tensión de la red de potencia infinita es de 1,00 valor relativo.

- La potencia de salida y la excitación del generador se regulan de forma que suministre la intensidad nominal con factor de potencia 1,00 en los terminales cuando trabaja en régimen permanente. Calcúlense las tensiones en bornes y la inducida por el campo inductor, así como la potencia y la potencia reactiva suministrada a la red de potencia infinita.
- Se ajusta ahora el regulador del motor primario de forma que no haya transferencia alguna de potencia entre el generador y la red de potencia infinita. Se regula también la corriente de excitación hasta que se suministren a la red 0,5 valor relativo de kVA reactivos en retraso. Calcúlese cuáles serán en estas condiciones la tensión en bornes y la tensión inducida por el campo inductor del generador.
- Volviendo a situar el sistema en las condiciones del apartado *a* se desconecta uno de los dos circuitos de transmisión en paralelo abriendo los interruptores de sus extremos: la excitación del generador no se modifica. ¿Continuará el generador en sincronismo? Después de comparar la transferencia de potencia deseada con la máxima en estas condiciones, opíñese sobre lo adecuado del sistema de transmisión.

6-13. Un motor síncrono trifásico de 20 polos, conexión Y, 1000 c.v., 2300 V y 50 Hz tiene una reactancia síncrona de 4,00 ohm por fase.

de entrada y de salida y de los ángulos de fase de dichas tensiones, como en la ecuación 6-19 para las máquinas de rotor cilíndrico y en la 6-30 para las de polos salientes. Este análisis demuestra que el efecto de los salientes de los polos es relativamente pequeño en cuanto se refiere a la relación entre excitación, tensión en bornes, corriente inducida y potencia, pero afecta a la característica potencia-ángulo debido a la existencia de un par de reluctancia, debido a este par de reluctancia una máquina de polos salientes es más fuerte que otra equivalente de rotor cilíndrico.

PROBLEMAS

- 6-1. *a.* Dibújese la onda y el diagrama vectorial semejantes a los de las Figs. 6-1 y 6-2 pero correspondientes a un generador síncrono cuya intensidad en el inducido esté adelantada respecto a la tensión inducida por el campo inductor.
- b.* Dibújese un diagrama vectorial semejante a los de las Figs. 6-3 y 6-4 pero aplicado a un motor síncrono con factor de potencia en adelanto respecto a la tensión inducida por el campo inductor.

6-2. Un generador síncrono está suministrando potencia a una red, teniendo su excitación regulada de forma que la intensidad en el inducido esté retrasada respecto a la tensión en bornes. La resistencia del devanado inducido y la reactancia de dispersión pueden despreciarse.

Se aumenta la intensidad de la excitación en un 10 por ciento, sin alterar el par motriz del motor primario. ¿Qué cambios se producirán, cualitativamente, en la potencia de salida, en la magnitud y fase de la corriente en el inducido, y en la magnitud del ángulo de carga δ_{RF} ? Explíquese valiéndose de diagramas vectoriales representando las ondas de flujo y de f.m.m.

Si en lugar de variar la corriente de excitación se varía el par motriz del motor primario aumentándolo en un 10 por ciento, ¿qué cambios ocurrirán?

6-3. Un motor síncrono trabaja a media carga: si se aumenta la excitación disminuye la intensidad en el inducido. Antes de tener lugar el aumento de excitación, el motor ¿suministraba o absorbía potencia reactiva en retraso?

6-4. El ángulo de carga δ_{RF} de un motor síncrono trabajando a plena carga, a la tensión y frecuencia nominales, es de 30 grados eléctricos. Despréciense los efectos de la resistencia del devanado y de la reactancia de dispersión. Si se mantiene la excitación constante, ¿cómo quedará afectado el ángulo de carga al producirse las siguientes variaciones en las condiciones operativas?

- a.* Reducción de la frecuencia en un 10 por ciento, manteniéndose constante el par resistivo.
- b.* Reducción de la frecuencia en un 10 por ciento, manteniéndose constante la potencia en la carga.

- c. Reducción de un 10 por ciento en la frecuencia y en la tensión aplicada, manteniéndose constante el par resistivo.
- d. Reducción de un 10 por ciento en la frecuencia y en la tensión aplicada, manteniéndose constante la potencia en la carga.

6-5. Un motor shunt de corriente continua está mecánicamente acoplado a un generador trifásico síncrono de rotor cilíndrico. El motor de continua se conecta a una red de tensión uniforme y continua de 230 V, y el generador de alterna a una red trifásica de frecuencia y tensión constantes, siendo ésta de 230 V entre fases. La máquina síncrona, de cuatro polos, conectada en Y, es de 25 kVA a 230 V, valores nominales, y su reactancia síncrona es de 1,60 ohm por fase.

La máquina de continua, también de cuatro polos, tiene los valores nominales de 25 kW y 230 V. Se desprecian todas las pérdidas.

- a. Si el conjunto de ambas máquinas trabaja como un grupo motor-generador recibiendo potencia de la red de continua y suministrándola a la de alterna, ¿cuál es la tensión simple (entre fases y neutro) inducida por el campo inductor de la máquina de alterna cuando trabaja a sus kVA nominales y factor de potencia unidad?
- b. Dejando la excitación de la máquina de alterna como en el apartado anterior, ¿qué ajustes deberán realizarse para reducir a cero la transferencia de potencia entre los sistemas de alterna y de continua? En estas condiciones de transferencia nula ¿cuál es la corriente en el inducido de la máquina de continua? ¿y en el inducido de la de alterna?
- c. Dejando la excitación de la máquina de alterna como en los dos apartados anteriores, ¿cómo podrá regularse para transferir 25 kW de la red de alterna a la de continua? En estas condiciones ¿cuál es la corriente en el inducido de la máquina de continua? ¿Cuáles son la magnitud y fase de la corriente de la máquina de alterna?

6-6. De las pruebas en vacío y en cortocircuito de un turbogenerador trifásico de 9375 kVA, 13800 V tensión compuesta, conexión en Y, de dos polos, 50 Hz, girando a la velocidad de sincronismo, se extraen los siguientes datos:

Corriente de excitación	169	192
Corriente en el inducido (ensayo en cortocircuito)	392	446
Tensión en bornes (característica en vacío)	13000	13800
Tensión (recta del entrehierro)	15400	17500

La resistencia del devanado inducido es de 0,064 ohm por fase. La reactancia de dispersión del inducido es de 0,1 valor relativo tomando los valores nominales del generador como base.

- a. Hállese el valor de la reactancia síncrona no saturada en ohm por fase y en valor relativo.
- b. Hállese la relación de cortocircuito.

- 6-7. *a.* Calcúlese la corriente de excitación necesaria en el generador del problema 6-6 con su tensión y carga en kVA nominales y factor de potencia 0,8 en retraso. Téngase en cuenta la saturación en carga, por el procedimiento expuesto en el apartado correspondiente a la ecuación 6-7.
- b.* Como complemento de los datos dados en el problema 6-6, a continuación se exponen los de otros puntos pertenecientes a la característica en vacío:

Corriente de excitación	200	250	300	350
Tensión en bornes	14100	15200	16000	16600

Hállese la regulación de tensión para la carga definida en *a.* Se entiende por *regulación de tensión*, el aumento de tensión que se experimenta al suprimir la carga manteniendo constantes la velocidad y la intensidad en el circuito de excitación, y normalmente se expresa en tanto por ciento de la tensión en carga.

- 6-8. Las pérdidas del generador del problema 6-6 son las siguientes:

Pérdidas en vacío en el núcleo a 13800 V = 68 kW.

Pérdidas en cortocircuito con 392 A a 75° C = 50 kW.

Rozamientos resistencia del aire = 87 kW.

Resistencia del devanado inductor a 75° C = 0,285 ohm.

Calcúlese el rendimiento a plena carga con factor de potencia 0,80 en retraso.

6-9. Un generador síncrono trifásico tiene los siguientes valores nominales: 12.000 kVA, 13.800 V, factor de potencia 0,80, frecuencia 60 Hz.

¿Cuáles serán su potencia en kVA y su tensión nominales con factor de potencia 0,80 a 50 Hz admitiendo que las pérdidas en el cobre del inducido y del inductor son las mismas a 50 que a 60 Hz? Si la tensión de regulación a la carga nominal y a 60 Hz es de 18 por ciento: ¿cuál será su valor con la misma carga pero a 50 Hz? Puede despreciarse el efecto sobre la regulación de la caída de tensión en la resistencia del devanado inducido.

6-10. Un motor síncrono trifásico de 150 c.v., 2300 V, 38 A, 60 Hz, factor de potencia 0,8, está conectado directamente a una excitatriz que alimenta su devanado inductor. Para el objeto de este problema puede admitirse que el rendimiento de la excitatriz es del 80 por ciento continuamente. El motor síncrono funciona sin carga alimentado por una red de 2300 V, 60 Hz y excitado su inductor por la excitatriz citada: en estas condiciones, de los aparatos de medida se toman los siguientes datos:

Tensión en bornes del inducido = 2300 V.

Intensidad en el inducido = 38 A en cada terminal.

Potencia de entrada en trifásico = 13,7 kW.

Intensidad de excitación = 20 A.

Tensión de excitación = 300 V.

Puede emplearse para este problema la teoría de rotor cilíndrico y despreciar todas las pérdidas.

- Este motor está conectado a una red de potencia infinita que le suministra la tensión y la frecuencia nominales. La excitación se regula de tal forma que cuando la carga en el eje requiere una entrada de 800 kW el factor de potencia sea igual a la unidad. Calcúlese el par máximo, en Nw-m que el motor puede desarrollar al ir aumentando gradualmente la carga en el eje manteniendo constante la excitación.
- Supongamos que el motor, en lugar de alimentarse de una red de potencia infinita lo hace de un generador síncrono trifásico de 1000 kVA, 2300 V, conexión Y, con reactancia síncrona de 4,00 ohm por fase. La frecuencia se mantiene constante mediante un regulador adecuado, y las excitaciones tanto del motor como del generador se mantienen constantes al valor necesario para que la tensión en bornes sea la nominal cuando el motor absorbe 800 kW con factor de potencia unidad. Determínese el par máximo en Nw-m al ir incrementando paulatinamente la carga en el eje del motor síncrono, y calcúlese también cuáles serán la intensidad en el inducido, la tensión en bornes y el factor de potencia en los terminales correspondientes a esta carga máxima.
- Calcúlese el par motor máximo si en lugar de mantener constantes las corrientes de excitación como se ha hecho en el apartado b, se van aumentando lentamente ambas (la del generador y la del motor) para mantener en bornes la tensión nominal con factor de potencia unidad a medida que aumenta la carga en el eje.

6-14. Dibújese el diagrama vectorial dq de un motor síncrono sobreexcitado, en régimen permanente, es decir, cuando la corriente de excitación es suficientemente alta para suministrar kVA reactivos en retraso a la red. Partiendo de ese diagrama vectorial demuéstrase que el ángulo δ entre la tensión inducida por el campo inductor y la tensión en bornes viene dada por:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_a x_q \cos \phi + I_a r_a \operatorname{sen} \phi}{V_t + I_a x_q \operatorname{sen} \phi - I_a r_a \cos \phi}$$

6-15. ¿Qué porcentaje de su potencia nominal podrá desarrollar sin pérdida de sincronismo un motor síncrono de polos salientes cuando se le aplica su tensión normal siendo la corriente de excitación igual a cero? : $x_d = 0,80$ y $x_q = 0,5$, ambos en valores relativos. Calcúlese, también en valores relativos, la corriente en el inducido a la potencia máxima.

6-16. Un motor síncrono, de polos salientes, tiene $x_d = 0,80$ y $x_q = 0,50$, valores relativos y está conectado a una red de potencia infinita de $V_t = 1,00$ valor relativo. Despréciense todas las pérdidas. ¿Cuál es la excitación mínima, en valor relativo, para que la máquina conserve el sincronismo con el par de plena carga?

Motores de inducción: Régimen permanente

En los motores de inducción, el devanado del estator se alimenta con corriente alterna directamente desde la red, y el del rotor por inducción del estator.

Las corrientes polifásicas equilibradas del estator y del rotor crean sendas ondas componentes de f.m.m., de amplitud constante que giran en el entrehierro a la velocidad de sincronismo y que por consiguiente se mantienen estacionarias la una con respecto a la otra independientemente de la velocidad mecánica del motor. El conjunto de estas dos f.m.m. crea en el entrehierro una onda de densidad de flujo. La interacción entre la onda de flujo y la f.m.m. del rotor da origen a la aparición de un par. Con ello se cumplen plenamente todas las condiciones necesarias para la creación de un par de valor constante a cualquier velocidad que no sea la de sincronismo.

El presente capítulo tiene por objeto establecer los circuitos equivalentes de los motores de inducción polifásicos, con los que poder determinar y estudiar los efectos del motor sobre su circuito de alimentación, y las características del motor en sí mismo. La forma general del circuito equivalente puede sugerirse por la similitud existente entre una máquina de inducción y un transformador.

7-1. FLUJO Y ONDAS DE F.M.M. EN MAQUINAS DE INDUCCION

Cuando se excita el devanado del estator de una máquina polifásica de inducción mediante una tensión polifásica equilibrada, se genera un campo magnético giratorio en el entrehierro, tal como se describió en el apartado 3-4, siendo su velocidad de rotación la de sincronismo dada por la ecuación 3-38. Para examinar las ondas de flujo y de f.m.m. en el entrehierro consideremos las condiciones existentes cuando el rotor gira a la velocidad n correspondiente a un deslizamiento relativo s . La componente espacial fundamental del

Flujo resultante en el entrehierro se desplaza respecto al rotor a la velocidad de deslizamiento, induciendo en sus circuitos unas f.e.m. cuya frecuencia corresponde también a la de deslizamiento: estas f.e.m. originan unas corrientes de igual frecuencia que circulan por el devanado o las barras en cortocircuito del rotor. Tanto en el caso de rotor de jaula de ardilla como en el rotor devanado con el mismo número de polos que el estator, las corrientes que por él circulan cuya frecuencia, como hemos visto, es la de deslizamiento, crean una f.m.m. cuya onda fundamental se mueve respecto al rotor a la velocidad de deslizamiento. Por consiguiente, las ondas de f.m.m. y de densidad de flujo no tienen movimiento relativo alguno entre sí, naciendo de su interacción un par cuya magnitud depende del ángulo existente entre las dos ondas (véase la ecuación 3-64).

a. Reacción del inducido

En la Fig. 7-1 puede verse la situación del flujo y de la f.m.m. en el caso de un rotor devanado: el esquema muestra el desarrollo de un devanado inducido trifásico de dos polos situado en un campo de también dos polos, lo que está de conformidad con la condición de que un rotor bobinado debe tener el mismo número de polos que tenga el estator (aun cuando el número de fases no ha de ser necesariamente el mismo). La onda de densidad de flujo se desplaza hacia la derecha a la velocidad de deslizamiento respecto al devanado: en la Fig. 7-1 dicha onda está representada en la posición para la que el valor instantáneo de la tensión en la fase *a* pasa por un máximo.

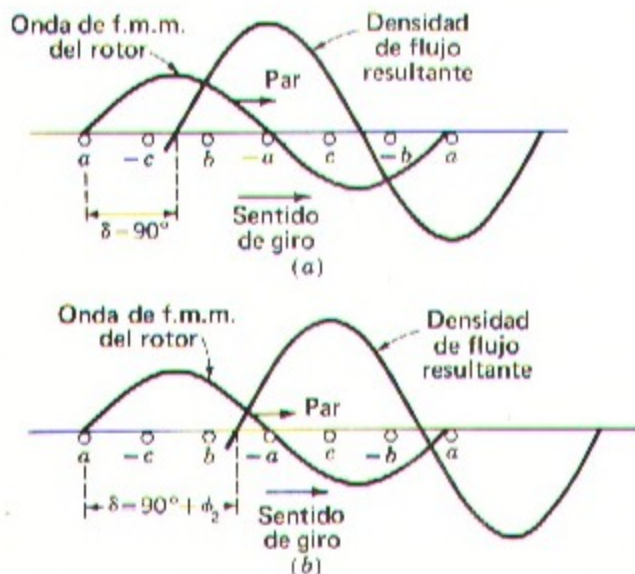


Fig. 7-1. Desarrollo del devanado del rotor de un motor de inducción, con las ondas de densidad de flujo y de f.m.m. en sus posiciones relativas con reactancia de dispersión del rotor: (a) igual a cero, y (b) distinta de cero.

Si la reactancia de dispersión del rotor es muy pequeña frente a la resistencia del mismo (lo que es prácticamente el caso con los pequeños deslizamientos en servicio normal), la intensidad en la fase α pasará también por un máximo, y tal como se vio en el apartado 3-4 la onda de f.m.m. del rotor estará centrada con la fase α , lo que también puede apreciarse en la Fig. 7-1 *a*. El ángulo de desplazamiento o de par δ , en estas condiciones tiene el valor óptimo de 90° .

Si por el contrario, la reactancia de dispersión tiene un valor apreciable, la intensidad en la fase α se retrasa respecto a la tensión inducida en el ángulo ϕ_2 del factor de potencia de la impedancia de dispersión, y por consiguiente no alcanzará su valor máximo hasta pasado un cierto tiempo. En este caso, la onda de f.m.m. del rotor no estará centrada con la fase α hasta tanto la onda de flujo no haya avanzado ϕ_2 grados eléctricos en el entrehierro como puede verse en la fig. 7-1 *b*. El ángulo δ es ahora de $90 + \phi_2$ grados eléctricos: por consiguiente, en un motor de inducción el ángulo de par es en general

$$\delta = 90^\circ + \phi_2 \quad (7-1)$$

que difiere del valor óptimo en el ángulo correspondiente al factor de potencia de la impedancia de dispersión del rotor a la frecuencia de deslizamiento. El par electromagnético del rotor está dirigido hacia la derecha en la Fig. 7-1, o en general, en la dirección de la onda de flujo rotatoria.

La Fig. 7-2 se refiere a un motor de jaula de ardilla, representando el desarrollo de un rotor de 16 barras situado en un campo de dos polos: para facilidad del dibujo se ha empleado un número de barras relativamente pequeño, habiéndose elegido un múltiplo entero del número de polos aun cuando en general no es así para evitar los perniciosos efectos de los armónicos.

En la Fig. 7-2 *a* la onda senoidal de la densidad de flujo induce en cada barra una tensión cuyo valor instantáneo se ha representado con las líneas continuas verticales. En un cierto instante de tiempo posterior, las intensidades en las barras adquieren el valor instantáneo señalado con las líneas verticales de la Fig. 7-2 *b* siendo el tiempo de retraso el correspondiente al ángulo ϕ_2 del factor de potencia del rotor. Durante este intervalo de tiempo, la onda de densidad de flujo se ha desplazado respecto al rotor, y en la dirección de su movimiento, el espacio angular ϕ_2 llegando a la posición de la Fig. 7-2 *b*. La onda correspondiente de la f.m.m. del rotor está representada por la línea escalonada de la Fig. 7-2 *c*, siendo su componente fundamental la sección de trazos de la misma figura: la onda de densidad de flujo es la senoide de trazo continuo. El estudio de estas figuras confirma el principio general de que el número de polos de un rotor de jaula de ardilla lo determina la onda del flujo inductor.

b. Reducción del rotor al estator

Hemos visto que por lo que a las componentes fundamentales se refiere, tanto los rotores de jaula de ardilla como los devanados reaccionan creando una onda de flujo inductora que gira a la misma velocidad que ella con un ángulo de par 90 grados eléctricos mayor que el ángulo del factor de potencia del rotor. La reacción de la onda de f.m.m. del

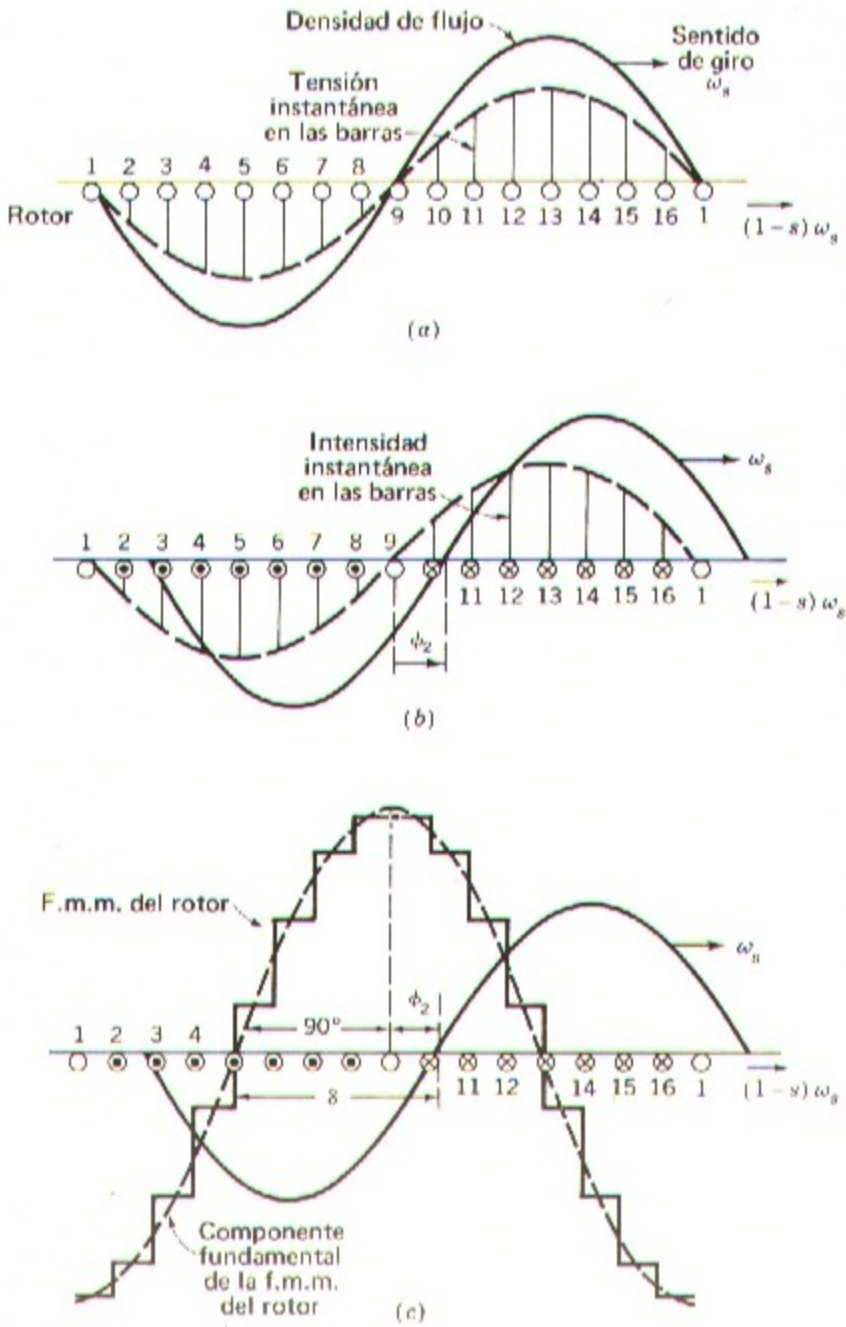


Fig. 7-2. Reacciones de un rotor de jaula de ardilla en un campo de dos polos.

rotor sobre el estator exige la compensación de una componente de carga en la corriente de este último obligándolo a tomar de la red la potencia necesaria para mantener el par creado por la acción mutua entre las ondas de flujo y de f.m.m. El único camino por el cual el estator conoce lo que está sucediendo es por medio de las ondas de flujo en el entrehierro y de f.m.m. del rotor, y en consecuencia, si se substituyera el rotor por otro con la misma f.m.m. e igual factor de potencia a idéntica velocidad, el estator sería incapaz de detectar el cambio. Esta posibilidad de cambio conduce a la idea de reducir al estator las cantidades relativas al rotor, idea de gran valor para traducir las consideraciones sobre el flujo y la f.m.m. a un circuito equivalente del motor.

Consideremos por ejemplo un motor de rotor devanado, bobinado de tal forma que tenga el mismo número de polos y de fases que el estator. El número de espiras efectivas por fase en el devanado inductor es a veces mayor que las del devanado inducido. Compararemos los efectos magnéticos sobre este rotor con los que existirán sobre otro rotor magnéticamente equivalente que tuviera el mismo número de espiras que el estator: a igualdad de flujo y de velocidad, la relación entre las tensiones inducidas en el rotor real E_{rot} y en el equivalente E_{2s} es:

$$E_{2s} = aE_{rot} \quad (7-2)$$

Si ambos rotores han de ser magnéticamente equivalentes, sus ampere-vueltas han de ser los mismos, y la relación entre las intensidades en el devanado real I_{rot} y en el equivalente I_{2s} deberá ser necesariamente:

$$I_{2s} = \frac{I_{rot}}{a} \quad (7-3)$$

y consecuentemente, la relación entre las impedancias de dispersión a frecuencia de deslizamiento del rotor equivalente Z_{2s} y del real Z_{rot} será:

$$Z_{2s} = \frac{E_{2s}}{I_{2s}} = \frac{a^2 E_{rot}}{I_{rot}} = a^2 Z_{rot} \quad (7-4)$$

Con esto, las tensiones, intensidades e impedancias en el rotor equivalente definen los valores *reducidos al estator*. El proceso es esencialmente el mismo seguido para reducir al primario los valores del secundario en la teoría de los transformadores estáticos (véanse los apartados 1-6 y 1-7). Los factores de reducción no son más que la relación de espiras efectivas, y esencialmente son los mismos que aparecen en la teoría de transformadores.

Los factores de reducción, naturalmente, han de ser conocidos cuando se aplican específicamente a lo que ocurre en los circuitos de un rotor real. Bajo el punto de vista del estator, los efectos del rotor aparecen en función de sus cantidades reducidas, por lo que la teoría tanto de rotores devanados como de jaula de ardilla puede formularse partiendo del rotor reducido. Supondremos por tanto que las constantes del rotor reducido son conocidas.

Puesto que el devanado del rotor está cerrado en cortocircuito, la relación vectorial entre la f.e.m. E_{2s} a frecuencia de deslizamiento, generada en la fase de referencia del rotor reducido, y la intensidad I_{2s} en dicha fase es:

$$\frac{E_{2s}}{I_{2s}} = Z_{2s} = r_2 + jsx_2 \quad (7-5)$$

siendo Z_{2s} la impedancia de dispersión del rotor por fase a la frecuencia de deslizamiento, reducida al estator, r_2 la resistencia efectiva reducida y sx_2 la reactancia de dispersión a frecuencia de deslizamiento, también reducida. La reactancia se expresa de esta forma por ser proporcional a la frecuencia en el rotor y por tanto al deslizamiento, y así puede definirse x_2 como valor reducido de la reactancia de dispersión que tendría el rotor a la frecuencia del estator. En la Fig. 7-3 se representa el circuito equivalente de una fase del motor reducido, a frecuencia de deslizamiento.

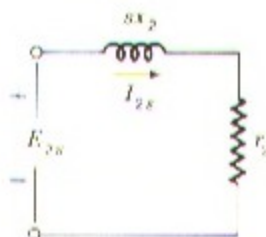


Fig. 7-3. Circuito equivalente del rotor de un motor de inducción polifásico.

7-2. CIRCUITO EQUIVALENTE

Las anteriores consideraciones sobre las ondas de flujo y de f.m.m. pueden muy bien ser interpretadas por medio del circuito equivalente de la máquina en régimen permanente: únicamente nos referiremos a las máquinas con devanados polifásicos simétricos alimentadas por una tensión polifásica equilibrada. Al igual que en el estudio de otros dispositivos polifásicos, es conveniente referirnos a máquinas trifásicas conectadas en Y, pues así las intensidades tienen el mismo valor que en la línea, y las tensiones son las simples, es decir, entre fases y neutro.

Estudiemos primeramente las condiciones en el estator. La onda de flujo en el entrehierro, que gira a la velocidad de sincronismo, crea una fuerza contraelectromotriz polifásica equilibrada en las fases del propio estator, y la tensión en sus terminales difiere de la fuerza contraelectromotriz en el valor de la caída de tensión en su impedancia de disper-

sión: la relación vectorial en la fase considerada es:

$$V_1 = E_1 + I_1(r_1 + jx_1) \quad (7-6)$$

siendo V_1 la tensión en bornes, E_1 la fuerza contraelectromotriz inducida por el flujo resultante en el entrehierro, I_1 la intensidad, r_1 la resistencia efectiva y x_1 la reactancia de dispersión, todo ello en el estator. En el circuito equivalente de la Fig. 7-4 se han señalado los sentidos positivos.

El flujo resultante en el entrehierro tiene su origen en la combinación de las f.m.m. de las intensidades en el estator y en el rotor. La corriente en el estator puede dividirse en dos componentes: la de carga y la de excitación, exactamente igual que en un transformador semejante. La corriente de carga I_2 produce una f.m.m. que neutraliza exactamente la f.m.m. de la corriente en el rotor. La componente de excitación I_φ es la corriente adicional requerida en el estator para crear el flujo resultante en el entrehierro, corriente que es función de la f.e.m. E_1 ; esta corriente de excitación puede a su vez descomponerse en una componente I_c en fase con E_1 que corresponde a las pérdidas en el núcleo y otra I_m retrasada 90° eléctricos respecto a E_1 que corresponde a la corriente magnetizante. En el circuito equivalente, la corriente magnetizante se incluye mediante una derivación shunt formada por la conductancia g_c de las pérdidas en el núcleo y la susceptancia magnetizante b_m en paralelo, conectadas en E_1 como puede verse en la citada Fig. 7-4. Tanto g_c como b_m se determinan corrientemente a la frecuencia nominal del estator y con un valor de E_1 aproximadamente igual al que se espera exista con el trabajo normal, y se admite que permanecen constantes aun con las pequeñas variaciones que se pueden presentar dentro del funcionamiento normal del motor.

Hasta aquí, el circuito equivalente que representa los fenómenos en el estator es exactamente igual que el del primario de un transformador, y para completar el circuito deberán incorporarse los efectos del rotor, lo que se hace considerando las tensiones e intensidades del estator y del rotor en función de los valores reducidos del rotor.

El estator genera unas ondas de flujo y de f.m.m. que giran a la velocidad de sincronismo. La onda de flujo induce en el rotor una tensión E_2 y a frecuencia de deslizamiento, y en el estator una fuerza contraelectromotriz E_1 . Si no fuera debido a los efectos de la velocidad, la tensión reducida del rotor sería igual a la del estator, ya que el devanado del rotor, una vez reducido, es idéntico que el del estator. Debido a que la velocidad relativa

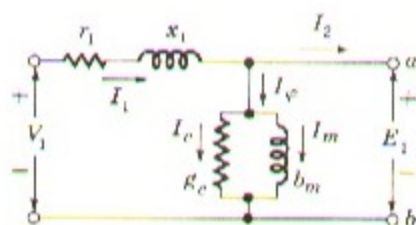


Fig. 7-4. Circuito equivalente del estator de un motor de inducción polifásico.

de la onda de flujo respecto al rotor es de s veces su velocidad respecto al estator, la relación entre los valores efectivos de las f.e.m. en estator y rotor será:

$$E_{2s} = sE_1 \quad (7-7)$$

La onda de f.m.m. del rotor está contrarrestada por la componente de carga I_2 de la intensidad en el estator, y por tanto, para valores efectivos:

$$I_{2s} = I_2 \quad (7-8)$$

al dividir la ecuación 7-7 por la 7-8 tendremos:

$$\frac{E_{2s}}{I_{2s}} = \frac{sE_1}{I_2} \quad (7-9)$$

Además, la onda de f.m.m. creada por la corriente de carga I_2 del estator debe estar desplazada de la onda de flujo resultante del mismo ángulo en el espacio que la onda de f.m.m. del rotor lo está respecto a la onda de flujo resultante, es decir, del ángulo de par δ . El ángulo de defase entre la tensión E_1 en el estator y la intensidad de carga I_2 en el mismo deberá ser por consiguiente igual al defase en el rotor, es decir, al ángulo ϕ_2 del factor de potencia del rotor. El hecho de que las f.m.m. del rotor y del estator estén en oposición queda implícitamente comprendido, ya que la corriente I_{2s} del rotor está engendrada por la f.m.m. E_{2s} a la fuerza contraelectromotriz E_1 . Por consiguiente, la ecuación 7-9 es cierta no solamente por lo que a valores efectivos se refiere sino también en su aspecto vectorial.

De las ecuaciones 7-5 y 7-9 tenemos:

$$\frac{sE_1}{I_2} = \frac{E_{2s}}{I_{2s}} = r_2 + jsx_2 \quad (7-10)$$

y dividiendo ésta por s :

$$\frac{E_1}{I_2} = \frac{r_2}{s} + jx_2 \quad (7-11)$$

Es decir, que el estator crea en el entrehierro unas condiciones magnéticas que dan lugar a una fuerza contraelectromotriz E_1 y a una corriente de carga I_2 en su devanado, condiciones que según la ecuación 7-11 son idénticas a lo que resulta de conectar una impedancia $(r_2/s) + jx_2$ en E_1 . En consecuencia, los efectos del rotor se pueden incorporar al circuito equivalente de la Fig. 7-4 conectando esta impedancia entre los puntos a y b , resultando finalmente el circuito de la Fig. 7-5.

El efecto combinado de la carga en el eje y de la resistencia del rotor se manifiesta así como una resistencia reducida r_2/s función del deslizamiento y por tanto de la carga

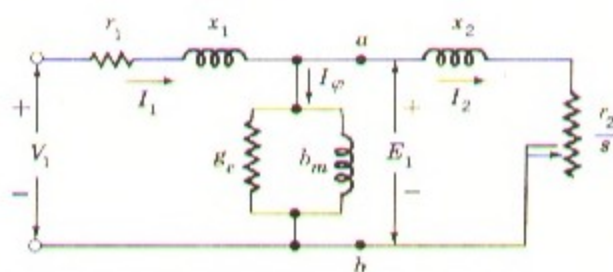


Fig. 7-5. Circuito equivalente de un motor de inducción polifásico.

mecánica. La intensidad en la impedancia reducida del rotor es igual a la componente de carga I_2 en el estator, y la tensión a través de dicha impedancia es igual a la f.e.m. E_1 del propio estator. Hay que observar que al reducir al estator las tensiones e intensidades del rotor debe cambiarse también su frecuencia a la del estator. Todos los fenómenos eléctricos del rotor, vistos desde el estator, tienen lugar a la frecuencia en éste, ya que su devanado simplemente ve unas ondas de f.m.m. y de flujo que se desplaza a la velocidad de sincronismo.

7-3. ANALISIS DEL CIRCUITO EQUIVALENTE

De entre los aspectos importantes en el funcionamiento en régimen permanente cabe destacar las variaciones de intensidad, velocidad y pérdidas al variar el par resistivo, así como el par de arranque y el par máximo: todas estas características pueden deducirse del circuito equivalente.

En efecto, el circuito equivalente muestra que la potencia total P_{g1} transferida por el estator a través del entrehierro es:

$$P_{g1} = q_1 I_2^2 \frac{r_2}{s} \quad (7-12)$$

siendo q_1 el número de fases en el estator. La pérdida total en el cobre del rotor evidentemente es:

$$\text{Pérdidas en el cobre del rotor} = q_1 I_2^2 r_2 \quad (7-13)$$

Por lo que la potencia mecánica interna P desarrollada por el motor es:

$$P = P_{g1} - \text{Pérdidas en el cobre del rotor} = q_1 I_2^2 \frac{r_2}{s} - q_1 I_2^2 r_2 \quad (7-14)$$

$$= q_1 I_2^2 r_2 \frac{1-s}{s} \quad (7-15)$$

$$= (1-s)P_{g1} \quad (7-16)$$

De aquí podemos ver que de la potencia total suministrada al rotor, la fracción $(1 - s)$ se convierte en potencia mecánica y la fracción s se disipa en pérdidas en su propio cobre, de lo que resulta evidente que un motor de inducción trabajando con gran deslizamiento es necesariamente de muy bajo rendimiento. Cuando se trata de hacer resaltar los aspectos de la potencia, frecuentemente el circuito equivalente se dibuja en la forma de la Fig. 7-6. La potencia mecánica interna por fase del estator es igual a la potencia absorbida por la resistencia $r_2(1 - s)/s$.

El par electromagnético interno T correspondiente a la potencia interna P puede obtenerse recordando que la potencia mecánica es igual al par por la velocidad angular. Por tanto, si ω_s es la velocidad angular síncrona del rotor expresada en radianes geométricos por segundo, tendremos:

$$P = (1 - s)\omega_s T \quad (7-17)$$

estando T expresado en newton-metros. Haciendo uso de la ecuación 7-15 deduciremos:

$$T = \frac{1}{\omega_s} q_1 I_2^2 \frac{r_2}{s} \quad (7-18)$$

siendo la velocidad angular síncrona:

$$\omega_s = \frac{4\pi f}{\text{polos}} \quad (7-19)$$

Los valores del par T y de la potencia P no son los de salida disponibles en el eje debido a que no se han tenido en cuenta los rozamientos, resistencia del aire y pérdidas parásitas. Evidentemente es correcto deducir de T y de P los efectos del rozamiento y de la resistencia del aire, y en general se admite que las pérdidas parásitas pueden también deducirse de igual forma: lo que finalmente resta queda disponible mecánicamente en el eje para suplir el trabajo útil.

En la teoría de los transformadores estáticos frecuentemente se simplifica el análisis del circuito equivalente ya sea despreciando completamente el ramal de excitación o aceptando la aproximación de llevarlo directamente a los terminales del primario. Estas aproxima-

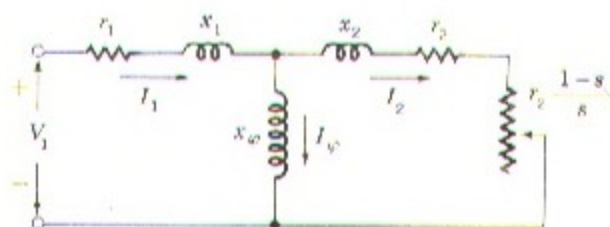


Fig. 7-6. Otra forma de circuito equivalente.

ciones no son admisibles en un motor de inducción funcionando en condiciones normales porque la presencia del entrehierro exige una corriente de excitación mucho mayor —del orden del 30 al 50 por ciento de la intensidad a plena carga— y porque las reactivancias de dispersión son también necesariamente altas. Puede simplificarse algo el circuito equivalente de un motor de inducción si se prescinde de la conductancia shunt g_c , y si los efectos del conjunto de las pérdidas en el núcleo se deducen de T o de P al mismo tiempo que se deducen los efectos del rozamiento, resistencia del aire y pérdidas parásitas: con estas providencias el circuito equivalente se convierte en el de la Fig. 7-7 *a* \leftrightarrow *b* y el error que se introduce es despreciable.

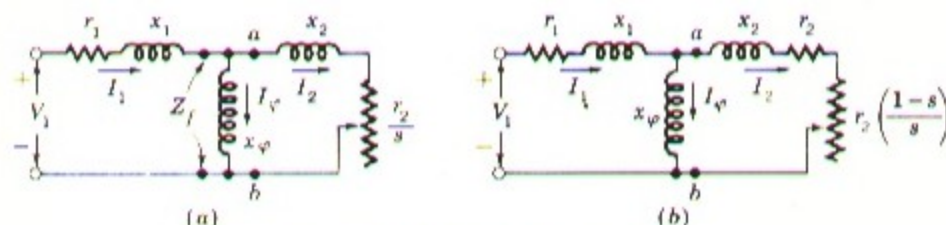


Fig. 7-7. Circuitos equivalentes.

Esta forma de proceder tiene también sus ventajas durante los ensayos del motor, ya que así no se precisa separar las pérdidas en vacío en el núcleo de las de rozamiento y resistencia del aire. En los posteriores estudios que realizaremos, se utilizarán estos últimos circuitos.

Ejemplo 7-1

Un motor trifásico de inducción de seis polos, 220 V (tensión compuesta), 10 c.v., 50 Hz, conexión Y, tiene los siguientes valores en ohm por fase reducidos al estator.

$$r_1 = 0,294 \quad r_2 = 0,144$$

$$x_1 = 0,503 \quad x_2 = 0,209 \quad x_\phi = 13,25$$

Las pérdidas totales por rozamiento, resistencia del aire y en el núcleo pueden considerarse de 403 W independientemente de la carga.

Si el deslizamiento es del 2 por ciento, calcúlese la velocidad, par de salida y potencia, intensidad en el estator, factor de potencia y rendimiento cuando el motor trabaja a la tensión y frecuencia nominales.

SOLUCION

La impedancia Z_f (fig. 7-7 *a*) representa físicamente la impedancia por fase presentada por el campo del entrehierro al estator, incluyendo tanto los efectos de la corriente de excitación como los de la corriente reducida del rotor.

De la Fig. 7-7 a:

$$Z_f = R_f + jx_f = \frac{r_2}{s} + jx_2 \text{ en paralelo con } jx_\varphi$$

Substituyendo valores, siendo $s = 0,0200$,

$$R_f + jx_f = 5,41 + j3,11$$

$$r_1 + jx_1 = 0,29 + j0,50$$

$$\text{Suma} = \underline{5,70 + j3,61} = 6,75 \angle 32,4^\circ \text{ ohm}$$

$$\text{Tensi3n simple aplicada} = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127 \text{ V}$$

$$\text{Intensidad en el estator} = I_1 = \frac{127}{6,75} = 18,8 \text{ A}$$

$$\text{Factor de potencia} = \cos 32,4^\circ = 0,844$$

$$\text{Velocidad s3ncrona} = \frac{2f}{p} = \frac{100}{6} = 16,6 \text{ rev/seg} = 1000 \text{ r.p.m.}$$

$$\omega_s = 2\pi(16,6) = 104,2 \text{ radianes/segundo}$$

$$\begin{aligned} \text{Velocidad del rotor} &= (1 - s) \times \text{velocidad s3ncrona} \\ &= 0,98 \times 1000 = 980 \text{ r.p.m.} \end{aligned}$$

De la ecuaci3n 7-12

$$\begin{aligned} P_{g1} &= q_1 I_1^2 \frac{r_2}{s_2} = q_1 I_1^2 R_f \\ &= 3 \times 18,8^2 \times 5,41 = 5740 \text{ W} \end{aligned}$$

De las ecuaciones 7-12 y 7-15 la potencia mec3nica interna es:

$$P = 0,98 \times 5740 = 5630 \text{ W}$$

y deduciendo de este valor los 403 W de p3rdidas:

$$\text{Potencia de salida} = 5630 - 403 = 5230 \text{ W} = 7,00 \text{ c.v.}$$

$$\begin{aligned} \text{Par de salida} &= \frac{\text{Potencia de salida}}{\omega_{\text{rotor}}} = \frac{5230}{0,98 \times 104,2} \\ &= 51,2 \text{ Nm} \end{aligned}$$

El rendimiento, calculado a partir de las pérdidas es:

Pérdidas en el cobre del estator ($3 \times 18,8^2 \times 0,294$)	=	312 W
Pérdidas en el cobre del rotor ($E_c 7-13)(0,02 \times 5740)$	=	115
Rozamiento, resistencia del aire y pérdida del núcleo	=	403
Pérdidas totales	=	830 W
Potencia de salida	=	5230 W
Potencia de entrada	=	6060 W

$$\frac{\text{Pérdidas}}{\text{Entrada}} = \frac{830}{6060} = 0,137 \quad \text{Rendimiento} = 1 - 0,137 = 0,863$$

Repitiendo los cálculos para otros valores del deslizamiento pueden obtenerse las características completas de funcionamiento del motor.

7.4. POTENCIA Y PAR SEGUN EL TEOREMA DE THEVENIN

Cuando interesan particularmente las relaciones par-potencia se consigue una apreciable simplificación aplicando al circuito equivalente del motor de inducción el teorema de Thévenin, para redes.

En su forma general este teorema permite substituir cualquier red formada de elementos de circuito lineales y de generadores de tensión vectorialmente constantes, como en los terminales a y b de la Fig. 7-8 *a*, por un vector tensión único E en serie con una impedancia única Z (Fig. 7-8 *b*). La tensión E es la que existe entre los terminales a y b de la red original cuando estos terminales están en circuito abierto, y la impedancia Z es la existente desde los mismos terminales cuando todas las fuentes de tensión de la red están en cortocircuito. Para la aplicación del teorema al circuito equivalente de un motor de inducción, los puntos a y b se corresponden con los de la misma denominación en las Figs. 7-7 *a* y 7-7 *b*, con lo que el circuito equivalente toma la forma de la Fig. 7-9. Por lo que se refiere a los fenómenos que tienen lugar a la derecha de los puntos a y b , los

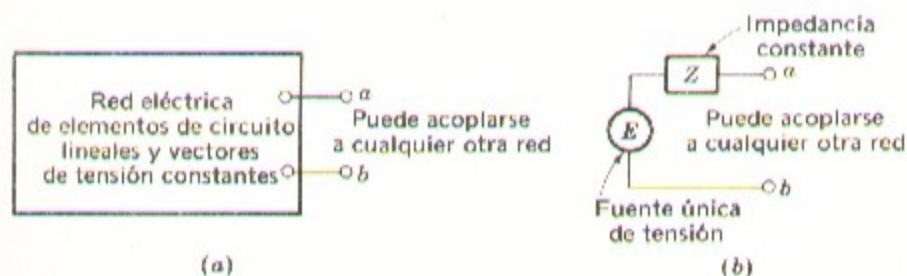


Fig. 7-8. (a) Red general lineal, y (b) su equivalente en los terminales ab según el teorema de Thévenin.

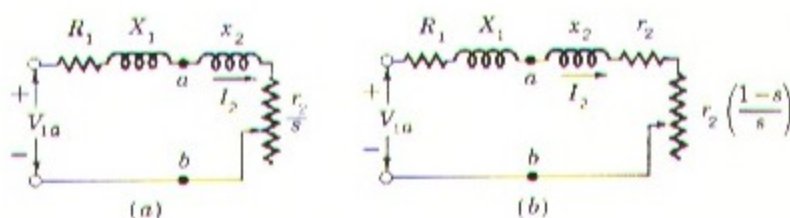


Fig. 7-9. Circuito equivalente de un motor de inducción, simplificado por el teorema de Thévenin.

Los circuitos de las Figs. 7-7 y 7-9 son idénticos entre sí cuando la tensión V_{1a} y la impedancia $R_1 + jX_1$ tienen los valores adecuados. De acuerdo con el teorema, la tensión de alimentación equivalente V_{1a} es la que existiría entre los terminales a y b de la Fig. 7-7 estando abiertos los circuitos del rotor, siendo su valor:

$$V_{1a} = V_1 - I_0(r_1 + jx_1) = V_1 \frac{jx_\varphi}{r_1 + jx_{11}} \quad (7-20)$$

en la que I_0 es la corriente de excitación en vacío y

$$x_{11} = x_1 + x_\varphi \quad (7-21)$$

es la reactancia propia del estator por fase que muy aproximadamente es igual a la componente reactiva de la impedancia del motor en vacío. En la mayor parte de los motores de inducción, el error que se comete prescindiendo de la resistencia del estator en la ecuación 7-20 puede despreciarse. La impedancia equivalente del estator $R_1 + jX_1$ es la impedancia entre los terminales a y b de la Fig. 7-7 vista hacia la alimentación estando cortocircuitada la fuente de tensión, y por tanto es:

$$R_1 + jX_1 = r_1 + jx_1 \text{ en paralelo con } jx_\varphi \quad (7-22)$$

Del circuito equivalente de Thévenin (Fig. 7-9) y de la expresión del par (ecuación 7-18) puede verse que:

$$T = \frac{1}{\omega_s} \frac{q_1 V_{1a}^2 (r_2/s)}{(R_1 + r_2/s)^2 + (X_1 + x_2)^2} \quad (7-23)$$

La forma general de la curva par-velocidad o par-deslizamiento es la que puede verse en la Fig. 7-10, en la que para mayor generalidad está representada tanto la región correspondiente a la acción motor ($s > 0$) como la correspondiente a la acción generador ($s < 0$).

En la Fig. 7-11 están representadas las curvas de la componente de carga I_2 de la intensidad en el estator, del par interno T , y de la potencia interna P todas ellas en función del deslizamiento s . En el ejemplo 7-2 se deducen datos para estas curvas. Las

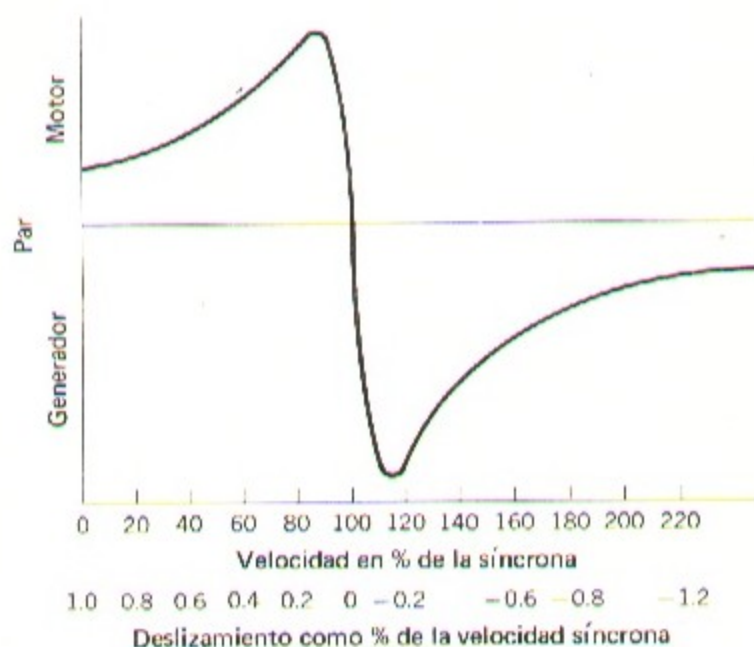


Fig. 7-10. Curva par-deslizamiento de una máquina de inducción como motor y como generador.

condiciones en el arranque son las correspondientes al deslizamiento $s = 1$. Para pasar físicamente a la región de deslizamiento s mayor que 1, deberá arrastrarse el motor hacia atrás en relación al sentido de giro de su campo magnético, aplicándole una potencia mecánica capaz de vencer el par interno T : la principal aplicación práctica de esta región es la de parar rápidamente el motor por el procedimiento de *inversión* o de *contracorrente*. Invertiendo dos entradas de un motor trifásico, se invierte la secuencia de fases y por tanto el sentido de giro del campo magnético: el motor se detiene por la influencia del par T , y se desconecta de la red antes de que pueda iniciar su movimiento en sentido contrario: de acuerdo con esto, la zona comprendida entre $s = 1$ y $s = 2$ se ha señalado en la Fig. 7-11 como *región de frenado*.

Tanto el par como la potencia máximos, T_{\max} y P_{\max} indicados en la Fig. 7-11 pueden determinarse por consideraciones sobre el circuito. Obsérvese que el par máximo y la potencia máxima no se consiguen ambos a la misma velocidad: el par interno pasa por su máximo cuando es máxima la potencia suministrada a r_2/s de la Fig. 7-9 a. Según el conocido principio de igualación de impedancias en la teoría de circuitos, esta potencia será mayor cuando la impedancia r_2/s iguale en magnitud a la impedancia existente entre ella y la tensión constante V_{1a} , o para un deslizamiento $s_{\max T}$ en el que se cumpla que:

$$\frac{r_2}{s_{\max T}} = \sqrt{R_1^2 + (X_1 + x_2)^2} \quad (7-24)$$

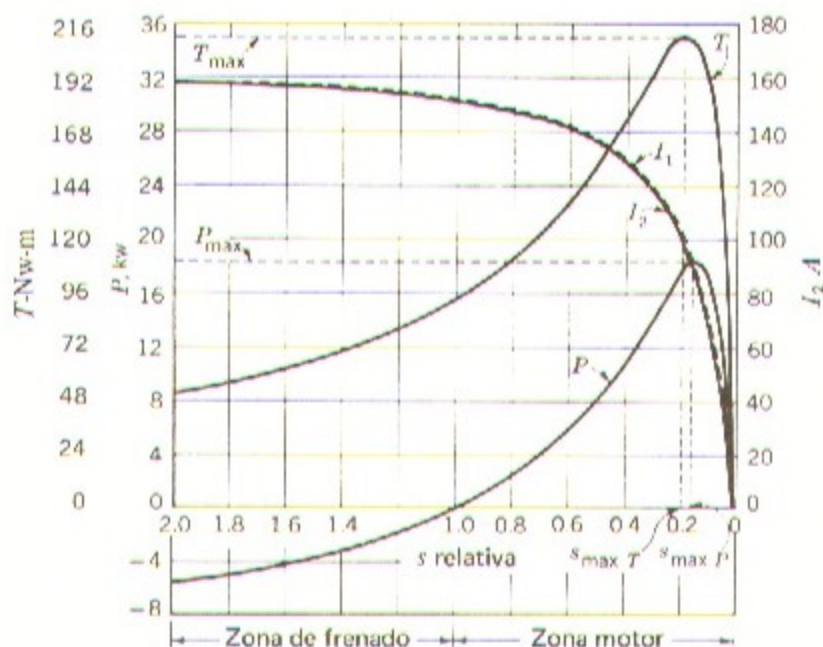


Fig. 7-11. Curvas calculadas de par, potencia e intensidad del motor de inducción de 10 c.v. de los ejemplos 7-1 y 7-2.

por lo que el deslizamiento con par máximo será:

$$s_{\max T} = \frac{r_2}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + x_2)^2}} \quad (7-25)$$

siendo el par correspondiente, según la ecuación 7-23,

$$T_{\max} = \frac{1}{\omega_s} \frac{0,5q_1 V_1^2 a}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + x_2)^2}} \quad (7-26)$$

Ejemplo 7-2

Determinar, para el motor del ejemplo 7-1, los siguientes datos:

- La componente de carga I_2 de la intensidad en el estator, el par interno T , y la potencia interna P con un deslizamiento $s = 0,03$
- El par interno máximo y su correspondiente velocidad.
- El par de arranque interno y la correspondiente intensidad de carga I_2 en el estator.

SOLUCION

Pasemos el circuito a su forma según *Thévenin*.

De la ecuación 7-20 tendremos $V_{1a} = 122,3$ y de la 7-22, $R_1 + jX_1 = 0,273 + j0,490$.

a. Siendo $s = 0,03$, $r_2/s = 4,80$. Luego, de la Fig. 7-9 a,

$$I_2 = \frac{122,3}{\sqrt{5,07^2 + 0,699^2}} = 23,9 \text{ A}$$

De la ecuación 7-18,

$$T = \frac{1}{104,2} 3 \times 23,9^2 \times 4,80 = 78,9 \text{ Nw-m}$$

y de la ecuación 7-15,

$$P = 3 \times 23,9^2 \times 4,80 \times 0,97 = 7970 \text{ W}$$

Las curvas de la Fig. 7-11 se han trazado repitiendo estos cálculos para distintos valores de s .

b. En el punto de par máximo, según la ecuación 7-25 tendremos:

$$s_{\max T} = \frac{0,144}{\sqrt{0,273^2 + 0,699^2}} = \frac{0,144}{0,750} = 0,192$$

a la velocidad de:

$$(1 - 0,192) 1000 = 808 \text{ r.p.m.}$$

y de la ecuación 7-26,

$$T_{\max} = \frac{1}{104,2} \frac{0,5 \times 3 \times 122,3^2}{0,273 + 0,750} = 211 \text{ Nw-m.}$$

c. En el arranque $s = 1$ y r_2 lo consideraremos constante; por tanto

$$\frac{r_2}{s} = r_2 = 0,144 \quad R_1 + \frac{r_2}{s} = 0,417$$

$$I_2 = \frac{122,3}{\sqrt{0,417^2 + 0,699^2}} = 150,5 \text{ A}$$

y de la ecuación 7-18

$$T_{\text{arranque}} = \frac{1}{104,2} 3 \times 150,5^2 \times 0,144 = 94 \text{ Nw-m.}$$

Hemos visto ya que el motor de inducción clásico de jaula de ardilla es substancialmente un motor de velocidad casi constante con una variación del orden del 5 por ciento entre su velocidad en vacío y a plena carga: se puede conseguir variar la velocidad mediante el empleo de un rotor devanado e insertando resistencias exteriores en el circuito del mismo. En el campo de operación normal, dichas resistencias exteriores no hacen más que aumentar la impedancia del rotor, requiriéndose así un mayor deslizamiento para conseguir un par y una f.m.m. del rotor dados. En la Fig. 7-12 puede verse la influencia que tiene el aumento de resistencia del rotor en la característica par-velocidad. Observando las distintas curvas en la zona de velocidad nula podrán apreciarse las variaciones en el par de arranque al variar dicha resistencia. En las ecuaciones 7-25 y 7-26 puede verse que el deslizamiento correspondiente al par máximo es directamente proporcional a la resistencia r_2 del rotor, pero que el valor de dicho par máximo es independiente de ella. Al crecer r_2 por inserción de resistencias exteriores en el circuito de un rotor devanado, se mantiene el par interno máximo, pero puede regularse la velocidad a la que se produce.

Al aplicar el circuito equivalente de un motor de inducción no deben olvidarse las ideas en que se apoya, siendo esto particularmente necesario cuando se realizan estudios abar-

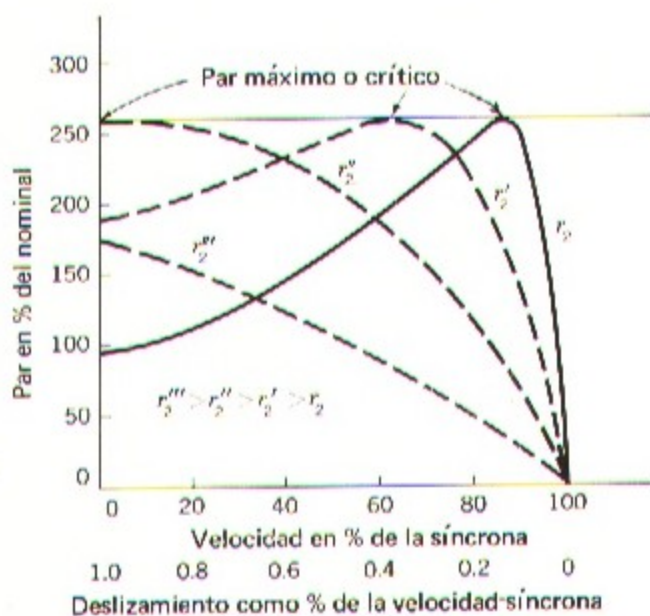


Fig. 7-12. Curvas par-deslizamiento de un motor de inducción al variar la resistencia del circuito del rotor.

cando un amplio campo de velocidades como ocurre con los problemas de arranque: la saturación bajo las fuertes intensidades de arranque tiene una influencia notable sobre las reactancias del motor. Además, las corrientes en el rotor son de la frecuencia de deslizamiento, que evidentemente varía desde el valor de la del estator, cuando la velocidad es cero, hasta otro valor bien bajo a velocidad máxima: la distribución de la intensidad en los conductores del rotor, y por consiguiente la resistencia de éstos puede variar muy apreciablemente entre uno y otro caso. Los errores debidos a estas causas pueden reducirse al mínimo utilizando las constantes del circuito equivalente determinadas para las condiciones operativas previstas, con la máxima aproximación posible.¹

7-5. CURVAS NORMALIZADAS PAR-DESLIZAMIENTO

Una característica común a todas las ramas de la ingeniería es la de que las fórmulas que expresan las particularidades de funcionamiento de los distintos dispositivos pueden presentarse en forma algo complicada por comprender una multitud de variables distintas. Por ejemplo, la ecuación 7-23 comprende nueve cantidades, incluidas las variables dependientes e independientes T y s . Frecuentemente resulta eficaz, para simplificar las ecuaciones, escribirlas en forma no dimensional en función de ciertas relaciones, en lugar de hacerlo en magnitudes absolutas. Estos resultados se obtienen, para los motores de inducción, expresando la relación par-deslizamiento como relación entre las razones T/T_{\max} y $s/s_{\max T}$.

De las ecuaciones 7-23 y 7-26 tenemos:

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{2[R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2}] \frac{r_2}{s}}{\left(R_1 + \frac{r_2}{s}\right)^2 + (X_1 + X_2)^2} \quad (7-27)$$

Puesto que el resultado final debe ser función de $s/s_{\max T}$ en lugar de serlo simplemente de s , deberemos reemplazar r_2 de la ecuación 7-27 por su valor en función de $s_{\max T}$ de la ecuación 7-25.

Después de reducir algebraicamente queda:

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{1 + \sqrt{Q^2 + 1}}{1 + \frac{1}{2} \sqrt{Q^2 + 1} \left(\frac{s}{s_{\max T}} + \frac{s_{\max T}}{s} \right)} \quad (7-28)$$

en donde:
$$Q = \frac{X_1 + X_2}{R_1} \quad (7-29)$$

Se utiliza el símbolo Q por la semejanza entre esta relación y el factor de calidad Q o relación reactancia-resistencia en la teoría de circuitos.

¹ Para más detalles véase R. F. Horrell y W. E. Wood, "A Method of Determining Induction Motor Speed-Torque-Current Curves from Reduced Voltage Tests" *Trans. AIEE*, 73 (III): 670-674 (1954).

En forma análoga, la relación entre la intensidad de carga I_2 en el estator y la de máximo par $I_{2\max T}$ puede escribirse:

$$\frac{I_2}{I_{2\max T}} = \sqrt{\frac{(1 + \sqrt{1 + Q^2})^2 + Q^2}{\left(1 + \frac{s_{\max T}}{s} \sqrt{1 + Q^2}\right)^2 + Q^2}} \quad (7.30)$$

En la Fig. 7-13 se han trazado curvas de T/T_{\max} para varios valores de Q en función de la relación de deslizamientos apropiada, y en la Fig. 7-14 curvas $I_2/I_{2\max T}$ en las mismas condiciones. La mayor parte de los motores de inducción quedan comprendidos en la zona desde $Q = 3$ hasta $Q = 7$ y como promedio puede considerarse el intermedio entre estos dos valores. Obsérvese que la influencia de las variaciones de Q sobre estas curvas es relativamente poca, pero téngase en cuenta que tales curvas representan relaciones de valores y no valores absolutos. Dada esta poca influencia de Q se puede llegar a una expresión simplificada de la relación entre el par y el deslizamiento haciendo $Q = \infty$ en la ecuación 7-28, lo que equivale a decir que la resistencia R_1 del estator tiene una influencia despreciable. El resultado es:

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{2}{s/s_{\max T} + s_{\max T}/s} \quad (7.31)$$

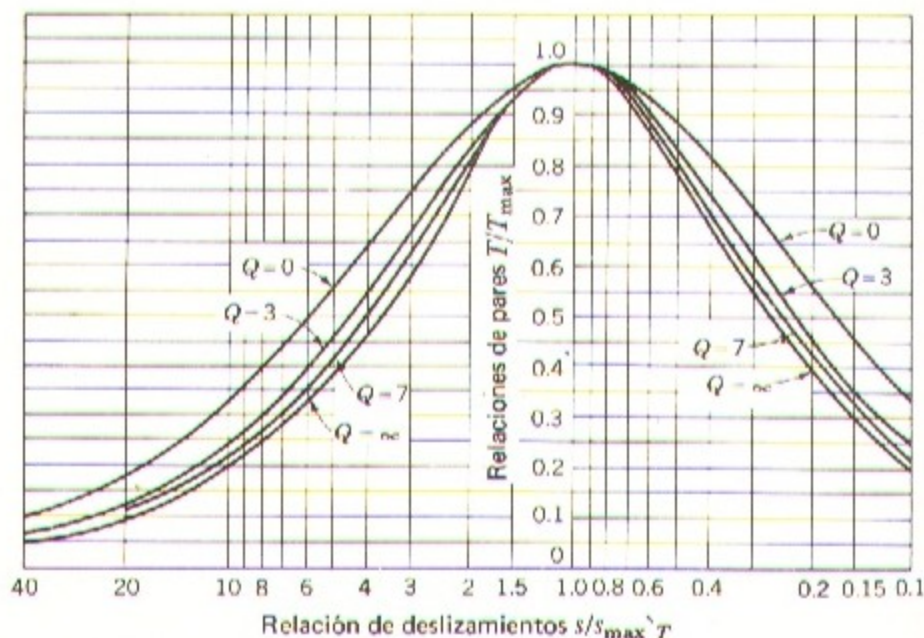


Fig. 7-13. Curvas normalizadas par-deslizamiento de motores polifásicos de inducción.

El hecho de poder normalizar las curvas par-deslizamiento en la forma de la Fig. 7-13 muestra uno de los rasgos característicos de los motores de inducción simples: si se especifica el par máximo y el deslizamiento a que tiene lugar, la característica par-deslizamiento queda fijada aproximadamente para la gama completa de velocidades, salvo por lo que al pequeño efecto de Q se refiere.

Esta afirmación está sujeta, naturalmente, a la limitación de que los parámetros del motor sean constantes, y por consiguiente no es aplicable a los motores con rotor de resistencia variable.

Ejemplo 7-3

Un motor de inducción con rotor de resistencia constante desarrolla su par máximo, igual a 2,5 veces su par de plena carga, cuando el deslizamiento es de 0,20. Determinése su deslizamiento a plena carga y su par de arranque a tensión nominal.

SOLUCION

A plena carga, $T/T_{\max} = 0,40$. En la Fig. 7-13 podemos ver que el valor correspondiente de $s/s_{\max T}$ está comprendido entre 0,17 y 0,19 para valores de Q desde 3 a 7 como es corriente en motores normales. Por consiguiente, el deslizamiento a plena carga estará comprendido entre $0,17 \times 0,20 = 0,034$ y $0,19 \times 0,20 = 0,038$.

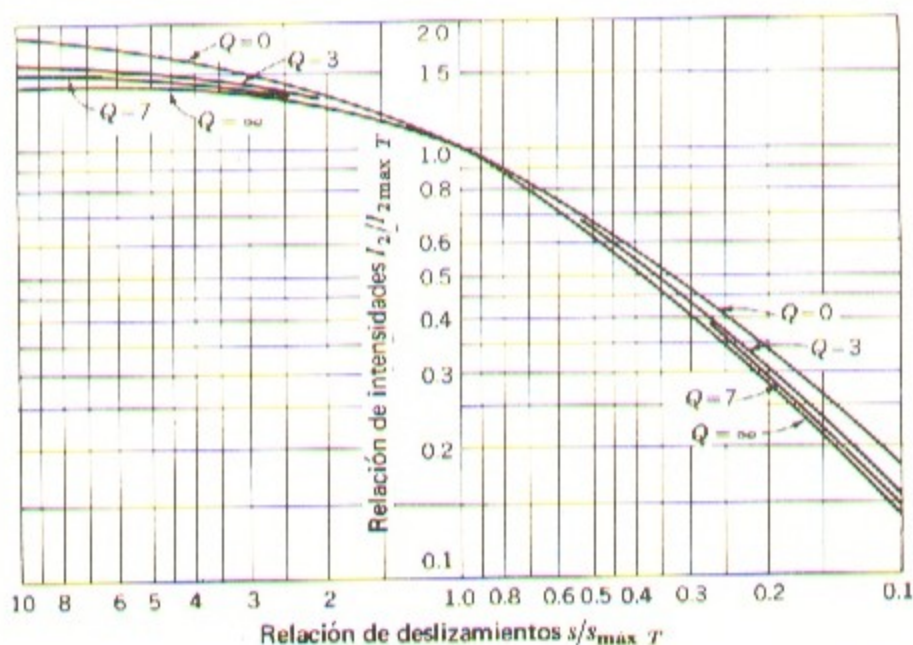


Fig. 7-14. Curvas normalizadas intensidad-deslizamiento de motores polifásicos de inducción.

En el momento del arranque, $s/s_{\max T} = 1/0,20 = 5$. Según la Fig. 7-13 el valor correspondiente de T/T_{\max} está comprendido entre 0,42 y 0,45 para valores de Q desde 7 a 3. Por consiguiente el par de arranque estará comprendido entre $0,42 \times 2,5 = 1,05$ y $0,45 \times 2,5 = 1,13$ veces el par de plena carga.

Ejemplo 7-4

Un motor de inducción de rotor devanado de 500 c.v. desarrolla su potencia nominal de plena carga cuando trabaja con el rotor en cortocircuito, a la tensión y frecuencia nominales, y con el 1,5 por ciento de deslizamiento. El par máximo que este motor puede desarrollar es igual al 200 por ciento del par a plena carga.

El valor de Q del circuito equivalente de Thévenin es 7. A los efectos de este ejemplo pueden despreciarse las pérdidas mecánicas y las parásitas.

Detérminese:

- Las pérdidas I^2R en el rotor a plena carga, expresadas en kW.
- El deslizamiento con par máximo.
- La intensidad en el rotor con el par máximo.
- El par correspondiente a un deslizamiento del 20 por ciento.
- La intensidad en el rotor con deslizamiento del 20 por ciento.

Exprésense el par y las intensidades del rotor en valores relativos, tomando por base los valores a plena carga.

SOLUCION

a. Pérdidas I^2R en el rotor a plena carga. La potencia P_{g1} absorbida por el estator se reparte entre la potencia mecánica P y las pérdidas en el rotor I_2R en la proporción $(1-s)/s$. En consecuencia, despreciando las pérdidas mecánicas y parásitas, a plena carga tendremos:

$$P_{g1} = \frac{P}{1-s} = \frac{500 \times 0,746}{0,985} = 379 \text{ kW}$$

$$I^2R \text{ en el rotor} = sP_{g1} = 0,015 \times 379 = 5,69 \text{ kW}$$

Los puntos *a* y *b* pueden resolverse por medio de las curvas de las Figs. 7-13 y 7-14.

b. Deslizamiento con par máximo. La relación T_{pc}/T_{\max} vale, según los datos del problema, 0,50, indicando el subíndice *pc* la plena carga.

De la Fig. 7-13, siendo $Q = 7$ y $T/T_{\max} = 0,5$, tendremos:

$$\frac{s}{s_{\max T}} = \frac{s_{pc}}{s_{\max T}} = 0,25$$

de donde

$$s_{\max T} = \frac{s_{pe}}{0,25} = \frac{0,015}{0,25} = 0,060$$

c. *Intensidad en el rotor con par máximo.* De la Fig. 7-14, siendo $Q = 7$ y la relación de deslizamientos $s/s_{\max T} = 0,25$, a plena carga tendremos:

$$\frac{I_2}{I_{2\max T}} = \frac{I_{2pe}}{I_{2\max T}} = 0,355$$

de donde

$$I_{2\max T} = \frac{I_{2pe}}{0,355} = 2,82 I_{2pe}$$

d y e. *Par e intensidad en el rotor con $s = 0,20$.* La relación de deslizamiento es:

$$\frac{s}{s_{\max T}} = \frac{0,20}{0,060} = 3,33$$

Las correspondientes relaciones de par y de intensidad pueden tomarse de las curvas de las Figs. 7-13 y 7-14 para $Q = 7$ y $s/s_{\max T} = 3,33$.

De la Fig. 7-13:

$$\frac{T}{T_{\max}} = 0,60 \text{ o sea: } T = 0,60 T_{\max} = 1,20 T_{pe}$$

y de la Fig. 7-14:

$$\frac{I_2}{I_{2\max}} = 1,40 \text{ o sea: } I_2 = 1,40 I_{2\max T}$$

y del resultado de c:

$$I_2 = 1,40 \times 2,82 I_{2pe} = 3,95 I_{2pe}$$

7-6. EFECTOS DE LA RESISTENCIA DEL ROTOR. ROTORES DE DOBLE JAULA

Los motores de inducción con resistencia del rotor constante suponen un cierto compromiso para el diseño de éste. En efecto; para conseguir un rendimiento alto en las condiciones normales de servicio se requiere que la resistencia del rotor sea baja, pero una

resistencia baja se traduce en un par de arranque pobre y en una fuerte intensidad con factor de potencia bajo durante la puesta en marcha.

a. Motores de rotor devanado

Una forma efectiva de evitar los inconvenientes citados consiste en el empleo de rotores devanados: los terminales del devanado se conectan a anillos rozantes sobre los que se apoyan sendas escobillas.

Para la puesta en marcha se conectan resistencias en serie con el devanado del rotor, consiguiéndose así aumentar el par y disminuir la corriente de arranque mejorando el factor de potencia. En la Fig. 7-12 puede verse la influencia de la resistencia del rotor sobre la característica par-velocidad. Si se requiere un par de arranque elevado puede conseguirse que el par máximo tenga lugar a máquina parada empleando una resistencia de rotor adecuada. A medida que el motor va adquiriendo velocidad puede irse reduciendo la resistencia exterior de tal forma que durante la aceleración actúe siempre el par máximo. Puesto que las pérdidas en el rotor I^2R en su mayor parte se disipan en las resistencias exteriores, el calentamiento del rotor durante la puesta en marcha es menor que el que sufriría si tales resistencias se hubieran incorporado al devanado. Una vez ya en marcha normal, el devanado del rotor puede cerrarse en cortocircuito sobre las mismas escobillas. Este procedimiento permite proyectar el rotor de forma que su devanado tenga poca resistencia, con lo que el rendimiento en marcha normal será alto y el deslizamiento a plena carga poco. Además de utilizarse los motores de rotor devanado cuando se requiere un par de arranque fuerte, pueden emplearse también en servicios de velocidad variable. El principal inconveniente de estos motores es su mayor coste comparados con los de jaula de ardilla.

Por medio del siguiente ejemplo pueden verse los principales efectos que la variación de resistencia del rotor tiene sobre las características en el arranque y en marcha normal de un motor de inducción.

Ejemplo 7-5

El devanado del rotor del ejemplo 7-4 es trifásico conectado en Y, y tiene una resistencia r_{rot} .

Si la resistencia del circuito rotórico se aumenta hasta $5r_{rot}$ conectando resistencias no inductivas en serie con cada uno de los anillos rozantes, determínese:

- El deslizamiento con el que el motor desarrollará el mismo par de plena carga que en el ejemplo 7-4.
- Las pérdidas totales I^2R en el circuito del rotor con el par de plena carga.
- La potencia de salida, en c.v., correspondiente al par de plena carga.
- El deslizamiento con el par máximo.
- La intensidad en el rotor con el par máximo.
- El par de arranque.
- La intensidad de arranque en el rotor.

Expresense los pares y las intensidades en unidades relativas tomando como base los valores del par a plena carga.

SOLUCION

La solución supone reconocer el hecho de que el único camino por el que el estator puede conocer lo que sucede en el rotor es por el efecto de la resistencia r_2/s . El examen del circuito equivalente muestra que para una tensión y frecuencia aplicadas dadas, todo cuanto concierne al funcionamiento del estator queda fijado por el valor de r_2/s siendo constantes las demás impedancias. Por ejemplo, si se duplican r_2 y s simultáneamente, el estator queda ignorante del cambio realizado: la intensidad en el estator, el factor de potencia, la potencia suministrada al entrehierro y el par se mantienen constantes mientras se mantenga constante la relación r_2/s .

Al examinar desde el rotor los efectos de duplicar simultáneamente r_2 y s se añaden ciertas significaciones físicas al argumento. Un observador situado en el rotor verá la onda de flujo resultante en el entrehierro desplazarse frente a él a velocidad doble que la de deslizamiento original, induciendo en el rotor una tensión doble a frecuencia de deslizamiento también doble de las originales. Por consiguiente, la reactancia del rotor queda también duplicada, y puesto que por definición se había duplicado la resistencia del rotor, lo mismo sucede con la impedancia, pero el factor de potencia del rotor no varía. Puesto que han quedado duplicadas la tensión y la impedancia del rotor, el valor eficaz de la intensidad en el mismo se ha mantenido constante habiendo variado únicamente su frecuencia; sin embargo en el entrehierro se conservan las mismas ondas sincrónicas de flujo y de f.m.m. con el mismo ángulo de par. El observador en el rotor estará por tanto de acuerdo con su oponente en el estator de que no ha variado el par al variar la resistencia del rotor y el deslizamiento en la misma proporción.

Por tanto, el observador del rotor adquiere conocimiento de dos hechos que no repercuten en el estator, a saber: (1) Las pérdidas en el rotor I^2R han quedado dobladas, y (2) el motor gira más lentamente desarrollando por consiguiente menor potencia con el mismo par. Dicho de otra forma: han aumentado las pérdidas I^2R que calientan el rotor y por consiguiente, de la potencia total absorbida por el estator queda menos disponible para convertirse en forma mecánica.

Las anteriores consideraciones pueden aplicarse a la resolución del ejemplo 7-5.

a. Deslizamiento con el par de plena carga

Si la resistencia del rotor se ha aumentado 5 veces, el deslizamiento también deberá ser 5 veces mayor para conservar el mismo valor de r_2/s y por consiguiente el mismo par. El deslizamiento a plena carga, dado en el ejemplo 7-4 es 0,015, y por tanto el nuevo deslizamiento será $5 \times 0,015 = 0,075$.

b. Pérdidas en el rotor I^2R con el par de plena carga

El valor eficaz de la intensidad en el rotor es el mismo que en el ejemplo 7-4 a plena carga, y por consiguiente las pérdidas I^2R serán cinco veces mayores que las de plena carga halladas en el apartado a del ejemplo 7-4, o sea:

$$\text{Pérdidas } I_2R \text{ en el rotor} = 5 \times 5,69 = 28,45 \text{ kW}$$

c. Potencia de salida con el par de plena carga

El aumento del deslizamiento motiva que la velocidad relativa $1 - s = 0,985$ del ejemplo 7-4 descienda a $1 - s = 0,925$ al añadir las resistencias al rotor: el par se mantiene invariado. La potencia de salida ha descendido también proporcionalmente:

$$P = \frac{0,925}{0,985} 500 = 469,5 \text{ c.v.}$$

La disminución de potencia es igual al aumento de pérdidas $I^2 R$ en el rotor.

d. Deslizamiento con par máximo

Si la resistencia del rotor se ha aumentado 5 veces, también el deslizamiento con par máximo aumentará 5 veces. Según se halló en el apartado *b* del ejemplo 7-4, el deslizamiento original con par máximo era 0,060; el nuevo deslizamiento, al añadir las resistencias será:

$$s_{\max T} = 5 \times 0,060 = 0,30$$

e. Intensidad en el rotor con par máximo

El valor eficaz de la corriente rotórica con par máximo es independiente de la resistencia del rotor: únicamente varía su frecuencia. Por consiguiente, del apartado *c* del ejemplo 7-4 tenemos:

$$I_{2 \max T} = 2,82 I_{2 \text{pc}}$$

f. Par de arranque

Con la resistencia del rotor multiplicada por 5, el par de arranque será el mismo que originariamente correspondía a un deslizamiento 0,20, es decir igual al hallado en el apartado *d* del ejemplo 7-4, o sea:

$$T = 1,20 T_{\text{pc}}$$

g. Intensidad de arranque en el rotor

La corriente en el arranque con las resistencias añadidas será la misma que cuando el motor gira con deslizamiento 0,20 y sus anillos rozantes en cortocircuito, como en el apartado *e* del ejemplo 7-4, es decir:

$$I_2 = 3,95 I_{\text{pc}}$$

b. Rotores de barras altas y de doble jaula

Un procedimiento sencillo e ingenioso para conseguir que la resistencia del rotor varíe automáticamente al variar la velocidad se basa en el hecho de que la frecuencia en el rotor a motor parado es igual a la del estator, y que a medida que el motor se va acelerando

dicha frecuencia va disminuyendo hasta alcanzar valores muy bajos —unos 2 ó 3 Hz a plena carga en un motor de 50 Hz. Dando una forma y disposición adecuadas a las barras puede conseguirse que en un rotor de jaula de ardilla su resistencia efectiva a 50 Hz sea varias veces superior que a 2 ó 3 Hz. Los distintos procedimientos empleados se basan todos en el efecto inductivo que el flujo de dispersión en las ranuras tiene sobre la distribución de corriente en la sección transversal de las barras de la jaula. Esencialmente el fenómeno es el mismo que el efecto skin y el de proximidad en cualquier sistema de conductores por los que circule una corriente alterna.

Consideremos un rotor de jaula de ardilla cuyas barras sean profundas y estrechas como la representada en sección en la Fig. 7-15, en la que se representa también el aspecto general del campo de dispersión en las ranuras originado por la corriente que circula por la barra.



Fig. 7-15. Barra alta en un rotor y flujo de dispersión en la ranura.

Si la permeabilidad del hierro fuera infinita, todas las líneas del flujo de dispersión se cerrarían por debajo de la ranura tal como se muestra en la figura. Supongamos ahora que cada barra está formada por un número infinito de estratos de espesor infinitesimal: en la figura citada se han señalado dos de estos estratos: el del fondo y el más exterior.

La inductancia de dispersión del estrato inferior es mayor que la del superior ya que concatena con mayor flujo de dispersión, y como sea que todos los estratos están en paralelo, la corriente que circulará por los de poca inductancia será mayor que la que circula por los de mucha, por lo que la intensidad total se verá forzada hacia la parte alta de la ranura y la corriente en los estratos superiores superará a la de los del fondo. Esta distribución no uniforme de la corriente equivale a un aumento de la resistencia efectiva y a una pequeña disminución de la inductancia de dispersión efectiva de la barra. Puesto que la distorsión en la distribución de corriente depende de un efecto inductivo, la resistencia efectiva será función de la frecuencia y función también de la altura de la barra y de la permeabilidad y resistividad del material que la forma.

La curva de la Fig. 7-16 da la relación entre la resistencia efectiva en alterna y en continua, en función de la frecuencia, para una barra de cobre de 25 m.m. de altura. De

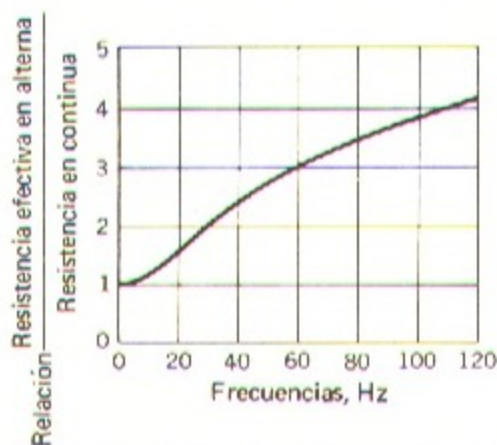


Fig. 7-16. Efecto Skin en una barra de cobre de rotor, de 25 mm. de altura.

esta forma puede proyectarse un rotor de jaula de ardilla con barras altas de tal manera que su resistencia efectiva a la frecuencia del estator (motor parado) sea varias veces superior a su resistencia en continua: a medida que el motor se acelera decrece la frecuencia en el rotor, así como la resistencia efectiva de su devanado, que con pequeños deslizamientos llega a ser casi la misma que con corriente continua.

Una variante de este procedimiento, encaminada a obtener resultados similares, es el empleo de una doble jaula dispuesta como en la Fig. 7-17. El devanado consiste en barras dispuestas en dos capas, cortocircuitadas en sus extremos mediante anillos apropiados.

Las barras superiores son de menor sección transversal que las inferiores teniendo en consecuencia mayor resistencia. La forma general del campo de dispersión en las ranuras puede verse en la misma figura, en la que resulta evidente que la inductancia de las barras inferiores es mayor que la de las superiores debido al flujo que cruza la ranura en el espacio entre ambas, y esta diferencia puede acrecentarse dimensionando conveniente-



Fig. 7-17. Barras de un rotor de doble jaula y flujo disperso en la ranura.

mente el estrechamiento de la ranura entre las dos barras. Con motor parado, es decir, cuando la frecuencia del rotor es igual a la del estator, apenas circula corriente por las barras inferiores debido a su gran reactancia: la resistencia efectiva del rotor a motor parado es por consiguiente aproximadamente igual a la de las barras superiores, de alta resistencia. A la baja frecuencia que corresponde a pequeños deslizamientos la reactancia pierde importancia y la resistencia efectiva del rotor equivale aproximadamente a la de las dos capas de barras en paralelo.

Obsérvese que puesto que la resistencia efectiva y la inductancia de dispersión de los rotores de barras altas o de doble jaula varían con la frecuencia, los parámetros r_2 y x_2 que representan los efectos reducidos de la resistencia e inductancia de dispersión del rotor vistos desde el estator no se mantienen constantes, y el proceso visto en el apartado 7-5 no puede aplicarse estrictamente: su uso, en todo caso, no es más que una aproximación más o menos rigurosa. Para representar las reacciones del rotor por los efectos del deslizamiento, junto con elementos de resistencia y reactancia constantes, se requerirá un circuito equivalente de forma más complicada.

El sencillo circuito equivalente deducido en el apartado 7-2 sigue representando correctamente el motor, pero ahora r_2 y x_2 serán funciones del deslizamiento. Todas las relaciones básicas son aún aplicables al motor si se ajustan adecuadamente los valores de r_2 y x_2 a los cambios de frecuencia. Por ejemplo, al determinar las condiciones de arranque deberá tomarse r_2 y x_2 por sus valores efectivos a la frecuencia del estator, y al calcular las condiciones de funcionamiento con bajo deslizamiento, deberá tomarse para r_2 su valor efectivo a la baja frecuencia correspondiente y para x_2 deberá tomarse el valor de la reactancia a la frecuencia del estator correspondiente al valor efectivo de la inductancia de dispersión del rotor a baja frecuencia.

Dentro de la gama corriente de deslizamientos a marcha normal puede considerarse que la resistencia del rotor y la inductancia de dispersión son constantes y de valor aproximadamente igual al correspondiente con corriente continua.

c. Consideraciones sobre aplicación de motores

Utilizando doble jaula o barras altas pueden diseñarse los motores de jaula de ardilla de forma que tengan unas buenas características de arranque, como consecuencia de la alta resistencia del rotor, al mismo tiempo que posean buenas características en marcha normal derivadas de una baja resistencia en el mismo. De todas formas, la solución es siempre de compromiso pues el motor carece de la flexibilidad que tienen los de rotor bobinado con resistencias exteriores: este último deberá emplearse siempre que las exigencias del arranque sean muy severas.

Para cubrir las necesidades corrientes de la industria se dispone en general de motores de jaula de ardilla de distintas potencias normalizadas hasta 200 c.v. y a distintas frecuencias, tensiones y velocidades. Los motores de potencia mayor que la indicada se consideran en general como de uso especial más bien que como de uso general.

De acuerdo con la terminología establecida por la NEMA existen varios tipos normalizados para satisfacer distintas necesidades de arranque y de marcha: en la Fig. 7-18 están representadas las curvas características par-velocidad correspondientes a los cuatro tipos

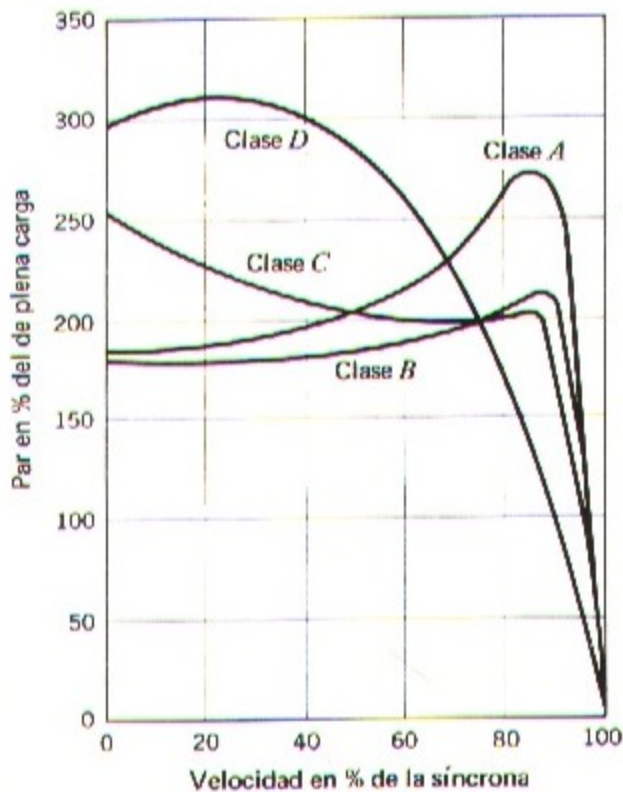


Fig. 7-18. Curvas clásicas par-velocidad de motores de inducción de uso general a 1500 r.p.m.

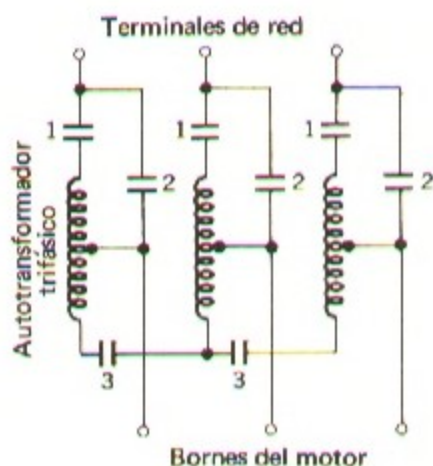
más comunes. Estas curvas son típicas de motores de 1500 r.p.m. (velocidad síncrona) de potencia comprendida entre 7,5 y 200 c.v. si bien debe tenerse en cuenta que individualmente muchos motores pueden diferir bastante de estas curvas promedias.

A continuación se reseñan brevemente las características principales de estos cuatro tipos:

CLASE A

Par y corriente de arranque normales, bajo deslizamiento. Este tipo tiene en general un rotor de jaula simple de baja resistencia. Posee buenas características en marcha a expensas de las de arranque. A plena carga el deslizamiento es poco y el rendimiento alto. El par máximo está en general bastante por encima del 200 por ciento del par a plena carga, y tiene lugar con poco deslizamiento (menos del 20 por ciento). El par de arranque, a plena tensión varía entre el 200 por ciento del par a plena carga en motores pequeños y el 100 por ciento en los grandes. El principal inconveniente de este tipo es su elevada intensidad de arranque (del 500 al 800 por ciento de la plena carga cuando se pone en marcha con su tensión nominal). En motores de hasta unos 7,5 c.v. esta intensidad de arranque está en general dentro de los límites de sobreintensidad que el sistema de suministro puede

tolerar, pudiéndose arrancar directamente a plena tensión: de otra forma, deberá arrancarse con tensión reducida, lo que supone una disminución del par de arranque ya que dicho par es proporcional a los volt-ampere de entrada, los que a su vez son proporcionales al cuadrado de la tensión aplicada en bornes. La tensión reducida para el arranque se toma generalmente de un autotransformador, denominado corrientemente *arrancador*, maniobrado ya sea a mano o automáticamente mediante relés que conectan la tensión plena cuando el motor ha adquirido velocidad. La Fig. 7-19 es el esquema de un arrancador. Si se requiere un arranque suave pueden utilizarse resistencias o reactancias en serie con el estator.



Secuencia de operaciones:

- (a) Cerrar 1 y 3
- (b) Abrir 1 y 3
- (c) Cerrar 2

Fig. 7-19. Conexiones de un autotransformador de arranque

El motor de tipo A es el clásico en el campo de potencias por debajo de 7,5 c.v. y por encima de 200 c.v. utilizándose también en potencias intermedias cuando por distintos motivos sea difícil cumplir las limitaciones de la corriente de arranque de la clase B.

Sus aplicaciones son aproximadamente las mismas que las de los motores de clase B descritos a continuación.

CLASE B

Par de arranque normal; intensidad de arranque y deslizamiento bajos. Tiene aproximadamente el mismo par de arranque que la clase A, pero con el 75 por ciento de la intensidad; por lo tanto podrá emplearse el arranque directo con plena tensión en una gama más amplia que con la clase A. La reducción de la intensidad de arranque se consigue mediante una reactancia de dispersión relativamente alta, manteniéndose el par con el empleo de rotores de barras altas o de doble jaula. El deslizamiento y el rendimiento a plena carga son buenos, del mismo orden que en la clase A, sin embargo, la alta

reactancia baja un poco el factor de potencia y apreciablemente el par máximo, consiguiéndose apenas superar el 200 por ciento del de plena carga.

Este tipo es el más corriente en el campo de potencias comprendidas entre 7,5 y 200 c.v., empleándose principalmente en aplicaciones a velocidad constante sin grandes exigencias en el arranque tales como ventiladores bombas y máquinas herramientas.

CLASE C

Par de arranque fuerte; intensidad de arranque baja. En este tipo se emplea el rotor de doble jaula de mayor resistencia que en la clase B, de lo que resulta un par de arranque fuerte con poca intensidad, pero tiene menos rendimiento y más deslizamiento en marcha normal que los de las clases A y B.

