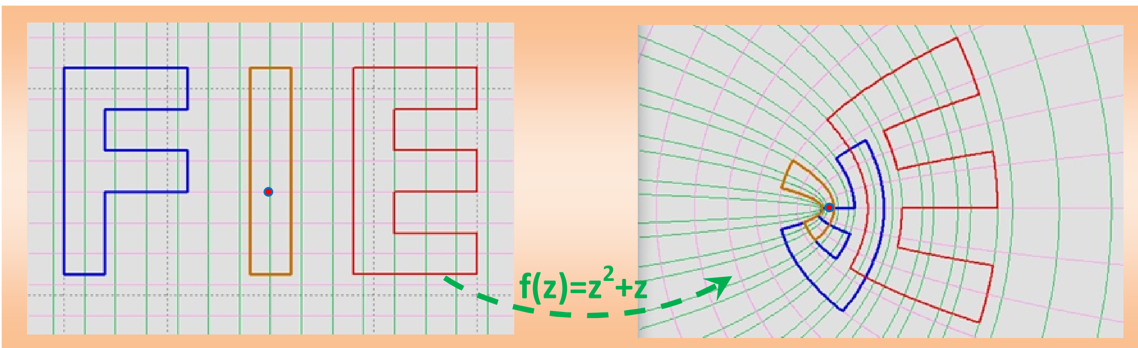
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Apuntes para la Materia de

Cálculo IV



Para las Carreras:

Ingeniería Eléctrica
Ingeniería Electrónica
Ingeniería en Computación.

octubre de 2015

Nombre de la materia: **CÁLCULO IV**
Clave: **CB0003-T**
No. De horas /semana : **5**

Objetivo:
1) Introducir al estudiante a los conceptos básicos de la teoría de las funciones de variable compleja, revisar los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral para este tipo de funciones, introducir el concepto de función analítica, el desarrollo en serie de Laurent y el teorema de los residuos y su importancia en la teoría de integración de funciones complejas.
2) Se dará una introducción a la Transformación de Laplace, sus propiedades, el uso de las Tablas de Transformadas de Laplace y su aplicación a la solución de ecuaciones diferenciales.
3) También se darán las bases del análisis de Fourier para señales continuas en el caso periódico y en el caso no periódico.

Contenido

1. Elementos de la Teoría de Variable Compleja.	19 hrs.
2. Integración en el plano complejo	19 hrs.
3. Serie de Laurent y teorema de los residuos	12 hrs.
4. Transformada de Laplace.	14 hrs.
5. Introducción al análisis de Fourier.	10 hrs.
Exámenes parciales. ………………………………………………………………………………	6 hrs.
Total	**80 hrs.**

Bibliografía:
Texto principal:
1. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Tomos I y II.
Erwin Kreyszig Ed. Limusa Wiley

Programa Desarrollado

1. Elementos de la Teoría de Variable Compleja. (20 horas)
- 1.1. Repaso de números complejos
  - 1.1.1. Formas de representación de números complejos: rectangular, polar, par ordenado, forma gráfica, vectorial y forma exponencial.
  - 1.1.2. Conversión de rectangular a polar
  - 1.1.3. Conversión de polar a rectangular y corrección en el segundo y tercer cuadrantes.
  - 1.1.4. Operaciones elementales con números complejos (suma, resta, multiplicación y división de números complejos)
  - 1.1.5. El argumento y el argumento principal de un número complejo
  - 1.1.6. El complejo conjugado y sus propiedades
  - 1.1.7. El módulo o magnitud de un número complejo y sus propiedades
  - 1.1.8. Potencias y raíces de números complejos
- 1.2. Desigualdades y regiones en el plano complejo
- 1.3. Funciones de una variable compleja
  - 1.3.1. Funciones componentes
  - 1.3.2. Función de variable compleja como transformación o mapeo entre dos planos
- 1.4. Límites y continuidad de una función compleja
- 1.5. Derivada y derivabilidad de una función compleja
- 1.6. Condiciones necesarias para la derivabilidad de una función compleja y ecuaciones de Cauchy Riemann.
  - 1.6.1. Condiciones suficientes para la derivabilidad.
- 1.7. Funciones analíticas y puntos singulares.
- 1.8. Funciones Armónicas y la ecuación de Laplace.
- 1.9. Funciones exponenciales y logarítmicas
- 1.10. Funciones trigonométricas .
- 1.11. Funciones hiperbólicas.

Primer examen parcial (2 Horas).