Su aplicación típica es el accionamiento de compresores y de transformadores.

CLASE D

Par de arranque fuerte; mucho deslizamiento. Este tipo generalmente tiene el rotor de jaula sencilla de gran resistencia, siendo las barras frecuentemente de bronce. Tiene un gran par de arranque con poca intensidad, y un par máximo elevado con 50 por ciento de deslizamiento, pero a plena carga trabaja con mucho deslizamiento, del orden del 7 al 11 por ciento, lo que supone un bajo rendimiento. Encuentra sus aplicaciones principales en el accionamiento de cargas intermitentes que representen fuertes aceleraciones o choques tales como las prensas de punzonar y cizallas. Cuando acciona cargas con impactos fuertes, en general el motor está auxiliado por un volante de inercia que reduce las pulsaciones de potencia que repercuten sobre la red de suministro. Para estos casos se requiere un motor cuya velocidad decaiga apreciablemente al aumentar el par, de forma que el volante pueda perder velocidad y ceder parte de su energía cinética.

7-7. REGULACION DE VELOCIDAD DE LOS MOTORES DE INDUCCION

Los motores de inducción sencillos satisfacen admirablemente las necesidades de los servicios a velocidad prácticamente constante, sin embargo, en otras aplicaciones se requieren: o bien varias velocidades o bien poderla regular sin discontinuidad dentro de ciertos límites. Desde los principios de los sistemas de potencia con corriente alterna los constructores se han interesado en la creación de motores de alterna de velocidad variable.

La velocidad síncrona de un motor de inducción puede variarse: (a) modificando el número de polos, y (b) modificando la frecuencia, y el deslizamiento puede variarse: (c) variando la tensión en bornes, (d) variando la resistencia del rotor, y (e) aplicando tensiones de frecuencia apropiada en los circuitos del rotor. En las cinco partes siguientes de este apartado se estudian las características más salientes de cada uno de estos cinco procedimientos de regulación: los procedimientos basados en dispositivos estáticos se mencionarán brevemente ya que serán tratados más ampliamente en el próximo capítulo.

a. Cambio del número de polos

El devanado del estator puede disponerse de forma que con un simple cambio en las conexiones de las bobinas el número de polos varíe en la relación de 2 a 1, con lo que

pueden seleccionarse dos velocidades síncronas distintas: el rotor casi siempre es del tipo de jaula de ardilla. Un devanado de jaula siempre reacciona creando un campo del mismo número de polos que el campo inductor del estator. Si se pretende emplear un rotor devanado aparecen nuevas complicaciones ya que dicho devanado se ha de disponer de forma que se pueda cambiar su número de polos. Con dos devanados independientes en el estator dispuestos cada uno de ellos de forma que puedan modificarse sus polos se pueden conseguir cuatro velocidades síncronas en un motor de jaula de ardilla: por ejemplo, 500, 750, 1000 y 1500 r.p.m.

Los principios básicos de los devanados con cambio del número de polos pueden verse en la Fig. 7-20, en la que aa y $a'a'$ son dos bobinas que abarcan parte del devanado de la fase a del estator: en la práctica, el devanado constaría de varias bobinas en cada grupo. El devanado de las demás fases, no representado en la figura, estaría igualmente dispuesto.

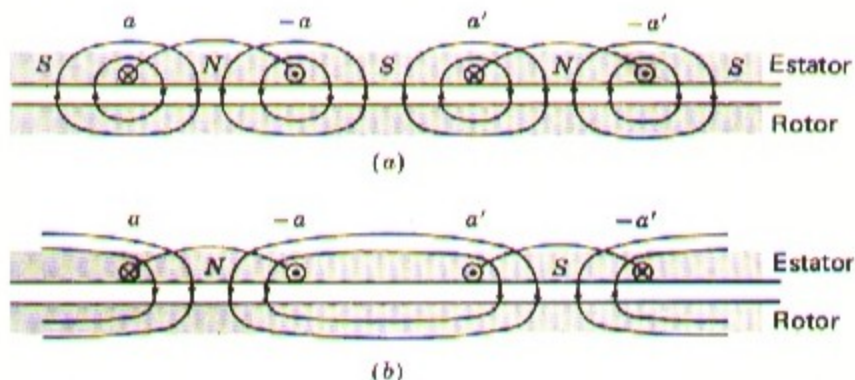
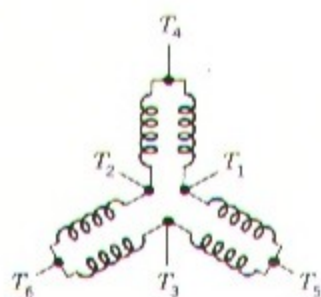


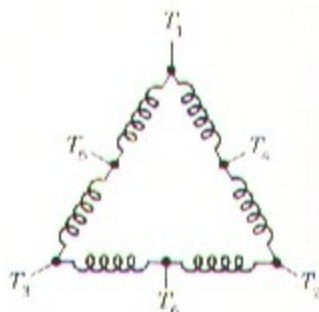
Fig. 7-20. Variación del número de polos de un devanado.

En la Fig. 7-20 a las bobinas están conectadas de forma que generan un campo de cuatro polos, mientras que en la Fig. 7-20 b se ha invertido mediante un inversor el sentido de la corriente en la bobina $a'a'$ con lo que el campo resultante es de sólo dos polos. Al mismo tiempo que se invierte la corriente en la bobina $a'a'$ pueden cambiarse las conexiones entre los dos grupos de forma que pasen de estar en serie a estar en paralelo, y asimismo pueden cambiarse las conexiones de las tres fases para pasar de Y a Δ o viceversa, pudiéndose ajustar de esta forma la densidad de flujo en el entrehierro para conseguir la característica par-velocidad deseada con cualquiera de las dos conexiones. En la Fig. 7-21 están representadas tres distintas conexiones posibles y sus características par-velocidad, correspondientes a tres motores de idéntica característica en su conexión de alta velocidad. La Fig. 7-21 a da aproximadamente el mismo par máximo en las dos velocidades, aplicándose en aquellos accionamientos que requieran el mismo par en cualquiera de ellas (por ejemplo con cargas en las que los rozamientos sean predominantes). Con la Fig. 7-21 b se duplica el par máximo con la velocidad reducida, siendo de aplicación para el accionamiento de cargas que requieran potencia constante (como en las máquinas herramientas) y por último, con la conexión de la Fig. 7-21 c desciende considerablemente el



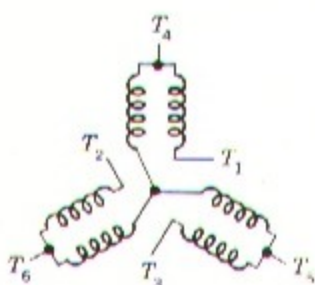
Velocidad	Líneas			
	L_1	L_2	L_3	
Baja	T_1	T_2	T_3	T_4, T_5, T_6 abiertos
Alta	T_4	T_5	T_6	$T_1 - T_2 - T_3$ unidos

(a) Par constante



Velocidad	Líneas			
	L_1	L_2	L_3	
Baja	T_4	T_5	T_6	$T_1 - T_2 - T_3$ unidos
Alta	T_1	T_2	T_3	T_4, T_5, T_6 abiertos

(b) Par constante



Velocidad	Líneas			
	L_1	L_2	L_3	
Baja	T_1	T_2	T_3	T_4, T_5, T_6 abiertos
Alta	T_4	T_5	T_6	$T_1 - T_2 - T_3$ unidos

(c) Par variable

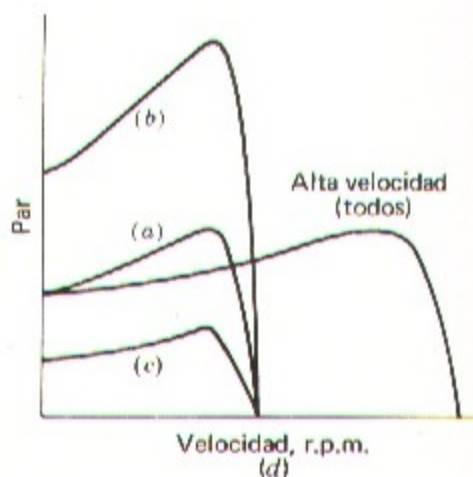


Fig. 7-21. Conexiones y curvas par-velocidad correspondientes a tres tipos de motores de inducción con cambio de número de polos.

par máximo a velocidad reducida, aplicándose al accionamiento de cargas que a menor velocidad requieran menor par (por ejemplo, ventiladores y bombas centrífugas). El tipo de potencia constante es el más costoso por ser físicamente el de mayor tamaño.

b. Variación de la frecuencia de entrada

La velocidad síncrona de un motor de inducción puede variarse variando la frecuencia de alimentación. Para conservar aproximadamente constante la densidad de flujo deberá variarse también la tensión en bornes proporcionalmente a la frecuencia, manteniéndose con ello casi invariado el par máximo. Un motor de inducción regulado de esta forma tiene unas características semejantes a las de un motor de continua de excitación independiente con flujo constante y tensión en el inducido variable.

El principal problema es el de elegir la solución más económica y eficaz para la alimentación con frecuencia variable: un procedimiento consiste en emplear una máquina de inducción con rotor bobinado, a manera de transformador de frecuencia, y otro el empleo de convertidores estáticos de frecuencia que se estudiarán en el capítulo 8.

c. Regulación de la tensión en bornes

El par interno desarrollado por un motor de inducción es proporcional al cuadrado de la tensión aplicada a sus terminales primarios, como puede verse en las dos curvas par-velocidad de la Fig. 7-22. Si la carga tiene la característica par-velocidad señalada con línea de trazos, la velocidad bajará de n_1 a n_2 . Este procedimiento de regulación de velocidad se emplea en pequeños motores de jaula de ardilla accionando ventiladores.

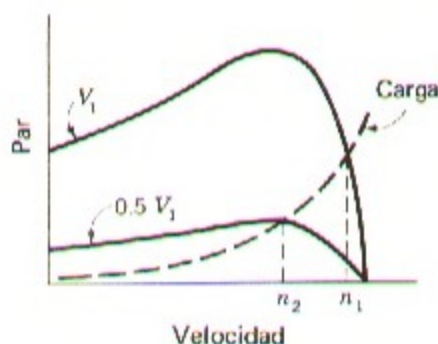


Fig. 7-22. Regulación de velocidad mediante la tensión de alimentación.

d. Regulación por la resistencia del rotor

En el apartado 7-6 *a* se ha visto ya la posibilidad de regular la velocidad de un motor de inducción de rotor devanado variando la resistencia del circuito rotórico. La Fig. 7-23 muestra tres curvas características par-velocidad correspondientes a tres resistencias de

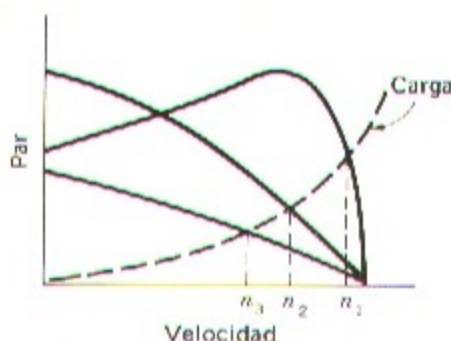


Fig. 7-23. Regulación de velocidad mediante la resistencia del rotor

rotor distintas. Si la característica par-velocidad de la carga es la señalada con línea de trazos, las velocidades correspondientes a cada una de las resistencias serán n_1 , n_2 y n_3 respectivamente. Este procedimiento de regulación es de características semejantes al de la regulación de motores derivación de continua añadiendo resistencias a su circuito inducido.

El principal inconveniente de estos dos últimos procedimientos de regulación estriba en el bajo rendimiento del motor a velocidades bajas, y en la no muy precisa regulación que se consigue al variar las cargas.

c. Regulación del deslizamiento mediante dispositivos exteriores

Al estudiar la regulación de la velocidad variando el deslizamiento deberemos recordar las leyes fundamentales relativas a la distribución de potencia en las máquinas de inducción. Una fracción s de la potencia absorbida por el estator se transforma, por inducción electromagnética, en potencia eléctrica en el rotor, y si éste tiene sus devanados en cortocircuito dicha fracción de potencia se consumirá en pérdidas en su cobre, por lo que el funcionamiento a velocidad reducida será necesariamente de poco rendimiento.

Se han ideado numerosos esquemas para recuperar esta potencia eléctrica a frecuencia de deslizamiento. Aun cuando algunos de ellos son algo complicados en sus detalles, todos consisten en aplicar al devanado del rotor una tensión regulable a frecuencia de deslizamiento. En líneas generales pueden clasificarse en dos tipos principales, que son los representados en la Fig. 7-24 en la que *IM* representa el motor de inducción de rotor devanado cuya velocidad se pretende regular.

En la Fig. 7-24 *a* los circuitos del rotor de *IM* se conectan a un aparato auxiliar cambiador de frecuencia representado por *FC* en el que la potencia eléctrica a frecuencia de deslizamiento generada en el rotor del motor principal se convierte a la frecuencia de entrada y se restituye a la línea. En la Fig. 7-24 *b* los circuitos del rotor de *IM* se conectan a un aparato auxiliar *C* en el que la potencia eléctrica a frecuencia de deslizamiento se convierte en potencia mecánica que se suma a la desarrollada por el motor principal. En ambos esquemas, la velocidad y el factor de potencia del motor principal se pueden

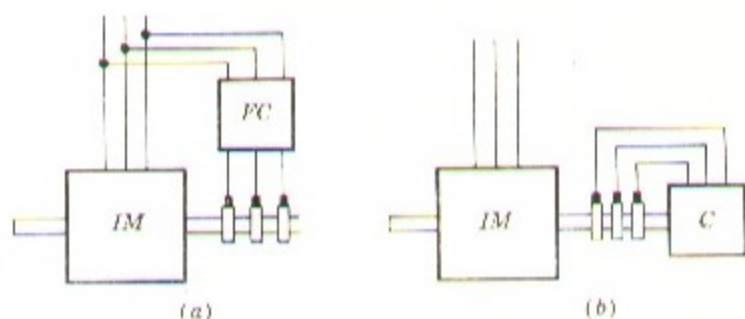


Fig. 7-24. Dos esquemas básicos para la regulación de velocidad de motores de inducción mediante máquinas auxiliares.

ajustar actuando sobre la magnitud y fase de las f.e.m. a frecuencia de deslizamiento de las máquinas auxiliares. Estos dispositivos auxiliares pueden consistir en un sistema relativamente complicado de máquinas rotativas y transformadores de relación variable, o bien, como en el caso de la Fig. 7-24 a en convertidores estáticos de frecuencia.

7-8. RESUMEN

Examinando la interacción flujo-f.m.m. en un motor polifásico de inducción puede verse que tal máquina, en líneas generales no es más que un transformador. La onda rotativa de flujo en el entrehierro de la máquina de inducción es equivalente al flujo mutuo en el núcleo del transformador. A cualquier velocidad que no sea la de sincronismo, el campo giratorio induce unas f.e.m. en los devanados del estator y del rotor a la misma frecuencia del estator en el primero y a la de deslizamiento en el segundo, es decir, que la máquina de inducción transforma la tensión al mismo tiempo que la frecuencia. Vistos desde el estator todos los fenómenos eléctricos y magnéticos del rotor quedan transformados a la frecuencia de aquél. La f.m.m. del rotor reacciona sobre el devanado del estator en igual forma que la f.m.m. de la intensidad en el secundario de un transformador lo hace sobre el primario.

Siguiendo esta línea de razonamiento se llega al circuito equivalente de las máquinas. Los efectos de la saturación en el circuito equivalente son de menos importancia que los correspondientes al circuito en régimen permanente de las máquinas síncronas, siendo esto así porque, al igual que en los transformadores, su funcionamiento viene determinado más por las impedancias de dispersión que por la impedancia magnetizante. En los análisis y ensayos hay que cuidar que queden reflejados los efectos de la saturación sobre las reactancias de dispersión, y los de la distribución no uniforme de la intensidad sobre la resistencia del rotor.

Uno de los hechos más relevantes que influyen en las aplicaciones de los motores de inducción es el de que variando la resistencia del rotor puede regularse el deslizamiento al que tiene lugar el par máximo. Un rotor de gran resistencia da buenas características de

arranque pero empeora las de marcha normal, mientras que uno de poca resistencia puede dar lugar a condiciones de arranque deficientes, de lo que se deduce que el proyecto de un motor de jaula de ardilla constituye siempre un compromiso entre ambos extremos. Se pueden mejorar notablemente las condiciones de arranque de un motor de jaula de ardilla sacrificando relativamente poco las de marcha normal utilizando rotores de barras altas e de doble jaula cuya resistencia aumenta con el deslizamiento. Para condiciones de arranque particularmente severas, o cuando se requiere poder variar la velocidad variando la resistencia del rotor, pueden emplearse motores de rotor devanado si bien éstos son más costosos que los de jaula.

En aplicaciones que requieran velocidad sensiblemente uniforme sin condiciones particularmente severas en el arranque, los motores de jaula de ardilla no tienen prácticamente competencia debido a su robustez, sencillez y bajo coste: su único inconveniente es el de tener un factor de potencia relativamente bajo, de alrededor de 0,85 a 0,90 en motores de 4 polos y 50 Hz a plena carga, valor que desciende considerablemente con cargas ligeras o en motores lentos. El bajo factor de potencia es consecuencia de que toda la excitación debe alimentarse de kVA reactivos en retraso tomados de la red general de alterna. A velocidades inferiores a 500 r.p.m. y potencias superiores a unos 50 c.v., o a velocidades medias (500 a 900 r.p.m.) y potencias superiores a unos 500 c.v. puede resultar más económico un motor síncrono que uno de inducción.

Los motores de inducción están en posición desventajosa para accionamientos a velocidad variable: una máquina que depende de un campo magnético rotativo de velocidad uniforme es preferible que sea también de velocidad constante. Si sólo se requieren dos o hasta quizás cuatro velocidades distintas, el procedimiento de cambiar el número de polos puede ser una buena solución. La regulación de velocidad por variación del deslizamiento lleva aparejada una merma de rendimiento, salvo que se emplee alguno de los métodos descritos en el apartado 7-7 para recuperar la energía de deslizamiento. La elección del sistema de accionamiento de una carga a velocidad variable, incluido su aspecto económico, debe recaer sobre un motor de continua más un equipo de conversión de alterna a continua por un lado, o uno de los sistemas de regulación de un motor de inducción descritos en el apartado 7-7 por el otro. Puede tomarse también en consideración la instalación de un variador de velocidad mecánico entre el motor de velocidad constante y la carga. Para potencias muy grandes, velocidades altas, o cuando el espacio disponible es poco, la sencillez y capacidad de los motores de inducción constituyen una ventaja notable.

PROBLEMAS

7-1. Una máquina de inducción arrastrada a velocidad superior a la de sincronismo puede actuar de generador. Dibújense las ondas de f.m.m. del rotor y de densidad de flujo resultante, tales como las de las Figs. 7-1 *a* y *b* pero aplicadas a la acción de generador. Demuéstrase que el ángulo de par es $-(90^\circ + \phi_2)$.

7-2. Corrija la Fig. 7-2 para el mismo rotor pero situado en un campo senoidal de cuatro polos.

7-3. Una máquina de inducción trifásica de rotor devanado, de ocho polos, movida por un motor de continua de velocidad variable, se va a utilizar como generador de frecuencia regulable. El estator de esta máquina se alimenta a 50 Hz, y la salida se toma en los anillos rozantes. La frecuencia de salida debe variar entre 150 y 360 Hz; la potencia de salida es de 80 kW con factor de potencia 0,8 en retraso, y es independiente de la frecuencia.

Despréciense todas las pérdidas, las corrientes de excitación y las reactancias de dispersión. Calcúlese:

- a. Los límites de velocidad necesarios en el motor de continua.
- b. Los kVA nominales del estator de la máquina de inducción.
- c. El par máximo en el eje del motor de continua.

7-4. Un motor de inducción trifásico de jaula de ardilla, de 100 c.v., 400 V, 50 Hz, 8 polos, conectado en Y tiene en su circuito equivalente las siguientes constantes en ohm por fase reducidas al estator:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 0,085 & r_2 &= 0,067 \\
 x_1 &= 0,196 & x_2 &= 0,161 & x_\phi &= 6,65 \\
 \text{Pérdidas mecánicas en vacío} &= 2,7 \text{ kW} \\
 \text{Pérdidas parásitas en carga} &= 0,5 \text{ kW}
 \end{aligned}$$

Estas dos últimas pérdidas pueden considerarse constantes.

- a. Calcúlese la potencia de salida en c.v., la intensidad en el estator, el factor de potencia y el rendimiento con la tensión y frecuencia nominales y un deslizamiento del 3,00 por ciento.
- b. Calcúlese la intensidad de arranque y el par interno de arranque, en Nw-m, con la tensión y frecuencia nominales.

7-5. Un motor trifásico de inducción de 10 c.v., 60 Hz y seis polos tiene un deslizamiento a plena carga del 3 por ciento. Las pérdidas mecánicas y parásitas a plena carga equivalen al 4 por ciento de la potencia de salida. Calcúlese:

- a. Las pérdidas en el cobre del rotor a plena carga.
- b. El par electromagnético en Nw-m a plena carga.
- c. La potencia transferida del estator al entrehierro, a plena carga.

7-6. Un motor trifásico de inducción, de jaula de ardilla, de 10 c.v., 230 V, 50 Hz, 4 polos conectado en Y desarrolla su par interno de plena carga con un deslizamiento de 0,04 cuando trabaja a su tensión y frecuencia nominales.

Para el objeto de este problema puede prescindirse de las pérdidas mecánicas y en el núcleo. Las impedancias del motor son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{Resistencia del estator } r_1 &= 0,36 \text{ ohm por fase} \\
 \text{Reactancia de dispersión } x_1 = x_2 &= 0,470 \text{ ohm por fase} \\
 \text{Reactancia magnetizante } x_\phi &= 15,5 \text{ ohm por fase}
 \end{aligned}$$

Determinése el par interno máximo, el deslizamiento con este par, y el par interno de arranque, todo ello a la tensión y frecuencia nominales. Expresense los pares en Nw-m.

7-7. Supongamos que el motor de inducción del problema 7-6 se alimenta de una fuente de tensión constante 240 V y 50 Hz a través de una línea cuya impedancia por fase es de $0,50 + j0,30$ ohm. Determinése el par interno máximo que podrá desarrollar el motor, y los correspondientes valores de la intensidad en el estator y de la tensión en bornes.

7-8. Un motor de inducción trifásico funcionando a su tensión y frecuencia nominales tiene un par de arranque igual al 160 por ciento y un par máximo igual al 200 por ciento del par a plena carga. Despréciense la resistencia del estator y las pérdidas mecánicas, y considérese constante la resistencia del rotor. Determinése:

- a. El deslizamiento a plena carga.
- b. El deslizamiento con el par máximo.
- c. La intensidad de arranque en el rotor, en unidades relativas respecto a la intensidad de plena carga.

7-9. Un motor trifásico de inducción de jaula de ardilla, diseñado del tipo de alto deslizamiento, tiene un deslizamiento del 8,5 por ciento cuando trabaja a plena carga con su tensión y frecuencia nominales, y desarrolla su par máximo, del 250 por ciento del de plena carga, con un deslizamiento del 50 por ciento.

Despréciense las pérdidas mecánicas y en el núcleo, y admítase que las resistencias e inductancias del motor son constantes.

Determinése el par y la intensidad de arranque a tensión y frecuencia nominales, expresándolos en unidades relativas basadas en los valores a plena carga.

7-10. En un motor trifásico de inducción de jaula de ardilla, de 25 c.v., 230 V, 50 Hz, trabajando a su tensión y frecuencia nominales, las pérdidas en el cobre del rotor son 9 veces mayores cuando desarrolla el par máximo que con el par de plena carga, siendo el deslizamiento en este último caso de 0,030. Pueden despreciarse la resistencia del estator y las pérdidas mecánicas, y considerar constantes las reactancias y la resistencia del rotor. Hállese:

- a. El deslizamiento con el par máximo
- b. El par máximo
- c. El par de arranque

Expresense los pares en unidades relativas respecto al par de plena carga.

7-11. Un motor de inducción de jaula de ardilla tiene a plena carga un deslizamiento del 5 por ciento. La intensidad de arranque en el rotor es 5 veces mayor que la de plena carga. La resistencia del rotor es independiente de la frecuencia en el mismo, y pueden despreciarse las pérdidas mecánicas, las parásitas y la resistencia del estator.

- a. Determinése el par de arranque.
- b. Calcúlese el par máximo y el deslizamiento al que tiene lugar.

Exprésense los pares en unidades relativas respecto al par de plena carga.

7-12. La potencia máxima interna P_{max} de un motor de inducción tiene lugar con un deslizamiento s_{max} . Demuéstrese que las curvas de la Fig. 7-13 relacionan también las razones P/P_{max} de potencias y $s(1 - s_{\text{max}})/s_{\text{max}}(1 - s)$ de deslizamientos con el parámetro $Q = (X_1 + x_2)/(R_1 + r_2)$.

7-13. Un motor trifásico de inducción de rotor devanado, de 50 c.v., 440 V, 4 polos, 50 Hz, desarrolla su par interno máximo, del 250 por ciento, con un deslizamiento del 16 por ciento cuando trabaja a tensión y frecuencia nominales, teniendo su rotor cerrado en cortocircuito directamente en los anillos rozantes. La resistencia del estator y las pérdidas mecánicas pueden despreciarse, y la resistencia del rotor puede considerarse constante independientemente de la frecuencia en el mismo.

Determinése:

- a. El deslizamiento en tanto por ciento a plena carga.
- b. Las pérdidas en watt en el cobre del rotor, a plena carga.
- c. El par de arranque en Nw-m a la tensión y frecuencia nominales.

Si se duplica la resistencia del rotor insertando resistencias exteriores en serie, determinése:

- d. El par, en Nw-m cuando la intensidad en el estator tiene su valor de plena carga
- e. El deslizamiento correspondiente.

7-14. Un motor trifásico de inducción de rotor devanado, de 50 c.v., 440 V, 4 polos, 60 Hz, desarrolla su potencia de salida nominal a 1746 r.p.m. cuando trabaja a la tensión y frecuencia nominales estando cortocircuitados sus anillos rozantes. El par máximo que puede desarrollar a la tensión y frecuencia citadas es del 200 por ciento del de plena carga. La resistencia del devanado del rotor es de 0,1 ohm por fase en Y. Pueden despreciarse las pérdidas mecánicas y parásitas así como la resistencia del estator.

- a. Calcúlese las pérdidas a plena carga en el cobre del rotor.
- b. Calcúlese la velocidad de par máximo.
- c. ¿Cuánta resistencia deberá añadirse en serie con el motor para conseguir el máximo par de arranque?

Si ahora se alimenta el motor a la frecuencia de 50 Hz, ajustando la tensión aplicada de tal forma que la onda de flujo en el entrehierro tenga la misma amplitud a igualdad de par que con 60 Hz:

- d. Calcúlese la tensión aplicada con 50 Hz
- e. Calcúlese la velocidad a la que el motor desarrolla un par de valor igual al de plena carga a 60 Hz, estando los anillos en cortocircuito.

7-15. Un motor trifásico de inducción de rotor devanado, de 220 V, 4 polos, 50 Hz desarrolla un par interno del 150 por ciento con una intensidad en la línea del 155 por ciento y un deslizamiento de 0,05 cuando trabaja a su tensión y frecuencia nominales y con su rotor en cortocircuito (el par y la intensidad están expresados en tanto por ciento de sus valores a plena carga). La resistencia del rotor es de 0,1 ohm entre cada par de terminales, y puede considerarse como constante. Si se pretende que la intensidad de arranque no supere el 155 por ciento, ¿cuál será el valor de cada una de las tres resistencias que acopladas en Y se deberán conectar a cada uno de los terminales del rotor? ¿Cuál será el par interno de arranque?

7-16. Un motor trifásico de inducción de jaula de ardilla, de 220 V, 4 polos, 60 Hz desarrolla su máximo par interno, del 250 por ciento, con un deslizamiento del 16 por ciento cuando trabaja a su tensión y frecuencia nominales. Despreciando el efecto de la resistencia del estator, determínese el par interno máximo que podrá desarrollar este motor si se hace trabajar a 200 V y 50 Hz. En estas condiciones ¿a qué velocidad, en r.p.m., se obtendrá este par máximo?

7-17. Se precisa un variador de frecuencia del tipo descrito en el apartado 7-7 b para suministrar potencia de frecuencia variable a un motor de inducción destinado a mover las hélices de un modelo a escala de avión, para ensayos en túnel aerodinámico. El variador de frecuencia es una máquina de inducción de rotor devanado movida por un motor de continua de velocidad regulable. El devanado trifásico de la máquina de inducción se excita con una corriente de 60 Hz, y la potencia trifásica de frecuencia variable se toma del devanado del rotor. El conjunto del equipo debe cumplir las siguientes especificaciones:

Frecuencia de salida: de 120 a 450 Hz.

Velocidad máxima no superior a 3.000 r.p.m.

Máxima potencia de salida: 80 kW a 450 Hz y factor de potencia 0,8.

La potencia requerida por la carga accionada por el motor de inducción decrece rápidamente al disminuir la frecuencia, por lo que la envergadura de las máquinas viene determinada por las condiciones a velocidad máxima.

Considerando despreciables la corriente de excitación, las pérdidas y las caídas de tensión en la máquina de inducción, hállese:

- El mínimo número de polos de la máquina de inducción.
- Las velocidades máxima y mínima correspondientes.
- Los kWA nominales en el devanado del estator de la máquina de inducción.
- La potencia nominal, en c.v., de la máquina de continua.

7-18. La resistencia media entre cada par de anillos rozantes de un motor trifásico de inducción de 300 c.v., 16 polos, 50 Hz es de 0,035 ohm. Con los anillos en cortocircuito el deslizamiento a plena carga es 0,025, y admitiremos que la curva par-deslizamiento es

una línea recta desde el funcionamiento en vacío hasta el de plena carga. Este motor acciona un ventilador que absorbe 300 c.v. a la velocidad de plena carga del motor, y el par necesario para mover el ventilador varía con el cuadrado de la velocidad. ¿Qué resistencias deberán conectarse en serie con cada anillo para que el ventilador gire a 300 r.p.m.?

7-19. En una instalación industrial hay que disponer un accionamiento de velocidad variable para un ventilador. Dicho ventilador será movido por dos motores de inducción de rotor devanado acoplados mecánicamente a su eje y dispuestas las cosas de forma que las velocidades bajas las accione el menor de los dos motores y las altas el mayor. La regulación de velocidad está dispuesta de forma que sea ininterrumpida desde la velocidad mínima hasta la máxima y que no se produzca un cambio súbito al pasar de uno a otro motor.

El motor más grande es trifásico, de 2300 V, 500 c.v., 50 Hz y 6 polos, y el pequeño es también trifásico de 2300 V, 200 c.v., 50 Hz y 8 polos. El constructor de los motores facilita los siguientes datos:

Constantes	Motor de:	
	200 c.v.	500 c.v.
Resistencia del estator	0,57	0,14
Resistencia del rotor	0,93	0,24
Reactancia de dispersión de rotor y estator	2,6	0,98

Estos valores son ohm por fase conexión Y reducidos al estator.

Puede prescindirse de las pérdidas mecánicas y de la excitación de los motores.

La velocidad mínima del ventilador debe ser de 375 r.p.m. y la máxima de aproximadamente 970 r.p.m. requiriéndose a esta velocidad una potencia de 450 c.v.; a otras velocidades la potencia necesaria varía sensiblemente con el cubo de la velocidad.

En el sistema de regulación propuesto el estator de ambos motores está conectado continuamente a la red. En el campo de bajas velocidades, el devanado del rotor del motor de 500 c.v. se mantiene en circuito abierto, y la regulación se hace mediante resistencias exteriores conectadas al circuito rotórico del motor de 200 c.v. Por encima de este campo de bajas velocidades es el rotor del motor de 200 c.v. el que se mantiene en circuito abierto, efectuándose la regulación insertando resistencias exteriores en el circuito del rotor del motor de 500 c.v.

El cambio de motor para pasar de las bajas velocidades a las altas se verifica de la siguiente forma:

1. Se suprimen todas las resistencias exteriores del motor de 200 c.v.
2. Mediante un tipo de contactor que cierre un circuito antes de abrir otro, se cierra el circuito rotórico del motor de 500 c.v. y seguidamente se abre el del 200 c.v.
Las resistencias exteriores del rotor del motor de 500 c.v. tienen un valor tal que la velocidad correspondiente a este paso sea la misma que en el anterior.
3. Se aumenta la velocidad suprimiendo resistencias del rotor del motor de 500 c.v.

Para pasar de velocidades altas a bajas se procede en sentido inverso al indicado.

Se pregunta:

- a. La serie de resistencias exteriores, referidas al estator, que serán necesarias para el motor de 200 c.v.
- b. Lo mismo del punto anterior pero para el motor de 500 c.v.
- c. Razónese cualquier particularidad del sistema que no complazca plenamente, y sugiéranse soluciones.

Dispositivos estáticos para la regulación de motores

En la mayor parte de las aplicaciones los motores se alimentan directamente de una red, y trabajan según su propia característica par-velocidad de acuerdo con las condiciones determinadas por la carga mecánica que accionan. Sin embargo, para otras aplicaciones se provee a los motores de dispositivos y equipos de regulación que pueden modificar sus características adaptándolas a las condiciones operativas exigidas en cada caso particular. El principal factor objeto de regulación es la velocidad, pero puede regularse también el par y la aceleración. El conjunto del equipo de regulación consta regularmente de relés, contactores, componentes magnéticos y elementos estáticos tales como diodos, tiristores y transistores, constituyendo todo ello, junto con el motor, el sistema de arrastre.

8-1. APLICACION DE LOS DISPOSITIVOS ESTATICOS DE REGULACION

Cualquier tipo de motor puede regularse para adaptar su velocidad y par a las necesidades de su carga mecánica. La diferencia en este sentido entre unos motores y otros reside en el volumen y coste del equipo de regulación necesario. Los motores de corriente continua son de fácil regulación, estando bien determinado su campo de velocidades, mientras que la regulación de los de alterna es más compleja, y se utiliza cuando se pretende aprovechar las ventajas que supone la ausencia de colector y escobillas en éstos.

a. Terminología

Al comparar unos sistemas con otros y pretender dar valores numéricos a los resultados, es conveniente emplear una terminología que sea fácilmente comprensible en la práctica. A continuación se dan las definiciones de algunos términos clave.

1. **Velocidad base:** Es la velocidad nominal o indicada del motor que figura en la placa de características del mismo. En un motor derivación de corriente continua, es la velocidad que corresponde a la tensión nominal en el inducido e intensidad nominal en el inductor, y en un motor de alterna la que corresponde a la frecuencia nominal. Los motores pueden trabajar por encima o por debajo de su velocidad base.
2. **Regulación de velocidad:** Generalmente se entiende por regulación de velocidad la cualidad del sistema de mantener uniforme la velocidad bajo condiciones de carga variables. Siendo ω_m la velocidad a plena carga, y $\Delta\omega_m$ la diferencia de velocidad entre el funcionamiento en vacío y a plena carga, la regulación de velocidad en tanto por ciento es de:

$$\text{Regulación} = \frac{\Delta\omega_m}{\omega_m} \times 100 \quad (8-1)$$

este porcentaje se refiere en general a la velocidad base del motor. A velocidad inferior, el motor tiene la misma pérdida $\Delta\omega_m$, pero el porcentaje será mayor.

3. **Campo de velocidades:** Es la relación entre las velocidades máxima y mínima del sistema; únicamente tiene significación con una carga especificada en el motor, por ejemplo, en vacío o a plena carga. El campo de velocidades puede estar limitado por el diseño del propio equipo de regulación o por las condiciones del motor para refrigerarse suficientemente a bajas velocidades, y evitar desperfectos mecánicos a gran velocidad.
4. **Par límite:** En los equipos de regulación se incorporan circuitos destinados a limitar el par del motor durante el período de aceleración o en casos de sobrecarga. Los objetos que se persiguen son múltiples: controlar el tiempo de aceleración de cargas de gran inercia, proteger el motor y el equipo contra sobreintensidades y evitar alcanzar situaciones inestables.
5. **Accionamiento a potencia constante:** El equipo tiene la propiedad de poder suministrar una potencia (par \times velocidad) constante dentro de un campo de velocidades dado. El mayor par, correspondiente a la mínima velocidad, es el que generalmente fija las dimensiones del motor y del equipo.
6. **Accionamiento a par constante:** El conjunto del sistema tiene la propiedad de poder desarrollar un par fijado dentro de todo el campo de velocidades dado.
7. **Tiristores:** Son dispositivos estáticos con tres terminales que dan paso a una corriente desde su ánodo hasta su cátodo cuando a su borne de control o *puerta* se aplica una determinada señal de tensión. Se utilizan para conseguir una tensión continua regulada a partir de una red de alterna. Se les conoce también por las siglas *SCR* (silicon controlled rectifier).

b. Sistemas de corriente continua

Tal como se indicó ya en el capítulo 5, las características par-velocidad de un motor de corriente continua pueden variarse actuando sobre la tensión en el inducido, sobre la

corriente de excitación, e insertando resistencias en el circuito inducido. Los reguladores estáticos pueden utilizar cualquiera de los tres procedimientos según sea el caso particular a que se aplican.

Para variar la tensión en el inducido se utilizan sistemas a base de tiristores que suministran corriente continua a los motores. Los rectificadores toman la energía de una red de alterna monofásica o trifásica y pueden tener distintas disposiciones según sea su potencia y según se requiera o no la inversión de marcha o el frenado. En la Fig. 8-1 puede verse la fotografía de uno de estos equipos.

La tensión en el inducido se gradúa regulando el ángulo eléctrico de desfase entre la onda de alterna y la señal aplicada a la puerta.

Si la corriente de excitación no ha de ser regulada se toma directamente del rectificador principal, pero si ha de poderse reducir a fin de tener velocidades superiores a la de base, se toma de un circuito rectificador auxiliar, gobernado por otro circuito relacionado con el de regulación de velocidad.

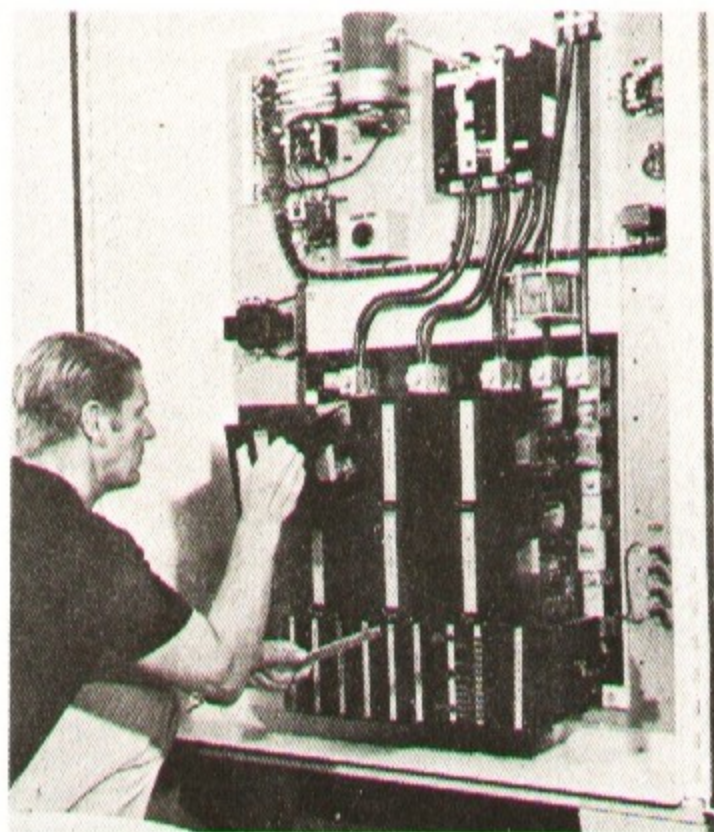


Fig. 8-1. Equipo de tiristores para el accionamiento de motores de continua. (*Electric Regulator Corporation.*)

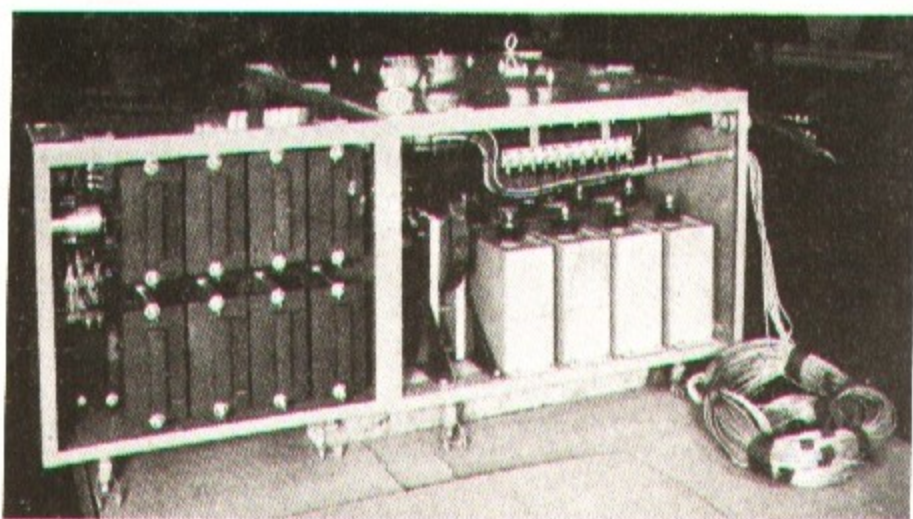


Fig. 8-2. Equipo de tiristores para la regulación de un vehículo. (Westinghouse Electric Corporation.)

Para regular la velocidad de motores de corriente continua excitados en serie, alimentados de una fuente de tensión continua tal como una batería de acumuladores en un automóvil eléctrico o por tercer carril en transportadores rápidos, se emplea un sistema equivalente al de variar la resistencia del inducido. Se dispone un tiristor de tal forma que corte y cierre rápidamente el circuito, de manera que la tensión se reparta entre el inducido y el interruptor, con lo que se puede regular la tensión media aplicada al inducido; el circuito actúa como una resistencia sin pérdida en el inducido. La Fig. 8-2 muestra un dispositivo de aplicación a la tracción eléctrica.

e. Sistemas de corriente alterna por ajuste de frecuencia

La velocidad de sincronismo de los motores síncronos y de inducción es directamente proporcional a la frecuencia aplicada.

En estos motores se consigue regular su velocidad alimentando el estator a través de un equipo estático de regulación de frecuencias: el motor síncrono seguirá directamente los cambios de frecuencia, y en el de inducción influirá la de deslizamiento. Este procedimiento de regulación es muy eficaz y, con motores síncronos, de gran precisión: como contrapartida, el equipo necesario es más complicado y costoso que el de los rectificadores en los motores de corriente continua.

La potencia a frecuencia variable se genera en un circuito a base de tiristores, que recibe el nombre de *inversor*. Para formar un sistema trifásico de tensiones se conectan seis tiristores formando puente entre barras de corriente continua. Enviando a las puertas de los tiristores señales externas en una determinada secuencia aparecerán sobre los terminales de alterna del puente unas ondas rectangulares o escalonadas, como aproximación de un sistema trifásico de ondas senoidales. Acelerando o retardando el ritmo al que

se envían las señales puede regularse la frecuencia y por tanto la velocidad del motor. El equipo típico completo consta de: un rectificador para transformar la corriente alterna de la línea en corriente continua; un inversor para convertir ésta otra vez en alterna pero de frecuencia regulable; un motor síncrono o de inducción, y los dispositivos para fijar la frecuencia, ajustar la tensión del motor y asegurar que no se sobrepase el par máximo durante el proceso de cambio de velocidad. Las Figs. 8-3 y 8-4 corresponden a dos equipos industriales de este tipo.

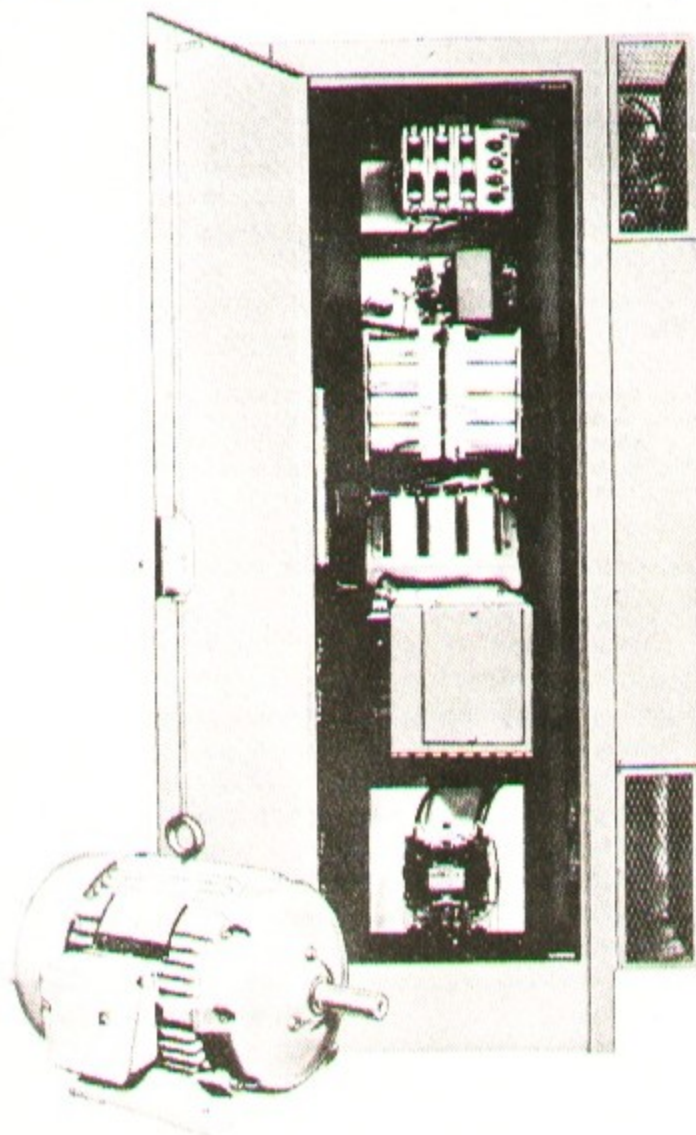


Fig. 8-3. Equipo para el accionamiento de motores de alterna con ajuste de frecuencia. (The Louis Allis Company.)

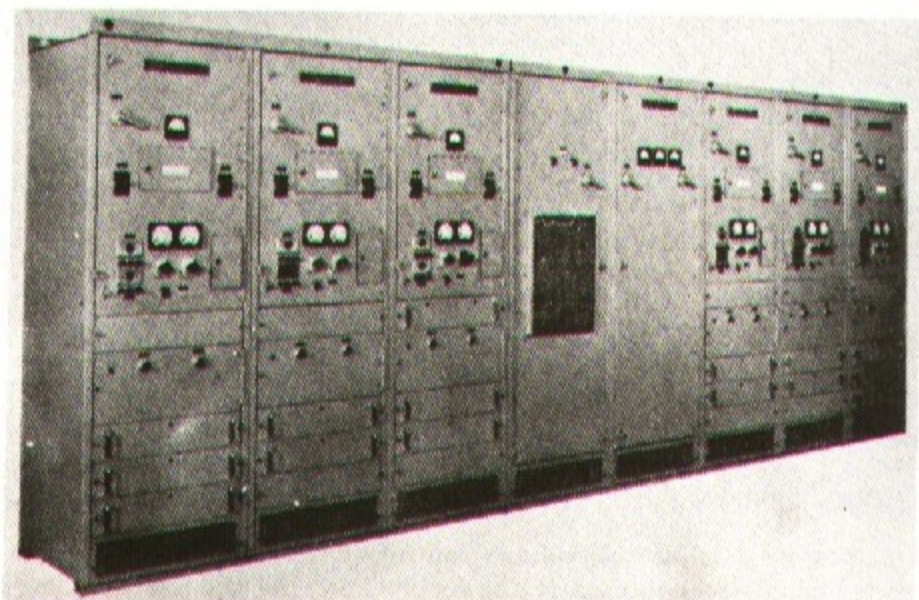


Fig. 8-4. Equipo consistente en seis inversores y un rectificador aplicado al accionamiento de una planta de fibras sintéticas. Los inversores son de 40 a 84 kVA y todos ellos accionan motores síncronos de reluctancia en un campo de velocidades de 6 a 1. (*Westinghouse Electric Corporation.*)

d. Sistemas de regulación de tensión en motores de inducción

Para un valor dado del deslizamiento, el par de un motor de inducción es aproximadamente proporcional al cuadrado de la tensión del estator. Según la forma de la curva par-velocidad y las características de la carga puede conseguirse una cierta regulación de velocidad mediante un procedimiento relativamente sencillo. Las pérdidas de potencia en el rotor, que son proporcionales al par y al deslizamiento, crecen a medida que el motor pierde velocidad. Este procedimiento de regulación es adecuado para cargas tales como bombas y ventiladores en las que el par necesario mengua rápidamente al decrecer la velocidad. Un esquema típico consta de tiristores montados en oposición sobre cada una de las fases de entrada del estator. A medida que el ángulo en que se aplica la señal a la puerta se adelanta respecto al origen de la onda de alterna, se aplicará al motor una mayor proporción de la tensión de la línea, sin embargo, dicha tensión resultante en el motor queda distorsionada por efecto de la conmutación de los tiristores, con lo que las pérdidas tienden a ser mayores de lo normal.

e. Sistemas para motores de rotor devanado

Tal como se vio en el Capítulo 7, la curva par-velocidad de un motor de inducción puede modificarse insertando resistencias en el circuito rotórico consiguiéndose así regular la velocidad, pero el procedimiento supone un gran derroche de energía, ya que las

pérdidas en el rotor suponen un $s/(1 - s)$ de la potencia mecánica. Por ejemplo, a media velocidad, s es igual a 0,5 y las pérdidas en el rotor se igualan a la potencia mecánica útil. Dichas pérdidas pueden recuperarse en gran parte mediante un equipo estático de regulación formado por un rectificador y un inversor. La tensión del rotor, tomada en los anillos rozantes, se rectifica para tener una tensión continua cuya magnitud es directamente proporcional al deslizamiento s , y seguidamente un inversor conectado entre dicha tensión continua y los bornes del estator restituye a la red la potencia del rotor. El inversor tiene una frecuencia de salida igual a la de la red que alimenta el motor, que corrientemente es de 50 Hz, y puede trabajar con una tensión continua de entrada que va desde casi cero, cuando el motor gira a plena velocidad, hasta el valor máximo que corresponde al motor parado. El conjunto es relativamente sencillo ya que las señales en las puertas de los tiristores proceden de la red sin necesidad de los complicados circuitos lógicos y reguladores de los sistemas de frecuencia variable.

f. Motores serie universales

Los motores universales rara vez se construyen de potencia nominal superior a un c.v.; se emplean principalmente en herramientas de mano y en otras aplicaciones en las que convenga una relación potencia/peso elevada. La velocidad con un par determinado es proporcional a la tensión. Puede regularse la velocidad mediante un procedimiento sencillo consistente en dos tiristores montados en serie con el motor: el ángulo eléctrico con el que se aplica la señal a la puerta puede regularse de varias formas: manualmente, accionando sobre un dispositivo de disparo; mediante pulsadores o botones, y valiéndose de un circuito de regulación. En el capítulo 11 se describe más detalladamente el sistema.

8-2. INTRODUCCION A LOS CIRCUITOS RECTIFICADORES

En un sistema estático para la regulación de motores de corriente continua, el elemento principal lo constituye el rectificador, formado por un conjunto de diodos y de tiristores que suministran al inducido y al inductor del motor una corriente continua a partir de una red de corriente alterna. La tensión suministrada, que se regula con los tiristores, regula a su vez la velocidad o el par del motor. En este apartado se describirán diversos circuitos con cargas pasivas, y en el apartado 8-3 se estudiarán las cargas de motores¹.

Los diodos y los tiristores empleados en los circuitos de rectificación son de funcionamiento francamente no lineal. Para analizar circuitos en los que intervengan estos elementos se precisa de circuitos modelos y de técnicas para su manejo en las operaciones repetitivas que tienen lugar².

En la Fig. 8-5 a se muestra la curva característica real tensión-corriente de un diodo: como puede verse, es capaz de conducir en sentido directo 160 A con una tensión tam-

¹ Para más detalles, véase J. Schaefer. "Rectifier Circuits, Theory and Design". John Wiley & Sons, Inc., Nueva York 1965.

² En "SCR Manual" 4ª ed. General Electric Co., Auburn, Nueva York, 1967, se encuentran descripciones y aplicaciones de estos dispositivos.

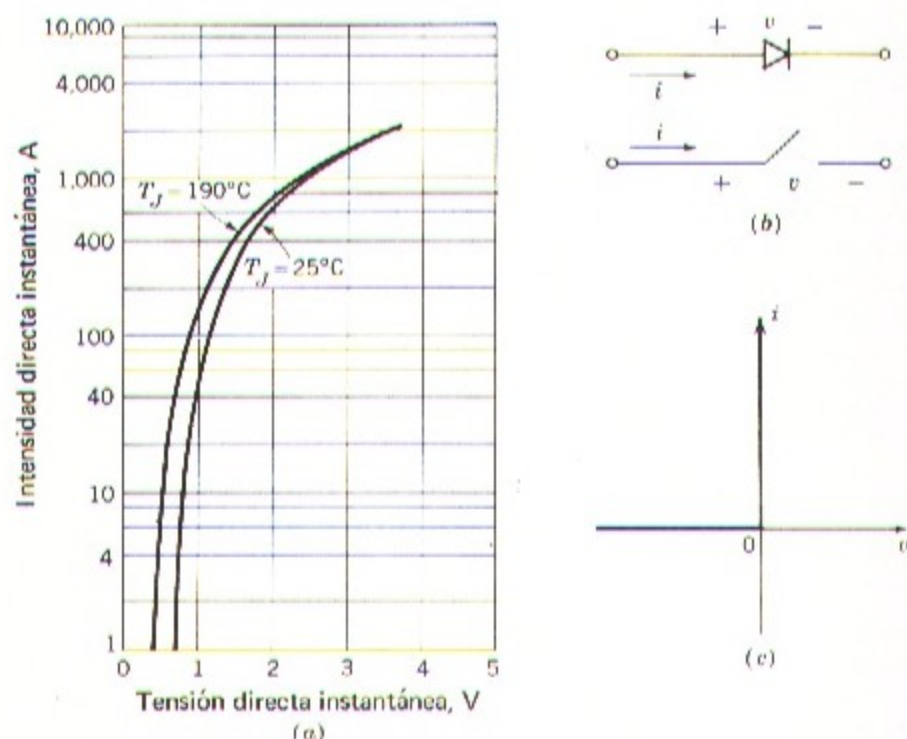


Fig. 8-5. Características y modelo de un diodo. (a) Característica tensión-intensidad de un diodo de 160 A en función de la temperatura de la unión T_J . (b) Símbolo de un diodo (arriba) y circuito del interruptor modelo (abajo). (c) Característica tensión-intensidad del circuito modelo.

bién directa de 1 V, y puede bloquear 1200 V en sentido inverso. El circuito modelo de un diodo es simplemente un interruptor como se ve en la Fig. 8-5 b siendo la característica del modelo la de la Fig. 8-5 c. Cuando se aplica al modelo una tensión en sentido directo, se cierra el interruptor y el diodo conduce la corriente sin ninguna caída de tensión. Si la tensión aplicada lo es en sentido inverso, se abre el interruptor, y por el diodo no circula ninguna intensidad en ningún sentido.

La curva característica real tensión-corriente de un tiristor puede verse en la Fig. 8-6 a. Este rectificador bloquea la tensión de hasta 1800 V en cualquier sentido si no existe ninguna señal en la puerta: si se aplica tal señal, que en general es un impulso de pocos volt de amplitud, el dispositivo se hace inmediatamente conductor en el sentido directo exactamente igual que en un diodo. La caída de tensión directa es de 1,5 V para una corriente de 110 A. El circuito modelo es un interruptor como en la Fig. 8-6 b, viéndose en 8-6 c la característica de tal modelo. El interruptor se mantiene abierto cualquiera que sea el sentido de la tensión mientras no exista señal en la puerta. Si existe una tensión en sentido directo y además se aplica una señal a la puerta, el interruptor se cierra conduciendo corriente directa sin ninguna caída de tensión.

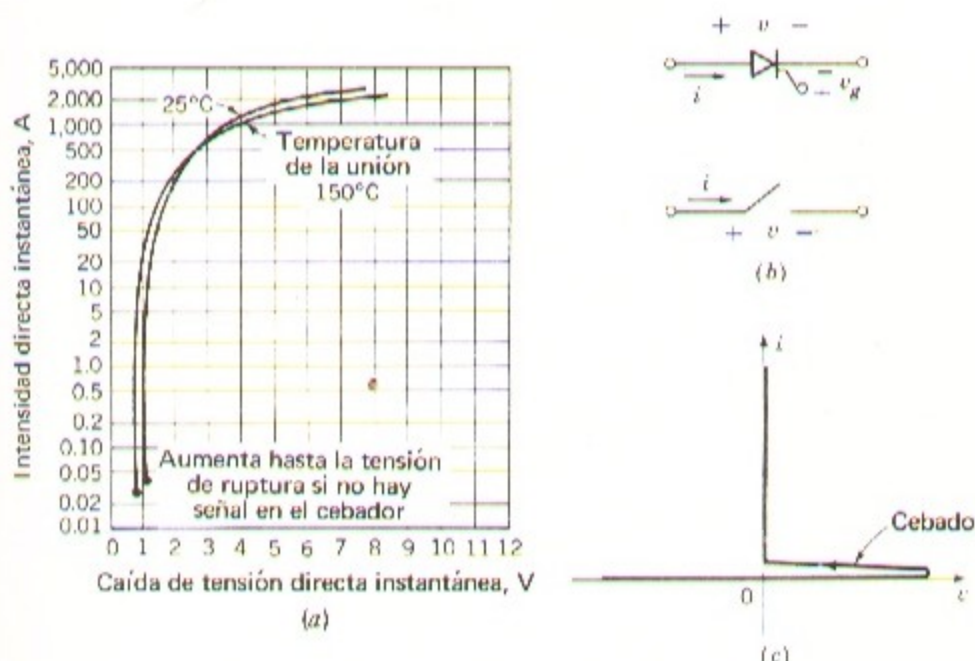


Fig. 8-6. Características y modelo de un tiristor (SCR). (a) Característica tensión-intensidad de un tiristor de 110 A en función de la temperatura de la unión. (b) Símbolo de un tiristor (arriba) y circuito del interruptor modelo (abajo). (c) Característica tensión-intensidad del circuito modelo.

a. Rectificador monofásico media onda

El circuito rectificador más sencillo está formado por un diodo único trabajando sobre una carga resistiva, tal como está representado en la Fig. 8-7 a. La tensión de línea es una onda senoidal como la de la Fig. 8-7 b. De acuerdo con el modelo de la Fig. 8-5, cuando la tensión en el diodo es negativa éste equivale a un interruptor abierto, conduciendo por consiguiente una intensidad nula: esto sucede durante el período comprendido entre $\omega t = \pi$ y $\omega t = 2\pi$. Contrariamente, si la tensión en el diodo es positiva éste equivale a un interruptor cerrado permitiendo el paso de la intensidad i_n , lo que sucede durante el período comprendido entre $\omega t = 0$ y $\omega t = \pi$. La tensión v_n en bornes de la carga durante este período es igual a la tensión de línea v_D , ya que el diodo modelo está libre de pérdidas.

b. Rectificador tiristor monofásico media onda

El circuito rectificador controlado más sencillo consiste en un tiristor único trabajando sobre una carga resistiva, tal como está representado en la Fig. 8-8 a, en la que no figura el circuito destinado a la aplicación de impulsos a la puerta. De acuerdo con el modelo de la Fig. 8-6 no podrá haber conducción mas que cuando la tensión sea positiva, o sea durante

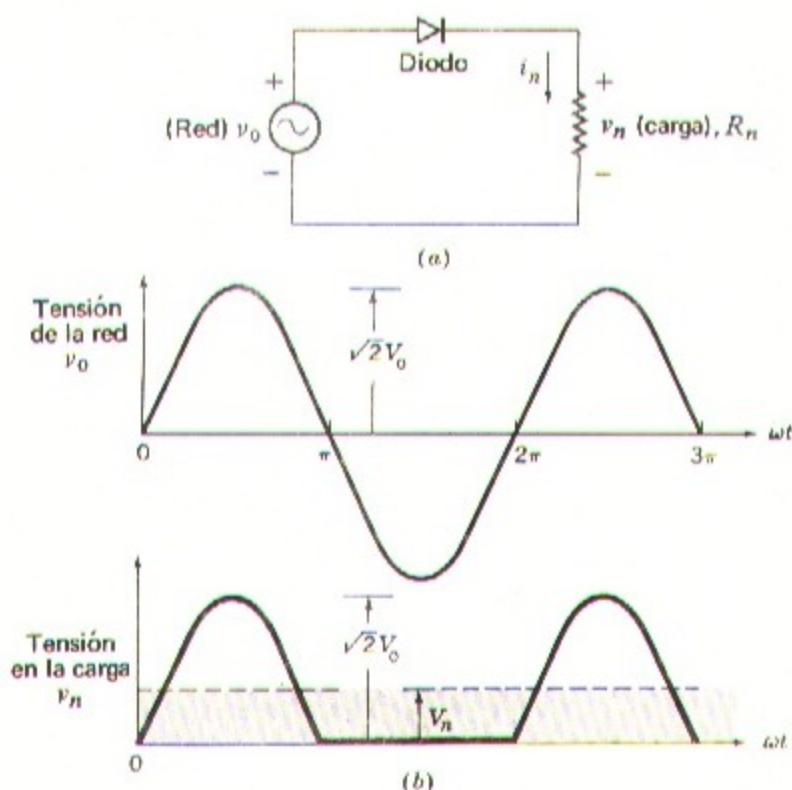


Fig. 8-7. Funcionamiento de un circuito rectificador diodo de media onda. (a) Circuito. (b) Ondas de tensión en la red, v_0 , y en la carga, v_n , siendo V_0 el valor eficaz de la tensión senoidal de la red, y V_n el valor medio de la tensión en la carga (zona sombreada).

los intervalos desde $\omega t = 0$ hasta $\omega t = \pi$, desde $\omega t = 2\pi$ hasta $\omega t = 3\pi$, y así sucesivamente. Pero además, el tiristor ha de recibir un impulso de cebado, que supondremos que se aplica con el ángulo de cebado α . Convencionalmente, este ángulo α se mide a partir del punto que da mayor tensión en la carga; en este caso, desde $\omega t = 0$, $\omega t = 2\pi$, etc. Como puede verse en la Fig. 8-8 b, el tiristor conduce corriente durante los intervalos comprendidos entre $\omega t = \alpha$ y $\omega t = \pi$, $\omega t = 2\pi + \alpha$ y $\omega t = 3\pi$, etc. Durante estos períodos la tensión en bornes de carga v_n es igual a la tensión en línea v_0 , y puesto que el ángulo puede variarse entre cero y π por medio del circuito de regulación, la tensión media en la carga V_n varía en consecuencia.

Ejemplo 8-1

Hállese, para el circuito de la Fig. 8-8 a una fórmula que dé la tensión media en la carga V_n en función del ángulo de cebado α .

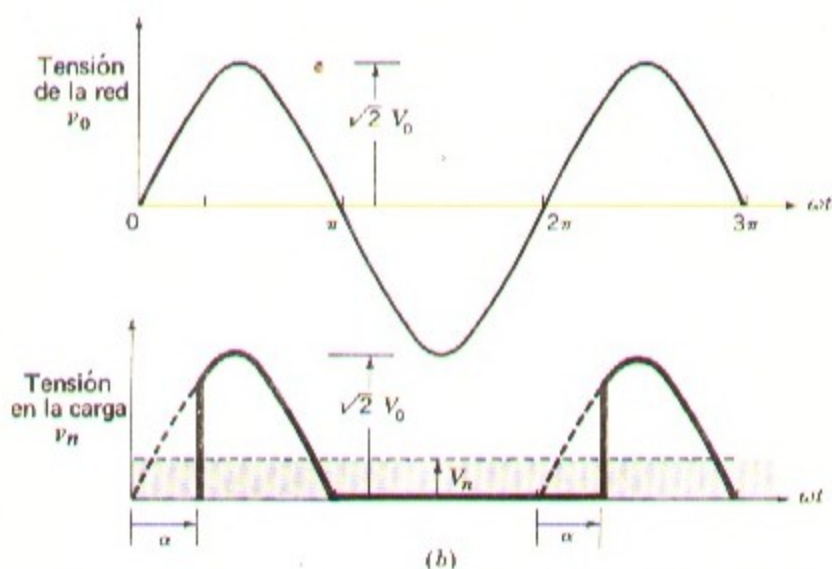
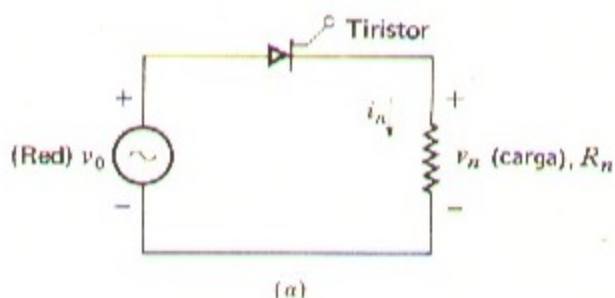


Fig. 8-8. Funcionamiento de un circuito tiristor de media onda. (a) Circuito. (b) Ondas de tensión en la red, v_0 , y en la carga, v_n , siendo V_0 el valor eficaz de la tensión senoidal de la red y V_n el valor medio de la tensión en la carga (zona sombreada).

SOLUCION

La tensión media viene dada por:

$$\begin{aligned}
 V_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} v_n d(\omega t) & (8-2) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \sqrt{2} V_0 \sin \omega t d(\omega t) \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{2}\pi} [V_0 \cos \omega t]_{\alpha}^{\pi} \\
 &= 0,225 V_0 (1 + \cos \alpha) & (8-3)
 \end{aligned}$$

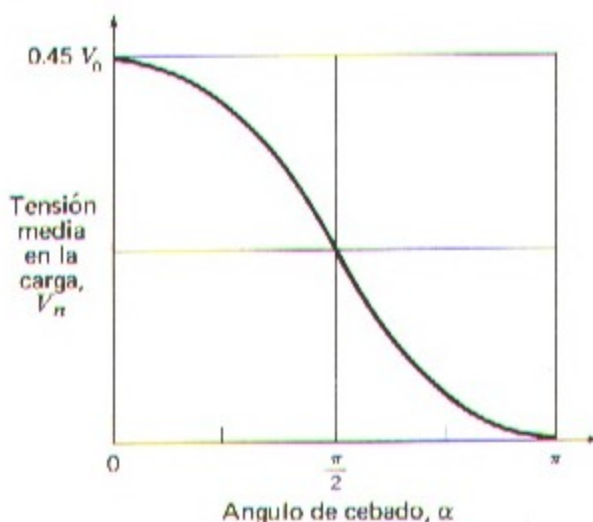


Fig. 8-9. Tensión media V_n de un circuito tiristor de media onda en función del ángulo de cebado α .

La Fig. 8-9 es la representación gráfica de la anterior fórmula. El máximo valor de V_n tiene lugar cuando $\alpha = 0$, y es igual al correspondiente a la rectificación de media onda con diodo de la Fig. 8-7. Su valor es:

$$V_n = 0,450 V_0 \quad (8-4)$$

c. Rectificador monofásico con carga reactiva

La carga de un rectificador motivada por un motor de continua no es únicamente resistiva: los circuitos inducidos tienen resistencia e inductancia, y la inercia del inducido y de la carga actúa como una capacitancia; asimismo, los circuitos inductores son altamente inductivos. El funcionamiento de los diodos y de los tiristores difiere del que tienen con carga únicamente resistiva, pero los elementos deben responder de acuerdo con las condiciones de sus modelos.

En la Fig. 8-10 *a* podemos ver un rectificador diodo de media onda con carga RL , y en la Fig. 8-10 *b* las ondas de tensión en línea v_0 , tensión en la resistencia v_r y tensión en la inductancia v_l . Cuando $\omega t = 0$, la tensión de la línea v_0 pasa a ser positiva y el diodo comienza a conducir la intensidad i_n . La inductancia obliga a que la intensidad se retrase respecto a la tensión hasta que aquella alcance su valor punta cuando el ángulo es ωt_1 .

Durante este período el flujo concatenado λ en la inductancia aumenta en:

$$\Delta\lambda = \int_0^{t_1} v_l dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega t_1} v_l d(\omega t) \quad (8-5)$$

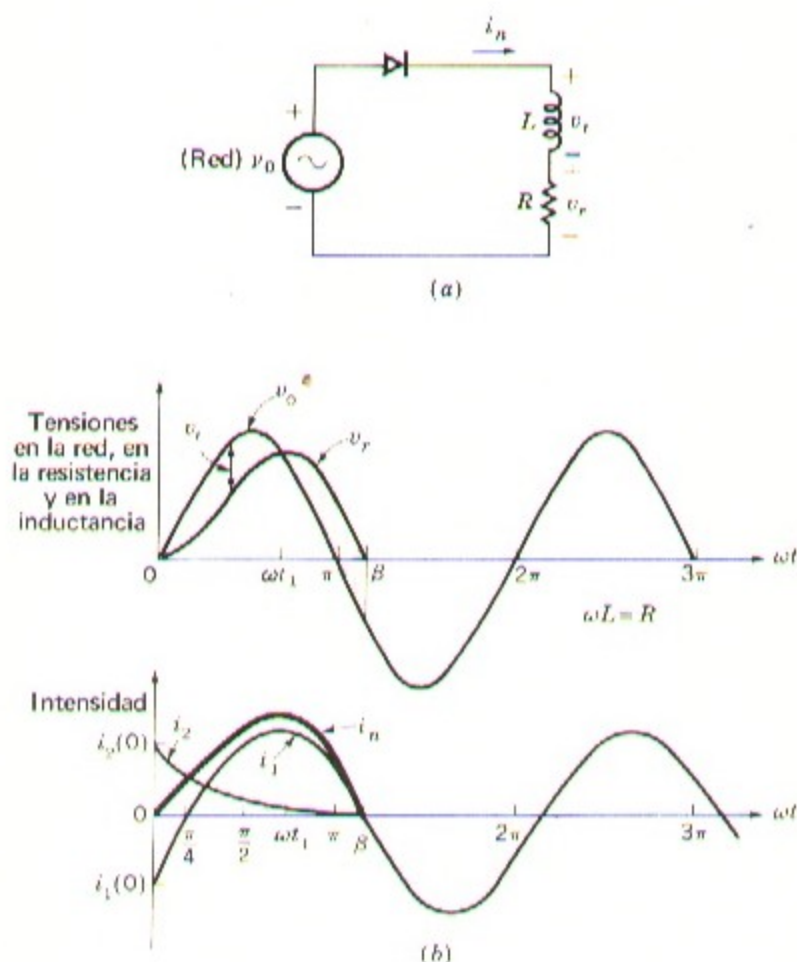


Fig. 8-10. Funcionamiento de un rectificador diodo de media onda con carga reactiva RL . (a) Circuito. (b) Ondas de las componentes de tensión en la carga, v_r y v_l , y de la intensidad en la carga i_n .

Desde el ángulo ωt_1 hasta el β , la corriente decrece hasta que el flujo concatenado λ recobra el valor que tenía cuando ωt era igual a cero, o sea:

$$\Delta\lambda = \int_{t_1}^{\beta} \omega v_l dt = \frac{1}{\omega} \int_{\omega t_1}^{\beta} v_l d(\omega t) \quad (8-6)$$

Las integrales de las ecuaciones 8-5 y 8-6 están representadas en la Fig. 8-10 b por las zonas sombreadas, las cuales, frecuentemente denominadas *áreas tensión-tiempo*, deben ser iguales en cada uno de los lados de la punta de intensidad en ωt_1 .

Ejemplo 8-2

Hállese, para el circuito de la Fig. 8-10 *a* la corriente i_n durante el período de conducción desde $\omega t = 0$ hasta $\omega t = \beta$. Tómese $R = \omega L$.

SOLUCION

La intensidad i_n tiene una componente de régimen permanente i_1 y otra transitoria i_2 . La condición límite para $\omega t = 0$ es:

$$i_n(0) = i_1(0) + i_2(0) = 0$$

La componente de régimen permanente i_1 viene dada por:

$$i_1 = \frac{\sqrt{2} V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \text{sen}(\omega t - \phi) \quad (8-7)$$

siendo $\phi = \text{arc. tg } \omega L/R$.

La componente transitoria es:

$$i_2 = I_2 e^{-t/\tau} \quad (8-8)$$

siendo $\tau = L/R$. La condición límite exige que:

$$I_2 = \frac{\sqrt{2} V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \text{sen } \phi \quad (8-9)$$

y siendo $R = \omega L$, las componentes son:

$$i_1 = \frac{V_0}{R} \text{sen}(\omega t - \pi/4) \quad (8-10)$$

$$i_2 = 0,707 \frac{V_0}{R} e^{-\omega t} \quad (8-11)$$

La intensidad total y sus componentes, correspondientes a este ejemplo, pueden verse en las curvas de la Fig. 8-10 *b*. La intensidad de punta se presenta aproximadamente cuando $\omega t_1 = 3\pi/4$ (135°) y la extinción cuando $\beta = 5\pi/4$ (225°).

Durante el período comprendido entre $\omega t = 0$ y ωt_1 de la Fig. 8-10 *b*, la red suministra energía a la resistencia R en la cuantía $v_r i_n$ y a la inductancia L en la $v_L i_n$; desde $\omega t = \omega t_1$ hasta $\omega t = \pi$, la resistencia se alimenta de la red al mismo tiempo que de la energía (-) $v_L i_n$ procedente de la inductancia L ; desde $\omega t = \pi$ hasta $\omega t = \beta$ la energía liberada por la inductancia L no sólo sigue alimentando a R sino que en parte se restituye a la red, prolongando el período de conducción desde π hasta el ángulo β de extinción.

d. Rectificador trifásico de media onda

El circuito rectificador trifásico más sencillo es el de media onda representado en la Fig. 8-11 *a*, que consiste en tres diodos conectados a una carga resistiva común R ; la corriente de carga retorna por el neutro n de la red trifásica de suministro.

En las Figs. 8-11 *b* y 8-11 *c* pueden verse las tres tensiones trifásicas de línea, v_{an} , v_{bn} y v_{cn} así como la tensión resultante en la resistencia.

Cada uno de los tres diodos conduce la corriente durante 120° , y sus tres cátodos están conectados a un punto común de la carga, mientras que los ánodos se conectan uno a cada una de las fases. De acuerdo con el modelo de la Fig. 8-5, cada diodo conduce

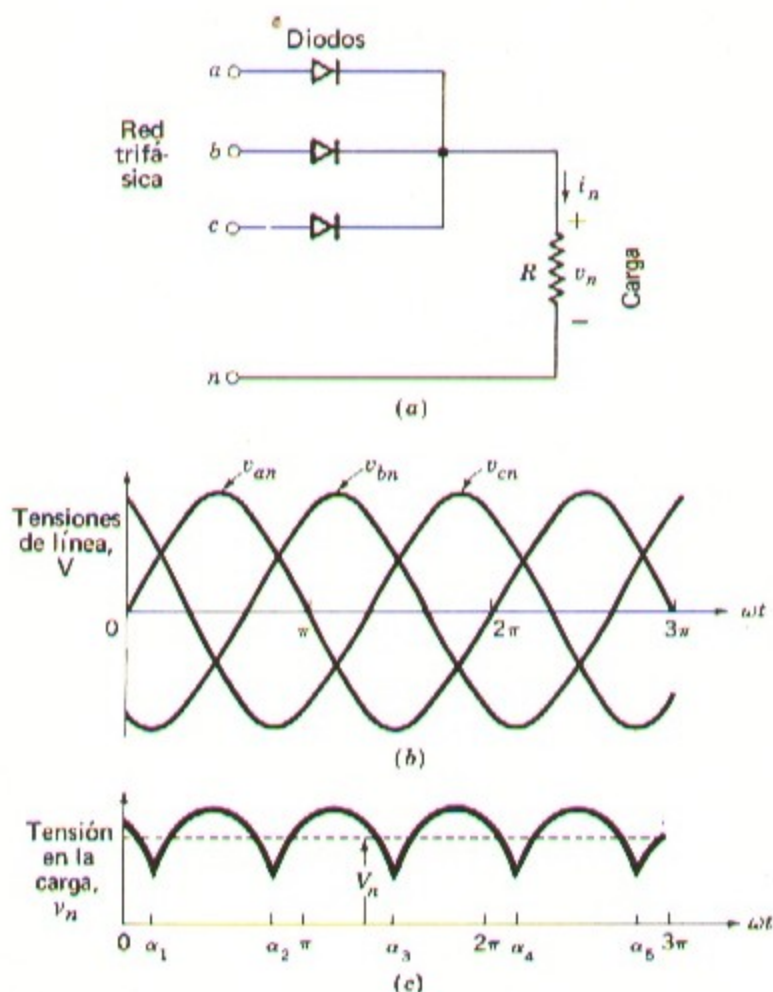


Fig. 8-11. Funcionamiento de un circuito rectificador trifásico de media onda. (a) Circuito. (b) Tensiones trifásicas simples. (c) Tensión en la carga v_n .

únicamente cuando su tensión es positiva y bloquea cuando es negativa, de tal forma que en cualquier momento el que conduce la corriente es el que está conectado a la fase de mayor tensión instantánea, siendo esta tensión la que existirá en el punto común de los cátodos con lo que los otros dos diodos quedan con polarización inversa o negativa. Como puede apreciarse en la Fig. 8-11 *c* la tensión en bornes de la resistencia sigue la envolvente de los mayores valores instantáneos de las tres tensiones de línea.

La tensión v_n en la carga es una tensión continua de valor medio V_n dado por:

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{3}{2\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sqrt{2} V_0 \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{-3}{\sqrt{2}\pi} [V_0 \cos(\omega t)]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \end{aligned} \quad (8-12)$$

Siendo $\alpha_1 = \pi/6$ y $\alpha_2 = 5\pi/6$,

$$V_n = 1,17 V_0 \quad (8-13)$$

Existen numerosos circuitos rectificadores trifásicos que utilizan diodos y tiristores. En los que utilizan diodos, la tensión en la carga es directamente proporcional a la tensión de la red de corriente alterna, mientras que si se utilizan tiristores puede regularse la tensión de salida independientemente de la de la red. El circuito rectificador más conveniente se selecciona de acuerdo con las necesidades propias de la aplicación que se le pretende dar y de su mayor economía de coste. El precio de diodos y tiristores aumenta con su tensión e intensidad nominales, por lo que para obtener la mejor solución debe estudiarse el empleo de pocos elementos muy costosos o un mayor número de elementos más económicos.

8.3. ACCIONAMIENTO DE MOTORES DE CORRIENTE CONTINUA

Estudiaremos tres circuitos de accionamiento de motores de corriente continua, correspondientes a los tres circuitos rectificadores para cargas resistivas descritos en el apartado anterior³. Se emplearán los rectificadores para alimentar el circuito inducido de un motor de corriente continua. Para mayor simplicidad, en el circuito inducido sólo se considerará su tensión e_a inducida y su inductancia L_a despreciándose su resistencia R_a y el efecto de las escobillas. Se supondrá constante el flujo inductor ϕ_f , y se admitirá que la inercia del rotor es J y que el par mecánico resistente es proporcional a la velocidad, $B\omega_m$.

a. Sistema monofásico de media onda, con diodos

El sistema más sencillo para accionar un motor de corriente continua a partir de una red de corriente alterna consiste en un diodo único para alimentar el circuito inducido: el

³ Véase A. Kusko "Solid State DC Motor Drives" M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1969.

devanado de excitación debe ser alimentado independientemente, o bien pueden utilizarse imanes permanentes. Este sistema no permite regular la tensión en el inducido, y salvo que pueda ajustarse la corriente de excitación, el motor trabajará según una característica par-velocidad determinada. Sin embargo, nos valdremos de este circuito para mostrar los principios básicos de funcionamiento con rectificador; posteriormente reemplazaremos el diodo por un tiristor para estudiar un sistema de accionamiento regulable.

En la Fig. 8-12 pueden verse las ondas de tensión, intensidad y velocidad correspondientes a dos distintos pares de carga, y a la misma velocidad media. El inducido recibe un impulso de corriente i_a en cada ciclo de la tensión de línea v_0 . Como puede verse en la citada figura, la intensidad i_a se inicia en el ángulo $\omega t = \alpha$ cuando la tensión instantánea v_0 de la línea empieza a superar a la fuerza contraelectromotriz en el inducido e_a y por consiguiente el diodo se hace conductor. Dicha intensidad i_a se prolonga durante un

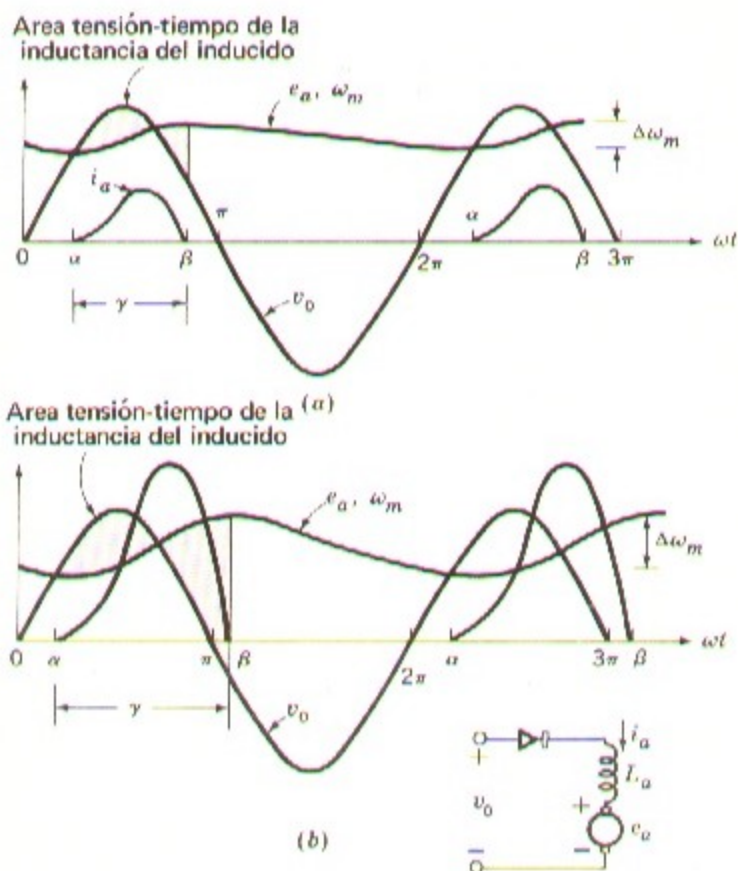


Fig. 8-12. Motor de continua alimentado por un circuito rectificador diodo de media onda. (a) Curvas de velocidad ω_m , intensidad i_a y f.e.m. e_a con carga ligera. (b) Las mismas curvas con carga fuerte e igual velocidad media.

ángulo γ hasta que $\omega t = \beta$. Exactamente igual a lo que sucedía con el circuito RL de la Fig. 8-10, el período de conducción termina en $\omega t = \beta$ cuando el área de las zonas sombreadas tensión-tiempo correspondientes a la tensión de inductancia se igualan. El cese de la conducción indica que la inductancia del inducido ha restituido al circuito la energía que tenía almacenada, o que los flujos concatenados con el circuito inducido vuelven a estar como en su punto de partida $\omega t = \alpha$.

Durante el período de conducción fluye energía eléctrica hacia el inducido; la acción mutua entre la corriente y el flujo inductor se traduce en un par electromagnético positivo, y el motor se acelera con un aumento de velocidad $\Delta\omega_m$, como se ve en la Fig. 8-12 *a*. Desde el final del período de conducción en un ciclo, en $\omega t = \beta$, hasta el inicio de la conducción en el siguiente cuando $\omega t = 2\pi + \alpha$, el motor decelera perdiendo $\Delta\omega_m$ de su velocidad, suministrando mientras tanto energía a la carga a expensas de su propia energía cinética: el par es $T_m = J d\omega_m/dt$. La inductancia del inducido actúa como una reserva de energía eléctrica durante el período de conducción, y la inercia de la carga y del rotor como reserva de energía mecánica durante el período de deceleración.

En la Fig. 8-12 *b* se ve la forma de las ondas al aumentar el par resistivo, pero ajustando la velocidad al mismo valor medio de antes.

La caída de velocidad $\Delta\omega_m$ es mayor que antes durante el período de deceleración, ya que el par resistivo es también mayor. Durante este medio ciclo, el diodo da paso a la corriente algo antes, y además, como la amplitud y valor medio de la pulsación de intensidad i_a es mayor, crece el área de la zona sombreada tensión-tiempo alargándose el período de conducción γ . Con fuertes pares y poca velocidad, el período de conducción excederá del ángulo π aproximándose a 2π .

Ejemplo 8-3

Un motor de un c.v., y 500 r.p.m. cuyo momento de inercia del rotor es $J = 0,07 \text{ Nw}\cdot\text{m}\cdot\text{seg}^2$ y su par magnético de 20 Nw·m se suministra de una red de 50 Hz a través de un circuito rectificador de diodo en media onda. Supóngase que el período de deceleración es de π radianes, tal como se ve en la Fig. 8-12 *b*. Hállese la caída de velocidad sufrida entre dos períodos de conducción consecutivos cuando el motor desarrolla su par nominal a la velocidad media también nominal.

SOLUCION

Durante el período de deceleración en el que el motor marcha por inercia el par electromagnético es nulo: la ecuación diferencial de la velocidad del motor viene dada por:

$$J \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m = 0 \quad (8-14)$$

en la que se ha supuesto que el par resistente es proporcional a la velocidad. La velocidad del motor en función de la velocidad inicial ω_{m0} es por tanto:

$$\omega_m = \omega_{m0} e^{-t/\tau} \quad (8-15)$$

La constante mecánica de tiempo del motor es:

$$\tau_L = \frac{J}{B} \quad (8-16)$$

siendo los valores de J y de B :

$$J = 0,07 \text{ Nw-m/seg}^2$$

$$T = 20 \text{ Nw-m}$$

$$B = 20 / (500 \times 2\pi \times 1/60) = 0,385 \text{ Nw-m/seg.}$$

$$\tau_L = \frac{0,07}{0,385} = 0,183 \text{ seg.}$$

La constante mecánica de tiempo τ_L es grande comparada con el tiempo Δt de π/ω , igual a 0,010 seg por tanto, la pérdida de velocidad será:

$$\Delta\omega_m = \frac{d\omega_m}{dt} \Delta t \quad (8-17)$$

y de la ecuación 8-15:

$$\frac{d\omega_m}{dt} = -\omega_{m0} \frac{1}{\tau_L}$$

Substituyendo en la ecuación 8-17 tendremos:

$$\text{Pérdida de velocidad} = -\frac{0,010}{0,183} \times 500 = -27,5 \text{ r.p.m.}$$

Las fluctuaciones de velocidad del motor son del orden del 5 por ciento de la velocidad base, de forma que durante los períodos en que la corriente queda bloqueada y no circula, el motor puede vencer la carga sin detenerse.

b. Sistema monofásico media onda, con tiristores

El sistema de media onda con diodos visto en el apartado 8-3 a es adecuado para la regulación del campo inductor dentro de una variación de velocidad de 3 a 1. En las Figs. 8-13 y 8-14 están representados el circuito y las ondas de un sistema con tiristores: el diodo de la Fig. 8-12 se ha substituido por un tiristor; de esta forma se puede regular la tensión aplicada al inducido, y por consiguiente la velocidad del motor, dentro de un

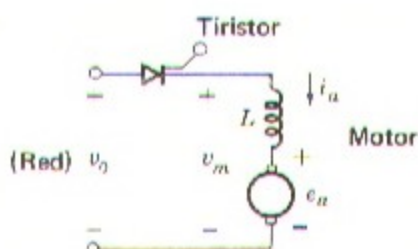


Fig. 8-13. Circuito tiristor de media onda para el accionamiento de un motor de continua.

amplio campo con sólo regular el ángulo de cebado. El funcionamiento es análogo al del caso de carga RL visto en el apartado 8-2 *c*, así como al de media onda con diodo tratado anteriormente.

En la Fig. 8-14 puede verse que la circulación de la corriente en el inducido i_a se inicia con el ángulo de cebado α cuando el valor de la tensión de línea v_0 supera a la del motor v_m y además se aplica al tiristor una señal de cebado.

La corriente sigue circulando durante un ángulo de conducción γ hasta que se anula cuando $\omega t = \beta$, momento en que queda bloqueada hasta el próximo impulso de cebado que tendrá lugar cuando $\omega t = 2\pi + \alpha$. Las zonas de tensión-tiempo correspondientes a la tensión v_i de la inductancia del inducido se han señalado en la figura con un sombreado. Las superficies positivas y negativas de dicha zona se equilibran cuando la intensidad i_a se anula, es decir, cuando el flujo concatenado recobra su valor inicial y la energía del campo magnético queda restituida a la red. Al aumentar el par conservándose la velocidad media deberá adelantarse el ángulo α : la intensidad aumenta en magnitud, así como el ángulo o período de conducción; la caída de velocidad es más pronunciada. Para aumentar la velocidad media manteniendo el par, deberá también adelantarse el ángulo α , de tal forma que el período de conducción se sitúe próximo a la punta de la onda de tensión v_0 de la línea.

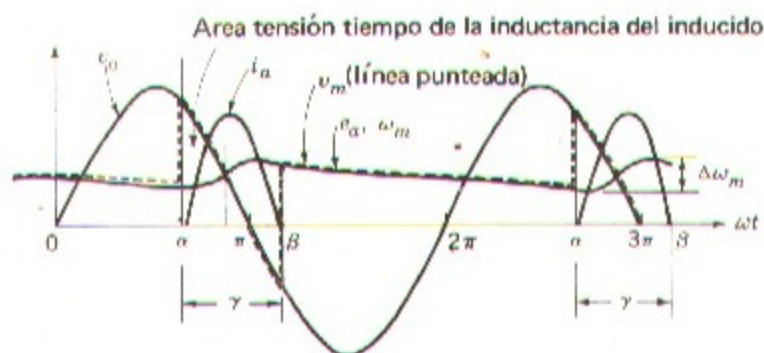


Fig. 8-14. Curvas de velocidad ω_m , intensidad i_a , tensión en el motor v_m , y f.e.m. e_a correspondientes al circuito de la Fig. 8-13.

La ecuación del circuito inducido durante el período de conducción es:

$$v_0 = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_a \quad (8-18)$$

que puede integrarse a lo largo de todo el período:

$$\int_{\alpha/\omega}^{\beta/\omega} v_0 dt = R_a \int_{\alpha/\omega}^{\beta/\omega} i_a dt + L_a \int di_a + \int_{\alpha/\omega}^{\beta/\omega} e_a dt \quad (8-19)$$

La interpretación de los términos de esta última ecuación requiere especial cuidado: el término función de la inductancia es igual a cero ya que la corriente i_a recobra su valor inicial al final del período de integración: el primer miembro de la ecuación puede evaluarse únicamente durante el período de conducción mientras el tiristor da paso a la corriente, y la tensión v_0 abarca sólo una parte de la onda de tensión de la línea. Dividiendo cada uno de los términos por el tiempo de conducción γ/ω , puede interpretarse la ecuación como:

$$V'_m = I'_a R_a + E'_a \quad (8-20)$$

en la que:

V'_m = Tensión media aplicada al motor a lo largo del período de conducción: la tensión instantánea aplicada es sólo una porción de la onda de la línea.

I'_a = Intensidad media durante el período de conducción.

E'_a = f.e.m. media del inducido durante el período de conducción.

Para considerar en lugar de estos valores los valores medios a lo largo de todo un ciclo de la tensión de línea, podremos escribir:

$$V_m = I_a R_a + E_a \quad (8-21)$$

en la que:

V_m = Tensión media en los bornes del motor.