2. Integración en el plano complejo. (20 horas)
- 2.1. Integrales de línea o de camino
  - 2.1.1. Definición de camino o arco suave a trozos .
  - 2.1.2. Caminos y su parametrización.
  - 2.1.3. Definición de integral de camino o de línea y sus propiedades básicas.
  - 2.1.4. Ejemplos de integración de funciones a lo largo de caminos abiertos y cerrados.
- 2.2. Independencia de la trayectoria y primitivas
- 2.3. El teorema de Cauchy-Gousart
  - 2.3.1. Dominios simple y múltiplemente conexos
  - 2.3.2. El principio de deformación de caminos.
- 2.4. Fórmulas integrales de Cauchy

3. Serie de Laurent y teorema de los residuos. (10 horas)
- 3.1. Sucesiones y series
  - 3.1.1. Progresiones o sucesiones, término general, convergencia de una sucesión
  - 3.1.2. Series, sucesión de sumas parciales, convergencia de una serie.
  - 3.1.3. Ejemplos de sucesiones y series típicas (aritmética, geométrica, armónica y otras)
  - 3.1.4. Serie geométrica y su convergencia
  - 3.1.5. Expansión en serie de 1/(1-z).
- 3.2. Series de Taylor y Maclaurin y su región de convergencia.
- 3.3. Series de Laurent y su región de convergencia.
- 3.4. Definición de ceros, polos y residuos
- 3.5. Teorema de los residuos.

Segundo examen parcial (2 Horas).

4. Transformada de Laplace. (14 horas)
- 4.1. Origen de la transformación de Laplace
- 4.2. Definición de la Transformada de Laplace bilateral y unilateral de una función de variable real.
- 4.3. Cálculo de transformadas de Laplace mediante la definición.
- 4.4. Ejemplos de funciones típicas y su transformada. La función escalón, la función rampa.
- 4.5. Propiedades de la Transformada de Laplace
  - 4.5.1. Propiedad de Linealidad
  - 4.5.2. Primera propiedad de traslación (traslación o corrimiento real).
    - 4.5.2.1. La función escalón con corrimiento y su transformada
    - 4.5.2.2. La función pulso y su transformada
    - 4.5.2.3. La función Impulso Unitario o Delta de Dirac y su transformada
  - 4.5.3. Segunda propiedad de traslación (traslación o corrimiento complejo)
  - 4.5.4. Transformada de la derivada y de la derivada múltiple
  - 4.5.5. Transformada de la integral
  - 4.5.6. Teorema del valor final
  - 4.5.7. Teorema del valor inicial
  - 4.5.8. Propiedad de cambio de escala.
- 4.6. La convolución y su transformada de Laplace
- 4.7. La transformada inversa de Laplace
  - 4.7.1. La fórmula de inversión
  - 4.7.2. Propiedades de la Transformada inversa de Laplace
  - 4.7.3. Cálculo de la transformada inversa mediante el uso de Tablas y expansión en fracciones parciales.
- 4.8. Solución de ecuaciones integro-diferenciales por medio de transformada de Laplace.

5. Introducción al análisis de Fourier. (10 horas)
- 5.1. Funciones y señales periódicas.
  - 5.1.1. Definiciones. Función periódica, periodo fundamental, frecuencia fundamental, frecuencia en Hertz, frecuencia angular
  - 5.1.2. Funciones sinusoidales, Amplitud, frecuencia y fase.
- 5.2. Funciones ortogonales, ortogonalidad de funciones sinusoidales.
- 5.3. Series de Fourier en su forma trigonométrica para una señal de periodo arbitrario T.
  - 5.3.1. Coeficientes de Fourier y su obtención
  - 5.3.2. Valor promedio y componente de CD, componentes armónicas.
- 5.4. Series de Fourier en su forma exponencial compleja, espectro de frecuencia discreto.
- 5.5. Simetrías par e impar y serie de Fourier de señales simétricas
- 5.6. De la Serie a la Integral de Fourier
- 5.7. Formas equivalentes de la integral de Fourier
- 5.8. La transformada de Fourier.
- 5.9. Propiedades de la transformada de Fourier.
- 5.10. Transformada de Fourier para algunas funciones del tiempo simples. Espectro de frecuencia continuo.
- 5.11. La función rect, la función sinc y la función sinc normalizada
- 5.12. Relación entre la transformada de Laplace y la transformada de Fourier.
- 5.13. Teoremas de Parseval y de Rayleigh.
- 5.14. Condiciones de existencia de la Transformada de Fourier.
- 5.15. Señales de energía finita y de potencia finita.
- 5.16. La densidad espectral de energía y de potencia.
- 5.17. La autocorrelación y la densidad espectral de energía.