I_a = Intensidad media en el inducido, igual a $(\gamma/2\pi)I'_a$

E_a = Fuerza contraelectromotriz inducida = $K_m \Omega_m = E'_a$

Ω_m = Velocidad media del motor.

Las relaciones entre el par magnético T y la fuerza contraelectromotriz dadas en el apartado 4-4 pueden expresarse en función de una constante electromecánica K_m , siempre que la excitación se mantenga invariada, tal que $T = K_m i_a$ y $e_a = K_m \omega_m$

La ecuación del sistema mecánico es:

$$T = K_m i_a = T_L + J \frac{d\omega_m}{dt} \quad (8-22)$$

que puede integrarse a lo largo de un ciclo de la tensión de línea

$$K_m \int_0^{2\pi/\omega} i_a dt = \int_0^{2\pi/\omega} T_L dt + J \int d\omega_m \quad (8-23)$$

llegando finalmente a:

$$K_m I_a = T_L \quad (8-24)$$

Las ecuaciones 8-21 y 8-24 indican que la relación entre la velocidad media Ω_m y el par resistente medio T_L es función de la tensión e intensidad medias en el motor V_m e I_m , exactamente igual a lo que ocurre en un motor de corriente continua alimentado por una fuente de tensión continua constante. Hay que ser cauteloso al emplear estas ecuaciones para predecir el funcionamiento del motor, ya que la tensión media en sus bornes V_m no es una variable independiente: la variable independiente es en general el ángulo de cebado α , y la tensión media en bornes V_m depende de este ángulo y del de conducción γ el cual a su vez varía al variar la intensidad en el inducido. En el ejemplo 8-4 se verá la forma de emplear estas ecuaciones.

Ejemplo 8-4

El motor de 1 c.v. del ejemplo 8-3 está trabajando con el 38,4 por ciento del par magnético en un circuito de media onda con tiristor.

El ángulo de cebado es $\alpha = 90^\circ$ y el de extinción $\beta = 210^\circ$. Las constantes del motor son: $R_a = 7,56$ ohm, $L_a = 0,55$ henry, $K_m = 4,23$ Nw-m/A o bien 4,23 V-seg/rad.

La tensión eficaz de línea es de 120 V.

Hállese la velocidad media Ω_m .

SOLUCION

La tensión media en bornes durante el período de conducción $\gamma = 2\pi/3$ es:

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{3\sqrt{2} V_0}{2\pi} \int_{\pi/2}^{7\pi/6} \text{sen } \omega t d(\omega t) = \frac{-3\sqrt{2} V_0}{2\pi} [\cos \omega t]_{\pi/2}^{7\pi/6} \\ &= \frac{3\sqrt{2} \times 120 \times 0,866}{2\pi} = 69,6 \text{ volts} \end{aligned} \quad (8-25)$$

La intensidad media en el inducido, con el 38,4 por ciento del par nominal es:

$$I_a = \frac{T_L}{K_m} = \frac{7,70}{4,23} = 1,82 \text{ A} \quad (8-26)$$

La intensidad media durante el período de conducción es:

$$I'_a = 3I_a = 5,46 \text{ A}$$

y la velocidad media Ω_m dada por la ecuación 8-20:

$$\begin{aligned} \Omega_m &= \frac{V'_m - I'_a R_a}{K_m} \\ &= \frac{69,6 - 5,46 \times 7,56}{4,23} = 6,6 \text{ rad/seg.} \end{aligned} \quad (8-27)$$

$$\text{Velocidad media} = 6,6 \text{ rad/seg} \times \frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \times \frac{60 \text{ seg}}{1 \text{ min}} = 63 \text{ r.p.m.}$$

Utilizando los resultados del ejemplo 8-3 podemos ver que la caída de velocidad durante un período de deceleración de alrededor de $3\pi/2$ radianes, y con el 38,4 por ciento del par es de $0,384 \times 27,5 \times 1,5 = 16 \text{ r.p.m.}$ Evidentemente, el trabajo a 63 r.p.m. con una caída de 16 r.p.m. no puede considerarse como de velocidad poco variable.

El sistema de alimentación con media onda es económico porque utiliza un solo rectificador, pero tiene varios inconvenientes: en primer lugar, la corriente circula por el inducido en pulsaciones relativamente cortas, una por cada ciclo de la tensión de línea. La intensidad tiene una relación bastante alta entre sus valores eficaz y medio, de tal forma que a igualdad de par el calentamiento del inducido es mayor que con corriente continua, lo que obliga a forzar la ventilación para evitar desperfectos al trabajar con la potencia nominal; en segundo lugar, el motor decelera durante los períodos en que no recibe corriente; con pares fuertes y velocidades bajas las fluctuaciones de velocidad llegan a ser demasiado pronunciadas; y por último, todos los circuitos de media onda introducen una componente continua en la red de suministro, que puede saturar los transformadores y provocar otras dificultades. Una solución puede ser la de emplear circuitos monofásicos de onda completa que dan dos pulsaciones de corriente por ciclo con lo que se acorta el tiempo de deceleración y por consiguiente la caída de velocidad, al mismo tiempo que se reduce la relación entre los valores eficaz y medio: otra solución es la de emplear circuitos trifásicos.

c. Sistema trifásico media onda con tiristores

Para alimentar motores de corriente continua de unos 5 c.v. o más, se parte frecuentemente de sistemas trifásicos. Los circuitos rectificadores trifásicos dan mayor número de pulsaciones por ciclo de la frecuencia de línea, asegurando así el paso de corriente durante una mayor fracción de tiempo, aumentando la relación entre los valores medio y eficaz y reduciéndose el calentamiento del inducido. Por otra parte, la potencia se toma de un sistema trifásico que en general es de más capacidad que uno monofásico.

Para este objeto se emplean tres disposiciones distintas a base de diodos y de tiristores: puentes trifásicos con seis tiristores; puentes trifásicos incompletos, de tres diodos y tres tiristores y circuitos trifásicos de media onda con tres tiristores; este último fue estudiado ya en el apartado 8-2 *d* para el caso de carga resistiva, ahora lo será para el caso de que la carga sea un motor de corriente continua.

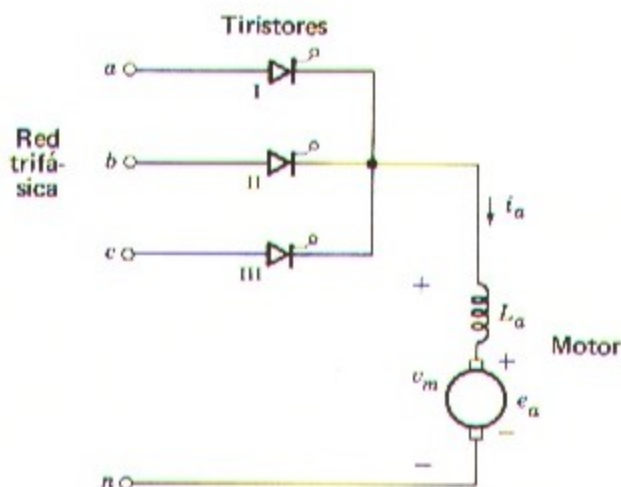


Fig. 8-15. Esquema de accionamiento trifásico de media onda.

En la Fig. 8-15 está representado el circuito de media onda correspondiente al último caso citado: está formado por tres tiristores dispuestos de forma que cuando se ceba el I queda aplicada a los bornes del motor una parte de la onda de tensión v_{an} , cuando se ceba el II queda aplicada una parte de la onda v_{bn} , y cuando el III una de la v_{cn} . No es posible que dos tiristores conduzcan corriente simultáneamente, porque el que está conectado en un momento dado a la fase de mayor tensión instantánea crea una tensión ánodo-cátodo negativa en los otros dos que quedan así bloqueados. En el momento en que uno de los rectificadores se ceba durante el funcionamiento normal, hay un corto período de tiempo en el que dos rectificadores están conduciendo simultáneamente para permitir que la corriente en la inductancia relativa a la rama correspondiente se anule: este período se denomina de conmutación y de él se trata detalladamente en los textos especializados en circuitos rectificadores.

En la Fig. 8-16 se muestran las ondas de tensión en bornes del motor v_m , tensión v_l en la inductancia del inducido, fuerza contraelectromotriz e_a en el mismo, y su intensidad i_a para tres valores distintos del ángulo de cebado α . Convencionalmente se toma como ángulo de cebado $\alpha = 0$ el que corresponde a la máxima tensión de salida del tiristor, lo que ocurre a $\omega t = \pi/6$ en la onda de tensión v_{an} . Por consiguiente la tensión del rectificador se igualaría a cero si α se retrasa 150° con carga resistiva. Las ondas de las Figs. 8-16 *b*

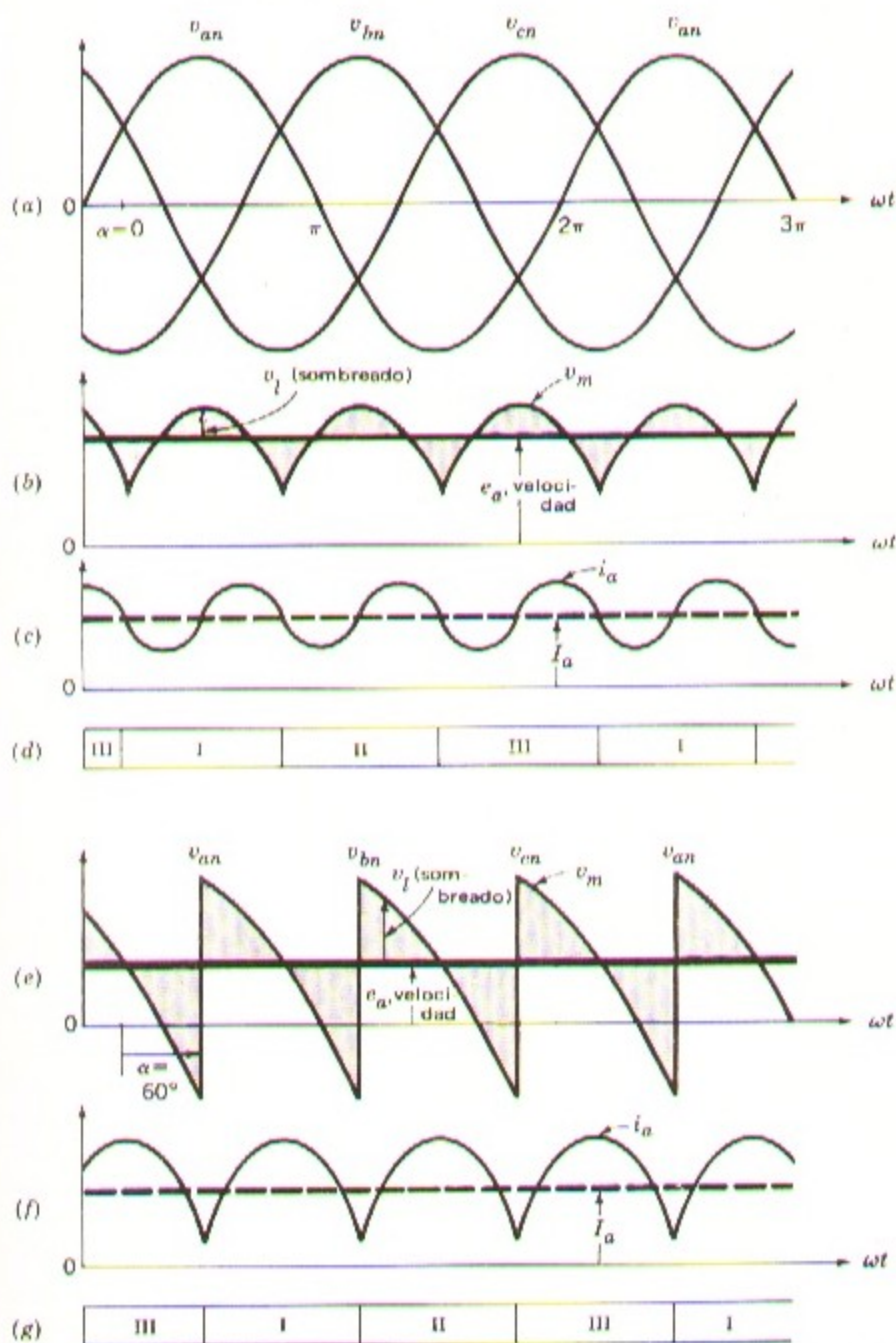
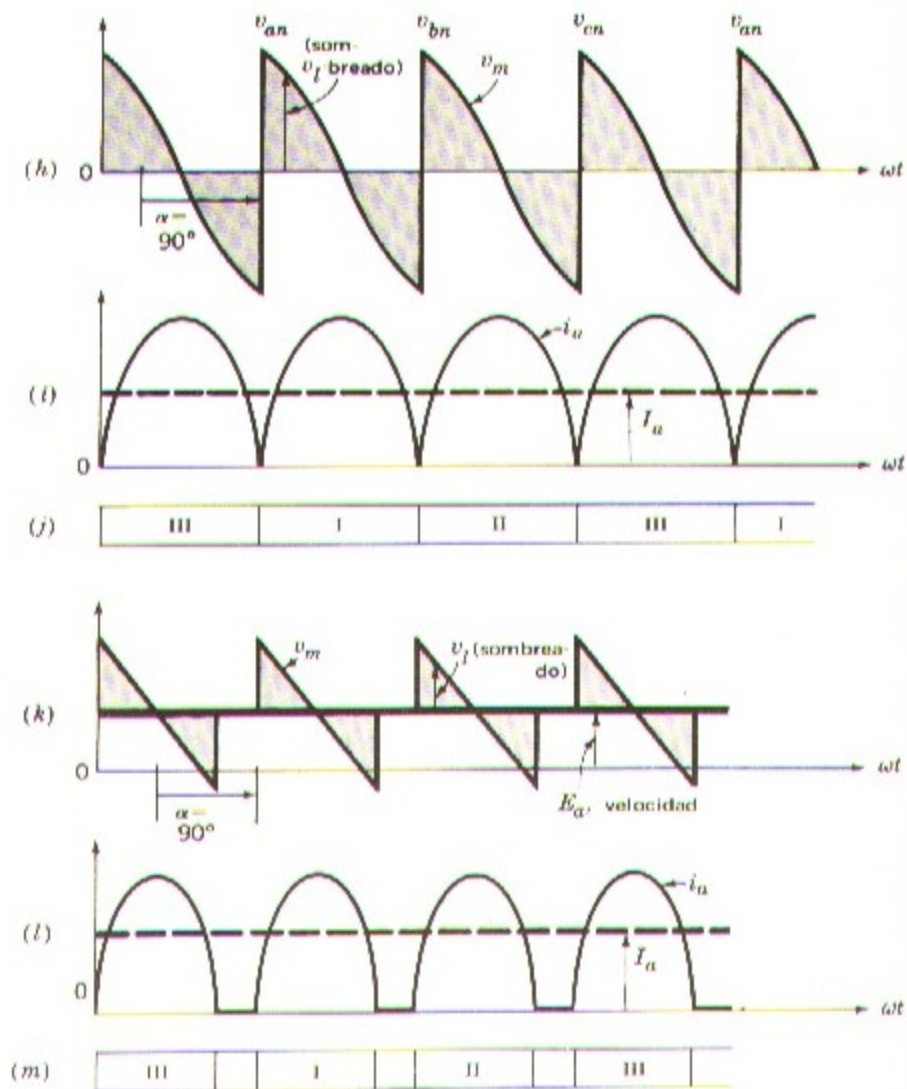


Fig. 8-16. Curvas de tensión en el motor y de intensidad en el inducido, con un sistema de accionamiento trifásico de media onda. (b) $\alpha = 0$ (e) $\alpha = 60^\circ$; (h) $\alpha = 90^\circ$; (k) $\alpha = 90^\circ$ a baja velocidad.



Véase leyenda en la página anterior.

y 8-16 *c* para $\alpha = 0$ representan el funcionamiento del motor de continua a su tensión y velocidad máximas. Cada tiristor conduce durante 120° y la intensidad i_a en el inducido no tiene solución de continuidad. La tensión v_m aplicada a los bornes del motor es idéntica a la aplicada a una carga resistiva tal como se representa en la Fig. 8-11. Tanto la tensión como la intensidad en el motor presentan tres pulsaciones u ondulaciones por cada ciclo de la tensión de línea, es decir, que tales ondulaciones son de frecuencia triple que la de la red.

La variabilidad de la velocidad instantánea es pequeña ya que la f.e.m. e_a es prácticamente constante y casi igual al valor medio de v_m . La diferencia instantánea entre estas dos tensiones es la tensión v_l de la inductancia del circuito inducido representada por la zona sombreada, cuyo valor medio a lo largo del tiempo de una ondulación o de un ciclo de la frecuencia de línea debe ser igual a cero. La magnitud de las ondulaciones de la corriente dependen de la inductancia del circuito inducido.

La forma de las ondas de las Figs. 8-16 *e* y 8-16 *f* corresponden a un ángulo $\alpha = 60^\circ$ siendo la inductancia del inducido lo bastante alta para que se mantenga constantemente el paso de corriente: estas curvas representan el funcionamiento a velocidad reducida. La tensión media en los bornes del motor V_m cuando la corriente circula sin interrupción viene dada por:

$$\begin{aligned} V_m &= \frac{3V_0}{\sqrt{2}\pi} \int_{\alpha+\pi/6}^{\alpha+5\pi/6} \text{sen } \omega t \, d(\omega t) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{\pi} 0,866 V_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (8-28)$$

siendo V_0 la tensión eficaz simple (entre fase y neutro) y el valor de V_m para $\alpha = 0^\circ$ es $1,17 V_0$. Si $\alpha = 60^\circ$ la tensión media en bornes del motor y la velocidad son proporcionales a $\cos \alpha$, o sea 0,5 del valor con $\alpha = 0^\circ$. Las fluctuaciones de la corriente en el inducido son mayores que cuando α era igual a 0° lo que se refleja en la mayor superficie de las zonas tensión de inductancia-tiempo que deben ser absorbidas en cada ciclo de fluctuación.

En las Figs. 8-16 *h* y 8-16 *i* las ondas representadas corresponden a un ángulo $\alpha = 90^\circ$ y una inductancia del circuito inducido suficiente para mantenerse justamente el paso ininterrumpido de corriente: representan la situación con motor a velocidad nula pero desarrollando un par de carga proporcional a la corriente en el inducido i_a . La tensión en bornes del motor v_m es esencialmente una onda de frecuencia triple que la de la red, y el valor de punta de la onda de intensidad es igual al doble del valor medio.

Una inductancia mayor en el circuito inducido tiende a reducir la amplitud de las fluctuaciones, y una inductancia menor motiva la discontinuidad en el paso de corriente. La Fig. 8-16 *k* muestra un caso de discontinuidad con $\alpha = 90^\circ$ a baja velocidad y carga reducida.

Ejemplo 8-5

Un motor derivación de corriente continua, de 100 c.v. a 1750 r.p.m. tiene una inductancia en su inducido $L_a = 1,1 \times 10^{-3}$ henry, una resistencia $R_a = 14,4 \times 10^{-3}$ ohm, y una constante $K_m = 1,27$ V-seg/rad. El motor se alimenta con su intensidad nominal $I_a = 340$ A de una red trifásica de 480 V tensión compuesta (entre fases), a través de un rectificador de media onda de tiristores.

- Hállese el ángulo de cebado de los tiristores necesario para alcanzar la velocidad nominal de 1750 r.p.m. Considérese que dichos tiristores tienen una caída de tensión de 1 V y que no hay discontinuidad en el paso de corriente.
- Determinése la amplitud de las fluctuaciones de intensidad en el inducido cuando $\alpha = 90^\circ$. El motor está parado, absorbiendo su inducido la intensidad nominal. A efectos del cálculo despréciase la resistencia R_a .

SOLUCION

- a. La tensión simple eficaz V_0 es:

$$V_0 = \frac{480}{\sqrt{3}} = 277 \text{ V}$$

La tensión media en bornes del motor viene dada por la ecuación 8-28:

$$V_m = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \times 0,866 \times 277 \cos \alpha \text{ V}$$

La f.e.m. inducida a 1750 r.p.m. es:

$$E_a = \frac{1750}{60} \times 2\pi \text{ rad/seg} \times 1,27 \text{ V-seg/rad} = 232 \text{ V}$$

A este valor debe añadirse 1 V para los tiristores y 4,9 V para la caída $I_a R_a$, lo que da un total de 238 V. El ángulo de cebado será por consiguiente:

$$\cos \alpha = \frac{238}{325} = 0,735$$

$$\alpha = 43^\circ$$

b. La tensión aplicada a la inductancia del circuito inducido, siendo $\alpha = 90^\circ$, es la correspondiente a la zona sombreada de la Fig. 8-16 h. El aumento de intensidad ΔI_a

entre $\omega t = 2\pi/3$ y $\omega t = \pi$, siendo la inductancia L_a , viene dada por:

$$\begin{aligned} \Delta I_a &= \frac{1}{L_a} \int_{2\pi/3\omega}^{\pi/\omega} \sqrt{2} V_0 \operatorname{sen} \omega t \, dt & (8-29) \\ &= \frac{-392}{\omega L_a} [\cos \omega t]_{2\pi/3\omega}^{\pi/\omega} \\ &= \frac{196}{\omega L_a} \Lambda \end{aligned}$$

Siendo $\omega = 314$ rad/seg y $L_a = 1,1 \times 10^{-3}$ henry, la variación de intensidad entre su máximo y su mínimo es de:

$$\Delta I_a = 574 \text{ A}$$

Para $\alpha = 90^\circ$ esta variación se reparte en partes iguales por encima y por debajo del valor medio, o sea $= 1/2 \Delta I_a = 287 \text{ A}$, y como sea que la intensidad media es de 340 A no llegará a anularse nunca y no habrá solución de continuidad en el paso de corriente.

Para accionamientos de marcha reversible se emplea un par de equipos rectificadores trifásicos de media onda: uno de los equipos está conectado de forma que envíe una tensión positiva al motor, y el otro de forma que la envíe negativa. Puede regularse la velocidad en cualquiera de los dos sentidos por medio de las señales en las puertas de los tiristores.

En los accionamientos en sentido único puede conseguirse un aumento en el ángulo del período de conducción mediante un diodo conectado en paralelo con el inducido como en la Fig. 8-17 *a*. El diodo proporciona camino libre a la corriente del inducido mientras los tiristores están en su período de no conducción; durante este tiempo el inducido queda en cortocircuito y la energía almacenada en su inductancia se descarga sobre sí mismo. En la Fig. 8-17 *b* pueden verse la forma de las ondas en el caso de que $\alpha = 90^\circ$. La tensión en bornes del motor v_m sigue a la tensión de línea mientras el tiristor da paso a la corriente, se anula mientras es el diodo el que conduce, y se iguala a la f.e.m. del inducido e_a cuando tanto el tiristor como el diodo están en reposo. En estas condiciones, la tensión en el motor será cero cuando $\alpha = 150^\circ$ en lugar de serlo cuando $\alpha = 90^\circ$ como en la Fig. 8-16 *b*.

d. Trocadores (Choppers)

Existen dispositivos estáticos especiales para la regulación de motores de continua alimentados por una fuente de tensión constante, que puede ser una batería de acumuladores, como en las carretillas eléctricas industriales o un tercer carril o tendido aéreo en vehículos rápidos: estos dispositivos se emplean en substitución de las resistencias en serie con el inducido teniendo sobre ellas la ventaja de obtener mejor rendimiento, ser de

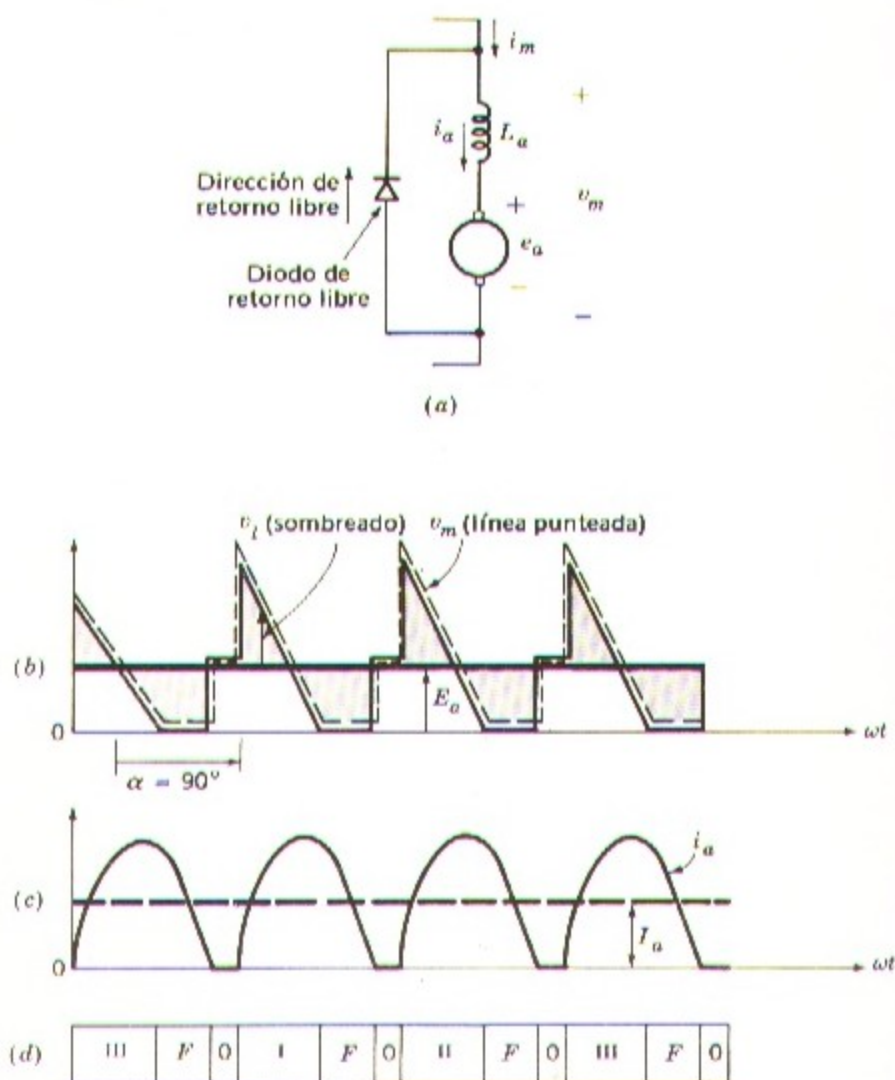


Fig. 8-17. Sistema de accionamiento trifásico de media onda con diodo de retorno libre. (a) Circuito. (b) Onda de tensión en el motor. (c) Intensidad en el inducido con $\alpha = 90^\circ$.

regulación continua, y la posibilidad de frenar el motor en régimen de recuperación⁴. En la Fig. 8-18 puede verse un esquema simplificado del circuito aplicado a un motor serie: la tensión de entrada V_0 es fija, y se regula la tensión media en el motor V_m desde cero hasta V_0 . El tiristor actúa como un interruptor que fuera cerrado y abierto a razón de

4 K. Heumann, "Pulse Control of DC and AC Motors by Silicon Controlled Rectifiers", IEEE Transactions on communication and Electronics, 83: 390-399 (1964).

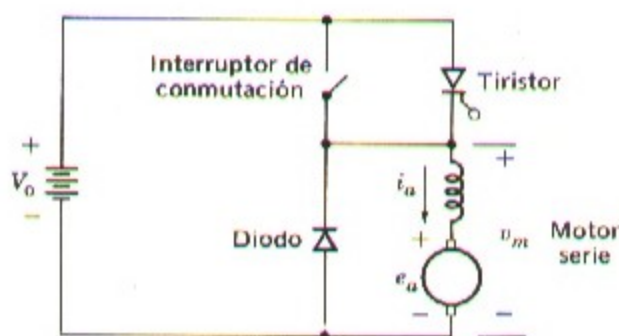


Fig. 8-18. Circuito simplificado de regulación de velocidad mediante troceador.

varios centenares de ciclos por segundo. La relación entre los tiempos en que está cerrado y abierto determina la tensión media en el motor. El tiristor no puede desconectarse por sí mismo mientras está conduciendo corriente; se requiere un circuito de conmutación que imprima al mismo una tensión negativa durante un tiempo sumamente corto, del orden de 40 microsegundos. Este circuito de conmutación está representado en la figura por un interruptor.

En las Figs. 8-19 y 8-20 puede verse la forma de onda en estos circuitos. En la Fig. 8-19, la tensión media efectiva es del orden de $0,2 V_0$. Cuando entra en acción el tiristor en virtud de una señal de cebado aplicada en el momento $t = 0$, la batería suministra la intensidad i_a al inducido, que va creciendo hasta que la inductancia del circuito absorbe el área de la zona tensión-tiempo correspondiente a la diferencia entre V_0 y la fuerza contraelectromotriz e_a , y cuando en el momento t_1 cesa la conducción del tiristor, la intensidad en el inducido circula por el circuito del diodo hasta que la energía almacenada en la inductancia sea restituida al propio inducido. Al aumentar la relación t_1/t_2 entre los tiempos de conducción y de no conducción aumenta la tensión media V_m aplicada al motor, como puede verse en la Fig. 8-20.

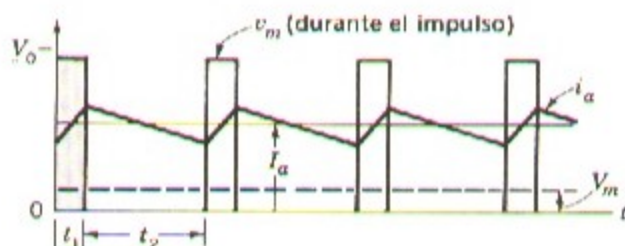


Fig. 8-19. Ondas de tensión en el motor y de baja intensidad a baja velocidad.

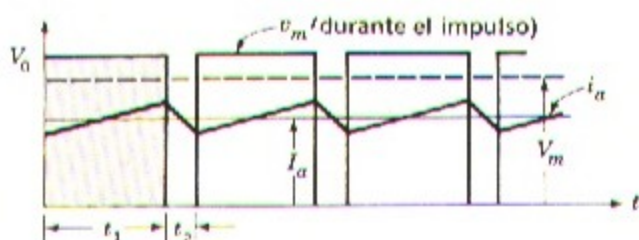


Fig. 8-20. Ondas de tensión en el motor y de intensidad a alta velocidad.

Este procedimiento necesita que el circuito posea una cierta inductancia para almacenar energía. Frecuentemente se emplea un motor serie y el propio devanado inductor actúa de impedancia; sin embargo, puede emplearse también con motores derivación e inductancias exteriores: el circuito inductor se alimenta directamente de la fuente de continua. La regulación puede hacerse variando el ancho o la frecuencia de los impulsos.

El motor trabaja como si estuviera regulado por variación de tensión y no por variación de resistencia, ya que la tensión media en el motor V_m es independiente de la intensidad en el inducido.

Ejemplo 8-6

Un motor serie de 100 c.v. e intensidad nominal 180 A está alimentado de una fuente de corriente continua de 500 V a través de un dispositivo troceador. La inductancia de inducido e inductor es de 0,060 henry. Con la relación mínima $t_1/(t_1 + t_2) = 0,20$ como en la figura 8-19, hállese la frecuencia de los impulsos para limitar a 10 A las variaciones de intensidad en el inducido.

SOLUCION

Con una relación de 0,20, la tensión media en el inducido es de:

$$0,2 \times 500 = 100 \text{ V}$$

El área tensión-tiempo aplicada a la inductancia es $(500-100)t_1$ V-seg, y por consiguiente, el aumento de intensidad es:

$$\Delta i_a = \frac{400t_1}{0,060} = 10 \text{ A}$$

$$t_1 = \frac{0,6}{400} = 1,5 \times 10^{-3} \text{ seg}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{1,5 \times 10^{-3}}{0,2} = 7,5 \times 10^{-3} \text{ seg}$$

$$\text{Frecuencia de pulsación} = \frac{1}{7,5 \times 10^{-3}} = 133 \text{ períodos/seg.}$$

La fotografía de la Fig. 8-2 corresponde al equipo troceador de un vehículo eléctrico rápido.

8-4. INTRODUCCION A LOS INVERSORES

Los inversores son dispositivos empleados para alimentar una carga con corriente alterna, de frecuencia y fase cualquiera, a partir de un suministro de corriente continua. Más concretamente, se emplean en sistemas de tracción para alimentar motores de corriente alterna de frecuencia ajustable; para recuperar energía devolviéndola a la red de alterna, al decelerar motores de corriente continua, y para devolver a la red de tensión alterna la potencia engendrada en el rotor de motores de inducción de rotor devanado. Independientemente de su aplicación en los motores, los inversores se emplean también en la alimentación con corriente alterna de computadores y para convertir la energía de continua en alterna en los terminales de las grandes líneas de transporte de energía a alta tensión. En los sistemas para el accionamiento de motores se emplean tiristores a manera de conmutadores, para obtener la forma de onda deseada.⁵

a. Inversor monofásico paralelo

El circuito inversor básico, que utiliza los mismos principios que otros más complicados, es el monofásico paralelo mostrado en la Fig. 8-21.

El inversor convierte la energía eléctrica procedente de la fuente de continua V_0 en alterna de tensión v_i aplicada a una impedancia de carga. La frecuencia de esta tensión alterna depende exclusivamente de los impulsos de cebado aplicados a los tiristores $Tr 1$ y $Tr 2$. Además de los tiristores existe en el circuito una inductancia L , un transformador de salida y una capacidad de conmutación C . No está representado el generador de impulsos, que en general está formado por un oscilador o multivibrador, un circuito para dar forma al impulso, y los transformadores adecuados para aplicar dichos impulsos a los tiristores.

El circuito inversor de la Fig. 8-21 funciona alternando la acción de ambos tiristores: cuando uno de ellos conduce, el otro está bloqueado, de forma que la tensión V_0 se aplica directamente a una mitad del devanado del transformador, dando origen a una semionda de la tensión de salida. Cuando el segundo tiristor entra en acción, la capacidad obliga a descebarse el primero que deja así de conducir, y V_0 queda aplicada a la otra mitad del devanado del transformador dando origen a la segunda semionda de tensión de salida. La inductancia sirve para amortiguar la acción de los elementos del inversor sobre la tensión de entrada. La onda de salida es esencialmente una onda cuadrada, que si es necesario puede transformarse en senoidal mediante filtros adecuados.

⁵ B.D. Bedford and R.G. Hoff "Principles of inverter Circuits", John Wiley & Sons, Inc. Nueva York 1964.

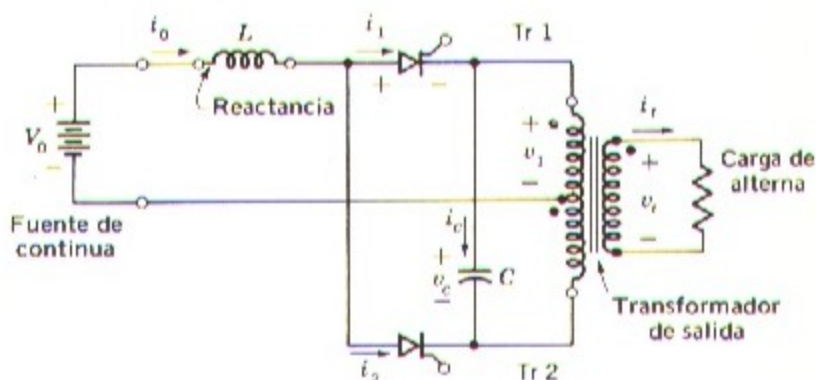


Fig. 8-21. Inversor conmutado por condensador.

b. Funcionamiento del inversor monofásico paralelo

Se describirá a continuación el funcionamiento clásico de un inversor durante un ciclo, una vez estabilizadas las condiciones de régimen permanente. Admitamos que L tiene una inductancia infinita. En la Fig. 8-21 están indicados los demás parámetros que intervienen, y en la Fig. 8-22 están representadas las formas de las ondas.

Supongamos que $Tr 1$ está en su período de conducción, que $Tr 2$ está bloqueado, y que la intensidad y tensión de la carga son respectivamente I_0 y V_0 . Supongamos también que la relación entre el número de espiras del secundario y el de cada una de las dos mitades del primario del transformador sea igual a la unidad. El condensador C está cargado a la tensión $2V_0$, y su intensidad es nula, ya que está totalmente cargado. El tiristor $Tr 2$ está bloqueando la tensión $2V_0$.

En el momento $t(0)$ se aplica un impulso de cebado a $Tr 2$ que se hace conductor y fuerza la tensión $2V_0$ del condensador hacia $Tr 1$ en la dirección inversa, con lo que éste queda bloqueado, y el circuito queda ahora como en la Fig. 8-23. La bobina de choque L obliga a la intensidad I_0 a pasar a través de $Tr 2$ y de la mitad inferior del transformador. Sin embargo, la intensidad en la carga no puede invertirse instantáneamente en el transformador debido a la inductancia de dispersión y a la de la carga, así como porque la tensión de la capacidad, aplicada al devanado primario, mantiene la tensión en la carga con la polaridad que tenía en el momento $t(0^-)$. La intensidad I_0 conducida por $Tr 2$ crea en el transformador ampere-vueltas de polaridad incorrecta. Por tanto, del condensador deberá surgir una corriente de amplitud I_0 , tal como se ve en la Fig. 8-23, para anular los ampere-vueltas de la corriente de $Tr 2$ y crear los necesarios para equilibrar los del transformador. Esta corriente suministra la intensidad de carga al mismo tiempo que se descarga el condensador; la circulación de corriente se prolonga hasta tanto el condensador quede a la tensión $-2V_0$.

En la Fig. 8-22 puede verse cómo la corriente del condensador alcanza la amplitud I_0 decreciendo luego exponencialmente hasta que la tensión en el mismo alcance a valer $-2V_0$. La tensión en bornes de la carga tiene la misma forma que la del condensador,

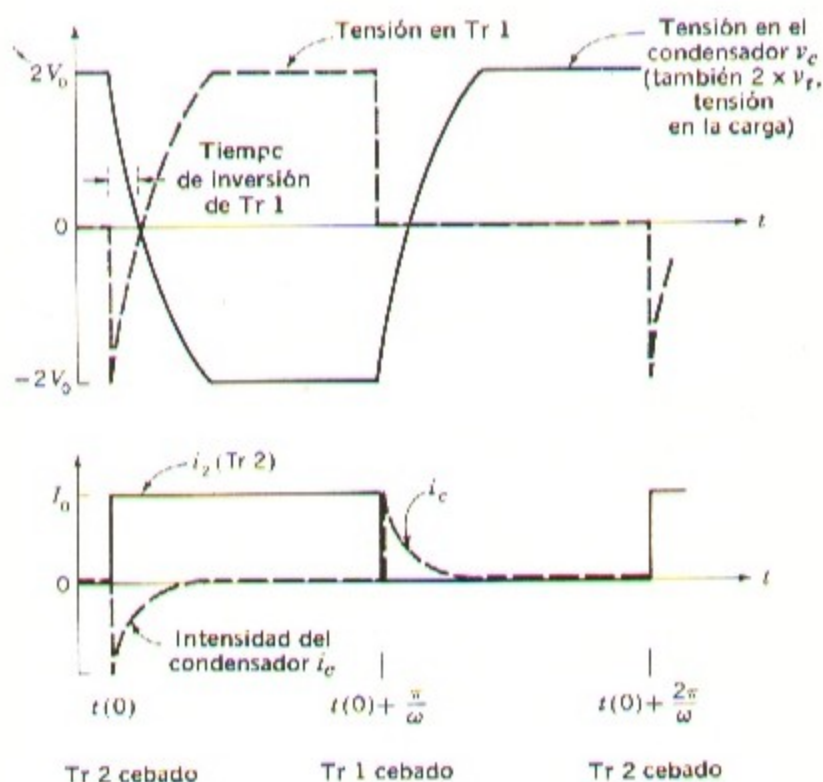


Fig. 8-22. Ondas de tensión en el condensador y en el tiristor e intensidades durante un ciclo trabajando sobre carga resistiva.

pero de amplitud mitad. En la misma figura se aprecia también la tensión aplicada a *Tr 1*: en el instante $t(0 +)$ la tensión inversa es $-2 V_0$, pasando luego a cero y alcanzando $+2 V_0$ en sentido directo. El tiempo durante el cual la tensión en *Tr 1* es negativa es el disponible para bloquear el rectificador, pero este tiempo debe ser mayor que el nominal requerido, pues de lo contrario no llegará a tener lugar la conmutación del inversor.

El principal problema existente para el proyecto y funcionamiento de un dispositivo inversor paralelo con conmutación por condensador reside en la elección de la capacidad de éste, y aceptar luego sus efectos en todo el campo de frecuencias y cargas a que se destina. El condensador debe tener una capacidad relativamente alta que asegure un tiempo suficientemente grande para la conmutación mientras se descarga en la resistencia receptora. Es decir, que la capacidad debe elegirse de acuerdo con el menor valor de la resistencia de la carga, o sea, para el mayor valor de la potencia. Sin embargo, puesto que tal resistencia puede ir aumentando al disminuir la carga el condensador puede llegar a ser demasiado grande, y con una inductancia fija tiende a cargarse en cada semiciclo a una tensión superior a $2 V_0$. Como consecuencia de ello, la tensión en bornes de la carga

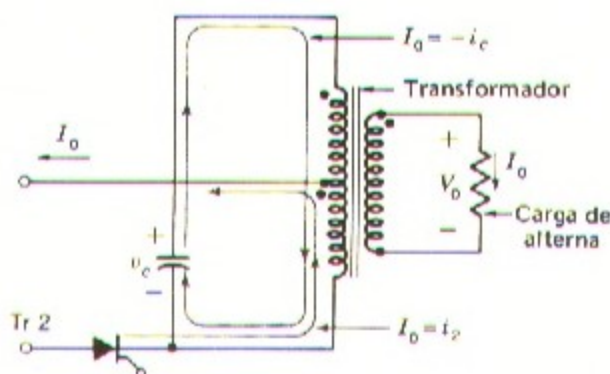


Fig. 8-23. Situación en el momento de la conmutación en un inversor paralelo.

puede variar en función de la propia carga dentro de una amplia gama: por ejemplo, la tensión puede variar de 2 a 1 al variar la resistencia de la carga de 10 a 1.

La mayor tensión del condensador con cargas ligeras se refleja también en los tiristores tanto en sentido directo como inverso. Si la carga tiene una componente inductiva, como es el caso del devanado de un motor, debe aumentarse la capacidad del condensador de conmutación ya que ha de ser suficiente para corregir el factor de potencia además de conmutar la carga resistiva equivalente.

Ejemplo 8-7

Un inversor monofásico como el de la Fig. 8-21 trabaja con una batería de 120 V. El transformador de salida tiene relación de espiras entre las de cada mitad del primario y las del secundario de 2:1.

Hállese el valor de la capacidad C para conseguir un tiempo de conmutación en el tiristor de 20 microsegundos, siendo de 10 ohm la mínima resistencia de la carga. Supóngase una inductancia L infinita, y que el transformador es ideal.

SOLUCION

El circuito de descarga del condensador C es el representado en la Fig. 8-23. La resistencia reflejada en el circuito primario es de $10 \times 16 = 160$ ohm.

La curva de descarga del condensador, de la Fig. 8-22 responde a la siguiente ecuación:

$$v_c = 4 V_0 e^{-t/160C} - 2 V_0 \quad (8-30)$$

siendo $t = 20 \times 10^{-6}$, la tensión v_c se anulará cuando C valga:

$$e^{-20/160C} = 0,5$$

$$C = 0,18 \mu\text{f}$$

c. Inversores trifásicos

Los inversores utilizados para alimentar motores de corriente alterna con frecuencia regulable son generalmente trifásicos. Al igual que los monofásicos, los inversores trifásicos toman la energía de una fuente de tensión continua que puede ser una batería, un sistema de distribución, o más corrientemente un rectificador, y en este último caso, si se trata de una aplicación en la que interesa que no haya interrupciones puede conectarse una batería a las barras de tensión continua previendo así el caso de que se produzca un fallo en el sistema de alterna que alimenta al rectificador. Un inversor trifásico consta de por lo menos seis tiristores montados en puente: estos tiristores se van cebando sucesivamente siguiendo una secuencia tal que en bornes del inversor aparezca una tensión trifásica que es la que se aplica al motor. Cada tiristor se bloquea en su momento en virtud de los condensadores de conmutación así como por el tiristor que entra en turno, de la misma forma que sucedía en el inversor monofásico descrito antes: esta disposición se denomina autoconmutada, pero puede existir otra disposición a base de tiristores auxiliares dispuestos de forma adecuada: con este último procedimiento puede regularse el tiempo de conducción de cada tiristor independientemente de la frecuencia, con el fin de ajustar la forma de onda o la tensión.

Existe una gran variedad de inversores trifásicos: la Fig. 8-24 corresponde a un esquema básico en el que cada tiristor conduce durante 180° del ciclo y se maniobra por autoconmutación. Cada sección monofásica del inversor consta de dos brazos de puente opuestos y funciona como un inversor monofásico. La sección *a* consta de dos tiristores *Tr* 1 y *Tr* 4, dos condensadores de conmutación *C* 1 y *C* 4, una inductancia *L* 1-4 con una

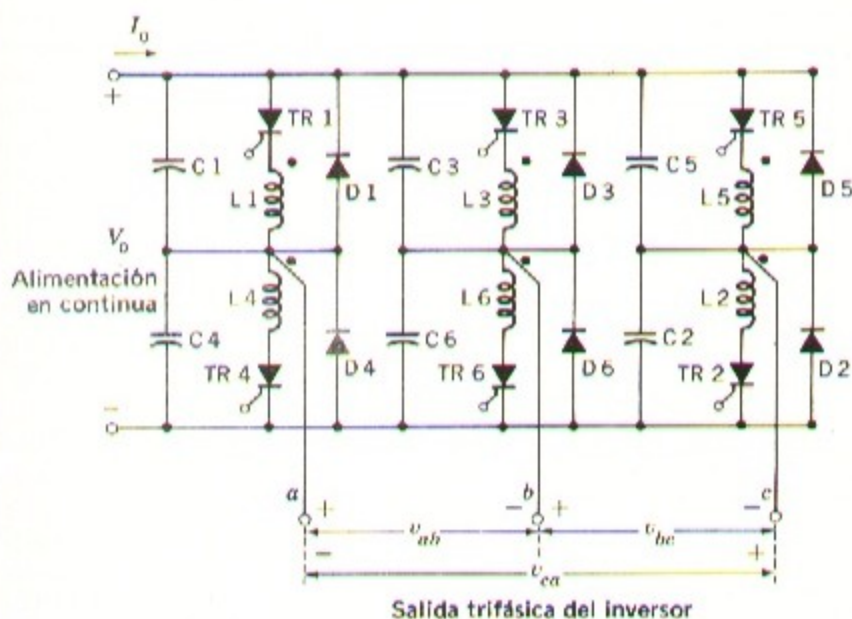


Fig. 8-24. Inversor trifásico autoconmutado.

derivación en su centro y dos diodos $D1$ y $D4$. La inductancia asume la función de bloquear uno de los tiristores de la sección cuando entra en funcionamiento el otro exactamente igual a lo que sucedía con el devanado subdividido del transformador de salida en un inversor monofásico. Los diodos $D1$ y $D4$ se denominan de *realimentación* y constituyen el circuito por el cual se devuelve la energía de cargas reactivas al sistema de continua.

En el apartado 8-4 *d* se describirá la forma en que los tiristores de la Fig. 8-24 *cierran* y *abren* para formar las ondas de alterna descadas. La forma en que el tiristor $Tr1$ se abre cuando se cierra el $Tr4$ asumiendo este último la conducción de la corriente de carga i_a

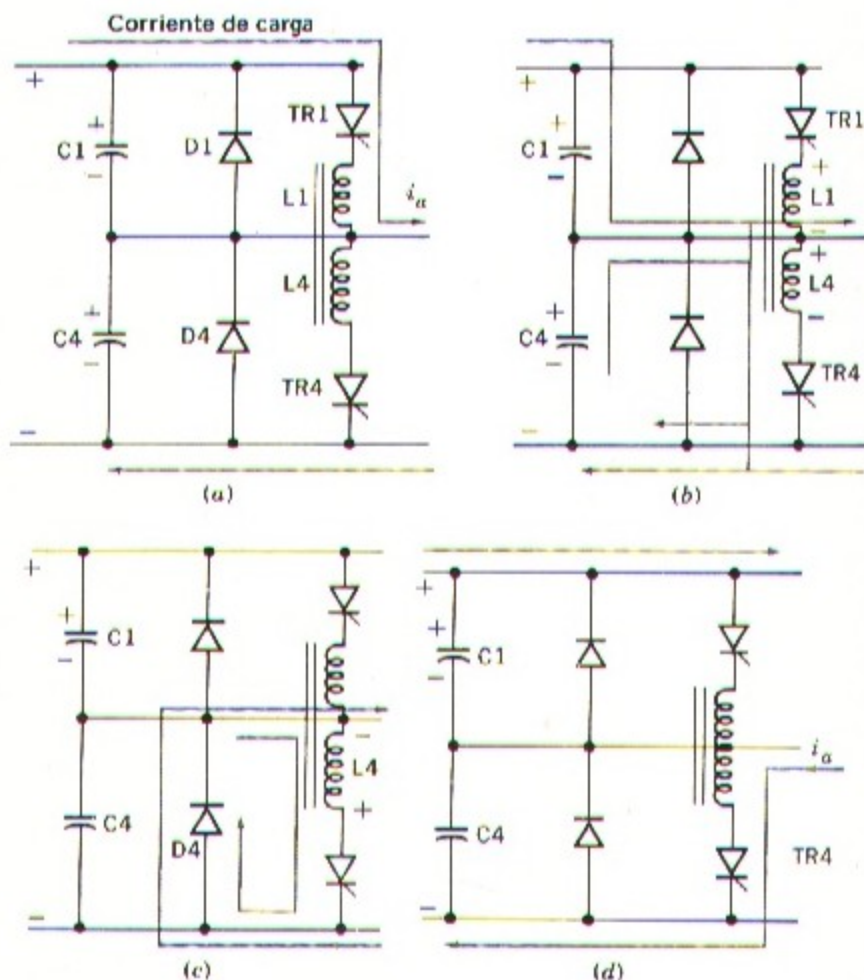


Fig. 8-25. Secuencias de conmutación en un inversor trifásico. (a) El tiristor $Tr1$ conduce la corriente de carga i_a . (b) Se ceba el tiristor $Tr4$. (c) La corriente de carga i_a es conducida por el diodo $D4$. (d) El tiristor $Tr4$ conduce la corriente de carga i_a .

puede verse en las secuencias de la Fig. 8-25. La misma secuencia tiene lugar con los tiristores *Tr* 3 y *Tr* 6 si bien retrasada 120° en el ciclo, y en los *Tr* 5 y *Tr* 2, estos retrasados 240° respecto a los primeros. Mientras tiene lugar la conmutación en una de las secciones, en cada una de las otras dos hay un tiristor conduciendo corriente formando el circuito de retorno de la corriente de carga.

El proceso de conmutación comienza como está indicado en la Fig. 8-25 *a*, conduciendo *Tr* 1 la corriente de carga i_a : el condensador *C* 4 se carga, como puede verse, pero no el *C* 1. En la Fig. 8-25 *b* se ha cerrado *Tr* 4, la capacidad *C* 4 descarga a través de *L* 4, y el terminal superior del devanado *L* 1 aplica la tensión positiva del condensador al cátodo de *Tr* 1 que queda bloqueado: la corriente de carga incide sobre el condensador *C* 1 cargándolo mientras se descarga *C* 4. En la Fig. 8-25 *c* el condensador *C* 1 se ha cargado ya completamente; la corriente reactiva de la carga sigue circulando por el diodo *D* 4 con lo que se disipa la energía contenida en *L* 4. Por último, en la Fig. 8-25 *d* se invierte la corriente i_a que es conducida por *Tr* 4. El condensador *C* 1 se carga a la tensión de la fuente de alimentación y queda en espera de la próxima conmutación⁶.

d. Forma de onda de los inversores trifásicos

En la Fig. 8-26 se muestra la secuencia a que se maniobran los tiristores del circuito de la Fig. 8-24 para obtener unas ondas de salida trifásicas. Los tiristores se han representado como interruptores y la carga como un grupo de impedancias conectadas en Y. Cada paso corresponde a 60° de la onda de salida.

Durante el paso 1, los tiristores 1, 6 y 5 están *cerrados*, es decir, conduciendo corriente. Los terminales *a* y *c* de la carga quedan conectados a la barra positiva del sistema de continua mientras que el *b* lo está a la barra negativa. Las tensiones compuestas v_{ab} y v_{bc} son ambas de magnitud igual a V_0 , y las tensiones simples (fase-neutro) v_{a0} y v_{c0} son iguales a $V_0/3$ mientras que v_{b0} es igual a $-2V_0/3$ como puede verse en la Fig. 8-26. A cada intervalo correspondiente a 60° se maniobra uno de los tiristores, precisamente en el orden 1-2-3-4-5-6. Para obtener distintos tipos de ondas de salida pueden operarse los tiristores de forma que su período de conducción sea distinto de 120° .

En la Fig. 8-27 pueden verse las ondas de tensión simple v_{a0} y v_{b0} así como la de tensión compuesta v_{ab} . Las ondas de tensión simple tienen tres escalonamientos por cada semiciclo aproximándose así a una onda senoidal mientras que las ondas de tensión compuesta están formadas por impulsos positivos y negativos de 120° .

Cuando se aplican a un motor las tensiones de salida del inversor, sobre él actúan las componentes fundamental y armónicas de la onda, desarrollando los correspondientes pares en sentido positivo y de frenado, y dando lugar a las pérdidas normales y adicionales. Empleando diversas técnicas pueden construirse inversores que generen ondas exentas de armónicos: por ejemplo, pueden juntarse las salidas de dos inversores cuyas ondas estén desfasadas entre sí.

⁶ Para la descripción de varios circuitos de conmutación para inversores, véase A.J. Humphrey "Inverter Commutation Circuits" IEEE Trans I.G.A. vol IGA-4 n^o 1 p.p. 104-110, Enero-Febrero 1968.

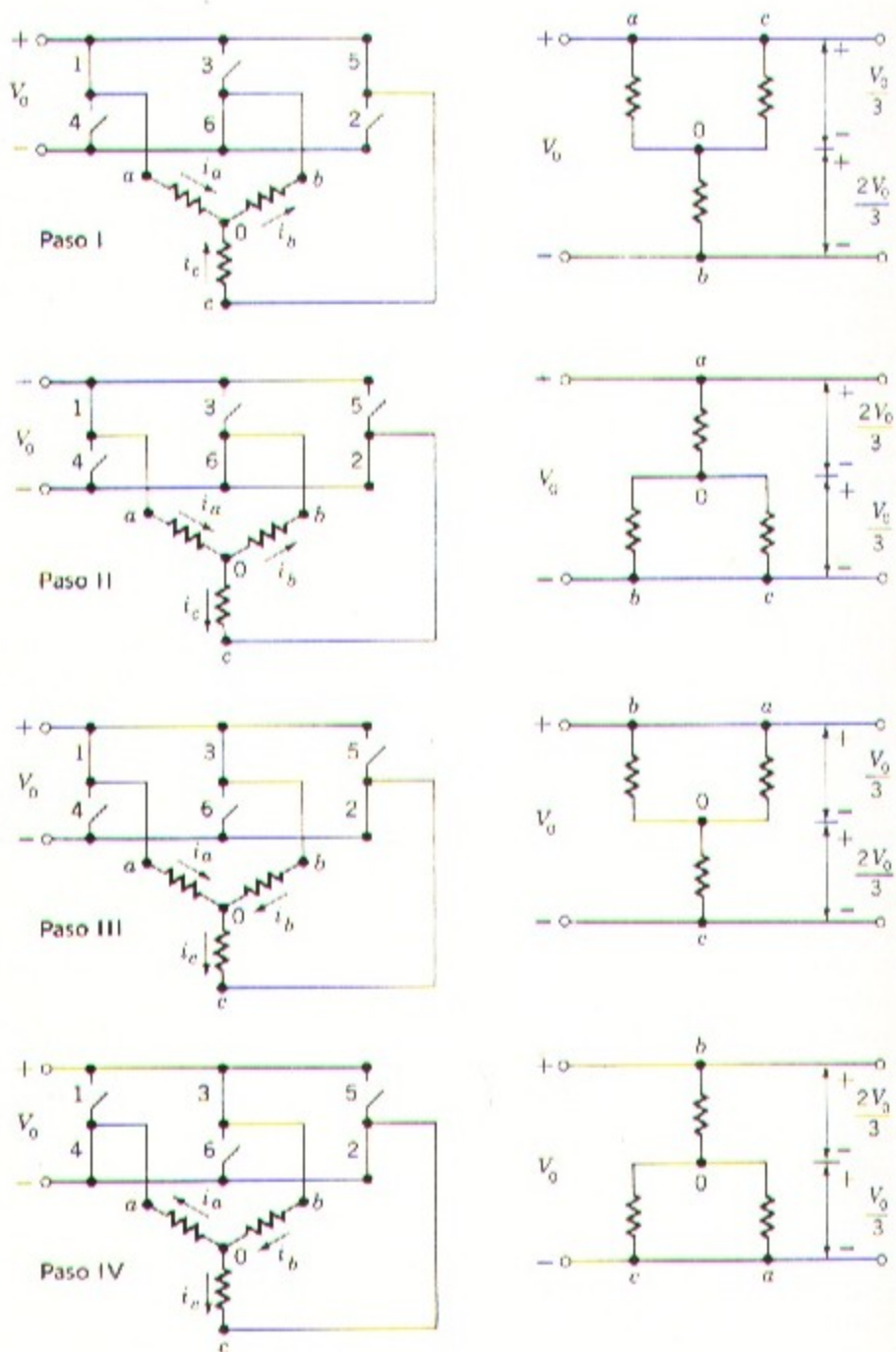


Fig. 8-26. Funcionamiento básico de un inversor trifásico, con conducción durante 180° .

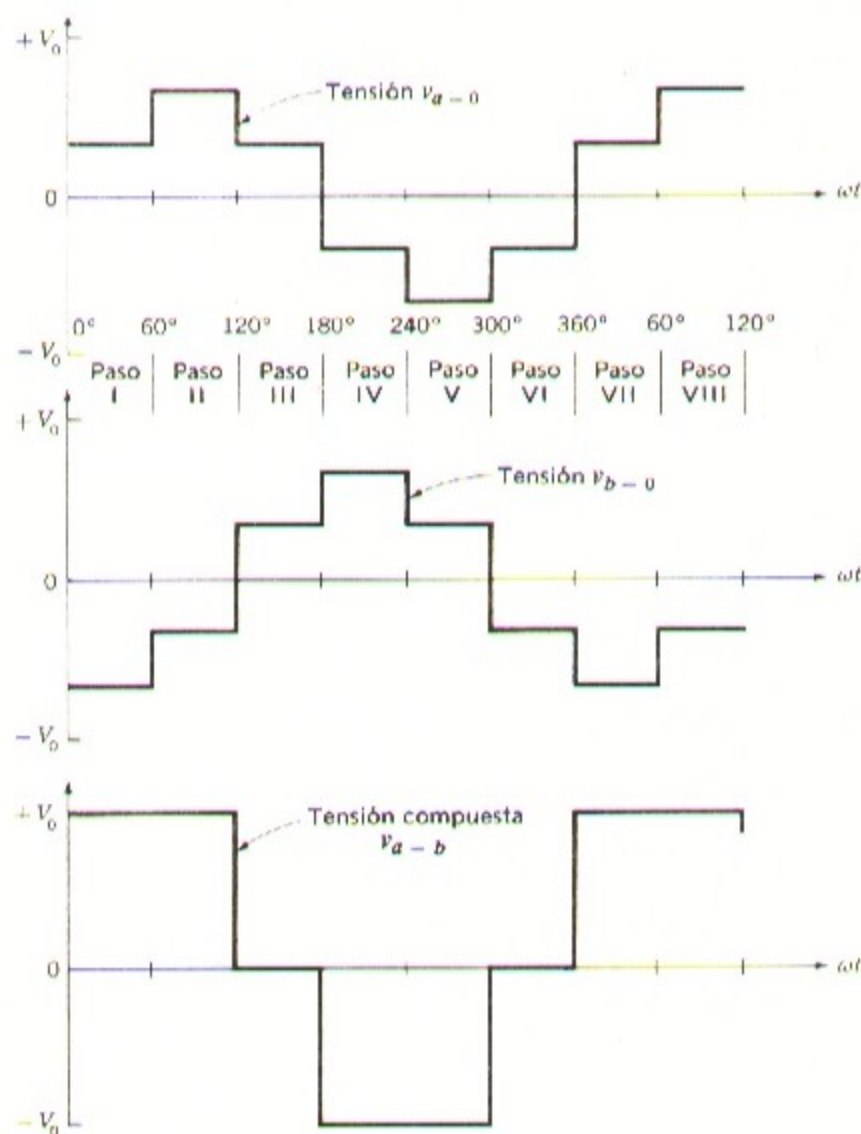


Fig. 8-27. Ondas engendradas por un inversor trifásico con conducción durante 180° .

Ejemplo 8-8

Hay que aplicar al estator de un motor de inducción las tensiones trifásicas compuestas de la Fig. 8-27. Determinése la amplitud del quinto armónico en relación a la componente fundamental.

SOLUCION

La forma de la onda de tensión v_{ab} está representada en la Fig. 8-27. Admitiendo que el semiciclo positivo esté centrado en $\omega t = 0$, puede expresarse por la serie de Fourier del tipo:

$$v_{ab} = \sqrt{2} V_1 \cos \omega t + \sqrt{2} V_5 \cos 5\omega t + \dots \quad (8-31)$$

Los armónicos pares quedan excluidos porque la onda es simétrica respecto a $\omega t = 0$. Los armónicos múltiplos de tres (3, 9, ...) también quedan excluidos porque los de las tres tensiones de línea estarían en fase entre sí.

La amplitud V_1 de la componente fundamental es:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \int_0^{2\pi} v_{ab} \cos \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\sqrt{2} \pi} \int_0^{\pi/3} V_0 \cos \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_0 \end{aligned} \quad (8-32)$$

La amplitud del quinto armónico V_5 viene dada por:

$$\begin{aligned} V_5 &= \frac{4}{\sqrt{2} \pi} \int_{\pi}^{4\pi/3} v_{ab} \cos 5\omega t d(\omega t) \\ &= \frac{1}{5} \frac{\sqrt{6}}{\pi} V_0 \end{aligned} \quad (8-33)$$

De donde se deduce que la amplitud de este quinto armónico es 1/5 de la componente fundamental. La secuencia de fases del quinto armónico es negativa, es decir, opuesta a la fundamental, por lo que el par que desarrolla es también negativo o de frenado.

8-5. SISTEMAS DE ACCIONAMIENTO DE MOTORES DE CORRIENTE ALTERNA POR REGULACION DE FRECUENCIA

La potencia de salida de inversores del tipo descrito en el apartado 8-4 se emplea para alimentar motores síncronos o de inducción y variar su velocidad regulando la frecuencia ⁷. Si se requiere una regulación de velocidad muy precisa en uno o más motores, como

⁷ Véase A. Kusko "Solid-State A.C. Motor Drives" The M.I.T. Press, Cambridge, Mass, 1971.

sucede con algunas aplicaciones de la industria textil, se utilizan motores síncronos, que trabajarán sincronizados con el oscilador que gobierna el inversor independientemente de cuál sea la carga, y si sólo se trata de regular la velocidad nominal, como es el caso de rectificadoras de gran velocidad o del arrastre de vehículos especiales, se emplean motores de inducción.

Frecuentemente se emplean motores de tipo especial ya que las condiciones de trabajo son distintas que con frecuencia fija. Generalmente los motores síncronos son en realidad mixtos de síncrono e inducción que se sincronizan por el par de reluctancia o que están provistos de imanes permanentes. Los motores de inducción son, o bien de jaula de ardilla o de rotor macizo: en la fotografía de la Fig. 8-28 pueden verse unos ejemplos. En general se opera tanto por encima como por debajo de la frecuencia nominal del motor; por ejemplo, entre 10 y 120 Hz para un motor de 50 Hz.

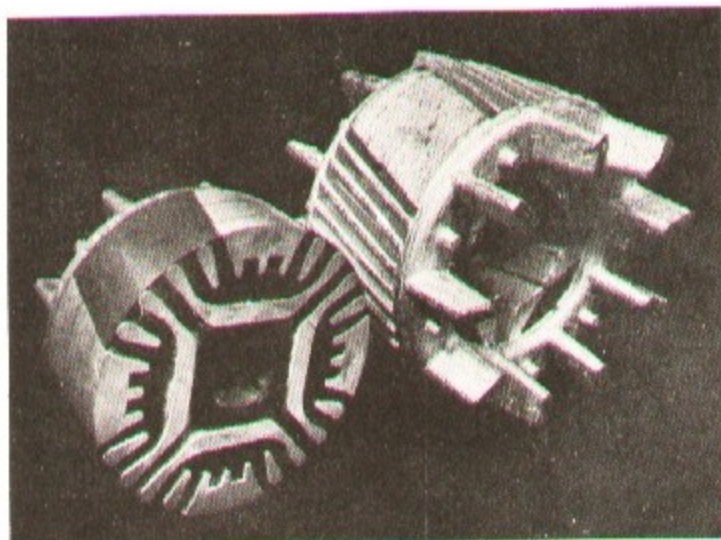


Fig. 8-28. Detalles del rotor de un motor "Synchospeed" (nombre registrado). Izquierda: vista en sección; las zonas oscuras corresponden al material magnético, y las claras a los conductores. Derecha: vista de los conductores solos, habiéndose eliminado el hierro.

La velocidad de sincronismo es directamente proporcional a la frecuencia. En los motores de inducción es de gran importancia la forma de la curva par-velocidad en cada una de las frecuencias de su campo normal de operación, incluyendo los pares máximo y de arranque.

Los valores del par se determinan viendo cómo se varía la tensión en bornes del motor al ajustar la frecuencia: es evidente que para el funcionamiento seguro de un determinado motor con su máxima densidad de flujo en el entrehierro dentro de todo su campo de velocidades, la tensión de alimentación deberá variarse proporcionalmente a la frecuencia

f. Haciéndolo así se consigue el par máximo del motor de inducción cualquiera que sea la frecuencia. En la práctica se regula la tensión en bornes V_1 de forma que la relación V_1/f se mantenga constante, es decir, conservando *constantes los volts por ciclo*. Caso de una onda de tensión que varíe de forma en función de la frecuencia, para lo anteriormente dicho se considera la tensión media de una semionda preferiblemente a la tensión eficaz. Prácticamente, es frecuente mantener el valor de V_1 constante por debajo de una determinada frecuencia para salvar las pérdidas $I_1 r_1$, y en otros casos se mantiene V_1 constante cuando se opera por encima de la frecuencia nominal del motor con objeto de conseguir un accionamiento a potencia constante. La curva par-velocidad de un motor de inducción a una determinada frecuencia puede calcularse por los procedimientos expuestos en el capítulo 7, previo ajuste de los parámetros del motor a tal frecuencia. Las curvas par-velocidad de un motor trabajando a distintas frecuencias pero manteniendo constante la densidad de flujo en el entrehierro son prácticamente iguales sobre una escala de deslizamientos, como puede verse en la Fig. 8-29, lo que se hace evidente viendo el entrehierro desde el rotor: el comportamiento de éste depende únicamente de la velocidad de deslizamiento que es la que determina la tensión inducida en el mismo, su frecuencia, intensidad y par.

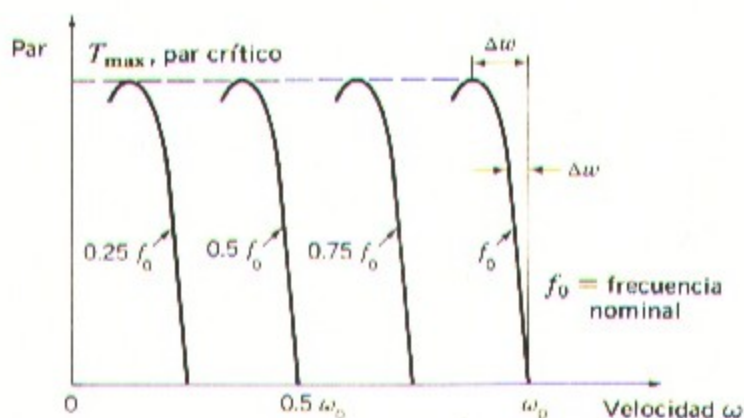


Fig. 8-29. Curvas teóricas par-velocidad de un motor de inducción regulado por variación de frecuencia.

Obsérvese no obstante que una variación del 3 por ciento a la frecuencia nominal ω_0 pasa a ser del 30 por ciento a la frecuencia $\omega = 0,1 \omega_0$.

La puesta en marcha de un accionamiento a frecuencia regulable puede hacerse de varias maneras: puede arrancarse a la frecuencia inferior e irlo acelerando aumentando la frecuencia, o puede arrancarse a cualquier frecuencia de su campo, tal como se arranca cualquier motor de inducción a frecuencia constante, y por último puede ponerse en marcha directamente de la red de alterna y pasarlo al inversor una vez haya adquirido ya velocidad. Los problemas que presenta el arranque residen por una parte en conseguir un

pa de arranque suficiente y por otra en no superar la intensidad nominal del inversor que en general viene limitada no por los tiristores sino por su capacidad de conmutación.

Las curvas par-velocidad determinadas experimentalmente para un motor real de velocidad regulable corresponden muy aproximadamente a las de la Fig. 8-29 de un motor ideal. Las fotografías de las Figs. 8-3 y 8-4 corresponden a dos equipos comerciales: a igualdad de potencia, un equipo del tipo descrito ocupa mucho más espacio que el ocupado por un accionamiento con corriente continua.

Generalmente, para trabajar con frecuencias superiores a la nominal se mantiene constante la tensión en bornes del motor; por consiguiente, el rectificador-inversor no requiere otro ajuste que el necesario para dar a los tiristores los impulsos de cebado adecuados. El par máximo, en lugar de mantenerse constante como en la Fig. 8-29, decae, ya que el

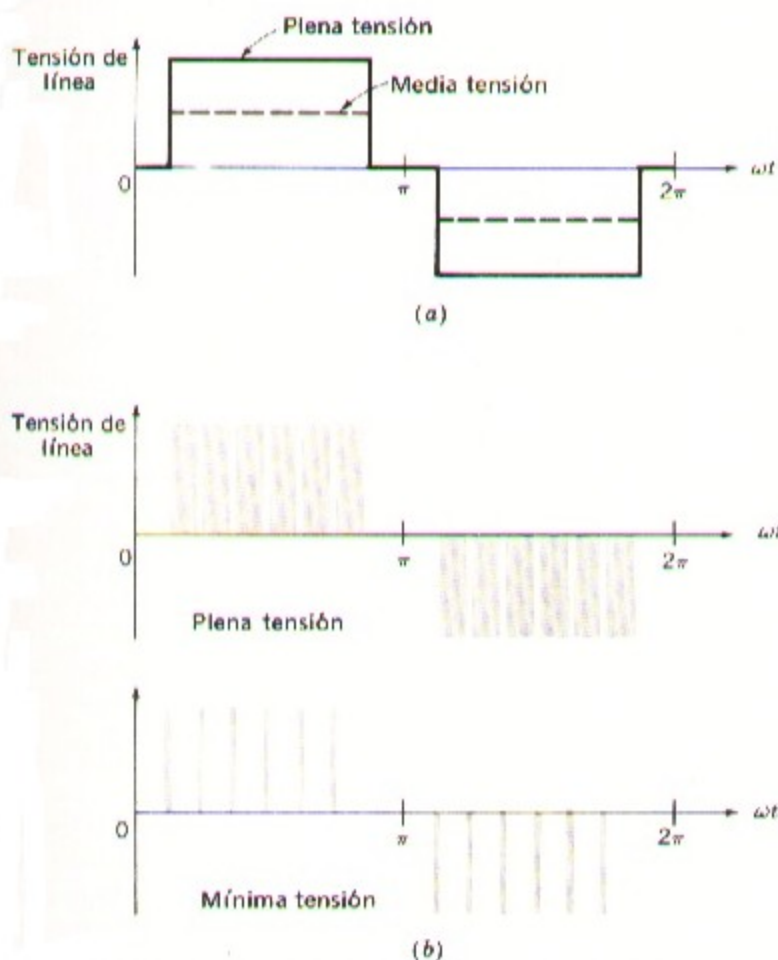


Fig. 8-30. (a) Tensión regulada en amplitud. (b) Tensión regulada por el ancho de los impulsos.

accionamiento trabaja a potencia constante: es una forma de trabajar que presenta gran analogía con la regulación de motores de corriente continua debilitando su campo inductor y manteniendo la tensión en el inducido para alcanzar velocidades superiores a la nominal.

Para trabajar con velocidades inferiores a la nominal debe regularse cada semiciclo de flujo en el entrehierro. El procedimiento que se emplee para tal regulación debe reducir al mínimo la presencia de armónicos a fin de evitar pérdidas indebidas y pares de frenado: asimismo debe ser lo más sencillo posible y no castigar al inversor. En la Fig. 8-30 puede verse la forma de las ondas de dos procedimientos de regulación típicos.

La Fig. 8-30 *a* corresponde a la regulación de la tensión de línea variando la amplitud de los impulsos manteniendo el ancho de éstos en 120° . Esta regulación se consigue variando la tensión continua en la sección rectificadora del conjunto. Si en el inversor se utiliza la autoconmutación no será posible cargar los condensadores directamente desde las barras de continua para conseguir una conmutación correcta cuando el motor trabaja a plena carga y frecuencia baja: en ese caso el inversor deberá hacerse trabajar con carga reducida o disponer una fuente de continua independiente, de tensión constante, para cargar los condensadores.

En la Fig. 8-30 *b* se muestra la regulación por variación del ancho de los impulsos en cada semiciclo de la tensión alterna. Los 120° que abarca aproximadamente la semionda se dividen normalmente en seis impulsos, obteniéndose la tensión máxima cuando cada uno de ellos abarca 20° y la mínima cuando abarcan por ejemplo unos 2° con lo que se puede obtener una relación de velocidades de 10 a 1. El valor de la tensión continua en el inversor se mantiene invariada, pero se precisa una conmutación auxiliar para actuar sobre los tiristores en los momentos precisos de cada semiciclo.

8-6. RESUMEN

Para la regulación de cualquier tipo de máquina eléctrica, ya sea de corriente alterna o de continua, se emplean dispositivos estáticos. En este capítulo se han estudiado dos importantes sistemas: el de accionamiento de motores de corriente continua mediante rectificadores, y el de accionamiento de motores de corriente alterna de frecuencia variable. Además, se emplean también dispositivos estáticos tales como tiristores para regular la velocidad de motores de inducción variando la tensión de entrada, para regular la velocidad de motores de rotor devanado recuperando y devolviendo a la red la potencia en el inducido, y para alimentar motores universales serie empleados en herramientas portátiles y otras aplicaciones.

Los tiristores se utilizan también a manera de troceadores para regular la tensión media aplicada a motores serie de corriente continua o a la excitación de motores derivación. Otros elementos estáticos, tales como diodos y transistores, se emplean para enviar las señales de mando o de realimentación a los semiconductores de potencia a fin de que éstos actúen en la forma prescrita.

En el apartado 8-2 se han descrito varios tipos de circuitos rectificadores, en los que intervienen tiristores para controlar el momento de cebado o la fase de la tensión de

salida. La mayor parte de los circuitos rectificadores pueden clasificarse por el número de fases de que se alimentan, y por su conexión de media onda o de puente. La elección de uno u otro circuito rectificador depende principalmente de su potencia y de la función a que se destina.

El accionamiento de motores de corriente continua mediante rectificadores se ha estudiado en el apartado 8-3. La forma de las ondas de tensión e intensidad en el inducido influyen sobre el funcionamiento del motor, y varían con la velocidad y la carga. Los pequeños motores fraccionales o de potencia hasta unos pocos c.v. generalmente se alimentan a través de rectificadores monofásicos de media onda o de onda entera; para los de mayor potencia se emplean rectificadores trifásicos.

El apartado 8-4 trata de los principios básicos de los inversores monofásicos y trifásicos. Los inversores se alimentan con corriente continua y suministran potencia en alterna de frecuencia regulable a los motores. Los inversores pueden ser autoconmutados, relativamente sencillos, o con sistemas de conmutación auxiliares, más complicados, pero adecuados para una regulación de tensión por variación de ancho de los impulsos. Los inversores pueden trabajar dentro de un campo de frecuencias muy amplio, pero en general sólo pueden soportar sobrecargas limitadas, límite que les viene impuesto por los circuitos de conmutación.

En el apartado 8-5 se estudian los principios de la regulación de motores de inducción variando la frecuencia. Para trabajar con frecuencia inferior a la nominal debe ajustarse la tensión en bornes del motor proporcionalmente a la frecuencia, asegurando así una densidad de flujo constante en el entrehierro y conservando invariado el par máximo. Con frecuencias superiores a la nominal generalmente se mantiene fija la tensión, con lo que el motor trabaja en régimen de potencia constante. La puesta en marcha constituye un problema debido a la poca cantidad de sobrecarga de los inversores y a la variación del par de arranque al variar la frecuencia.

El campo de aplicación de la regulación de motores mediante dispositivos estáticos se está desarrollando rápidamente. A medida que se pueda disponer de tiristores mayores, dicho campo aumentará aún más, tanto para los accionamientos en alterna como en los de continua; y de la misma forma, cuando existan en el mercado pequeños tiristores más económicos, su empleo se extenderá también a los motores de poca potencia. Los ferrocarriles y otros vehículos eléctricos emplearán gran número de estos dispositivos de regulación. Los circuitos integrados, seguros y económicos, permiten una elasticidad de funciones que los sistemas de regulación de motores no pueden alcanzar. Muchos sistemas de regulación emplean señales que se pueden introducir directamente en computadores y en los elementos de accionamiento del motor.

PROBLEMAS

8-1. Un pequeño vehículo está arrastrado por un motor de potencia nominal 15 c.v. a 1800 r.p.m. Se desea que el motor trabaje a potencia constante desde su velocidad nominal hasta una tercera parte de la misma, y con par constante desde una tercera parte de la velocidad nominal hasta velocidad nula.

Trácese las curvas del par motor y de la potencia desde la velocidad cero hasta la nominal, e indíquese el par a motor parado y a velocidad nominal.

8-2. Para mover una bomba se ha elegido un motor de inducción. La velocidad de ambos, motor y bomba, se regulará variando la tensión primaria en el estator. El deslizamiento del motor es de 0,05 valor relativo cuando desarrolla el par nominal.

Trácese la curva del par motor disponible en función del deslizamiento, desde $s = 0$ hasta $s = 1$ valor relativo, para los siguientes valores de potencia disipada en el rotor: a , nominal, correspondiente a la disipación con $s = 0,05$ valor relativo; b doble de a ; c cuatro veces el valor de a .

8-3. La fuente de alimentación de potencia de la Fig. 8-8 *a* es un inversor que genera una onda de tensión cuadrada de 100 V de amplitud y 200 Hz.

Hállese la relación entre la tensión media en la carga V_n y el ángulo de cebado α .

8-4. La carga en el circuito del problema 8-3 se sustituye por una resistencia $R = 10$ ohm y una inductancia $L = 25$ mh, conectadas en serie. El tiristor se ceba cuando $\alpha = 10^\circ$.

Búsquese la fórmula que exprese la intensidad $i_n(t)$ a lo largo de un ciclo.

8-5. Un rectificador trifásico de media onda como el de la Fig. 8-11 *a* está cargando una batería a través de un filtro inductivo. La inductancia es $L = 60$ mh, y $R = 1$ ohm. La tensión de la batería es de 24 V y la intensidad de carga 2 A.

Hállese el valor de la tensión simple necesaria en la entrada del rectificador. Supóngase que la caída de tensión en los diodos es de 1 V en cada uno.

8-6. El motor del ejemplo 8-3 acciona una carga mecánica que a la velocidad nominal absorbe el par nominal, siendo el momento de inercia de $0,14$ Nw-m/seg.² El motor se alimenta de una red monofásica de 50 Hz a través de un rectificador de onda entera. Se estima que entre cada dos períodos de conducción sucesivos el motor se mueve por inercia un ángulo $\pi/2$ radianes.

Hállese la caída de velocidad que sufre entre dos períodos de conducción consecutivos.

8-7. Un motor de corriente continua de 5 c.v. trabaja alimentado por un circuito rectificador monofásico de media onda, con tiristor como en la Fig. 8-13. El par electromagnético que desarrolla el motor es del 50 por ciento de su par nominal, y su velocidad media es de 600 r.p.m.

El ángulo de cebado del tiristor es $\alpha = 45^\circ$ y el período de conducción $\gamma = 180^\circ$. Los datos nominales del motor son: intensidad en el inducido, 21,4 A; $K_m = 1,21$ V-seg/rad; $R_a = 0,615$ ohm.

Hállese el valor eficaz V_0 de la tensión de línea aplicada $v_0 = \sqrt{2} V_0 \sin \omega t$. Despréciase la caída de tensión en el tiristor.

8-8. Trácese las ondas de tensión a lo largo de un ciclo en el tiristor 1 del circuito trifásico de media onda de la Fig. 8-15 en las condiciones señaladas en la Fig. 8-16, es decir, para $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$.

8-9. El motor de 100 c.v. del ejemplo 8-5 trabaja con un ángulo de cebado $\alpha = 0^\circ$. Hállese la velocidad media en vacío y a plena carga siendo la tensión compuesta de la línea 480 V.

8-10. Haciendo referencia al Ejemplo 8-5, apartado *b*. ¿Cuál será el efecto sobre las fluctuaciones de corriente en el inducido de ir aumentando la carga del motor hasta más allá de la estrictamente necesaria para conseguir una conducción ininterrumpida?

8-11. Un motor de 500 c.v. aplicado al arrastre de un tren rápido se regula por medio de un circuito troceador como el de la Fig. 8-18. La inductancia de los devanados inducido e inductor serie se acrecienta con una inductancia exterior L_e . La alimentación del tren es con corriente continua de 1000 V. La relación $t_1/(t_1 + t_2)$ varía desde 0,15 hasta 1,00. ¿Qué inductancia total será necesaria en el circuito inducido para limitar a 25 A las variaciones de intensidad en el mismo?

8-12. Al inversor monofásico del esquema de la Fig. 8-21 puede dársele una configuración de puente utilizando cuatro tiristores y un transformador sin derivación central. Dibújese el esquema de tal puente y calcúlese el valor de C para las condiciones del ejemplo 8-7.

8-13. Una forma corriente de la onda de salida de un inversor trifásico es la rectangular con las semiondas positiva y negativa de 120° de anchura tal como está representada en la Fig. 8-27.

Demuéstrese que esta onda no contiene ningún tercer armónico de tensión.

Máquinas de corriente continua: Consideraciones dinámicas

La característica más sobresaliente de las máquinas de corriente continua es su posibilidad de adaptación a diversas condiciones. Por medio de distintas combinaciones de excitación: serie, derivación o independiente, pueden conseguirse unas características tensión-intensidad o par-velocidad muy diversas tanto en régimen permanente como en transitorio. Debido a la facilidad con que pueden regularse por medio de dispositivos estáticos, se utilizan mucho en aplicaciones que requieran una gran variedad de velocidades o en aquellas otras en que sea indispensable una regulación muy precisa, y con frecuencia aún se modifican las características inherentes a la máquina misma mediante la adición de circuitos de realimentación. El objeto del presente capítulo es el de estudiar las máquinas de corriente continua como componentes de un sistema electromecánico, haciendo especial hincapié en sus características dinámicas.

9-1. LA MAQUINA DE CORRIENTE CONTINUA IDEAL

Debido a la complejidad de los problemas de índole dinámica existentes se hace preciso admitir algunos supuestos simplificativos, siendo los más corrientemente admitidos los siguientes:

1. Las escobillas son estrechas y la conmutación lineal como en la Fig. 4-6. La posición de las escobillas es tal que la conmutación tiene lugar cuando los laterales de la correspondiente bobina están en la zona neutra mediana entre los polos inductores. En estas condiciones la onda de la f.m.m. del inducido es fija en el espacio y dirigida según el eje en cuadratura o transversal.

2. Se supone que la f.m.m. del inducido no tiene influencia alguna sobre el flujo total según el eje directo o principal, ya que es perpendicular al mismo. Con esta suposición se desprecia el efecto desmagnetizante de la reacción del inducido estudiado en el capítulo 5.
3. Para la mayor parte de los problemas considerados en este capítulo se prescindirá de los efectos de la saturación magnética: con ello se podrán superponer campos magnéticos y considerar que las inductancias son independientes de las intensidades.

En la Fig. 9-1 se representa esquemáticamente el modelo. Las flechas señalan convencionalmente los sentidos de referencia tanto para las intensidades como para los campos magnéticos; para todas las demás variables pueden así adoptarse los sentidos de referencia de acuerdo con los anteriores. Por ejemplo, en la Fig. 9-1 *a* la dirección de referencia del par magnético es levógiro tendiendo a alinear entre sí los campos del estator y del rotor de acuerdo con la flecha señalada T_{fld} . Si la máquina es un motor, éste girará en el sentido indicado venciendo el par opuesto T_L aplicado al eje del motor por la carga mecánica arrastrada, tal como se indica con las flechas ω_m y T_L . La escobilla superior será positiva ya que hay que suministrar potencia eléctrica al motor.

En la Fig. 9-1 *b* están señalados los sentidos de referencia correspondientes a un generador, siendo T_S el par mecánico aplicado por el motor primario. Es necesario establecer un sistema congruente de sentidos de referencia para facilitar el estudio de máquinas más complejas como son las de campo transversal que veremos más adelante en este mismo capítulo.

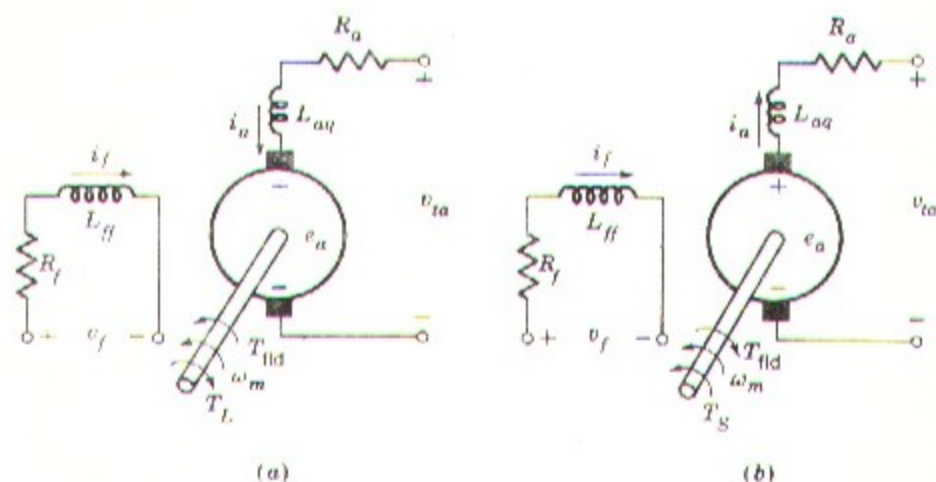


Fig. 9-1. Representación esquemática de una máquina de continua, con los sentidos de referencia, (a) en un motor, y (b) en un generador.

9-2. ECUACIONES DINAMICAS

El par magnético T y la tensión inducida e_a ya vistos en el apartado 4-4 son los dos elementos que establecen la relación electromecánica. De las ecuaciones 4-8 y 4-12 tenemos:

$$T = K_a \Phi_d i_a \quad (9-1)$$

$$e_a = K_a \Phi_d \omega_m \quad (9-2)$$

siendo
$$K_a = \frac{PZ_a}{2\pi a} \quad (9-3)$$

El significado de los símbolos se ha expuesto ya con las ecuaciones 4-8 y 4-12. Estas ecuaciones, junto con las ecuaciones diferenciales del movimiento del sistema mecánico, las ecuaciones tensión-intensidad de los circuitos inducido e inductor, y las curvas de magnetización definen y fijan el funcionamiento del conjunto.

Consideremos en primer lugar la máquina ideal de la Fig. 9-1 con un devanado inductor y con saturación magnética despreciable. El flujo longitudinal en el entrehierro Φ_d es linealmente proporcional a la corriente de excitación i_f , y las ecuaciones 9-1 y 9-2 pueden expresarse también de la siguiente forma:

$$T = k_f i_f i_a \quad (9-4)$$

$$e_a = k_f i_f \omega_m \quad (9-5)$$

siendo k_f una constante. Con las escobillas sobre el eje transversal la inductancia mutua entre los circuitos inductor e inducido es nula, exactamente igual a lo que sucedería con dos bobinas cuyos ejes fueran normales entre sí. La ecuación de tensión en el circuito inductor es por tanto:

$$v_f = L_{ff} p i_f + R_f i_f \quad (9-6)$$

siendo v_f , i_f , R_f y L_{ff} la tensión en bornes, la intensidad, la resistencia y la autoinducción respectivamente del circuito inductor y p es el operador d/dt .

Con las direcciones de referencia correspondientes a la acción motor (Fig. 9-1 a), la ecuación de tensión del circuito inducido es:

$$v_{ta} = e_a + L_{aq} p i_a + R_a i_a \quad (9-7)$$

$$v_{ta} = k_f i_f \omega_m + L_{aq} p i_a + R_a i_a \quad (9-8)$$

siendo v_{ta} , i_a , R_a y L_{aq} la tensión en bornes, intensidad, resistencia y autoinducción respectivamente del circuito inducido. Se emplea el subíndice q con la inductancia porque el eje de la f.m.m. del inducido está dispuesto según el eje en cuadratura o transversal. La

inductancia L_{aq} incluye el efecto de cualquier devanado del estator en serie con el del rotor, dispuesto según el eje transversal, como son los devanados auxiliares y de compensación dispuestos entre los polos o sobre las expansiones polares de las máquinas grandes para facilitar la conmutación tal como se vio en el capítulo 5.

En el caso de motor, la ecuación dinámica del sistema mecánico es:

$$T = k_f i_a = Jp\omega_m + T_L \quad (9-9)$$

siendo J el momento de inercia y T_L el par mecánico resistente que se opone al movimiento.

En el caso de un generador (Fig. 9-1 *b*), las ecuaciones de tensión inducida y de par se convierten en:

$$v_{ta} = e_a - L_{aq} p i_a - R_a i_a \quad (9-10)$$

$$v_{ta} = k_f i_a \omega_m - L_{aq} p i_a - R_a i_a \quad (9-11)$$

$$y \quad T_s = Jp\omega_m + T = Jp\omega_m + k_f i_a \quad (9-12)$$

siendo T_s el par mecánico de arrastre aplicado al eje de la máquina en el sentido de rotación de la misma.

Los campos magnéticos creados por las corrientes del inducido y del inductor, así como la energía cinética de las partes rotativas suponen un almacenamiento de energía, y en función de la energía almacenada puede definirse el estado de un sistema físico: de acuerdo con esto, las intensidades en el inducido e inductor y la velocidad son *variables de estado*.

Las ecuaciones desde la 9-6 hasta la 9-12 son ecuaciones diferenciales de primer orden que contienen los productos no lineales $i_f \omega_m$ e $i_f i_a$ de estas variables de estado. Estas ecuaciones junto con las de la ley de Kirchhoff aplicadas a los circuitos conectados a los terminales del estator y del rotor y las características par-velocidad del sistema mecánico acoplado al eje determinan el funcionamiento del sistema. En los apartados 9-3 y 9-4 se verá la aplicación a casos específicos.

9-3. FUNCIONES DE TRANSFERENCIA Y DIAGRAMAS DE BLOQUES DE MAQUINAS DE CORRIENTE CONTINUA

El mayor obstáculo que hay que salvar en el análisis de máquinas de continua es el de incluir la saturación magnética; sin embargo, un análisis lineal omitiendo la saturación puede cumplir dos objetivos útiles. Primero, en virtud de la relativa sencillez en que pueden escribirse las ecuaciones diferenciales lineales se hace posible apreciar otros factores que afectan al régimen transitorio obteniéndose así una visión aproximada del conjunto, y segundo, en problemas relativos a sistemas que comprenden una combinación compleja de máquinas y otros elementos se pueden estudiar particularidades dinámicas que de otra forma no serían posibles sin el auxilio de computadores.

En este apartado consideraremos las máquinas de continua con excitación independiente. La parte *a* está dedicada principalmente a los fenómenos eléctricos transitorios resultantes de las variaciones de excitación en los generadores de continua: el análisis partirá de una base lineal posponiendo hasta el apartado 9-6 el estudio de los efectos de la saturación. La parte *b* versará sobre los fenómenos dinámicos en motores de continua con excitación constante.

a. Generadores de continua. Análisis lineal

Consideremos el generador de la Fig. 9-1 *b* y admitamos que el campo de trabajo queda limitado a la porción lineal de la curva de magnetización de la Fig. 9-2. La inductancia del devanado de excitación es en estas condiciones constante y la ecuación de tensión del circuito inductor es:

$$v_f = R_f i_f + L_{ff} p i_f = R_f (1 + \tau_f p) i_f \quad (9-13)$$

siendo $\tau_f = L_{ff}/R_f$ la constante de tiempo de dicho circuito inductor. Según la curva de magnetización a la velocidad ω_{m0} y limitándonos a su porción lineal, la f.e.m. e_{a0} inducida es:

$$e_{a0} = K_g i_f \quad (9-14)$$

siendo K_g la inclinación de la recta del entrehierro a la velocidad ω_{m0} .

Ordenando adecuadamente la ecuación 9-13 puede escribirse en la forma:

$$p i_f = \frac{1}{\tau_f} \left(\frac{v_f}{R_f} - i_f \right) \quad (9-15)$$

El diagrama de bloques con el integrador $1/p$ en la dirección del circuito puede verse en la Fig. 9-3 *a*. Multiplicando por K_g la intensidad i_f de salida tendremos la f.e.m. inducida

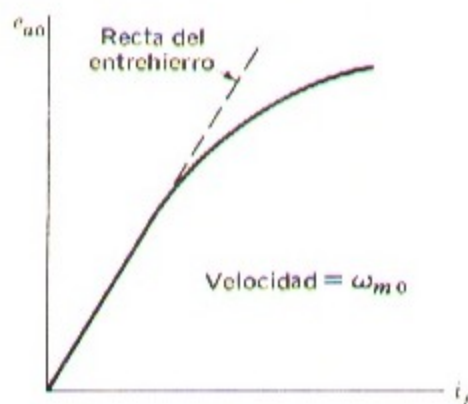


Fig. 9-2. Curva de magnetización.

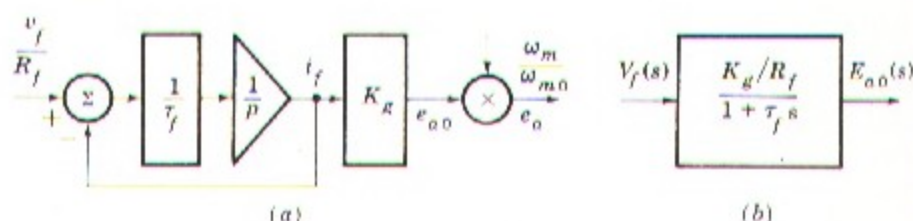


Fig. 9-3. Diagrama de bloques de las ecuaciones 9-15 y 9-17.

e_{a0} a la velocidad correspondiente a la curva de magnetización; y puesto que la f.e.m. inducida es proporcional a la velocidad, a cualquier otra velocidad ω_m su valor será:

$$e_a = e_{a0} \frac{\omega_m}{\omega_{m0}} \quad (9-16)$$

como queda representado por el multiplicador en la salida de la Fig. 9-3 a. Substituyendo en la ecuación 9-13 el operador p por la frecuencia compleja s se obtendrá la correspondiente función de transferencia en variables complejas. Las variables $E_{a0}(s)$ y $V_f(s)$ serán así las amplitudes complejas de las correspondientes variables en el tiempo, y las ecuaciones se convierten en ecuaciones algebraicas en s : así,

$$\frac{E_{a0}(s)}{V_f(s)} = \frac{K_g I_f}{V_f} = \frac{K_g/R_f}{1 + r_f s} \quad (9-17)$$

como se muestra en la Fig. 9-3 b.

La intensidad en el inducido i_a viene determinada por la f.e.m. inducida e_a y los circuitos eléctricos conectados a sus bornes, y el par magnético T viene determinado por el flujo longitudinal y por la intensidad en el inducido como se indica en la Fig. 9-1. De la ecuación 4-14 el par puede expresarse en función de la curva de magnetización.

$$T = \frac{e_{a0}}{\omega_{m0}} i_a \quad (9-18)$$

La relación entre velocidad y par en un generador viene dada por la ecuación 9-12, y el funcionamiento completo depende de los sistemas eléctrico y mecánico acoplados a la máquina.

Ejemplo 9-1

Un generador de 200 kW, 250 V posee las siguientes constantes:

$$R_f = 33,7 \text{ ohm} \quad R_a = 0,0125 \text{ ohm}$$

$$L_{ff} = 25 \text{ henry} \quad L_{aa} = 0,008 \text{ henry}$$

La inclinación de la línea del entrehierro dibujada sobre la curva de magnetización a la velocidad normal es:

$$K_g = 38 \text{ V/A de excitación.}$$

Los bornes del inducido están conectados a una carga de resistencia $R_L = 0,313$ ohm e inductancia $L_L = 1,62$ henry.

En principio el generador gira sin excitación pero a su velocidad nominal, y súbitamente se conecta su circuito inductor a una fuente de 230 V, de impedancia despreciable. Supóngase que mientras sube la tensión en bornes y el generador toma carga, la velocidad no varía apreciablemente.

Calcúlese y trácese la curva de la intensidad $i_a(t)$ en el inducido, y estúdiense la posibilidad de valerse de simplificaciones aproximadas.

SOLUCION

La Fig. 9-4 representa el diagrama de bloques en función de variables con la frecuencia compleja.

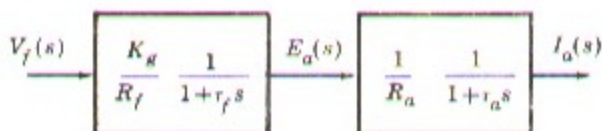


Fig. 9-4. Diagrama de bloques del ejemplo 9-1.

El primer bloque representa la subida de la f.e.m. del generador y el segundo la de la intensidad en el inducido, siendo R_a y L_a respectivamente la resistencia e inductancia totales del inducido y de la carga en serie. Siendo nula la inductancia mutua entre inducido e inductor, la salida del segundo bloque no influye sobre el funcionamiento del primero. Cada bloque representa un término exponencial de la forma $e^{-t/\tau}$, siendo:

$$\tau_f = \frac{L_f}{R_f} = \frac{25}{33,7} = 0,74 \text{ seg.} \quad \frac{1}{\tau_f} = 1,35$$

$$\begin{aligned} \tau_a &= \frac{L_a}{R_a} = \frac{L_{aq} + L_L}{R_a + R_L} \\ &= \frac{1,63}{0,326} = 5 \text{ seg.} \quad \frac{1}{\tau_a} = 0,2 \end{aligned}$$

El valor final en régimen permanente de la f.e.m. inducida es:

$$E_a = \frac{230 \times 38}{33,7} = 260 \text{ V}$$

y el valor final en régimen permanente de la intensidad en el inducido

$$I_a = \frac{E_a}{R_a} = \frac{260}{0,326} = 800 \text{ A}$$

La ecuación de la intensidad en el inducido en función del tiempo es:

$$i_a(t) = 800 + A e^{-1,35t} + B e^{-0,2t}$$

siendo las condiciones iniciales

$$i_a(0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{di_a}{dt}(0) = 0$$

de donde:

$$i_a(t) = 800 + 139e^{-1,35t} - 939e^{-0,2t}$$

representada gráficamente por la curva de trazo continuo de la Fig. 9-5. Si se prescindiera de la menor de las dos constantes de tiempo, la intensidad vendría dada por:

$$i_a(t) = 800 - 800e^{-0,2t}$$

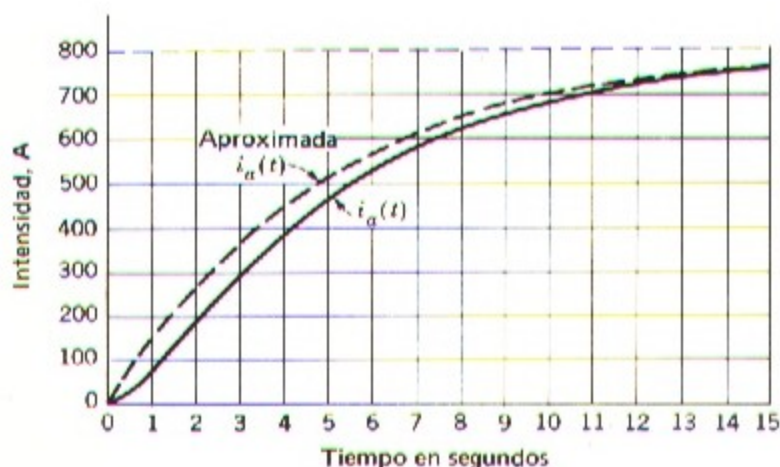


Fig. 9-5. Subida de intensidad en el inducido del generador del ejemplo 9-1.

representada por la curva de trazo discontinuo sobre la misma figura citada.

Comparando ambas curvas se llega a la conclusión de que en general puede prescindirse del menor de los dos tiempos de retraso en serie cuando su constante es inferior a una cuarta parte de la del tiempo mayor.

La tensión en bornes $v_{ta}(t)$ es:

$$v_{ta} = (R_L + L_L p)i_a(t) = 250 - 260e^{-1,35t} + 10e^{-0,2t}$$

Compárese esta ecuación con la de la f.e.m. inducida dada por:

$$e_a(t) = 260 - 260e^{-1,35t}$$

Con esto se puede tener una idea de la influencia de la resistencia e inductancia del inducido de la máquina, lo que es clásico en generadores de continua destinados a excitatrices de generadores síncronos. Evidentemente, la influencia de la inductancia del rotor es muy pequeña, y la de su resistencia se reduce a rebajar la tensión final desde 260 hasta 250 V realmente alcanzados. Teniendo en cuenta este efecto es posible en muchos casos basar el análisis en el supuesto de que la inductancia del inducido es despreciable.

En el ejemplo 9-1 se ha supuesto constante la velocidad del generador. Las características dinámicas del sistema mecánico de arrastre no han intervenido en el problema, habiéndose supuesto que el motor primario es capaz de desarrollar en cualquier momento el par necesario para mantener constante la velocidad. En la Fig. 9-6 pueden verse esquemáticamente los componentes que deberían haberse añadido a los diagramas de las Figs. 9-3 a y 9-3 b para incluir los efectos dinámicos del accionamiento mecánico. El primer multiplicador de la Fig. 9-6 (leído de izquierda a derecha) representa la ecuación 9-18 del par magnético T . Ordenando convenientemente la ecuación 9-12 tendremos.

$$p\omega_m = \frac{T_s - T}{J} \quad (9-19)$$

como puede verse por el sumatorio y el coeficiente multiplicador $1/J$, siendo J la inercia combinada del generador y del arrastre, y obteniéndose T_s de la función de transferencia

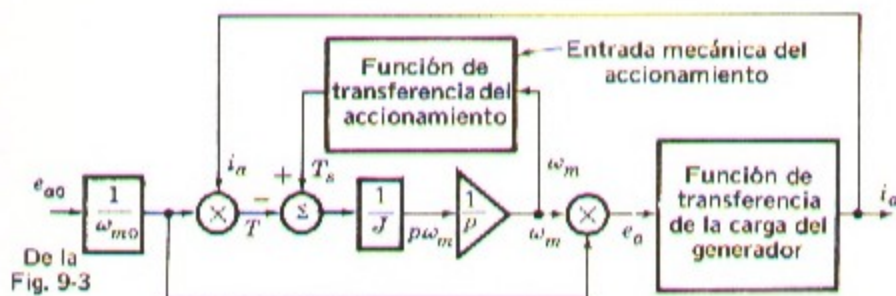


Fig. 9-6. Diagrama de bloques esquemático correspondiente a un generador de continua y su accionamiento mecánico.

del accionamiento. La integración dará ω_m que se convierte en entrada respecto a la función de transferencia del accionamiento citada así como también respecto al multiplicador representativo de la ecuación 9-16 de e_a . Finalmente, i_a obtenido de la función de transferencia de la carga eléctrica del generador, retorna al primer multiplicador.

A medida que se van añadiendo más y más perfeccionamientos puede apreciarse fácilmente que los problemas abarcando el sistema completo pronto pueden llegar a complicarse demasiado para poderlos solucionar analíticamente. Por ejemplo, en la Fig. 9-6 la función de transferencia del arrastre mecánico puede comprender la función de transferencia de un regulador mecánico de velocidad: afortunadamente, en general se pueden admitir aproximaciones simplificativas, pues de otra forma sería necesario valerse de computadores. Sin embargo, el trazado de un diagrama que comprenda tantos cuantos pormenores se deseen no presenta dificultades especiales ya que pueden irse introduciendo uno a uno.

b. Motores de corriente continua con excitación independiente

Los motores de continua se emplean frecuentemente en aplicaciones que requieran poder regular la velocidad y el par de salida con bastante precisión y dentro de un amplio campo. Uno de los procedimientos corrientes para conseguir esa regulación es el de utilizar motores con excitación independiente, manteniendo esta constante y variando la tensión aplicada al inducido. En el análisis de este caso intervienen los transitorios eléctricos en el circuito inducido y los dinámicos de la carga mecánica movida por el motor.

La Fig. 9-7 representa un motor de excitación independiente que puede estar alimentado ya sea por un rectificador estático controlado, de alguno de los tipos descritos en el capítulo 8 o por un generador de excitación independiente como en el sistema Ward Leonard visto en el capítulo 5. Con corriente de excitación constante I_f el par magnético y la f.e.m. inducida son:

$$T = K_m i_a \quad \text{Nw-m} \quad (9-20)$$

$$e_a = K_m \omega_m \quad \text{V} \quad (9-21)$$

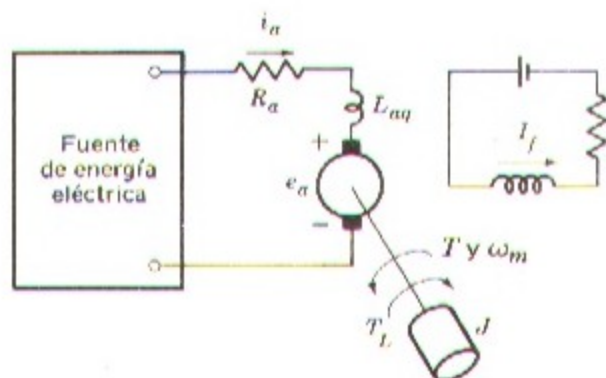


Fig. 9-7. Esquema de un motor de continua con excitación independiente.

siendo $K_m = K_f I_f$ una constante. En función de la curva de magnetización

$$K_m = \frac{e_{a0}}{\omega_{m0}} \quad (9-22)$$

siendo e_{a0} la f.e.m. inducida correspondiente a la corriente de excitación I_f a la velocidad ω_{m0} rad/seg.

En unidades MKS, la constante K_m en Newton-metro por amper (ecuación 9-20) es igual a la constante K_m en volt-segundos por radian (ecuación 9-21). Ahora estudiaremos la respuesta del motor ante las variaciones de la tensión de entrada y del par resistente.

Ordenando los términos de la ecuación 9-7 y dividiéndola por R_a tendremos la ecuación diferencial de la intensidad en el inducido i_a que es:

$$\frac{L_a}{R_a} p i_a = r_a p i_a = \frac{v_s - e_a}{R_a} - i_a \quad (9-23)$$

siendo v_s la tensión de la fuente de alimentación, e_a la fuerza contraelectromotriz (ecuación 9-21), R_a y L_a respectivamente la resistencia y la inductancia en serie del inducido y de la fuente de alimentación, y $L_a/R_a = \tau$ la constante de tiempo eléctrica del circuito inducido. El par magnético T viene dado por la ecuación 9-20, y la aceleración, deducida de la ecuación 9-9 es:

$$p\omega_m = \frac{T}{J} - \frac{T_L}{J} = \frac{K_m i_a}{J} - \frac{T_L}{J} \quad (9-24)$$

siendo J el momento de inercia, incluido el de la carga, y T_L el par resistente de la carga que se opone al movimiento.

La Fig. 9-8 a es el diagrama de bloques representativo de las ecuaciones 9-20 a 9-24 expresado en función de las variables i_a y ω_m en régimen permanente, siendo entradas v_s y T_L/J . Dividiendo la entrada v_s por K_m y recomblando las constantes surge la forma más sencilla de la Fig. 9-8 b en la que la constante de tiempo de inercia es:

$$\tau_m = \frac{J R_a}{K_m^2} \quad (9-25)$$

Interpretado físicamente, v_s/K_m es la velocidad de régimen permanente en vacío correspondiente a una tensión de entrada V_{de} .

En general, el par resistente es función de la velocidad, admitiéndose muchas veces que es directamente proporcional a la misma; por tanto:

$$T_L = B\omega_m \quad \text{o bien} \quad \frac{T_L}{J} = \frac{B\omega_m}{J} \quad (9-26)$$

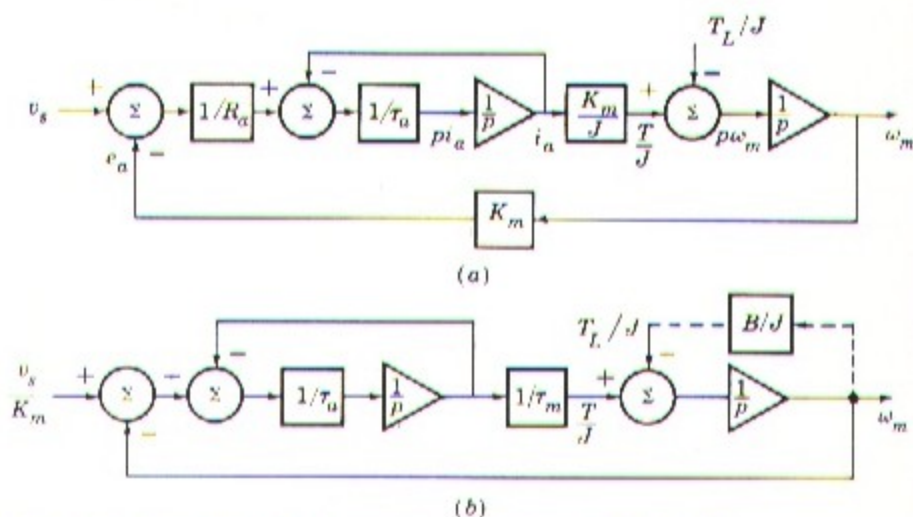


Fig. 9-8. Diagramas de bloques de las ecuaciones 9-20 a 9-24, para un motor de continua con excitación independiente.

en las que B es la pendiente de la curva par-velocidad en el punto de operación, pudiéndose admitir que se mantiene constante si las variaciones son pequeñas. El parámetro J/B es la constante de tiempo de la carga que determina la deceleración del motor cuando se abre su circuito inducido (véase la ecuación 8-16), y B/J es el correspondiente factor de amortiguación. Varía dentro de un ancho campo desde el funcionamiento en vacío hasta el de plena carga, pero sus efectos son de escasa importancia en motores de alguna potencia. Los efectos de la amortiguación de la carga se representan en la Fig. 9-8 *b* por la realimentación B/J alrededor del segundo integrador.

El diagrama de bloques en función de la frecuencia compleja s está representado en la Fig. 9-9 en la que ahora Ω_m , V_s y T_L son las magnitudes complejas de las correspondientes variables en el tiempo. Para mayor simplicidad en lo que resta de este capítulo se prescindirá de la notación funcional "de s " en el bien entendido que las letras mayúsculas tales como Ω_m y V_s corresponden a amplitudes complejas. (Si bien se emplea el mismo signo para el par $T(t)$ y el $T(s)$, los respectivos significados aparecen claros del contenido del texto). El primer integrador de la Fig. 9-8 *b* pasa a ser el término algebraico $1/(\tau_a s + 1)$ de la Fig. 9-9, y el segundo integrador de la citada Fig. 9-8 *b* con la amortiguación B/J pasa a ser el término algebraico $1/(s + B/J)$ de la Fig. 9-9 *a*. En la Fig. 9-9 *b* puede verse el diagrama de bloques resultante de despreciar la amortiguación mecánica y de suponer que T_L es una variable independiente. La función de transferencia que relaciona la velocidad con la tensión de entrada, hallada eliminando la realimentación negativa de la Fig. 9-9 *a* es:

$$\frac{\Omega_m}{V_s/K_m} = \frac{1}{\tau_m(\tau_a s + 1) \left(s + \frac{B}{J} \right) + 1} \quad (9-27)$$

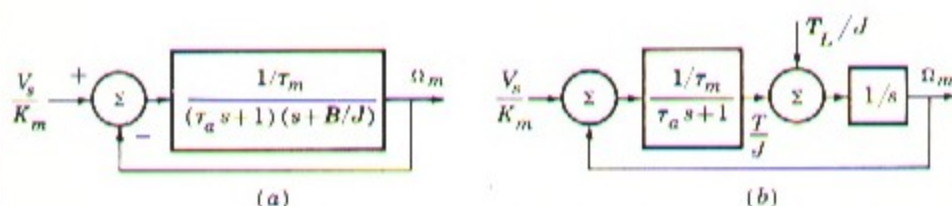


Fig. 9-9. Diagramas de bloques de un motor de continua con excitación independiente, en función de variables complejas.

y, si despreciamos la amortiguación mecánica,

$$\frac{\Omega_m}{V_s/K_m} = \frac{1}{\tau_m s(\tau_a s + 1) + 1} \quad (9-28)$$

con lo que la función de transferencia que relaciona la velocidad con el par resistente será:

$$\frac{\Omega_m}{T_L} = \frac{R_a}{K_m^2} \frac{1}{\tau_m s(\tau_a s + 1) + 1} \quad (9-29)$$

En la Fig. 9-10 se muestra un circuito eléctrico análogo, en el que la inercia está representada por una capacidad equivalente C_{eq} y la amortiguación por una conductancia en derivación G_{eq} . La ecuación del par en el sistema mecánico puede escribirse:

$$T = K_m i_a = J p \omega_m + B \omega_m \quad (9-30)$$

que, dividiendo por K_m y substituyendo ω_m por e_a/K_m se convierte en:

$$i_a = \frac{J}{K_m^2} \frac{de_a}{dt} + \frac{B}{K_m^2} e_a \quad (9-31)$$

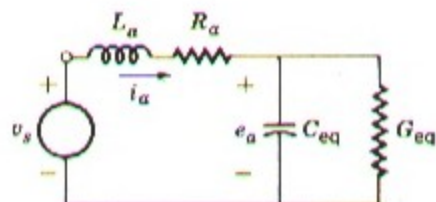


Fig. 9-10. Circuito eléctrico equivalente de un motor de continua con excitación independiente.

que es idéntica a la ecuación del circuito $C_{eq} G_{eq}$ siempre que:

$$C_{eq} = \frac{J}{K_m^2} \quad \text{y} \quad G_{eq} = \frac{B}{K_m^2} \quad (9-32)$$

Las constantes de tiempo en función de los datos del circuito análogo son:

$$\tau_m = R_a C_{eq} \quad \text{y} \quad \tau_L = C_{eq} / G_{eq} \quad (9-33)$$

Las frecuencias propias s del sistema vienen dadas por los polos de la función de transferencia, ecuación 9-27 o las raíces de la ecuación:

$$\left(s + \frac{1}{\tau_a}\right) \left(s + \frac{B}{J}\right) + \frac{1}{\tau_a \tau_m} = 0 \quad (9-34)$$

$$s^2 + \left(\frac{1}{\tau_a} + \frac{B}{J}\right) s + \frac{1}{\tau_a} \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{B}{J}\right) = 0 \quad (9-35)$$

Comparando con la forma tipo de una ecuación de segundo grado

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2 = 0$$

puede verse que la frecuencia no amortiguada es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\tau_a} \left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{B}{J}\right)} \quad (9-36)$$

y el factor de amortiguación α es:

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau_a} + \frac{B}{J}\right) \quad (9-37)$$

La amortiguación relativa, o relación de amortiguación ζ es:

$$\zeta = \alpha / \omega_n \quad (9-38)$$

Las raíces se hallan por el conocido procedimiento

$$s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (9-39)$$

en donde la primera forma, $\zeta > 1$ da dos términos exponenciales con exponentes reales negativos, y la segunda forma $\zeta < 1$ da una senoide amortiguada. La carga mecánica

normalmente afecta muy poco a ω_n y α aun cuando evidentemente afecta a la velocidad en régimen permanente. Si se desprecia B/J , tendremos:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{\tau_a \tau_m}} \quad (9-40)$$

$$\alpha = \frac{1}{2\tau_a} \quad (9-41)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_m}{\tau_a}} \quad (9-42)$$

La familia de curvas de la Fig. 9-11 da las soluciones de un sistema de segundo orden con un impulso de entrada y partiendo del estado inicial en reposo. Las ordenadas dan la relación entre el valor de la salida χ y su valor final en régimen permanente χ_{∞} . Estas curvas pueden emplearse para determinar la variación de velocidad $\Delta\omega_m(t)$ resultante de la variación Δv_s en la tensión de entrada. En este caso pueden interpretarse las ordenadas como la relación $\Delta\omega_m(t)/\Delta\omega_m(\infty)$, siendo $\Delta\omega_m(\infty)$ el valor final de la variación de velocidad.

De la ecuación 9-27 siendo $s = 0$ tendremos:

$$\frac{\Delta\omega_m(\infty)}{\Delta v_s/K_m} = \frac{1}{(\tau_m B/J) + 1} = \frac{1}{(R_a B/K_m^2) + 1} \quad (9-43)$$

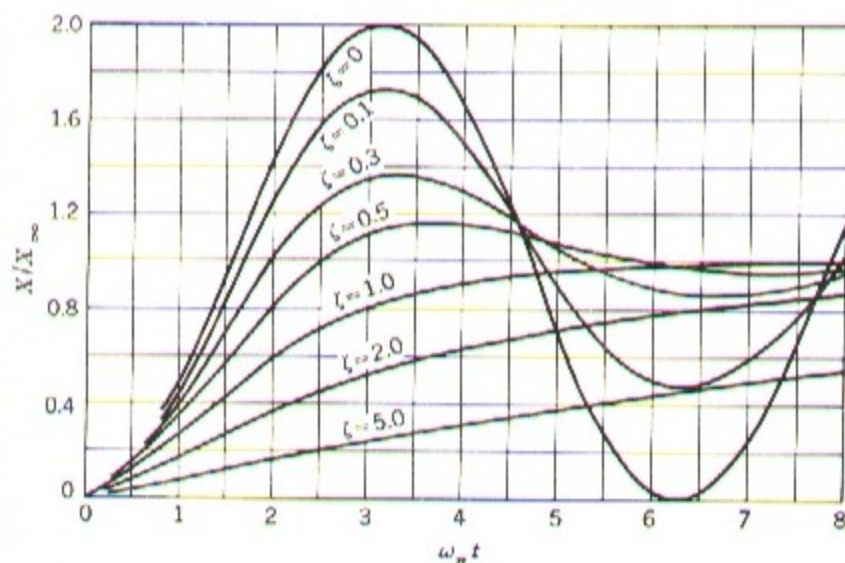


Fig. 9-11. Soluciones normalizadas de la ecuación diferencial lineal de segundo orden, partiendo de la condición inicial en reposo.

y de la ecuación 9-29, suponiendo el par resistente independiente de la velocidad:

$$\frac{\Delta\omega_m(\infty)}{\Delta T_L} = -\frac{R_a}{K_m^2} \quad (9-44)$$

Ejemplo 9-2

Las siguientes constantes corresponden a dos motores de continua compensados

<i>Motor n.º 1</i>	<i>Motor n.º 2</i>
1 c.v., 500 r.p.m., 240 V	100 c.v., 1750 r.p.m., 240 V
$R_a = 7,56$ ohm	$R_a = 0,0144$ ohm
$L_a = 0,055$ henry	$L_a = 0,0011$ henry.
$K_m = 4,23$ V-seg/rad.	$K_m = 1,27$ V-seg/rad.
$J = 0,068$ Nw-m/seg ²	$J = 1,82$ Nw-m/seg ²

Supóngase que la resistencia y la inductancia de la fuente de alimentación son iguales a las del motor y que la inercia de la carga es también igual a la inercia del motor; supóngase asimismo que la característica par-velocidad de la carga es una línea recta que va desde el origen hasta el punto correspondiente a la carga nominal. Despréciense las pérdidas mecánicas de los motores.

Hállese la frecuencia propia no amortiguada ω_n y el factor de amortiguación ζ de cada uno de los dos motores. Razónese sobre la influencia de las aproximaciones.

SOLUCION

Convirtamos los datos de los motores y de la inercia a unidades MKS.

<i>Motor n.º 1</i>	<i>Motor n.º 2</i>
1 c.v. = 746 W	100 c.v. = 74.600 W
500 r.p.m. = 52,3 rad/seg	1750 r.p.m. = 182 rad/seg
Par nominal T	
$T = \frac{746}{52,3} = 14,3$ Nw-m	$T = \frac{74600}{182} = 407$
$B = T/\omega = 0,273$	$B = 2,23$
$J = 2 \times 0,068 = 0,136$ Kg/m ²	$J = 2 \times 1,82 = 3,64$
$B/J = 2,00$	$B/J = 0,61$
$\tau_a = \frac{0,110}{15,1} = 0,0073$	$\tau_a = \frac{0,0022}{0,0288} = 0,0765$
$1/\tau_a = 137$	$1/\tau_a = 13,1$
$\tau_m = \frac{0,136 \times 15,1}{4,23^2} = 0,115$	$\tau_m = \frac{3,64 \times 0,0288}{1,27^2} = 0,065$
$1/\tau_m = 8,7$	$1/\tau_m = 15,4$

1 En A. Kusko "Solid-State D.C. Motor Drives" The M.I.T. Press, Cambridge, Mass. 1969, pp 22-23 figura una tabla de constantes de motores de continua.

Con el valor supuesto para los parámetros de la fuente de alimentación y de la carga, el efecto de la amortiguación de la carga B/J es muy pequeño especialmente en el motor grande. El resultado, de las ecuaciones 9-40 a 9-42 es:

$$\begin{aligned} \text{Motor n.º 1} \\ \omega_n &= \sqrt{(13,7)(8,7)} = 34,5 \\ \zeta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,115}{0,0073}} = 1,98 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Motor n.º 2} \\ \omega_n &= \sqrt{(13,1)(15,4)} = 14,2 \\ \zeta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,065}{0,0765}} = 0,46 \end{aligned}$$

En las curvas de la Fig. 9-11 podemos ver que la respuesta transitoria del motor de 100 c.v. a un salto de la tensión de entrada es una senoide amortiguada con una sobreelevación del orden de 1,2 para $\omega_n t = 3,5$ o sea $t = 3,5/14,2 = 0,25$ segundos. La respuesta del motor de 1 c.v. es sobreamortiguada: su valor transitorio a $\omega_n t = 6,5$ o sea $t = 6,5/34,5 = 0,19$ segundos es del orden de 0,8 su valor final. Si se desprecia la constante de tiempo de su circuito inducido, la expresión de su respuesta queda reducida a:

$$\frac{\Delta\omega_m(t)}{\Delta\omega_m(\infty)} = 1 - e^{-t/\tau_m}$$

La expresión aproximada da un valor de 0,8 cuando $e^{-t/\tau_m} = 0,2$ o bien $t/\tau_m = 1,61$, $t = 1,61 \times 0,115 = 0,185$ seg. Este valor aproximado es prácticamente el mismo que los 0,19 segundos dados por las curvas. La constante de tiempo del circuito inducido tiene, como puede verse, muy poca influencia sobre el régimen transitorio del motor de 1 c.v. pero es ya significativa para el de 100 c.v.

En general, puede despreciarse la inductancia del circuito inducido cuando la relación de amortiguación ζ es mayor de aproximadamente 1,5 que corresponde a una relación entre las constantes de tiempo τ_a/τ_m menor de aproximadamente 1/9. La amortiguación crítica corresponde a la relación $\tau_a/\tau_m = 1/4$. En general, en los motores solos, τ_a tiende a aumentar con su tamaño mientras que τ_m decrece ligeramente. Los motores grandes, de 10 c.v. o más, a velocidad baja, hasta de unas 1150 r.p.m. tienen en general una amortiguación oscilante. Evidentemente, la impedancia del suministro influye sobre τ_a y la inercia de la carga sobre τ_m : en general puede despreciarse B/J .

9-4. UN REGULADOR DE VELOCIDAD ELEMENTAL

Cuando está especificada una gran precisión completamente libre de la influencia de disturbios exteriores se hace necesario emplear un sistema de regulación con realimentación. La teoría del control por realimentación ha alcanzado un alto grado de precisión, existiendo numerosos libros de texto y publicaciones técnicas que tratan de tan importan-

te y extensa cuestión². En este apartado se estudiará un ejemplo de sistema de regulación de velocidad, que será tratado partiendo de la base de que el lector está ya familiarizado con los conceptos básicos.

La Fig. 9-12 *a* representa el diagrama esquemático de uno de los sistemas de regulación de velocidad de un motor con excitación independiente. La velocidad del motor se mide mediante un tacómetro generador cuya tensión v_t se compara con la tensión de referencia E_R . La diferencia o error entre estas tensiones se amplifica, y es la que regula la tensión de salida del equipo de conversión, de forma que la velocidad se mantenga prácticamente constante al valor fijado por la tensión de referencia. Frecuentemente se añade al sistema regulador un circuito limitador de corriente con objeto de proteger al equipo contra las sobrecargas que se originarían si el motor ha de responder a grandes variaciones de la tensión de referencia o del par resistente. En la citada figura 9-12 *a* el circuito limitador de corriente se ha representado con línea de trazos.

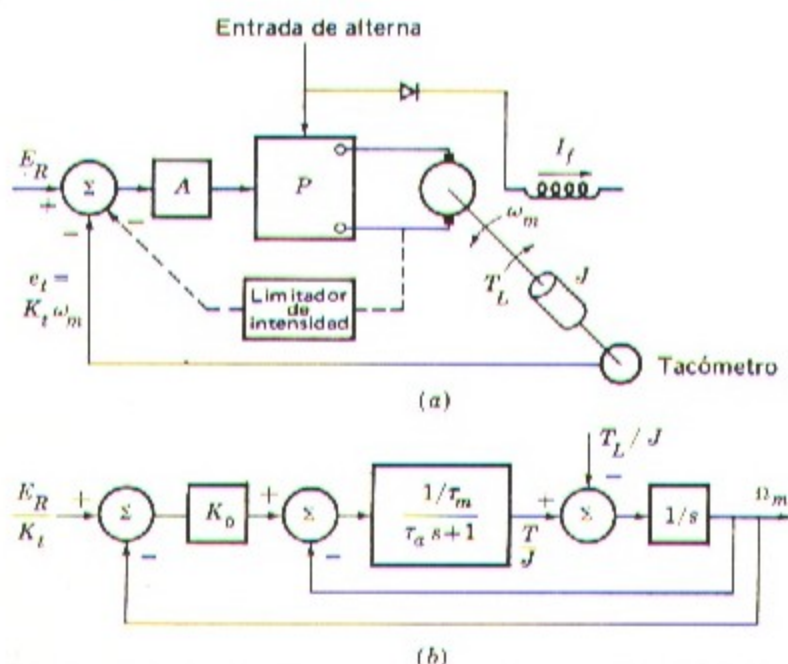


Fig. 9-12. Sistema de regulación de velocidad con realimentación: (a) diagrama esquemático, y (b) diagrama de bloques.

² Por ejemplo, véase H. Chestnut y R. W. Mayer, "Servomechanisms and Regulating System Design," John Wiley & Sons, Nueva York, vol. I, 2ª ed., 1959, vol. II, 1955; G. C. Newton, Jr., L. A. Gould y J. F. Kaiser, "Analytical Design of Linear Feedback Controls," John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1957; G. J. Thaler y R. G. Brown, "Analysis and Design of Feedback Control Systems," McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2ª ed., 1961; R. N. Clark, "Introduction to Automatic Control Systems," John Wiley & Sons, Nueva York, 1962; J. J. D'Azzo y C. H. Houpis, "Feedback Control System Analysis and Synthesis," McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 2ª ed., 1966; A. E. Fitzgerald, D. E. Higginbotham y A. Grabel, "Basic Electrical Engineering," McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 3ª ed., 1967, cap. 17.

Los detalles del amplificador A y del equipo de conversión de potencia dependen del sistema adoptado. Por ejemplo, P puede ser un rectificador estático gobernado de alguno de los tipos descritos en el capítulo 8 y A puede ser un circuito defasador que regule el ángulo de cebado de los tiristores, o bien P puede ser un grupo motor-generador y A un amplificador que regule la corriente de excitación del generador de continua como en el sistema Ward Leonard descrito en el capítulo 5. Admitiremos que el conjunto de la combinación de A y P es equivalente a una fuente de tensión $v_g = K_A e$ linealmente regulada, con un tiempo de retraso despreciable y una amplificación K_A . (Con rectificadores estáticos, el retraso de tiempo es de aproximadamente un semiperíodo de la corriente alterna de alimentación, retraso que realmente puede despreciarse: sin embargo, en el sistema Ward-Leonard el tiempo de retraso en la excitación del generador de continua puede llegar a ser apreciable). Supondremos que el par resistente T_L es independiente de la velocidad, es decir que B/J es igual a cero.

El diagrama de bloques está representado en la Fig. 9-12 *b* siendo E_R/K_t lo que fija la velocidad en vacío y régimen permanente; K_t es la constante velocidad-tensión del tacómetro, y

$$K_0 = \frac{K_t K_a}{K_m} \quad (9-44 a)$$

Este diagrama se ha formado simplemente añadiendo al diagrama del motor de la Fig. 9-9 *b* el circuito de realimentación del tacómetro. A continuación estudiaremos la respuesta a los cambios en la tensión de referencia E_R y a los del par resistente.

Si $T_L = 0$, la reducción del diagrama de conjunto da la función de transferencia:

$$\frac{\Omega_m}{E_R} = \frac{K_0}{K_t} \frac{1}{\tau_m s(\tau_a s + 1) + 1 + K_0} \quad (9-45)$$

y análogamente, si $E_R = 0$,

$$\frac{\Omega_m}{T_L} = - \frac{R_a}{K_m^2} \frac{1}{\tau_m s(\tau_a s + 1) + 1 + K_0} \quad (9-46)$$

Las frecuencias propias s_1 , s_2 del sistema cerrado vienen dadas por los polos de la función de transferencia.

La frecuencia propia no amortiguada ω_n es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1 + K_0}{\tau_a \tau_m}} \quad (9-47)$$

y el factor de amortiguación α :

$$\alpha = \frac{1}{2\tau_a} \quad (9-48)$$

La relación de amortiguación ξ es:

$$\xi = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_m}{\tau_a} \frac{1}{1 + K_0}} \quad (9-49)$$

Las frecuencias propias s_1, s_2 se obtienen de la ecuación 9-39. Si se desprecia la inductancia del circuito inducido, la respuesta se reduce a una única frecuencia propia $s_1 = -(1 + K_0)\tau_m$ correspondiendo a un solo término exponencial con una constante de tiempo $\tau'_m = \tau_m(1 + K_0)$.

El examen de las anteriores ecuaciones ilustra sobre ciertos aspectos importantes concernientes al período transitorio del sistema y sobre las condiciones necesarias para su funcionamiento satisfactorio.

Según la ecuación 9-45 la respuesta final en régimen permanente $\Delta\omega_m(\infty)$ a un salto ΔE_R de la tensión de referencia será (siendo $s = 0$),

$$\frac{\Delta\omega_m(\infty)}{\Delta E_R} = \frac{1}{K_t} \frac{K_0}{1 + K_0} \quad (9-50)$$

Partiendo del reposo, puede conocerse la respuesta a una determinada variación en la entrada mediante las curvas de la Fig. 9-11.

Según la ecuación 9-46, para un incremento ΔT_L del par resistente tendremos:

$$\frac{\Delta\omega_m}{\Delta T_L} = - \frac{R_a}{K_m^2} \frac{1}{1 + K_0} \quad (9-51)$$

Para el más correcto funcionamiento, el sistema debe ser insensible a las perturbaciones del par resistente. Ello supone que R_a sea lo más pequeño posible, y K_m tan grande como se pueda, es decir, que el motor deberá trabajar al máximo flujo consentido. Asimismo, K_0 deberá ser también tan grande como sea posible; recuérdese que K_0 es proporcional a la ganancia del amplificador, por consiguiente, aumentando dicha ganancia en el amplificador se hace al sistema menos sensible a las perturbaciones de la carga.

Sin embargo, el aumento de ganancia tiene efectos contraproducentes sobre el comportamiento dinámico.

En las ecuaciones 9-47 y 9-49 podemos ver que aumentando la amplificación aumenta también la frecuencia propia ω_n mientras decrece la relación de amortiguación ξ , y por tanto el sistema oscila rápidamente entre límites muy amplios. La estabilidad relativa se resiente, y los componentes se desgastan más rápidamente. En sistemas más complicados que supongan tres o más retrasos de tiempo, una amplificación excesiva conduce fácilmente a una inestabilidad absoluta, es decir, a oscilaciones crecientes exponencialmente. En la práctica se ha demostrado que normalmente dan buen resultado las ganancias del amplificador que se traduzcan en una relación de amortiguación comprendida entre 0,4 y 0,7. Si una amplificación lineal no resulta satisfactoria en un sistema, pueden añadirse compensaciones de distintas formas. Las técnicas de compensación mediante el empleo de circuitos correctores se estudia en textos especializados.

Ejemplo 9-3

Un motor de continua de 5 c.v., 240 V, 1750 r.p.m. trabaja con un sistema de regulación de velocidad como el representado en la Fig. 9-12 a. El inducido se alimenta de un rectificador estático gobernado. La resistencia y la inductancia del circuito inducido, incluido el rectificador, valen respectivamente:

$$R_a = 1,20 \text{ ohm} \quad L_a = 0,010 \text{ henry}$$

El circuito de excitación del motor se alimenta a intensidad constante de un rectificador independiente. La constante de velocidad-tensión del motor es:

$$K_m = 1,21 \text{ V-seg/rad.}$$

La inercia del motor más carga es:

$$J = 0,068 + 0,140 = 0,208 \text{ Kg-m}^2$$

La constante velocidad-tensión del tacómetro es:

$$K_t = 0,1 \text{ v/r.p.m.} \quad \text{o bien} \quad 0,96 \text{ V-seg/rad.}$$

La ganancia del detector, amplificador y rectificador es:

$$K_A = 10 \text{ V/V}$$

La tensión de referencia E_R se ajusta de forma que la velocidad en vacío sea de 1800 r.p.m.

- Determinar E_R .
- Hállese la pérdida de velocidad en régimen permanente al aplicar un par resistente de 20 Nw-m (aproximadamente la carga nominal).
- Hállese ω_n , α y ζ . Coméntese el comportamiento del sistema.

Empléense unidades MKS y despréciense las pérdidas mecánicas en vacío.

SOLUCION

a. $1800 \text{ r.p.m.} = 188 \text{ rad/seg.}$

Fuerza contraelectromotriz del motor:

$$E_a = K_m \omega_m = 1,21 \times 188 = 228 \text{ V.}$$

Entrada al amplificador:

$$E_a/K_A = 22,8 \text{ V.}$$

$$\text{Tensión de referencia: } E_R = 180 + 22,8 = 202,8 \text{ V.}$$

b. De la ecuación 9-44 a:

$$K_v = \frac{0,96 \times 10}{1,21} = 7,9$$

y de la 9-51

$$\frac{\Delta\omega_m(\infty)}{\Delta T_L} = - \frac{1,20}{1,21^2} \frac{1}{8,9} = -0,092$$

Caída de velocidad: $20 \times 0,092 = 1,84$ rad/seg, que es menos del uno por ciento de la velocidad en vacío.

c. Las constantes de tiempo son:

$$\tau_a = \frac{0,010}{1,20} = 0,00833 \text{ segundos}$$

$$\frac{R_a}{K_m^2} = \frac{1,20}{1,21^2} = 0,82 \quad \tau_m = 0,208 \times 0,82 = 0,171 \text{ seg}$$

de las ecuaciones 9-47, 9-48 y 9-49

$$\omega_n = \sqrt{\frac{8,9}{0,0083 \times 0,171}} = 79 \text{ rad/seg}$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \times 0,0083} = 60 \text{ rad/seg}$$

$$\zeta = \frac{60}{79} = 0,76$$

La velocidad en régimen permanente y la amortiguación están dentro de límites admisibles en la mayor parte de aplicaciones industriales.

En muchas aplicaciones industriales de velocidad variable se necesita poder regular coordinadamente varios motores que accionan elementos en tandem por los que pasa el material en elaboración en proceso continuo: las máquinas de las fábricas de papel y los laminadores constituyen unos ejemplos típicos en los que se requiere una coordinación muy ajustada en la regulación de los motores para evitar tirones muy perjudiciales para la elaboración y para los motores individuales³.

El análisis de los transitorios de un sistema dinámico en función del tiempo de respuesta a una perturbación indica lo que sucede en el sistema al presentarse una de tales

3 W. K. Boice, Controlling Speed in Multidrive Systems, Machine Design 42 (2): 130-134 (1970).

perturbaciones, que puede ser una modificación súbita en una de sus variables de entrada. Si el sistema comprende más de dos elementos capaces de almacenar energía, el análisis transitorio llega a hacerse irrealizable. Un análisis dinámico por procedimientos de respuesta de frecuencia puede constituir un complemento valioso para el análisis transitorio: este asunto se trata a fondo en textos especializados en las teorías de realimentación: a continuación se expone un breve resumen.

Cualquier sistema de circuito cerrado puede representarse con el diagrama de la Fig. 9-13 en la que $G(s)$ es la función de transferencia que relaciona la amplitud compleja de la salida C con la amplitud compleja de la señal de error e , y $H(s)$ es la función de transferencia del enlace de la realimentación. Con excitación senoidal en régimen permanente $s = j\omega$, estas funciones se convierten en funciones vectoriales de la frecuencia ω .

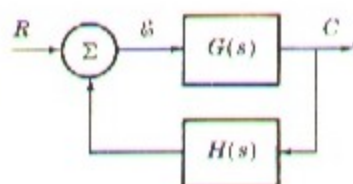


Fig. 9-13. Diagrama de bloques generalizado de un sistema con realimentación.

La función de transferencia:

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} = |A(j\omega)|\angle\theta(j\omega) \quad (9-52)$$

es una función vectorial de la frecuencia, de amplitud $|A|$ y ángulo θ . Pueden trazarse gráficas con los valores de $|A|$ y de θ como funciones de la frecuencia ω . La presencia de puntas altas en la curva de amplitud-respuesta indica evidentemente unas oscilaciones indeseables en la respuesta transitoria, y por otra parte, una bajada rápida de dicha curva a medida que aumenta la frecuencia corresponde a una respuesta transitoria lenta. En general, las gráficas se trazan como diagramas de Nyquist o de Bode de la función de transferencia $G(j\omega)H(j\omega)$ tal como se describe en los textos especializados. Para mejorar el funcionamiento del sistema pueden añadirse al mismo ciertos circuitos compensadores.

En cualquier sistema en el que exista realimentación desde la salida hacia la entrada existe siempre la posibilidad de un funcionamiento auto sostenido, es decir, que el sistema puede llegar a producir oscilaciones sostenidas aún sin existir señal de entrada alguna. En el sistema de la Fig. 9-13 un número suficiente de elementos almacenadores de energía, con sus correspondientes retrasos de tiempo y defases entre la salida y la entrada, dará origen a que para alguna frecuencia finita la salida C esté defasada 180° respecto al error. Dicho de otra forma, la función de transferencia $G(j\omega)H(j\omega)$ a esta frecuencia será un número real negativo. Si este número es la unidad se produce la autoexcitación, es decir,

que aún con $R = 0$, la realimentación de la salida a través del circuito cerrado substituye a la propia entrada y el sistema oscila permanentemente a la frecuencia correspondiente a un defase de 180° . Si dicho número es mayor que la unidad pueden originarse oscilaciones cuya amplitud vaya creciendo hasta encontrar un límite en la no linealidad del sistema; en este caso es indispensable añadir circuitos compensadores. Por último el sistema no podrá quedar sujeto a oscilaciones sostenidas si la magnitud de la función de transferencia a la frecuencia que representa un defase de 180° es menor que la unidad.

Se puede observar que las circunstancias citadas fijan los criterios necesarios para una estabilidad absoluta. Los sistemas normales de circuito cerrado trabajan bien dentro de estos límites.

9-5. METADINAMOS Y AMPLIDINAS

Hasta ahora hemos considerado únicamente las máquinas de continua con las escobillas situadas sobre el eje transversal. En este apartado se estudiarán los efectos producidos por escobillas adicionales colocadas en el eje longitudinal: por este procedimiento la f.m.m. producida por el inducido interviene en la excitación pudiéndose conseguir una mayor potencia. Las máquinas que tienen más de dos líneas de escobillas por cada par de polos se denominan *metadinamos*. Estudiaremos a continuación la metadinamo como generador, prestando especial atención a su forma más usual, la *amplidina*⁴.

a. Generador metadinamo básico

En la Fig. 9-14 puede verse una modificación de una máquina clásica de continua. En el estator hay un devanado inductor de control según el eje longitudinal. Las escobillas qq' están situadas sobre el colector de forma que la conmutación se realiza en el eje transversal como en los generadores de continua normales. Si el generador gira a velocidad uniforme ω_{m0} , despreciando la saturación magnética la tensión e_{aq} inducida en el rotor

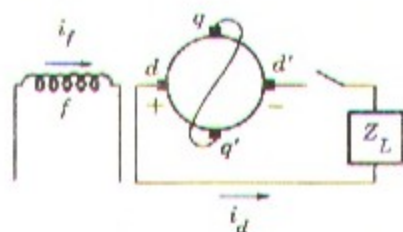


Fig. 9-14. Metadinamo básica.

⁴ Para el estudio de la teoría en régimen permanente y la descripción de algunas de las aplicaciones véase: J. M. Pestarini "Metadyne Statics", Technology Press and John Wiley & Sons, Inc, Nueva York 1952. Para la teoría transitoria, véase M. Riaz, Transient Analysis of the Metadyne Generator, Trans AIEE 72 (III): 52-62 (1953); K. A. Fegley, Metadyne Transients, Trans AIEE 74 (III): 1179-1188 (1955).

entre las escobillas del eje transversal será:

$$e_{aq} = K_{qt} i_f \quad (9-53)$$

en la que K_{qt} es una constante e i_f la intensidad de excitación.

Reduzcamos ahora la corriente de excitación hasta un valor pequeño y pongamos en cortocircuito las escobillas del eje transversal tal como se aprecia en la Fig. 9-14: Puesto que la impedancia del inducido en cortocircuito es pequeña, una ligera corriente de excitación dará lugar a una corriente relativamente grande en el inducido y a la correspondiente onda de densidad de flujo centrada con el eje transversal; debido a la acción del colector, este campo magnético permanece estacionario en el espacio y su efecto es semejante al de un devanado ficticio en el estator situado según el eje transversal.

Si en estas condiciones se colocan las escobillas dd' situadas en el colector sobre el eje longitudinal, tal como está representado en la Fig. 9-14, la f.e.m. e_{ad} inducida en el rotor debida al movimiento del mismo dentro del campo transversal aparecerá en dichas escobillas, y el valor de esta f.e.m., siempre en el supuesto de velocidad uniforme y saturación despreciable, será:

$$e_{ad} = K_{dq} i_q \quad (9-54)$$

siendo i_q la intensidad en el inducido entre escobillas qq' y K_{dq} una constante.

Conectemos ahora una carga Z_L a las escobillas del eje longitudinal. La intensidad i_d del inducido que circulará por las escobillas dd' y por la carga Z_L producirá una f.m.m. opuesta a la f.m.m. del circuito de excitación. Cada paso de tensión engendrada se traduce en una corriente cuyo campo magnético está adelantado en el espacio 90° respecto a la onda de flujo que engendró la tensión. Con dos pasos de tensiones inducidas, la f.m.m. de la corriente de salida por las escobillas del eje longitudinal está desplazada respecto a la f.m.m. de la excitación en $2 \times 90^\circ$, es decir, que está en oposición a ella. La f.e.m. inducida según el eje transversal (escobillas qq') será ahora:

$$e_{aq} = K_{qt} i_f - K_{qd} i_d \quad (9-55)$$

siendo K_{qd} una constante, en el supuesto como siempre de velocidad uniforme y saturación despreciable.

El generador metadinamo de la Fig. 9-14 es pues un amplificador de potencia de dos etapas con realimentación negativa fuerte desde el paso final de salida hacia la entrada. Con un valor fijo de la corriente de excitación se mantiene casi constante la intensidad de salida i_d dentro de un amplio campo de impedancias de carga. Sin embargo, su amplificación de potencia se ve reducida por el efecto de la realimentación negativa.

b. Amplidinas

La variedad más corriente de metadinos es la llamada *amplidina*. Consiste en una metadinamo básica a la que se ha añadido un devanado acumulativo en el eje longitudinal,

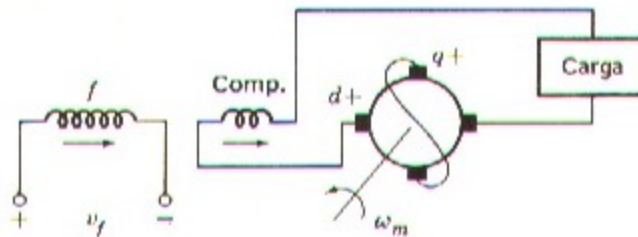


Fig. 9-15. Amplidina básica.

conectado en serie con la carga derivada de las escobillas longitudinales dd' : en el diagrama esquemático de la Fig. 9-15 se ha señalado este devanado con la indicación *Comp.* Este devanado, denominado *de compensación* está proyectado de forma que cree un flujo lo más aproximadamente posible igual y opuesto al creado por la corriente en el inducido según el eje longitudinal (dd'). Con ello se anula el efecto de realimentación negativa de la corriente de carga, con lo que el devanado de control es el que determina el flujo en el eje longitudinal. Con muy poca potencia de entrada en el devanado de excitación se logra una intensidad fuerte en el circuito transversal cortocircuitado del inducido, y esta intensidad es la que crea el campo magnético principal. La potencia necesaria para mantener la corriente transversal y alimentar la carga, procede mecánicamente del motor primario que acciona la amplidina. Pueden obtenerse fácilmente factores de amplificación del orden de 20.000: compárese este valor con el correspondiente a los generadores clásicos que en general está comprendido entre 20 y 100.

Si suponemos que la compensación es completa, la saturación despreciable, y la velocidad uniforme, la función de transferencia que relaciona la tensión E_{ad} inducida según el eje longitudinal con la tensión V_f aplicada al devanado inductor de control será:

$$\frac{E_{ad}}{V_f} = \frac{K_{gs}/R_f}{\tau_f s + 1} \frac{K_{dg}/R_{aq}}{\tau_{aq} s + 1} \quad (9-56)$$

siendo R_f y τ_f respectivamente la resistencia y la constante de tiempo del devanado de control, y R_{aq} y τ_{aq} la resistencia y la constante de tiempo del circuito inducido según el eje transversal. La resistencia del circuito inducido según el eje longitudinal se considera englobada en la carga. La inductancia del inducido según el eje longitudinal generalmente se desprecia ya que el devanado de compensación elimina prácticamente el flujo creado por la corriente en el mismo. El retraso de tiempo más significativo es el debido a la constante τ_{aq} correspondiente al eje transversal, y su valor acostumbra a estar comprendido entre 0,02 y 0,25 segundos.

Para conseguir determinadas características pueden adicionarse varios devanados auxiliares o de control en ambos ejes de una amplidina. Por ejemplo, puede colocarse en el eje transversal un devanado cumulativo conectado en serie con la corriente transversal: este devanado rebaja la intensidad transversal para un valor dado de la tensión longitudinal de salida, con lo que se mejora la conmutación de la primera.

Las amplidinas se utilizan para la amplificación de potencia de salida controlada de 1 a 50 KW. Encuentran aplicación, por ejemplo, como reguladores de tensión en los sistemas de excitación de grandes alternadores, actuando sobre el devanado inductor de la excitatriz principal⁵, o bien la propia amplidina puede actuar de excitatriz cuando las condiciones son tales que le permiten competir con otros sistemas de excitación. Puede utilizarse también una amplidina como generador de un grupo Ward Leonard en un sistema de regulación de velocidad o posición, si la potencia del motor regulado no supera la de unos pocos kW. Los servomecanismos para control de posición se tratan en libros especializados.

9-6. EFECTOS DE LA SATURACION. GENERADORES AUTOEXCITADOS

En el apartado 9-3 *a* se estudió la respuesta transitoria de un generador de continua apoyándonos en un supuesto lineal, prescindiendo de la saturación magnética: frecuentemente, la porción crítica de la respuesta transitoria transcurre substancialmente en la región lineal, o bien la respuesta a pequeñas perturbaciones puede tratarse linealmente. Sin embargo, estudios más completos del período transitorio requieren un análisis no lineal debido a la saturación. Por ejemplo, será necesario tener en cuenta la saturación al estudiar la respuesta de una excitatriz que trabaja saturada ante la demanda de un sistema de regulación de tensión al producirse una perturbación en el sistema principal, o bien al hacer el análisis de generadores derivación autoexcitados.

En este apartado se muestra cómo puede incluirse la saturación magnética modificando convenientemente el diagrama de la Fig. 9-3 *a* de forma que permita solucionar los problemas del sistema. Asimismo, a manera de ejemplo de problema no lineal que puede resolverse en forma relativamente sencilla por procedimientos gráficos, estudiaremos la subida de tensión en un generador derivación.

a. El diagrama de conjunto, incluida la saturación

Consideremos un generador de continua accionado a velocidad uniforme ω_{m0} siendo v_f la tensión aplicada a su devanado inductor. La relación entre la tensión inducida e_{a0} y la corriente de excitación i_f , incluida la saturación, viene dada por la curva de magnetización. La inductancia del devanado de excitación no es constante. Es más conveniente expresar la tensión inducida en el devanado inductor en función de los flujos concatenados, es decir:

$$v_f - R_f i_f = N_f p \Phi_f \quad (9-57)$$

siendo R_f la resistencia del circuito inductor, i_f la intensidad en el mismo, Φ_f el flujo

⁵ H. C. Barnes, J. A. Oliver, A. S. Rubenstein, y M. Temoshok, *Alternator-Rectifier Exciter for Cardinal Plant 724-MVA Generator*, *IEEE Trans., Power Apparatus and Systems*, vol. PAS 87, núm. 4, pp. 1189-1198, Abril 1968.

inductor por polo, N_f el número total de espiras del devanado inductor (supuestos todos los polos conectados en serie) y p el operador derivada d/dt .

El flujo Φ_f es algo mayor que el flujo Φ_d en el entrehierro en el eje longitudinal, debido a la dispersión del mismo; este mayor valor se puede estimar aproximadamente mediante un *coeficiente de dispersión* σ , de valor aproximadamente igual a 1,15 y que supondremos se mantiene constante; por tanto:

$$\Phi_f = \sigma \Phi_d \quad (9-58)$$

El flujo en el entrehierro Φ_d está relacionado con la tensión inducida e_{a0} por la ecuación 9-2, y por tanto:

$$\Phi_d = \frac{e_{a0}}{K_a \omega_m \sigma} \quad (9-59)$$

Substituyendo esta última ecuación en la 9-58, derivando y substituyendo el resultado en la ecuación 9-57 resulta:

$$\frac{N_f \sigma}{K_a \omega_m \sigma} p e_{a0} = v_f - R_f i_f \quad (9-60)$$

El coeficiente del primer miembro de esta ecuación se puede expresar en función de constantes fáciles de conocer o de determinar si multiplicamos numerador y denominador por $N_f \Phi_{ag}$ siendo Φ_{ag} la permeancia del entrehierro. Tendremos así:

$$\frac{N_f \sigma}{K_a \omega_m \sigma} = \frac{N_f^2 \sigma \Phi_{ag}}{K_a \omega_m \sigma \Phi_{ag} N_f} \quad (9-61)$$

$N_f^2 \sigma \Phi_{ag}$ es el valor no saturado de la inductancia L_{ff} del inductor, y $K_a \omega_m \sigma \Phi_{ag} N_f$ es la pendiente K_g de la línea del entrehierro expresada en volt inducidos por ampere de excitación: ambas cantidades son *constantes*, y pueden determinarse fácilmente mediante ensayos prácticos realizados con saturación despreciable.

Al substituir estas constantes en la ecuación 9-60 tendremos:

$$\frac{L_{ff}}{K_g} p e_{a0} = v_f - R_f i_f \quad (9-62)$$

y después de dividir por R_f

$$p e_{a0} = \frac{K_g}{R_f} \left(\frac{v_f}{R_f} - i_f \right) \quad (9-63)$$

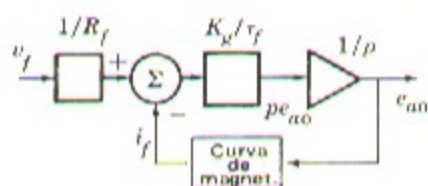


Fig. 9-16. Diagrama de bloques incluyendo la saturación.

siendo $\tau_f = L_{ff}/R_f$ el valor no saturado de la constante de tiempo del circuito inductor.

La Fig. 9-16 es el diagrama de conjunto representativo de la ecuación 9-63, y como puede verse no es más que una modificación relativamente simple del diagrama lineal de la Fig. 9-3 a. La saturación se tiene en cuenta retornando la salida e_{a0} por la curva de magnetización hasta obtener i_f , operación que puede realizarse con un computador. Basándose en la ecuación 9-63 puede programarse un computador para resolver problemas de sistemas relativamente complejos en los que figuren como componentes máquinas de continua saturadas.

b. Subida de tensión en generadores derivación

La subida de tensión en generadores de derivación autoexcitados, ya descrita cualitativamente en el apartado 5-6 b es evidentemente un proceso relacionado estrechamente con la saturación. En la Fig. 9-17 se representa un generador derivación accionado a la velocidad uniforme ω_{m0} , y en la Fig. 9-18 se representa su curva de magnetización. Se supone que existe un pequeño flujo remanente que corresponde a la pequeña tensión inducida sin excitación. La recta Oa de la Fig. 9-18, denominada *recta de resistencia del inductor* es la representación de la ecuación

$$V_f = R_f i_f \quad (9-64)$$

siendo V_f , i_f y R_f la tensión, intensidad y resistencia respectivamente del circuito inductor. La pendiente de dicha recta Oa puede regularse mediante el reostato de campo. En la Fig. 9-18, la pendiente de Oa es menor que la de la línea del entrehierro, y el punto a es la intersección de la recta de resistencia del inductor con la curva de magnetización.

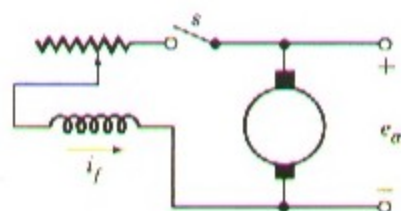


Fig. 9-17. Generador derivación.

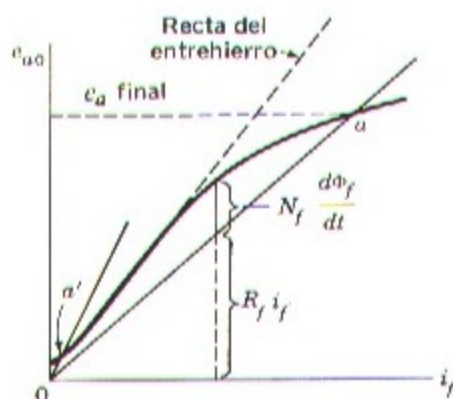


Fig. 9-18. Curva de magnetización.

Cerremos ahora el interruptor S de la excitación en el momento $t = 0$. La pequeña tensión inducida por el magnetismo remanente se aplica al circuito inductor en derivación, y con ello se inicia el paso de una corriente de excitación. Si el devanado inductor está conectado a las escobillas de tal forma que el campo creado por la corriente que por él circula refuerce el campo remanente, la tensión inducida irá creciendo hasta quedar limitada por la saturación magnética en el punto a . En este punto la tensión inducida puede dar origen a la intensidad justamente necesaria en el circuito inductor. Este razonamiento prescinde de la caída de tensión debida a la corriente de excitación en la resistencia del inducido, caída que por otra parte es extremadamente pequeña. El punto de operación normal de un generador derivación está precisamente sobre la curva de magnetización.

La curva de la Fig. 9-19 da la tensión en bornes del inducido en función del tiempo, a partir del momento de cierre del interruptor del circuito de excitación: esta curva puede calcularse por procedimiento gráfico. Puesto que la tensión inducida e_a es la que se aplica al circuito inductor, la ecuación de tensión en el mismo puede escribirse:

$$N_f \frac{d\Phi_f}{dt} = e_a - R_f i_f \quad (9-65)$$



Fig. 9-19. Subida de tensión en un generador derivación.

siendo Φ_f el flujo de excitación por polo y N_f el número de espiras del devanado inductor. Por consiguiente el aumento de flujo en un momento dado, y por consiguiente el de la tensión inducida, es proporcional a la diferencia vertical entre la curva de magnetización y la recta de resistencia del inductor.

La curva de e_a en función del tiempo puede determinarse despejando las variables e integrando gráficamente. De la ecuación 9-62 substituyendo en ella v_f por e_{a0} y despejando tendremos:

$$dt = \frac{L_{ff}}{K_g} \frac{de_{a0}}{e_{a0} - R_f i_f} \quad (9-66)$$

El tiempo requerido para que la tensión pase desde un valor inicial e_f hasta otro e_a es:

$$t = \frac{L_{ff}}{K_g} \int_{e_f}^{e_a} \frac{1}{e_{a0} - R_f i_f} de_{a0} \quad (9-67)$$

El valor de la integral puede deducirse hallando las correspondientes áreas en una gráfica de $1/(e_{a0} - R_f i_f)$ en función de e_{a0} .

La respuesta es relativamente lenta, ya que la diferencia de tensiones que origina el aumento de flujo es pequeña.

El procedimiento de resolución gráfica puede aplicarse a la mayor parte de ecuaciones de primer orden en las que las variables puedan separarse en la forma indicada. En el ejemplo 10-5 puede verse una aplicación de este método al transitorio de arranque de un motor de inducción.

9-7. RESUMEN

El objetivo primordial de este capítulo es el de crear y analizar modelos matemáticos de las máquinas de continua ideales, y a partir de estos modelos deducir el comportamiento dinámico no sólo de las máquinas en sí mismas, ya sean generadores o motores, sino también de la combinación de dichas máquinas de continua con otros elementos sencillos de regulación.

Las ecuaciones dinámicas de las máquinas clásicas de continua son relativamente sencillas y fáciles de establecer, como se ha hecho en el apartado 9-2, que en consecuencia es el apartado básico de este capítulo; los apartados que le siguen están dedicados a ejemplos de aplicación de dichas ecuaciones, al desarrollo de técnicas para resolverlas, y a resaltar la adaptabilidad de las máquinas de continua como dispositivos de regulación.

Cuando en una máquina de continua existe sólo un devanado inductor y otro inducido, de las ecuaciones básicas se deduce que hay tres causas de retraso en la respuesta dinámica de la misma, que son: la originada por la inductancia del circuito de excitación, la originada por la inductancia del circuito inducido, y la debida al equipo mecánico acoplado al eje, incluida la inercia del propio rotor. No obstante, muchas veces puede simplificarse el análisis debido a que una o más constantes de tiempo son pequeñas comparadas con las restantes. Esta simplificación es especialmente valiosa cuando se está realizando el

análisis de un sistema que comprende varias máquinas en lugar de estar formado por una sola.

Puesto que los problemas de mayor interés e importancia están relacionados en general con sistemas de máquinas, se ha indicado la forma de valerse de distintas técnicas para abreviar los análisis. Un sistema muy comúnmente empleado cuando se requiere un control de velocidades muy preciso dentro de un amplio campo, está formado por un motor de continua alimentado en su inducido por un rectificador de continua (conocido también por el nombre de sistema Ward Leonard). Entre las técnicas de análisis se pueden citar, además de la solución clásica de ecuaciones diferenciales; el empleo de diagrama de bloques; las funciones de transferencia; circuitos equivalentes, y los métodos de respuesta en frecuencia. Estas técnicas encuentran una gran aplicación en la resolución de sistemas en general.

El empleo de estas técnicas permite ver las máquinas como algo más que un simple convertidor de energía. El generador con excitación independiente, por ejemplo, puede ser considerado como un amplificador de potencia; una ganancia y una o más constantes de tiempo, junto con un aumento en el nivel de potencia. En un generador derivación puede verse cierta similitud con un oscilador realimentado. Con estos puntos de vista más amplios se pueden valorar mejor las posibilidades de regulación de máquinas de continua más complejas. Una variación sobre las máquinas básicas puede consistir en la adición de escobillas sobre el eje longitudinal además de las existentes en el transversal, tal como sucede en las metadinamos y amplidinas. Mediante combinaciones con circuitos exteriores puede conseguirse conformar las características del sistema con las particularidades de funcionamiento especificadas. Los objetivos ideales pretendidos son los de aumentar la sensibilidad o ganancia, disminuir las constantes de tiempo efectivas o tiempos de respuesta y disminuir la sensibilidad del sistema ante perturbaciones externas incontroladas, pero no todos estos objetivos son compatibles entre sí. Por ejemplo, la adición de una realimentación negativa en un sistema tiene realmente el beneficioso efecto de disminuir el tiempo de respuesta y hacer al sistema más insensible a las perturbaciones externas, pero en cambio disminuye la ganancia. Para conseguir la misma potencia de salida a partir de la misma potencia de regulación de entrada deberá incrementarse convenientemente la amplificación. El aumento de coste del equipo al aumentar la amplificación de potencia deberá quedar compensado con una mejora en el funcionamiento del conjunto.

Además de todos estos análisis, no hay que olvidar que las máquinas han de ser capaces de soportar las tensiones, intensidades y potencias de salida determinadas por las señales de control: dicho de otra forma, la característica señal-salida de una máquina ideal debe ser congruente con las limitaciones impuestas por las propiedades de los materiales de que está construida la máquina real y con el coste del equipo necesario para la amplificación de potencia requerida.

PROBLEMAS

9-1. Un generador con excitación independiente tiene las siguientes constantes:

Resistencia del devanado inductor. $R_f = 100$ ohm.

Inductancia del mismo: $L_{ff} = 50$ henry.

Resistencia del inducido: $R_a = 0,05$ ohm.

Inductancia del mismo: $L_a = 0,5$ mh.

Constante de f.e.m. inducida: $K_g = 100$ V/A de excitación, a 1200 r.p.m.

El generador está accionado a velocidad constante de 1200 r.p.m. Los circuitos de excitación e inducido están inicialmente abiertos.

- En el instante $t = 0$ se aplica súbitamente a los bornes del devanado inductor una tensión constante de 250 V. Hállese la ecuación de la tensión en los terminales del inducido en función del tiempo, y trácese la curva correspondiente.
- Una vez establecido el régimen permanente en las condiciones del punto anterior, se conecta súbitamente al inducido una carga de resistencia 1,20 ohm e inductancia 1,5 mh en serie. Hállese las ecuaciones: 1.ª de la intensidad, y 2.ª de la tensión en bornes de inducido, ambas en función del tiempo. Inclúyanse los efectos de la resistencia e inductancia del devanado inducido, y trácese las correspondientes curvas.
- Hállese el par magnético en función del tiempo.

9-2. Un motor de continua M tiene su inducido conectado permanentemente a una fuente S como se muestra en la Fig. 9-20 *a*. La característica Volt/Ampere de la fuente de suministro es la representada en la Fig. 9-20 *b*. El motor es de excitación independiente alimentada ésta a la tensión E_f como puede verse en la figura.

Resistencia del inducido del motor: $R_a = 0,5$ ohm.

Inductancia del mismo: despreciable.

Resistencia del inductor del motor: $R_f = 50$ ohm.

Inductancia del mismo: $L_{ff} = 50$ henry.

Par motor con corriente de excitación de 5 A y corriente en el inducido de 100 A: 200 Nw-m.

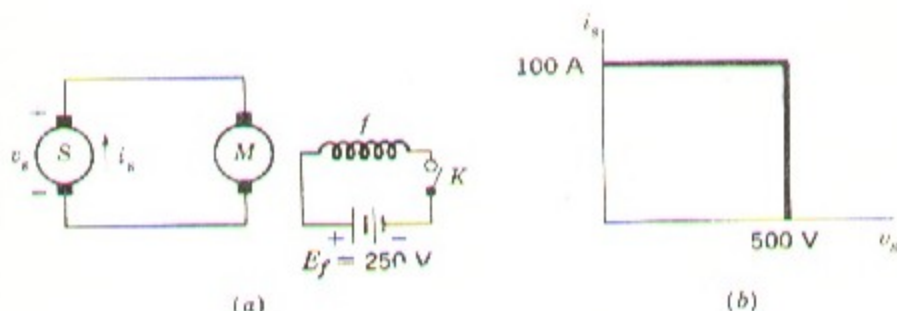


Fig. 9-20. (a) Esquema del circuito y (b) característica ideal de la fuente de suministro del problema 9-2.

Carga del motor: sólo inercia: Momento de inercia total J de la carga y del rotor = 10 Kg-m^2

Despréciense los efectos de la saturación magnética en el motor.

El interruptor K de la excitación del motor se cierra en el instante $t = 0$.

Dedúzcase una expresión, con sus valores numéricos, de la velocidad en radianes por segundo en función del tiempo en segundos, y trácese aproximadamente a escala la curva correspondiente, indicando en la misma la velocidad final en régimen permanente y la velocidad en el momento en que se alcanza el punto de discontinuidad en la característica de la fuente de suministro. Calcúlese el tiempo que tarda el motor en alcanzar una velocidad de aproximadamente el 96 por ciento de su velocidad final.

9-3. Un motor de continua de excitación independiente acciona una carga puramente de inercia, siendo $J \text{ Kg-m}^2$ el momento de inercia conjunto de la carga y del motor. La resistencia del inducido es de R_a ohm y su inductancia se desprecia. La constante del par motor es $K_m \text{ Nw-m/A}$.

Estando el motor en reposo con su inductor excitado en régimen permanente se aplica súbitamente una tensión V_r a su inducido. Hállese el calor total disipado en el inducido hasta que el motor alcance su velocidad de régimen: Compárese con la energía cinética almacenada en las masas rotativas.

9-4. Un motor de continua excitado en derivación acciona una carga puramente de inercia. Tanto el inducido como el inductor se alimentan de una red de continua de tensión constante, y el motor está girando a su velocidad de régimen permanente. Prescindase de todas las pérdidas mecánicas y de la reacción del inducido. Supóngase que el flujo es directamente proporcional a la corriente de excitación y que la inductancia del inducido es despreciable.

El reostato del campo se cortocircuita súbitamente. Hállese la ecuación diferencial de la velocidad del motor seguidamente a esta perturbación, empleando los símbolos corrientes para las distintas cantidades, e indíquense todas las condiciones iniciales.

No es necesario resolver la ecuación.

9-5. En un laminador continuo, los cilindros o rodillos a través de los cuales pasa el lingote que se está elaborando están dispuestos en tandem y la mayor parte de ellos accionados por motores independientes, siendo lo más corriente emplear motores de continua alimentados por uno o más generadores. Los cambios transitorios de velocidad en los motores al serles aplicada repentinamente una carga, como sucede al ir entrando el lingote entre los sucesivos pares de cilindros, pueden afectar muy seriamente a la calidad del producto laminado: la repentina caída de velocidad que tiene lugar en el máximo de la oscilación transitoria reviste gran importancia en el sentido indicado.

Consideremos un motor único M alimentado por un generador G , teniendo ambos excitación independiente y constante. La tensión interna E del generador puede considerarse constante, y puede despreciarse la reacción del inducido en ambas máquinas. Estando el motor girando sin carga exterior y todo el sistema en régimen permanente, entra un

lingote entre los rodillos en el momento $t = 0$ aumentando repentinamente el par resistente desde cero hasta T . Los distintos valores numéricos son:

Tensión interna de G : $E = 387$ V.

Inductancia de los inducidos de motor más generador: $L = 0,00768$ henry.

Resistencia de los inducidos de motor más generador: $R = 0,0353$ ohm.

Momento de inercia del rotor del motor y de los cilindros acoplados, referido todo a la velocidad del motor: $J = 42,2$ Kg-m².

Constante de conversión electromecánica del motor: $K_m = 4,23$ Nw-m/A.

Intensidad en el inducido, en vacío: $i_0 = 35$ A.

Par aplicado súbitamente: $T = 2040$ Nw-m.

Determinense las siguientes cantidades:

- La frecuencia angular no amortiguada de las oscilaciones de velocidad transitoria.
- La relación de amortiguación del sistema.
- La velocidad inicial en r.p.m.
- La aceleración inicial en r.p.m./seg.
- La pérdida de velocidad final en r.p.m.
- La pérdida de velocidad en r.p.m. en el momento de entrar el lingote.

9-6. La Fig. 9-21 representa un generador de continua cuya corriente de excitación procede de una excitatriz. Tanto el generador como su excitatriz están accionados a velocidad uniforme.

Las constantes de las máquinas son:

Excitatriz

Inductancia del inductor $L_1 = 125$ henry.

Resistencia del mismo $R_a = 250$ ohm.

Tensión inducida = 1000 V/A excit.

Resistencia del inducido = despreciable.

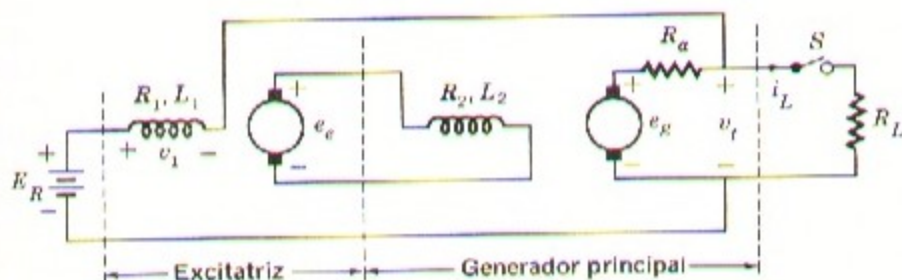


Fig. 9-21. Sistema de tensión regulable del problema 9-6.

Generador principal

Inductancia del inductor $L_2 = 100$ henry.

Resistencia del mismo $R_2 = 100$ ohm.

Tensión inducida = 250 V/A excit.

Resistencia del inducido $R_a = 1$ ohm.

Inductancia del inducido = despreciable.

Despréciense el efecto de la corriente de excitación de la excitatriz sobre la caída de tensión en el devanado inducido del generador principal.

- a. Estando cerrado el interruptor S se ajusta la tensión de referencia E_R para que con $R_L = 10$ ohm, v_r sea de 250 V. Hállese el valor de E_R .
- b. Estando el sistema en régimen permanente en las condiciones del punto anterior, se abre el interruptor S en el instante $t = 0$. Hállese $v_r(t)$.

9-7. Este problema se refiere a uno de los dos grupos motor-generador instalados en el "Francis Bitter National Laboratory". Cada grupo consta de las siguientes máquinas, acopladas todas ellas mecánicamente a un eje común.

Un motor síncrono de 6000 c.v., 360 r.p.m.

Un motor de inducción de rotor devanado de 600 c.v., 18 polos.

Un volante de inercia de 84 toneladas.

Dos generadores de continua, ambos de las siguientes características:

Servicio continuo	250 V, 10 000 A, 360 r.p.m.
Durante 5 segundos	200 V, 40 000 A, 385/300 r.p.m.

Los generadores suplen de corriente continua a dos electroimanes con núcleo de aire, refrigerados con agua, empleados para trabajos experimentales en campos magnéticos muy fuertes. Ambos generadores pueden conectarse en paralelo para dar continuamente 20 000 A a 250 V, o sea intensidad máxima de 80 000 A a 200 V, durante cinco segundos.

La potencia para el accionamiento de los motores procede de una red trifásica de 4160 V, 60 Hz. El motor de inducción se emplea para la puesta en marcha del grupo. La corriente de arranque se mantiene constante en 90 A mediante un servomecanismo de amplidina que regula una resistencia líquida conectada en el circuito del rotor, tardándose unos 15 minutos para alcanzar la velocidad de 360 r.p.m. Para el trabajo con carga continua se conecta el motor síncrono y se desconecta el de inducción, mientras que para trabajar con cargas pulsatorias es el motor síncrono el que se deja fuera de servicio y el de inducción el que acciona el grupo a la velocidad inicial de 385 r.p.m. supliéndose la mayor parte de la energía por el volante de inercia. Los generadores de continua están provistos de polos de conmutación, de devanados compensadores sobre las expansiones polares, y de devanados de excitación serie, todo ello para mejorar la conmutación, la velocidad de respuesta y el reparto de carga.

El sistema de excitación consiste en un grupo motor-generador: el motor es del tipo de inducción, de 200 c.v. y acciona dos amplidinas de respuesta rápida de 75 kW, 250 V cada una que alimentan los inductores de los dos generadores de continua principales.

Las amplidinas se regulan mediante amplificadores de realimentación, de forma que quede regulada la salida de los generadores principales.

Estando los generadores accionados a 360 r.p.m. y en vacío, la respuesta del sistema de regulación es tal como se representa en la Fig. 9-22 en la que v_f es la tensión, en unidades relativas, aplicada a los terminales del circuito de excitación del generador principal. Se toma como valor relativo 1,0 de la tensión el que aplicado al devanado de excitación se traduce en una tensión inducida de 250 V en el generador funcionando en vacío a 360 r.p.m.

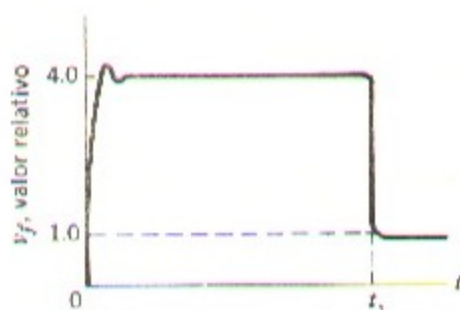


Fig. 9-22. Respuesta del sistema de excitación del problema 9-7.

Datos del problema

Momento de inercia $J = 4 \times 10^5 \text{ Kg-m}^2$.

Constante de tiempo del inductor del generador principal $\tau_f = 1,3 \text{ seg.}$

Resistencia del circuito inducido del generador principal, incluido el devanado de excitación serie: 0,02 valor relativo, en servicio continuo.

Se pide:

- El tiempo aproximado t_1 (Fig. 9-22) que tarda la tensión de salida del generador en alcanzar 250 V, a 360 r.p.m., sin carga. Dibújese la curva correspondiente.
- Estando el electroimán alimentado por los dos generadores en paralelo, hállese la velocidad al final de un impulso de 80 000 A durante 5 segundos. Trácese la curva velocidad-tiempo.
- Con la carga indicada en b, calcúlese en unidades relativas la excitación necesaria para mantener los 200 V, con una intensidad de salida de 80 000 A. Trácese la correspondiente curva.

9-8. El sistema de regulación de velocidad descrito en el apartado 9-4 se utiliza con un motor de excitación independiente de 10 c.v. 1750 r.p.m., 240 V.

Resistencia del motor más fuente de alimentación $R_a = 1,20$ ohm.

Inductancia del motor más fuente de alimentación $L_a = 0,08$ henry.

Inercia del motor más carga $J = 0,20$ Kg-m².

Constante velocidad-tensión del motor $K_m = 1,27$ V-seg/rad

Constante del tacómetro = 0,1 V/r.p.m.

La tensión de referencia E_R se ajusta para que la velocidad en vacío sea de 1800 r.p.m., y la amplificación de tensión para que la relación de amortiguación ζ sea 0,50. Calcúlese el valor de la ganancia K_A del amplificador, la frecuencia propia no amortiguada ω_n y el factor de amortiguación α .

Estando inicialmente el sistema en vacío a régimen permanente se aplica súbitamente al eje del motor un par de carga $T_L = 40$ Nw-m, que corresponde aproximadamente al de plena carga.

- Hállense los valores finales en régimen permanente: 1.º, de la velocidad del motor, y 2.º, de la corriente en el inducido del mismo.
- Hállense los valores iniciales ($t = 0 +$) de la velocidad y de la corriente en el inducido.
- Hállese la relación de variación inicial de la velocidad y de la corriente en el inducido.
- Hállense las ecuaciones de la velocidad y de la corriente en el inducido en función del tiempo y trácense las correspondientes curvas.

¿Pueden aplicarse las curvas normalizadas de la Fig. 9-11?

Determinése aproximadamente la velocidad mínima y la intensidad en el inducido máxima.

9-9. Un generador metadinamo de 2 kW, 200 V, del tipo representado en la Fig. 9-14 está accionado por un motor síncrono a 1800 r.p.m.

Sus constantes son:

Resistencia del inductor de control $R_f = 20$ ohm.

Inductancia del mismo $L_{ff} = 2$ henry.

Constante de tensión $K_{qf} = 240$ V/A excit.

Resistencia del inducido $R_{aq} = R_{ad} = 4$ ohm.

Inductancia del mismo $L_{aq} = 1$ henry.

Constante de tensión $K_{dq} = K_{qd} = 60$ V/A.

El generador metadinamo alimenta a 200 V una carga resistiva de 20 ohm.

Hállese la potencia de entrada en el inductor de control, y la amplificación de potencia.

9-10. La tensión aplicada al devanado inductor del generador metadinamo descrito en el problema anterior se mantiene constante a 60 V, y la resistencia de la carga se varía desde cero hasta 25 ohm.

Trácese la característica V/A de salida en régimen permanente.

9-11. Al generador metadinamo del problema 9-9 se le añade un devanado de compensación, con lo que se convierte en una amplidina, y ésta alimenta a 200 V una carga de 20 ohm. Hállese la potencia de entrada en el inductor de control y compárese el resultado con el obtenido en el problema 9-9. Despréciense la resistencia del devanado de compensación.

9-12. Una excitatriz amplidina suministra la corriente de excitación a un generador de continua de 10 kW, 125 V.

Datos de la amplidina

Espiras del inductor de control $N_c = 400$.

Resistencia del mismo $R_c = 40$ ohm.

Inductancia del mismo $L_c = 1,6$ henry.

Constante de tiempo según eje transversal $\tau_q = 0,10$ seg.

Tensión inducida según eje longitudinal = 5 V/ampere-vuelta del devanado de control.

Resistencia del inducido = 5 ohm.

Datos del generador

Resistencia del inductor $R_{fg} = 35$ ohm.

Inductancia del mismo $L_{fg} = 10$ henry.

Constante de tensión inducida = 50 V/A excit.

Resistencia del inducido = 0,075 ohm.

- Calcúlese la función de transferencia $G(j\omega)H(j\omega)$ que relaciona la tensión de salida del generador en vacío y la tensión en el devanado de control de la amplidina.
- Calcúlese el valor complejo de $G(j\omega)H(j\omega)$ a $\omega = 20$ rad/seg. Trácese la curva completa para valores positivos de ω .
- El conjunto se conecta ahora como un sistema de regulación de tensión en circuito cerrado, ¿será el sistema estable sin necesidad de tomar disposiciones para evitar fluctuaciones?
- Supongamos que el sistema es estable de por sí, o ha sido convenientemente estabilizado en forma oportuna. ¿Cuál deberá ser el valor de la tensión constante de referencia para que la tensión de salida del generador en vacío sea de 125 V?
- Manteniendo constante la tensión de referencia al valor en el punto anterior, ¿Cuál será la tensión en bornes del generador cuando la intensidad en su inducido es de 80 A?

9-13. Un metadinamo que carece de devanado en el estator está accionado a velocidad constante. La resistencia de su inducido, medida entre cualquier par de escobillas es $R_a = 0,10$ ohm, y la inductancia, medida de igual forma, $L_a = 0,01$ henry. En un ensayo realizado con el circuito del eje longitudinal abierto y con una tensión constante de 20 V aplicada a las escobillas del eje transversal, se han obtenido en régimen permanente 600 V en los terminales del citado circuito longitudinal. Otro ensayo análogo realizado intercambiando los ejes longitudinal y transversal ha dado el mismo resultado. La saturación magnética es despreciable.

Esta máquina se utiliza a manera de transformador de tensión constante a intensidad constante, para alimentar a intensidad prácticamente uniforme una carga de resistencia variable.

La tensión constante de alimentación, de 600 V, se aplica a las escobillas del eje transversal, y la carga resistiva se conecta a las del eje longitudinal.

Calcúlense las intensidades en régimen permanente en la carga y en la fuente de suministro, cuando la tensión aplicada a la carga es de 600 V.

Máquinas de corriente alterna, período transitorio y dinámica

Tal como se ha visto ya, la conversión de la energía por procedimientos electromagnéticos está relacionada con el almacenamiento de energía en los campos magnéticos. Cuando se produce un cambio en las condiciones operativas existentes, no es posible que las correspondientes variaciones en la energía magnética almacenada ocurran instantáneamente, sino que por el contrario transcurre un cierto período transitorio hasta que se estabiliza la situación en las nuevas condiciones impuestas. Muy frecuentemente debe tenerse en cuenta la liberación o absorción de energía por parte de masas en movimiento además de la correspondiente a los campos magnéticos, es decir, que en general se trata de transitorios electromecánicos más que de transitorios eléctricos simplemente.

Siendo este asunto muy extenso, el presente capítulo es sólo una introducción al estudio de la dinámica y fenómenos transitorios de las máquinas de alterna.

Primeramente trataremos de los transitorios eléctricos en máquinas síncronas, basándonos principalmente en consideraciones físicas semi-intuitivas que extenderemos seguidamente a las máquinas de inducción, estudiando finalmente la dinámica de ambos tipos.

10-1. FENOMENOS TRANSITORIOS EN MAQUINAS SINCRONAS: CIRCUITOS ACOPLADOS

La gran complejidad de los fenómenos asociados al período transitorio de las máquinas síncronas puede apreciarse observando los principales detalles estructurales de las mismas con objeto de descubrir cuáles son los circuitos en los que las condiciones transitorias prevalecen sobre las permanentes: para ello nos valdremos de la representación esquemática de la Fig. 10-1. En ella se han incluido los circuitos de amortiguación del rotor porque pueden tener una importancia fundamental; se ha representado un rotor de polos salientes

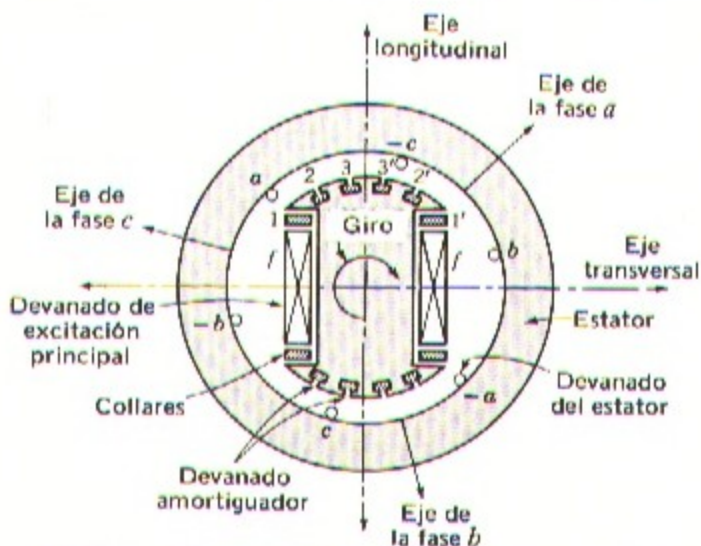


Fig. 10-1. Representación esquemática de una máquina síncrona, con los circuitos que influyen en los transitorios.

para resaltar la diferencia entre el eje polar o longitudinal y el de cuadratura o transversal, diferencia que cuando se consideran los transitorios existe también en las máquinas de rotor cilíndrico, de forma que el estudio de ambas variantes es prácticamente el mismo.