Tercer examen parcial (2 Horas)

Última Revisión: Junio de 2015.
José Juan Rincón Pasaye.

Capítulo 1. Elementos de la Teoría de Variable Compleja

1.1 Números Complejos

La principal razón por la cual se introducen los números imaginarios en el conjunto total de números es la misma por la cual se introducen los números negativos en el conjunto de números reales:

Así como los números negativos permiten hallar la solución de ecuaciones de la forma $x+1=0$, los números imaginarios permiten hallar la solución de ecuaciones de la forma $x^2+1=0$ la cual no tiene solución en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Para conseguir un objetivo aún más general se introducen los números complejos. Estos números proporcionarán además las soluciones de las ecuaciones algebraicas generales de la forma $a_0+a_1x+...+a_nx^n=0$ con coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$.

El conjunto de los números complejos que de aquí en adelante se denotará por el símbolo $\mathbb{C}$ contiene todos los tipos de números que se requieren en Ingeniería como se ilustra en la figura 1.1 y por lo tanto permite encontrar la solución de cualquier ecuación cuya solución sea un número.

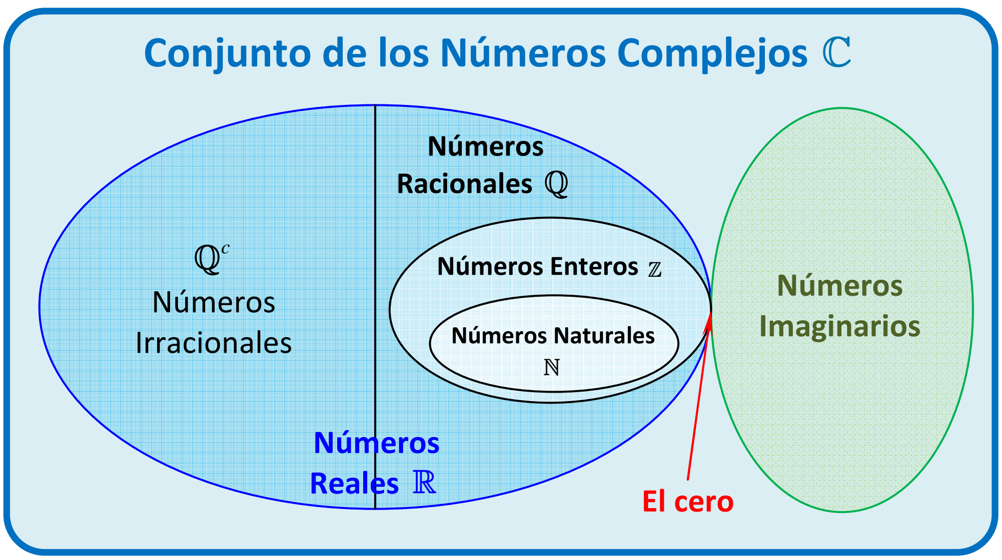


Fig. 1.1.- El conjunto de los Números Complejos contiene a todos los conjuntos de números.

1.1.1- Definiciones

- El número i se denomina ***unidad imaginaria*** y es el número tal que $i^2=-1$. En ocasiones se denota $i=\sqrt{-1}$. También suele representarse por la letra j en lugar de la letra i.

- Un número se dice ***número imaginario*** si es un múltiplo del número i, es decir, un número imaginario tiene la forma iy, donde $y \in \mathbb{R}$.

- Un número z se llama ***número complejo*** y se denota $z \in \mathbb{C}$, si z es la suma de un número real x más un número imaginario iy, es decir, $z = x + iy$, donde $x, y \in \mathbb{R}$.

- Si $z = x + iy$, al número real x se le llama ***parte real*** de z, denotado $\mathrm{Re}(z)$ y al número real y se le llama ***parte imaginaria*** de z, denotado $\mathrm{Im}(z)$. (Obsérvese que la parte imaginaria no incluye al número i, es decir, la parte imaginaria **es** un número real).

Ejemplo 1.1. Si $z = 3 - \sqrt{2}i \in \mathbb{C}$, entonces $\mathrm{Re}(z) = 3$, $\mathrm{Im}(z) = -\sqrt{2}$.

Ejemplo 1.2. El número real $z = 2 \in \mathbb{C}$ (Aunque $z = 2$ es número real, también es número complejo), en este caso $\mathrm{Re}(z) = 2$, $\mathrm{Im}(z) = 0$, es decir, $z = 2 + i0$.

- De acuerdo al ejemplo anterior, todo número real es un número complejo con parte imaginaria cero y todo número imaginario es un número complejo con parte real cero. El único número complejo que es real e imaginario a la vez es el cero, ya que $0 = 0 + i0$.