En condiciones equilibradas y permanentes, la onda de f.m.m. del devanado del estator y su correspondiente onda de flujo giran a la misma velocidad que el rotor, y su magnitud es constante. Por consiguiente, el flujo concatenado con el devanado del rotor no varía con el tiempo, no induciéndose en el mismo tensión alguna. Efectivamente, el único circuito del rotor que requiere ser considerado es el de su devanado principal, y su excitación viene determinada simplemente por la ley de Ohm.

En condiciones transitorias pueden existir en todos los circuitos del rotor intensidades que varíen con el tiempo. Asimismo, las intensidades en el estator no serán ya senoidales de amplitud constante, y en consecuencia tampoco lo serán las ondas de la componente de f.m.m. y de flujo en el espacio. Asimismo debe tenerse en cuenta la posibilidad de que la velocidad mecánica del rotor varíe con el tiempo, dando como consecuencia el que los flujos concatenados con sus devanados no se mantengan constantes originándose corrientes inducidas en todos ellos: la intensidad en el devanado principal, por ejemplo, no obedece ya simplemente a la ley de Ohm. Todas estas corrientes, como es natural, repercuten sobre la excitación de la máquina, ya que intervienen en el flujo en el entrehierro, y por consiguiente influyen sobre los valores instantáneos de la intensidad en el estator. Durante este período puede considerarse la máquina como un grupo de varios circuitos acoplados mutuamente, con lo que se puede ir formando una idea aproximada de los problemas transitorios.

En la Fig. 10-1 existe un circuito en el estator para cada una de las tres fases a , b , y c , y existen también los circuitos del rotor correspondientes al devanado de excitación, a las

barras 2-2' y 3-3' del devanado amortiguador, y a los anillos 1-1' que guían el campo, pudiéndose formar también un circuito rotórico equivalente con los pernos y el hierro que constituyen su estructura. De igual forma, las máquinas de rotor cilíndrico pueden tener también otros circuitos además del devanado principal, especialmente en el eje transversal en donde el hierro del propio rotor puede formar un circuito equivalente casi tan efectivo para las corrientes inducidas como el del campo principal.

Todos estos circuitos tienen su resistencia y autoinducción propias así como inductancias mutuas respecto a todos los demás. Para complicar todavía más las cosas, las autoinducciones y las inducciones mutuas relacionadas con los circuitos del estator, lejos de ser constantes son función de la posición del rotor, variando periódicamente con la rotación de éste. Afortunadamente, la autoinducción de los circuitos del rotor y la inductancia mutua entre ellos puede considerarse constante si se prescinde del efecto de las ranuras y dientes del estator. En vista de todas estas complejidades no se han intentado incluir los efectos de la saturación, histéresis ni corrientes parásitas en el análisis básico del período transitorio de máquinas síncronas. Para simplificar algo los problemas, los análisis se reducen normalmente a los de máquinas que contengan en el rotor, además del devanado principal, un solo circuito efectivo en el eje longitudinal y otro en el eje transversal: dicho de otra forma, que contengan sólo un circuito amortiguador equivalente en cada eje.

El análisis básico del período transitorio de máquinas síncronas supone la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas de los circuitos acoplados. Idealizando la máquina, las relaciones entre flujos concatenados e intensidades son lineales, y debido a la simetría geométrica de su constitución, algunos de los coeficientes de autoinducción y de inducción mutua puede admitirse que son del mismo valor. No obstante, la resolución de las ecuaciones, aún con un circuito único de amortiguación en cada eje, es sumamente laboriosa, no debido precisamente a cuestiones de fondo, sino por la gran complicación de detalles. Puede aligerarse notablemente la resolución mediante una transformación lineal de las variables en la que las tres intensidades de las fases del estator i_a , i_b e i_c se reemplazan por tres intensidades componentes: la *componente longitudinal* i_d , la *componente transversal* i_q y una componente monofásica i_0 denominada *componente de secuencia nula*. Para las tensiones y los flujos concatenados se realiza una transformación análoga. Operando en régimen permanente y en condiciones equilibradas i_0 en nula (no se estudiará en este capítulo el significado de i_0 ya que en él sólo veremos con algún detalle el caso de funcionamiento equilibrado): el significado físico de las componentes longitudinal y transversal es el mismo ya visto en el Capítulo 6. De hecho, la idea de esta transformación de variables surge de extender la imagen física de la teoría de las dos reacciones en régimen permanente. Los cambios de variables permiten escribir las ecuaciones simultáneas en forma razonablemente compacta, relacionando cada una de ellas únicamente variables en el mismo eje. Además, permiten al conocimiento de ciertas combinaciones de las constantes de la máquina a las que se recurre frecuentemente, como sucede con las reactancias y constantes de tiempo que se estudian en los cuatro apartados siguientes. Los análisis basados en estas ecuaciones diferenciales son aplicables a problemas relativos a una máquina única, una máquina única y una red de potencia infinita o a un sistema simple formado por dos máquinas.

Para la aplicación práctica de la teoría de los transitorios de una máquina hay que tener en cuenta que una máquina síncrona no es en manera alguna el único elemento que interviene en los problemas de un sistema corriente. En general existe un apreciable número de otros elementos, tales como máquinas con distintas constantes interconectadas a través de una complicada red, entre sí y con diversas cargas. Además, la excitación principal de cada generador se alimenta de una excitatriz en cuyo circuito de excitación existe generalmente un regulador automático de tensión que acusa las perturbaciones que se puedan presentar, alterándose con ello las condiciones del campo; pero aún hay más; los reguladores de los motores primarios pueden también influir profundamente en el funcionamiento del conjunto. Todas estas consideraciones indican claramente la necesidad de disponer de medios sencillos para estudiar el funcionamiento transitorio de una máquina síncrona. Para ello es conveniente poder representar la máquina, como un elemento del sistema, por medio de un circuito equivalente simple, representación que no difiere de la dada por la reactancia síncrona en régimen permanente. El procedimiento actualmente empleado consiste en caracterizar la máquina por unas pocas reactancias y constantes de tiempo. Las reactancias permiten calcular las magnitudes de las intensidades transitorias, y las constantes de tiempo su amortiguación. Para este método es primordial la consideración de los circuitos acoplados, pero siendo necesarias ciertas simplificaciones y aproximaciones se hace imprescindible relacionarlo con los resultados obtenidos en los ensayos y con una imagen física correcta.

10-2. FENÓMENOS TRANSITORIOS EN MÁQUINAS SÍNCRONAS IMAGEN FÍSICA APROXIMADA

Uno de los detalles importantes para ir formando una imagen física que permita interpretar los resultados transitorios de los ensayos es el del manejo adecuado de la resistencia de los circuitos: prescindiendo totalmente de las resistencias se simplifica enormemente el problema. En este caso, y no existiendo capacidad, el flujo total concatenado con cualquier circuito cerrado del rotor no puede variar al presentarse una perturbación, sino que por el contrario se mantiene constante a su valor inicial. Esta constancia es debida al hecho de que si variase el flujo concatenado en cualquiera de dichos circuitos, necesariamente aparecería en él una tensión inducida lo que estaría en contradicción con la ley de Kirchhoff. Cualquier variación rápida que tienda a modificar el flujo concatenado, como puede ser un aumento repentino de la corriente en el estator a consecuencia de un cortocircuito, queda seguidamente contrarrestada por una corriente inducida de valor apropiado para mantener la constancia del flujo a pesar de dicha variación. El cálculo de las intensidades subsiguientes a una perturbación se reduce simplemente a hallar los distintos valores de los flujos concatenados en las condiciones iniciales especificadas antes de producirse dicha perturbación y resolver las ecuaciones de los circuitos acoplados, en el bien entendido que tales valores deben conservarse los mismos después de la perturbación.

Las ecuaciones que intervienen son algebraicas en lugar de diferenciales, y siendo la resistencia nula las corrientes inducidas resultantes no se extinguen con el tiempo.

Naturalmente, en la práctica ni el resultado de los ensayos ni el sentido común permiten aceptar la idea de que las corrientes inducidas no desaparecen con el tiempo; sin embargo, el empleo práctico del método está justificado por el hecho de que si bien todos los circuitos tienen alguna resistencia, de forma que el flujo a través de cualquiera de ellos variará, la mayor parte de los existentes en las máquinas síncronas son de resistencia suficientemente baja como para que en el primer instante sucesivo a la perturbación las cosas suceden casi de igual forma que si la resistencia fuera nula. Partiendo de esta base, las corrientes y los flujos concatenados iniciales subsiguientes a un cambio súbito están determinados por un grupo de reactancias dispuestas como si no existiera resistencia alguna: el decaimiento o amortiguación de estas intensidades y flujos se determinan valiéndose de una serie de constantes de tiempo deducidas de las resistencias y de las reactancias de los circuitos. El procedimiento es por tanto aproximado, ya que las resistencias intervienen sólo indirectamente en la solución, pero sin embargo es de gran eficacia práctica puesto que únicamente por este medio pueden tratarse los problemas de sistemas complicados comprendiendo varias máquinas.

Este planteamiento conduce a una idea física de lo que sucede en el interior de la máquina, relacionada directamente con los resultados de los ensayos. Consideremos un generador síncrono funcionando a su velocidad de sincronismo y con una tensión constante en los anillos rozantes. Además del circuito de excitación principal, las barras de amortiguación forman otro circuito rotórico efectivo según el eje longitudinal. En un principio la máquina está funcionando descargada, y súbitamente se produce un cortocircuito trifásico en sus bornes. En la Fig. 10-2 puede verse la gráfica simétrica de la onda de

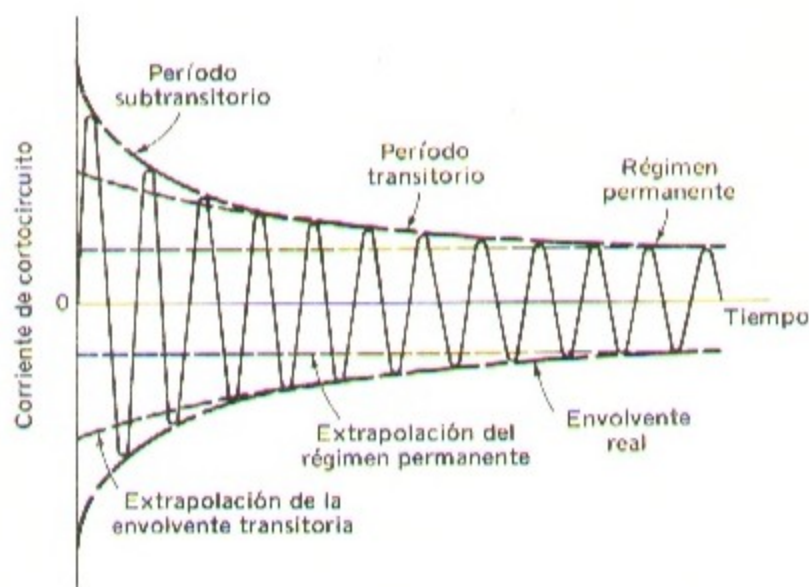


Fig. 10-2. Corriente de cortocircuito simétrica en máquinas síncronas.

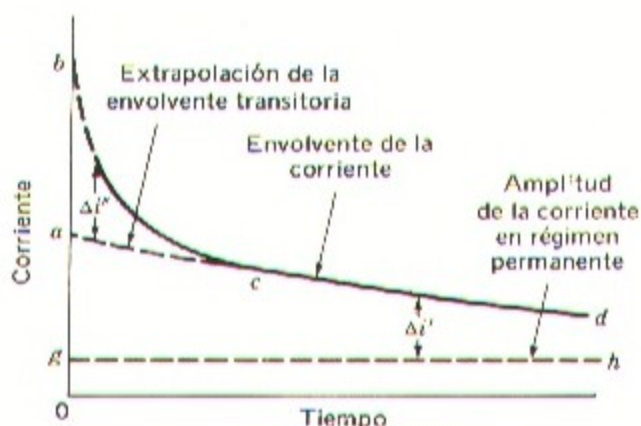


Fig. 10-3. Envolvente de la corriente de cortocircuito simétrica de una máquina síncrona.

corriente de cortocircuito en el estator tal como se obtiene con un oscilógrafo. La curva, cuya envolvente puede verse en la Fig. 10-3, puede considerarse dividida en tres tiempos o períodos de régimen: el *período subtransitorio*, que abarca únicamente unos pocos ciclos iniciales, durante el cual la intensidad decrece muy rápidamente; el *período transitorio*, que abarca un tiempo relativamente más largo, durante el cual el decrecimiento de la intensidad es más moderado, y por último el *período de régimen permanente* en el cual la corriente se determina por los principios expuestos en los capítulos 4 y 6.

Ya que los tres períodos se suceden y relacionan con una envolvente casi exponencial, la amortiguación puede representarse correctamente en una gráfica semilogarítmica. La diferencia $\Delta i'$ (Fig. 10-3) entre la envolvente transitoria y el valor en régimen permanente se sitúa en función del tiempo en una escala logarítmica, como se muestra en la Fig. 10-4. De igual forma se ha trazado en la misma Fig. 10-4 la diferencia $\Delta i''$ entre la envolvente

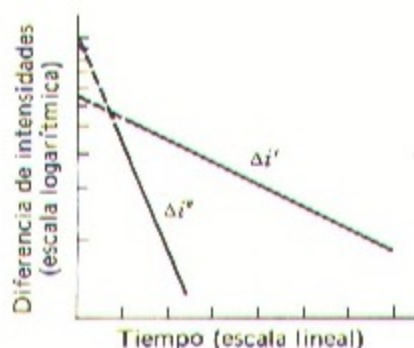


Fig. 10-4. Diferencias de intensidades, trazadas en coordenadas semi-logarítmicas.

del período subtransitorio y la extrapolación de la del período transitorio. Si el trazado se realiza cuidadosamente, ambas curvas son muy aproximadamente dos rectas demostrando así la naturaleza esencialmente exponencial de la amortiguación.

Podemos formarnos una imagen física de lo que ocurre durante estos períodos recordando que durante un cortocircuito, y siendo nula la resistencia del circuito del estator, la onda de f.m.m. de éste está orientada en el eje longitudinal de la máquina, y por tanto los circuitos del rotor y sus flujos concatenados según ese mismo eje son de importancia determinante.

Los flujos concatenados con el devanado de excitación principal deberán conservarse constantes a su valor inicial determinado por la inductancia y por la corriente de excitación antes de producirse el fallo, y esta constancia deberá mantenerse frente a la f.m.m. desmagnetizante del estator que acompaña a la corriente de cortocircuito según la Fig. 10-2. Para contrarrestar esta f.m.m. desmagnetizante deberá aparecer una componente inducida de la corriente de excitación, tal como se indica en la Fig. 10-5, y ésta es la que determina el estado de la corriente del estator durante el período transitorio: esto representa simplemente una excitación en la máquina mayor que la existente en régimen permanente con la consecuencia de que la intensidad en el estator durante el período transitorio es también mayor que en régimen permanente. La corriente de excitación inducida, al no estar sostenida por ninguna tensión aplicada al correspondiente circuito, desaparece a un ritmo fijado por la resistencia del circuito inductor y por su inductancia equivalente: asimismo, la sobreintensidad en el estator desaparece a igual ritmo. Las constantes transitorias de tiempo pueden deducirse de las curvas envolventes de las Figs. 10-2 a 10-4.

Pero el devanado de excitación principal no es el único circuito rotórico según el eje longitudinal. El flujo concatenado con el devanado amortiguador debe conservarse también constante al valor inicial que tenía, determinado éste por su inductancia mutua respecto al devanado principal y por la corriente de excitación antes del cortocircuito, e igual que antes esta constancia de flujo debe mantenerse frente a la f.m.m. desmagnetizante debida a la corriente de cortocircuito en el estator (Fig. 10-2), y por consiguiente deberá nacer súbitamente una corriente de amortiguación inducida que determina el andamio de la corriente del estator durante el período subtransitorio: esto supone que la excitación durante el período subtransitorio es mayor que en el período transitorio y

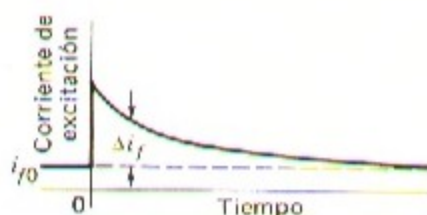


Fig. 10-5. Forma aproximada de la corriente de excitación de una máquina síncrona, seguidamente a un cortocircuito en el circuito inducido.

por tanto la intensidad del estator también será mayor en el primero que en el segundo de los dos períodos citados. La corriente amortiguadora inducida desaparece a un ritmo dependiente de la resistencia del circuito amortiguador y de su inductancia equivalente: también desaparece al mismo ritmo el correspondiente incremento de intensidad en el estator.

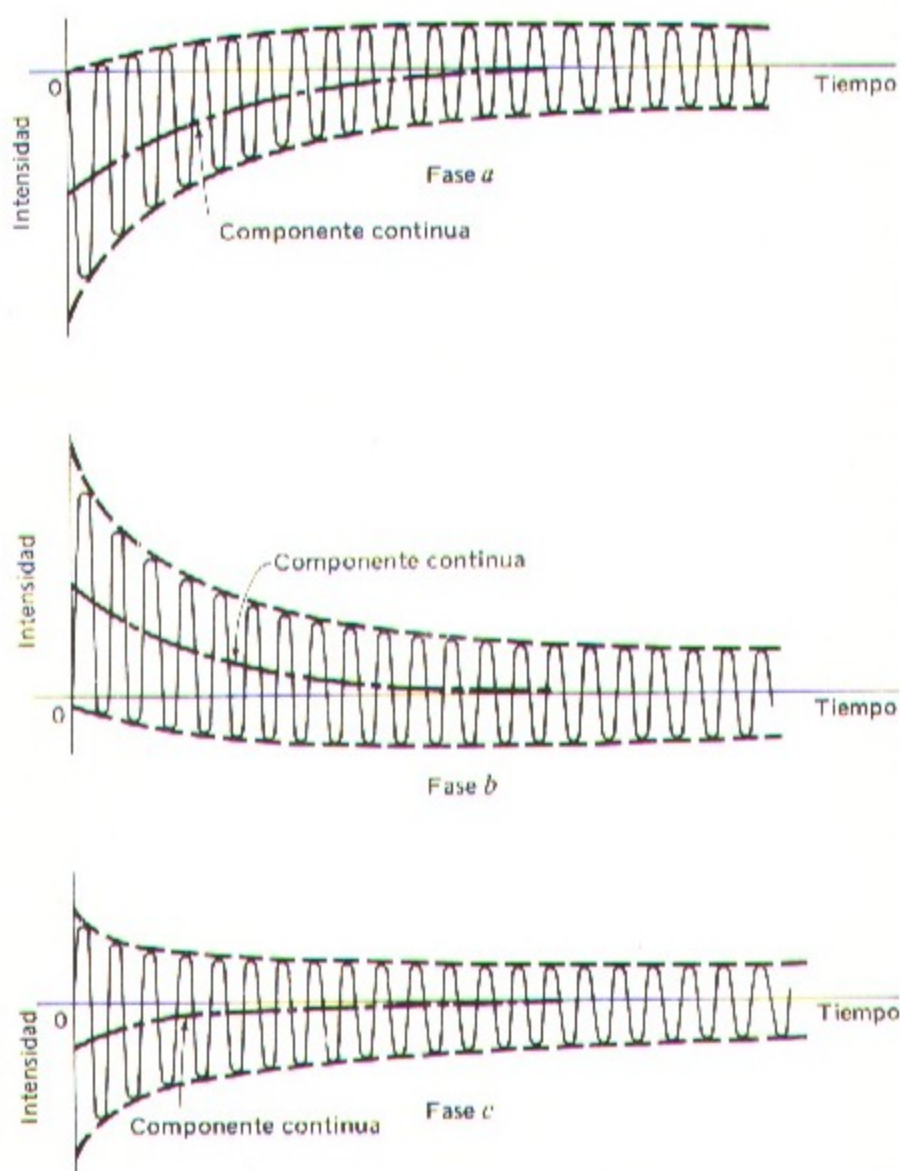


Fig. 10-6. Corrientes de cortocircuito en las tres fases de una máquina síncrona.

Siendo la relación resistencia inductancia equivalente del circuito de amortiguación relativamente alta frente a la del circuito de excitación, la corriente decrece mucho más rápidamente durante el período subtransitorio que durante el transitorio. Las constantes subtransitorias de tiempo pueden deducirse de la envolvente de las curvas de las Figs. 10-2 a 10-4.

El oscilograma de la Fig. 10-2, en el que la onda de intensidad es simétrica, debe considerarse como caso particular más bien que como caso general, pues los oscilogramas resultantes de un cortocircuito tienen normalmente la forma representada en la Fig. 10-6, en la que las curvas no son simétricas respecto al eje de intensidad nula, sino que en ellas aparece una componente de corriente continua bien definida que motiva su asimetría. Puede conseguirse un trazado simétrico como el de la Fig. 10-2 dibujando nuevamente las ondas asimétricas restándoles la componente continua, o bien obteniendo una serie de oscilogramas hasta que aparezca en alguna de las tres fases una onda simétrica.

La componente continua de la corriente del estator encaja bien en la imagen física si se tiene en cuenta que la constancia de flujo concatenado es igualmente válida para cualquiera de los tres devanados sin resistencia de cada una de las fases. Si el cortocircuito se produce en el momento en que el flujo concatenado con una de las fases del estator es nulo, no se requerirá ninguna componente continua para mantenerlo constante y la onda de corriente de cortocircuito de esa fase será simétrica. Si por el contrario, en el momento de producirse el cortocircuito los flujos concatenados por las fases no son nulos deberán aparecer en ellas las componentes continuas necesarias para mantenerlos constantes.

La componente continua desempeña efectivamente el mismo papel que la componente continua transitoria en un circuito RL sencillo cuando se le aplica súbitamente una tensión alterna. Al igual que en el circuito RL , el mayor valor posible de la componente continua es igual al mayor valor instantáneo de la corriente de cortocircuito durante el período subtransitorio y este máximo valor se alcanza cuando el cortocircuito se produce en el instante en que el flujo concatenado por una de las fases pasa por un máximo; en este caso la onda correspondiente de intensidad de cortocircuito queda completamente descentrada y a un lado del eje del cero. Esta componente continua, al no estar sostenida por ninguna tensión en el estator va perdiéndose a un ritmo que depende de la resistencia y de la inductancia equivalente del circuito del estator. La componente continua de la corriente del estator crea una componente de campo magnético en el entrehierro, fija en el espacio, y que por consiguiente induce una tensión y una intensidad a la frecuencia fundamental en los devanados rotativos del rotor. En la Fig. 10-7 se ha representado la

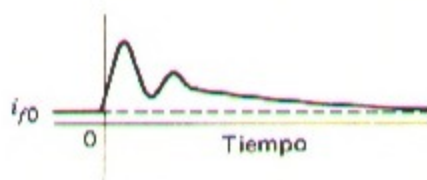


Fig. 10-7. Corriente de excitación después de un cortocircuito en el circuito inducido.

componente de alterna que se superpone a la corriente de excitación inmediatamente a continuación de haberse producido un cortocircuito trifásico en los bornes del estator; en esta misma figura puede verse que contrariamente a lo que sucedía en la representación aproximada de la Fig. 10-5, la corriente de excitación no puede variar repentinamente en el instante inicial. Como se verá en el capítulo 11, el campo pulsatorio engendrado por estas corrientes monofásicas puede descomponerse en dos campos giratorios opuestos uno de ellos es estacionario con respecto al estator y reacciona contra la componente continua de la corriente en el mismo; el otro gira respecto a los devanados del estator a velocidad doble que la de sincronismo, induciendo en ellos un segundo armónico.

Si el circuito del estator no está equilibrado, por haberse producido por ejemplo un cortocircuito entre dos fases o entre fase y neutro en lugar de un cortocircuito trifásico equilibrado, pueden aparecer armónicos superiores tanto en la corriente del rotor como en la del estator debido a las sucesivas reflexiones en uno y otro sentido a través del entrehierro. También se introducen armónicos por la componente alterna de la corriente del estator si no está el sistema equilibrado. En consecuencia, en caso de cortocircuito no equilibrado en los bornes de la máquina la forma de las ondas puede ser substancialmente distinta de las representadas en las Figs. 10-2 y 10-5. Si el cortocircuito se origina en puntos apartados de los bornes de la máquina, los armónicos pueden quedar muy reducidos debido a las reactancias que intervienen. En muchas aplicaciones industriales se prescinde de los armónicos, por lo que también prescindiremos de ellos en los análisis que siguen, así como tampoco tendremos en cuenta el desequilibrio entre los circuitos del estator.

10-3. REACTANCIAS Y CONSTANTES DE TIEMPO EN MÁQUINAS SINCRONAS

Basándose en las consideraciones físicas anteriormente expuestas es posible fijar el funcionamiento de una máquina inicialmente en vacío inmediatamente después de un cortocircuito trifásico directo en sus bornes, mediante tres reactancias y tres constantes de tiempo. La reactancia sincrónica longitudinal x_d determina la corriente de cortocircuito en régimen permanente. La *reactancia transitoria longitudinal* x'_d por definición define el valor inicial Oa de la envolvente transitoria simétrica acd (Fig. 10-3): su valor es igual al de la tensión eficaz en vacío antes del cortocircuito, dividido por $Oa/\sqrt{2}$, apareciendo el factor $\sqrt{2}$ por el hecho de que acd es la envolvente de los valores punta de la intensidad. La *constante de tiempo transitoria longitudinal* de cortocircuito T'_d determina la amortiguación de la envolvente transitoria acd ; su valor es igual al del tiempo necesario para que dicha envolvente decaiga hasta el punto en el que la diferencia entre ella y la de régimen permanente gh sea $1/e$ o bien 0,368 de la diferencia inicial ga . La *reactancia longitudinal subtransitoria* x''_d determina el valor inicial Ob de la envolvente subtransitoria simétrica bc (Fig. 10-3); su valor es igual al de la tensión eficaz en vacío antes del cortocircuito dividido por $Ob/\sqrt{2}$, apareciendo el factor $\sqrt{2}$, como antes, debido a que bc es la envolvente de los valores de punta de la corriente. La *constante de tiempo subtransitoria longitudinal* de cortocircuito T''_d determina la amortiguación de la envolvente subtransitoria bc , y es igual al tiempo requerido para que dicha envolvente subtransitoria alcance el

punto en el que la diferencia entre ella y la transitoria acd sea $1/e$ o bien 0,368 de la diferencia inicial ab . El valor inicial de la componente de continua, o descentramiento de la onda de corriente, visible en la Fig. 10-6, depende del momento del ciclo en que ocurre el cortocircuito: su valor máximo posible es igual a la amplitud Ob de punta de la corriente subtransitoria simétrica. La *constante de tiempo del estator* T_a se define como la determinante de la amortiguación de la componente continua, y su valor es igual al tiempo necesario para que dicha componente descienda hasta $1/e$ o bien 0,368 de su valor inicial. (En este capítulo se emplea el símbolo T para las constantes de tiempo de conformidad con las notaciones normalizadas. Contrariamente a lo que ocurría en el capítulo 9 en el que se empleó la notación τ , aquí prácticamente no existe posibilidad de confusión con el par).

Estas reactancias son constantes de la máquina, apropiadas para su empleo no solamente en caso de cortocircuitos trifásicos en bornes de una máquina en vacío sino también en casos que supongan una variación brusca de la corriente, lo que se pone de manifiesto en la propia definición convencional de ellas, que se formula basándose en una corriente aplicada súbitamente. Tales definiciones son:

- **Reactancia longitudinal transitoria:** es la relación existente entre la componente fundamental de la tensión reactiva en el inducido debida a la componente fundamental de la corriente alterna longitudinal en el mismo, y esta última componente, al aplicarse súbitamente una carga; todo ello a la frecuencia nominal.

El valor de la corriente debe determinarse por extrapolación de la envolvente de los valores de la componente de alterna hasta el instante de aplicación repentina de la carga, despreciando la amortiguación rápida durante los primeros ciclos.

- **Reactancia longitudinal subtransitoria:** es la relación existente entre la componente fundamental de la tensión reactiva en el inducido debida al valor inicial de la componente fundamental de la corriente alterna longitudinal en el mismo y esta última componente al aplicarse súbitamente una carga, con la frecuencia nominal.

Las constantes de tiempo T_d' , T_d'' y T_a sólo pueden aplicarse en el caso de cortocircuitos trifásicos que se produzcan en los mismos bornes de la máquina: si existe alguna impedancia exterior, la amortiguación de las corrientes inducidas depende no sólo de la autoinducción e inducciones mutuas de la máquina en sí misma, sino también de las constantes del circuito exterior. Sin embargo, existen procedimientos sencillos para ajustar adecuadamente las constantes de tiempo ante la presencia de reactancias exteriores.

Hasta ahora hemos considerado únicamente lo que sucede en el eje longitudinal porque en un cortocircuito trifásico en las condiciones supuestas sobre una red puramente reactiva sólo intervienen cantidades longitudinales. Cuando la máquina tiene antes de la perturbación una carga activa, intervendrán también magnitudes transversales ya que es de esperar que se produzcan variaciones en la corriente transversal i_q , y la constancia de los flujos concatenados con los circuitos en cuadratura deberá mantenerse frente a estos cambios. Cuando hay que incluir estos aspectos deberán tenerse en cuenta: la *reactancia transitoria* x_q' , la *reactancia subtransitoria* x_q'' , la *constante de tiempo transitoria de corto-*

circuito T_q' , y la constante de tiempo subtransitoria de cortocircuito T_q'' , todas ellas transversales. Todas estas reactancias y constantes de tiempo guardan respecto a los fenómenos en el eje transversal la misma relación que las longitudinales respecto al eje longitudinal. De hecho pueden aplicarse a x_q' y x_q'' las mismas definiciones que a x_d' y x_d'' substituyendo simplemente la palabra *longitudinal* por la palabra *transversal*.

En una máquina normal no existe ningún devanado de excitación en el eje transversal, y los circuitos del rotor según el mismo estarán formados por las barras amortiguadoras o por el hierro en el eje interpolar del propio rotor en las máquinas que lo tienen cilíndrico. Si no existen circuitos efectivos en el rotor según el eje transversal, x_q , x_q' y x_q'' serán iguales entre sí. Si el circuito transversal está formado por las barras amortiguadoras en una máquina de polos salientes, las corrientes inducidas son de orden subtransitorio, siendo $x_q' = x_q$ y siendo x_q'' de menor valor: si dicho circuito transversal está formado por el hierro interpolar en una máquina de rotor cilíndrico macizo, las corrientes inducidas, normalmente son más de orden transitorio que subtransitorio, siendo x_q' y x_q'' casi iguales e inferiores que x_q . En un turboalternador de rotor cilíndrico macizo, el hierro interpolar constituye un circuito efectivo para las corrientes inducidas, al igual que el devanado de excitación principal lo hace en el eje longitudinal: x_q' y x_d' son aproximadamente iguales.

En la tabla 10-1 se recopilan los valores clásicos de las constantes correspondientes a distintos tipos de máquinas síncronas: las reactancias están expresadas en valores relativos tomando como base los valores nominales de la máquina. Para una determinada máquina en particular puede existir una discreta desviación en más o en menos respecto a los valores dados en la tabla.

TABLA 10-1
CONSTANTES DE UNA MAQUINA: VALORES TIPICOS

(Los valores de las reactancias son valores relativos, con los nominales de la máquina como base. Las constantes de tiempo están en segundos)

Constante	Generadores de rotor cilíndrico		Generadores de polos salientes	Motores de polos salientes	Condensadores síncronos
	Rotor macizo	Rotor laminado			
x_d	1,10	1,10	1,00	1,10	1,60
x_d'	0,20	0,20	0,35	0,50	0,60
x_d''	0,10	0,10	0,23	0,35	0,25
x_q	1,00	1,00	0,65	0,80	1,00
x_q'	0,20	1,00	0,65	0,80	1,00
x_q''	0,15	0,25	0,65	0,40	0,30
T_d'	1,0	1,0	1,8	1,4	2,0
T_d''	0,035	0,035	0,035	0,035	0,035
T_a	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15

10-4. CIRCUITO EQUIVALENTE EN CONDICIONES TRANSITORIAS

Utilizando el concepto de flujos concatenados constantes pueden escribirse las ecuaciones de los circuitos acoplados correspondientes a la definición convencional de la reactancia longitudinal transitoria x'_d a partir de las cuales puede valorarse dicha x'_d en función de las inductancias mutuas y de dispersión. De esta valoración puede deducirse un circuito equivalente sencillo para x'_d y las constantes de tiempo transitorias pueden interpretarse en relación con dicho circuito. Basándose en estos resultados, realmente pueden extenderse los conceptos para su aplicación al caso de un cortocircuito cuando existe una reactancia exterior entre él y los bornes de la máquina.

Para reproducir las condiciones de la definición convencional de x'_d consideremos una máquina síncrona girando en vacío a la velocidad de sincronismo sin corriente de excitación inicial pero con los anillos rozantes cortocircuitados de tal forma que el circuito de excitación quede cerrado. El despreciar la fuerte amortiguación en los primeros pocos ciclos equivale a prescindir de todos los circuitos longitudinales del rotor a excepción del de excitación principal. Se trata ahora de aplicar súbitamente una corriente longitudinal y determinar la tensión en bornes resultante.

Sea L_f la inductancia de dispersión del devanado de excitación, L_d la inductancia de dispersión del devanado inducido y M_d la inductancia mutua según el eje longitudinal entre los dos devanados citados. Los términos L_d y M_d corresponden a la reactancia de dispersión x_d del inducido y a la reactancia longitudinal magnetizante $x_{\phi d}$ para la corriente del inducido en régimen permanente a la frecuencia fundamental. Obsérvese que cuando las corrientes del estator están equilibradas, $x_{\phi d}$ y por tanto M_d incluyen el efecto de las tres fases del mismo. Obsérvese también que para la reactancia de dispersión del inducido hemos empleado aquí el símbolo x_d en lugar de x_f como se empleó en los capítulos 4 y 6, habiéndose realizado este cambio para poder diferenciar mejor entre la dispersión en el estator, designada con el subíndice a y la del rotor designada con el subíndice f .

En un momento dado en el que la corriente de excitación y la corriente longitudinal del estator tienen respectivamente los valores i_f e i_d , los flujos concatenados con el devanado de excitación son:

$$\lambda_f = (L_f + M_d)i_f - M_d i_d \quad (10-1)$$

Por convención de signos, un valor positivo de i_d actúa sobre el flujo concatenado en sentido opuesto al que actúa un valor positivo de i_f . Asimismo, el fenómeno es observado desde el estator, y así, todos los valores están reducidos a su devanado.

Pero inicialmente λ_f es nulo y por tanto, en ausencia de resistencias, deberá conservarse nulo en todos los instantes subsiguientes. Por consiguiente, cuando aparece un valor de i_d distinto de cero, deberá aparecer al mismo tiempo una corriente de excitación inducida dada por:

$$i_f = \frac{M_d}{L_f + M_d} i_d \quad (10-2)$$

Es decir, que si i_d varía senoidalmente con el tiempo, i_f visto desde el estator también deberá variar senoidalmente con el tiempo. Esta variación senoidal de i_f corresponde a una corriente continua en el devanado inductor real, ya que una corriente de excitación continua más la rotación del rotor aparece, visto desde el estator, como una corriente alterna.

De forma semejante, el flujo longitudinal concatenado con los devanados del estator es

$$\lambda_d = M_d i_f - (L_a + M_d) i_d \quad (10-3)$$

y substituyendo en ésta i_f por el valor dado en la ecuación 10-2 tendremos:

$$\lambda_d = - \left(L_a + M_d - \frac{M_d^2}{L_f + M_d} \right) i_d \quad (10-4)$$

Pero i_d varía senoidalmente siendo I_d su valor eficaz, y así el valor eficaz del flujo concatenado será:

$$\Lambda_d = \left(L_a + M_d - \frac{M_d^2}{L_f + M_d} \right) I_d \quad (10-5)$$

y el valor eficaz de la correspondiente tensión longitudinal:

$$\omega \Lambda_d = \left(\omega L_a + \omega M_d - \frac{\omega^2 M_d^2}{\omega L_f + \omega M_d} \right) I_d \quad (10-6)$$

Y, por tanto, de acuerdo con la definición convencional, x'_d valdrá

$$x'_d = \frac{\omega \Lambda_d}{I_d} = \omega L_a + \omega M_d - \frac{\omega^2 M_d^2}{\omega L_f + \omega M_d} \quad (10-7)$$

$$= x_a + x_{\varphi d} - \frac{x_{\varphi d}^2}{x_f + x_{\varphi d}} \quad (10-8)$$

$$= x_d - \frac{x_{\varphi d}^2}{x_f + x_{\varphi d}} \quad (10-9)$$

en las que $x_f = \omega L_f$ es la reactancia de dispersión del rotor reducida al estator.

Mediante transformaciones algebraicas, la ecuación 10-8 puede escribirse también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x'_d &= \frac{x_a x_f + x_a x_{\varphi d} + x_{\varphi d} x_f + x_{\varphi d}^2 - x_{\varphi d}^2}{x_f + x_{\varphi d}} \\ &= x_a + \frac{x_{\varphi d} x_f}{x_{\varphi d} + x_f} \end{aligned} \quad (10-10)$$

Esta última ecuación evidencia que x'_d está compuesta de la reactancia de dispersión del estator más la reactancia de dispersión del rotor modificada.

Es la forma general corrientemente empleada para el cálculo de x'_d a partir de los datos del proyecto.

Teniendo x'_d calculada en función de las reactancias mutuas y de dispersión puede demostrarse que es la reactancia que determina el valor inicial de la corriente de cortocircuito en una máquina que carezca de devanado amortiguador.

Antes de producirse la perturbación, estando la máquina en vacío y siendo i_{f0} la corriente de excitación, el flujo en el rotor es, según la ecuación 10-1, y siendo $i_d = 0$.

$$\lambda_{f0} = (L_f + M_d)i_{f0} \quad (10-11)$$

valor que debe mantenerse constante al producirse el cortocircuito, de forma que:

$$(L_f + M_d)\dot{\lambda}_f - M_d i_d = (L_f + M_d)\dot{\lambda}_{f0} \quad (10-12)$$

o sea

$$i_f = i_{f0} + \frac{M_d}{L_f + M_d} i_d \quad (10-13)$$

El segundo término del segundo miembro de la ecuación 10-13 es la componente inducida de la corriente de excitación necesaria para mantener invariado el flujo.

La sustitución de la ecuación 10-13 en la 10-3 da el siguiente valor del flujo longitudinal concatenado

$$\lambda_d = M_d i_{f0} - \left(L_a + M_d - \frac{M_d^2}{L_f + M_d} \right) i_d \quad (10-14)$$

En condiciones de cortocircuito, prescindiendo de la componente de continua y de todos los armónicos, λ_d debe ser igual a cero a fin de que la tensión en bornes pueda ser también igual a cero.

De esta forma, la ecuación 10-14 se convierte en:

$$i_d = \frac{M_d i_{f0}}{L_a + M_d - \left(\frac{M_d^2}{L_f + M_d} \right)} = \frac{x_{\varphi d} i_{f0}}{x'_d} \quad (10-15)$$

Pero el valor eficaz de $x_{\varphi d} i_{f0}$ es también el valor eficaz E'_i de la tensión en bornes antes de la perturbación como puede comprobarse multiplicando la ecuación 10-14 por ω , haciendo $i_d = 0$ y poniendo los valores eficaces. De acuerdo con ello, el valor eficaz de la

intensidad de cortocircuito es:

$$I_d = \frac{E'_d}{x'_d} \quad (10-16)$$

cuyo valor queda limitado por la reactancia longitudinal transitoria x'_d .

De la ecuación 10-10 de la reactancia transitoria x'_d , y recordando que la reactancia síncrona x_d es igual a la suma de x_a y $x_{\varphi d}$ puede comprenderse que el circuito equivalente de la Fig. 10-8 del tipo del de un transformador sirve como circuito equivalente para x_d y x'_d . Trabajando la máquina equilibrada y en régimen permanente, la corriente del estator no tiene efecto alguno sobre el circuito del rotor que puede considerarse como si estuviera abierto, y visto desde los bornes del estator la reactancia no es otra que la reactancia síncrona x_d . Durante el período transitorio, la variación de corriente en el estator va acompañada de una corriente inducida en el devanado del rotor, que puede considerarse en cortocircuito, y la reactancia vista desde los bornes del estator será ahora la reactancia transitoria x'_d .

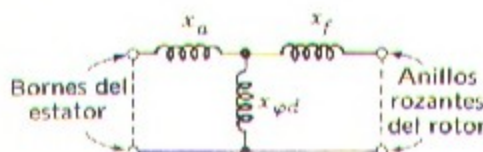


Fig. 10-8. Circuito equivalente tipo transformador de una máquina síncrona.

Con la ayuda de la Fig. 10-8 pueden estudiarse los factores que influyen en la constante de tiempo transitoria. Consideremos primeramente una máquina con su circuito inductor cerrado y el inducido abierto: la constante de tiempo T'_{do} que describe el decaimiento de un transitorio en las condiciones citadas en la *constante de tiempo transitoria longitudinal en circuito abierto*. Los bornes del estator, representados en la Fig. 10-8, están en circuito abierto y los terminales del devanado de excitación en cortocircuito. El transitorio de la excitación queda de esta forma afectado por la autoinducción de la misma, $(x_f + x_{\varphi d})/2\pi f$. Si la resistencia del inductor es r_f , la constante de tiempo será:

$$T'_{do} = \frac{x_f + x_{\varphi d}}{2\pi f r_f} = \frac{L_f + M_d}{r_f} \quad (10-17)$$

Esta constante de tiempo es una característica del circuito inductor solo, y es sencillamente la conocida relación entre la autoinductancia y la resistencia que constituye corrientemente la constante de tiempo de un circuito serie simple.

En el momento del cortocircuito quedan cortocircuitados tanto los bornes del estator como los del rotor. La inductancia equivalente del inductor que afectará a la amortiguación del transitorio será ahora la de x_f más la de $x_{\varphi d}$ y x_a en paralelo, o sea:

$$\begin{aligned}
 \text{Inductancia equivalente del inductor} &= \frac{1}{2\pi f} \left(x_f + \frac{x_a x_{\varphi d}}{x_a + x_{\varphi d}} \right) & (10-18) \\
 &= \frac{x_f + x_{\varphi d}}{2\pi f} \frac{x_a + \frac{x_{\varphi d} x_f}{x_{\varphi d} + x_f}}{x_a + x_{\varphi d}} \\
 &= \frac{x_f + x_{\varphi d}}{2\pi f} \frac{x'_d}{x_d}
 \end{aligned}$$

y la constante de tiempo en cortocircuito será, por tanto:

$$T'_d = \frac{x_f + x_{\varphi d}}{2\pi f r_f} \frac{x'_d}{x_d} = T'_{d0} \frac{x'_d}{x_d} \quad (10-19)$$

Ahora puede verse cuáles son la reactancia y la constante de tiempo que caracterizan la componente transitoria de corriente en un cortocircuito trifásico, existiendo una reactancia exterior x_e entre el punto en que se produce y los bornes de la máquina.

Por lo que a los fenómenos internos de la máquina se refiere, una reactancia exterior equivale a incrementar la reactancia de dispersión del estator desde x_d hasta $x_d + x_e$ y la constante de tiempo transitoria longitudinal en cortocircuito, corregida para una reactancia exterior, será T'_{de} y su valor

$$T'_{de} = T'_{d0} \frac{x'_d + x_e}{x_d + x_e} = T'_d \frac{x_d}{x'_d} \frac{x'_d + x_e}{x_d + x_e} \quad (10-20)$$

La reactancia que determina el valor inicial de la corriente alterna transitoria, evidentemente es $x'_d + x_e$.

10-5. APLICACION A TRANSITORIOS EN SISTEMAS

Cuando se conocen las constantes x_d , x'_d , x''_d , T'_d , T''_d y T_d de la máquina, pueden predecirse con aproximación razonable las corrientes del estator en caso de un cortocircuito trifásico separado por una reactancia exterior x_e de los bornes de una máquina inicialmente en vacío.

Si las tensiones internas de la máquina antes del cortocircuito, correspondientes a las reactancias síncronas, transitoria y subtransitoria son respectivamente E_t , E'_t y E''_t , la

componente simétrica o de alterna de la corriente de cortocircuito será:

$$I_{ac} = \frac{E_i}{x_d' + x_e} + \left(\frac{E_i'}{x_d' + x_e} - \frac{E_i}{x_d' + x_e} \right) e^{-t/T_{de}'} + \left(\frac{E_i''}{x_d'' + x_e} - \frac{E_i'}{x_d' + x_e} \right) e^{-t/T_{de}''} \quad (10-21)$$

siendo T_{de}' y T_{de}'' las constantes de tiempo transitoria y subtransitoria apropiadas. Muy corrientemente se aplican a estas expresiones los valores eficaces de tensión, con lo que las intensidades que se obtienen son también en valores eficaces. Con esto se admite la aproximación de considerar un régimen casi permanente en el que los valores eficaces varían exponencialmente con el tiempo. Naturalmente, pueden obtenerse también los valores instantáneos cuando se conoce el punto del ciclo en el que ocurre la perturbación.

En cada fase hay una componente continua de intensidad superpuesta a la componente simétrica, que viene dada por la fórmula:

$$I_{dc} = I_{dc0} e^{-t/T_{ae}} \quad (10-22)$$

siendo I_{dc0} el valor inicial, igual y opuesto al valor instantáneo I_{ac} de la correspondiente fase en el instante $t = 0$, y T_{ae} la constante de tiempo del inducido convenientemente ajustada. El valor máximo posible de la componente continua, que corresponde a una onda completamente descentrada, es:

$$I_{dem} = \sqrt{2} \frac{E_i''}{x_d'' + x_e} e^{-t/T_{ae}} \quad (10-23)$$

El valor eficaz total de la onda asimétrica en cualquier momento es:

$$I_{sc} = \sqrt{I_{ac}^2 + I_{dc}^2} \quad (10-24)$$

cuando I_{ac} se expresa también en valor eficaz. Partiendo de una base conservadora, se toman corrientemente para el estudio las condiciones que corresponden a la mayor componente continua posible. Por un procedimiento general semejante al que condujo a la ecuación 10-20 se puede demostrar que el valor de T_{de}'' , no exacto pero sí suficientemente aproximado, es:

$$T_{de}'' = T_d'' \frac{x_d' x_d'' + x_e}{x_d'' x_d' + x_e} \quad (10-25)$$

La constante de tiempo T_d del inducido con un cortocircuito trifásico directamente en bornes depende de la resistencia r_a del devanado inducido y de la inductancia equivalente de su circuito con corriente continua. Esta inductancia equivalente, a su vez, depende no sólo del circuito del estator sino también de los de excitación y amortiguador, ya que la

componente de continua induce corrientes de frecuencia fundamental en estos dos circuitos cerrados. Al girar el rotor, la distribución de f.m.m. estacionaria que la componente de continua crea en el espacio se traduce, por una parte, en circuitos longitudinales del rotor y por otra en circuitos transversales debido a la distinta permeancia y a los distintos circuitos del rotor en los dos ejes. Intuitivamente se puede llegar a la conclusión de que la inductancia equivalente del estator está comprendida entre la inductancia correspondiente a x_d'' y la correspondiente a x_q'' , tomándose generalmente la media aritmética de ambas.

La correspondiente constante de tiempo del inducido es:

$$T_a = \frac{1}{2\pi f r_a} \frac{x_d'' + x_q''}{2} \quad (10-26)$$

Para ajustar la constante de tiempo, en el caso de que existan reactancias exteriores, puede emplearse el mismo razonamiento que condujo a la ecuación 10-20, pero en este caso es importante incluir también la resistencia r_e existente entre los bornes de la máquina y el punto del cortocircuito.

La constante de tiempo, una vez ajustada, es:

$$T_{ae} = \frac{1}{2\pi f (r_a + r_e)} \left(\frac{x_d'' + x_q''}{2} + x_e \right) \quad (10-27)$$

En muchas aplicaciones prácticas puede hacerse caso omiso de la componente subtransitoria debido a su rápida amortiguación, y entonces queda eliminado el tercer término de la ecuación 10-21. Sin embargo, frecuentemente hay que tener en cuenta la posibilidad de grandes componentes de continua especialmente después de haber ocurrido la perturbación. Por lo menos hay que hallar el valor inicial de la corriente subtransitoria para poder determinar la máxima componente de continua posible.

Todo cuanto queda expuesto nos conduce a representar la máquina como un elemento del sistema en los problemas relativos a los transitorios en sistemas. Cuando después de unos pocos primeros ciclos en los que la respuesta decrece rápidamente, puede prescindirse de ésta, y la máquina se representa generalmente por su reactancia longitudinal transitoria x_d' . La tensión en la reactancia transitoria debe mantenerse constante para estar aproximadamente de acuerdo con la constancia de flujo concatenado en el devanado de excitación principal. La disminución del flujo concatenado puede incluirse disminuyendo la intensidad en la máquina de acuerdo con la constante de tiempo adecuada.

Esta forma de representar cada máquina en particular por medio de una reactancia única constante permite enfocar el análisis de los transitorios casi en forma tan expedita como el de régimen permanente, dando al mismo tiempo resultados suficientemente aproximados para la mayor parte de los problemas prácticos.

Para el cálculo de las corrientes de cortocircuito en las redes de potencia, cosa necesaria para determinar el poder de ruptura preciso en los interruptores, la regulación de los relés de protección y los esfuerzos dinámicos sobre las barras, generalmente se prescinde de la carga en la red, salvo por lo que se refiere a su influencia sobre la tensión interna de la

máquina antes de la perturbación. Asimismo, es corriente suponer que todas las f.e.m. internas de la máquina están en fase.

En estudios relativos al par y a la potencia de salida de la máquina en condiciones transitorias, tal como se requiere para prevenir la pérdida de sincronismo durante la perturbación, generalmente se prescinde de la componente de continua en la corriente de cortocircuito, ya que su influencia sobre la potencia y el par síncronos es despreciable. Asimismo, la tensión en la reactancia transitoria se considera muy frecuentemente como constante durante un período de aproximadamente un segundo a partir del momento en que se produce el fallo: este supuesto equivale a prescindir del decremento del flujo inductor o a admitir que la excitatriz de la máquina, gobernada por los reguladores de tensión, es capaz de incrementar la corriente de excitación en una proporción suficiente para compensar aproximadamente el efecto desmagnetizante de la corriente de cortocircuito en el estator.

Naturalmente, existen también numerosos problemas a los que no es posible tratar de forma tan simplificada, sino que requieren incluir también los fenómenos en el eje transversal y las resistencias del sistema externo. Para citar un ejemplo, mencionaremos que en el estudio de la disminución de tensión en los bornes de un alternador como consecuencia de una repentina aplicación de carga, evidentemente no se puede prescindir ni de la carga ni de su componente resistiva; estos estudios requieren métodos más exhaustivos.

Ejemplo 10-1

Una central hidroeléctrica suministra potencia a una amplia zona metropolitana a través de una línea de transmisión de doble circuito con sendos grupos de transformadores en ambos extremos, tal como está representado en la Fig. 10-9. Debido a la potencia de la central respecto a la zona de consumo, las barras receptoras de baja tensión pueden considerarse como de potencia infinita. Las constantes del sistema que aparecen en la citada Fig. 10-9 están expresadas en unidades relativas basadas en los KVA nominales de los generadores hidráulicos. Excepto por lo que se refiere a su influencia en las constantes de tiempo, se desprecian todas las resistencias.

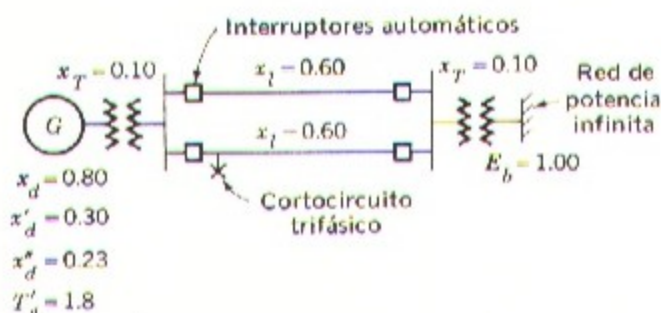


Fig. 10-9. Esquema simplificado del sistema de potencia del ejemplo 10-1.

La tensión en las barras receptoras de baja tensión, E_b , tiene su valor normal del 100 por ciento. En un principio los generadores tienen una carga tal que la potencia desarrollada es del 80 por ciento de sus KVA nominales, y el factor de potencia en las barras receptoras de baja tensión es igual a la unidad. Se produce un cortocircuito trifásico franco en uno de los dos circuitos de transmisión justamente a su salida de las barras de alta.

- Hállese el valor eficaz de la intensidad en una de las fases del fallo inmediatamente después de producirse éste. Considérese que las componentes de continua en esta fase debidas respectivamente a los generadores y a la red de potencia infinita tienen ambas su máximo valor posible.
- El interruptor automático de cabecera de línea correspondiente al circuito averiado se abre a los 0,1 seg. Hállese la intensidad que debe existir en una fase de este interruptor para que interrumpa el cortocircuito trifásico. A este objeto considérese que después de 0,1 segundos tanto la componente de continua como la subtransitoria han llegado ya a valores despreciables.

SOLUCION

- Antes del fallo, la tensión en x_d'' es:

$$E_d'' = 1,00 + j0,80(0,50 + 0,23) = 1,16 \angle 30,3^\circ$$

La corriente simétrica inicial del generador es:

$$\frac{1,16}{0,23 + 0,10} = 3,52$$

y la de la red de potencia infinita

$$\frac{1,00}{0,10 + 0,30} = 2,50$$

la intensidad simétrica inicial será por tanto:

$$3,52 + 2,50 = 6,02$$

La componente continua del generador, con la onda totalmente descentrada es $3,52 \sqrt{2} = 4,97$, y la de la red de potencia infinita, con la misma condición es $2,50 \sqrt{2} = 3,53$ con lo que la componente continua en el fallo es

$$4,97 + 3,58 = 8,50$$

El valor eficaz de la máxima corriente de cortocircuito será por tanto

$$\sqrt{6,02^2 + 8,50^2} = 10,4$$

b. Antes del fallo, la tensión en x_d' es:

$$E_i' = 1,00 + j0,80(0,50 + 0,30) = 1,19 \angle 32,6^\circ$$

y en x_d :

$$E_i = 1,00 + j0,80(0,50 + 0,80) = 1,44 \angle 46,1^\circ$$

La corriente simétrica del generador, prescindiendo de la subtransitoria es:

$$\frac{1,19}{0,30 + 0,10} = 2,97$$

y la corriente final en régimen permanente del generador, si el fallo permanece en el sistema, será:

$$\frac{1,44}{0,80 + 0,10} = 1,60$$

La corriente simétrica del generador pasa exponencialmente desde el primero hasta el segundo de estos valores, siendo la constante de tiempo (ecuación 10-20)

$$T_{de}' = 1,8 \frac{0,80}{0,30} \frac{0,30 + 0,10}{0,80 + 0,10} = 2,13 \text{ segundos}$$

y de acuerdo con esto, la corriente en el instante $t = 0,1$ seg será:

$$1,60 + (2,97 - 1,60)e^{-0,1/2,13} = 2,91$$

La mitad de la corriente de la red de potencia infinita, o sea 1,25, pasa a través del interruptor automático, de forma que la intensidad simétrica en el mismo es de:

$$2,91 + 1,25 = 4,16$$

10-6. TRANSITORIOS ELECTRICOS EN MAQUINAS DE INDUCCION

El funcionamiento transitorio de las máquinas de inducción puede ser estudiado siguiendo sustancialmente las mismas aproximaciones que acabamos de ver para las máquinas síncronas, y los resultados serán también muy semejantes a los de éstas.

Consideremos que una máquina de inducción está actuando ya sea como motor ya sea como generador cuando se produce un cortocircuito trifásico en sus bornes.

En cualquier caso la máquina suministrará corriente al fallo debido a los flujos concatenados con los circuitos del rotor, corriente que con el tiempo desaparecerá. Además de la componente de alterna habrá en general otra de continua amortiguada para conservar inicialmente constantes los flujos concatenados con la fase correspondiente. La Fig. 10-10 representa la componente alterna de la corriente de cortocircuito en función del tiempo.

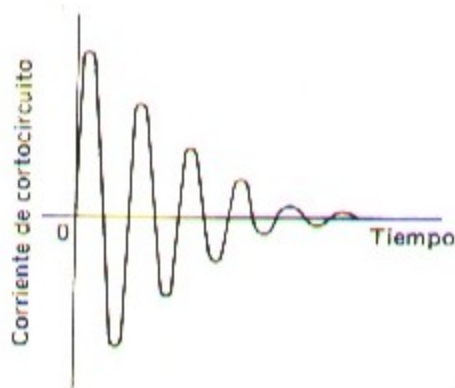


Fig. 10-10. Onda de la corriente de cortocircuito simétrica en una máquina de inducción.

El valor inicial de la componente de alterna puede determinarse en función de la reactancia transitoria x' y de una tensión E'_1 en dicha reactancia supuesta de valor igual al que tenía antes del fallo. La amortiguación de esta componente de alterna está fijada por la constante transitoria de tiempo en cortocircuito T' . Dentro de este razonamiento está implícitamente contenida la suposición de que el deslizamiento es despreciable de forma que la tensión inducida en el rotor debida al movimiento influya muy poco sobre las corrientes de cortocircuito. Esta suposición, aplicada a un caso práctico, es perfectamente justificable por dos razones: la primera es la de que las máquinas normales trabajan generalmente con deslizamiento muy bajo, y la segunda que las corrientes de cortocircuito decaen tan rápidamente, como ya hemos visto, que la máquina no tiene tiempo de variar apreciablemente de velocidad.

Haciendo los cambios apropiados en los símbolos, puede aplicarse aquí gran parte del desarrollo aproximado del análisis visto en el apartado 10-4. Por ejemplo, las corrientes i_d e i_f pasan a ser las corrientes i_1 e i_2 del estator y del rotor; las reactancias x_a , x_f y $x_{\phi d}$ pasan a ser respectivamente las reactancias de dispersión x_1 y x_2 del estator y del rotor y la reactancia magnetizante x_{ϕ} (cambios que deben aplicarse también al circuito equivalente tipo transformador de la Fig. 10-8). Debido a la estructura cilíndrica del rotor en las máquinas de inducción no es necesario distinguir entre eje longitudinal y eje transversal. Los resultados, correspondientes a las ecuaciones 10-9, 10-10, 10-16, 10-17 y 10-19 son

respectivamente:

$$x' = x_1 + x_\phi - \frac{x_\phi^2}{x_2 + x_\phi} \quad (10-28)$$

$$= x_1 + \frac{x_\phi x_2}{x_\phi + x_2} \quad (10-29)$$

$$I_1 = \frac{E'_1}{x'} \quad (10-30)$$

$$T'_0 = \frac{x_2 + x_\phi}{2\pi f r_2} \quad (10-31)$$

$$T = T'_0 \frac{x'}{x_1 + x_\phi} \quad (10-32)$$

en las que T'_0 es la *constante transitoria de tiempo en circuito abierto* de la máquina de inducción y r_2 la resistencia del circuito rotórico.

La máquina de inducción puede representarse por medio del circuito equivalente transitorio de la Fig. 10-11. La reactancia es la reactancia transitoria x' dada por las ecuaciones 10-28 y 10-29, y aun cuando hasta ahora se ha prescindido de la resistencia r_1 del estator, puede también añadirse si se pretende tener una mayor precisión. La tensión E'_1 a través de la reactancia transitoria es proporcional a los concatenamientos del rotor, variando con ellos, y en un cortocircuito trifásico desciende hasta anularse a un ritmo determinado por la constante de tiempo T (ecuación 10-32). Si existe una reactancia exterior entre los bornes de la máquina y el punto del fallo, puede ajustarse la constante de tiempo sumando dicha reactancia al numerador y al denominador de la ecuación 10-32.



Fig. 10-11. Circuito equivalente transitorio simplificado de una máquina de inducción.

Ejemplo 10-2

Un motor de inducción de jaula de ardilla de 400 c.v., 440 V tensión compuesta, 50 Hz, conectado en Y tiene un rendimiento del 93 por ciento a plena carga con factor de

potencia 0,90. Las constantes del motor, en ohm por fase reducidas al estator son las siguientes:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,060 & x_2 &= 0,060 & x_\varphi &= 2,50 \\r_1 &= 0,0073 & r_2 &= 0,0064\end{aligned}$$

Mientras el motor está trabajando en régimen permanente en las condiciones nominales se produce un cortocircuito trifásico en la línea de alimentación, próximo a los bornes del motor. Determinése la intensidad eficaz de cortocircuito en el motor.

SOLUCION

En la ecuación 10-28 podemos ver que la reactancia transitoria del motor es:

$$x' = 0,060 + 2,50 - \frac{2,50^2}{0,60 + 2,50} = 0,12 \text{ ohm por fase}$$

La intensidad en el estator, antes del fallo, es:

$$I_1 = \frac{400 \times 746}{0,90 \times 0,93 \times 440 \sqrt{3}} = 467 \text{ A}$$

Tomando como vector de referencia la tensión en bornes tendremos que la tensión a través de la reactancia transitoria antes del fallo es:

$$\begin{aligned}E_1' &= \frac{440}{\sqrt{3}} - (0,0073 + j0,12)(467 \angle -\cos^{-1} 0,90) \\ &= 232 \angle -12,2^\circ\end{aligned}$$

Según la ecuación 10-30, la intensidad eficaz inicial del cortocircuito es:

$$\frac{232}{0,12} = 1\,940 \text{ A}$$

La constante de tiempo en circuito abierto (ecuación 10-31) es:

$$T_o' = \frac{2,50 + 0,060}{2\pi \times 60 \times 0,0064} = 1,06 \text{ segundos}$$

y la constante de tiempo en cortocircuito (ecuación 10-32)

$$T' = 1,06 \frac{0,12}{2,56} = 0,050 \text{ seg.}$$

La corriente eficaz de cortocircuito es por tanto:

$$I_1 = 1940e^{-t/0,050} \text{ A}$$

La constante de tiempo en cortocircuito es de 2.5 ciclos a 50 Hz, y de acuerdo con ello en estos 2.5 ciclos la corriente de cortocircuito desciende hasta el 36,8 por ciento de su valor inicial, y prácticamente ha desaparecido en unos diez ciclos.

De cuanto antecede puede verse que si bien la corriente inicial de cortocircuito en una máquina de inducción es relativamente alta comparada con su corriente nominal, normalmente el transitorio desaparece rápidamente. Debido a ello no es raro despreciar los transitorios eléctricos de las máquinas de inducción.

Puede comprenderse claramente cómo los fenómenos subtransitorios vistos en el apartado 10-2 son muy semejantes a la superposición de efectos de una máquina de inducción sobre los de una máquina síncrona. Los circuitos normales de amortiguación de una máquina síncrona equivalen prácticamente a un rotor de jaula de ardilla. Los pares de amortiguación son los pares de una máquina de inducción; en primera aproximación ambos varían linealmente con el deslizamiento en las proximidades de la velocidad síncrona. Bajo los efectos de un cortocircuito, las corrientes de amortiguación inducidas en las máquinas síncronas son comparables a las corrientes inducidas en el rotor de una máquina de inducción necesarias para mantener constantes los flujos concatenados con el rotor en el primer momento; ambas desaparecen muy rápidamente. Efectivamente, durante el corto período subtransitorio que sigue a una perturbación en una máquina síncrona, existirán los efectos de inducción y de sincronismo combinados; una vez salvado el período subtransitorio sólo subsisten los efectos transitorios de sincronismo.

10-7. DINÁMICA DE MÁQUINAS SÍNCRONAS

En los sistemas con máquinas síncronas aparecen problemas dinámicos de gran importancia, porque el funcionamiento correcto de las mismas exige que la velocidad mecánica del rotor y la velocidad del campo giratorio del estator sean iguales entre sí, apareciendo fuerzas de sincronización que tienden a restablecer dicha igualdad siempre que por cualquier causa se vea perturbada. Si la velocidad instantánea de una máquina síncrona que forme parte de un sistema en el que hayan otras máquinas de ese tipo fuese disminuyendo lentamente, dicho decrecimiento iría acompañado de una disminución del ángulo del par si se trata de un generador, o de un aumento del mismo si se trata de un motor. Por ejemplo, si se aplica repentinamente una carga fuerte al eje de un motor síncrono su

velocidad disminuirá, por lo menos momentáneamente, hasta que el ángulo de par adquiera el nuevo mayor valor necesario para vencer la carga añadida. De hecho, hasta tanto no se alcance ese nuevo ángulo, una proporción apreciable de la energía suministrada a la carga procede de la energía cinética almacenada en las masas rotativas que pierden velocidad. Cuando se alcanza por primera vez el ángulo requerido no se ha conseguido un estado de equilibrio ya que en ese momento la velocidad mecánica del rotor es menor que la velocidad síncrona. El ángulo deberá crecer momentáneamente de nuevo para recuperar el déficit de energía cinética de las masas en movimiento. Este proceso supone una serie de oscilaciones alrededor de la posición final definitiva hasta que se restablezca el equilibrio necesario. Una descripción exacta de estos fenómenos únicamente nos la pueden dar las ecuaciones electromecánicas diferenciales, y las decisiones respecto al restablecimiento del equilibrio pueden basarse únicamente en la resolución de tales ecuaciones.

Tales oscilaciones o penduleos, y las correspondientes pulsaciones de potencia y de corriente, son particularmente molestas en el caso de máquinas síncronas que accionen cargas cuyo par varíe cíclicamente a frecuencia relativamente alta como sucede con los motores de compresores alternativos de aire o de amoníaco. Si la frecuencia propia de la oscilación mecánica de la máquina síncrona es aproximadamente igual a la frecuencia de algún armónico importante del par del grupo compresor se puede llegar a oscilaciones que resulten intolerables. En los sistemas eléctricos de potencia aparecen también transitorios electromecánicos a veces muy complicados pero de la misma naturaleza básica que los vistos, y a menos que sean estudiados muy cuidadosamente en la fase de proyecto pueden ser causa de paros completos en zonas muy extensas.

a. Ecuación electromecánica básica

Al igual que en todos los demás tipos de máquinas, la ecuación correspondiente a una máquina síncrona surge de la consideración de las tres clases de pares que actúan sobre los elementos rotativos. Hay un par de inercia, otro electromecánico T_e resultante de la conversión de energía, y un tercero mecánico en el eje T_{sh} que representa la entrada, procedente del motor primario en un generador, o la salida para accionar la carga en un motor. Tenemos que:

$$T_{inercia} + T_e = T_{sh} \quad (10-33)$$

Esta ecuación, así como las que seguirán, se ha escrito pensando especialmente en un generador, pero pueden aplicarse también a un motor previa una convención apropiada por lo que a los signos se refiere, convención que deberá establecerse una vez dada la forma final de la ecuación.

El término electromagnético de la ecuación 10-33 así como el de entrada o salida del eje muchas veces pueden obtenerse mejor como potencias que como pares, por lo que dicha ecuación se expresa corrientemente en función de las potencias

$$P_{inercia} + P_e = P_{sh} \quad (10-34)$$

La potencia de inercia se determina por la aceleración angular. La posición angular del eje en cualquier momento se mide por el ángulo eléctrico δ entre un punto de él y una referencia que gira a velocidad síncrona. Frecuentemente se toma el ángulo δ igual al ángulo de potencia de la máquina.

La potencia de inercia es:

$$P_{\text{inercia}} = P_f \frac{d^2 \delta}{dt^2} \quad (10-35)$$

siendo P_f la potencia de inercia por unidad de aceleración. Si δ se expresa en radianes eléctricos:

$$P_f = J \frac{2}{\text{polos}} \frac{2\pi n}{60} \quad (10-36)$$

siendo J el momento de inercia y n la velocidad en r.p.m. El factor $2/\text{polos}$ convierte los ángulos eléctricos en mecánicos, y el factor $2\pi n/60$ cambia el par por potencia. El coeficiente P_f normalmente se considera como una constante, y se calcula para n igual a la velocidad de sincronismo. Este proceder está justificado por el hecho de que las oscilaciones angulares llegan a ser intolerables antes de que la velocidad se desvíe más de uno o dos por ciento de la velocidad de sincronismo.

La potencia electromecánica P_e tiene dos componentes: una de ellas es la potencia de amortiguación, ya mencionada hacia el final del apartado anterior, y tal como allí se dijo, frecuentemente se considera que varía linealmente con la desviación $d\delta/dt$ respecto a la velocidad síncrona. La segunda componente es la potencia síncrona resultante de la acción de la máquina y dada en las ecuaciones 6-18, 6-19 y 6-30 para el caso de una máquina única en una red de potencia infinita.

La ecuación electromecánica se convierte así en:

$$P_f \frac{d^2 \delta}{dt^2} + P_d \frac{d\delta}{dt} + P(\delta) = P_{sh} \quad (10-37)$$

en la que P_d es la potencia de amortiguación por unidad relativa de desviación de la velocidad respecto a la de sincronismo, y $P(\delta)$ indica que la potencia síncrona es función del ángulo δ .

Para poder precisar $P(\delta)$ es necesario conocer previamente la naturaleza específica de la red exterior. Si se trata de una máquina sola conectada directamente a un sistema suficientemente grande (véase el apartado 6-5), la función será $P_m \text{ sen } \delta$, siendo P_m la amplitud de la curva senoidal potencia-ángulo. La ecuación 10-37 se convierte en:

$$P_f \frac{d^2 \delta}{dt^2} + P_d \frac{d\delta}{dt} + P_m \text{ sen } \delta = P_{sh} \quad (10-38)$$

Los valores positivos de δ indican una acción de generador, es decir de una conversión de energía mecánica en eléctrica; los valores positivos de P_{sh} corresponden a una entrada de potencia mecánica en el eje; los valores positivos de $d\delta/dt$ indican velocidades superiores a la de sincronismo y, los valores positivos de $d^2\delta/dt^2$ indican una aceleración.

Puede emplearse también una convención inversa a la anterior, es decir que: δ positivo indique una acción motora; P_{sh} positivo corresponda a una salida de potencia mecánica en el eje; si $d\delta/dt$ es positivo la velocidad será inferior a la de sincronismo, y por último, $d^2\delta/dt^2$ positivo indicará un movimiento retardado.

Ni la ecuación 10-37 ni la 10-38 son lineales. Existe un procedimiento de análisis, expuesto a continuación, aplicable al caso de oscilaciones pequeñas, y que consiste en hacer lineal la relación potencia-ángulo. Se trata simplemente de un caso especial de linealizar alrededor del punto de operación.

b. Análisis linealizado

Cuando se estudia una sola máquina conectada a un sistema suficientemente grande, intervendrá una sola ecuación diferencial en lugar de un grupo de ellas. Si además las variaciones de δ son pequeñas, puede substituirse el término $P(\delta)$ de la ecuación 10-37 por la ecuación de la pendiente de la curva potencia-ángulo en el punto de operación considerado.

Cuando δ varía aproximadamente entre $+\pi/6$ y $-\pi/6$ radianes eléctricos, el seno del ángulo es muy parecido al propio ángulo en radianes: así podremos substituir el término $P_m \sin \delta$ de la ecuación 10-38 por el término $P_s \delta$ siendo P_s la potencia sincronizante o pendiente de la curva potencia-ángulo en el origen.

La ecuación 10-38 se convierte en

$$P_j \frac{d^2 \delta}{dt^2} + P_d \frac{d\delta}{dt} + P_s \delta = P_{sh} \quad (10-39)$$

y puesto que esta ecuación es lineal, puede resolverse para un caso particular por los procedimientos tradicionales.

Ejemplo 10-3

Un motor síncrono trifásico de 200 c.v., 2300 V, 28 polos, 50 Hz, 214 r.p.m. está conectado a una red de potencia infinita. Las características del motor son:

$$J = 444 \text{ Kg-m}^2$$

$$\text{Potencia sincronizante } P_s = 2400 \text{ Nw-m/radian mecánico/segundo}$$

$$\text{Par de amortiguación} = 2400 \text{ Nw-m/radian mecánico/segundo}$$

- Hállese la modalidad de las oscilaciones electrodinámicas de la máquina.
- Se carga repentinamente el motor con su carga mecánica nominal en el eje, en un momento en que está trabajando en vacío a régimen permanente. Estúdiense los transitorios electrodinámicos que surgen.

SOLUCION

Para la resolución, el ángulo δ deberá medirse en grados eléctricos y no en radianes, lo que deberá tenerse en cuenta al calcular P_f , P_d y P_s a partir de los datos del problema.

Introduciendo en la ecuación 10-36 el factor $\pi/180$ para convertir los ángulos pasándolos de radianes a grados tendremos:

$$P_f = 444 \times \frac{2}{28} \times \frac{2\pi 214}{60} \times \frac{\pi}{180} = 12,4 \text{ W/grado eléctrico/segundo}^2$$

Las restantes constantes del motor son:

$$P_d = 2\pi \times 214 \times 2400 \times \frac{736}{44100} \times \frac{\pi}{180} \times \frac{2}{28} = 65,7 \text{ W/grado eléctrico/seg.}$$

$$P_s = 11 \times 1000 = 11000 \text{ W/grado eléctrico}$$

y la ecuación que determinará la forma de amortiguación será:

$$12,4 \frac{d^2 \delta}{dt^2} + 65,7 \frac{d\delta}{dt} + 11000\delta = 0$$

La frecuencia no amortiguada y la relación de amortiguación son respectivamente

$$\omega_n = \sqrt{\frac{11000}{12,4}} = 30 \text{ rad/seg}$$

$$\zeta = \frac{65,7}{2\sqrt{12,4 \times 11000}} = 0,09$$

La magnitud de ζ sitúa francamente a la respuesta transitoria en la zona de oscilaciones como sucede siempre en todas las máquinas síncronas. Cualquier perturbación del servicio irá seguida de una oscilación o penduleo del rotor, de amortiguación relativamente lenta, hasta alcanzar nuevamente una marcha estable a la velocidad de sincronismo. Naturalmente, una perturbación muy importante puede dar lugar a la pérdida completa del sincronismo.

La amortiguación de la velocidad angular del motor es:

$$\omega_d = 30 \sqrt{1 - 0,09^2} = 29,7 \text{ rad/seg}$$

que corresponde a una frecuencia de la oscilación amortiguada:

$$f_d = \frac{29,7}{2\pi} = 4,7 \text{ Hz.}$$

b. La plena carga de 200 c.v. equivale a $200 \times 736 = 147\,200$ W. El ángulo en régimen permanente es:

$$\delta_{\infty} = \frac{147.200}{11.000} = 13,4 \text{ grados eléctricos}$$

y las desviaciones angulares están determinadas por la ecuación:

$$\delta = 13,4^{\circ} [1 - 1,004e^{-2,7t} \sin(29,7t + 84,3^{\circ})]$$

c. Análisis no lineal. Método de la igualación de áreas

En muchos de los serios problemas dinámicos que se pueden presentar, las oscilaciones son de tal envergadura que resulta inaplicable la linealización vista anteriormente: deben conservarse en forma no lineal las ecuaciones de movimiento, y para llevar a cabo los análisis se precisa frecuentemente del auxilio de computadores analógicos o digitales.

Para programar el estudio en un computador digital se emplean procedimientos numéricos de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales¹. Generalmente, el objeto del estudio es el de averiguar cuándo se conserva o se pierde el sincronismo, es decir, si el ángulo δ se estabiliza o no en un valor propio de régimen permanente después de haber quedado la máquina sometida a una perturbación medible.

En sistemas formados por una máquina síncrona única, con poca amortiguación, podemos valernos de la interpretación gráfica de la energía almacenada en las masas en rotación como un medio auxiliar para determinar el máximo ángulo de penduleo y en consecuencia plantear la cuestión de la conservación o pérdida de sincronismo. Debido a la imagen física que por este procedimiento se obtiene de los procesos dinámicos, a continuación veremos la aplicación práctica al estudio del análisis de una máquina única conectada a una red de potencia infinita.

Consideremos concretamente un motor síncrono cuya curva potencia-ángulo sea la de la Fig. 10-12. Con el motor inicialmente en vacío, el punto de funcionamiento coincide con el origen de la curva, y al aplicarle súbitamente una carga mecánica P_{sh} , dicho punto se desplaza a lo largo de la senoide ABC : si no se llega a perder el sincronismo, el punto de funcionamiento se situará finalmente en B al que corresponde el nuevo ángulo δ_{∞} . Para alcanzar este nuevo punto B , el motor deberá retardarse, por lo menos momentáneamente, bajo la influencia de la diferencia $P_{sh} - P_m \sin \delta$ entre la potencia solicitada por la carga y la potencia resultante de la conversión electromecánica de energía. Recordemos que en virtud del proceso que nos condujo a la ecuación 10-38, ambas potencias, P_{sh} y $P_m \sin \delta$ son proporcionales a los pares correspondientes, y recordemos también que la integral $\int T \, d\delta$ del par respecto al ángulo no es más que una energía. Por tanto, vemos que el área OAB de la Fig. 10-12 es proporcional a la energía sustraída de las masas en movimiento durante el período inicial en el que la conversión electromagnética de energía no es suficiente para alimentar la carga mecánica en el eje. Cuando en la primera oscila-

¹ Véase: Glenn W. Stagg y Ahmed H. El-Abiad, "Computer Methods in Power System Analysis," McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968.

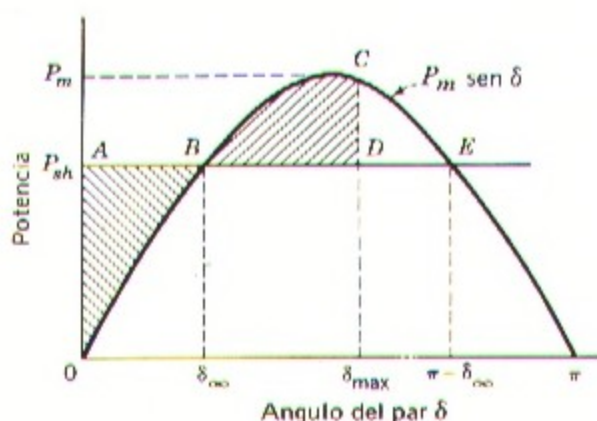


Fig. 10-12. Curva potencia-ángulo, y potencia requerida por la carga en un motor síncrono.

ción se alcanza el punto B , el rotor está sometido a un momento en el sentido de deceleración que le obliga a sobrepasarlo hasta que las masas giratorias hayan recuperado igual cantidad de energía. En consecuencia, el rotor oscila hasta el punto C correspondiente al ángulo δ_{\max} , en el que se cumpla que:

$$\text{Area } BCD = \text{área } OAB \quad (10-40)$$

Posteriormente, si no existiera amortiguación, el rotor continuaría oscilando entre los puntos O y C a su frecuencia propia, pero debido a la amortiguación, que siempre existe en las máquinas reales, las sucesivas oscilaciones van decreciendo de amplitud hasta que finalmente se llega a una posición de equilibrio dinámico en el punto B . Puede observarse la analogía entre este fenómeno y las oscilaciones de un péndulo.

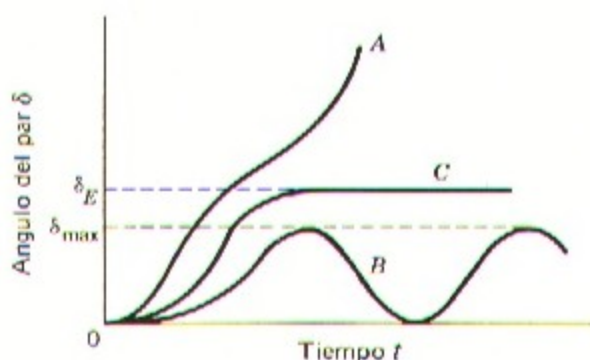


Fig. 10-13. Curvas del penduleo de una máquina síncrona única, mostrando un caso de inestabilidad (curva A), otro de estabilidad (curva B), y otro crítico (curva C).

El procedimiento de igualación de áreas permite hallar el ángulo máximo de penduleo, permitiendo apreciar si se mantendrá o no el sincronismo dando al mismo tiempo una idea aproximada del margen de estabilidad.

Si el área $BCED$ de la citada figura 10-12 es menor que el área OAB no podrá superarse nunca el momento de deceleración, y la curva ángulo-tiempo toma la forma de la curva A de la Fig. 10-13 perdiéndose el sincronismo. Por otra parte, si $BCED$ es mayor que OAB se conservará el sincronismo con un margen de seguridad dado por la diferencia entre ambas superficies: la curva ángulo-tiempo será la B de la figura 10-13. Y por último, si $BCED$ y OAB son iguales se está en una situación crítica con equilibrio inestable representado por la curva C de la figura últimamente citada.

Ejemplo 10-4

Determinese la máxima carga que puede aplicarse súbitamente al motor del ejemplo 10-3 cuando está inicialmente funcionando en vacío. La potencia sincronizante de 11 kW/grado eléctrico dada en aquel ejemplo es la pendiente en el origen de la curva potencia-ángulo trazada en las condiciones citadas. Se prescinde de la amortiguación.

SOLUCION

La pendiente inicial de la curva senoidal potencia-ángulo, expresada en kW por radian, es igual a la amplitud de dicha curva en kW.

Por tanto:

$$P_m = 11 \times \frac{180}{\pi} = 630 \text{ kW}$$

La carga P_{sh} (Fig. 10-14) debe ser tal que:

$$\text{Area } OAB = \text{Area } BCD$$

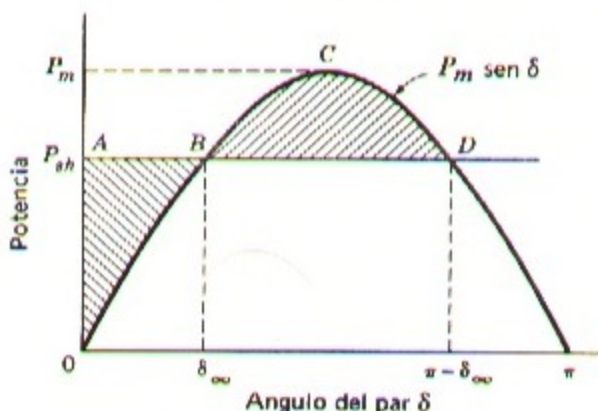


Fig. 10-14. Aplicación gráfica del criterio de igualación de áreas: ejemplo 1-4.

o sea:

$$P_{sh} \delta_{\infty} = \int_0^{\delta_{\infty}} 630 \operatorname{sen} \delta \, d\delta = \int_{\delta_{\infty}}^{\pi - \delta_{\infty}} 630 \operatorname{sen} \delta \, d\delta = P_{sh} (\pi - 2\delta_{\infty})$$

o también

$$P_{sh} = 630 \operatorname{sen} \delta_{\infty}$$

Por tanto se llega a la solución:

$$P_{sh} = 455 \text{ kW} = 618 \text{ c.v.}$$

Obsérvese que despreciando la amortiguación el resultado es independiente de la inercia: efectivamente, en estas condiciones la inercia determina el período de oscilación pero no influye en su amplitud.

10-8. DINÁMICA DE LAS MÁQUINAS DE INDUCCIÓN

Los problemas de índole dinámica más corrientes en los motores de inducción de una cierta potencia como son los normalmente empleados en la industria, están relacionados principalmente con la puesta en marcha y paro de los mismos así como en su aptitud para seguir prestando servicio durante las perturbaciones del sistema de suministro. Por ejemplo, un problema típico en una planta industrial consiste en la puesta en marcha de un motor grande, sin provocar el paro de otros motores en paralelo debido a la caída de tensión motivada por las fuertes intensidades de arranque del motor grande.

La forma de representar un motor de inducción en los análisis dinámicos depende en gran manera de la naturaleza y complejidad del problema que se pretenda estudiar y de la precisión requerida. Cuando además de los transitorios del movimiento han de figurar los transitorios eléctricos del motor (particularmente si el motor constituye un elemento importante de un sistema complejo) debe utilizarse el circuito equivalente de la Fig. 10-11, sin embargo, en muchos otros casos puede prescindirse de los transitorios eléctricos de las máquinas de inducción: es posible esta simplificación debido a que, tal como se vio en el ejemplo 10-2, el transitorio eléctrico mengua muy rápidamente, empleando un tiempo mucho menor que la duración del transitorio dinámico: (entre las principales excepciones a cuanto queda expuesto se podrían citar los motores grandes de alta velocidad: unas 3000 r.p.m.). Por ahora nos limitaremos a este tipo de problemas.

Para representar la máquina en estas condiciones nos podemos basar en la teoría de régimen permanente, incluyendo los circuitos equivalentes de las Figs. 7-6 y 7-9, la curva par-deslizamiento de la Fig. 7-10 y la relación par-deslizamiento de la ecuación 7-23. El problema se reduce a llegar a una representación suficientemente sencilla pero razonablemente realista que no complique innecesariamente el análisis dinámico, principalmente con la introducción de la no linealidad. Por un procedimiento gráfico se puede conseguir aproximación suficiente para aplicarlo a problemas relativamente sencillos.

Tanto el par engendrado por el motor como el par requerido para accionar la carga se consideran como funciones no lineales de la velocidad, y los datos correspondientes se dan en forma de curvas. En el ejemplo siguiente se indica el procedimiento a seguir.

Ejemplo 10-5

Un motor de inducción polifásico tiene la curva par-velocidad representada en la Fig. 10-15 cuando la tensión que se le aplica coincide con la nominal. En la misma Fig. 10-15 está representada también la curva del par necesario para el arrastre de la carga. La inercia del rotor y de la carga es J expresada en unidades MKS.

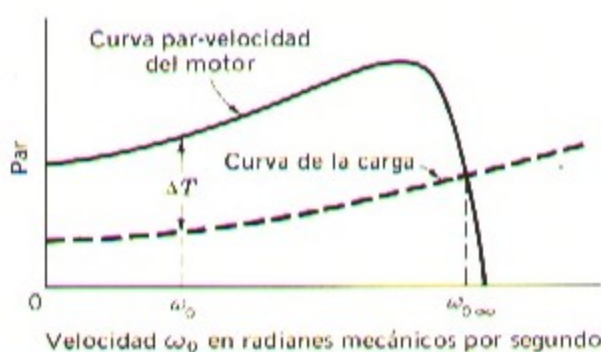


Fig. 10-15. Curvas par-velocidad de un motor de inducción, y de la carga aplicada.

Consideremos que para la puesta en marcha se conecta directamente a la línea de tensión nominal, y que la curva par-velocidad en régimen permanente representa con suficiente aproximación el funcionamiento en condiciones transitorias. Demuéstrese cómo se puede trazar una curva de velocidad en función de tiempo.

SOLUCION

A cualquier velocidad del motor ω_0 expresada en radianes/segundo, la diferencia ΔT entre el par engendrado por el motor y el requerido por la carga queda disponible para acelerar las masas rotativas.

En consecuencia:

$$J \frac{d\omega_0}{dt} = \Delta T \quad (10-41)$$

El tiempo necesario para alcanzar la velocidad ω_0 será, por tanto:

$$t = J \int_0^{\omega_0} \frac{1}{\Delta T} d\omega_0 \quad (10-42)$$

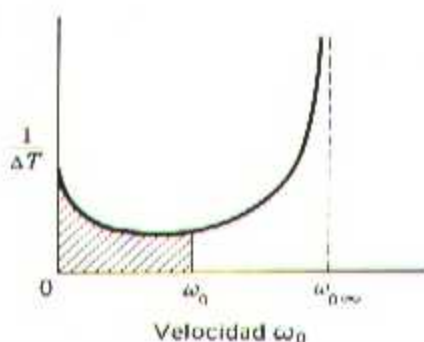


Fig. 10-16. Estudio gráfico del arranque de un motor de inducción.

La integral de esta última ecuación puede valorarse gráficamente trazando una curva de $1/\Delta T$ en función de ω_0 y hallando el área de la zona comprendida entre la curva y el eje ω hasta el punto correspondiente al límite superior de la integral, como puede verse en la Fig. 10-16. El área puede medirse con el auxilio de un planímetro, subdividiendo la superficie en pequeños cuadrados, o subdividiéndola en zonas y tomando la ordenada media en cada una de ellas. Expresando esta área en radianes/segundo por $Nw\text{-m}$, y J , en unidades MKS, obtendremos el resultado t en segundos. Los resultados de los cálculos pueden ordenarse en forma tabular, lo que permite llegar a la curva de la Fig. 10-17 que constituye la solución.

Los métodos analíticos se basan muchas veces en considerar lineal en una porción de la misma la curva representativa par-deslizamiento. Por ejemplo, se puede considerar la curva como lineal en la zona de trabajo normal con poco deslizamiento. En esta zona puede emplearse la relación:

$$T = ks \quad (10-43)$$

en la que k es una constante.

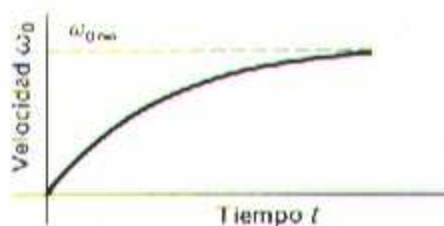


Fig. 10-17. Curva velocidad-tiempo durante el arranque de un motor de inducción.

Si la tensión en bornes es variable, debe sustituirse por la relación

$$T = k' V_1^2 s \quad (10-44)$$

para tener en cuenta el hecho de que, de acuerdo con la ecuación 7-23, el par electromagnético varía como el cuadrado de la tensión.

Si interviene una amplia porción de la curva par-deslizamiento será necesario sustituirla por un cierto número de líneas rectas. Por otra parte, en el apartado 7-5 se vio que la ecuación

$$\frac{T}{T_{\max}} = \frac{2}{s/s_{\max} T + s_{\max} T/s} \quad (10-45)$$

representaba bastante bien la relación par-deslizamiento dada por la ecuación 7-23. En la ecuación 10-45; T_{\max} es el par máximo y $s_{\max} T$ el deslizamiento con dicho par.

Ejemplo 10-6

El período en el que una fuerte corriente de arranque incide en un motor de inducción durante su puesta en marcha, normalmente persiste durante el tiempo necesario para alcanzar el deslizamiento $s_{\max} T$ de par máximo, decreciendo luego hasta su valor normal de servicio. Dedúzcase una expresión del tiempo t requerido para alcanzar la velocidad correspondiente al deslizamiento $s_{\max} T$ citado, al poner en marcha un motor de inducción directamente a plena tensión.

La inercia combinada del rotor y de los elementos mecánicos acoplados es J . Al ponerlo en marcha, el motor está descargado, y pueden desprejarse las pérdidas mecánicas. Considérese que la curva par-deslizamiento está representada por la ecuación 10-45.

SOLUCION

Expresemos todas las cantidades excepto el tiempo t en unidades relativas. Como base para el par T tomaremos el par nominal del motor; como unidad de velocidad la velocidad síncrona del motor, y s vendrá dada en unidades relativas por la conocida ecuación 4-3.

La inercia J tendrá por consiguiente las siguientes dimensiones

$$\frac{\text{Par relativo}}{\text{Variación relativa de velocidad por segundo}}$$

si n es la velocidad del motor, la ecuación diferencial básica es:

$$J \frac{dn}{dt} = -J \frac{ds}{dt} = \frac{2T_{\max}}{s/s_{\max} T + s_{\max} T/s}$$

e integrado:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{J}{2T_{\max}} \left(\frac{1}{s_{\max} \tau} \int_1^{s_{\max} \tau} s \, ds + s_{\max} \tau \int_1^{s_{\max} \tau} \frac{ds}{s} \right) \\
 &= \frac{J}{2T_{\max}} \left(\frac{1 - s_{\max}^2 \tau}{2s_{\max} \tau} + s_{\max} \tau \ln \frac{1}{s_{\max} \tau} \right)
 \end{aligned}$$

Este resultado tiende a ser algo optimista debido a haber despreciado las pérdidas. Sólo para arrancar y mover el motor a poca velocidad se requiere ya un par apreciable, sobre todo si los cojinetes están fríos.

10-9. RESUMEN

El estudio de los transitorios eléctricos en las máquinas de alterna es necesariamente un compromiso entre el detallado análisis que se puede hacer cuando sólo han de intervenir las condiciones de una máquina única, y los artificios más o menos aproximados a que hay que recurrir para simplificar la representación de una máquina cuando ésta no es más que uno de los elementos de un sistema mecánico. La principal dificultad estriba esencialmente en los transitorios en circuitos acoplados no linealmente, y bajo el punto de vista del sistema completo la cuestión más importante es la de decidir los márgenes de aproximación admisibles.

Con el punto de vista adoptado en este capítulo, en parte intuitivo y en parte empírico, se forma una figura sencilla aproximada de las máquinas síncronas como elementos de un sistema. La máquina es esencialmente una reactancia a través de la cual existe una tensión determinada: en régimen permanente la reactancia es una reactancia síncrona, y la tensión interna es la inducida debido al campo inductor. En condiciones transitorias la reactancia decrece convirtiéndose en una reactancia transitoria, y la tensión interna correspondiente dependerá de los flujos de excitación concatenados. En algunos problemas es necesario tener en cuenta las corrientes inducidas en el devanado de amortiguación utilizando al efecto la reactancia subtransitoria de menor valor. La disminución de corriente desde una situación dada hasta otra posterior se puede conocer por medio de las constantes de tiempo adecuadas. El concepto de reactancia transitoria puede aplicarse en forma análoga a las máquinas de inducción.

En el apartado 10-6 se ha visto que los transitorios eléctricos en las máquinas de inducción clásicas en general disminuyen muy rápidamente en comparación con la duración de los transitorios mecánicos, y por consiguiente, en muchos casos puede utilizarse el circuito equivalente en régimen permanente para los análisis dinámicos.

PROBLEMAS

10-1. Las constantes de un generador hidráulico son las siguientes: $x_d' = 1,00$; $x_d'' = 0,35$; $x_d''' = 0,25$; $T_{d0}' = 5,0$ segundos, y $T_{d0}'' = 0,04$ segundos. Las reactancias están

dados en unidades relativas, tomando como base los valores nominales del generador. Esta máquina suministra potencia a una carga a través de una línea cuya reactancia es de 0,5 en unidades relativas, siendo su resistencia despreciable. En condiciones normales, el generador está a plena carga siendo el factor de potencia en bornes de 0,8 en retraso, y la tensión en los mismos igual a la nominal. Se produce un cortocircuito trifásico en el extremo receptor de la línea.

- a. Calcúlense los valores de las tensiones a través de las reactancias síncronas y transitoria antes de producirse el fallo.
- b. Calcúlese el mayor valor inicial posible de la componente de continua de la corriente de cortocircuito en la máquina.
- c. Dése la ecuación numérica del valor eficaz de la corriente de cortocircuito de la máquina en función del tiempo, a partir de producirse el fallo. Prescíndase de la componente de continua.
- d. El fallo se elimina a los 0,15 segundos. Partiendo del resultado hallado en *c* determínese el valor eficaz de la corriente de cortocircuito en el generador inmediatamente antes de la eliminación.

10-2. Un motor síncrono de baja velocidad y polos salientes tiene las constantes que para este tipo de máquinas se indican en la tabla 10-1. Dicho motor se conecta a una red de potencia infinita a través de un transformador cuya reactancia es 0,07 tomando como base los KVA nominales de entrada del motor (las reactancias del motor son también relativas con la misma base). Se toma como tensión unidad la de la red de potencia infinita.

Se ajusta la excitación del motor de forma que estando en vacío el transformador tome de la red 0,5 unidades relativas de potencia reactiva adelantada en sus bornes de entrada. Las pérdidas de motor se consideran despreciables.

- a. Al objeto de analizar la respuesta del motor ante una aplicación súbita de carga en su eje, puede representarse dicho motor por su reactancia transitoria longitudinal con tensión en la misma constante, e igual a la existente antes de aplicar la carga.
Búsquese la ecuación de la curva potencia-ángulo respecto a la línea, en las condiciones citadas. Dibújese dicha curva aproximadamente a escala.
- b. Si la carga se va aplicando lentamente, la correspondiente curva potencia-ángulo se determina por los principios en régimen permanente expuestos en los capítulos 4 y 6. Utilícese la teoría de rotor cilíndrico representando el motor por su reactancia síncrona longitudinal. Para hacer una corrección aproximada que tenga en cuenta la saturación multiplíquense los valores no saturados de la tabla 10-1 por 0,8 y supóngase que se mantienen constantes al valor así hallado. Dedúzcase la ecuación de la curva potencia-ángulo en estas condiciones y trácese sobre la misma gráfica empleada en *a*.
- c. Repítase lo expuesto en *b* pero empleando la teoría de polos salientes. Considérese que la reactancia síncrona transversal no está afectada por la saturación.

- d. Calcúlese en unidades relativas el valor simétrico inicial de la corriente de cortocircuito en el transformador al producirse un cortocircuito trifásico en sus bornes de entrada.

10-3. Mientras un alternador está sometido al ensayo de cortocircuito en un banco de pruebas, se elimina súbitamente el cortocircuito. Antes de esta eliminación estaba circulando la corriente de cortocircuito nominal en régimen permanente. La máquina tiene las siguientes constantes: $x_d = 1,20$; $x_q = 0,80$; $x'_d = 0,40$; $x''_q = 0,80$; $T'_{d0} = 5$ seg; $T''_d = 1,67$ seg. No existen circuitos efectivos de amortiguación en el eje longitudinal ni en el transversal, y puede suponerse que la resistencia e inductancia de la excitatriz son despreciables.

Búsqese la expresión numérica de la corriente de excitación, en unidades relativas, en función del tiempo a partir del momento en que quedó eliminado el cortocircuito.

10-4. Al aplicar a un generador una carga inductiva con factor de potencia igual o muy aproximado a cero se produce una fuerte baja de tensión en sus bornes: una carga de este tipo la puede constituir la corriente de arranque de un motor grande.

Consideremos un generador síncrono trabajando inicialmente en vacío, con su tensión normal en bornes: se aplica súbitamente una carga inductiva equilibrada X_L . La tensión de excitación no se varía, y el generador sigue girando a la velocidad de sincronismo: prescídase de la saturación:

- a. Demuéstrese que la tensión en bornes varía con el tiempo, después de aplicar la carga, según la expresión

$$V_t = E_{f0} \frac{x_L}{x_d + x_L} + E_{f0} \left(\frac{x_L}{x'_d + x_L} - \frac{x_L}{x_d + x_L} \right) e^{-t/T'_d}$$

en la que E_{f0} es la tensión inducida por el campo inductor antes de aplicar la carga, y

$$T'_d = T'_{d0} \frac{x'_d + x_L}{x_d + x_L}$$

- b. Hállense en unidades relativas los valores de la tensión cuando $x_d = 1,10$; $x'_d = 0,20$; $x_L = 1,25$ y $T'_{d0} = 5,0$ seg. Estos valores de reactancias están dados en unidades relativas, y corresponden a los clásicos en turbogeneradores grandes. x_L es tal que con tensión normal supone una carga reactiva en el generador, con factor de potencia cero, aproximadamente igual a su capacidad en servicio permanente.

10-5. Un turbogenerador trifásico es de 13,8 kV (tensión compuesta) y 110 000 kVA,

valores nominales, y sus constantes son:

$$x_d = 1,10 \quad x'_d = 0,20 \quad T'_d = 1,0 \text{ seg.}$$

estando las reactancias expresadas en valores relativos.

Está funcionando en vacío, con la tensión de 1,00 unidad relativa, cuando se produce un cortocircuito trifásico en sus bornes. Excepto en el punto *g*, prescídase de la componente continua de la corriente de cortocircuito. Dese los resultados tanto en valores relativos como en ampere.

- ¿Cuál es el valor eficaz de la corriente de cortocircuito en régimen permanente? ¿Tiene algún significado físico el que la corriente de cortocircuito en régimen permanente sea menor que la nominal como ocurre aquí? Dese una explicación.
- Escríbese la ecuación numérica de la corriente instantánea en la fase *a* en función del tiempo. Considérese que el fallo ocurre en el momento en que el ángulo formado por el eje de la fase *a* y el eje longitudinal es de 90° . Habiéndose despreciado la componente de continua, se trata de la corriente de cortocircuito *simétrica*.
- Escríbese la ecuación numérica de la envolvente de la onda de corriente de cortocircuito en función de tiempo.
- A partir del resultado del punto anterior, escríbase la ecuación numérica que indique la variación en el tiempo del valor eficaz de la corriente de cortocircuito.
- Hállese el valor de la expresión del punto anterior cuanto $t = 0$. Este valor será el *valor eficaz simétrico inicial* de la corriente de cortocircuito.
- Generalícese el resultado obtenido en *d* escribiendo la ecuación del valor eficaz simétrico de la corriente de cortocircuito en función del tiempo, de la tensión inicial en la reactancia transitoria, y de las constantes de la máquina.
- Supóngase que en el punto *b* el fallo ocurre cuando el ángulo inicial es distinto de 90° : en ese caso, el valor de i_a cuando $t = 0$ no será nulo. Pero puesto que el devanado de la fase *a* es un circuito con resistencia e inductancia, la corriente total de la fase *a* no puede variar instantáneamente desde cero. Por consiguiente, deberá aparecer una componente continua que regularice la situación, componente que desaparece rápidamente.

Hállese el valor inicial máximo posible de esa componente de continua.

10-6. Además de las constantes dadas allí, la máquina del problema 10-5 tiene las siguientes:

$$x''_d = 0,10 \quad T''_d = 0,035 \text{ seg.}$$

Resuélvase nuevamente el problema 10-5, excepto el punto *b*, incluyendo los efectos transitorios y subtransitorios: en el punto *f* deberá quedar reflejada también la tensión inicial en la reactancia subtransitoria. En el punto *g* téngase en cuenta que la componente

de continua debe mantener invariada la intensidad instantánea de la fase inmediatamente antes y después de producirse el cortocircuito.

10-7. Un motor de inducción trifásico de rotor devanado, de cuatro polos, 440 V, 400 c.v., 50 Hz, conectado en Y, tiene las siguientes constantes en ohm por fase reducidas al estator:

$$x_1 = x_2 = 0,055; \quad x_{\phi} = 2,23; \quad r_1 = 0,0054; \quad r_2 = 0,0071$$

El motor se alimenta a su tensión normal a través de reactancias en serie de 0,03 ohm por fase, representativas de un grupo transformador reductor. Está trabajando a plena carga con los anillos rozantes cortocircuitados, siendo el rendimiento y el factor de potencia respectivamente de 90,5 y 90 por ciento. Se produce un cortocircuito trifásico en los bornes de alta del grupo transformador. Determinése la corriente simétrica inicial de cortocircuito en el motor, e indíquese cómo decrece.

10-8. Los compresores alternativos de aire o de amoníaco representan un par que fluctúa periódicamente alrededor de un valor medio constante. En un grupo de dos tiempos los armónicos del par tienen una frecuencia en ciclos por segundo que es múltiplo de la velocidad en revoluciones por segundo. Cuando, como es lo corriente, los compresores están accionados por motores síncronos, los armónicos del par producen fluctuaciones del ángulo de carga δ que pueden traducirse en pulsaciones fuertes e indeseables de la potencia y de la intensidad en el motor. Por consiguiente es indispensable que, para los armónicos significativos, la respuesta electrodinámica del motor se mantenga al mínimo posible.

- a. Para investigar sobre la respuesta del motor ante los armónicos del par, empleese el análisis lineal. Hagamos:

$$P_{sh} = P_{shm} \sin \omega t$$

en la que P_{shm} corresponde a la amplitud de la pulsación del armónico del par, cuya frecuencia angular es ω . Demuéstrese que la ecuación diferencial puede escribirse en la forma:

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d\delta}{dt} + \omega_n^2 \delta = \frac{P_{shm}}{P_j} \sin \omega t$$

Identificar estas cantidades en función de P_s , P_d y P_j .

- b. Demuéstrese que la ecuación vectorial de la solución en régimen permanente es:

$$\Delta = \frac{P_{shm}/P_j}{(\omega_n^2 - \omega^2) + j2\zeta\omega_n\omega}$$

- c. El motor que acciona el compresor es el del ejemplo 10-3. El compresor tiene un armónico del par, de primer orden, de una amplitud 780 Nw-m y frecuencia 3,6 Hz. Determinése la desviación máxima del ángulo de carga δ y la pulsación correspondiente de la potencia síncrona.
- d. Supongamos que se añade un volante de inercia para elevar J hasta 700 Kg-m². Repítanse en estas condiciones los cálculos efectuados en c, y compárense ambos resultados.

10-9. Las condiciones óptimas para el acoplamiento de un generador síncrono a un sistema de potencia se tienen cuando la tensión del alternador es igual a la del sistema, en magnitud, fase y frecuencia. Las desviaciones que sobre estas condiciones puedan existir se traducen en la aparición de corrientes y potencias indeseables acompañadas de oscilaciones electromecánicas del rotor del alternador. Mientras tales oscilaciones no sean excesivamente lentas, pueden estudiarse mediante un análisis linealizado.

Supongamos que un alternador de 2500 kW, factor de potencia 0,8, 25 Hz y 26 polos, accionado por un motor diesel, debe acoplarse a un sistema de 25 Hz suficientemente grande como para ser considerado de potencia infinita. La inercia del alternador, motor primario y volante en conjunto, vale $J = 31\ 500$ Kg-m². La potencia de amortiguación P_d es de 3600 W por grado eléctrico/segundo y la potencia sincronizante P_s es $1,21 \times 10^5$ watt por grado eléctrico. Tanto P_d como P_s se suponen constantes. En todos los casos que siguen la tensión en bornes se ajusta a su valor correcto. El regulador del motor primario es suficientemente insensible como para no actuar durante el período de sincronización.

- a. Consideremos que inicialmente la velocidad del alternador está correctamente ajustada, pero que se conecta con un defase de 20 grados eléctricos, estando el alternador adelantado respecto a la red. Hállese una expresión numérica de las oscilaciones electromecánicas que aparecen. Asimismo, búsquese el mayor valor del par ejercido sobre el rotor durante el período de sincronización. Desprécien-se las pérdidas, y exprésese dicho par en tanto por ciento del correspondiente a los valores nominales de la placa del motor.
- b. Repítase lo pedido en a; esta vez conectando el alternador en el momento oportuno pero siendo la velocidad inicial de 1 Hz en exceso.
- c. Repítase nuevamente lo pedido en a, conectando al alternador en el momento de estar éste adelantado 20 grados eléctricos respecto a la red, y siendo su velocidad inicial de 1 Hz en exceso.

10-10. Un motor síncrono cuya entrada en condiciones nominales de funcionamiento es de 10.000 kVA se conecta a una red de potencia infinita mediante una conexión corta de impedancia puramente reactiva. Los valores nominales del motor son: 50 Hz y 500 r.p.m., y tiene una inercia total, incluida la carga en el eje de $J = 21.000$ Kg-m². La curva potencia-ángulo en condiciones transitorias es $2,00 \sin \delta$, estando dada la amplitud en unidades relativas con 10.000 kVA como base.

- a. Estando el motor funcionando inicialmente en vacío, se aplica súbitamente a su eje una carga de 10.000 kW. ¿Conserva el motor su sincronismo?

- b.* ¿Hasta qué valor de carga puede aplicarse súbitamente a su eje sin pérdida de sincronismo?
- c.* Supongamos que la carga aplicada súbitamente al eje actúa únicamente durante 0,2 segundos y que luego transcurre un tiempo relativamente largo hasta la aplicación de cualquier otra carga. Determinése el valor máximo de la carga que en las condiciones citadas permite conservar el sincronismo. Empleése el procedimiento de la igualación de áreas. Para el cálculo del ángulo δ al cabo de 0,2 segundos prescínbase de la amortiguación, y sígase un análisis linealizado en el que la curva potencia-ángulo se toma aproximadamente como una recta que va desde el origen hasta el punto de 60° .

- 10-11.** *a.* Un motor síncrono polifásico está funcionando inicialmente en vacío. En estas condiciones se le aplica súbitamente una carga tal en el eje que suponga un par igual al nominal. Trácese la curva de velocidades instantáneas en función del tiempo, inmediatamente después de haberse aplicado la carga.
- b.* Repítase el problema del punto *a* sustituyendo el motor síncrono por uno de inducción polifásico.
- c.* Si las dos curvas trazadas en los puntos *a* y *b* difieren en algún aspecto, razónese el motivo de tales diferencias.

10-12. Un motor de inducción polifásico en el que las pérdidas mecánicas pueden considerarse despreciables está accionando una carga puramente de inercia. El momento de inercia de rotor más carga es de J unidades MKS.

- a.* Hállese una expresión de la energía perdida en el rotor durante la puesta en marcha, dando el resultado en función de J y de la velocidad angular síncrona ω_s .
- b.* Hállese una expresión de la energía perdida en el rotor durante un proceso de inversión desde la plena velocidad hacia adelante, conseguido invirtiendo la secuencia de las fases de entrada. Dése el resultado en función de J y de ω_s .
- c.* Establézcase y discútase el grado de dependencia entre los resultados hallados en *a* y *b* y el esquema limitador de corriente que puede aplicarse tanto en el arranque como en la inversión.
- d.* Un motor trifásico de inducción de jaula de ardilla de 5 c.v., 4 polos, 50 Hz tiene un rendimiento a plena carga del 85 por ciento. El momento de inercia total de motor y carga es $J = 0,065 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$. Las pérdidas totales en el motor durante una inversión son 2,5 veces mayores que las del rotor. Se prescindirá de la mengua de ventilación debida a la menor velocidad media durante la inversión.

Valiéndose del resultado obtenido en *b* calcúlese el número de veces por minuto que puede realizarse una inversión del motor sin sobrepasar el calentamiento tolerado.

- e.* Razónese sobre el optimismo o pesimismo del resultado obtenido en *d*.

10-13. Los datos de la siguiente tabla corresponden a puntos de la curva par-velocidad de un motor trifásico de inducción de jaula de ardilla alimentado por un sistema de tensiones equilibrado.

Par: unidades relativas	0	1,00	2,00	3,00	3,50	3,25	3,00
Velocidad: unidades relativas	1,00	0,97	0,93	0,80	0,47	0,20	0

La velocidad base es la de sincronismo y el par base el nominal. El motor está acoplado a una máquina herramienta que precisa del par nominal independientemente de la velocidad. La inercia del motor más carga es tal que se requieren 1,2 segundos para alcanzar la velocidad de régimen con un par de aceleración constante e igual al nominal.

Estando el motor accionando la carga en condiciones normales estables, la tensión se reduce repentinamente al 50 por ciento de su valor nominal debido a un cortocircuito ocurrido en las proximidades. Se mantiene esta tensión reducida durante 0,6 segundos restableciéndose entonces el servicio a su valor normal por haberse eliminado el cortocircuito. El interruptor de tensión mínima del motor no llega a actuar. ¿Se parará el motor? Si no se para ¿cuál será la velocidad mínima que alcance? Prescídase de todos los efectos de importancia secundaria.

10-14. Un motor trifásico de inducción de rotor devanado, 230 V, 6 polos, 50 Hz conectado en Y tiene una reactancia de dispersión de rotor más estator igual a 0,50 ohm por fase reducida al estator, y un momento de inercia de rotor más carga de 1 Kg-m². A excepción de las pérdidas en el cobre del rotor, todas las demás pérdidas pueden despreciarse así como también puede despreciarse la corriente de excitación.

Este motor está conectado a una red equilibrada de 230 V y acciona una carga puramente de inercia.

Se pone en marcha conectándolo directamente a la línea y se regula la resistencia del circuito del rotor de forma que la velocidad de la carga se eleve desde el reposo hasta la mitad de la de sincronismo en el menor tiempo posible.

Determinése el valor de la resistencia rotórica reducida al estator, y el tiempo mínimo necesario para alcanzar la citada velocidad igual a la mitad de la de sincronismo.

10-15. Un motor trifásico de inducción está funcionando en régimen permanente con un deslizamiento s_1 . Invertiendo constantemente dos cables de entrada en el estator el motor queda conectado a contracorriente para detenerlo rápidamente.

Empléense las notaciones y supuestos del ejemplo 10-6 y considérese que el motor funciona en vacío.

- Hállese una fórmula para el tiempo de frenado del motor.
- Supóngase que se ha de invertir el sentido de rotación del motor en lugar de limitarse a pararlo. Hállese una fórmula para el tiempo de inversión.

10-16. Un motor trifásico de inducción de jaula de ardilla de 4160 V, 2500 c.v., 2 polos, 50 Hz, acciona la bomba de alimentación de una caldera en una central térmica. En la tabla reseñada más abajo figuran los valores correspondientes a distintos puntos de la curva par-velocidad del motor con la tensión nominal: las velocidades están dadas en

tanto por ciento de la de sincronismo y los pares en tanto por ciento del par nominal. En la misma tabla figuran también los valores del par resistente de la bomba de alimentación, expresados asimismo en tanto por ciento del par nominal del motor. El sistema se pone en marcha a la tensión nominal con la válvula de descarga abierta pero trabajando contra una válvula de retención hasta tanto se igualen las presiones de la bomba y del sistema. La porción recta de la característica de la bomba comprendida entre las velocidades 0 y 10 por ciento representa el par necesario para vencer los rozamientos y resistencias pasivas. A la velocidad de 92 por ciento se abre la válvula de retención y por ello existe una discontinuidad en la inclinación de la curva característica. El par máximo del motor tiene lugar a la velocidad de 98 por ciento.

% velocidad	0	10	30	50	70	90	92	98	99,5
% par motor	75	75	75	75	80	125	155	240	100
% par bomba	15	0+	4	12	26	42	44	87	100

La inercia del conjunto es tal que a la velocidad síncrona la energía almacenada por las masas rotativas es de 5400 kW-seg.

- a. Determinése el tiempo transcurrido desde que se aplica la tensión al motor hasta que se abre la válvula de retención.
- b. Determinése el tiempo necesario para que el motor alcance el punto de par máximo.

10-17. Supongamos que el motor de la bomba del problema anterior debe ponerse en marcha ocasionalmente con el 80 por ciento de la tensión nominal.

Admitamos que el par motor es proporcional al cuadrado de la tensión.

- a. Determinése el tiempo necesario para que se abra la válvula de retención.
- b. ¿Hasta qué valor puede bajarse la tensión de arranque del motor sin impedirle alcanzar la velocidad necesaria para que la bomba suministre agua al sistema?

Motores fraccionales de corriente alterna

Los motores fraccionales encuentran múltiples aplicaciones en el accionamiento de todo tipo de equipos domésticos, de oficinas y factoría. Difieren de los motores corrientes en la gran variedad de características conseguibles para su adaptación a las necesidades propias de cada aplicación. Otra particularidad es la de que casi todos los de alterna son monofásicos.

Aun cuando los motores fraccionales de alterna son de construcción relativamente sencilla, su análisis presenta dificultades notablemente mayores que el análisis de motores trifásicos más grandes. Muchos proyectos se llevan a cabo construyendo y probando prototipos hasta conseguir las prestaciones deseadas. Los cálculos del proyecto se realizan para partir de una mayor aproximación y reducir en lo posible los sucesivos tanteos necesarios hasta llegar al fin pretendido.

En este capítulo se describirán cualitativamente los distintos tipos de motores apoyándonos en la teoría de los campos rotativos, y seguidamente estudiaremos un método de análisis apropiado para motores bifásicos, a partir del cual se podrán calcular las características de arranque y marcha de motores de inducción monofásicos¹.

Los motores serie de alterna, conocidos también con el nombre de motores universales, tienen gran aplicación en herramientas portátiles, aspiradores y aparatos de cocina, porque su gran velocidad se traduce en una gran potencia en relación a su pequeño tamaño. Muy frecuentemente, la regulación de velocidad de estos motores se realiza mediante dispositivos estáticos, como se verá seguidamente en este mismo capítulo.

¹ Para un tratado más extenso de los motores fraccionales, véase: C.G. Veinott, "Fractional and Subfractional Horsepower Electric Motors". Mc Graw-Hill Book Company, Nueva York 1970.

11-1. MOTORES DE INDUCCION MONOFASICOS - EXAMEN CUALITATIVO

Estructuralmente, los tipos más corrientes de motores de inducción monofásicos se asemejan a los motores polifásicos de jaula de ardilla excepto en lo que se refiere a la disposición de los devanados del estator. En la Fig. 11-1 está representado un motor de inducción con rotor de jaula de ardilla y con un devanado monofásico en el estator. Este devanado, en lugar de estar formado por una bobina concentrada, está distribuido en ranuras de forma que la distribución espacial de la f.m.m. sea aproximadamente senoidal. Un motor como el descrito no tiene de por sí par de arranque alguno, pero una vez puesto en marcha por medios auxiliares, seguirá girando por sí mismo.

Antes de entrar en los métodos auxiliares de puesta en marcha describiremos las propiedades básicas del motor elemental de la Fig. 11-1.

Examinando las condiciones existentes a rotor parado puede comprobarse que, efectivamente, no nace ningún par de arranque. En la citada Fig. 11-1 resulta evidente que el eje del campo del estator permanece fijo en la dirección del eje de las bobinas. Si se alimentan las bobinas con corriente alterna, la onda de f.m.m. del estator es fija en el espacio, pero pulsatoria en magnitud, y la intensidad del campo es alternativa en polaridad y variable senoidalmente en el tiempo. Por efecto de transformador, en el rotor se inducen corrientes en un sentido tal que la f.m.m. que producen se opone a la del estator. El eje de la onda de f.m.m. del rotor coincide con el eje de la del estator, y por consiguiente el ángulo de par es nulo así como el par de arranque. El motor en estas condiciones no es más que un transformador estático monofásico con el secundario en cortocircuito.

Las cosas no son tan sencillas cuando se hace girar el motor. Para explicar su funcionamiento puede partirse de dos conceptos distintos: el primero es el de deducir las condiciones de las ya establecidas para los motores polifásicos, y el segundo es el de empezar de nuevo y demostrar que en determinadas circunstancias quedan satisfechas las condiciones precisas para dar lugar a que aparezca un par motor. Los dos conceptos conducen, naturalmente, al mismo resultado y ambos pueden expresarse en términos cuantitativos. Los métodos de análisis resultantes se denominan respectivamente *teoría de campo girato-*

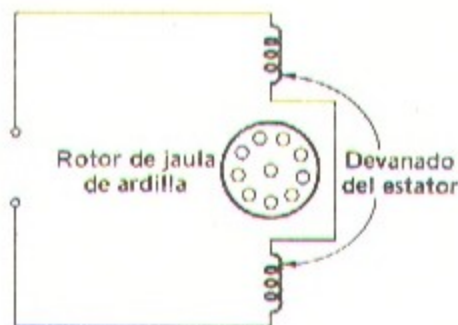


Fig. 11-1. Motor de inducción monofásico elemental.

rio y teoría de campo transversal. Cada uno de ellos tiene sus ventajas, pero en general, a efectos de cálculo, hay poca opción de elección entre ambos.

De acuerdo con la teoría del campo transversal, cuando se hace girar el rotor existirá en él además de la tensión transformada otra tensión inducida en virtud de su movimiento de rotación en el campo fijo del estator. En la Fig. 11-1, por ejemplo, las tensiones inducidas en los conductores del rotor debidas al movimiento de éste, tienen la misma dirección en todos los conductores de la mitad superior del dibujo, y la dirección contraria en todos los de la mitad inferior. Estas tensiones debidas al movimiento crean una componente de corriente en el rotor y una componente de la onda de f.m.m. del mismo, cuyo eje está desplazado 90° eléctricos respecto al eje del estator. El ángulo de par correspondiente a esta componente de la f.m.m. del rotor es de 90° , con lo que realmente se genera un par. Un análisis más detallado nos demostrará que el sentido de este par es el mismo que el del movimiento de rotación, y que se cumplen todas las condiciones necesarias para mantenerlo continuamente².

La teoría de campo giratorio sigue el razonamiento de que si se llega a producir un campo magnético giratorio, nacerá un par como en un motor de inducción, y es más, este par, cuantitativamente, será análogo al de los motores polifásicos tratados en el capítulo 7, pudiéndose esperar un funcionamiento aproximadamente igual al de ellos. El estudio de los motores de inducción monofásicos que se realiza en el presente capítulo se basará en la teoría del campo giratorio.

Consideremos el motor elemental de la Fig. 11-1, del cual en la Fig. 11-2 *a* se representa esquemáticamente el desarrollo de un polo del devanado del estator mediante los laterales de la bobina concentrada. Recordemos, sin embargo, que el devanado real de un estator está distribuido entre un cierto número de ranuras de tal forma que la distribución

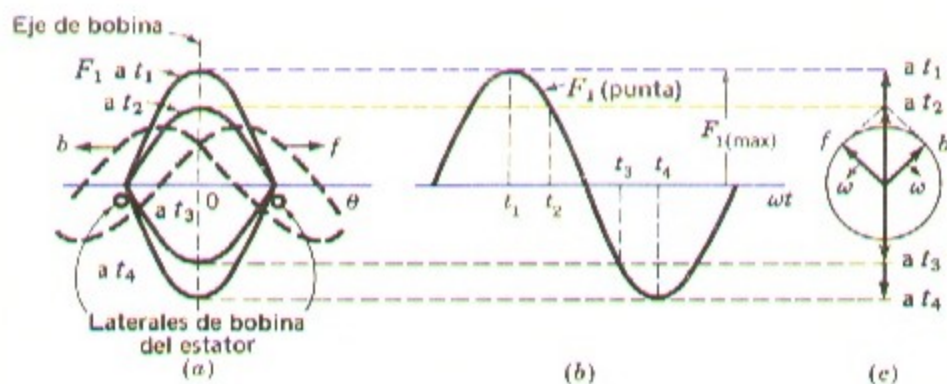


Fig. 11-2. Ondas de f.m.m. en un motor de inducción monofásico. (a) Ondas espaciales. (b) Variaciones en el tiempo. (c) Representación vectorial.

² Para el estudio y aplicaciones de la teoría de campo transversal, véase el capítulo 2 de este mismo texto.

espacial de la f.m.m. sea aproximadamente senoidal y centrada con el eje de la bobina. Si se desprecian los armónicos, la onda de la f.m.m. del estator F_1 puede escribirse:

$$F_1 = F_1 (\text{punta}) \cos \theta \quad (11-1)$$

en la que θ es el espacio angular eléctrico medido desde el eje de la bobina del estator, y $F_1 (\text{punta})$ es el valor instantáneo de la onda de f.m.m. en el eje de la bobina, que es proporcional al valor instantáneo de la corriente en el estator. Si la corriente en el estator varía senoidalmente, $F_1 (\text{punta})$ variará también senoidalmente con el tiempo, como puede verse en la Fig. 11-2 *b*, y en la 11-2 *a* puede verse la distribución espacial de la f.m.m. del estator en distintos instantes de tiempo. Dicha onda de f.m.m. del estator es fija en el espacio variando su amplitud también en forma senoidal con el tiempo.

A efectos del análisis, esta onda estacionaria y pulsatoria puede descomponerse en dos ondas giratorias de amplitud constante. Consideremos que la f.m.m. pulsatoria puede representarse por un vector en el espacio, de longitud variable, dirigido hacia arriba durante la mitad del tiempo y hacia abajo durante la otra mitad, y cuya magnitud y dirección en cualquier momento esté determinada por la magnitud y dirección instantánea de la corriente en el estator. Este vector está representado en la Fig. 11-2*c* por medio de las flechas verticales que en ella aparecen, y que corresponden a los mismos instantes de tiempo indicados en las Figs. 11-2 *a* y *b*. Pero en la propia figura 11-2 *c* puede comprobarse que dicho vector puede ser considerado como la suma de dos vectores iguales girando en sentidos opuestos, cada uno de los cuales tiene una longitud constante igual a la mitad de la longitud máxima del vector pulsatorio original; en consecuencia, la onda pulsatoria de la f.m.m. del estator puede descomponerse en dos ondas giratorias iguales entre sí, que giren en sentidos opuestos a la velocidad de sincronismo. En la Fig. 11-2 *a* se han representado con líneas de trazos las dos ondas componentes, *f* y *b*, girando cada una en distinto sentido, en el instante t_2 : los correspondientes vectores giratorios son los *f* y *b* de la Fig. 11-2*c*.

Por procedimientos analíticos se llega a las mismas conclusiones, siendo el análisis esencialmente el mismo que en la teoría de los campos giratorios expuesta en el apartado 3-4 con la diferencia de que aquí interviene una sola fase en el estator, mientras que en el apartado citado intervenían las f.m.m. de las tres fases. Por tanto, si la corriente en el estator es una función cosenoidal del tiempo, el valor instantáneo de la punta de la onda pulsatoria de f.m.m. será:

$$F_1 (\text{punta}) = F_1 (\text{max}) \cos \omega t \quad (11-2)$$

siendo $F_1 (\text{max})$ el valor de punta correspondiente a la máxima corriente instantánea. Substituyendo la ecuación 11-2 en la 11-1 tendremos que la onda de f.m.m. en función del tiempo y del espacio será:

$$F_1 = F_1 (\text{max}) \cos \omega t \cos \theta \quad (11-3)$$

y aplicando a esta fórmula la del producto de dos cosenos llegaremos finalmente a:

$$F_1 = \frac{1}{2} F_{1(\max)} \cos(\theta - \omega t) + \frac{1}{2} F_{1(\max)} \cos(\theta + \omega t) \quad (11-4)$$

Cada uno de los términos cosenoidales de esta última ecuación representa una función senoidal del ángulo θ . Cada uno de ellos tiene un valor punta igual a la mitad de la amplitud máxima de la onda pulsatoria, y un ángulo de fase ωt . Ambas ondas están centradas con el eje del devanado del estator en el momento en que la f.m.m. de éste pasa por su máximo. El ángulo ωt determina la rotación de cada una de las ondas alrededor del entrehierro a la velocidad angular constante de ω radianes eléctricos por segundo y en sentidos opuestos.

La primera de las dos ondas, directa, cuyo argumento es $\theta - \omega t$ gira en el sentido de θ , y la segunda, inversa, cuyo argumento es $\theta + \omega t$ lo hace en sentido contrario. Con un devanado polifásico equilibrado, las componentes que giran en este último sentido se neutralizan entre sí quedando únicamente las de sentido directo como en la ecuación 3-36 para un devanado trifásico, y contrariamente a esto, si el devanado es monofásico subsisten ambas componentes. Con esto queda demostrado que la ecuación 11-4 nos conduce a las mismas conclusiones a que llegamos por medio del diagrama vectorial de la Fig. 11-2 c.

Cada una de estas ondas de f.m.m. componentes, ejerce una acción motora de inducción, pero sus correspondientes pares están en oposición. Si el rotor permanece parado, las dos ondas de flujo, directa e inversa, creadas por las f.m.m. del estator y por las corrientes del rotor serán iguales entre sí, y también serán iguales las correspondientes componentes del par, es decir, que no existirá par de arranque eficaz alguno. Si ambas ondas de flujo se conservan iguales estando el rotor girando, cada uno de los campos componentes dará lugar a una característica par-velocidad similar a la de un motor polifásico con impedancia de dispersión del estator despreciable, como se ha representado con las líneas de trazos *f* y *b* de la Fig. 11-3 a. La característica par-velocidad resultante, que no es más que la suma algebraica de las dos curvas componentes, muestra que si el motor se arranca por cualquier procedimiento auxiliar, una vez en marcha desarrolla un par, cualquiera que sea el sentido de rotación.

El supuesto de que estando el rotor en movimiento las ondas de flujo en el entrehierro se mantienen iguales constituye una simplificación más bien algo exagerada de lo que en realidad ocurre. En primer lugar, se ha prescindido de la impedancia de dispersión del estator, y por otra parte, no se han tenido debidamente en cuenta los efectos de las corrientes inducidas en el rotor. Ambos efectos se incluirán en la teoría cuantitativa detallada que se expone en el apartado 11-4. Las siguientes consideraciones cualitativas nos demostrarán que el comportamiento de un motor de inducción monofásico es notablemente mejor que el que cabría esperar al considerar iguales ambas ondas de flujo.

Cuando el rotor está en movimiento, la componente de la corriente en el mismo inducida por el campo inverso es mayor que cuando está parado, y el factor de potencia es menor: su f.m.m. que se opone a la de la corriente en el estator, debilita por consiguiente la onda de flujo inversa. Por el mismo motivo, el efecto magnético de la componente de corriente rotórica inducida por el campo directo es menor cuando el rotor gira

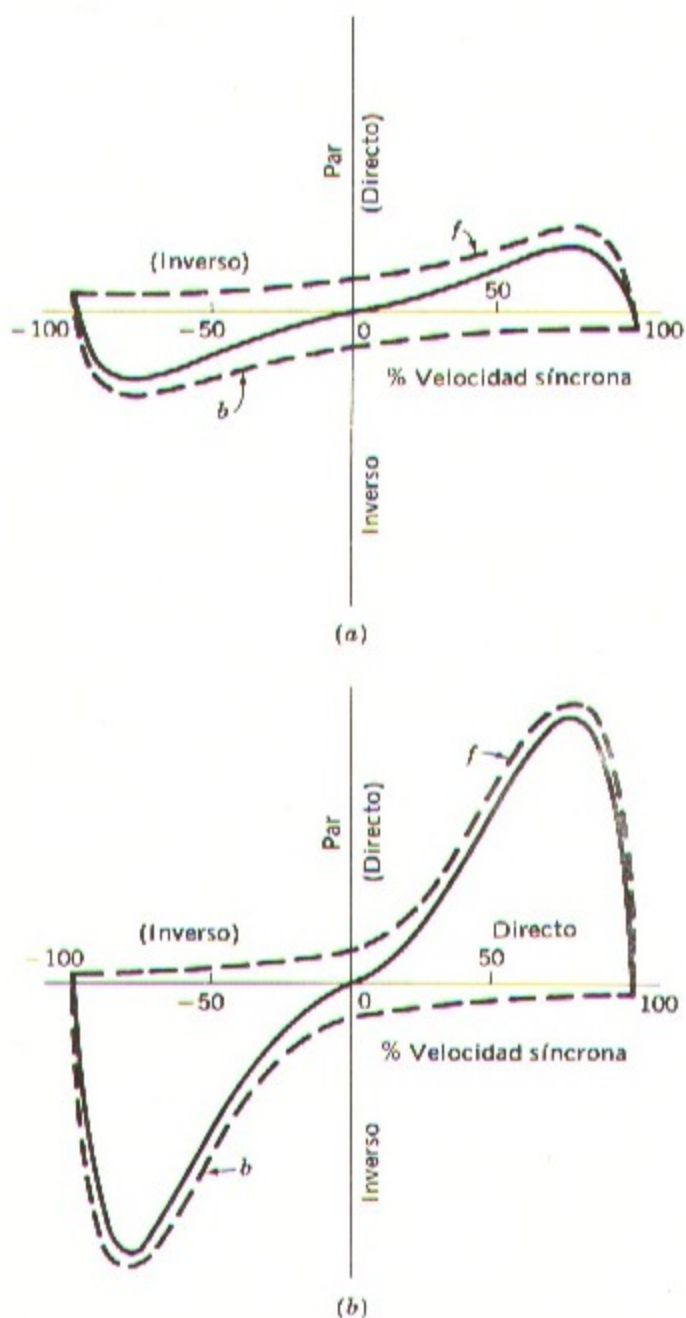


Fig. 11-3. Característica par-velocidad de un motor de inducción monofásico. (a) Supuestas constantes las ondas de flujo directa e inversa. (b) Teniendo en cuenta las variaciones de ambas ondas.

que cuando está parado, por ser menor ella misma, y el factor de potencia se acrecienta. A medida que aumenta la velocidad, la onda de flujo directa crece y la inversa decrece manteniéndose aproximadamente constante su suma, ya que es la que induce en el estator la fuerza contraelectromotriz que a su vez es también casi constante si la caída de tensión en la impedancia de dispersión del estator es pequeña.

Por tanto, con el rotor en movimiento, el par debido al campo directo es mayor y el debido al campo inverso menor que los señalados en la Fig. 11-3 *a*, siendo la situación real parecida a la de la Fig. 11-3 *b*. En la zona de velocidades normales, es decir, con poco deslizamiento, el campo directo es varias veces mayor que el inverso, y la onda de flujo no difiere mucho de la del campo giratorio de amplitud constante en el entrehierro de un motor polifásico equilibrado. Por tanto, dentro de esa zona de velocidades normales, la característica par-velocidad de un motor monofásico no es muy inferior a la de un motor polifásico con el mismo rotor trabajando con igual densidad máxima de flujo en el entrehierro.

Además de los pares representados en la Fig. 11-3 se producen también pares pulsatorios de doble frecuencia que la del estator debidos a la interacción entre los dos flujos giratorios y las ondas de f.m.m. que se deslizan la una respecto a la otra a doble velocidad que la de sincronismo. El par producido por estas acciones mutuas es de valor medio nulo, pero tiende a hacer que el motor sea más ruidoso que si fuera polifásico. Estas pulsaciones del par son inevitables en un motor monofásico, debido a las pulsaciones de la potencia de entrada que son inherentes a los circuitos monofásicos, pero sus efectos pueden reducirse al mínimo empleando una suspensión elástica en el motor. El par dado por las curvas par-velocidad es el medio de los valores instantáneos en el tiempo.

11-2. ARRANQUE Y MARCHA DE LOS MOTORES DE INDUCCION Y SINCRONOS MONOFASICOS

Los motores de inducción monofásicos se clasifican de acuerdo con su procedimiento de puesta en marcha, y en general se conocen por nombres descriptivos de tales procedimientos. La elección del motor apropiado se basa en el par de arranque y de marcha requerido por la carga, por las exigencias del ciclo y por las limitaciones impuestas por la red a las corrientes de arranque y de marcha normal. El coste de un motor monofásico crece con su potencia y sus características, tales como la relación entre el par de arranque y la intensidad, por consiguiente, para las aplicaciones prácticas se elige el de menor potencia compatible con el servicio pretendido a fin de reducir en lo posible el coste. Si para una aplicación específica se van a utilizar muchos motores iguales, en general se proyectan especialmente para dicha aplicación consiguiéndose así una reducción del coste: en una fábrica de motores fraccionales, una pequeña disminución del coste individual puede llegar a tener gran importancia.

A continuación estudiaremos cualitativamente los distintos procedimientos de puesta en marcha y las características par-velocidad resultantes.

a. Motores de fase partida

Los motores de fase partida tienen dos devanados en el estator: uno principal, m , y otro auxiliar, a , con sus respectivos ejes dispuestos en el espacio a 90° eléctricos entre sí: su conexión puede verse en la Fig. 11-4 *a*. El devanado auxiliar tiene una relación resistencia-reactancia mayor que el principal, de forma que las corrientes en ambos están defasadas entre sí tal como se indica en el diagrama vectorial de la Fig. 11-4 *b* representativo de las condiciones existentes en el arranque. Puesto que la intensidad I_a en el devanado auxiliar está adelantada respecto a la I_m del principal, el campo del estator alcanza su máximo primeramente según el eje del devanado auxiliar, y luego, algo más tarde en el tiempo, según el del eje principal.

Dichas corrientes en ambos devanados equivalen a una corriente bifásica desequilibrada, y el motor equivale asimismo a un motor bifásico equilibrado: el resultado es un campo giratorio en el estator capaz de provocar el arranque del motor. Una vez el motor en marcha, se desconecta el devanado auxiliar, generalmente por medio de un interruptor centrífugo que actúa cuando la velocidad ha llegado aproximadamente al 75 por ciento de la de sincronismo. Para conseguir la alta relación resistencia-reactancia en el devanado auxiliar existe un método sencillo que consiste en bobinar éste con hilo más fino que el principal, cosa que se puede hacer sin inconveniente ya que este devanado auxiliar está conectado únicamente durante el periodo de puesta en marcha. Su reactancia puede reducirse un tanto situándolo en la parte superior de las ranuras. La Fig. 11-4 *c* representa una curva característica par-velocidad típica.

Los motores de fase partida poseen un par de arranque moderado con intensidad de puesta en marcha reducida: entre sus aplicaciones clásicas se pueden citar los ventiladores, bombas centrífugas y otros. Su gama de potencias abarca generalmente desde 1/20 a 1/2 c.v. siendo dentro de este campo los más económicos disponibles.

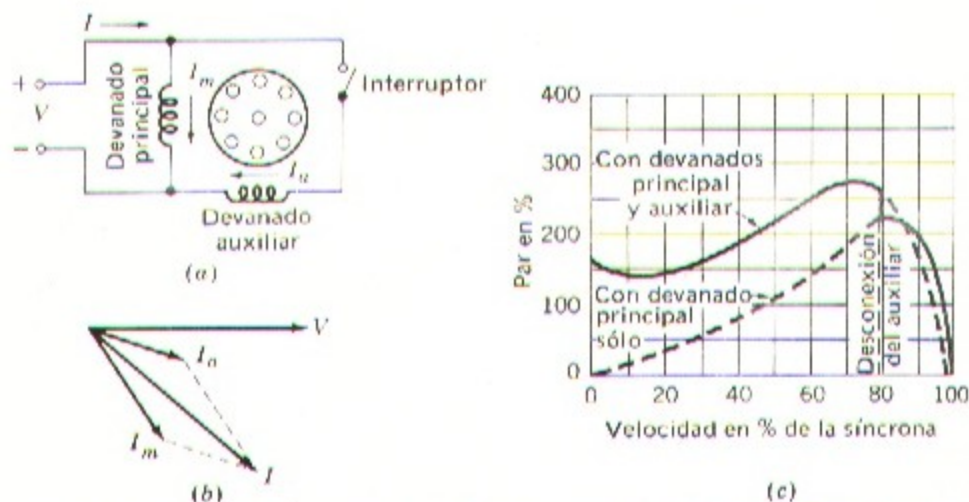


Fig. 11-4. Motor de fase partida. (a) Esquema de conexiones. (b) Diagrama vectorial en el arranque. (c) Característica típica par-velocidad.

b. Motores con condensador

Para mejorar las condiciones de arranque y de marcha normal pueden emplearse condensadores, dependiendo los resultados obtenidos de la capacidad y forma de conexión de éstos.

El motor con condensador para la puesta en marcha es en el fondo un motor de fase partida, pero el defase entre ambas corrientes se consigue mediante un condensador en serie con el devanado auxiliar tal como puede verse en la Fig. 11-5 *a*. También aquí, como en el caso anterior, el devanado auxiliar se desconecta una vez el motor está en marcha por lo que tanto su devanado como el condensador, al trabajar sólo intermitentemente, pueden proyectarse con vistas a su mínimo coste. Si el condensador de arranque es de capacidad adecuada puede conseguirse que la corriente I_a en el devanado auxiliar, estando el motor parado, se adelante 90° eléctricos a la I_m del devanado principal, como si se tratara de un motor bifásico equilibrado (véase la Fig. 11-5 *b*). En la práctica, la relación más conveniente entre el par, la corriente de arranque y el coste total se consigue con un defase de algo menos de los 90° citados. En la Fig. 11-5 *c* puede verse una curva característica par-velocidad típica en la que resalta el alto valor del par de arranque conseguido. Estos motores se emplean en compresores, bombas, instalaciones de refrigeración y de acondicionamiento de aire, y en general otras aplicaciones que requieran un fuerte par de arranque. La Fig. 11-6 representa la vista en corte de un motor con arranque por capacidad.

En los motores con capacidad permanente no se corta el circuito auxiliar una vez el motor está en marcha: con ello se simplifica la construcción al prescindir del interruptor centrífugo, y se mejoran el factor de potencia, el rendimiento y las pulsaciones del par. El

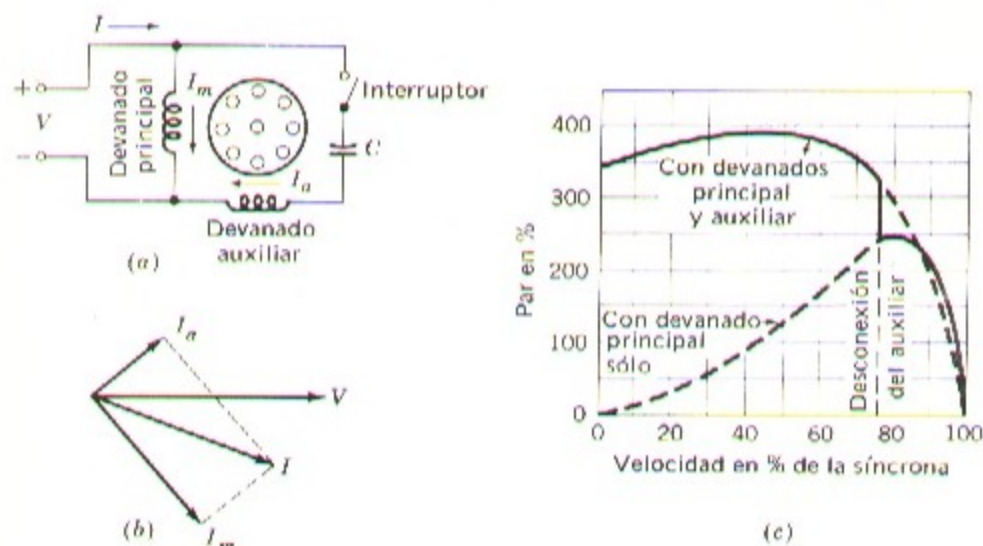


Fig. 11-5. Motor con arranque por capacidad. (a) Esquema de conexiones. (b) Diagrama vectorial en el arranque. (c) Característica típica par-velocidad.

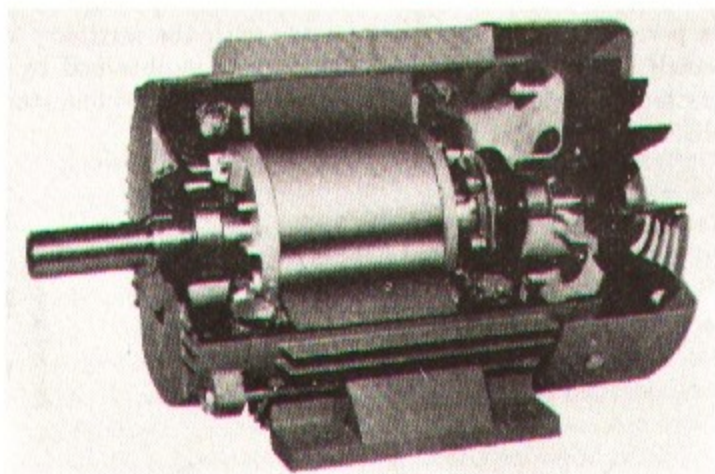


Fig. 11-6. Vista en sección de un motor de inducción con condensador de arranque. El interruptor del circuito de arranque está situado a la derecha del rotor. El motor es de tipo protegido contra la humedad. (*General Electric Company.*)

condensador y el devanado auxiliar pueden proyectarse de forma que el funcionamiento se realice como con un sistema bifásico con cualquiera de las cargas previstas, con lo que queda eliminado el campo inverso mejorándose en consecuencia el rendimiento. También se eliminan las pulsaciones de frecuencia doble del par, pues el condensador actúa como acumulador de energía suavizando así también las pulsaciones de potencia en la red monofásica, y el motor es más silencioso. El par de arranque debe sacrificarse algo, ya que el condensador constituye necesariamente un compromiso entre las condiciones óptimas en el arranque y en marcha normal. En la Fig. 11-7 puede verse el esquema de conexiones y la curva característica par-velocidad resultante.

Teóricamente se pueden conseguir las condiciones óptimas tanto de arranque como de marcha normal empleando condensadores distintos para cada uno de estos servicios, tal

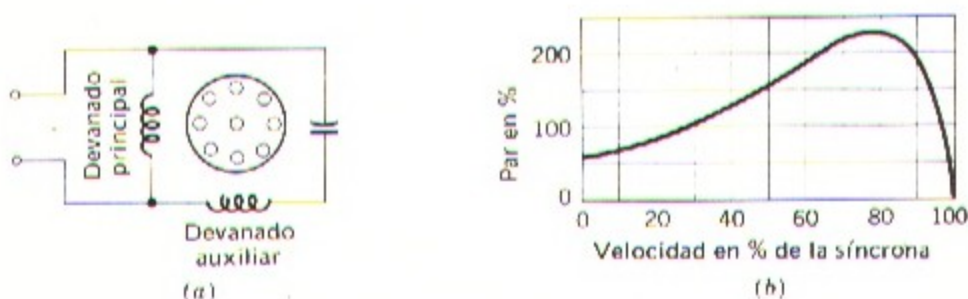


Fig. 11-7. Motor con condensador permanentemente conectado y su correspondiente curva par-velocidad.

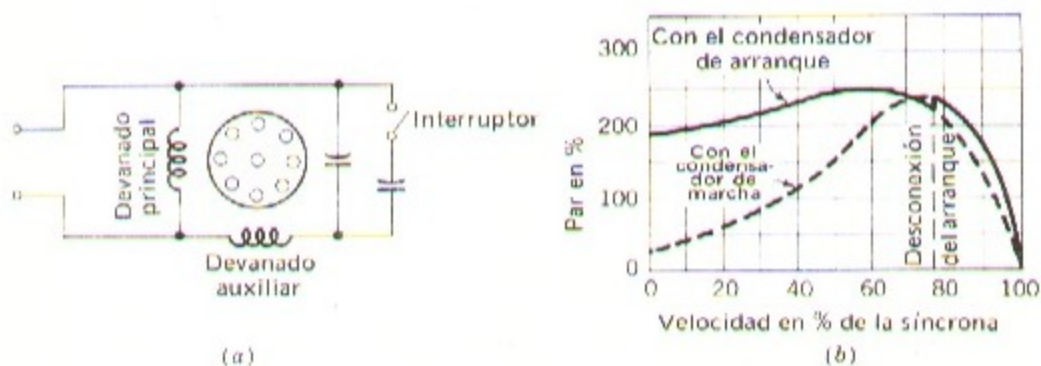


Fig. 11-8. Motor con dos condensadores y su correspondiente curva par-velocidad.

como se representa en la Fig. 11-8 *a*. El condensador de menor valor necesario para la marcha normal está conectado permanentemente en serie con el devanado auxiliar, y el mayor valor conveniente en el arranque se obtiene mediante un segundo condensador conectado en paralelo con el primero: este segundo condensador se desconecta una vez el motor está ya en marcha.

Los condensadores empleados para el arranque por capacidad de motores de 1/2 c.v. acostumbran a tener una capacidad del orden de $300 \mu\text{F}$, y puesto que sólo deben conducir corrientes durante el corto período de arranque se emplean condensadores electrolíticos de alterna particularmente compactos, contruidos especialmente para este fin. El condensador permanentemente conectado en el mismo motor es de unos $40 \mu\text{F}$ y puesto que por su propia función está continuamente en servicio es del tipo de hojas de papel y hojas metálicas impregnado en aceite. El coste del motor está relacionado con su idoneidad: el motor con condensador permanente es el más económico, le sigue el que sólo tiene condensador de arranque, y por último, el más costoso es el de dos condensadores.

Ejemplo 11-1

Un motor de 1/3 c.v., 120 V, 50 Hz con condensador para el arranque, tiene en el devanado principal y en el auxiliar las siguientes constantes:

$$\text{Devanado principal } Z_m = 4,5 + j3,7 \text{ ohm}$$

$$\text{Devanado auxiliar } Z_a = 9,5 + j3,5 \text{ ohm}$$

Hállese la capacidad del condensador de puesta en marcha necesaria para que en el momento del arranque las corrientes de ambos devanados estén en cuadratura.

SOLUCION

En las Fig. 11-5 *a* y *b* están representadas las intensidades I_m e I_a . El ángulo de la

impedancia correspondiente al devanado principal es:

$$\phi_m = \text{arc. tg} \frac{3,7}{4,5} = 39,6^\circ$$

y el del devanado auxiliar:

$$\phi_a = 39,6 - 90,0 = -50,4^\circ$$

La reactancia X_c del condensador debe satisfacer la igualdad:

$$\text{arc. tg} \frac{3,5 - X_c}{9,5} = -50,4^\circ$$

$$\frac{3,5 - X_c}{9,5} = -1,21$$

$$X_c = 1,21 \times 9,5 - 3,5 = 15,0 \text{ ohm.}$$

y la capacidad C será:

$$C = \frac{10^6}{15,0 \times 314} = 212 \mu\text{F}$$

c. Motores con espiras de sombra

Como puede verse en la representación esquemática de la Fig. 11-9 *a*, los motores con arranque por espira de sombra normalmente tienen polos salientes, una parte de los cuales está rodeada por un anillo de cobre en cortocircuito que es lo que constituye la *espira de sombra* propiamente dicha. La corriente inducida en esta espira motiva que el flujo en la

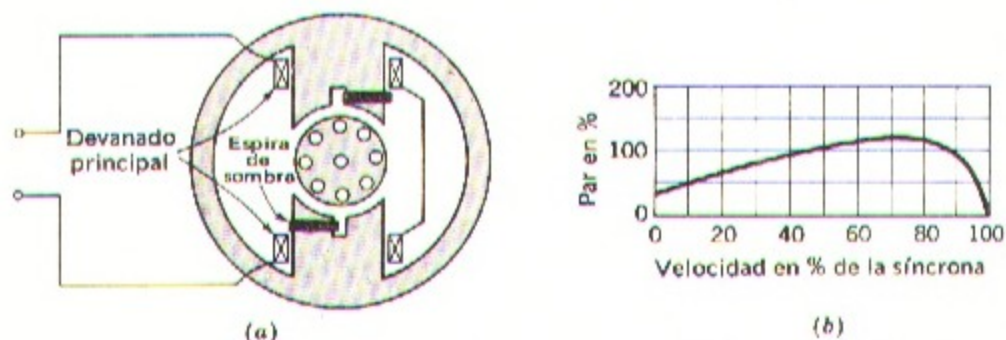


Fig. 11-9. Motor con espiras de sombra y su correspondiente curva par-velocidad.

parte de polo por ella rodeada se retrase respecto al de la otra parte. El resultado final es semejante al de un campo giratorio moviéndose en el sentido de la parte libre hacia la sombreada de cada polo, engendrándose así un par de arranque, aunque pequeño, representado por la característica par-velocidad de la Fig. 11-9 b. Los motores de este tipo son los más económicos dentro de los de potencia fraccional, construyéndose normalmente de hasta 1/20 c.v.

d. Motores con arranque por reluctancia

Cualquiera de los motores de inducción de los tipos descritos anteriormente puede convertirse en un motor síncrono del tipo de reluctancia, que arranca por sí mismo. Cualquier disposición que haga que la reluctancia del entrehierro sea función de la posición angular relativa del rotor respecto al eje de la bobina del estator desarrollará un par de reluctancia cuando el rotor gire a velocidad síncrona. Supongamos que se suprimen algunos dientes en un rotor de jaula de ardilla, dejando no obstante invariadas las barras y los anillos que las cortocircuitan, exactamente igual que en un motor de inducción corriente de jaula de ardilla. La Fig. 11-10 a representa una de las láminas dispuestas para un rotor como el descrito, destinado a un motor de cuatro polos en el estator: dicho estator puede ser polifásico, o puede ser uno cualquiera de los tipos monofásicos ya vistos. El motor arrancará como un motor de inducción, y con cargas ligeras se irá acelerando hasta una velocidad de escaso deslizamiento. El par de reluctancia nace de la tendencia del rotor a situarse por sí mismo en la posición de mínima reluctancia respecto a la onda de flujo

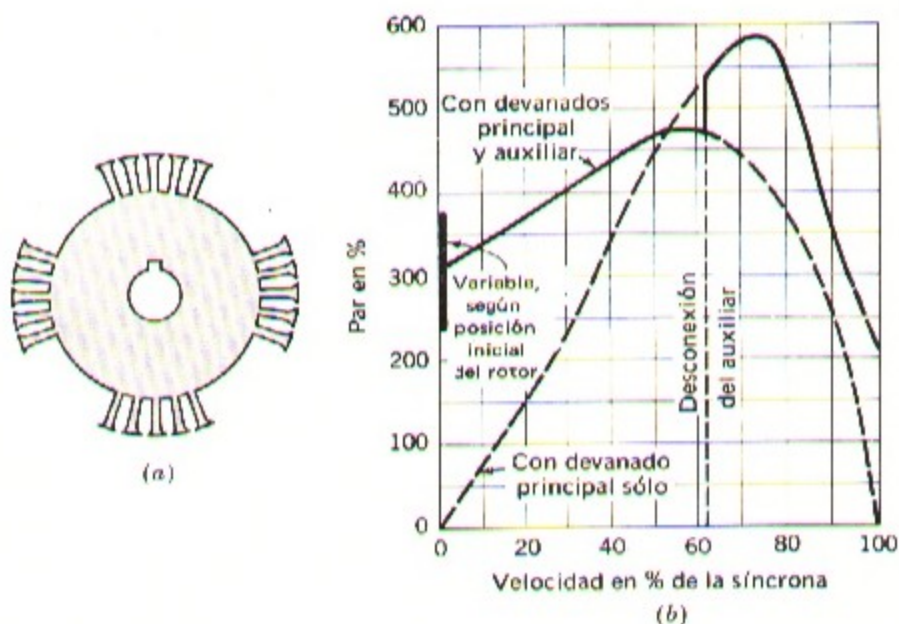


Fig. 11-10. Chapa troquelada para el rotor de un motor síncrono de reluctancia de cuatro polos y sus correspondientes características de arranque.

que gira en el entrehierro a la velocidad de sincronismo de acuerdo con los principios expuestos en el capítulo 2. Con pequeños deslizamientos este par va invirtiendo lentamente su sentido: el rotor se acelera durante el semiperíodo positivo de la variación del par y se retarda durante el semiperíodo negativo. Si el momento de inercia del rotor y de la carga mecánica a él aplicada es suficientemente bajo, durante el semiperíodo de aceleración el rotor pasará desde la velocidad de deslizamiento hasta entrar en sincronismo manteniéndose luego en él. El par negativo del campo giratorio inverso influye en la marcha síncrona del motor igual que lo haría una carga adicional sobre el eje.

En la Fig. 11-10 *b* está representada la curva característica par-velocidad típica de un motor monofásico de fase partida, del tipo de reluctancia. Obsérvese el alto valor del par del motor de inducción: ello es debido a que para obtener unas características satisfactorias en un motor síncrono se ha hecho necesario construir los motores síncronos de reluctancia utilizando estructuras que serían aptas para un motor de inducción de dos a tres veces mayor potencia que el síncrono. Obsérvese también que el principal efecto de un rotor de polos salientes sobre la característica de un motor de inducción se manifiesta a motor parado, ya que el par varía sensiblemente según sea la posición del rotor.

e. Motores de histéresis

Para crear un par mecánico pueden utilizarse los fenómenos de histéresis. En su forma más sencilla el rotor de un motor de histéresis no es más que un cilindro liso de acero duro magnético careciendo de devanados y dientes, situado en un estator ranurado portador de un devanado distribuido dispuesto de tal forma que determine una onda de distribución espacial del flujo lo más senoidal posible, ya que las ondulaciones en dicha onda aumentan considerablemente las pérdidas.

En los motores monofásicos, los devanados del estator son en general del tipo de fase partida con condensador permanente como en la Fig. 11-7. La capacidad del condensador se elige de forma que en los devanados actúe una corriente bifásica aproximadamente equilibrada: de esta forma el estator crea un campo giratorio a la velocidad síncrona, siendo la forma de la onda en el espacio aproximadamente constante.

En la Fig. 11-11 *a* se indican las condiciones magnéticas instantáneas en el entrehierro y en el rotor de un motor de dos polos en el estator. El eje SS' de la onda de f.m.m. del estator gira a la velocidad de sincronismo. Debido a la histéresis, la magnetización del rotor se retrasa respecto a la onda de f.m.m. inductora, por lo que el eje RR' de la onda de flujo del rotor queda retrasado respecto al eje de la onda de f.m.m. del estator en el ángulo δ (Fig. 11-11 *a*). Si el rotor está inmóvil, el par de arranque existente es proporcional al producto de las componentes fundamentales de la f.m.m. del estator, del flujo del rotor, y del seno del ángulo del par δ . Si el par resistente debido a la carga es menor que el par desarrollado por el motor, éste se irá acelerando. Mientras el rotor vaya girando a una velocidad inferior a la de sincronismo, cada una de las partículas que lo forman quedará sujeta a un ciclo de histéresis a la frecuencia de deslizamiento. Mientras el rotor se va acelerando, el ángulo de retraso se conserva invariado si el flujo es constante, ya que dicho ángulo δ depende únicamente del ciclo de histéresis del rotor, siendo independiente del ritmo a que el ciclo es recorrido. Por consiguiente, el par desarrollado por el motor se

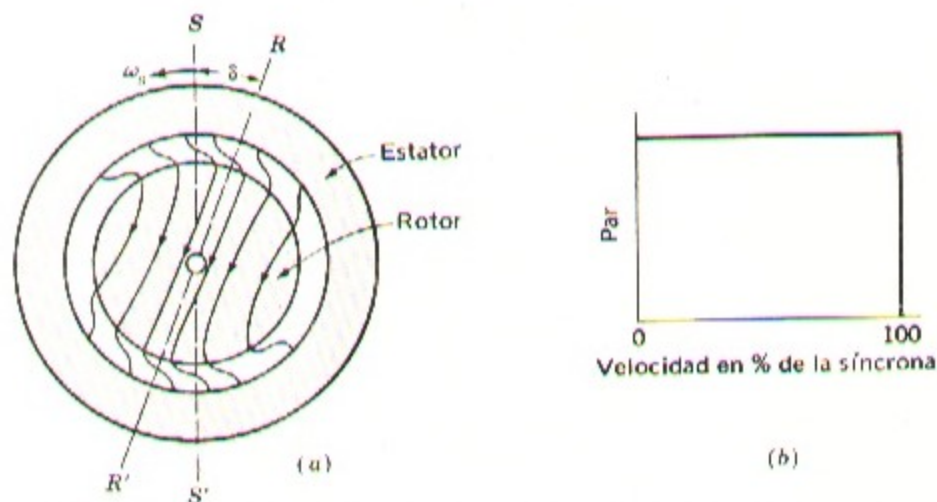


Fig. 11-11. (a) Disposición general del campo magnético en el entrehierro y rotor de un motor de histéresis. (b) Característica par-velocidad ideal.

mantiene constante hasta alcanzar la velocidad de sincronismo como puede verse en la característica ideal par-velocidad de la Fig. 11-11 b: esta circunstancia es una de las ventajas del motor de histéresis. A diferencia de lo que ocurre con un motor de reluctancia, que debe poner su carga en sincronismo según la característica par-velocidad de un motor de inducción, el motor de histéresis puede sincronizarse con cualquier carga a la que sea capaz de acelerar, no importando cuán grande sea su inercia. Una vez alcanzado el sincronismo, el motor sigue girando a la velocidad síncrona, ajustándose por sí mismo el ángulo de carga de forma que el par desarrollado se equilibre con el solicitado por la carga.

El motor de histéresis es por su propia naturaleza silencioso, y el arrastre de la carga suave: su rotor engendra el mismo número de polos que tiene el campo del estator, por lo que se presta bien a trabajar a varias velocidades síncronas distintas para lo cual el estator se devana con varios grupos de bobinas que pueden conectarse de distintas formas dando lugar a diferente número de polos. Los motores de histéresis son capaces de acelerar y poner en sincronismo cargas con gran momento de inercia ya que su par motor es uniforme desde la velocidad cero hasta la de sincronismo.

11-3. MOTORES SERIE - MOTORES UNIVERSALES

Un motor serie es capaz de funcionar con características similares ya sea con corriente alterna o con corriente continua, supuesto que los núcleos del estator y del rotor estén ambos formados por paquetes de chapas. Normalmente los motores serie monofásicos se conocen por el nombre de *motores universales*. El ángulo del par está fijado por la posición de las escobillas; normalmente es de 90° que es el valor óptimo. Si un motor

serie se alimenta con corriente alterna las intensidades respectivas de los campos del estator y del rotor varían de la misma forma en el tiempo, estando ambas en fase. Puesto que tanto una como otra se invierten en el mismo instante, el par tendrá siempre la misma dirección si bien será de magnitud pulsatoria a doble frecuencia que la de la red, pudiéndose considerar un medio par efectivo. En general, el comportamiento del motor será semejante al que tiene con corriente continua.

Se emplean motores universales pequeños cuando su ligereza de peso es una cualidad importante, como puede ser en aspiradores domésticos, herramientas portátiles y otros usos semejantes: normalmente trabajan a grandes velocidades de 1500 hasta 5000 r.p.m. En la Fig. 11-12 pueden verse unas curvas características clásicas.

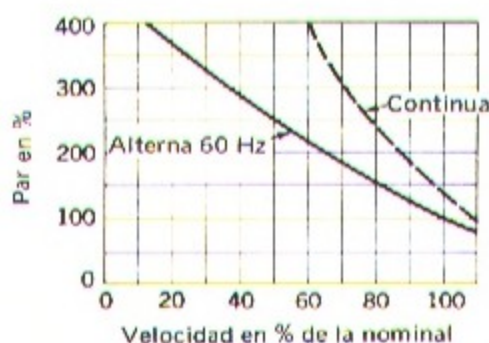


Fig. 11-12. Característica par-velocidad clásica de un motor universal serie.

Las características con alterna o con continua difieren algo entre sí por dos motivos: primero, con corriente alterna la caída de tensión en las reactancias de inducido e inductor absorbe parte de la tensión aplicada y por consiguiente para una intensidad y par dados, la fuerza contraelectromotriz inducida en el inductor es menor que con corriente continua, y la velocidad tiende a disminuir algo, y segundo, con corriente alterna, el circuito magnético puede quedar muy saturado en los momentos en que la onda de corriente pasa por sus valores de punta, por lo que el valor eficaz del flujo resulta ser bastante menor que con continua de igual intensidad eficaz. Por consiguiente, con corriente alterna el par tiende a ser menor y la velocidad mayor que con continua. En la gama de motores fraccionales, el motor universal es el más económico a igualdad de potencia, si bien ello es a expensas de ser más ruidosos, tener una vida relativamente más corta, y ser de gran velocidad.

Para regular la velocidad y el par del motor, la tensión alterna se aplica en serie con un dispositivo estático que regula la tensión en el motor³. Con un tiristor como los descritos en el capítulo 8 se pueden regular los semiciclos alternos de la tensión de forma que al motor le llega una corriente unidireccional, pero con otros dispositivos bidireccionales

³ Véase A. Kusko, "Solid-State D.C. Motor Drives" cap. 6, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1969.

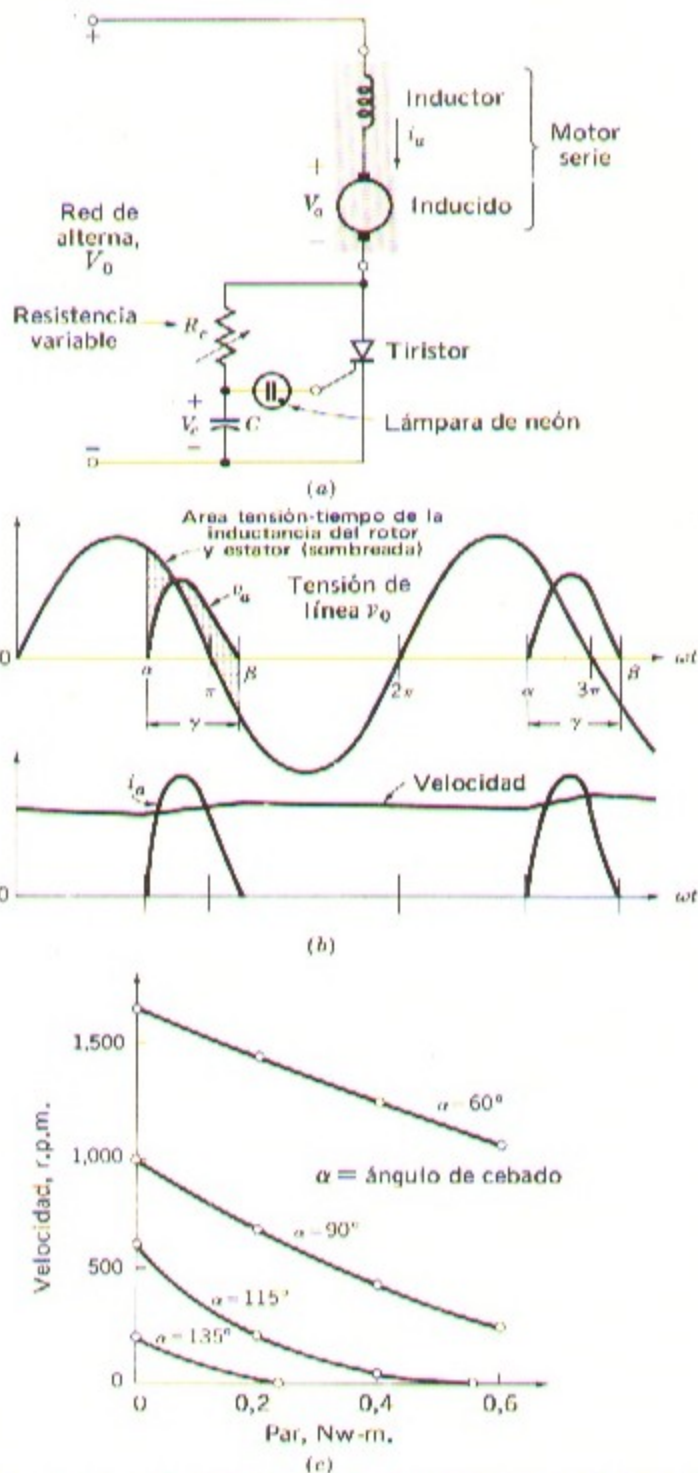


Fig. 11-13. Funcionamiento de un motor serie con regulación de velocidad mediante tiristor. (a) Circuito con regulación manual de la velocidad. (b) Ondas de tensión en el motor, intensidad, y velocidad. (c) Curvas velocidad-par de un motor serie regulado variando el ángulo α de cebado del tiristor.

pueden regularse ambos semiciclos. En la Fig. 11-13 *a* puede verse el esquema de un circuito de regulación de alterna; en la Fig. 11-13 *b* la forma de onda de la tensión e intensidad aplicadas al motor para un ángulo de cebado cualquiera α , y por último en la Fig. 11-13 *c* las curvas características par-velocidad correspondientes a distintos ángulos de cebado. Dicho ángulo de cebado puede ajustarse a mano o automáticamente a través de un circuito de control de velocidad como en algunas herramientas portátiles. La combinación de un motor serie y un dispositivo estático constituye un conjunto regulable relativamente económico.

Ejemplo 11-2

Demuéstrese que el par medio en un motor serie de alterna es proporcional al cuadrado del valor eficaz de la corriente, si el circuito magnético no está saturado.

SOLUCION

El flujo magnético instantáneo φ producido por la corriente del motor i_a en los polos del campo es:

$$\varphi = K_f i_a$$

El par instantáneo es

$$K_t \varphi i_a$$

y, por tanto, el par medio T_{med} es:

$$\begin{aligned} T_{\text{med}} &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} K_t K_f i_a^2 dt \\ &= K_t K_f I_a^2 \end{aligned}$$

siendo I_a el valor eficaz de la corriente i_a . Esta relación es independiente de la forma que tenga la onda de la corriente i_a .

11-4 TEORIA DE CAMPOS ROTATIVOS EN MOTORES DE INDUCCION MONOFASICOS

En el apartado 11-1 se ha visto que la onda de f.m.m. del estator en un motor de inducción monofásico equivale a dos ondas de f.m.m. de amplitud constante girando en sentidos opuestos a la velocidad de sincronismo. Cada una de estas dos ondas componentes de f.m.m. del estator induce su propia corriente en el rotor, dando lugar a una acción motora por inducción exactamente igual que en un motor polifásico equilibrado. Este

concepto del doble campo giratorio es útil no sólo para una visión cualitativa de los fenómenos, sino que es susceptible también de desarrollarse en una teoría cuantitativa aplicable a una gran variedad de tipos de motores de inducción. Un caso sencillo pero importante es el de motores monofásicos de inducción funcionando con sólo su devanado principal.

Consideremos primeramente la situación existente cuando el rotor está parado y únicamente el devanado principal del estator m está excitado. En este caso el motor equivale a un transformador con el secundario en cortocircuito: el circuito equivalente es el de la Fig. 11-14a en la que r_{1m} y x_{1m} son respectivamente la resistencia y la reactancia de dispersión del devanado principal, x_φ la reactancia magnetizante, y r_2 y x_2 los valores de la resistencia y de la reactancia de dispersión del rotor parado, reducidos ambos al devanado del estator utilizando la relación de espiras adecuada. Las pérdidas en el núcleo, de las que se ha prescindido ahora, se tendrán en cuenta posteriormente considerándolas como si fueran pérdidas mecánicas. La tensión aplicada es V , y la intensidad en el devanado principal I_m ; E_m es la fuerza contraelectromotriz inducida en el devanado principal por la onda de flujo estacionaria y pulsatoria en el entrehierro engendrada por la acción combinada de las corrientes en el estator y en el rotor.

De acuerdo con el concepto del doble campo giratorio visto en el apartado 11-1, la f.m.m. del estator puede descomponerse en dos campos giratorios, uno directo y otro inverso, de amplitud mitad de la total cada uno de ellos cuando el motor está parado. En la Fig. 11-14b la porción del circuito equivalente que representa los efectos del flujo en el

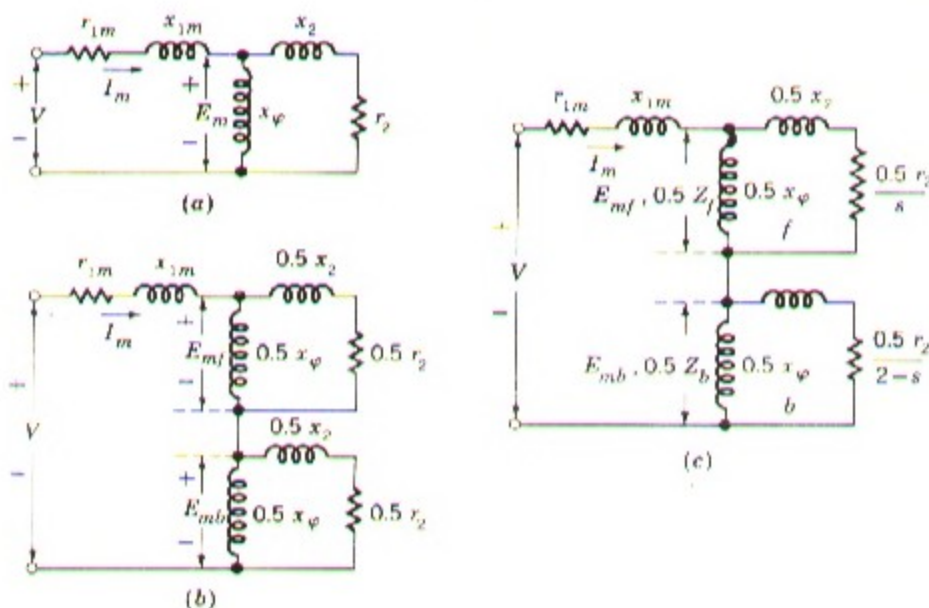


Fig. 11-14. Circuitos equivalentes de un motor de inducción monofásico. (a) Con el rotor bloqueado. (b) Con el rotor bloqueado, viéndose los efectos de los campos directo e inverso. (c) En condiciones de marcha.

entrehierro se ha dividido en dos partes iguales representando cada una de ellas el efecto de los campos directo e inverso respectivamente.

Examinemos ahora lo que sucede después de poner en marcha el motor por algún medio auxiliar y estar éste girando en el sentido del campo directo, con sólo su devanado principal excitado y con un deslizamiento relativo s . Las corrientes del rotor inducidas por el campo directo tienen la frecuencia sf que corresponde a la de deslizamiento, siendo f , naturalmente la frecuencia en el estator. Exactamente igual a lo que sucede en un motor polifásico con rotor de jaula de ardilla o bobinado polifásico simétrico, estas corrientes rotóricas engendran una onda de f.m.m. que se desplaza hacia adelante respecto al rotor a la velocidad de deslizamiento y por tanto a la velocidad de sincronismo respecto al estator. La resultante de la onda directa del estator y la f.m.m. del rotor origina en el entrehierro una onda de flujo directa que a su vez induce la fuerza contraelectromotriz E_{mf} en el devanado principal m del estator. Visto desde el estator, el efecto indicado del rotor es igual que en un motor polifásico y puede representarse por una impedancia $0,5 r_2/s + j 0,5 x_2$ en paralelo con $j 0,5 x_\phi$ como en la parte del circuito equivalente de la Fig. 11-14c señalada con f . Los factores 0,5 proceden de la descomposición de la f.m.m. pulsatoria del estator en las dos componentes directa e inversa.

Consideremos ahora la situación respecto al campo inverso. El rotor continúa girando con un deslizamiento s respecto al campo directo, y su velocidad relativa n en la dirección del mismo es:

$$n = 1 - s \quad (11-5)$$

La velocidad relativa del rotor respecto al campo inverso es $1 + n$, o su deslizamiento respecto al mismo es:

$$1 + n = 2 - s \quad (11-6)$$

El campo inverso, por consiguiente, induce en el rotor corrientes cuya frecuencia es $(2 - s)f$: con deslizamientos pequeños, estas corrientes rotóricas son de frecuencia casi doble que la del estator, y por consiguiente, en el caso citado de pequeños deslizamientos, un oscilograma de las corrientes en el rotor mostrará una componente de relativamente alta frecuencia debida al campo inverso, superpuesta a otra componente de baja frecuencia debida al campo directo. Visto desde el estator, la onda de f.m.m. del rotor debida a las corrientes inducidas en el mismo por el campo inverso gira también a la velocidad de sincronismo pero en sentido contrario. El circuito equivalente representativo de estas reacciones internas vistas desde el estator es igual al de un motor polifásico cuyo deslizamiento sea $2 - s$, y puede verse en la parte de la Fig. 11-14c señalada con una b . Al igual que lo visto para el campo directo, el factor 0,5 proviene de la descomposición de la f.m.m. del estator en las dos componentes directa e inversa. La tensión E_{mb} en la combinación en paralelo que representa el campo inverso no es más que la fuerza contraelectromotriz inducida en el devanado principal m del estator por el campo inverso resultante.

Si se conoce la tensión aplicada y la impedancia del motor, valiéndose del circuito equivalente de la Fig. 11-14 c se podrá determinar: la corriente en el estator; la potencia

de entrada, y el factor de potencia para cualquier valor del deslizamiento. Para simplificar la formulación, hagamos:

$$Z_f \equiv R_f + jX_f \equiv \left(\frac{r_2}{s} + jx_2 \right) \text{ en paralelo con } jx_\varphi \quad (11-7)$$

$$Z_b \equiv R_b + jX_b \equiv \left(\frac{r_2}{2-s} + jx_2 \right) \text{ en paralelo con } jx_\varphi \quad (11-8)$$

Las impedancias representativas de las reacciones de los campos directo e inverso, vistas desde el devanado monofásico m del estator son respectivamente $0,5Z_f$ y $0,5Z_b$ de la Fig. 11-14c.

Un estudio de este último circuito equivalente citado confirma las conclusiones a que se llegó por razonamientos cualitativos en el apartado 11-1 (Fig. 11-3b) de que la onda de flujo directa en el entrehierro se acrecienta y la inversa mengua cuando el rotor entra en movimiento. Cuando el motor gira con poco deslizamiento la influencia de la resistencia del rotor respecto al campo directo $0,5r_2/s$ es mucho mayor que con motor parado, mientras que la influencia respecto al campo inverso $0,5r_2/(2-s)$ es mucho menor. Por consiguiente la impedancia del campo directo es mayor que a motor parado y la del campo inverso es menor; en consecuencia la fuerza contraelectromotriz E_{mf} correspondiente al campo directo es mayor, y la E_{mb} correspondiente al campo inverso menor cuando el motor anda; es decir que la onda de flujo directa crece y la inversa decrece.

Las condiciones mecánicas de salida pueden calcularse aplicando las relaciones entre pares y potencias ya estudiadas en el capítulo 7 para motores polifásicos, pudiéndose tratar de igual forma los pares engendrados tanto por el campo directo como por el inverso. La acción mutua entre los flujos y f.m.m. rotativos opuestos se traduce en pulsaciones del par, de frecuencia doble que la del estator, que sin embargo no alteran su valor medio.

Al igual que en la ecuación 7-18, el par interno T_f del campo directo, expresado en Nm, es igual a $1/\omega_s$ veces la potencia P_{gf} en watt suministrada por el devanado del estator a dicho campo directo, siendo ω_s la velocidad angular síncrona expresada en radianes mecánicos por segundo; por tanto:

$$T_f = \frac{1}{\omega_s} P_{gf} \quad (11-9)$$

Si la impedancia magnetizante se considera como puramente inductiva, P_{gf} será la potencia absorbida por la impedancia $0,5Z_f$, es decir:

$$P_{gf} = I_m^2 0,5R_f \quad (11-10)$$

siendo R_f la componente resistiva de la impedancia del campo directo definida en la ecuación 11-7.

De igual forma, el par interno T_b del campo inverso es:

$$T_b = \frac{1}{\omega_s} P_{gb} \quad (11-11)$$

siendo P_{gb} como antes, la potencia suministrada por el devanado del estator al campo inverso, o sea:

$$P_{gb} = I_m^2 0,5R_b \quad (11-12)$$

siendo R_b la componente resistiva de la impedancia Z_b definida en la ecuación 11-8. Este último par actúa en sentido opuesto al correspondiente al campo directo, por lo que el par interno neto resultante T será:

$$T = T_f - T_b = \frac{1}{\omega_s} (P_{gf} - P_{gb}) \quad (11-13)$$

Estando las corrientes del rotor inducidas por las dos componentes del campo en el entrehierro, sus frecuencias son distintas, y las pérdidas totales en el mismo I^2R serán iguales a la suma de las pérdidas motivadas por cada uno de los campos. En general, como puede demostrarse comparando entre sí las ecuaciones 7-12 y 7-13, las pérdidas en el cobre del rotor motivadas por un campo giratorio equivalen a la potencia absorbida por el estator multiplicada por el deslizamiento, de donde:

$$\text{Pérdidas debidas al campo directo } I^2R = sP_{gf} \quad (11-14)$$

$$\text{Pérdidas debidas al campo inverso } I^2R = (2-s)P_{gb} \quad (11-15)$$

$$\text{Pérdidas totales en el rotor } I^2R = sP_{gf} + (2-s)P_{gb} \quad (11-16)$$

Puesto que la potencia es igual al par multiplicado por la velocidad angular, y la velocidad angular del rotor es $(1-s)\omega_s$, la potencia interna transformada en energía mecánica, expresada en watt, será:

$$P = (1-s)\omega_s T = (1-s)(P_{gf} - P_{gb}) \quad (11-17)$$

Como ya vimos al tratar de motores polifásicos, ni el valor del par interno T ni el de la potencia P son valores de salida, ya que falta tomar en consideración las pérdidas mecánicas. Evidentemente es correcto deducir de T y de P los efectos de los rozamientos y de la resistencia del aire, e incluso se considera normal tratar de igual forma las pérdidas en el núcleo. Dentro de las pequeñas variaciones de velocidad que pueden tener lugar durante el funcionamiento normal de un motor, puede admitirse, y así se hace corrientemente, que las pérdidas mecánicas son constantes. ⁴

4 Para el estudio de la determinación experimental de las constantes y pérdidas en los motores, véase C.G. Veinotti, cap. 18.

Ejemplo 11-3

Un motor de 1/4 c.v., 110 V, 50 Hz, 4 polos, de puesta en marcha por capacidad, tiene las siguientes constantes y pérdidas:

$$\begin{aligned} r_{1m} &= 2,02 \text{ ohm} & x_{1m} &= 2,79 \text{ ohm} \\ r_2 &= 4,12 \text{ ohm} & x_2 &= 2,12 \text{ ohm} \\ & & x_\varphi &= 66,8 \text{ ohm} \end{aligned}$$

Pérdidas en el núcleo = 24 W

Rozamientos y resistencia del aire = 13 W

Siendo el deslizamiento 0,05 determínese: la intensidad en el estator; el factor de potencia; la potencia de salida; la velocidad; el par, y el rendimiento cuando el motor gira en monofásico a su tensión y frecuencia nominales, con el devanado auxiliar de puesta en marcha en circuito abierto.

SOLUCION

El primer paso será el de determinar los valores de las impedancias de los campos directo e inverso con el deslizamiento indicado. Las ecuaciones siguientes, derivadas de la 11-7 simplifican los cálculos:

$$R_f = \frac{x_\varphi^2}{x_{22}} \frac{1}{sQ_2 + (1/sQ_2)} \quad (11-18)$$

$$X_f = \frac{x_2 x_\varphi}{x_{22}} + \frac{R_f}{sQ_2} \quad (11-19)$$

siendo $x_{22} = x_2 + x_\varphi$ (11-20)

y $Q_2 = \frac{x_{22}}{r_2}$ (11-21)

Substituyendo valores y haciendo operaciones, siendo $s = 0,05$, resulta:

$$R_f + jX_f = 31,9 + j40,3 \text{ ohm.}$$

Substituyendo en las ecuaciones 11-18 y 11-19 s por $(2 - s)$ tendremos las expresiones correspondientes al campo inverso. Si $(2 - s) Q_2$ es mayor que 10, como ocurre generalmente, aplicando las siguientes fórmulas aproximadas el error que se comete es menor del

uno por ciento:

$$R_b = \frac{r_2}{2-s} \left(\frac{x_\varphi}{x_{22}} \right)^2 \quad (11-22)$$

$$X_b = \frac{x_2 x_\varphi}{x_{22}} + \frac{R_b}{(2-s)Q_2} \quad (11-23)$$

Substituyendo valores y haciendo operaciones tendremos:

$$R_b + jX_b = 1,98 + j2,12 \text{ ohm}$$

y al introducir los elementos en serie del circuito equivalente de la Fig.11-14c resultará:

$$\begin{aligned} r_{1m} + jx_{1m} &= 2,02 + j 2,79 \\ 0,5 (R_f + jX_f) &= 15,95 + j20,15 \\ 0,5 (R_b + jX_b) &= 0,99 + j 1,06 \\ Z \text{ de entrada} - \text{suma} &= 18,96 + j24,00 = 30,6 \angle 51,7^\circ \end{aligned}$$

$$\text{Intensidad en el estator } I_m = \frac{110}{30,6} = 3,59 \text{ A}$$

$$\text{Factor de potencia} = \cos 51,7^\circ = 0,620$$

$$\text{Potencia de entrada} = 110 \times 3,59 \times 0,620 = 244 \text{ W}$$

Potencia absorbida por el campo directo (ecuación 11-10)

$$P_{gt} = 3,59^2 \times 15,95 = 206 \text{ W}$$

Potencia absorbida por el campo inverso (ecuación 11-12)

$$P_{gb} = 3,59^2 \times 0,99 = 12,8 \text{ W}$$

Potencia mecánica interna (ecuación 11-17)

$$P = 0,95 (206 - 13) = 184$$

$$\text{Pérdidas mecánicas} = 24 + 13 = 37$$

$$\text{Potencia de salida (diferencia)} = 147 \text{ W} = 0,197 \text{ c.v.}$$

Velocidad síncrona = 1500 r.p.m. = 25 rev/seg.

$$\omega_s = 2\pi \times 25 = 157 \text{ rad/seg}$$

$$\begin{aligned}\text{Velocidad del motor} &= (1 - s) \times \text{vel. s\u00edncrona} \\ &= 0,95 \times 1500 = 1425 \text{ r.p.m.} \\ &= 0,95 \times 157 = 149 \text{ rad/seg.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Par} &= \frac{\text{Potencia}}{\text{Velocidad angular}} \\ &= \frac{147}{149} = 1 \text{ Nw-m}\end{aligned}$$

$$\text{Rendimiento} = \frac{\text{salida}}{\text{entrada}} = \frac{147}{244} = 0,602$$

A manera de comprobaci\u00f3n del balance de energ\u00eda, calculemos las p\u00e9rdidas:

Estator $I_m^2 r_{1m}$	$= 3,59^2 \times 2,02$	$= 26,0$
Rotor, campo directo	$= I^2 R$ (ec. 11-14)	$= 0,05 \times 206 = 10,3$
Rotor, campo inverso	$= I^2 R$ (ec. 11-15)	$= 1,95 \times 12,8 = 25,0$
Mec\u00e1nicas		$= 37,0$
Total		$= 98,3$
Total p\u00e9rdidas (entrada-salida)		$= 97,-$

Visto el orden de magnitud de los valores num\u00e9ricos hallados en el ejemplo 11-3 se pueden sugerir ciertas aproximaciones para emplear corrientemente, aproximaciones que se refieren principalmente a la impedancia del campo inverso. Obs\u00e9rvase que la impedancia $0,5(R_b + jX_b)$, para el deslizamiento correspondiente a la plena carga es s\u00f3lo del orden del 5 por ciento de la impedancia total del motor, de forma que un error en ella tan grande como del 20 por ciento es causa de un error de tan s\u00f3lo el 1 por ciento en la corriente del motor. Por otra parte, aun cuando estrictamente considerado, la impedancia del campo inverso es funci\u00f3n del deslizamiento, no se cometer\u00e1 m\u00e1s que un error muy peque\u00f1o calcul\u00e1ndola para un deslizamiento normal en la zona de trabajo (por ejemplo un 5 por ciento) y admitiendo luego que tanto R_b como X_b se conservan constantes. Asimismo, el efecto shunt de jx_ϕ en la impedancia del campo inverso, puede muchas veces despreciarse, de donde

$$Z_b \approx \frac{r_2}{2 - s} + jx_2 \quad (11-24)$$

Los valores de la resistencia correspondiente al campo inverso dados por esta ecuaci\u00f3n resultan ligeramente altos como puede comprobarse compar\u00e1ndola con la ecuaci\u00f3n 11-22.