1.1.2.- Representación de números complejos.

Un número complejo z puede ser representados de varias maneras:

Forma rectangular.- Es la forma en que se definió un número complejo z, es decir, en forma de suma de un real más un imaginario, es decir,

$$z = x + iy \tag{1.1}$$

Forma de par ordenado.- Como un número complejo z consta de dos números reales, en ocasiones se representa simplemente como $z = (x, y)$, donde x es la parte real de z, y y es la parte imaginaria de z.

Forma Gráfica.- Todo par ordenado se puede representar como un ***punto*** o como un ***vector*** en un plano. Así, el número complejo $z = (x, y)$ se puede representar en el ***plano complejo*** $\mathbb{C}$ como el punto de coordenadas cartesianas (x, y) o también como el vector que va del origen al punto (x, y). Ver figura 1.2.

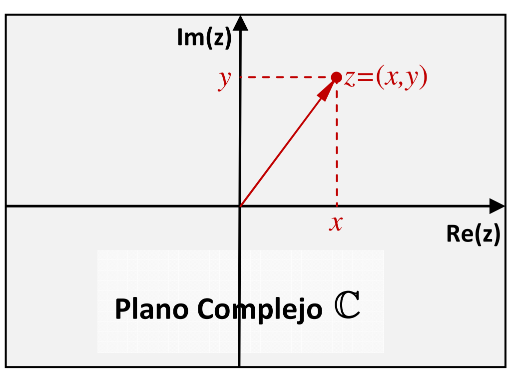


Fig. 1.2.- Representación gráfica de un número complejo en el plano Complejo.

Forma polar.- En lugar de expresar las coordenadas rectangulares del punto $z=(x,y)$ podemos expresar sus coordenadas polares $z=r\underline{|\theta}$, donde $r\geq 0$ es la distancia del punto z al origen, se denomina **magnitud** o **módulo** de z y se denota como $|z|$, y θ es el ángulo de la recta que une al punto con el origen, medido en sentido anti horario con respecto a la parte derecha de la horizontal. Ver figura 1.3.

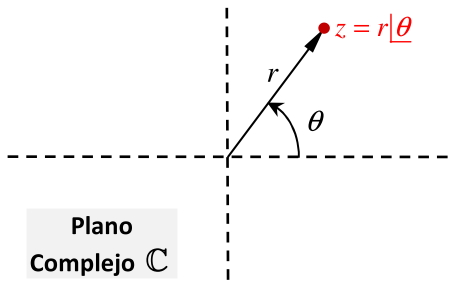


Fig. 1.3. Coordenadas polares de un número complejo.

Forma trigonométrica.- Observando las figuras 1.2 y 1.3 se observa que existe una relación entre las coordenadas rectangulares $z=(x,y)$ y las coordenadas polares $z=r\underline{|\theta}$ de un número complejo z

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta \tag{1.2}$$

por lo tanto, el número complejo $z=x+iy$ se puede escribir en la forma siguiente

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta) \tag{1.3}$$

que algunos autores denotan de manera abreviada como

$$z=r\,cis(\theta) \tag{1.4}$$

Forma exponencial.- A Leonhard Euler (Matemático Suizo, 1707-1783) se le atribuye la llamada ***Fórmula de Euler*** siguiente, que relaciona una función exponencial con las funciones trigonométricas seno y coseno, como sigue

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \tag{1.5}$$

usando la fórmula de Euler se puede escribir la forma trigonométrica (1.3) en una nueva forma

$$z=re^{i\theta} \tag{1.6}$$

denominada forma exponencial del número complejo z.

Conversión entre representación Rectangular y Polar.

Las expresiones (1.2) permiten la conversión directa de un número de ***polar a rectangular***.

Ejemplo 1.3.- El número complejo $z=1\underline{|45°}$ se escribe en su forma rectangular como $z=\cos(45°)+i\sin(45°)$, es decir, $z=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Sin embargo, la conversión de ***rectangular a polar*** requiere un mayor cuidado.

Primero se tiene que tener cuidado en la manera de expresar el ángulo θ del número complejo z, también llamado ***argumento*** del número complejo o $arg(z)$, ya que un mismo ángulo se puede representar de múltiples maneras, ya sea que se estén usando grados o radianes, de hecho,

$$\theta = \arg(z) = \Theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \tag{1.7}$$

o bien,

$$\theta = \arg(z) = \Theta + 360° k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

donde $\Theta = Arg(z)$ se denomina ***argumento principal*** de z (nótese que se escribe con mayúscula para distinguirlo de $\theta = arg(z)$ y además

$$-\pi < \Theta \le \pi \tag{1.8}$$

o bien,

$$-180° < \Theta \le 180°$$

Una vez teniendo este cuidado, podemos obtener una expresión para θ a partir de (1.2), dividiendo y entre x se obtiene

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.9}$$

en forma similar, podemos obtener una expresión para r del teorema de Pitágoras, ya que r es la hipotenusa del triángulo cuyos catetos son x e y, ver figura 1.2, es decir,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.10}$$

☞ Sin embargo, se tiene que tener una precaución adicional al evaluar la fórmula (1.9) mediante una calculadora, ya que al hacer la división de y entre x se pierde la información de signo de estas componentes y entonces la calculadora no tiene elementos para decidir en cual cuadrante se encuentra el número complejo. Para aclarar esta situación se presentan los siguientes cuatro ejemplos:

Ejemplo 1.4.- El número complejo $z = 1 + i\sqrt{3}$ se encuentra en el *primer cuadrante*, entonces la calculadora no tiene problemas con el signo de y/x, por lo tanto $\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60°$, además $r = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 2$, por lo tanto la forma polar de z es $z = 2\underline{|60°}$, o bien, $z = 2\underline{|\pi/3}$.

Ejemplo 1.5.- El número complejo $z = 1 - i\sqrt{3}$ se encuentra en el *cuarto cuadrante*, entonces la calculadora no tiene problemas con el signo de y/x, por lo tanto $\theta = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = -60°$, además $r = \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = 2$, por lo tanto la forma polar de z es $z = 2\underline{|-60°}$, o bien, $z = 2\underline{|-\pi/3}$.

Ejemplo 1.6.- El número complejo $z=-1+i\sqrt{3}$ se encuentra en el *segundo cuadrante*, entonces la calculadora tendrá problemas con el signo de y/x, ya que lo interpretará como si estuviera en el cuarto cuadrante, es decir, con la calculadora se obtiene $\theta=\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=-60°$ lo cual es incorrecto, para corregir el resultado hay que sumar 180°, por lo tanto el resultado correcto es $\theta=180°+\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=120°$. Además $r=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$, por lo tanto la forma polar de z es $z=2\underline{|120°}$, o bien, $z=2\underline{|2\pi/3}$. En la figura 1.4 se muestra la corrección realizada

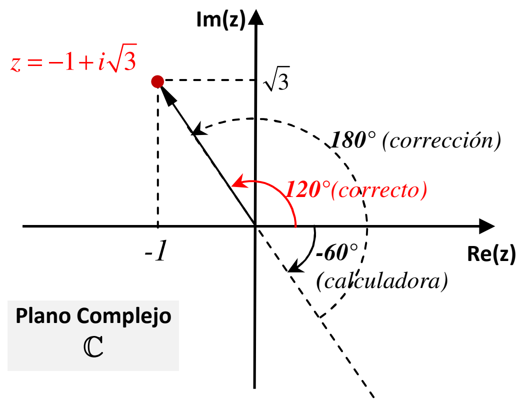


Fig. 1.4. Corrección del ángulo obtenido por la calculadora cuando el número está en el segundo cuadrante.

Ejemplo 1.7.- El número complejo $z=-1-i\sqrt{3}$ se encuentra en el *tercer cuadrante*, entonces la calculadora tendrá problemas con el signo de y/x, ya que lo interpretará como si estuviera en el primer cuadrante, es decir, con la calculadora se obtiene $\theta=\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)=60°$ lo cual es incorrecto, para corregir el resultado hay que restar 180°, por lo tanto el resultado correcto es $\theta=\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)-180°=-120°$. Además $r=\sqrt{1+\sqrt{3}^2}=2$, por lo tanto la forma polar de z es $z=2\underline{|-120°}$, o bien, $z=2\underline{|-2\pi/3}$. En la figura 1.5 se muestra la corrección realizada

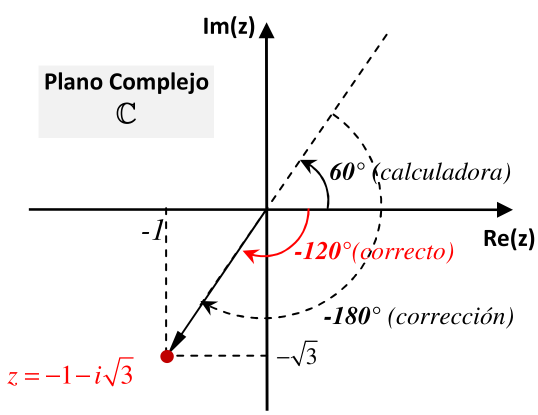


Fig. 1.5. Corrección del ángulo obtenido por la calculadora cuando el número está en el tercer cuadrante.