Si en la ecuaci\u00f3n 11-24 despreciamos s , tender\u00e1 a dar valores de la resistencia del campo inverso algo bajos, y por consiguiente, procediendo de esta forma se tiende a

contrarrestar el error cometido en ella. En consecuencia, con deslizamientos bajos podremos escribir

$$Z_b \approx \frac{r_2}{2} + jx_2 \quad (11-25)$$

En los motores polifásicos vistos en el apartado 7-4, el par interno máximo y el deslizamiento con el que tiene lugar puede expresarse fácilmente en función de las constantes del motor: el par máximo interno es independiente de la resistencia del rotor. En un motor monofásico, las relaciones existentes no son tan sencillas y los problemas mucho más complicados debido a la presencia del campo inverso cuyos efectos son dobles: en primer lugar, absorbe parte de la tensión aplicada reduciendo en consecuencia la disponible para el campo directo y el par engendrado por el mismo, y en segundo lugar, dicho campo inverso neutraliza en parte el par desarrollado por el directo. Estos dos efectos dependen de la resistencia del rotor y de la reactancia de dispersión; por consiguiente, contrariamente a lo que sucede en los motores polifásicos, en los monofásicos el par interno máximo sí estará influido por la resistencia del rotor: al aumentar esta resistencia decrece el par máximo y aumenta el deslizamiento con el que tiene lugar.

Debido principalmente a los efectos del campo inverso, un motor monofásico de inducción es algo inferior a otro motor polifásico construido con el mismo rotor y el mismo núcleo en el estator: el par máximo del motor monofásico es menor y menor el deslizamiento a que tiene lugar. A igualdad de par el motor monofásico tiene mayor deslizamiento y más pérdidas, debido principalmente a las pérdidas en el cobre del rotor originadas por el campo inverso. Los volt-ampere de entrada son también mayores en el motor monofásico, debido principalmente a la potencia reactiva exigida por el propio campo inverso, y asimismo también son mayores las pérdidas en el cobre del estator, ya que toda la corriente ha de ser conducida por una sola fase en lugar de repartirse entre varias: estas mayores pérdidas se traducen en un menor rendimiento, y en un mayor aumento de temperatura, a igualdad de par.

A igualdad de potencia y de velocidad nominal, el motor monofásico es de mayor tamaño que el polifásico, y debido a este mayor tamaño, el par máximo puede equipararse al de un motor polifásico físicamente más pequeño pero de los mismos valores nominales. A pesar del mayor volumen y de la necesidad de disponer de medios auxiliares para la puesta en marcha, el coste de los motores fraccionales monofásicos para uso general es aproximadamente el mismo que el de un motor polifásico de igual potencia y velocidad, debido al mayor volumen de producción de los primeros.

11-5. FUNCIONAMIENTO DESEQUILIBRADO DE MAQUINAS BIFASICAS SIMETRICAS - CONCEPTO DE COMPONENTE SIMETRICA

Cuando las tensiones aplicadas al estator de un motor de inducción no forman un sistema polifásico equilibrado, o cuando los devanados del estator o del rotor no son simétricos en relación a las distintas fases, el funcionamiento será desequilibrado: Un

motor monofásico constituye el caso límite de funcionamiento con tensiones en el estator desequilibradas. En ciertas ocasiones pueden aparecer tensiones desequilibradas debido a circunstancias de la red que alimenta al motor; por ejemplo, si se funde uno de los fusibles de la línea, o también debido a los desequilibrios producidos por las impedancias de arranque de motores monofásicos tal como se vio en el apartado 11-2. El desequilibrio de tensiones se utiliza en el control de servomotores bifásicos como se verá en el apartado 11-6.

El presente apartado tiene por objeto el desarrollo de la teoría de componente simétrica en motores de inducción bifásicos, partiendo del concepto de los dos campos rotativos, demostrando al mismo tiempo que tal teoría es aplicable a una buena variedad de problemas en los que intervengan motores bifásicos provistos de dos devanados en cuadratura situados en el estator.

Consideremos en primer lugar lo que sucede cuando se aplica una tensión bifásica equilibrada a los bornes de una máquina, también bifásica, de entrehierro uniforme y rotor polifásico simétrico o de jaula de ardilla, teniendo en el estator dos devanados idénticos, a y m situados en cuadratura en el espacio. Las intensidades en dichos devanados del estator son iguales en magnitud, pero desplazadas en cuadratura en el tiempo. Cuando la corriente en el devanado a pasa por su valor instantáneo máximo, la del devanado m pasará por el valor cero, y la onda de f.m.m. de estator quedará centrada con el eje del devanado a , y de igual forma, dicha onda de f.m.m. estará centrada con el eje del devanado m en el instante en que la corriente del mismo pase por su máximo valor instantáneo. Así pues, la onda de f.m.m. del estator se desplaza 90 grados eléctricos en el espacio, en el intervalo de tiempo de 90°, dependiendo el sentido de este desplazamiento de la secuencia de las corrientes de fase. Un análisis más completo, realizado según el apartado 3-4 y la fig. 11-2, demuestra que la onda desplazable es de amplitud constante y velocidad angular uniforme: este hecho constituye, naturalmente, toda la base del funcionamiento equilibrado de las máquinas de inducción.

Partiendo de las anteriores consideraciones podrá determinarse el comportamiento de un motor al aplicarle una tensión bifásica equilibrada cualquiera que sea la secuencia de fases. Si el rotor está girando a la velocidad relativa n en el sentido del devanado a hacia el m la impedancia en bornes por fase viene dada por el circuito equivalente de la Fig. 11-15a cuando la tensión v_a adelante a la v_m en 90 grados. A lo largo de este estudio denominaremos a esta secuencia *positiva* y la designaremos con el subíndice f ; la secuen-

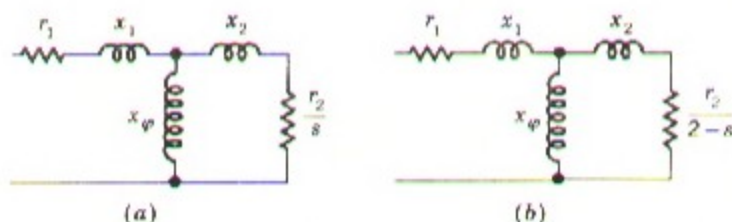


Fig. 11-15. Circuito equivalente de un motor bifásico desequilibrado. (a) Campo directo. (b) Campo inverso.

cia positiva de las corrientes engendra un campo directo. Si v_a retrasa 90° respecto v_m , y se fuerza al rotor a girar en el mismo sentido y a la misma velocidad que antes, la impedancia por fase en bornes vendrá dada por el circuito equivalente de la Fig. 11-15b: en este caso, a la secuencia de fases la denominaremos *negativa*, designándola con el subíndice *b*: las corrientes con secuencia negativa engendran el campo inverso.

Supongamos que *dos* sistemas de tensiones bifásicos equilibrados, con secuencia de fases opuestas uno respecto al otro se conectan en serie y se aplican simultáneamente al motor, como se indica en la Fig. 11-16a, en la que las tensiones vectoriales v_{mf} y jV_{mf} aplicadas respectivamente a los devanados *m* y *a* forman un sistema equilibrado de secuencia positiva, y las tensiones V_{mb} y $-jV_{mb}$ forman otro sistema, también equilibrado, pero de secuencia negativa.

La tensión resultante V_m aplicada al devanado *m* es vectorialmente:

$$V_m = V_{mf} + V_{mb} \quad (11-26a)$$

y aplicada al devanado *a*:

$$V_a = jV_{mf} - jV_{mb} \quad (11-26b)$$

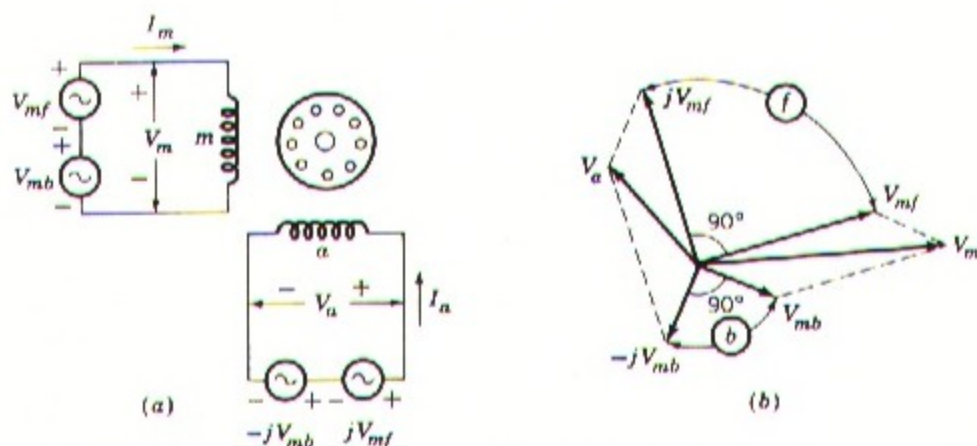


Fig. 11-16. Reducción de un sistema bifásico desequilibrado a la suma de dos sistemas equilibrados con secuencia de fases opuestas.

Si por ejemplo, el sistema directo o de secuencia positiva viene dado por los vectores V_{mf} y jV_{mf} de la Fig. 11-16b y el sistema inverso o de secuencia negativa por los V_{mb} y $-jV_{mb}$ de la misma figura, las tensiones resultantes vendrán dadas por los vectores V_m y V_a . Así pues, por la combinación de dos sistemas simétricos con secuencia de fases opuestas ha nacido un sistema bifásico no equilibrado de tensiones V_m y V_a aplicadas.

Los sistemas componentes simétricos son de manejo mucho más sencillo que el sistema desequilibrado resultante, es decir, que es más fácil calcular las intensidades componentes

engendradas por cada uno de los dos sistemas de tensión simétricos, puesto que el motor de inducción trabaja como motor bifásico equilibrado en relación con cada uno de dichos dos sistemas componentes. Por superposición, la corriente real en un devanado será igual a la suma de sus dos componentes.

Por tanto, si I_{mf} e I_{mb} son respectivamente las componentes vectoriales de secuencia positiva y negativa en el devanado m , las correspondientes componentes de secuencia positiva y negativa en el devanado a serán respectivamente jI_{mf} y jI_{mb} , y las intensidades reales I_m e I_a en cada uno de los dos devanados serán:

$$I_m = I_{mf} + I_{mb} \quad (11-27)$$

$$I_a = jI_{mf} - jI_{mb} \quad (11-28)$$

En muchas ocasiones debe realizarse la operación inversa, es decir, hallar las componentes simétricas de unas tensiones o intensidades dadas. Resolviendo las ecuaciones 11-26a y 11-26b para despejar los vectores componentes V_{mf} y V_{mb} en función de las tensiones vectoriales conocidas V_m y V_a , tendremos:

$$V_{mf} = \frac{1}{2}(V_m - jV_a) \quad (11-29)$$

$$V_{mb} = \frac{1}{2}(V_m + jV_a) \quad (11-30)$$

Operaciones que pueden verse gráficamente en el diagrama vectorial de la Fig. 11-17.

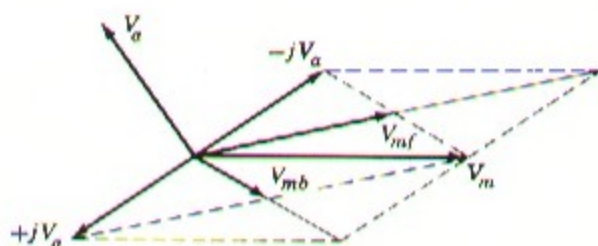


Fig. 11-17. Descomposición de un sistema de tensiones bifásico desequilibrado en componentes simétricas.

Evidentemente, por un procedimiento similar podremos determinar las componentes vectoriales simétricas de la corriente en el devanado m en función de los vectores intensidad dados I_m e I_a en ambas fases:

$$I_{mf} = \frac{1}{2}(I_m - jI_a) \quad (11-31)$$

$$I_{mb} = \frac{1}{2}(I_m + jI_a) \quad (11-32)$$

La descomposición de la onda de f.m.m. del estator en sus dos componentes, directa e inversa, como en la Fig. 11-2c puede ayudar a completar la imagen física de cuanto está

sucediendo en la máquina al aplicar la transformación de las componentes simétricas de las ecuaciones 11-31 y 11-32. En la Fig. 11-18a, I_m e I_a son vectores rotativos cuyas proyecciones sobre el eje real son proporcionales a las intensidades instantáneas en los devanados. La Fig. 11-18b es un diagrama vectorial en el espacio en el que las rectas m y a de trazo y punto representan los ejes de los respectivos devanados, y los vectores F_m y F_a los valores instantáneos de las ondas pulsatorias de f.m.m. engendradas por ellos. Para mayor simplificación, los vectores están representados en la posición que les corresponde en el momento en que i_m , y por consiguiente F_m tiene su valor instantáneo máximo $F_{m(\max)}$. En consecuencia, al descomponer F_m en sus dos componentes giratorias, directa e inversa, de amplitud mitad (como en la Fig. 11-2c y ecuación 11-4) ambas estarán en ese instante alineadas con el eje m , como puede verse en la citada Fig. 11-18b por los dos vectores iguales pero de distinto sentido de giro $0,5 F_{m(\max)}$. En este mismo momento i_a está desplazada de su valor máximo en el ángulo de tiempo θ (Fig. 11-18a), y por tanto las dos componentes, directa e inversa, $0,5 F_{a(\max)}$ están en las dos posiciones representadas en la Fig. 11-18b. Los dos vectores representativos de los campos directo e inverso F_f y F_b no son más que la suma vectorial de las componentes como puede verse en la misma figura. Debido al ángulo en el espacio existente entre ambos devanados, el ángulo existente entre las dos componentes del campo giratorio $0,5 F_{m(\max)}$ y $0,5 F_{a(\max)}$ es 90° menor que el ángulo de defase θ entre las corrientes para el campo directo, y 90° mayor

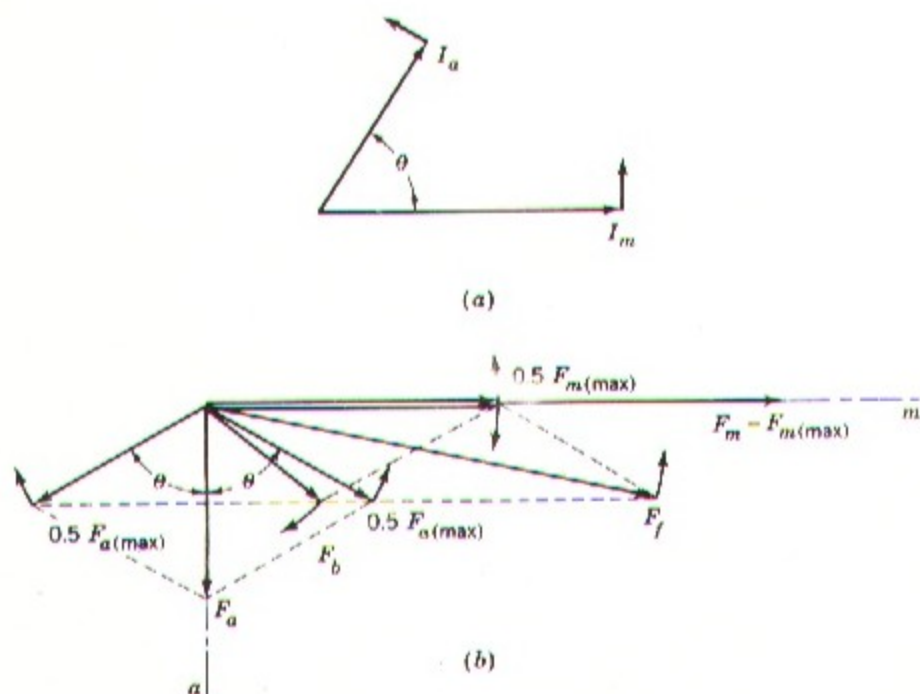


Fig. 11-18. (a) Intensidades bifásicas desequilibradas, y (b) descomposición vectorial de las ondas de f.m.m. en componente directa y componente inversa.

para el inverso. En consecuencia, las sumas vectoriales mediante las que se han obtenido las f.m.m. F_f y F_b en la Fig. 11-18b son exactamente iguales a las de las ecuaciones 11-31 y 11-32 para la obtención de las componentes simétricas de las corrientes. Por tanto, al descomponer las corrientes en componentes simétricas, la f.m.m. de estator queda descompuesta a su vez en una componente directa y otra inversa.

Ejemplo 11-4

Las constantes siguientes corresponden al circuito equivalente de un motor de inducción bifásico de 5 c.v., 220 V, 50 Hz, con rotor de jaula de ardilla. Los valores están dados en ohm por fase:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,534 & x_1 &= 2,45 & x_\varphi &= 70,1 \\ r_2 &= 0,956 & x_2 &= 2,96 \end{aligned}$$

este motor se alimenta de una red bifásica desequilibrada, cuyas tensiones de fase son respectivamente 230 y 210 V, adelantado el menor de ellos 80° respecto al mayor.

Siendo el deslizamiento 0,05 hállese:

- Las componentes de secuencia positiva y negativa de las tensiones aplicadas
- Las componentes de secuencia positiva y negativa de las corrientes de fase en el estator
- Los valores efectivos de las intensidades de fase
- La potencia mecánica interna

SOLUCION

- a. Sean V_m y V_a las tensiones aplicadas respectivamente a las dos fases:

$$\begin{aligned} V_m &= 230 \angle 0^\circ = 230 + j0 \text{ V} \\ V_a &= 210 \angle 80^\circ = 36,4 + j207 \text{ V} \end{aligned}$$

De las ecuaciones 11-29 y 11-30 se deduce que las componentes directa e inversa de las tensiones son:

$$\begin{aligned} V_{mf} &= \frac{1}{2} (230 + j0 + 207 - j36,4) \\ &= 218,5 - j18,2 = 219,5 \angle -4,8^\circ \text{ V} \\ V_{mb} &= \frac{1}{2} (230 + j0 - 207 + j36,4) \\ &= 11,5 + j18,2 = 21,5 \angle 57,7^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

- b. La impedancia del campo directo, con deslizamiento 0,05, deducida de las ecuacio-

nes 11-18 y 11-19 es:

$$\begin{aligned} Z_f &= 16,46 + j7,15 \\ r_1 + jx_1 &= \frac{0,53 + j2,45}{16,99 + j9,60} = 19,50 \angle 29,4^\circ \text{ ohm.} \end{aligned}$$

Por tanto, la componente directa de la corriente en el estator es:

$$I_{mf} = \frac{219,5 \angle -4,8^\circ}{19,50 \angle 29,4^\circ} = 11,26 \angle -34,2 \text{ A}$$

La impedancia del campo inverso, con el mismo deslizamiento es, según las ecuaciones 11-22 y 11-23

$$\begin{aligned} Z_b &= 0,451 + j2,84 \\ r_1 + x_1 &= \frac{0,534 + j2,45}{0,985 + j5,29} = 5,38 \angle 79,5^\circ \text{ ohm} \end{aligned}$$

y la corriente inversa en el estator

$$I_{mb} = \frac{21,5 \angle 57,7^\circ}{5,38 \angle 79,5^\circ} = 4,00 \angle -21,8^\circ \text{ A}$$

c. De las ecuaciones 11-27 y 11-28 deduciremos las dos corrientes de fase, que son respectivamente:

$$\begin{aligned} I_m &= 13,06 - j7,79 = 15,2 \angle -31^\circ \text{ A} \\ I_a &= 4,81 + j5,64 = 7,40 \angle 49,2^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

Obsérvese que las intensidades están mucho más desequilibradas que las tensiones aplicadas.

Aun cuando el motor no esté sobrecargado por lo que a la carga en el eje se refiere, las pérdidas aumentan considerablemente con el desequilibrio de intensidades, y el devanado del estator puede recalentarse por la mayor intensidad que por él circula.

d. La potencia suministrada al campo directo por las dos fases del estator es:

$$P_{gf} = 2I_{mf}^2 R_f = 2 \times 126,8 \times 16,46 = 4175 \text{ W}$$

y la suministrada al campo inverso:

$$P_{gb} = 2I_{mb}^2 R_b = 2 \times 16 \times 0,451 = 15 \text{ W}$$

y de acuerdo con la ecuación 11-17 la potencia mecánica interna desarrollada es:

$$P = 0,95(4175 - 15) = 3950 \text{ W}$$

Si se conocen las pérdidas en el núcleo, las de rozamientos y resistencia del aire, y las parásitas, la potencia de salida en el eje puede determinarse deduciendo dichas pérdidas de la potencia interna.

Las pérdidas por rozamiento y por resistencia del aire dependen únicamente de la velocidad y son las mismas que se tendrían trabajando a la misma velocidad en un sistema equilibrado. Las pérdidas parásitas y en el núcleo son algo mayores que las que se tendrían en un sistema equilibrado con la misma secuencia positiva de tensiones y corrientes; este aumento es debido principalmente a la frecuencia $(2 - s)$ de las pérdidas en el núcleo y las parásitas en el rotor originadas por el campo inverso.

11-6. MOTORES BIFASICOS PARA SISTEMAS DE CONTROL

En los sistemas de control se utilizan componentes electromagnéticos de potencia fraccional como motores para accionar ciertos dispositivos y como detectores para medir velocidades o determinar la posición de diversos elementos. En este apartado describiremos el funcionamiento de un motor de control, que trabaja como motor de inducción bifásico desequilibrado y que es adecuado para sistemas de control de hasta unos pocos centenares de watt de potencia. En el apartado 11-7 veremos el funcionamiento de los motores de impulsos, propios para sistemas de control digitales, y en los apartados 11-8 y 11-9 el de los detectores de velocidad y de posición. En la literatura técnica especializada se puede hallar más completa información sobre éstos y otros componentes de los equipos de control.

La Fig. 11-19 es el diagrama esquemático de un motor bifásico de control. La fase m de dicho motor, es la *fase fija* o *de referencia*. La tensión V_m es la tensión fija aplicada, procedente de una fuente de tensión y frecuencia constantes. La fase a es la fase de

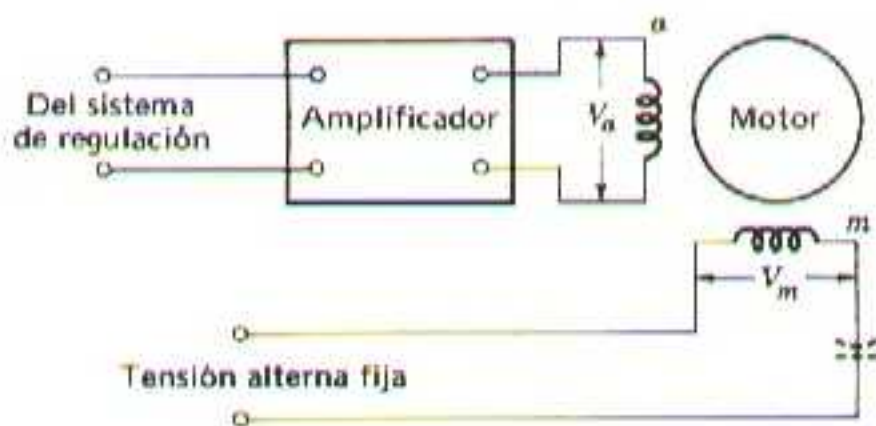


Fig. 11-19. Representación esquemática de un motor bifásico de control.

control; su tensión V_a procede de un amplificador, generalmente del tipo magnético o estático, y su amplitud es proporcional a la señal de entrada. Las tensiones V_m y V_a deben estar en sincronismo, lo que supone que en última instancia ambas procedan de una misma fuente de alterna, y han de estar ajustadas de forma que estén aproximadamente en cuadratura en el tiempo entre sí, lo que se puede conseguir por medio de un cambiador de fase a 90° situado en el amplificador o conectando un condensador adecuado en serie con la fase de referencia m . El amplificador toma su potencia de la misma fuente de alterna que alimenta la fase de referencia, de forma que su tensión de salida V_a es una onda de alterna modulada cuya componente fundamental es de igual frecuencia que V_m . Cuando el valor de V_a es distinto de cero y está adelantada de fase respecto a V_m en aproximadamente 90° , se obtiene un movimiento de rotación en un determinado sentido, y si por el contrario, V_a retrasa respecto a V_m la rotación resultante será en sentido opuesto. Siendo como es el par función tanto de V_m como de V_a al variar la magnitud de esta última se varía también el par desarrollado por el motor.

En la Fig. 11-20 se dan las curvas típicas de par-velocidad correspondientes a un motor bifásico de control. Las distintas curvas corresponden a diferentes tensiones en el circuito de control con tensión unidad en el de referencia: todas ellas se refieren a un motor bifásico con los dos devanados del estator idénticos, siendo despreciables las impedancias de la fuente de suministro.

Las exigencias propias del sistema de control ya determinan muy aproximadamente la forma que debe tener la curva característica par-velocidad de un motor de inducción bifásico para que resulte adecuado al fin pretendido. Cualquier motor destinado a esta clase de servicio debe poseer un par relativamente alto en las velocidades próximas al cero,

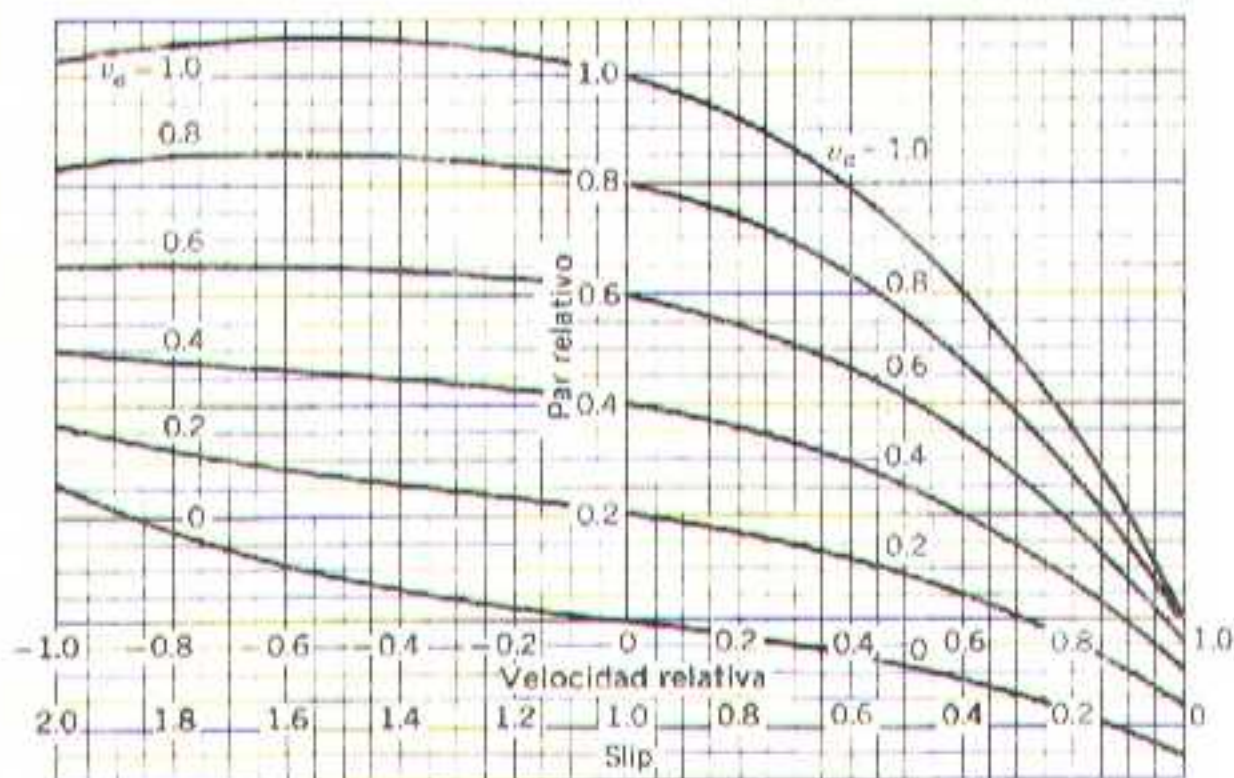


Fig. 11-20. Curvas típicas par-velocidad de un motor bifásico de control.

y además la inclinación de la característica par-velocidad debe ser negativa en la zona de operación normal alrededor de la velocidad nula con objeto de que el sistema de control tenga un funcionamiento estable. Ambos requisitos pueden conseguirse disponiendo un rotor de gran resistencia diseñado de tal forma que el par máximo se desarrolle a una velocidad inversa aproximadamente igual a la mitad de la de sincronismo, como es el caso de la curva señalada $V_a = 1,0$ en la citada Fig. 11-20: de esta forma, el trabajo normal alrededor de la velocidad cero cae dentro de la zona de estabilidad a la derecha del punto de par máximo. Otra condición necesaria es la de que el motor no tienda a funcionar como motor monofásico cuando la señal de error sea nula: puede demostrarse que esta condición se consigue también empleando rotores de gran resistencia.

Aun cuando los motores de inducción de jaula de ardilla prefieren trabajar con poco deslizamiento, por lo que realmente son más idóneos para accionamientos a velocidad constante, poseen no obstante otras particularidades suficientemente atractivas que permiten extender su empleo a los sistemas de control de poca potencia. La robustez y simplicidad del rotor de jaula de ardilla constituye una gran ventaja tanto por motivos técnicos como económicos; no existen escobillas deslizándose sobre los anillos rozantes que requieran una inspección y mantenimiento continua como en otros tipos de motores; el devanado del rotor no requiere aislamientos y por tanto la temperatura admisible está limitada únicamente por razones mecánicas e indirectamente por su influencia sobre la temperatura del devanado del estator, y si se prevén medios adecuados para refrigerar éste pueden tolerarse mayores pérdidas que en motores de otro tipo; existiendo relativamente poco material inactivo puede hacerse que la inercia del motor de jaula de ardilla sea menor que la de un motor de continua de igual potencia; si la potencia de salida es como máximo de unos pocos watt, puede minimizarse la inercia utilizando un rotor en forma de vaso metálico de escaso espesor tal como está representado esquemáticamente en el croquis de la Fig. 11-21 en la que se puede ver que el rotor se asemeja a un bote al que se le ha suprimido uno de los fondos: el circuito magnético lo completa un núcleo cilíndrico de hierro situado en el interior del vaso.

El principal inconveniente de los motores bifásicos para control reside en el bajo rendimiento propio de los motores de inducción de jaula de ardilla cuando trabajan con gran deslizamiento. Como se vio ya en el apartado 7-3 el rendimiento de un motor de

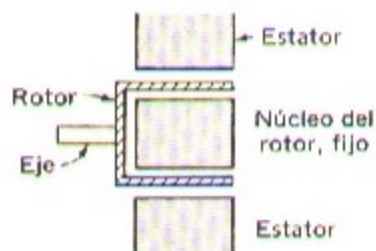


Fig. 11-21. Sección longitudinal de un rotor en forma de vaso.

inducción polifásico con los devanados del rotor en cortocircuito es análogo al de un embrague mecánico que patine; el deslizamiento es un índice directo de las pérdidas en el rotor. El bajo rendimiento propio será aún menor en un sistema de control de velocidad que suponga un desequilibrio de las tensiones aplicadas, debido al aumento de pérdidas en el rotor y a la disminución de la potencia de salida.

Ejemplo 11-5

En las curvas de la Fig. 11-20 puede observarse que dentro de la zona de velocidades bajas, el par de un motor bifásico de control es linealmente proporcional al valor eficaz de la tensión aplicada al devanado de control. Dentro de esta zona, las curvas par-velocidad tienen una inclinación negativa aproximadamente constante y substancialmente igual a la correspondiente a los valores inferiores de la tensión de control. Teniendo esto en cuenta, las curvas par-velocidad pueden expresarse empíricamente con la fórmula:

$$T = k_1 V_a - k_2 \omega_0$$

siendo ω_0 la velocidad angular mecánica del eje, y k_1 y k_2 dos constantes determinadas por las propias curvas y por las unidades empleadas.

El motor acciona una carga que requiere un par $f_v \omega_0$ proporcional a la velocidad.

Determinense las funciones de transferencia que relacionan:

- La posición del eje del motor y la tensión de control
- La velocidad del eje del motor y la tensión de control.

SOLUCION

a. La señal que llega al motor consiste en la variación del valor eficaz V_a de la tensión en el devanado de control. Sea v_s el valor de esta tensión en un momento cualquiera t . La ecuación diferencial electrodinámica en función del ángulo de posición θ_0 del eje será:

$$J \frac{d^2 \theta_0}{dt^2} + f_v \frac{d\theta_0}{dt} = k_1 v_s - k_2 \frac{d\theta_0}{dt}$$

que en función de las magnitudes vectoriales θ_0 y V_s de variación senoidal a la frecuencia angular ω , se convierte en:

$$(j\omega)^2 J \Theta_0 + j\omega(f_v + k_2) \Theta_0 = k_1 V_s$$

que nos conduce a la función de transferencia:

$$\frac{\Theta_0}{V_s} = \frac{k_1}{(j\omega)^2 J + j\omega(f_v + k_2)}$$

b. La ecuación diferencial en función de la velocidad angular del eje ω_0 es:

$$J \frac{d\omega_0}{dt} + f_v \omega_0 = k_1 v_s - k_2 \omega_0$$

de donde:

$$j\omega J \Omega_0 + (f_v + k_2) \Omega_0 = k_1 V_s$$

y la función de transferencia será:

$$\frac{\Omega_0}{V_s} = \frac{k_1}{f_v + k_2 + (j\omega)J}$$

Las características de un motor bifásico de control pueden determinarse experimentalmente valiéndose de un dispositivo dinamométrico capaz de accionar al motor en la zona de deslizamientos comprendidos entre 1,0 y 2,0 y ofrecerle una carga resistente en la zona desde 1,0 hasta 0. También pueden calcularse las características por el procedimiento de la componente simétrica del apartado 11-5. Los análisis se simplifican mucho si se consideran las tensiones e intensidades como senoidales, si se desprecian los efectos de la impedancia de la fuente de alimentación, y si se admite que los dos devanados de fase del estator son idénticos entre sí: con estos supuestos el motor queda reducido simplemente a un motor bifásico simétrico alimentado por un sistema bifásico desequilibrado.

Ejemplo 11-6

Un motor de inducción bifásico simétrico desarrolla su par interno máximo a la velocidad inversa relativa 0,5 cuando se aplica a los terminales de su estator una tensión bifásica equilibrada. El valor de Q de su circuito equivalente de Thévenin es 3,0 (véase el apartado 7-5). Este motor se empleará en un sistema de control aplicando a su fase de referencia una tensión de valor una unidad relativa constante, y a la de control una tensión variable. Se considera que estas dos tensiones están en cuadratura en el tiempo.

Trácese una familia de curvas características par interno-velocidad para las tensiones relativas en la fase de control de 1,0, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2 y 0 cubriendo la gama de velocidades desde -1 a $+1$, también valores relativos.

Exprésese el par en unidades relativas, tomando como base el par interno desarrollado con motor parado cuando a ambos devanados del estator se aplica una tensión bifásica de valor relativo 1,0.

Las curvas par-deslizamiento deducidas en este ejemplo son las que están trazadas en la Fig. 11-20.

SOLUCION

La velocidad de par máximo, la Q , y el par a motor parado con tensión bifásica equilibrada determinarán la curva para $V_a = 1,0$. Esta curva puede deducirse sin inconve-

niente de las curvas normalizadas par-deslizamiento de la Fig. 7-13. Las demás curvas de la familia se pueden calcular a base de la anterior descomponiendo la tensión aplicada en dos componentes bifásicas simétricas.

Puesto que la velocidad de par máximo es, según datos del problema, de $-0,5$ valor relativo, el deslizamiento correspondiente a tal par máximo será $s_{\max T} = 1,50$, y por tanto, con motor parado:

$$\frac{s}{s_{\max T}} = \frac{1,0}{1,5} = 0,667$$

De la Fig. 7-13, siendo $Q = 3$, deduciremos la relación de pares correspondiente a motor parado, que es:

$$\frac{T_{\text{parado}}}{T_{\max}} = 0,938$$

pero como por definición $T_{\text{parado}} = 1,0$, tendremos que $T_{\max} = 1/0,938 = 1,066$ valor relativo.

Los datos para la curva par-velocidad con $V_a = 1,0$ de la Fig. 11-20, los podremos deducir de la Fig. 7-13 y recopilarlos en la tabla 11-1, en la que en la primera columna figuran las relaciones de deslizamiento, y las correspondientes relaciones de pares se deducirán de la curva $Q = 3,0$ de la Fig. 7-13. Los deslizamientos reales s de la tercera columna se hallan multiplicando la primera columna por $s_{\max T} = 1,50$. Los pares T_f' de la columna 4 son el producto de la columna 2 por $T_{\max} = 1,066$. En condiciones equilibradas, o sea con $V_a = 1,0$, no existirá par inverso alguno y la columna 4 da ya el par neto con el cual se ha trazado la curva $V_a = 1,0$ de la Fig. 11-20.

TABLA 11-1
Cálculos para el ejemplo 11-6

$\frac{s}{s_{\max T}}$	$\frac{T}{T_{\max}}$	s	T_f'	$2 - s$	T_b'
0	0	0	0	2,0	1,03
0,133	0,32	0,2	0,34	1,8	1,055
0,267	0,565	0,4	0,60	1,6	1,06
0,40	0,745	0,6	0,795	1,4	1,06
0,533	0,86	0,8	0,92	1,2	1,045
0,667	0,94	1,0	1,00	1,0	1,00
0,80	0,98	1,2	1,045	0,8	0,92
0,933	0,995	1,4	1,06	0,6	0,795
1,067	0,995	1,6	1,06	0,4	0,60
1,20	0,99	1,8	1,055	0,2	0,34
1,33	0,965	2,0	1,03	0	0

Cuando las tensiones están desequilibradas, pueden descomponerse en componentes simétricas. Sea V_a el valor relativo de la tensión en la fase de control, y supongamos que esta tensión está adelantada 90° con relación a la de referencia. La expresión vectorial de la tensión de control será así jV_a y las ecuaciones 11-29 y 11-30 se convierten en:

$$V_{mf} = \frac{1}{2} [1 - j(jV_a)] = \frac{1}{2} (1 + V_a) \quad (11-33)$$

$$V_{mb} = \frac{1}{2} [1 + j(jV_a)] = \frac{1}{2} (1 - V_a) \quad (11-34)$$

Figurando ahora tanto el campo directo como el inverso. El deslizamiento respecto al campo inverso es $2 - s$ tal como figura en la columna quinta de la tabla anterior. La columna sexta da el valor de los pares inversos T'_b que deberán engendrarse con tensiones de valor relativo unidad y secuencia negativa: estos pares se deducen de la columna 4. (El valor de T'_b con un deslizamiento respecto al campo inverso de, por ejemplo $2 - s = 1,8$ es igual al valor de T'_f con un deslizamiento de $s = 1,8$ respecto al campo directo).

Recordemos que el par interno desarrollado por un motor de inducción polifásico varía como el cuadrado de la tensión. Los pares directo e inverso serán por tanto

$$T_f = V_{mf}^2 T'_f \quad (11-35)$$

$$T_b = V_{mb}^2 T'_b \quad (11-36)$$

siendo V_{mf} y V_{mb} los valores relativos de las componentes de secuencia positiva y negativa de las tensiones desequilibradas aplicadas (véanse las ecuaciones 11-33 y 11-34) y T'_f y T'_b los pares directo e inverso correspondientes a las tensiones de valor relativo 1,0, con secuencias positiva y negativa aplicadas, tal como se dan en las columnas 4 y 6. El par interno neto es:

$$T = T_f - T_b \quad (11-37)$$

Ahora podremos determinar el par desarrollado para cualquier valor de V_a y con cualquier deslizamiento. Por ejemplo: de las ecuaciones 11-33 a 11-36, y siendo $V_a = 0,60$:

$$V_{mf} = 0,80 \quad T_f = 0,64 T'_f$$

$$V_{mb} = 0,20 \quad T_b = 0,04 T'_b$$

pudiéndose sacar los valores de T'_f y T'_b de la tabla anterior: por ejemplo, si $s = 0,20$

$$\begin{array}{rcl} T'_f = 0,34 & T_f = 0,64 \times 0,34 & = 0,218 \\ T'_b = 1,055 & T_b = 0,04 \times 1,055 & = 0,042 \\ & T = T_f - T_b & = 0,176 \end{array}$$

Repetiendo estos mismos sencillos cálculos para otros valores supuestos de V_a y del deslizamiento, se pueden ir obteniendo diversos puntos de las curvas de la Fig. 11-20: los valores que se vayan hallando deben disponerse sistemáticamente en forma tabular para su más cómodo y seguro manejo.

Las curvas sin dimensiones de la citada Fig. 11-20 pueden aplicarse aproximadamente a cualquier motor bifásico de control ya que casi todos ellos están previstos para desarrollar el par máximo alrededor de la misma velocidad relativa teniendo también aproximadamente la misma Q . El deslizamiento de par máximo s_{\max} T junto con el valor de Q determinan la forma de la característica mientras se mantenga constante la resistencia del rotor y puedan despreciarse los efectos de la saturación. Unas variaciones discretas en los parámetros s_{\max} T y Q influyen relativamente poco sobre las características dentro del campo de operación normal.

11-7. MOTORES DE IMPULSOS

El motor de impulsos es una variedad de motor síncrono previsto de forma que avance un determinado número de grados cada vez que recibe un impulso eléctrico procedente de la unidad de control: los avances clásicos son de $7,5^\circ$ y de 15° por impulso. Este motor se utiliza en sistemas de control digitales, en los que recibe señales tales como un tren de impulsos para hacerle accionar un eje o desplazar una placa en una cantidad dada. Una aplicación típica es la de situar en posición, respecto a dos dimensiones, la mesa de trabajo de una taladradora automática, de acuerdo con las instrucciones introducidas por una cinta. Con un motor de impulsos, un detector de posición y un sistema de realimentación no es necesario en general hacer que el elemento de salida siga las instrucciones de entrada. Este tipo de motores se construye de forma que pueden responder a señales tan rápidas como son las de hasta 1200 pulsaciones por segundo, y con potencias equivalentes a varios caballos.

El devanado del estator es generalmente polifásico multipolar y no difiere sustancialmente de los devanados de las máquinas clásicas: los más corrientes son los devanados trifásicos o tetrafásicos con un número de polos que depende del desplazamiento angular deseado para cada impulso de entrada. Los rotores pueden ser del tipo de reluctancia variable, o bien de imanes permanentes. Estos motores se alimentan de un circuito lógico exterior de accionamiento: cuando a la entrada de este circuito se le aplica una señal en forma de un tren de impulsos, el propio circuito suministra a los devanados del estator la corriente necesaria para que el eje del campo en el entrehierro avance de acuerdo con los impulsos de entrada. Dependiendo del ritmo de los impulsos y del par resistente, incluidos los efectos de la inercia, el rotor seguirá en su movimiento al eje del campo magnético del entrehierro en virtud del par de reluctancia o del par del imán permanente. En la Fig. 11-22 está esquematizado el funcionamiento de un motor de impulsos, tetrafásico, con un rotor de dos polos. El rotor puede ser indistintamente de material ferromagnético, o un imán permanente. El rotor irá tomando las posiciones angulares $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, \dots$ a medida que los devanados se van excitando con la secuencia $N_a, N_a + N_b, N_b, \dots$. El motor de la Fig. 11-22 puede utilizarse también con desplazamientos a saltos de 90° , para

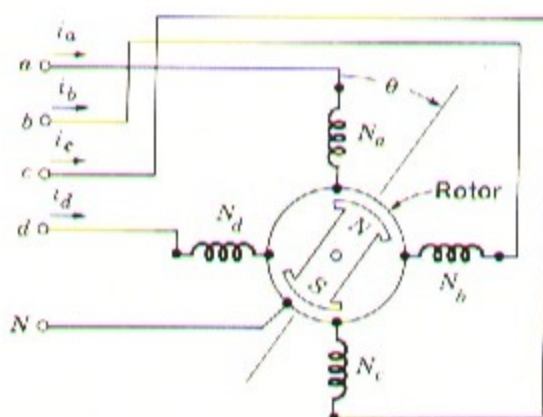


Fig. 11-22. Esquema elemental de un motor de impulsos tetrafásico.

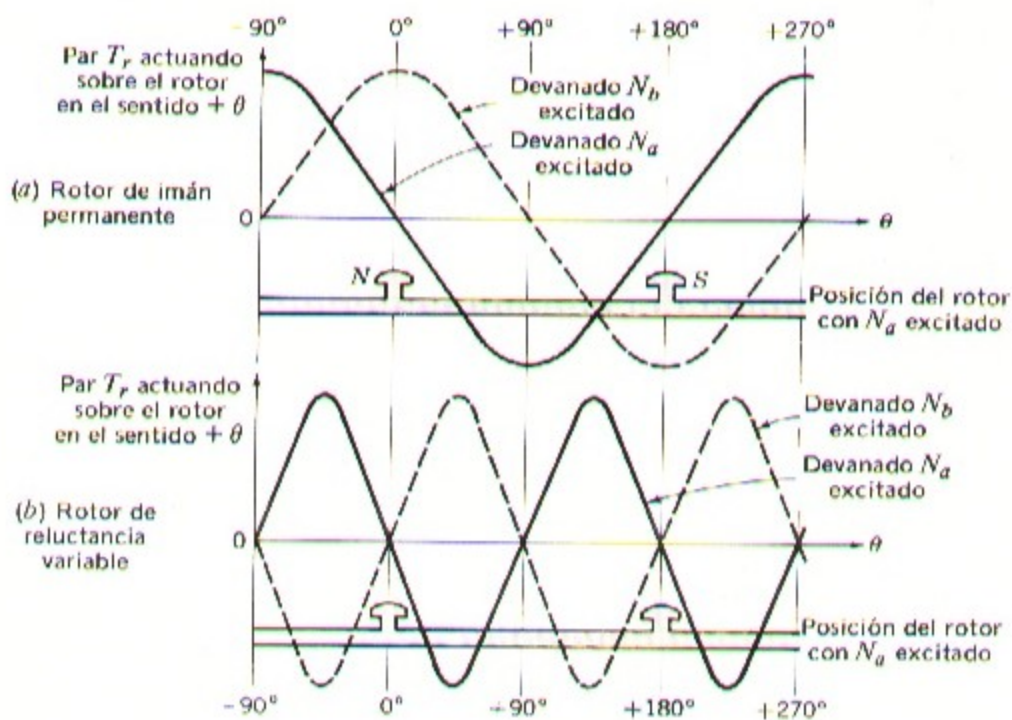


Fig. 11-23. Curvas de par-deslizamiento correspondientes al motor de la Fig. 11-22. (a) Con rotor de imán permanente. (b) Con rotor de reluctancia variable.

lo cual basta excitar individualmente las bobinas: en este último caso únicamente puede utilizarse un rotor de imán permanente. En la Fig. 11-23 están representadas las curvas par-ángulo correspondientes a cada uno de los dos tipos de rotores: mientras que con el rotor de imán permanente se alcanza el par punta cuando la excitación está desplazada 90° , el par del rotor de material ferromagnético es nulo en ese caso y por tanto podrá moverse en cualquier sentido. El rotor de imán permanente tiene la ventaja adicional de que su posición angular θ está fijada sin ambigüedades por las corrientes en los devanados, mientras que el rotor ferromagnético admite dos posiciones distintas posibles para una misma disposición de las corrientes. Dicha disposición puede variar por escalonamientos de $22,5^\circ$, $11,25^\circ$, y aun menores por cada impulso de entrada en el circuito.

Para conseguir escalonamientos o saltos de ángulo más pequeños puede emplearse la construcción diferencial que se muestra en la Fig. 11-24. El devanado del estator es bifásico, mientras que el rotor posee cinco polos. La posición representada en la figura es la que corresponde cuando la bobina excitada es la N_a , y si en estas condiciones se transfiere la corriente de la bobina N_a a la N_b , el rotor girará un ángulo $\theta = 90 - 72 = 18^\circ$ para que quede alineado el polo II con el eje de N_b .

El rotor puede ser ferromagnético o de imán permanente, y en este último caso lo corriente es que esté situado en posición axial tal como se ve en la Fig. 11-25, siendo los extremos que forman los polos de material ferromagnético. Esta forma de construcción tiende a reducir el par de reluctancia y hace que el motor responda con mayor sensibili-

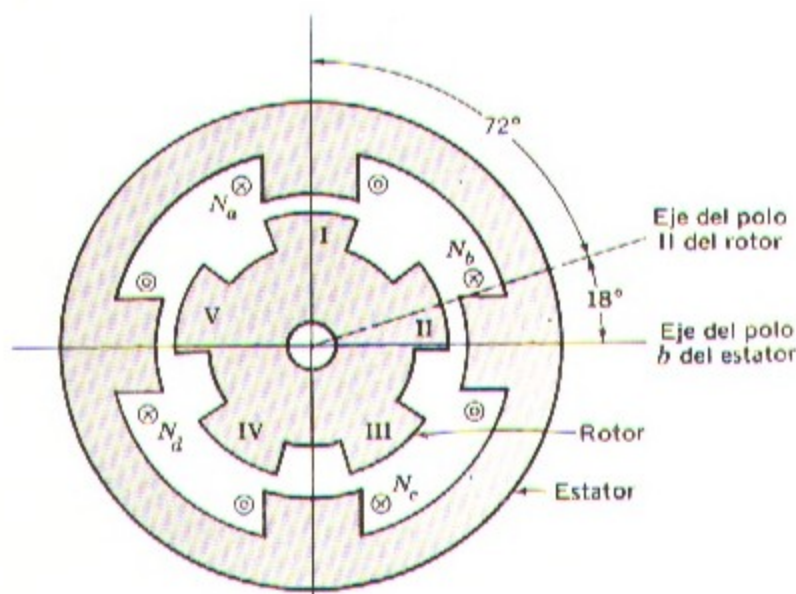


Fig. 11-24. Sección recta de un motor de impulsos de funcionamiento diferencial.

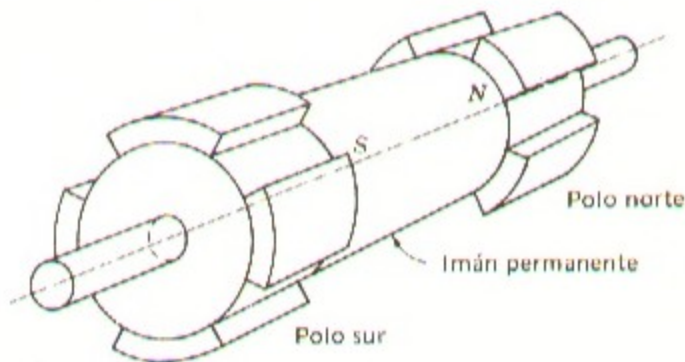


Fig. 11-25. Rotor de un motor de impulsos, con imán permanente en sentido axial.

dad a las corrientes en los devanados; al mismo tiempo uniformiza la carga magnética del imán permanente.⁵

La característica de un motor de impulsos se presenta en general como relación entre el par y el ritmo de pulsaciones aplicadas al equipo de accionamiento, como puede verse en la Fig. 11-26. A medida que aumenta el ritmo de pulsaciones el motor puede desarrollar menor par debido a que el rotor dispone de menos tiempo para arrastrar la carga desde una posición a la siguiente al desplazarse las corrientes en los devanados del estator. La zona de arranque de la Fig. 11-26 es aquella en la que la posición de la carga sigue fielmente los impulsos sin perder saltos, y la zona muerta es aquella en la que la velocidad de la carga sigue el ritmo de pulsaciones sin perder saltos pero en la que no puede arrancar, parar o invertir por la acción del mando. El punto de máximo par corresponde al par máximo que puede ejercer el motor sobre una carga estática.

La ventaja del motor de impulsos reside en que el conjunto del equipo es más reducido y económico que un servosistema de posición o de velocidad equivalente. Los motores de reluctancia variable trabajan a saltos muy pequeños, de 15° o menos, y con un ritmo de hasta 1200 impulsos por segundo; los de imán permanente trabajan a saltos mayores, de hasta unos 90° , y ritmo de 300 impulsos por segundo. Entre sus aplicaciones figuran las de situar en posición las mesas de máquinas herramientas, los transportadores de cinta, y el trazado de gráficas.⁶

5 Véase: A.E. Snowden y E.W. Madsen, "Characteristics of a Synchronous Inductor Motor", IEEE Trans. II Parte, Applications and Industry, 81: 1-5 (1962).

6 Para la descripción de varios tipos de motores de impulsos véase el artículo "Stepper Motor and Controls" Electromechanical Design, 107-119 (1969). Puede hallarse una bibliografía más extensa en D.J. Robinson and C.K. Taft, "A Dynamic Analysis of Magnetic Stepping Motors", IEEE Trans. on Industrial Electronics and Control, Instrumentation, IECI-16 (2): 111-125 (1969).

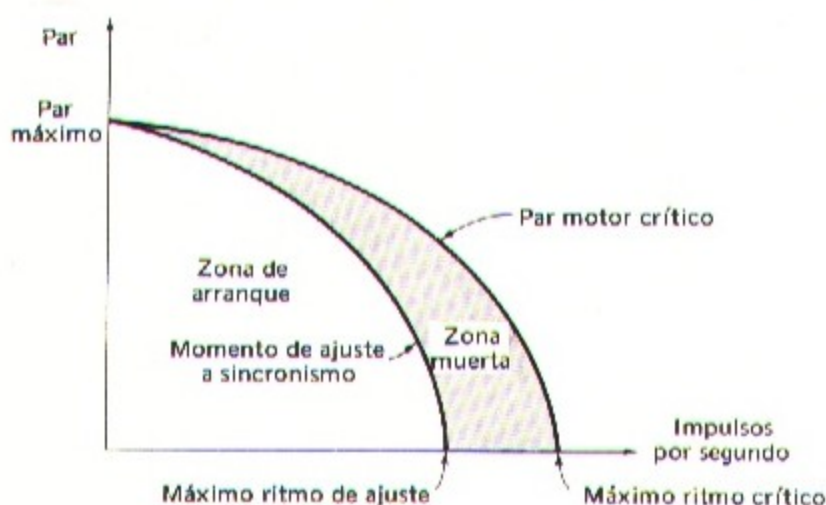


Fig. 11-26. Característica del par en un motor de impulsos en función del ritmo de éstos.

11-8. TACOMETROS DE CORRIENTE ALTERNA

En sistemas de control con realimentación es frecuente tener que medir la velocidad de un eje, y muchas veces es conveniente realizar tal medición en forma de una tensión alterna de frecuencia fija. Un pequeño motor bifásico de inducción es apropiado para este objeto conectándolo en la forma indicada en la Fig. 11-27. El devanado m denominado a veces como de *campo fijo* o de *campo de referencia* se excita con una fuente apropiada de corriente alterna de tensión y frecuencia constantes, con lo que se induce otra tensión de igual frecuencia en el devanado auxiliar a del *campo de control*: esta última tensión se aplica a la entrada de alta impedancia de un amplificador, con lo que el devanado a puede considerarse como en circuito abierto. Las exigencias ideales de orden eléctrico son las de que la señal de tensión inducida en el devanado a sea linealmente proporcional a la velocidad, y que la fase de esta tensión sea fija en relación a la tensión aplicada V_m .

El funcionamiento del tacómetro de alterna puede interpretarse basándose en la teoría del doble campo giratorio expuesto en el apartado 11-4.⁷ Visto desde el devanado de referencia, m , el tacómetro, equivale a un pequeño motor monofásico de inducción, y por consiguiente el circuito equivalente de la Fig. 11-14c es aplicable a las condiciones existentes vistas, como se ha indicado, desde dicho devanado. Las tensiones en las impedancias $0,5Z_f$ y $0,5Z_b$ de la citada figura 11-14c son las tensiones inducidas en el devanado m por las ondas de flujo directo e inversa respectivamente: estas ondas de flujo generan también tensiones en el devanado auxiliar a . Si la relación entre el número de espiras

⁷ Para un análisis cuantitativo véase R.H. Frazier, "Analysis of the Drag-cup A.C. Tachometer" Trans AIEE 70 (1951).

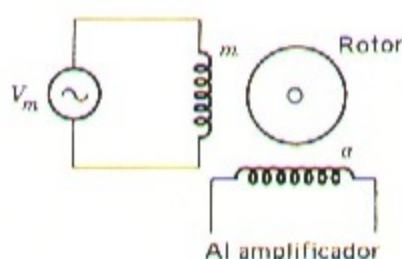


Fig. 11-27. Esquema de tacómetro bifásico.

efectivas del devanado a respecto a las del devanado m es a , las tensiones inducidas en el devanado a serán a veces mayores que las correspondientes tensiones inducidas en el devanado m . Por número de espiras efectivo se entiende el número de espiras reales corregido de los efectos de la distribución del devanado en cuanto concierne a la distribución espacial fundamental del flujo y la f.m.m.

Si el sentido de giro es tal que el campo directo tarda un cuarto de ciclo en tiempo desde que pasa frente al devanado a hasta que lo hace frente al m , la tensión E_{af} inducida por el campo directo en el devanado a se adelanta en 90° a la correspondiente tensión E_{mf} inducida por el mismo campo en el devanado m , lo que expresado en forma vectorial puede escribirse:

$$E_{af} = jaE_{mf} = jaI_m 0,5Z_f \quad (11-38)$$

siendo I_m el vector corriente en el devanado m que viene dado por el circuito equivalente de la Fig. 11-14c.

El campo inverso gira en sentido contrario, y por consiguiente la tensión E_{ab} por él inducida en el devanado a retrasa 90° respecto a la tensión E_{mb} inducida en el devanado m , o sea:

$$E_{ab} = -jaE_{mb} = -jaI_m 0,5Z_b \quad (11-39)$$

La tensión total E_a inducida en el devanado a es la suma de las dos componentes de tensión inducidas por ambos campos, es decir:

$$E_a = jaI_m 0,5(Z_f - Z_b) \quad (11-40)$$

Estando el motor parado, los campos directo e inverso son iguales entre sí por lo que no se induce tensión alguna en el devanado a . Sin embargo, cuando el rotor gira aumenta la impedancia del campo directo mientras decrece la del campo inverso, siendo la diferencia entre ambas función de la velocidad, es decir, que la tensión inducida en el devanado a es función también de dicha velocidad. Invertiendo el sentido de rotación se invierte la fase de la tensión en el devanado auxiliar.

La forma de las curvas de tensiones y de ángulos de fase en función de la velocidad depende del campo de velocidades y de las constantes del tacómetro, principalmente de la relación Q_2 entre la autorreactancia y la resistencia del rotor. Se puede demostrar que tanto un valor bajo de Q_2 del rotor (x_{22}/r_2 menor que aproximadamente 0,1) como un valor alto del mismo (x_{22}/r_2 mayor que aproximadamente 10) da por resultado un ángulo de fase casi constante y una relación casi lineal entre la tensión del devanado auxiliar y la velocidad.

Si la Q_2 del rotor es pequeña, se sacrifica la sensibilidad en volt/r.p.m., pero en cambio la zona de velocidad lineal es amplia, y por el contrario si Q_2 es alta, la zona de velocidad lineal alrededor del cero es más bien reducida, abarcando una pequeña fracción de la velocidad síncrona, pero la linealidad de la tensión y la constancia del ángulo de fase se mantienen bastante estrictamente. Estas limitaciones en el valor de Q_2 no deben tomarse literalmente, ya que se puede obtener un funcionamiento satisfactorio con valores intermedios de Q_2 si las exigencias en la linealidad de la tensión y en la constancia del ángulo de fase no son excesivamente severas.

Al igual que sucede con otros aparatos de medida, el tacómetro de alterna debe afectar cuanto menos posible al sistema de que forma parte: dicho de otra forma, su par debe ser pequeño comparado con los demás pares existentes en el sistema, y su inercia debe ser muy reducida cuando se prevean variaciones rápidas de velocidad como ocurre en muchos sistemas de control automáticos. Para disminuir todo lo posible la inercia, muchas veces se construyen los tacómetros de alterna con un rotor en forma de vaso metálico de poco espesor como el representado en el croquis esquemático de la Fig. 11-21. Debido al entrehierro relativamente largo, esta forma de construcción lleva aparejada una Q_2 relativamente baja, que si se desea puede reducirse aún más haciendo el rotor de un material de alta resistividad.

Los tacómetros de corriente alterna requieren un diseño y montaje sumamente cuidadoso y preciso para mantener centrado el rotor y para evitar el acoplamiento directo entre los devanados de excitación y de salida provocado por los flujos dispersos, ya que tales acoplamientos se traducirían en señales aún con velocidad nula. En ciertas ocasiones se apantalla el aparato con una envoltura de hierro dulce para librarlo de interferencias parásitas extrañas. Corrientemente estos tacómetros trabajan a la frecuencia de 400 Hz.

11-9. SINCROS Y SINCROTRANSFORMADORES

Los sincros se utilizan en los sistemas de control para transmitir información sobre la posición relativa de ejes, para mantener el sincronismo entre dos o más ejes y para realizar operaciones aritméticas con la información angular. Un sincrotransformador es un tipo particular de sincro que suministra una señal de error eléctrica proporcional a la desviación de su eje respecto a la posición de referencia; se utiliza mucho en sistemas de realimentación para el control de posiciones. Los sincros se construyen en general como una versión en miniatura de una máquina síncrona de alterna, poseyendo en el estator un devanado trifásico distribuido, y en el rotor otro devanado monofásico de dos polos.

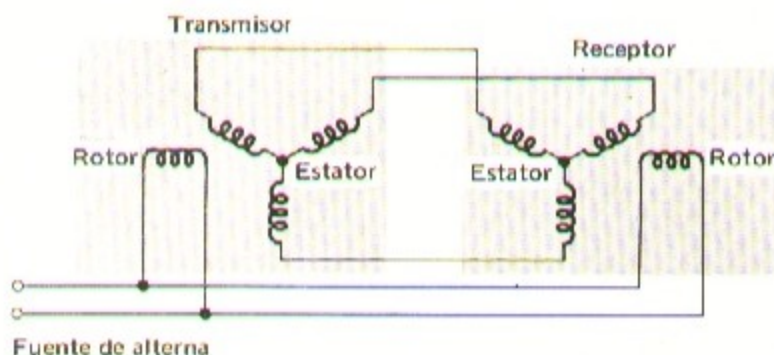


Fig. 11-28. Sistema monofásico de sincro transmisor-receptor.

En la Fig. 11-28 se representa la disposición básica de dos sincros en la que ambos ejes mantienen el sincronismo. En muchos aspectos, la construcción de los sincros *generadores* o *transmisores* es similar a la de los sincros *motores* o *receptores*. Cada uno tiene un devanado monofásico (generalmente en el rotor), conectados ambos a una fuente de alterna común, y tres devanados (generalmente en el estator) con sus ejes dispuestos a 120° y conectados en Y; los bornes de estos últimos devanados correspondientes al transmisor y al receptor se conectan entre sí como puede verse en la citada figura. Cuando se excitan los devanados monofásicos de los rotors, por efecto de transformador se inducen tensiones en los devanados conectados en Y de los estatores. Si los dos rotors tienen la misma posición relativa en el espacio respecto a sus respectivos estatores, las tensiones inducidas en cada uno de los aparatos serán iguales y no circulará corriente alguna por sus devanados inducidos, por lo que no se transmitirá tampoco ningún par del uno al otro. Pero si las posiciones en el espacio de los dos rotors no coinciden, las tensiones inducidas ya no serán iguales por lo que en los devanados de los estatores circularán corrientes, las cuales juntamente con los campos magnéticos en los entrehierros crearán sendos pares que tenderán a situar los rotors en idéntica posición.

Mecánicamente considerados estos sincros tienen las mismas particularidades constructivas que los motores pequeños, pudiéndose ver en la Fig. 11-29 la estructura de un sincro receptor. Los núcleos tanto del rotor como del estator están formados de paquetes de chapas, y para reducir los rozamientos al mínimo se emplean cojinetes de bolas. Se

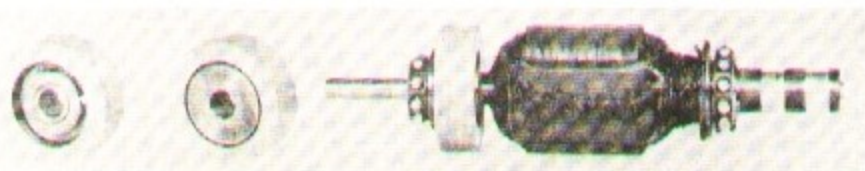


Fig. 11-29. Amortiguador y rotor bobinado con amortiguador, de un sincro receptor.

utilizan también amortiguadores para obligar a los sincro receptores a estabilizarse rápidamente en su posición angular de equilibrio.

Puede demostrarse que el par existente con los rotores parados o girando lentamente depende muy estrechamente del seno del ángulo diferencia entre las respectivas posiciones de los ejes del transmisor y del receptor. El par diferencial desarrollado por un transmisor y un receptor eléctricamente idénticos conectados según la Fig. 11-28 puede variar entre 0,00065 Nw-m por grado en las unidades pequeñas hasta unos 0,0165 Nw-m por grado en las grandes.

Puede introducirse una modificación en el sistema mediante la adición de un *sincro diferencial*, para que la rotación de un eje sea función de la suma o de la diferencia de las rotaciones de otros dos, como en la Fig. 11-30 en la que el sincro diferencial actúa como un transmisor diferencial. Las tensiones aplicadas a sus devanados del estator inducen las correspondientes tensiones en los del rotor. Las magnitudes relativas de estas tres tensiones rotóricas son las mismas que existirán si se suprimiera el diferencial y se girara el transmisor un ángulo igual a la suma o diferencia entre los ángulos del propio transmisor y del diferencial. Estos transmisores diferenciales están provistos en general de un grupo de tres condensadores conectados entre los bornes primarios, cuya función es la de mejorar el factor de potencia y reducir en consecuencia la posibilidad de sobrecalentamientos del sistema. Puede también emplearse el diferencial como motor, alimentándose de dos transmisores separados, con lo que su movimiento de rotación dependerá de la suma o de la diferencia entre las rotaciones de ambos transmisores.

El máximo error estático en un sistema formado por un transmisor y un receptor únicos iguales, puede ser del orden de un grado, y es debido principalmente al rozamiento en los cojinetes del sincro receptor, aumentando este error al ir añadiendo sincros adicionales y cuando la impedancia de la conexión entre transmisor y receptor adquiere valores apreciables. Los errores dinámicos producidos por las oscilaciones mecánicas del eje alrededor de su posición correcta de equilibrio pueden ser dos o tres veces mayores que los estáticos, y para reducirlos al mínimo se añaden amortiguadores mecánicos a los rotores, como puede verse en la Fig. 11-29.

Si el sincro receptor debe vencer pares apreciables el error aumenta debido al desplazamiento angular entre los ejes del transmisor y del motor necesario para transmitir el par.

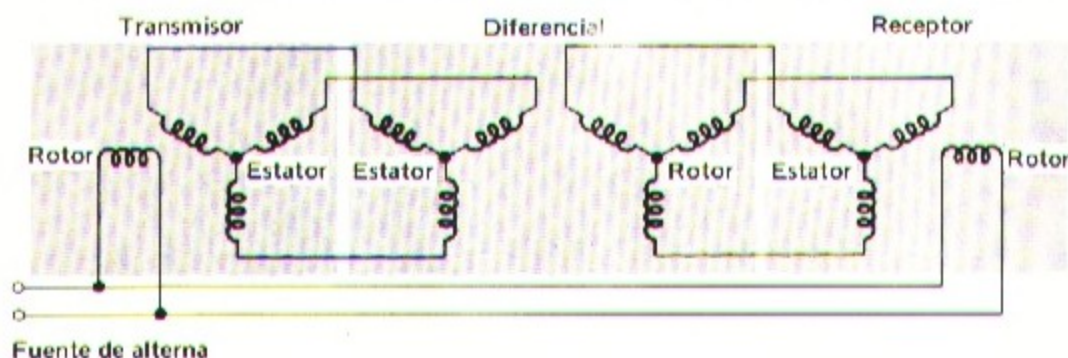


Fig. 11-30. Sistema sincro transmisor-receptor con sincro diferencial.

Este hecho, junto con el calentamiento del equipo, constituye un límite para el valor del par, y en consecuencia en los sistemas de realimentación puede ser más conveniente el empleo de sincros transformadores.

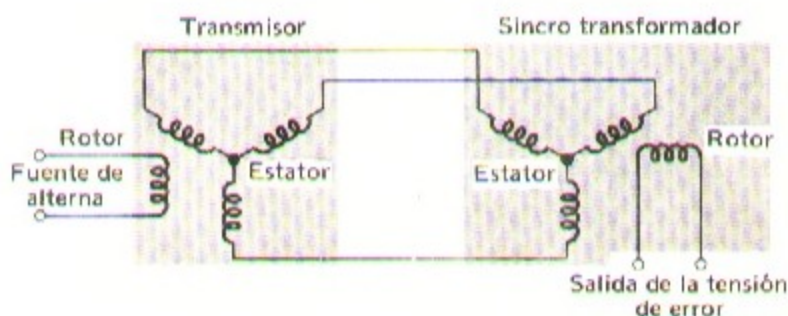


Fig. 11-31. Sistema sincro transmisor y sincro transformador.

El esquema de la Fig. 11-31 corresponde al circuito básico mediante el cual un sincro transformador de control dará una señal de error proporcional al ángulo de desviación del rotor. También aquí se necesitan dos unidades interconectadas entre sí, siendo una de ellas un sincro transmisor y la otra, que es muy similar, el sincro transformador de control. El rotor del transmisor se excita con una corriente alterna monofásica, creándose un campo magnético en el mismo y unas tensiones en los devanados del estator tanto del propio transmisor como del sincro transformador de control. Si despreciamos la caída de tensión debida a la corriente de excitación, las tensiones inducidas en los dos devanados de los estatores deberán ser iguales y por tanto la distribución de flujo en el sincro del transformador será semejante a la del sincro transmisor. El efecto es por tanto el mismo que si los dos devanados de los rotores estuvieran situados en el mismo circuito magnético y dispuestos de tal forma que sus respectivos ejes pudieran estar desplazados entre sí de cualquier ángulo en el espacio. Esta disposición es equivalente a una inductancia mutua regulable entre los dos devanados rotóricos pero con la particularidad adicional de hacer posible una separación física real entre ambos.

Si el desplazamiento es de 90 grados eléctricos, es decir, si ambos ejes están desplazados entre sí la cantidad indicada, no se inducirá tensión alguna en el rotor del sincro transformador: este desplazamiento corresponde pues a la posición de equilibrio de ambos ejes. Si el ángulo formado tiene cualquier valor que no sea ni 90 ni 270 grados eléctricos, entonces sí se inducirá una tensión en el rotor del sincro transformador, siendo la magnitud de esta tensión función de la diferencia angular entre las posiciones de los dos ejes, dependiendo la polaridad instantánea del sentido del desplazamiento. En los sistemas de control actuales, el transformador opera con un error angular de una fracción de grado, y dentro de este campo, el error de tensión es proporcional al error de ángulo. En estos sistemas puede también añadirse un sincro diferencial entre los sincros transmisores y los sincros transformadores.

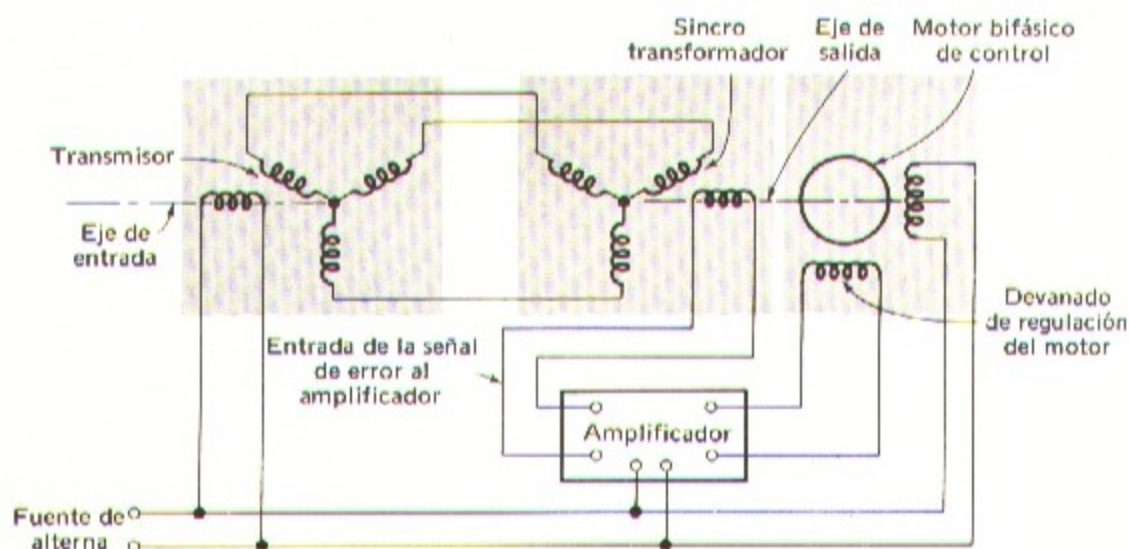


Fig. 11-32. Aplicación de un sincro transmisor y un sincro transformador al control de posición angular.

En la Fig. 11-32 se da un ejemplo de aplicación al control de la posición angular de un eje de salida, de acuerdo con la de otro eje de entrada. El rotor del sincro transmisor está acoplado mecánicamente al eje de entrada, mientras que el rotor del sincro transformador está unido mecánicamente al eje de salida y eléctricamente a la entrada de un dispositivo servo-amplificador. La potencia mecánica necesaria para mover el eje de salida junto con su carga procede de un motor bifásico de control, en el que la entrada a su devanado de regulación procede del amplificador que a su vez comprende en su circuito unos condensadores partidores de fase. Mientras el eje de salida está en posición correcta, es decir, desplazado 90° respecto al de entrada, no existirá señal en el amplificador y por tanto la potencia en el devanado de regulación del motor será nula y el motor permanecerá parado, pero si por el contrario, existe una cierta discrepancia angular, en la entrada del amplificador aparecerá una tensión de error, de polaridad relativa adecuada para que el motor se vea obligado a girar en el sentido que corrija aquella discrepancia.

11-10. RESUMEN

El tema principal de este capítulo es una continuación de la teoría de las máquinas de inducción expuesta en el capítulo 7. Esta teoría se desarrolla por un proceso de razonamiento escalonado a partir de la sencilla teoría de los campos giratorios en los motores de inducción polifásicos simétricos. El concepto básico es la descomposición de la onda de f.m.n. del estator en dos ondas de amplitud constante girando en el entrehierro en sentidos opuestos y a la velocidad de sincronismo. Si el deslizamiento respecto al campo

directo es s , respecto al campo inverso será $2 - s$. Cada uno de estos dos campos componentes ejerce una acción de motor de inducción exactamente igual que en un motor polifásico simétrico. Desde el punto de vista del estator, los efectos debidos al rotor pueden considerarse y expresarse cuantitativamente por medio de circuitos equivalentes sencillos. La facilidad con que de esta forma pueden tenerse en cuenta las reacciones internas justifica plenamente el gran uso que se hace de la teoría del doble campo rotativo.

Con un devanado monofásico, las ondas componentes directa e inversa son iguales, siendo su amplitud igual a la mitad del máximo valor de punta de la f.m.m. pulsatoria estacionaria engendrada por el devanado. La descomposición de la f.m.m. del estator en las dos componentes directa e inversa citadas conduce al concepto físico del motor monofásico descrito en el apartado 11-1 y finalmente a la teoría cuantitativa expuesta en el apartado 11-4 y a los circuitos equivalentes de la figura 11-14.

En el apartado 11-5 se da un nuevo paso en el estudio de las posibilidades de aplicación de la teoría de los campos giratorios a los motores bifásicos simétricos alimentados con tensiones desequilibradas. Estos estudios desembocan en el concepto de las componentes simétricas según el cual un sistema bifásico de tensiones o intensidades desequilibradas equivale a la suma de dos sistemas bifásicos equilibrados con secuencias de fases invertidas. La descomposición de las corrientes en dos sistemas componentes equilibrados equivale a descomponer la onda de f.m.m. del estator en sus dos componentes directa e inversa, y por consiguiente las reacciones internas del rotor respecto a cada uno de los sistemas componentes simétricos son las mismas que se han estudiado ya.

Un razonamiento similar, del que hemos prescindido aquí, conduce al conocido procedimiento de las componentes trifásicas simétricas para el tratamiento de problemas concernientes al funcionamiento desequilibrado de las máquinas rotativas trifásicas. La facilidad con que pueden analizarse las máquinas rotativas apoyándose en la teoría de los campos giratorios es el motivo del gran empleo que se hace de las componentes simétricas.

PROBLEMAS

11-1. ¿Qué tipo de motor emplearía Vd. en las siguientes aplicaciones? Déense razones justificativas:

Aspirador doméstico. Refrigerador. Lavadora. Quemador de aceite doméstico. Ventilador de sobremesa. Máquina de coser. Molinillo. Reloj. Tocabiscos. Taladradora de mano. Bomba de agua.

11-2. Estando parado, las intensidades en los devanados principal y auxiliar de un motor de inducción con condensador de arranque son: $I_m = 14,44$ A e $I_a = 7,07$ A. La corriente del devanado auxiliar adelanta, respecto a la del principal, 60° . Las espiras efectivas por polo, es decir, ya corregidas para tener en cuenta los efectos de la distribución, son $N_m = 80$ y $N_a = 100$. Ambos devanados están en cuadratura en el espacio entre sí.

Determinense las amplitudes de las ondas directa e inversa de la f.m.m. del estator.

Supongamos que sea posible ajustar la magnitud y fase de la corriente del devanado auxiliar. ¿Cuáles deberían ser estas amplitud y fase para crear una onda de f.m.m. directa pura?

11-3. Hállese la potencia mecánica de salida de un motor de inducción monofásico de 1/4 c.v., 4 polos, 110 V, 50 Hz, cuyas constantes con un deslizamiento de 0,05 son las siguientes:

$$r_{1m} = 1,86 \text{ ohm} \quad x_{1m} = 2,56 \text{ ohm} \quad x_{\varphi} = 53,5 \text{ ohm}$$

$$r_2 = 3,56 \text{ ohm} \quad x_2 = 2,56 \text{ ohm}$$

$$\text{Pérdidas en el hierro} = 35 \text{ W}$$

$$\text{Rozamientos y resistencias del aire} = 13,5 \text{ W}$$

11-4. Hállese la relación entre el flujo inverso y el directo en el motor monofásico de inducción del ejemplo 11-3 funcionando con un deslizamiento de 0,05.

Trácese una semionda de la distribución de flujo resultante en los instantes de tiempo correspondientes a $t = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ y 180° , tomando como origen de tiempos el instante en que las fases de ambas ondas de flujo, directa e inversa, coinciden en el espacio.

Si representamos las ondas de flujo directa e inversa mediante vectores en el espacio, como los vectores f y b de f.m.m. en la figura 11-2c, dibújese el diagrama de las componentes y de la resultante en los mismos cinco instantes de tiempo antes mencionados. Dibújese asimismo el lugar geométrico del extremo del vector representativo de la onda de flujo resultante en el entrehierro. ¿Qué tipo de curva se presume que sea este lugar geométrico?

11-5. Hállese una expresión en función de Q_2 para la velocidad distinta de cero de un motor de inducción monofásico, a la cual el par interno sea nulo (véase la ecuación 11-21).

11-6. Un pequeño motor bifásico de inducción de dos polos tiene las siguientes constantes a 50 Hz:

$$r_{1m} = 375 \text{ ohm} \quad r_2 = 255 \text{ ohm}$$

$$x_{1m} = x_2 = 50 \text{ ohm} \quad x_{\varphi} = 920 \text{ ohm}$$

El devanado principal y el auxiliar tienen ambos el mismo número de espiras. Se emplea este motor a manera de tacómetro aplicándole a su devanado principal una tensión de referencia de 50 Hz, tal como puede verse en la Fig. 11-27. Calcúlese la sensibilidad velocidad/tensión en volt de salida por volt de entrada y radianes por segundo, para velocidades próximas al cero.

Calcúlese también el ángulo de fase de la tensión de salida en relación a la tensión de entrada.

11-7. *a.* Hállese el par de arranque del motor descrito en el ejemplo 11-4, en las condiciones señaladas.

b. Compárese el resultado obtenido en *a* con el par que desarrollaría el motor realizando el arranque aplicándole una tensión bifásica equilibrada de 220 V.

c. Demuéstrase que, en general, si las tensiones V_m y V_a aplicadas al estator de un motor bifásico de inducción están en cuadratura pero son desiguales, el par de arranque conseguido será el mismo que se obtendría aplicando una tensión bifásica equilibrada de valor $\sqrt{V_m V_a}$.

11-8. El motor de inducción del ejemplo 11-4 se alimenta de una fuente de corriente bifásica desequilibrada a través de una línea de cuatro conductores cuya impedancia por fase es de $1,0 + j3,0$ ohm.

Las tensiones de entrada son:

$$V_m = 240 \angle 0^\circ \text{ V y } V_a = 200 \angle 75^\circ \text{ V.}$$

Siendo el deslizamiento de 0,05 demuéstrase que el funcionamiento del motor de inducción es tal, que las tensiones en bornes del mismo se aproximan más a las de un sistema bifásico equilibrado que las de la fuente de alimentación.

11-9. Las constantes dadas a continuación corresponden al circuito equivalente de un motor de inducción bifásico de jaula de ardilla de 1,5 c.v., 220 V, cuatro polos y 50 Hz. Dichas constantes están dadas en ohm por fase referidas al estator: las pérdidas mecánicas en vacío son de 200 W.

$$r_1 = 3,2$$

$$r_2 = 2,4$$

$$x_1 = x_2 = 3,2$$

$$x_\phi = 100$$

a. La tensión aplicada a la fase *m* es de $220 \angle 0^\circ$ V, y la aplicada a la fase *a* de $220 \angle 60^\circ$ V. Con un deslizamiento $s = 0,04$, Z_f vale $41,9 + j27,2$ ohm, y $Z_b = 1,20 + j3,2$ ohm. ¿Cuál es el par neto?

b. ¿Cuál es el par de arranque con las tensiones aplicadas indicadas en el punto anterior?

c. Las tensiones aplicadas se ajustan de forma que $V_m = 220 \angle 0^\circ$ y $V_a = 220 \angle 90^\circ$. Con plena carga el deslizamiento es 0,04. ¿Con qué deslizamiento se obtendrá el par máximo? ¿Cuál es el valor máximo del par en Nw-m?

d. Mientras el motor está girando en las condiciones expuestas en el punto anterior se desconecta la fase *a*. ¿Cuál será la potencia desarrollada por la máquina con el deslizamiento $s = 0,04$?

e. ¿Qué tensión aparecerá entre los terminales de la fase en circuito abierto *a* siendo el deslizamiento $s = 0,04$ y las demás condiciones las mismas que en el punto anterior?

11-10. En el ejemplo 11-5 se expusieron algunas consideraciones dinámicas simplificadas relativas a motores bifásicos de control que se basaban en admitir la linealidad de las curvas par-velocidad de la Fig. 11-20 dentro del campo de velocidades reducidas. En este problema se empleará una aproximación similar.⁸

El motor de control tiene devanados bifásicos idénticos en el estator, y un rotor de alta resistencia: se alimenta de una fuente de baja impedancia. Si se le aplica una tensión senoidal equilibrada la curva par-velocidad es lineal dentro del campo que interesa, es decir:

$$T = kV_1^2 s$$

siendo k una constante y V_1 la tensión equilibrada del estator.

- a. Empleando el motor de control como se describe en el apartado 11-6 demuéstrese que los pares directo e inverso vienen dados respectivamente por:

$$T_f = k \left(\frac{V_a + V_m}{2} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_s} \right)$$

$$T_b = k \left(\frac{V_a - V_m}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_s} \right)$$

siendo ω_0 la velocidad angular del eje y ω_s la velocidad angular de sincronismo.

- b. El motor acciona una carga de momento de inercia J y que requiere un par $f_v \omega_0$ proporcional a la velocidad. Despréciense las pérdidas en el motor. Estando el motor parado con una tensión V_m en su devanado de referencia se le aplica súbitamente una tensión eficaz V_a al de control.

Determinése la velocidad ω_0 en función del tiempo, prescindiendo de los transitorios eléctricos.

- c. Si la tensión de control es muy pequeña podrá despreciarse V_a^2 frente a V_m^2 . ¿Cuál es la constante de tiempo correspondiente al punto anterior admitiendo esta simplificación?
- d. Haciendo uso del supuesto del punto anterior, determinése las funciones de transferencia que relacionan la velocidad del eje y la posición del mismo con la señal de control.

11-11. El motor del problema 11-6 se emplea a manera de motor bifásico de control. Siendo la tensión en el devanado de referencia de 100 V, y en el de control de 70 V, éste adelantado 90° respecto al primero, y siendo 50 Hz la frecuencia en ambos, calcúlese:

- a. La relación entre las ondas de flujo inversa y directa a motor parado.
- b. La misma relación del punto anterior cuando el deslizamiento es $s = 0,80$.
- c. La potencia mecánica interna desarrollada con el citado deslizamiento $s = 0,80$.

⁸ Pueden hallarse unos estudios más detallados de este tema en A.M. Hopkin "Transient Response of Small Two-phase Servomotors". Trans. AIEE 70: 881-886 (1951).

11-12. Trácese para el motor bifásico de inducción del ejemplo 11-6 una familia de curvas de pérdidas en el rotor y de potencia interna desarrollada, para las tensiones relativas 1,0, 0,5 y 0 en la fase de control, cubriendo el campo de velocidades relativas desde -1 hasta $+1$. Las tensiones aplicadas están en cuadratura.

Exprésense las potencias en unidades relativas tomando como base la potencia suministrada por los devanados del estator al entrehierro estando el motor parado y con una tensión bifásica aplicada a ambos devanados, de valor relativo unidad.

11-13. Un pequeño motor de inducción de jaula de ardilla, de dos polos, para empleo en servosistemas, tiene en el estator devanados bifásicos simétricos.

Estando el motor parado, la impedancia de entrada medida entre terminales de cada uno de los devanados del estator a 50 Hz es de $305 + j51$ ohm. Para el objeto de este problema puede prescindirse de las pérdidas mecánicas y en el hierro.

En la siguiente tabla se dan tres puntos de la característica par-velocidad de este motor al aplicar a los terminales de su estator una tensión bifásica equilibrada de 100 V a 50 Hz.

Par Nw-m	0,064	0,082	0,088
Deslizamiento relativo	0,50	1,00	1,50

Si se mantiene en 100 V la tensión de la fase de referencia, mientras que se reduce a 50 V la de la fase de control (estando ambas en cuadratura en el tiempo), calcúlese:

- El par, en Nw-m, a motor parado
- La potencia de entrada en la fase de referencia, también a motor parado.
- La potencia de entrada en la fase de control en igualdad de condiciones.
- Las pérdidas en el rotor I^2R en las condiciones anteriores.
- El par con deslizamiento $s = 0,50$.

11-14. Estando el motor bifásico de control del problema 11-13 parado, con una tensión de 100 V en su fase de referencia y una tensión variable en la de control, trácese las curvas de las siguientes variables en función del par a motor parado.

- Pérdidas totales en el cobre del rotor.
- Pérdidas en el cobre de la fase de control del estator.
- Pérdidas en el cobre de la fase de referencia del estator.
- Potencia de entrada en la fase de control.
- Potencia de entrada en la fase de referencia.

11-15. Un motor de control bifásico simétrico desarrolla un par de 1,70 Nw-m estando parado con una tensión equilibrada aplicada de 100 V.

Si se requiere que el motor produzca una aceleración de $64,4 \text{ rad/seg}^2$, partiendo de velocidad cero, sobre una carga sin rozamientos pero con una inercia de $0,2 \text{ Nw-m}^2$ ¿Cuál debe ser la tensión en el devanado auxiliar cuando en el principal existen 100 V, estando ambas tensiones en cuadratura en el tiempo?

APENDICE A

Circuitos trifásicos

En la generación, transmisión y utilización de grandes potencias en forma de energía eléctrica alterna, interviene siempre un tipo de circuito denominado *circuito* o *sistema polifásico*. En estos circuitos cada sistema de tensiones está formado por un grupo de tensiones distintas cuyas magnitudes y ángulos de fase están relacionados entre sí. Así un sistema n -fásico consta de n tensiones substancialmente iguales en magnitud, pero desplazadas sucesivamente unas de otras por el ángulo de fase $360^\circ/n$. Un sistema trifásico consta por tanto de generadores que engendran tres tensiones de magnitud prácticamente igual desplazadas entre sí del ángulo de fase 120° .

Debido a que el sistema trifásico reúne una serie de ventajas tanto económicas como técnicas es con mucho el más corrientemente empleado, por lo que en este apéndice se le dedicará una especial atención. Las tres tensiones individuales de un sistema trifásico pueden conectarse cada una de ellas a un circuito propio independiente, con lo que tendríamos tres *sistemas monofásicos* separados; pero tal como se vio en el primer apartado también pueden realizarse entre ellas ciertas conexiones eléctricas simétricas con lo que se formará el verdadero sistema trifásico, siendo esta última posibilidad la que estudiaremos en este apéndice. Obsérvese que la palabra *fase* adquiere dos significados distintos: se puede referir a una parte de un sistema o circuito polifásico, o bien referirse al desplazamiento angular entre los vectores de tensión y de intensidad como es lo corriente en el estudio del régimen permanente por la teoría de circuitos. Ambos conceptos son bien distintos y prácticamente no existe posibilidad de confusión.

A-1. GENERACION DE TENSIONES TRIFASICAS

Consideremos un generador trifásico elemental de dos polos como el de la Fig. A-1. En el estator existen tres bobinas aa' , bb' y cc' dispuestas con sus respectivos ejes desplazados en el espacio de 120° entre sí: dichas bobinas pueden representarse esquemáticamente

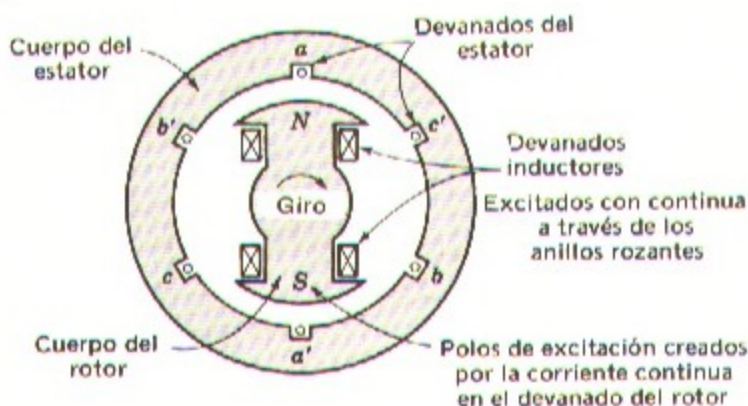


Fig. A-1. Generador trifásico elemental de dos polos.

como en la Fig. A-2. Cuando se excita y hace girar el inductor o rotor, se inducirán tensiones en cada un de las tres fases de acuerdo con la ley de Faraday. Si las cosas están construidas y dispuestas de forma que el flujo quede distribuido senoidalmente entre los polos, el flujo concatenado con cada fase variará senoidalmente en el tiempo induciendo en cada una de ellas tensiones también senoidales. Como puede verse en la Fig. A-3 estas tres ondas de tensión quedarán desplazadas en el tiempo 120° ya que los respectivos devanados están desplazados 120° en el espacio; el correspondiente diagrama vectorial será el representado en la Fig. A-4. En general se elige el origen de tiempos y el eje de referencia de los diagramas del tipo de los de las Figs. A-3 y A-4 en forma arbitraria, atendiendo únicamente a razones de conveniencia para el análisis.