- **Observación**: Si se cuenta con una calculadora o programa de cálculo numérico que cuente con la función `atan2`, se puede calcular directamente sin necesidad de hacer correcciones el ángulo del número complejo $z = x + iy$ como $\theta = \mathrm{atan2}(y, x)$.

1.2.- Operaciones Fundamentales con Números Complejos.

Antes de introducir las operaciones fundamentales, conviene definir lo que se entiende por números complejos iguales:

- **Igualdad de números complejos**: Dos números complejos de dicen iguales si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales, es decir,

$$z_1 = z_2 \quad sii \quad \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \quad y \quad \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \tag{1.11}$$

Ejemplo1.8. Los números complejos $z_1 = 1 + j$ y $z_2 = \sqrt{2}\underline{|45^{\circ}}$ son iguales y también son iguales al número complejo $z_3 = \sqrt{2}\underline{|405^{\circ}}$, o al número complejo $z_4 = \sqrt{2}\underline{|-315^{\circ}}$.

- **Suma de números complejos**: La suma de dos números complejos z_1, z_2 es el número complejo $z_1 + z_2$ cuya parte real es la suma de las partes reales de z_1, z_2 y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias de z_1, z_2, es decir, si $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.12}$$

- **Producto o multiplicación de números complejos**: La multiplicación de dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ es el número complejo $z_1 z_2$ dado por

$$z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{1.13}$$

- El **conjugado complejo** (o simplemente conjugado) del número complejo $z = x + iy$ es el número complejo $\overline{z}$ cuya parte imaginaria tiene signo cambiado respecto a la parte imaginaria de z, es decir,

$$\overline{z} = x - iy \tag{1.14}$$

El conjugado de un número complejo tiene propiedades interesantes que utilizaremos a lo largo de este curso. A continuación se presenta una lista resumida de dichas propiedades. Se recomienda al lector verificar cada una de ellas.

Propiedades del conjugado complejo

i. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

ii. $\overline{\overline{z}} = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (Propiedad de involución)

iii. $\overline{z} = z \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

iv. $\overline{z} = -z \Leftrightarrow \operatorname{Re} z = 0 \Leftrightarrow z$ imaginario puro

v. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ | Se generaliza para n sumandos. Comprobar

vi. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ | Se generaliza para n factores. Comprobar

vii. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ | Pues si $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0) \Rightarrow zz_2 = z_1 \Rightarrow \overline{z}\,\overline{z}_2 = \overline{z}_1 \Rightarrow \overline{z} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

viii. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

ix. $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

Ejemplo de Aplicación

Sea la ecuación: $\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n = 0$ con coeficientes $\alpha_i \in \mathbb{C}$ para $i = 0,\ldots,n$

Si p es una raíz de la ecuación, entonces $\overline{p}$ es raíz de la ecuación con coeficiente conjugados $\overline{\alpha_0} + \overline{\alpha_1} z + \ldots + \overline{\alpha_n} z^n = 0$.

En particular, si $\alpha_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0,\ldots,n$, p y $\overline{p}$ son raíces de la misma ecuación, y obtenemos la conocida propiedad de que las raíces de un polinomio con coeficientes reales, aparecen como parejas de raíces conjugadas.

División de números complejos: Usando la propiedad ix del conjugado complejo, podemos convertir una división de números complejos en una multiplicación. Así, la división de dos números complejos z_1 / z_2 se puede calcular multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador como sigue

$$z_1 / z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z}_2}{\overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} \tag{1.15}$$

sustituyendo $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ se obtiene

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + ix_2y_1 - ix_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} \tag{1.16}$$

Separando en parte real y parte imaginaria queda como sigue

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}\right) + i\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}\right) \tag{1.17}$$

Se recomienda aprenderse el procedimiento para convertir la división en una multiplicación, más que aprenderse el resultado dado por (1.17).

Ejemplo 1.9. Realizar las siguientes operaciones con los números complejos dados en forma rectangular $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 + 2i$:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) z_1 / z_2

Solución:

a) $z_1 + z_2 = (1+i)+(-1+2i)$, agrupando términos semejantes:

$z_1 + z_2 = 1+(-1)+(1+2)i = 0+3i = 3i$

b) $z_1 - z_2 = (1+i)-(-1+2i)$, agrupando términos semejantes:

$z_1 - z_2 = 1-(-1)+(1-2)i = 2-i$

c) $z_1 \cdot z_2 = (1+i)(-1+2i)$, multiplicando término por término:

$z_1 \cdot z_2 = (1)(-1)+(1)(2i)+(i)(-1)+i(2i)$, simplificando

$= (-1)+(2i)+(-i)+(2i^2)$, recordando que = $i^2 = -1$ y agrupando términos semejantes

$= -3+i$

d) $z_1 / z_2 = \dfrac{1+i}{-1+2i}$, multiplicando numerador y denominador por el conjugado de $-1+2i$:

$= \dfrac{1+i}{-1+2i}\cdot\dfrac{-1-2i}{-1-2i} = \dfrac{(1+i)(-1-2i)}{1^2+2^2}$, realizando la multiplicación en el numerador:

$= \dfrac{(-1+2)+(-i-2i)}{5} = \dfrac{1-3i}{5}$, separando partes real e imaginaria:

$= \dfrac{1}{5}-\dfrac{3}{5}i$

Ejemplo 1.10. Realizar las siguientes operaciones con los números complejos dados en forma polar $z_1 = \sqrt{2}\underline{|45^{\circ}}$, $z_2 = 1\underline{|30^{\circ}}$:

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) z_1 / z_2

Solución: La multiplicación y la división se realizan fácilmente si los números están en forma polar, sin embargo, para la suma y la resta se requiere que los números estén en su forma rectangular, por esta razón, primeramente los transformamos a su forma rectangular:

$$z_1 = \sqrt{2}\underline{|45^{\circ}} = 1+i, \qquad z_2 = 1\underline{|30^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

a) $z_1 + z_2 = (1+i)+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)$, agrupando términos semejantes:

$z_1 + z_2 = \left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\dfrac{3}{2}\right) \approx 1.866+1.5i$

b) $z_1 - z_2 = (1+i)-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2}\right)$, agrupando términos semejantes:

$z_1 - z_2 = \left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+i\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx 0.134+0.5i$

c) $z_1 \cdot z_2 = \left(\sqrt{2}\underline{|45^{\circ}}\right)\cdot\left(1\underline{|30^{\circ}}\right)$, usando la forma exponencial:

$= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)\cdot\left(e^{i\pi/6}\right) = \sqrt{2}e^{i(\pi/4+\pi/6)} = \sqrt{2}e^{i5\pi/12}$, regresando a la forma polar:

$= \sqrt{2}\underline{|75^{\circ}}$ (es decir, solo se multiplican los módulos y se suman los ángulos).

d) $z_1 / z_2 = \dfrac{\sqrt{2}\underline{|45^\circ}}{1\underline{|30^\circ}}$, usando la forma exponencial:

$= \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/6}} = \sqrt{2}e^{i(\pi/4-\pi/6)} = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$, regresando a la forma polar:

$= \sqrt{2}\underline{|15^\circ}$ (es decir, solo se dividen los módulos y se restan los ángulos).

Ejemplo 1.11. Realizar las siguientes operaciones con los números complejos dados en diversas formas $z_1 = \sqrt{2}\underline{|45^\circ}$, $z_2 = -1+i$, pero expresar el resultado en forma rectangular.

a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) z_1 / z_2

Solución: Primero convertimos los números a la forma faltante:

$z_1 = \sqrt{2}\underline{|45^\circ}$ en forma rectangular es $z_1 = 1+i$,

$z_2 = -1+i$ en forma polar es $z_2 = \sqrt{2}\underline{|135^\circ}$

y usamos la forma más conveniente de acuerdo a la operación a realizar:

a) $z_1 + z_2 = (1+i)+(-1+i) = 2i$

b) $z_1 - z_2 = (1+i)-(-1+i) = 2$

c) $z_1 \cdot z_2 = \left(\sqrt{2}\underline{|45^\circ}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\underline{|135^\circ}\right) = 2\underline{|180^\circ} = -2$

d) $z_1 / z_2 = \dfrac{\sqrt{2}\underline{|45^\circ}}{\sqrt{2}\underline{|135^\circ}} = 1\underline{|-90^\circ} = -i$

El módulo de un número complejo y sus propiedades.

Se llama **módulo** de un complejo $z = x+iy$, o también magnitud o valor absoluto del complejo, al número real positivo, designado por $|\mathbf{z}|$, dado por

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1.18}$$

Es decir, el módulo de z es la magnitud del vector correspondiente a $z = x+iy$, o bien, la distancia del punto (x, y) al origen del plano complejo.