Existen dos posibilidades de utilización de las tensiones generadas en la forma descrita: Los seis terminales a y a' , b y b' , c y c' de los devanados pueden conectarse a tres sistemas monofásicos independientes, o bien pueden interconectarse todos ellos entre sí formando un sistema trifásico: esta última disposición es la universalmente empleada.

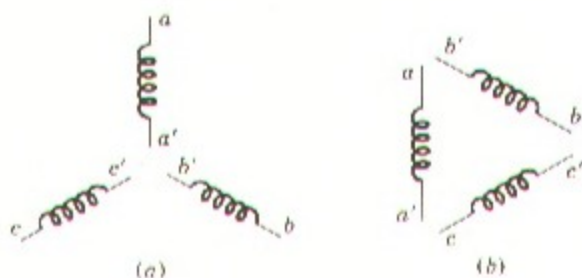


Fig. A-2. Representación esquemática de los devanados de la Fig. A-1.

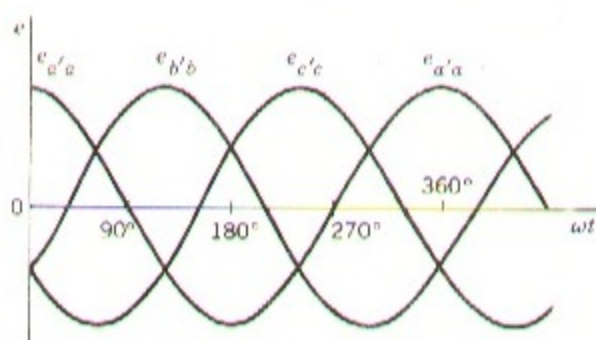


Fig. A-3. Ondas de tensiones inducidas en los devanados de las Figs. A-1 y A-2.

Pero esta interconexión entre los devanados de las tres fases cabe hacerla también en dos formas distintas como puede verse en la Fig. A-5: se pueden unir los extremos a' , b' y c' para formar el neutro o , lo que conduce a la *conexión en Y*, o bien se pueden unir los terminales a y b' , b y c' , c y a' formándose así una *conexión Δ* .

Con la conexión en Y puede derivarse o no un *conductor neutro*, que es el señalado con trazos en la Fig. A-5a. Si existe dicho neutro se formará un *sistema trifásico con neutro* que constará de cuatro conductores, y si no existe, tendremos simplemente un *sistema trifásico*, con tres conductores. La conexión Δ de la Fig. A-5b no permite sacar el neutro, por lo que sólo podrá existir el sistema con tres conductores.

En las Figs. A-3 y A-4 las tres tensiones de fase son iguales pero defasadas 120 grados eléctricos entre sí, lo que constituye una característica general de los sistemas trifásicos *equilibrados*. Además, la impedancia de una fase es igual a la de cualquiera de las otras dos, por lo que las intensidades son iguales en todas ellas aunque también desplazadas 120 grados eléctricos entre sí: en consecuencia, las potencias tanto activas como reactivas, transportadas por cada fase serán asimismo iguales. Téngase en cuenta que en este apéndice *trataremos únicamente de sistemas equilibrados, por lo que ninguno de los métodos empleados ni de las conclusiones a que lleguemos serán aplicables a un sistema desequilibrado*. La mayor parte de los problemas que se presentan en la práctica se refieren a

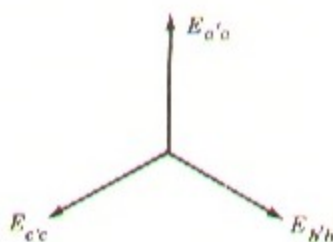


Fig. A-4. Diagrama vectorial de tensiones inducidas.

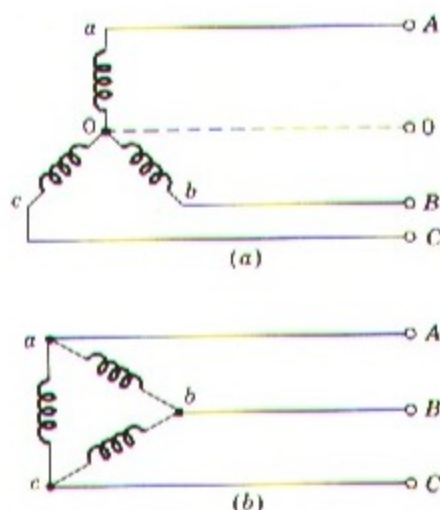


Fig. A-5. Conexiones trifásicas (a) conexión en Y; (b) conexión en Δ .

sistemas equilibrados: casi todas las cargas industriales son trifásicas y por tanto ya están equilibradas por sí mismas, y cuando se trata de alimentar cargas monofásicas a partir de una red trifásica ya se procura equilibrar el sistema repartiendo las cargas monofásicas lo más equitativamente posible entre las tres fases.

A-2. TENSIONES, INTENSIDADES Y POTENCIAS TRIFASICAS

Cuando las tres fases de los bobinados de la Fig. A-1 se conectan en Y como en la Fig. A-5a el diagrama vectorial de tensiones será el de la Fig. A-6. El orden o secuencia de fases en dicha Fig. A-6 es precisamente *abc*, es decir, que la tensión de la fase *a* pasa por su máximo 120° antes de que lo haga la de la fase *b*. Empleando un doble subíndice, como se ha hecho en la figura, se facilita grandemente el trazado del diagrama completo. Los subíndices indican los puntos entre los que existe la tensión considerada, y su orden indica el sentido de mayor a menor.

Por tanto $E_{ao} = -E_{oa}$.

Las tres tensiones de fase son E_{oa} , E_{ob} y E_{oc} , llamadas también *tensiones entre fase y neutro* o más corrientemente *tensiones simples*. Las tensiones E_{ab} , E_{bc} y E_{ca} llamadas *tensiones de línea*, *tensiones entre fases* o más corrientemente *tensiones compuestas* tienen también una importancia primordial. Según la ley de Kirchhoff, la tensión compuesta E_{ab} es:

$$\begin{aligned} E_{ab} &= E_{ao} + E_{ob} = -E_{oa} + E_{ob} \\ &= \sqrt{3} E_{ob} \angle -30^\circ \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

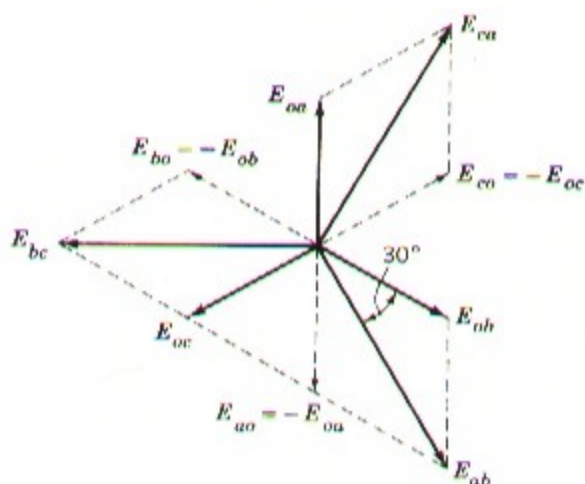


Fig. A-6. Diagrama vectorial de tensiones con la conexión en Y.

como puede verse en la ya mencionada Fig. A-6.

Análogamente:

$$E_{bc} = \sqrt{3} E_{oc} \angle -30^\circ \quad (\text{A-2})$$

y

$$E_{ca} = \sqrt{3} E_{oa} \angle -30^\circ \quad (\text{A-3})$$

Dicho en palabras, estas ecuaciones demuestran que *con una conexión Y la tensión compuesta es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión simple, o sea que la tensión entre fases es $\sqrt{3}$ veces mayor que la tensión entre una fase y neutro.*

Los vectores intensidad correspondientes a la conexión Y de la Fig. A-5a pueden verse en la Fig. A-7. Evidentemente, *con conexión en Y las intensidades de línea y de fase son iguales.*

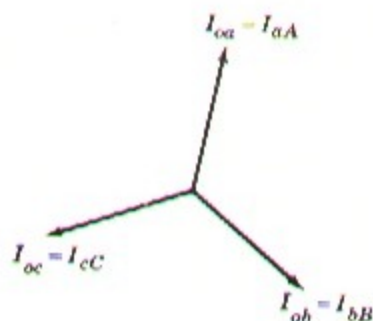


Fig. A-7. Diagrama vectorial de intensidades con la conexión en Y.

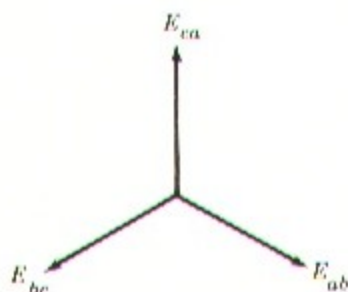


Fig. A-8. Diagrama vectorial de tensiones con conexión en Δ .

Si las tres fases se conectan en Δ como en la Fig. A-5b, el diagrama vectorial de tensiones será el de la Fig. A-8. Evidentemente, con esta conexión en Δ , la tensión de línea y la tensión de fase son iguales.

El correspondiente diagrama vectorial de intensidades es el de la Fig. A-9. Las tres intensidades de fase son I_{ab} , I_{bc} e I_{ca} indicando el orden de los subíndices el sentido de la corriente. Según la primera ley de Kirchhoff, la intensidad I_{aA} en la línea será:

$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_{ba} + I_{ca} = -I_{ab} + I_{ca} \\ &= \sqrt{3} I_{ca} \angle 30^\circ \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

como puede verse en la citada Fig. A-9, y análogamente:

$$I_{bB} = \sqrt{3} I_{ab} \angle 30^\circ \quad (\text{A-5})$$

$$I_{cC} = \sqrt{3} I_{bc} \angle 30^\circ \quad (\text{A-6})$$

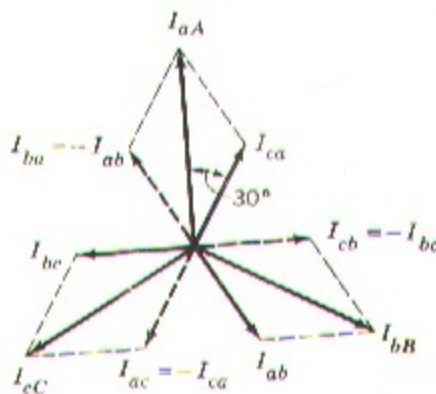


Fig. A-9. Diagrama vectorial de intensidades con conexión en Δ .

Expresando en palabras, estas tres últimas ecuaciones demuestran que *con conexión Δ la intensidad de línea es $\sqrt{3}$ veces mayor que la intensidad de fase*. Como puede verse, esta relación entre las intensidades de fase y de línea en una conexión Δ es semejante a la que existe entre las tensiones de fase y de línea en una conexión Y.

Se puede demostrar que tanto en un sistema conectado en Y como conectado en Δ , la potencia total instantánea de las tres fases conjuntas de un circuito equilibrado no sufre pulsaciones. Si tomamos como origen de tiempos el instante en que la onda de tensión de la fase *a* pasa por su máximo positivo, los valores instantáneos de las tensiones en las tres fases serán:

$$e_a = \sqrt{2} E_p \cos \omega t \quad (\text{A-7})$$

$$e_b = \sqrt{2} E_p \cos (\omega t - 120^\circ) \quad (\text{A-8})$$

$$e_c = \sqrt{2} E_p \cos (\omega t - 240^\circ) \quad (\text{A-9})$$

siendo E_p el valor eficaz de la tensión de fase.

Si las intensidades de fase están defasadas el ángulo θ respecto a sus correspondientes tensiones, los valores instantáneos de dichas intensidades serán:

$$i_a = \sqrt{2} I_p (\cos \omega t + \theta) \quad (\text{A-10})$$

$$i_b = \sqrt{2} I_p (\cos \omega t + \theta - 120^\circ) \quad (\text{A-11})$$

$$i_c = \sqrt{2} I_p (\cos \omega t + \theta - 240^\circ) \quad (\text{A-12})$$

siendo I_p el valor eficaz de la intensidad de fase.

Por consiguiente, las potencias instantáneas en cada una de las tres fases serán:

$$p_a = e_a i_a = E_p I_p [\cos (2\omega t + \theta) + \cos \theta] \quad (\text{A-13})$$

$$p_b = e_b i_b = E_p I_p [\cos (2\omega t + \theta - 240^\circ) + \cos \theta] \quad (\text{A-14})$$

$$p_c = e_c i_c = E_p I_p [\cos (2\omega t + \theta - 480^\circ) + \cos \theta] \quad (\text{A-15})$$

y la potencia instantánea conjunta de las tres:

$$p = p_a + p_b + p_c = 3E_p I_p \cos \theta \quad (\text{A-16})$$

Obsérvese que la suma de los términos cosenoidales de las ecuaciones A-13 a A-15 en los que interviene el tiempo, es decir, los primeros términos dentro de los corchetes, es igual a cero, y por tanto la potencia instantánea es independiente del tiempo, lo que está representado gráficamente en la Fig. A-10, en la que pueden verse las curvas correspondientes a las potencias instantáneas en cada una de las tres fases así como la potencia total instantánea, que no es más que la suma de las tres ondas individuales indicadas. *El valor de la potencia instantánea total en un sistema trifásico equilibrado es constante e igual al triple de la potencia media por fase.*

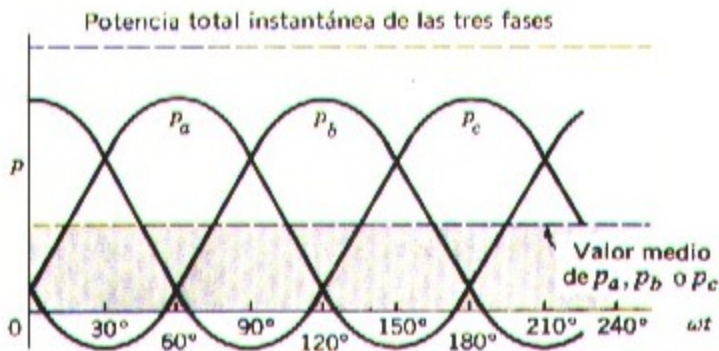


Fig. A-10. Potencia instantánea en un sistema trifásico.

Se puede demostrar que la potencia total instantánea es constante para cualquier sistema polifásico equilibrado en general, siendo ésta una de las ventajas relevantes de los sistemas polifásicos, ventaja de particular interés, por ejemplo, en el accionamiento de motores polifásicos ya que supone una potencia de salida constante en el eje, y al no existir pulsaciones propias en la red de suministro se evitan las pulsaciones del par con su tendencia a producir vibraciones.

Considerando una sola fase, la potencia media en ella, tanto si pertenece a un sistema en Y como a uno en Δ es:

$$P_p = E_p I_p \cos \theta = I_p^2 R_p \quad (\text{A-17})$$

en la que E_p , I_p y R_p son respectivamente la tensión, intensidad y resistencia, todas ellas por fase. La potencia total en las tres fases será por tanto:

$$P = 3P_p \quad (\text{A-18})$$

En forma análoga, la potencia reactiva por fase Q_p y la potencia reactiva total serán:

$$Q_p = E_p I_p \sin \theta = I_p^2 X_p \quad (\text{A-19})$$

$$Q = 3Q_p \quad (\text{A-20})$$

Los volt-ampere por fase $(VA)_p$ y los totales VA serán:

$$(VA)_p = E_p I_p = I_p^2 Z_p \quad (\text{A-21})$$

$$VA = 3(VA)_p \quad (\text{A-22})$$

En las ecuaciones A-17 y A-19, θ es el ángulo entre la tensión de fase e intensidad de la misma, y al igual que en el caso de monofásico viene dado por:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{X_p}{R_p} = \cos^{-1} \frac{R_p}{Z_p} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{X_p}{Z_p} \quad (\text{A-23})$$

El factor de potencia de un sistema trifásico equilibrado es por tanto igual al de cualquiera de sus fases.

A-3. CIRCUITOS CONECTADOS EN Y O EN Δ

A continuación se incluyen tres ejemplos en los que se podrán ver ciertos detalles para el cálculo de circuitos conectados en Y o en Δ . En las soluciones se añaden algunas explicaciones aclaratorias de general aplicación.

Ejemplo A-1

En la Fig. A-11 se representa un sistema de transmisión, a 50 Hz, consistente en una línea de impedancia $Z_l = 0,05 + j0,20$ ohm cargada en su extremo con una carga de impedancia equivalente $Z_L = 10,0 + j3,00$ ohm. Se considera nula la impedancia del conductor de retorno.

- a. Calcúlese: (1) la intensidad de línea I ; (2) la tensión en bornes de la carga E_L ; (3) la potencia activa, la potencia reactiva y los volt-ampere absorbidos por la carga, y (4) las pérdidas de potencia activa y reactiva en la línea.

Supongamos que deban construirse tres sistemas iguales al anterior para alimentar tres cargas también idénticas a la anterior. En lugar de dibujar los tres diagramas uno debajo del otro dibujémoslos como en la Fig. A-12 lo que eléctricamente considerado es evidentemente lo mismo.

- b. Hállese, para el caso de la Fig. A-12: (1) la intensidad en cada línea; (2) la tensión en bornes de cada una de las cargas; (3) la potencia activa, la potencia reactiva y los volt-ampere absorbidos por cada carga; (4) las pérdidas de potencia

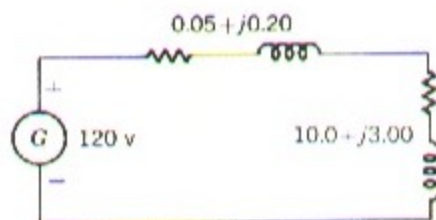


Fig. A-11. Circuito del ejemplo A-1a.

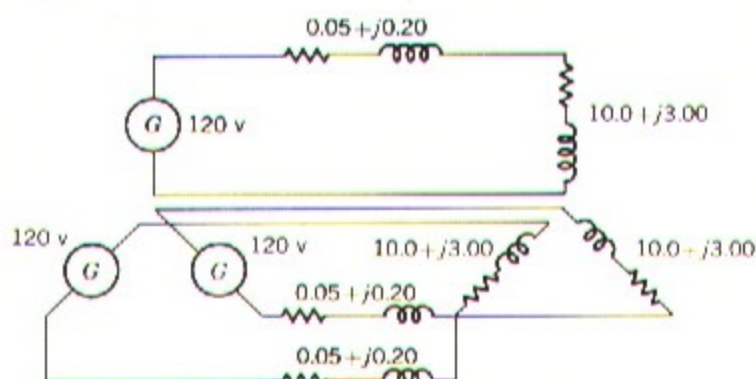


Fig. A-12. Circuito del ejemplo A-1b.

activa y reactiva en cada uno de los tres sistemas; (5) las potencias activa y reactiva y los volt-ampere totales absorbidos por el conjunto de las cargas y (6) las pérdidas totales de potencia activa y reactiva en los tres sistemas.

Consideremos ahora que los tres conductores de retorno se reúnen en uno solo, y que la relación entre las tensiones de los tres generadores es tal que se forma un sistema trifásico equilibrado, con neutro, como el de la Fig. A-13.

- c. Calcúlese, para el caso de la Fig. A-13: (1) la intensidad de línea; (2) las tensiones simple y compuesta en los bornes de la carga; (3) la potencia activa, la reactiva y los volt-ampere absorbidos por cada una de las fases de la carga; (4) las pérdidas de potencia activa y reactiva en cada línea; (5) las potencias activa y reactiva y los volt-ampere totales en trifásico absorbidos por la carga, y; (6) las pérdidas totales de potencia activa y reactiva en las líneas.
- d. ¿Cuál es la corriente que circula por el conductor unificado de retorno, o conductor neutro de la Fig. A-13?

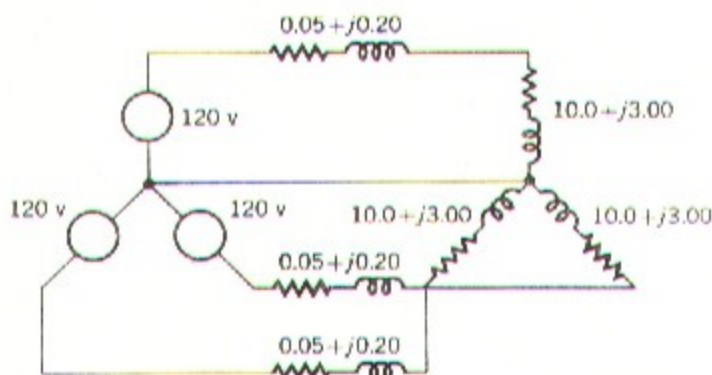


Fig. A-13. Circuito de los ejemplos A-1c, A-d, y A-1e

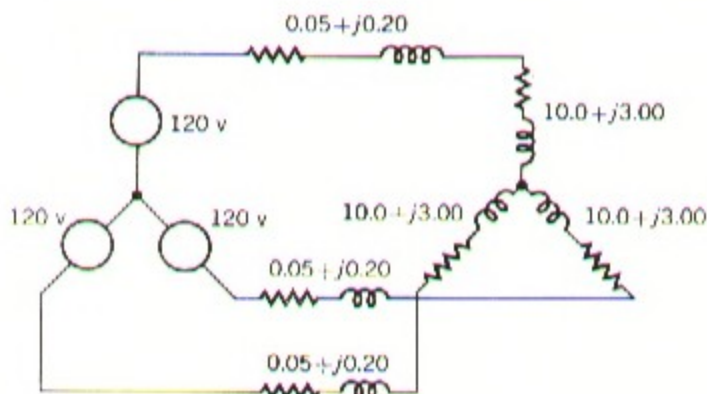


Fig. A-14. Circuito del ejemplo A-1f.

c. Si se desea: ¿Puede suprimirse dicho conductor de retorno en la Fig. A-13?

Supongamos que efectivamente lo suprimimos, con lo que nos quedará un sistema trifásico sin neutro como el de la Fig. A-14.

f. Repítase el punto c pero aplicado al circuito de la Fig. A-14.

g. Basándose en los resultados obtenidos en este ejemplo describase brevemente el procedimiento para transformar un problema relativo a un sistema trifásico equilibrado conectado en Y en otro problema equivalente pero monofásico. Póngase especial cuidado en la distinción entre tensiones simples o compuestas.

SOLUCION

a.

$$(1) \quad I = \frac{120}{\sqrt{(0,05 + 10,0)^2 + (0,20 + 3,00)^2}} = 11,4 \text{ A}$$

$$(2) \quad E_L = IZ_L = 11,4 \sqrt{(10,0)^2 + (3,00)^2} = 119 \text{ V}$$

$$(3) \quad P_L = I^2 R_L = (11,4)^2 (10,0) = 1300 \text{ W}$$

$$Q_L = I^2 X_L = (11,4)^2 (3,00) = 390 \text{ VAR}$$

$$(\text{VA})_L = I^2 Z_L = (11,4)^2 \sqrt{(10,0)^2 + (3,00)^2} = 1360 \text{ VA}$$

$$(4) \quad P_I = I^2 R_I = (11,4)^2 (0,05) = 6,5 \text{ W}$$

$$Q_I = I^2 X_I = (11,4)^2 (0,20) = 26 \text{ VAR}$$

b. Evidentemente, las respuestas (1) a (4) son idénticas a las del punto a

$$(5) \quad \text{Potencia total} = 3P_L = 3 \times 1300 = 3900 \text{ W}$$

$$\text{Potencia reactiva total} = 3Q_L = 3 \times 390 = 1170 \text{ VAR}$$

$$\text{VA totales} = 3(\text{VA})_L = 3 \times 1360 = 4080 \text{ VA}$$

$$(6) \quad \text{Potencia total perdida} = 3P_l = 3 \times 6,5 = 19,5 \text{ W}$$

$$\text{Potencia reactiva total perdida} = 3Q_l = 3 \times 26 = 78 \text{ VAR}$$

- c. Con este cambio no se alteran los resultados obtenidos en el punto b. Las tensiones halladas en $b(2)$ y $a(2)$ son ahora tensiones simples, y la tensión compuesta será:

$$\sqrt{3} \ 119 = 206 \text{ V}$$

- d. Según las leyes de Kirchhoff, la intensidad en el conductor neutro será la suma vectorial de las tres corrientes de fase, corrientes que son iguales entre sí pero desplazadas 120° unas de otras, y puesto que la suma vectorial de tres vectores iguales separados de 120° es nula, la intensidad en el neutro será igual a cero.
- e. Siendo nula la corriente que circula por el conductor neutro, si se desea puede suprimirse éste.
- f. Puesto que la presencia o la ausencia del conductor neutro no afecta al sistema, los resultados pedidos en este punto serán los mismos que los del punto c.
- g. Siempre se puede suponer la existencia del conductor neutro, tanto si éste está físicamente presente como si no lo está. Puesto que en un sistema trifásico equilibrado no circula corriente alguna por el neutro no habrá tampoco caída de tensión alguna en el mismo, que en consecuencia podrá considerarse como de impedancia nula. Para resolver los problemas que se presenten, puede considerarse separadamente una de las fases en Y junto con el neutro, teniendo en cuenta que de esta forma la tensión entre ambos es la *simple*. Esta forma de proceder conduce al circuito monofásico equivalente en el que todas las cantidades se corresponden con las de una fase del circuito trifásico.

Las condiciones en las otras dos fases son las mismas, salvo por lo que al desplazamiento de 120° de las tensiones e intensidades se refiere, de forma que será innecesario estudiarlas individualmente. Las intensidades de línea en el sistema trifásico serán las mismas que en el circuito monofásico, y las potencias activas y reactivas así como los volt-amperes totales en el sistema trifásico serán iguales a tres veces las correspondientes al sistema monofásico. Si se desea conocer la tensión compuesta no hay más que multiplicar por $\sqrt{3}$ la correspondiente al circuito monofásico.

Ejemplo A-2

Tres impedancias de valor $Z_p = 4,00 + j3,00 = 5,00 \angle 36,9^\circ$ ohm se conectan en Y como se muestra en la Fig. A-15. Siendo la tensión compuesta equilibrada de 208 V, hállese: la intensidad de línea, el factor de potencia, la potencia activa total, la reactiva y los volt-ampere.

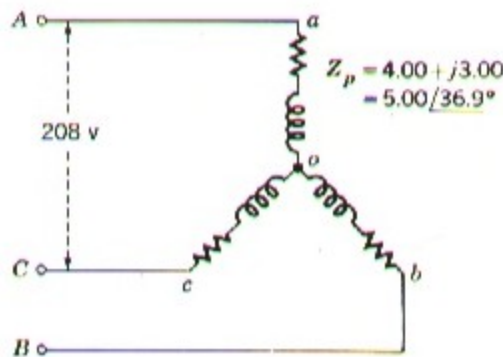


Fig. A-15. Circuito del ejemplo A-2.

SOLUCION

La tensión simple en una cualquiera de las fases, tal como ao es:

$$E_p = \frac{208}{\sqrt{3}} = 120 \text{ V}$$

de donde
$$I_l = I_p = \frac{E_p}{Z_p} = \frac{120}{5,00} = 24 \text{ A.}$$

Factor de potencia = $\cos \theta = \cos 36,9^\circ = 0,80$ en retraso

$$P = 3P_p = 3I_p^2 R_p = 3 \times 24^2 \times 4,00 = 6910 \text{ W}$$

$$Q = 3Q_p = 3I_p^2 X_p = 3 \times 24^2 \times 3,00 = 5180 \text{ VAR}$$

$$\text{VA} = 3(\text{VA})_p = 3E_p I_p = 3 \times 120 \times 24 = 8640 \text{ VA}$$

Obsérvese que las fases a y c de la Fig. A-15 no forman un circuito serie simple, y en consecuencia no se podrá calcular la corriente dividiendo simplemente los 208 V por la suma de las impedancias de las fases a y c . Para proceder correctamente debería escribirse una ecuación de la tensión entre los puntos a y c basada en la ley de Kirchoff pero esta ecuación deberá ser vectorial para tener en cuenta el desplazamiento de 120° entre las corrientes de dichas fases a y c . Como puede verse, el procedimiento sugerido y descrito en el ejemplo A-1 es el que conduce a la resolución más sencilla.

Ejemplo A-3

Tres impedancias de valor $Z_p = 12,00 + j9,00 = 15,00 / 36,9^\circ$ ohm se conectan en Δ tal como se indica en la Fig. A-16. Siendo la tensión compuesta equilibrada de 208 V, hállese: la intensidad de línea, el factor de potencia, la potencia total activa, la potencia total reactiva y los volt-ampere totales.

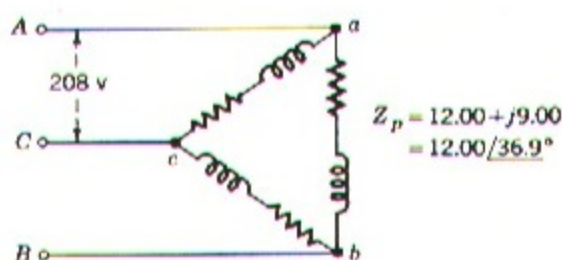


Fig. A-16. Circuito del ejemplo A-3.

SOLUCION

La tensión en cualquiera de las fases, tal como ca , evidentemente es igual a la tensión compuesta, y en consecuencia

$$E_p = 208 \text{ V}$$

$$I_p = \frac{E_p}{Z_p} = \frac{208}{15,00} = 13,87 \text{ A.}$$

$$\text{Factor de potencia} = \cos \theta = \cos 36,9 = 0,80 \text{ en retraso.}$$

De la ecuación A-4 tenemos:

$$I_l = \sqrt{3} I_p = \sqrt{3} \times 13,87 = 24 \text{ A}$$

$$P = 3P_p = 3I_p^2 R_p = 3 \times 13,87^2 \times 12 = 6910 \text{ W}$$

$$Q = 3Q_p = 3I_p^2 X_p = 3 \times 13,87^2 \times 9,00 = 5180 \text{ VAR}$$

$$\text{VA} = 3(\text{VA})_p = 3E_p I_p = 3 \times 208 \times 13,87 = 8640 \text{ VA}$$

Obsérvese que las fases ab y bc no forman un sencillo circuito en serie, así como tampoco cba está simplemente en paralelo con la fase ca , y en consecuencia no puede calcularse la corriente de línea dividiendo los 208 V por la impedancia equivalente de Z_{ca} en paralelo con $Z_{ab} + Z_{bc}$, sino que deberían plantearse ecuaciones según las leyes de Kirchhoff comprendiendo cantidades pertenecientes a más de una fase, pero estas cantidades son vectoriales debido al desplazamiento de 120° entre las tensiones e intensidades de las distintas fases. Puede verse que también aquí el procedimiento indicado apenas constituye la resolución más sencilla.

Comparando los resultados de los ejemplos A-2 y A-3 llegaremos a una interesante y valiosa conclusión. Podrá observarse que la tensión compuesta, la intensidad de línea, la potencia total activa, la potencia total reactiva y los volt-ampere son iguales en ambos casos, o, dicho de otra forma: visto desde los terminales A , B y C las condiciones son

idénticas, no pudiéndose distinguir un circuito de otro basándose únicamente en los valores existentes en ellos. También puede observarse que las impedancias, resistencia y reactancia por fase con la conexión Y (Fig. A-15) son exactamente una tercera parte de las correspondientes por fase con conexión Δ (Fig. A-16). En consecuencia puede sustituirse una conexión Δ equilibrada por una conexión Y también equilibrada, siempre que las constantes por fase del circuito cumplan la relación.

$$Z_Y = \frac{1}{3} Z_{\Delta} \quad (\text{A-24})$$

e inversamente, puede sustituirse una conexión Y por otra Δ siempre que se cumpla también la anterior relación. El concepto de esta equivalencia Y- Δ surge por sí mismo de la transformación, no siendo un resultado casual de su caso numérico particular.

De esta equivalencia nacen dos corolarios importantes. Primero: un esquema general para el cálculo de circuitos equilibrados puede basarse completamente en circuitos Y o circuitos Δ según se prefiera, pero como en general es más sencillo el manejo de una conexión Y que de una conexión Δ lo más frecuente es adoptar la primera, y: Segundo: en los problemas que frecuentemente se presentan en que no está especificada la conexión y que por otra parte ésta no influye en la solución, puede suponerse que existe una cualquiera de las dos; en general se elige la Y.

Por ejemplo, al estudiar el comportamiento de un motor trifásico no es necesario conocer las conexiones reales de los devanados, salvo que el estudio se refiera o incluya detalles relacionados con los propios devanados; si no es así, el análisis completo puede llevarse a cabo bajo el supuesto de una conexión en Y.

A-4. ANALISIS DE CIRCUITOS TRIFASICOS EQUILIBRADOS: DIAGRAMAS UNIFILARES

Combinando los principios de la equivalencia entre las conexiones Y- Δ con las técnicas deducidas del ejemplo A-1, se puede llegar a un sencillo procedimiento para convertir un problema referente a un circuito trifásico en otro relativo a un circuito monofásico, con lo que cualquiera de los métodos de análisis de estos últimos será aplicable a la resolución del primer problema: los resultados hallados en el análisis monofásico se trasladan nuevamente a trifásicos obteniéndose así el resultado final.

Al proceder de esta forma sólo es necesario trazar el diagrama vectorial de una de las fases en Y, pues los de las otras dos no serían más que unas repeticiones inútiles: además los esquemas de los circuitos se simplifican al dibujar en ellos una fase única. La Fig. A-17 constituye un ejemplo de representación unifilar, en la que aparecen dos generadores trifásicos, junto con sus correspondientes líneas o cables, que suministran potencia a una subestación común: si se desea, se pueden indicar las conexiones específicas de los aparatos, así, en la Fig. A-17b puede verse que el generador G_1 tiene conexión Y mientras que el generador G_2 la tiene Δ . Las impedancias están dadas en ohm por fase.

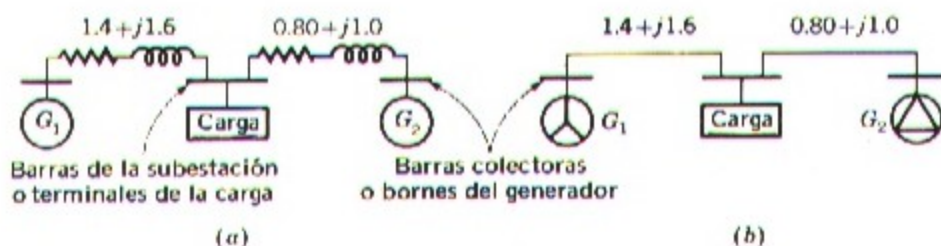


Fig. A-17. Ejemplos de diagramas unifilares.

Cuando hay que operar con potencias, activas o reactivas, o con volt-ampere, es a veces más conveniente operar con el circuito trifásico completo en lugar de concentrarlo en una sola fase. Esto es posible porque las potencias activa o reactiva así como los volt-ampere en trifásico pueden deducirse de fórmulas sencillas en función de la tensión compuesta y de la intensidad de línea independientemente de que el circuito esté conectado en Y o en Δ . Así, según las ecuaciones A-17 y A-18, la potencia en trifásico es:

$$P = 3P_p = 3E_p I_p \cos \theta \quad (\text{A-25})$$

Si la conexión es en Y, $I_p = I_{\text{línea}}$ y $E_p = E_{\text{línea}} / \sqrt{3}$; si la conexión es en Δ , $I_p = I_{\text{línea}} / \sqrt{3}$ y $E_p = E_{\text{línea}}$, y en cualquiera de los dos casos la ecuación A-25 se convierte en:

$$P = \sqrt{3} E_{\text{línea}} I_{\text{línea}} \cos \theta \quad (\text{A-26})$$

y de igual forma

$$Q = \sqrt{3} E_{\text{línea}} I_{\text{línea}} \sin \theta \quad (\text{A-27})$$

$$\text{VA} = \sqrt{3} E_{\text{línea}} I_{\text{línea}} \quad (\text{A-28})$$

Recordamos sin embargo que el ángulo θ del factor de potencia, dado por la ecuación A-23, es el ángulo formado por E_p e I_p y no por $E_{\text{línea}}$ e $I_{\text{línea}}$.

Ejemplo A-4

El circuito de la Fig. A-17 equivale al de una carga alimentada por dos generadores trifásicos a través de sendas líneas cuyas impedancias por fase se indican en la propia figura. Dicha carga supone 30 KW con factor de potencia en retraso 0,8.

La tensión compuesta en bornes del generador G_1 es de 797 V, y la potencia suministrada por el mismo es de 15 KW con factor de potencia 0,8 en retraso.

Hállese la tensión en la carga, así como la tensión, potencia activa y potencia reactiva en bornes a la salida del generador G_2 .

SOLUCION

Sean I , P y Q la intensidad en la línea, la potencia activa y la potencia reactiva respectivamente; estas dos últimas en trifásico. Los subíndices 1 y 2 indicarán los respecti-

vos ramales del sistema, y el subíndice r indica que la cantidad a que se refiere es la existente en el extremo receptor de la línea.

Tendremos:

$$I_1 = \frac{P_1}{\sqrt{3} E_1 \cos \theta_1} = \frac{15.000}{\sqrt{3} \times 797 \times 0,8} = 13,6 \text{ A}$$

$$P_{r1} = P_1 - 3I_1^2 R_1 = 15.000 - 3 \times 13,6^2 \times 14 = 14.220 \text{ W}$$

$$Q_{r1} = Q_1 - 3I_1^2 X_1 = 15.000 \text{ tg} (\cos^{-1} 0,80) - 3 \times 13,6^2 \times 1,6$$

$$= 10.350 \text{ VAR.}$$

El factor 3 que aparece en las dos últimas ecuaciones multiplicando a $I_1^2 R_1$ y a $I_1^2 X_1$ es debido a que la intensidad I_1 existe en cada una de las tres fases.

La tensión en la carga es:

$$E_L = \frac{\text{VA}}{\sqrt{3} (\text{intensidad})} = \frac{\sqrt{14.220^2 + 10.350^2}}{\sqrt{3} \times 13,6}$$

$$= 748 \text{ V tensión compuesta}$$

Puesto que la carga necesita 30.000 W y 30.000 $\text{tg} (\cos^{-1} 0,8) = 22.500 \text{ VAR}$

$$P_{r2} = 30.000 - 14.220 = 15.780 \text{ W}$$

$$Q_{r2} = 22.500 - 10.350 = 12.150 \text{ VAR}$$

$$I_2 = \frac{\text{VA}}{\sqrt{3} (\text{tensión})} = \frac{\sqrt{15.780^2 + 12.150^2}}{\sqrt{3} \times 748} = 15,4 \text{ A}$$

$$P_2 = P_{r2} + 3I_2^2 R_2 = 15.780 + 3 \times 15,4^2 \times 0,80 = 16.350 \text{ W}$$

$$Q_2 = Q_{r2} + 3I_2^2 X_2 = 12.150 + 3 \times 15,4^2 \times 1,0 = 12.870 \text{ VAR}$$

$$E_2 = \frac{\text{VA}}{\sqrt{3} (\text{intensidad})} = \frac{\sqrt{16.350^2 + 12.870^2}}{\sqrt{3} \times 15,4}$$

$$= 780 \text{ V tensión compuesta}$$

A-5. OTROS SISTEMAS POLIFASICOS

Aun cuando los sistemas trifásicos son con mucho los más corrientemente empleados de entre todos los sistemas polifásicos, no por ello se dejan de utilizar también otros números de fases en ciertas aplicaciones especiales. El sistema tetrafásico con cinco conductores representado en la Fig. A-18 puede emplearse en ocasiones en las distribuciones a baja tensión: tiene la ventaja de que con una tensión simple de por ejemplo 115 V se

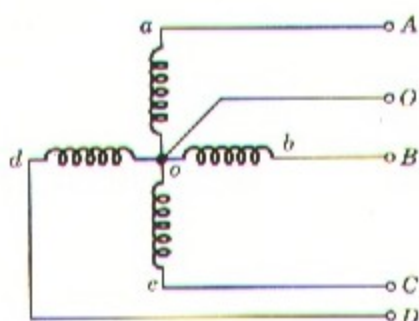


Fig. A-18. Sistema tetrafásico con cinco conductores.

puede tener un suministro en monofásico a 115 V entre cualquiera de los puntos *a*, *b*, *c*, *d* y el neutro *o*, o a 230 V entre *a* y *c* o entre *b* y *d* (véase la Fig. A-18) al mismo tiempo que se dispone de un sistema polifásico completo.

Esta misma ventaja se puede conseguir con un sistema trifásico con neutro, es decir, de cuatro conductores, en el que se puede utilizar la tensión simple de por ejemplo 127 V y la compuesta de 220 V.

Se puede obtener un sistema tetrafásico a partir de otro trifásico por medio de transformadores especiales convenientemente conectados. La mitad de un sistema tetrafásico, por ejemplo la parte *ao**b* de la figura, constituye un sistema bifásico. En los rectificadores de mercurio destinados a convertir la corriente alterna en continua se emplean 6, 12, 18 y hasta 36 fases: estos sistemas se obtienen también a partir de otro trifásico mediante transformadores apropiados.

Cuando las cargas y las tensiones están equilibradas, pueden aplicarse al análisis de los respectivos sistemas los mismos procedimientos empleados en los sistemas trifásicos, es decir, considerando lo que ocurre en una de las fases. Naturalmente, las relaciones básicas entre tensiones, intensidades y potencias deberán modificarse para adaptarlas al sistema polifásico particular considerado.

APENDICE B

Tensiones y campos magnéticos en los devanados de alterna distribuidos

Tanto la amplitud como la forma de onda de las tensiones inducidas y de la f.m.m. inductora en las máquinas están determinadas por la disposición de los devanados y por la geometría general de las mismas, y éstas a su vez dependen de razones de aprovechamiento del espacio y de los materiales así como de las características para el buen servicio que se pretende.

En este apéndice se ampliará el estudio más elemental que de estas cuestiones se hizo en el capítulo 3, tratando analíticamente las tensiones alternas y las f.m.m. en un sistema equilibrado en régimen permanente. Se prestará especial atención a la relación entre la componente fundamental de tensión y el tiempo, así como entre la componente fundamental de f.m.m. y el espacio.

B-1. TENSIONES INDUCIDAS

De acuerdo con la ecuación 3-15, el valor eficaz de la tensión inducida por fase en un devanado concentrado de N_{fase} espiras por fase:

$$E = 4,44fN_{\text{fase}} \Phi \quad (\text{B-1})$$

siendo f la frecuencia y Φ el flujo fundamental por polo.

Un devanado más real y complejo tendrá los laterales de las bobinas de cada fase distribuidos en varias ranuras por polo. La ecuación B-1 servirá para el cálculo de la distribución de tensiones en las bobinas individuales; para conocer la tensión total de un grupo completo de bobinas en una fase deberá realizarse la suma vectorial de todas las componentes. Este apartado está dedicado a la suma de dichas tensiones componentes de frecuencia fundamental.

a. Devanados distribuidos de paso acortado

La Fig. B-1 constituye un ejemplo sencillo de devanado distribuido en una máquina trifásica de dos polos: este caso, reúne todas las características de otros más generales con cualquier número de fases, de polos y de ranuras por polo y fase: al mismo tiempo se muestra el devanado en *doble capa*. Esta disposición en doble capa se traduce en general en una facilidad para las conexiones entre bobinas y consecuentemente en una economía de construcción: prácticamente se encuentra en todas las máquinas salvo en algunos motores pequeños de potencia menor de 10 c.v. En general, uno de los laterales de una bobina, por ejemplo el a_1 , se sitúa en el fondo de una ranura, y el otro lateral, $-a_1$ en la parte exterior de otra.

Todas las bobinas individuales de la Fig. B-1 abarcan un paso polar completo, o sea 180 grados eléctricos, resultando en consecuencia un devanado de *paso diametral*. Supongamos que todos los laterales de las bobinas que están en la parte exterior de las ranuras se desplazan situándolas en la ranura inmediata anterior, como se ha hecho en la Fig. B-2. Cada bobina, como por ejemplo la $a_1, -a_1$ abarcará únicamente $5/6$ del paso polar, o sean $5/6$ de 180° igual a 150 grados eléctricos; el devanado resultante será de *paso acortado* o de *cuerda*. Si el desplazamiento del lateral fuera de dos ranuras en lugar de

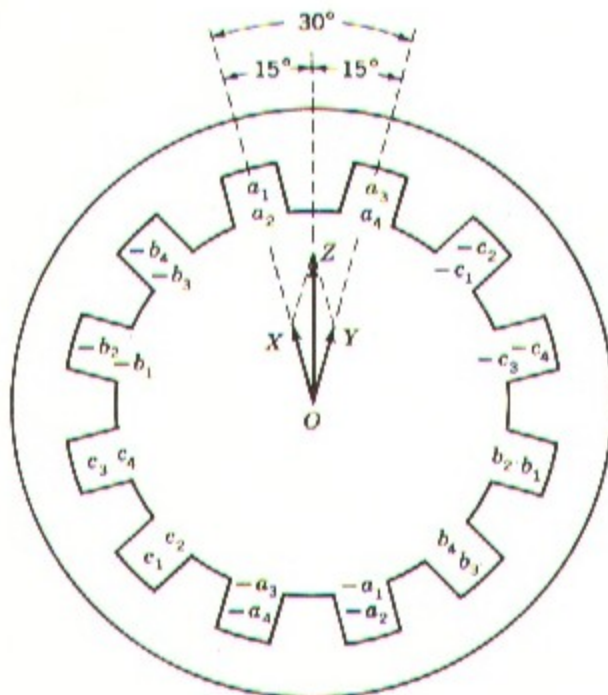


Fig. B-1. Devanado inducido trifásico distribuido de dos polos, de paso diametral, y diagrama vectorial de tensiones.

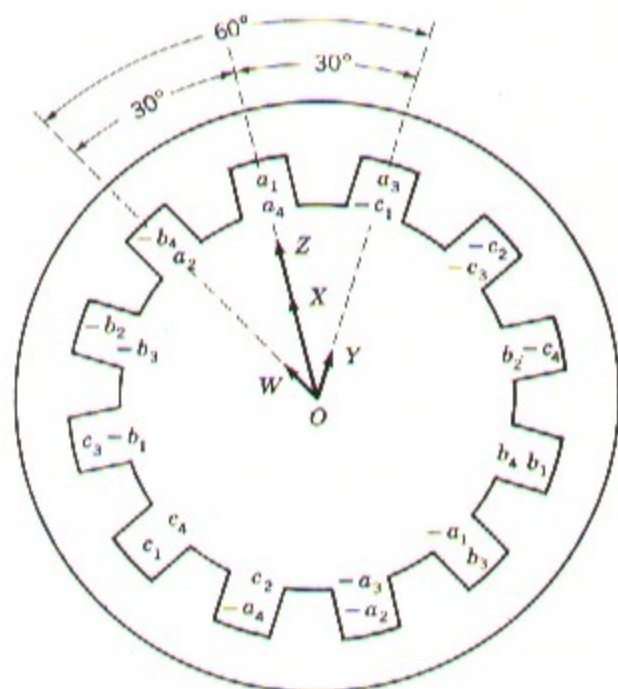


Fig. B-2. Devanado inducido trifásico de dos polos, distribuido, de paso acortado, y diagrama vectorial de tensiones.

serlo de una sola, tendríamos un devanado de paso $2/3$, y así sucesivamente. Con esta modificación los grupos de fases quedan entremezclados pues hay ranuras que contienen laterales de bobina de las fases a y b , b y c , y c y a . Sin embargo, los grupos individuales de una fase, por ejemplo, el formado por a_1, a_2, a_3, a_4 por un lado y $-a_1, -a_2, -a_3, -a_4$ por el otro, continúan estando desplazados de 120 grados eléctricos respecto a los grupos semejantes de las otras dos fases, de forma que las tensiones inducidas siguen formando un sistema trifásico. Los devanados de paso acortado, además de reducir la longitud de las cabezas de bobina, reducen el contenido de armónicos tanto en las ondas de tensión como en la de f.m.m.

Las tensiones entre laterales de bobinas están situadas normalmente en una zona en la que la densidad de flujo es despreciable, por lo que su modificación no afecta sustancialmente sobre los flujos mutuos concatenados del devanado; así pues el factor determinante de las tensiones inducidas es la situación de los laterales en las ranuras, por lo que es suficiente indicar tal situación como se ha hecho en las Figs. B-1 y B-2. La única condición que se requiere es la de que todos los laterales de bobinas pertenecientes a una misma fase se conectan entre sí de tal forma que las tensiones inducidas en cada una de ellas contribuyan todas positivamente sobre el total. La consecuencia práctica es la de que tales conexiones pueden realizarse de acuerdo con las mejores conveniencias del montaje, y la consecuencia teórica la de que, cuando resulta ventajoso para el cálculo o proyecto,

pueden combinarse todos los laterales pertenecientes a una misma fase de cualquier forma arbitraria de la que resulten bobinas equivalentes.

El empleo de devanados distribuidos y acortados como los de las Figs. B-1 y B-2 supone en cierta manera un sacrificio comparándolos con los devanados concentrados de paso diametral: en efecto, para un mismo número de espiras por fase, la tensión inducida en los primeros es menor que en los segundos, pero por otra parte los armónicos se reducen en gran proporción, y el número total de espiras que pueden acomodarse en un estator de forma y dimensiones dadas es mayor.

En el devanado distribuido de la Fig. B-1 las tensiones inducidas en las bobinas a_1 y a_2 no están en fase con las de las bobinas a_3 y a_4 , es decir, que las tensiones de a_1 y a_2 las podemos representar por el vector OX de la citada figura, y las de a_3 y a_4 por el OY . El defase en el tiempo entre estos dos vectores es el correspondiente al ángulo eléctrico existente entre dos ranuras consecutivas, ya que OX y OY coinciden con los ejes de las mismas. El vector OZ resultante para la fase a es evidentemente menor que la suma aritmética de OX y OY .

Por añadidura, el paso acortado de la Fig. B-2 motiva que la bobina no abarque el flujo total por polo como sucedería si fuera de paso diametral: el resultado es el mismo que se obtendría considerando que los laterales a_2 y $-a_1$ forman una bobina equivalente cuya tensión es el vector OW , los laterales a_1 , a_4 , $-a_2$ y $-a_3$ forman a su vez dos bobinas equivalentes con tensión vectorial OX (doble longitud que OW) y por último, los laterales a_3 y a_4 equivalen a otra bobina con tensión OY . El vector OZ resultante para la fase a , es evidentemente menor que la suma aritmética de OW , OX y OY , siendo también menor que OZ de la Fig. B-1.

Estos dos efectos pueden englobarse en un *factor de bobinado* k_{ω} que se incluye en la ecuación B-1, con lo que ésta expresará la tensión inducida por fase de la siguiente forma:

$$E = 4,44k_{\omega}fN_{\text{fase}} \Phi \quad (\text{B-2})$$

en la que N_{fase} es el número total de espiras en serie por fase y k_{ω} corresponde a la desviación respecto a un devanado concentrado de paso diametral.

Refiriéndonos a una máquina trifásica, la ecuación B-2 dará la tensión compuesta si el devanado está conectado en Δ o la simple si lo está en Y ; en este último caso, y supuesto el sistema equilibrado, la tensión compuesta era $\sqrt{3}$ veces mayor que la simple.

b. Factores de distribución y de paso

Considerando separadamente los efectos de la distribución y del acortamiento de paso, pueden obtenerse los factores de reducción en forma general, aplicables a los análisis cuantitativos. La distribución del devanado en n ranuras por fase tiene como consecuencia la existencia de n vectores de tensión, desplazados entre sí del ángulo eléctrico γ entre ranuras; γ será, por tanto, igual a 180 grados eléctricos dividido por el número de ranuras por polo. En la Fig. B-3a puede verse un grupo de tales vectores, y en la Fig. B-3b los mismos vectores pero dispuestos en forma más cómoda para sumarlos. Cada uno de los vectores AB , BC , y CD es la cuerda de un arco de circunferencia con centro en O y ángulo

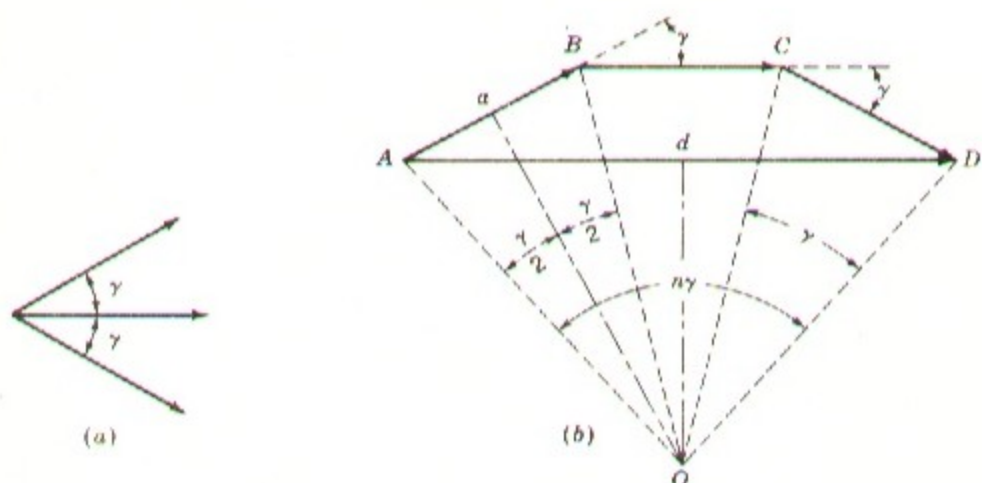


Fig. B-3. (a) Tensiones vectoriales de las bobinas, y (b) vector suma.

en el centro γ . El vector suma AD abarca un ángulo $n\gamma$, que en una máquina trifásica normal con devanado uniformemente distribuido es de 60 grados eléctricos, y de 90 grados eléctricos si la máquina es bifásica con las mismas condiciones.

De los triángulos OAA y OAd podemos deducir:

$$OA = \frac{Aa}{\text{sen}(\gamma/2)} = \frac{AB}{2 \text{sen}(\gamma/2)} \quad (\text{B-3})$$

$$OA = \frac{Ad}{\text{sen}(n\gamma/2)} = \frac{AD}{2 \text{sen}(n\gamma/2)} \quad (\text{B-4})$$

igualando estos dos valores, tendremos:

$$AD = AB \frac{\text{sen}(n\gamma/2)}{\text{sen}(\gamma/2)} \quad (\text{B-5})$$

pero la suma aritmética de todos estos valores sería $n(AB)$, por lo que el factor de reducción resultante de la distribución del devanado será:

$$k_b = \frac{AD}{n(AB)} = \frac{\text{sen}(n\gamma/2)}{n \text{sen}(\gamma/2)} \quad (\text{B-6})$$

k_b será pues el *factor de distribución*.

Los efectos del acortamiento de paso sobre la tensión inducida en la bobina pueden hallarse determinando primero los flujos concatenados con la bobina acortada. En la Fig.

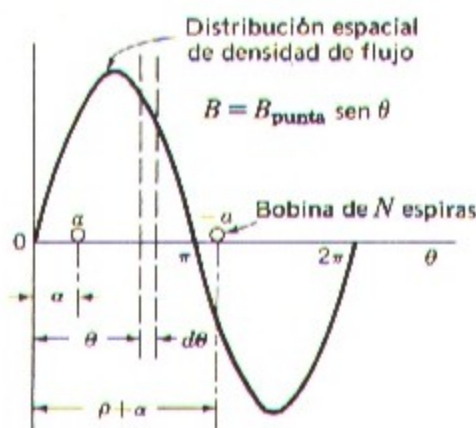


Fig. B-4. Bobina de paso acortado en un campo sinusoidal.

B-4 podemos ver que el lateral de bobina $-a$ está separado del lateral a únicamente de ρ grados eléctricos en lugar de los 180 correspondientes al paso diametral. Los flujos concatenados con la bobina serán:

$$\lambda = NB_{\text{punta}}lr \frac{2}{P} \int_{\alpha}^{\rho+\alpha} \text{sen } \theta \, d\theta \quad (\text{B-7})$$

$$\lambda = NB_{\text{punta}}lr \frac{2}{P} [\cos \alpha - \cos (\alpha + \rho)] \quad (\text{B-8})$$

siendo l la longitud axial del lateral de bobina, r el radio de la misma, y P el número de polos.

Sustituyendo α por ωt para indicar la rotación a la velocidad de ω radianes eléctricos por segundo, la ecuación B-8 convierte en:

$$\lambda = NB_{\text{punta}}lr \frac{2}{P} [\cos \omega t - \cos (\omega t + \rho)] \quad (\text{B-9})$$

La suma de las ondas cosenoidales incluidas entre corchetes de la ecuación B-9 puede realizarse mediante un diagrama vectorial tal como se indica en la Fig. B-5, de la que se deduce

$$\cos \omega t - \cos (\omega t + \rho) = 2 \cos \frac{\pi - \rho}{2} \cos \left(\omega t - \frac{\pi - \rho}{2} \right) \quad (\text{B-10})$$

resultado al que también se llegaría directamente de la ecuación B-9 a través de las transformaciones trigonométricas adecuadas.

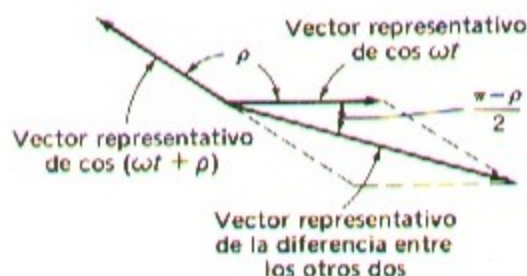


Fig. B-5. Suma vectorial en bobina de paso acortado.

El flujo abarcado será por tanto:

$$\lambda = NB_{\text{punta}} l r \frac{4}{P} \cos \frac{\pi - \rho}{2} \cos \left(\omega t - \frac{\pi - \rho}{2} \right) \quad (\text{B-11})$$

y la tensión instantánea:

$$e = \omega NB_{\text{punta}} l r \frac{4}{P} \cos \frac{\pi - \rho}{2} \text{sen} \left(\omega t - \frac{\pi - \rho}{2} \right) \quad (\text{B-12})$$

El ángulo de fase $(\pi - \rho)/2$ de la ecuación B-12 indica simplemente que la tensión instantánea no será nula cuando α de la Fig. B-4 sea cero. El factor $\cos(\pi - \rho)/2$ es un factor de reducción de la amplitud, de forma que la tensión eficaz de la ecuación B-1 queda modificada de la siguiente forma:

$$E = 4,44 k_p f N_{\text{fase}} \Phi \quad (\text{B-13})$$

en la que el *factor de paso* K_p vale:

$$K_p = \cos \frac{\pi - \rho}{2} \quad (\text{B-14})$$

Cuando se aplican ambos factores, el de distribución y el de paso, la tensión eficaz resulta ser:

$$E = 4,44 K_b K_p f N_{\text{fase}} \Phi \quad (\text{B-15})$$

que no es más que otra forma de expresar la B-2.

B-2. ONDAS DE FMM

La distribución del devanado entre varias ranuras por polo y fase y el acortamiento del paso, influye no sólo sobre la f.e.m. inducida en el propio devanado sino también sobre el campo magnético por él engendrado. En este apartado estudiaremos las componentes fundamentales de la distribución de f.m.m. en el espacio.

a. Devanados concentrados de paso diametral

En el apartado 3-3 se vio que un devanado concentrado de N espiras producía en una máquina de P polos una onda magnética rectangular. Excitando con una corriente senoidal de valor eficaz I , la máxima altura que alcanza en el tiempo la componente fundamental de la onda es, de acuerdo con la ecuación 3-21:

$$\frac{4N}{\pi P} (\sqrt{2} I) \quad \text{ampere vueltas por polo} \quad (\text{B-16})$$

y si el devanado concentrado es polifásico, la amplitud para una fase será:

$$\frac{4 N_{\text{fase}}}{\pi P} (\sqrt{2} I) \quad (\text{B-17})$$

siendo N_{fase} el número de espiras en serie por fase; esta amplitud es la que se designó con los símbolos $F_{a(\text{max})}$, $F_{b(\text{max})}$ y $F_{c(\text{max})}$ en las ecuaciones 3-30 a 3-32, y con el símbolo común F_{max} en el caso trifásico equilibrado considerado en las ecuaciones 3-33 a 3-36.

Cada una de las fases de un devanado polifásico concentrado crea una onda de f.m.m. pulsatoria, fija en el espacio, siendo esta situación la que sirvió de base al análisis que condujo finalmente a la ecuación 3-36. Por tanto, y de acuerdo con ello, esta última ecuación puede escribirse:

$$F_{\theta} = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \frac{N_{\text{fase}}}{P} (\sqrt{2} I) \cos(\theta - \omega t) \quad (\text{B-18})$$

según esto, la amplitud de la onda de f.m.m. resultante en una máquina trifásica, expresada en ampere-vueltas por polo será:

$$F_A = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \frac{N_{\text{fase}}}{P} (\sqrt{2} I) = 0,90 \frac{3N_{\text{fase}}}{P} I \quad (\text{B-19})$$

y en forma análoga se podría demostrar que en una máquina q -fásica, la amplitud es:

$$F_A = \frac{q}{2} \frac{4}{\pi} \frac{N_{\text{fase}}}{P} (\sqrt{2} I) = 0,90 \frac{qN_{\text{fase}}}{P} I \quad (\text{B-20})$$

En estas dos últimas ecuaciones I es el valor eficaz de la intensidad por fase. Estas ecuaciones incluyen únicamente la componente fundamental de la distribución real, y son aplicables al caso de devanados concentrados de paso diametral con excitación equilibrada.

b. Devanados distribuidos de paso acortado

Cuando las bobinas correspondientes a una fase están distribuidas entre varias ranuras por polo, la resultante fundamental de la f.m.m. en el espacio puede hallarse superponiendo las sencillas consideraciones anteriores relativas a devanados concentrados. En la Fig. B-6 pueden verse los efectos de la distribución: esta figura es en el fondo una repetición de la Fig. B-1 relativa a una máquina trifásica de dos polos, con dos ranuras por polo y fase, y paso diametral. Las bobinas a_1 y a_2 , b_1 y b_2 , c_1 y c_2 constituyen por sí mismas el equivalente de un devanado trifásico concentrado de dos polos, puesto que constituyen un conjunto de tres grupos de bobinas excitadas con corrientes polifásicas y desplazadas físicamente 120° entre sí. Por consiguiente crearán una f.m.m. fundamental giratoria en el espacio: la ecuación B-19 dará la amplitud correspondiente si para N_{fase} se toman únicamente las espiras en serie de las bobinas a_1 y a_2 . En forma análoga, las bobinas a_3 y a_4 , b_3 y b_4 , c_3 y c_4 crean otra onda de f.m.m. idéntica a la primera pero defasada respecto a ella del ángulo γ entre ranuras. La onda de f.m.m. fundamental resultante puede hallarse sumando vectorialmente las dos contribuciones senoidales.

La contribución correspondiente a las bobinas $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ pueden representarse con el vector OX de la Fig. B-6. Esta representación vectorial es correcta, ya que las ondas implicadas son senoidales, y los diagramas vectoriales son meramente unos medios adecua-

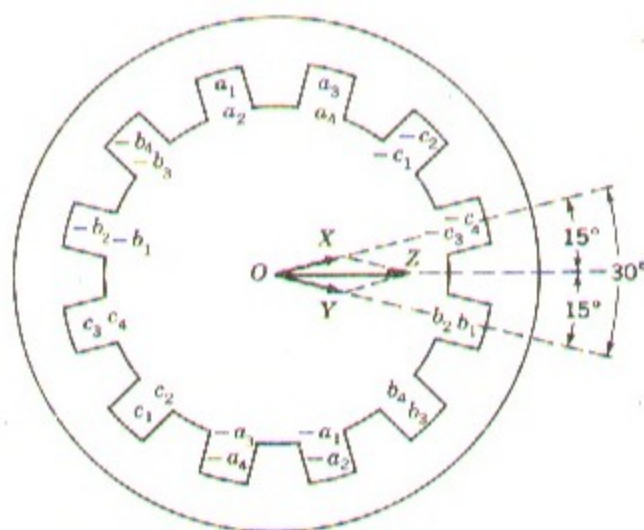


Fig. B-6. Devanado inducido trifásico distribuido de dos polos y diagrama vectorial de f.m.m.

dos para sumar senoides. Se trata no obstante de senoides en el espacio, no en el tiempo. El vector OX está dibujado en la posición que en el espacio ocupa la punta de la f.m.m. en el instante de tiempo en el que la corriente por la fase a pasa por su máximo. La longitud de OX es proporcional al número de espiras de las bobinas consideradas. De igual forma, la contribución de las bobinas $a_3 a_4 b_3 b_4 c_3 c_4$ se puede representar con el vector OY , representando el OZ la onda de f.m.m. resultante. Exactamente igual a lo que sucedía con el diagrama de tensiones, podemos ver aquí que la f.m.m. resultante es menor que la que existiría si el mismo número de espiras por fase se concentraran en una única ranura por polo.

Los vectores de la f.m.m. correspondientes a un devanado de paso acortado pueden trazarse de igual forma, resultando así la Fig. B-7 que no es más que una repetición de la Fig. B-2 correspondiente a una máquina trifásica de dos polos, con paso $5/6$ del diametral y dos ranuras por polo y fase. El vector OW representa la contribución de las bobinas equivalentes formadas por los laterales a_2 y $-a_1$, b_2 y $-b_1$, c_2 y $-c_1$; OX la de las formadas por $a_1 a_4$ con $-a_3 - a_2$, b_1 y b_4 con $-b_3 - b_2$ y $c_1 c_4$ con $-c_3 - c_2$, y por último OY las de a_3 y $-a_4$, b_3 y $-b_4$, c_3 y $-c_4$.

El vector resultante OZ es evidentemente menor que la suma algebraica de los componentes y también menor que el OZ de la Fig. B-6.

Comparando estas últimas figuras con las B-1 y B-2 puede verse que los diagramas vectoriales de las f.m.m. son idénticos que los de las tensiones, de lo que se deduce que los factores antes determinados, tanto el de distribución como el de paso pueden aquí aplicarse directamente para la determinación de la f.m.m. resultante. Es decir, que en un devanado polifásico distribuido de paso acortado, se puede hallar la componente funda-

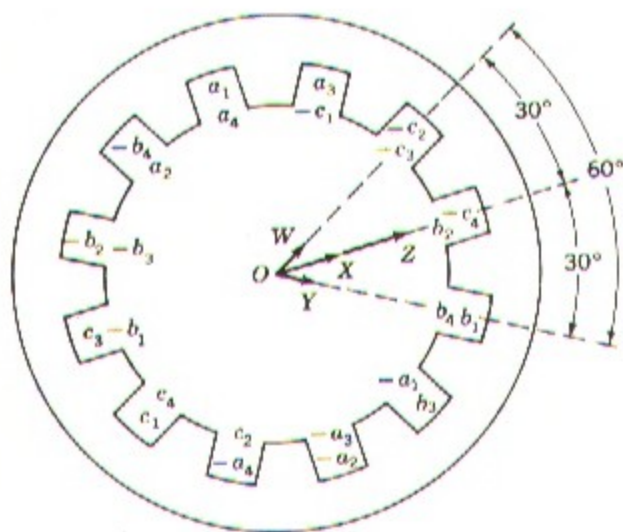


Fig. B-7. Devanado inducido trifásico de paso acortado de dos polos y diagrama vectorial de f.m.m.

mental de la f.m.m. en el espacio, empleando en las ecuaciones B-19 y B-20, $k_b k_p N_{\text{fase}}$ en lugar de N_{fase} solo; de esta manera dichas ecuaciones se convierten en:

$$F_A = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} \frac{k_b k_p N_{\text{fase}}}{P} (\sqrt{2} I) = 0,90 \frac{3 k_b k_p N_{\text{fase}}}{P} I \quad (\text{B-21})$$

para una máquina trifásica, y:

$$F_A = \frac{q}{2} \frac{4}{\pi} \frac{k_b k_p N_{\text{fase}}}{P} (\sqrt{2} I) = 0,90 \frac{q k_b k_p N_{\text{fase}}}{P} I \quad (\text{B-22})$$

para una q -fásica, siendo F_A ampere-vueltas por polo.

APENDICE C

Tabla de constantes y factores de conversión a unidades MKS

Constantes

Permeabilidad en el vacío	$\mu_0 = 4\pi, 10^{-7}$ weber/ampere-vuelta metro
Capacidad inductiva específica en el vacío	$\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ coulomb ² /Nw-m ²
Aceleración de la gravedad	$g = 9,807$ m/seg ²

Factores de conversión

Longitud	1 m = 3,281 pies = 39,37 pulgadas
Masa	1 kg = = 2,205 libras (masa)
Fuerza	1 Nw = 0,225 libras = 7,23 poundals (1)
Par	1 Nw-m = 0,738 libra-pie
Energía	1 joule (W-seg) = 0,738 pie-libra
Potencia	1 W = 1,341 $\times 10^{-3}$ h.p.
Momento de inercia	1 kg-m ² = 0,738 slug-pie ² = 23,7 libra-pie ²
Flujo magnético	1 weber = 10 ⁸ maxwell (líneas)
Densidad de flujo magnético	1 weber/m ² = 10000 gauss = 64,5 kilo-líneas/pulgada ²
Fuerza magnetomotriz	1 ampere-vuelta/m = 0,0254 ampere-vuelta/ pulgada = 0,0126 oersted

(1) Poundal: Fuerza que actuando durante un segundo sobre una libra-masa le imprime una velocidad de un pie por segundo.

APENDICE C

Tabla de constantes y factores de conversión a unidades MKS

Constantes

Permeabilidad en el vacío $\mu_0 = 4\pi, 10^{-7}$ weber/ampere-vuelta metro
Capacidad inductiva específica en el vacío $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ coulomb ² /Nw-m ²
Aceleración de la gravedad $g = 9,807$ m/seg ²

Factores de conversión

Longitud 1 m = 3,281 pies = 39,37 pulgadas
Masa 1 kg = = 2,205 libras (masa)
Fuerza 1 Nw = 0,225 libras = 7,23 poundals (1)
Par 1 Nw-m = 0,738 libra-pie
Energía 1 joule (W-seg) = 0,738 pie-libra
Potencia 1 W = $1,341 \times 10^{-3}$ h.p.
Momento de inercia 1 kg-m ² = 0,738 slug-pie ² = 23,7 libra-pie ²
Flujo magnético 1 weber = 10^8 maxwell (líneas)
Densidad de flujo magnético 1 weber/m ² = 10000 gauss = 64,5 kilo-líneas/pulgada ²
Fuerza magnetomotriz 1 ampere-vuelta/m = 0,0254 ampere-vuelta/ pulgada = 0,0126 oersted

(1) Poundal: Fuerza que actuando durante un segundo sobre una libra-masa le imprime una velocidad de un pie por segundo.

Índice alfabético de materias

A

Accionamiento a par constante, 242.
Accionamiento a potencia constante, 241.
Aislamiento
– Clases, 202
– Vida de los, 201
Alternador (véase Máquinas síncronas).
Amplidina, 431.
Angulo de cebado, 366.
Angulo de conducción, 374.
Angulo eléctrico, 128.
Angulo de extinción, 370.
Anillos rozantes, 124.
Área tensión-tiempo, 369.
Arrancador, 343.
Arrancadores, 342.
Arranque de motores monofásicos, 499.
Autoconmutación, 393.
Autotransformador, 56.

B

Bobina de paso diametral, 137.

C

Calentamiento de las máquinas, 201.

Campos magnéticos
– Energía en los, 9
– Rotativos, 149.
Campos magnéticos rotatorios, 149.
Característica de cortocircuito, 273.
Característica potencia-ángulo, 285, 298.
Característica de regulación, 280.
Característica en vacío, 199, 271.
Circuitos acoplados magnéticamente, 20.
Circuitos magnéticos, 2, 20.
– Eléctrico análogo, 6.
Circuitos polifásicos, 549, 565.
Circuitos rectificadores, 363.
Circuitos en T, 34.
Circuitos trifásicos, 549.
– Conexión Δ , 551, 554.
– Conexión Y, 551.
– Potencia de, 555.
Coeficiente de dispersión, 434.
Coenergía
– En campo eléctrico, 94.
– En campo magnético, 85.
Colector, 135.
– Chispeo en el, 221.
Componente de secuencia nula, 449.
Componentes según el eje transversal, 291, 449.
Componentes longitudinales, 291, 449.
Componentes simétricas, 518.
Condensador de conmutación, 390.
Condensador síncrono, 196.

Conexión compuesta cumulativa, 188.
 Conexión Δ , 551, 559.
 Conexión Δ abierta, 48.
 Conexión derivación corta, 226.
 Conexión derivación larga, 225.
 Conexión en Y, 551.
 Conexiones en transformadores trifásicos, 47.
 Conmutación
 - En inversores, 393.
 - En máquinas de continua, 178, 218.
 Conservación de la energía, 76.
 Constante de tiempo del inducido, 456, 458, 465.
 Constantes de tiempo
 - De máquinas síncronas, 456.
 - De motores de inducción, 469.
 Constantes de tiempo de cortocircuitos, 456, 463, 469.
 Constantes de tiempo según eje transversal, 457.
 Constantes de tiempo longitudinales, 456, 469.
 Constantes de tiempo subtransitorias, 456.
 Constantes de tiempo transitorias, 456, 469.
 Constantes de tiempo en vacío, 456, 462.
 Corriente de línea, 555.
 Corriente magnetizante en transformadores, 26.
 Cortocircuitos
 - En máquinas de inducción, 468.
 - En máquinas síncronas, 450.
 Curva de magnetización, 192.
 - De máquinas de continua, 183.
 Curvas normalizadas
 - Máquinas síncronas de polos salientes, 298.
 - Motores de inducción, 331.
 Curvas de saturación, 192.
 Curvas en V, 282.

CH

Chispeo en el colector, 221.

D

Densidad de flujo magnético, 3.
 Deslizamiento, 175.

Devanado amortiguador, 178.
 Devanado de compensación, 221, 235.
 - En amplidina, 432.
 Devanado inducido
 - En máquinas de alterna, 143, 567.
 - En máquinas de continua, 145, 178.
 Devanado inductor diferencial, 187.
 Devanado de paso diametral, 568.
 Devanado terciario, 59.
 Devanados de compensación, 221.
 Devanados distribuidos, 567.
 Devanados en dos capas, 568.
 Devanados de excitación, 124.
 Devanados de paso acortado, 568, 575.
 Diagramas de bloques, 109.
 Diodos, 365.
 - De paso, 385.
 - Realimentación, 394.
 Diodos de realimentación, 394.

E

Ecuaciones dinámicas de sistemas magnéticos, 101.
 Efecto de bordes en un entrehierro, 5.
 Eje del campo inductor, 181.
 Eje longitudinal, 181, 293.
 Eje transversal, 181, 294.
 Equivalencia Δ -Y, 562.
 Equivalencia Y- Δ , 563.
 Escobillas, 124.
 Esquemas unifilares, 563.
 Estabilidad de máquinas síncronas, 477.
 Estator, 124.
 Excitadoras, 172.

F

F. m. m. del inducido
 - En máquinas de alterna, 143, 574.
 - En máquinas de continua, 145, 215.
 Factor de amortiguación, 420.
 Factor de bobinado, 570.
 Factor de distribución, 571.
 Factor de paso, 573.
 Factor de potencia
 - En máquinas de alterna, 195.
 - En sistemas trifásicos, 557.
 Factor de servicio, 203.
 Fase, 549.

- Fase de referencia, 525.
- Flujo concatenado, 8.
- Flujo magnético, 4.
- Flujos de dispersión
 - En máquinas rotativas, 160.
 - En transformadores, 32.
- Frecuencia
 - Angular amortiguada y no amortiguada, 476.
 - De la tensión inducida, 128.
- Frecuencia amortiguada y no amortiguada, 476.
- Frecuencia angular amortiguada, 476.
- Frecuencia de deslizamiento, 176.
- Frecuencia propia, 420.
- Frecuencia propia no amortiguada, 420, 476.
- Fuerza magnetomotriz, 4.
 - En devanados distribuidos, 142.
- Función de estado, 85.
- Funciones de transferencia, 109.
 - De máquinas de continua, 410.

G

- Generador compuesto (compound), 185.
- Generador con triple excitación, 245.
- Generadores (véase: Generadores de continua y Máquinas síncronas).
- Generadores de continua
 - Auto excitados, 184.
 - Compuestos (compound), 185.
- Derivación, 185, 435.
 - Diagrama de bloques: análisis lineal, 410.
- Dinámica, 410.
 - Excitación independiente, 184.
 - Régimen permanente, 230.
 - Saturación incluida, 433.
 - Serie, 185.
 - Subida de tensión, 231, 435.
- Generadores síncronos acoplados, 304.
- Generadores síncronos en paralelo, 304.

I

- Impedancia síncrona, 271.
- Impulso de cebado, 365.
- Inducido, 123.
- Inductancia, 8.

- Inductor de control, 536.
- Inductor fijo o de referencia, 536.
- Inductor de referencia, 536.
- Intensidad de campo, 2.
- Intensidad de fase, 554.
- Inversión o contracorriente, 327.
- Inversores, 360, 389.
- Inversores paralelos, 390.

L

- Ley de Ampere, 2.
- Ley de Faraday, 8.
- Ley de Lenz, 24.
- Línea (o recta) del entrehierro, 184, 191.
- Linealización de ecuaciones no lineales, 108.

M

- Máquinas de continua
 - Aplicaciones, 245.
 - Conexiones de la excitación, 185.
 - Curva de magnetización, 182, 227.
 - Devanados incluidos, 145, 178.
 - Diagramas de bloques, 410.
 - Ecuaciones dinámicas, 409.
 - Elemental, 132.
 - F. m. m. del inducido, 145, 215.
 - Funciones de transferencia, 410.
 - Fundamentos analíticos, 223.
 - Ideal, 407.
 - Introducción a las, 181.
 - Pur, 196, 242, 235.
 - Sentidos de referencia, 408.
 - Tensión inducida, 141, 182, 223.
 - Variables de estado, 409.
- Máquinas de inducción
 - Elemental, 136.
 - Introducción a, 174.
 - (Véase también: Motores de inducción).
- Máquinas refrigeradas interiormente, 205.
- Máquinas síncronas
 - Análisis dinámico, 472.
 - Análisis transitorio, 447.
 - Característica en cortocircuito, 273.
 - Característica potencia-ángulo, 285, 298.
 - Característica en vacío, 271.
 - Características en régimen permanente, 279.

- Componentes longitudinales, 291, 449.
 - Componentes transversales, 291, 449.
 - Cortocircuitos en, 450.
 - Curvas par-ángulo, 173.
 - Diagramas vectoriales, 269, 293.
 - Elemental, 124.
 - Estabilidad, 477.
 - F. m. m. de reacción del inducido, 264, 291.
 - Introducción a las, 171.
 - Ondas de f. m. m., 263, 291.
 - Ondas de flujo, 263, 291.
 - De polos salientes: curvas normalizadas, 298.
 - Penduleo, 173.
 - Potencia reactiva disponible, 281.
 - Reactancias: subtransitoria, 456.
 - Síncrona, 271, 294, 458.
 - Transitoria, 456, 463.
 - Régimen permanente: análisis, 263, 285.
 - Relación de cortocircuito, 276.
 - Rendimiento, 283.
 - Teoría de polos salientes, 291.
 - Teoría de rotor cilíndrico, 263.
- Materiales magnéticos**
- Acero de grano orientado, 18.
 - Características en alterna, 15.
 - Curva de magnetización normal, 12.
 - Pérdidas en el hierro, 15.
 - Propiedades de los, 11.
- Metadinamo, 430.**
- Métodos de igualación de áreas, 477.**
- Motor de alto deslizamiento, 344.**
- Motor compuesto (compound), 188.**
- Motor con dos condensadores, 502.**
- Motor de fase partida con condensador permanente, 501.**
- Motor universal, 507.**
- Motores para aplicaciones específicas, 203.**
- Motores bifásicos de control, 525.**
- Motores con condensador de arranque, 501.**
- Motores de continua**
- Accionamiento con diodos, 372.
 - Accionamiento con tiristores, 375.
 - Accionamiento con troceadores, 385.
 - Compuestos (compound), 187.
 - Constante de tiempo de carga, 418.
 - Constante de tiempo de inercia, 417.
 - Constantes de tiempo, 417.
 - Derivación, 187.
 - Excitación independiente: dinámica, 416.
 - Puesta en marcha, 236.
 - Régimen permanente: análisis, 234.
 - Regulación de velocidad (véase: Regulación de velocidad).
 - Serie, 187.
 - Con sistemas estáticos, 372.
- Motores con espiras de sombra, 504.**
- Motores de fase partida, 500.**
- Motores fraccionales, 493.**
- Motores de histéresis, 506.**
- Motores de impulsos, 532.**
- Motores de inducción:**
- Motores bifásicos, 518.
 - Componentes simétricas, 518.
 - Funcionamiento desequilibrado, 518.
 - Motores de control, 525.
 - Tacómetros, 536.
 - Teoría general, 518.
 - Motores monofásicos:
 - Circuitos equivalentes, 511.
 - Con condensador, 501.
 - Con doble condensador, 502.
 - Espiras de sombra, 504.
 - Fase partida, 500.
 - De fase partida con condensador permanente, 501.
 - Ondas de f. m. m., 495.
 - Ondas de flujo, 495.
 - Procedimientos de arranque, 499.
 - Teoría del campo rotatorio, 495, 510.
 - Teoría de los campos cruzados, 495.
- Motores polifásicos: aplicaciones, 341.
- Análisis dinámico, 480.
 - Análisis de transitorios, 468.
 - Características par-deslizamiento, 326.
 - Circuito equivalente de Thevenin, 325.
 - Circuitos equivalentes, 318.
 - Clases, 342.
 - Constantes de tiempo, 469.
 - Cortocircuitos, 469.
 - Curvas normalizadas, 331.
 - F. m. m. del rotor de jaula, 315.
 - Motores de rotor devanado, 336.
 - Ondas de f. m. m., 315.
 - Ondas de flujo, 315.
 - Par crítico, 327.
 - Reacciones del rotor, 315.

- Reactancia, 319.
- Reactancia transitoria, 469.
- Reducción de cantidades del rotor, 315.
- Régimen permanente: análisis, 321.
- Regulación de velocidad, 344.
- Resistencia del rotor: sus efectos, 335.

Motores de reluctancia, 505.

Motores de rotor devanado, 336.

Motores serie

- De alterna, 507.
- De continua, 187.

Motores síncronos

- Arranque, 178.
 - Curvas V, 282.
 - Elemental, 129.
 - Factor de potencia, 282.
 - De histéresis, 506.
 - Regulación de velocidad, 361, 398.
 - Tipo de reluctancia, 505.
- (Véase también: Máquinas síncronas).

Motores de uso general, 203.

Motores con variación de polos, 345.

P

Par

- Crítico, 174, 327.
- De frenado, 327.
- En máquinas de continua, 182, 223, 409.
- Relaciones básicas, 155.
- De reluctancia, 99, 299.

Par asíncrono, 176.

Par electromagnético: relaciones básicas, 155.

Par límite, 358.

Par de reluctancia, 100, 299.

Penduleo, 478.

Pérdidas, 198.

Pérdidas en el cobre, 199.

Pérdidas por corrientes parásitas, 9, 15.

Pérdidas en cortocircuito, 278.

Pérdidas en las escobillas, 199.

Pérdidas en el hierro en vacío, 199, 271.

Pérdidas por histéresis, 9, 15.

Pérdidas mecánicas, 199.

Pérdidas en el núcleo, 9, 15, 199.

Pérdidas parásitos en carga, 200.

Pérdidas en vacío, 199, 271.

Período subtransitorio, 452.

Período transitorio, 452.

Permeabilidad, 3.

Permeancia, 4.

Permeancia longitudinal en el entrehierro, 144.

Polos de conmutación, 220.

Polos salientes, 129.

Potencia de amortiguación, 474.

Potencia de corta duración, 203.

Potencia indicada o nominal, 202.

Potencia media cuadrática, 204.

Potencia reactiva disponible, 281.

Potencia reactiva en sistemas trifásicos, 556.

Potencia en servicio continuo, 203.

Potencia síncrona, 474.

Potencia sincronizante, 475.

Potencia en sistemas trifásicos, 555.

Principio del flujo constante, 450.

Pruebas de cortocircuito

- De máquinas síncronas, 278.
- De transformadores, 44.

Pruebas en vacío, 44, 271.

Puntos de media potencia, 41.

R

Reacción del inducido

- En máquinas de continua, 215, 229.
- En máquinas síncronas, 264, 291.

Reactancia de dispersión del inducido, 270, 293, 294.

Reactancia magnetizante

- En máquinas síncronas, 270.

Reactancia síncrona, 271, 275, 294, 458.

Reactancia síncrona saturada, 275.

Reactancia subtransitoria, 456.

Reactancia transitoria

- En máquinas de inducción, 469.
- En máquinas síncronas, 456.

Recta de resistencia del inductor, 231, 435.

Rectificador diodo de media onda, 366, 374.

Rectificador tiristor de media onda, 367, 375.

Red de potencia infinita, 172.

Refrigeración de los devanados, 205.

Refrigeración con hidrógeno, 205.

Refrigeración de máquinas, 205.

Regulación de velocidad

- En motores serie de alterna, 509.
- En motores de continua, 240, 375.
 - Con dispositivos estáticos, 375.
 - Por realimentación, 423.
 - Con reostato de campo, 241.
 - Por la resistencia del inducido, 241.
 - Shuntando el inducido, 242.
 - Sistema Ward Leonard, 243.
 - Por la tensión en el inducido, 242, 376.
 - Con tiristores, 375.
- En motores de inducción, 344, 362, 398.
- En motores de síncronos, 360, 398.
- Sistema por ajuste de frecuencia, 347, 362, 398.
- Reguladores estáticos, 357.
- Relación de amortiguación, 420, 476.
- Relación de cortocircuito, 276.
- Reluctancia, 4.
- Rendimiento, 46, 198.
- Resistencia crítica del inductor, 231.
- Resistencia efectiva del inducido, 279.
- Respuesta de frecuencia
 - En sistemas de circuito cerrado, 429.
 - En transformadores, 39.
- Rotor, 123.
- Rotor de barras altas, 337.
- Rotor cilíndrico, 129.
- Rotor devanado, 174.
- Rotor de jaula de ardilla, 174.
 - F. m. m. del, 315.
- Rotor de vaso, 527.
- Rotores de doble jaula, 340.

S

- Secuencia de fases, 552.
- Secuencia negativa, 520.
- Secuencia positiva, 519.
- Síncro diferencial, 539.
- Síncros, 538.
- Sincroscopio, 305.
- Sistema conservador, 81.
- Sistema tetrafásico, 565.
- Sistema trifásico, 565.
- Sistema de unidades relativas, 52.
- Sistema Ward Leonard, 243.
- Sistemas de excitación, 195.
- Sistemas monofásicos, 549.
- Sistemas trifásicos, 549.

- Sistemas trifásicos equilibrados, 551.
- Sobreexcitación, 282.
- Soluciones normalizadas de ecuaciones diferenciales, 421.
- Subexcitación, 282.

T

- Tabla de constantes, 579.
- Tabla de factores de conexión, 579.
- Tacómetro, 536.
- Temperaturas límites, 203.
- Tensión compuesta, 553.
- Tensión de fase, 552.
- Tensión inducida
 - En máquinas de alterna, 137, 567.
 - En máquinas de continua, 141, 182, 223.
- Tensión simple, 553.
- Teorema de Thevenin, 325.
- Teoría de campos cruzados, 494.
- Teoría de campos rotatorios, 495, 510.
- Tiempo de conmutación, 391.
- Tiristores, 360, 365.
- Transductores, 75.
- Transformador ideal, 27.
- Transformador de salida, 38.
- Transformadores, 20.
 - De audio frecuencia, 38.
 - Blindado, 21.
 - Caída interna de tensión, 47.
 - Circuitos equivalentes, 30.
 - En circuitos trifásicos, 47.
 - Componentes de carga, 32.
 - Componentes de flujo, 32.
 - Corriente de excitación, 23, 32.
 - Componente magnetizante, 26, 32.
 - Componente de pérdidas, 26, 32.
 - Onda senoidal equivalente, 26.
 - Devanado primario, 20.
 - Devanado secundario, 20.
 - Devanado terciario, 59.
 - De distribución, 22.
 - Ensayo en cortocircuito, 44.
 - Ensayos, 44.
 - Ensayos de vacío, 44.
 - Factores de reducción, 30.
 - Frecuencia-respuesta, 39.
 - Flujo mutuo, 31.
 - Flujos de dispersión, 21, 31, 34.
 - Ideal, 27.

- Impedancia equivalente, 36.
- De impulsos, 43.
- Multicircuito, 59.
- De núcleo, 21.
- Núcleo de hierro, 21.
- Polaridad, 29.
- Reactancias de dispersión, 32, 34.
- Relación de transformación, 20.
- Rendimiento, 46.
- Sincro de control, 541.
- Tensión inducida, 24.
- De tres circuitos, 59.
- Transformadores de control, 541.
- Transformadores de frecuencia audible, 38.

- Transformadores de impulsos, 42.
- Transformadores multicircuito, 59.
- Transformadores de tres devanados, 59.
- Transformadores trifásicos, 48.
- Troceadores, 385.
- Turbogenerador, 129.

V

- V A en sistemas trifásicos, 556.
- Variables de estado, 85.
- De máquinas de continua, 409.
- Vida del aislamiento, 201.

FE DE ERRATAS

Página 27 (Enunciado 1-6)

Donde dice: Transformadora ideal. Debe decir: Transformador ideal.

Página 83 (Pie de la figura 2-4)

Donde dice: Relé obtenido. Debe decir: Relé retenido.

Página 146 (Figura 3-23. Inscripción superior)

Donde dice: devanado inductor. Debe decir: devanado inducido.

Página 150 (Fórmula 3-27)

Donde dice: 12° . Debe decir: 120° .

Página 150 (Fórmula 3-28)

Donde dice: 24° . Debe decir: 240° .

Página 153 (Primera línea)

Donde dice: bases b y c . Debe decir: fases b y c .

Página 178 (Línea 36)

Donde dice: Las conexiones de las bobinas o las delgas. Debe decir: Las conexiones de las bobinas a las delgas.

Página 192 (Figura 4-16. Inscripción superior izquierda)

Donde dice: rotor. Debe decir: estator.

Página 204 (Fórmula 4-26)

Donde dice: Σ (potencia)². Debe decir: Σ (potencia² × tiempo).

Página 282 (Figura 6-17)

Donde dice: H^2 . Debe decir: H_2 .

Página 292 (Figura 6-23)

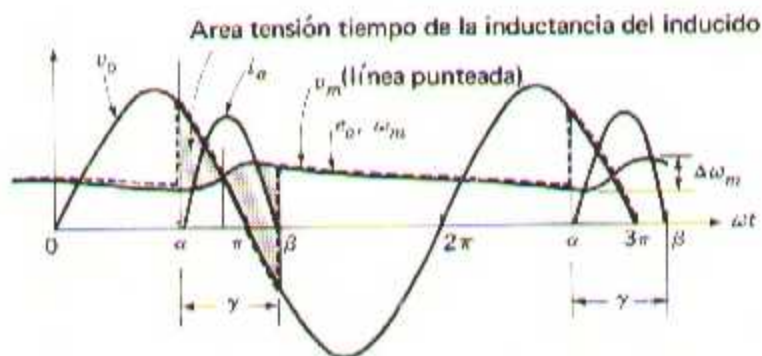
Donde dice: Flujo fundamental del inducido. Debe decir: Flujo fundamental de excitación.

Página 292 (Figura 6-23)

Donde dice: Flujo fundamental de excitación. Debe decir: Flujo fundamental del inducido.

Página 376 (Figura 8-14)

Falta la zona sombreada y debe quedar así:



Página 498 (Figura 11-3)

Donde dice: % Velocidad síncrona. Debe decir: % Velocidad síncrona (directa).

Donde dice: (Inverso). Debe decir: (Inversa).

Donde dice: Inverso. Debe decir: (Inverso).