Propiedades del módulo de un número complejo

a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) si $z \in \mathbb{R}$, $|z|$ es el valor absoluto del número real z.

c) $|\overline{z}| = |z|$

d) $|z|^2 = z\cdot\overline{z}$

e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ | En efecto: $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1\cdot z_2)\overline{(z_1\cdot z_2)} = (z_1\cdot z_2)(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}) =$

$= (z_1\cdot\overline{z_1})(z_2\cdot\overline{z_2}) = |z_1|^2\cdot|z_2|^2 \Rightarrow |z_1\cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

f) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$ | En efecto: Sea $\frac{z_1}{z_2} = z \quad (z_2 \neq 0)$. Entonces

$z_1 = z \cdot z_2 \Rightarrow |z_1| = |z||z_2| \Rightarrow |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

g) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

Análogamente: $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$

Por lo tanto: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

Algunas desigualdades importantes que involucran el módulo de un número complejo

a) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

b) Desigualdad triangular: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

En efecto: $\left|\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})\right| \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||\overline{z_2}| = |z_1||z_2|$

Luego $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$

Por tanto: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, (generalizable a n sumandos)

c) Análogamente: $|z_1 - z_2| \geq \left||z_1| - |z_2|\right|$

d) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

e) Desigualdad de Cauchy: $\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) \quad a_i, b_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, \ldots, n$

1.1.3.- Potencias y Raíces de Números Complejos.

Elevación a potencia entera. Se define la n-ésima potencia de z como la multiplicación repetida por sí misma n veces, es decir , para n positivo:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ veces} \tag{1.19}$$

Además,

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} \quad \text{y} \quad z^0 = 1 \tag{1.20}$$

De la definición y propiedades de la multiplicación de números complejos, se deduce que la elevación a potencia entera de exponente natural, cumple las mismas leyes de exponentes que en el caso de los números reales:

$$z^n z^m = z^{n+m} \; ; \; \frac{z^n}{z^m} = z^{n-m} \quad (n > m) \; ; \; \left(z^n\right)^m = z^{nm} \; ; \; z_1^n z_2^n = (z_1 z_2)^n \; ; \; \frac{z_1^n}{z_2^n} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \quad (z_2 \neq 0)$$

Además, si expresamos el número complejo z en su forma exponencial

$$z^n = r^n e^{in\theta} \tag{1.21}$$

Y usando la Fórmula de Euler (1.5), se obtiene

$$z^n = r^n \left(\cos(n\theta) + i\, sen(n\theta)\right) \tag{1.22}$$

Haciendo $r=1$, se obtiene la fórmula de De Moivre; que proporciona un procedimiento sencillo para expresar $\cos(n\theta)$, $sen(n\theta)$ en términos de $\cos\theta$, $sen\theta$:

$$\left(\cos\theta + i\, sen\theta\right)^n = \left(\cos(n\theta) + i\, sen(n\theta)\right) \tag{1.23}$$

Raíces de un número complejo. Se llama raíz n-ésima de z (donde n $\in \mathbb{N}$), a todo complejo w tal que $w^n = z$ y se denota

$$z^{\frac{1}{n}} = w \tag{1.24}$$

A continuación se demuestra la siguiente propiedad: ***" Todo número complejo $\mathbf{z \neq 0}$, posee n raíces n-ésimas distintas que denotaremos w_k , todas ellas tienen el mismo módulo $\sqrt[n]{r}$ y sus respectivos argumentos son $\theta_k = \frac{A\operatorname{rg} z}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, ..., n-1$ ".***

En efecto, consideremos la forma exponencial del número complejo $z = re^{i\theta}$ y de sus raíces $w = \rho e^{i\varphi}$, como $w^n = z$, de la fórmula de Euler se obtiene

$$w^n = \rho^n \left(\cos(n\varphi) + isen(n\varphi)\right) = \; z = r\left(\cos\theta + isen\theta\right) \tag{1.25}$$

Pero de (1.7)

$$\theta = \arg(z) = \Theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$$

Sustituyendo en (1.25) se obtiene

$$\rho^n \left(\cos(n\varphi) + isen(n\varphi)\right) = r\left(\cos(\Theta + 2\pi k) + isen(\Theta + 2\pi k)\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \tag{1.26}$$

Para que la igualdad anterior se cumpla es suficiente con que se cumpla lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\rho^n = r, \\ &n\varphi = \Theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \end{aligned}$$

Despejando

$$\begin{aligned} &\rho = \sqrt[n]{r}, \\ &\varphi = \frac{\Theta + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n-1 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Obsérvese que en la expresión anterior no se consideran todos los posibles valores de k, ya que a partir del n-ésimo valor, el resultado de la división $\varphi = \frac{\Theta + 2\pi k}{n}$ difiere de los resultados previos en un múltiplo de 2π y por lo tanto representa la misma raíz.

- En resumen, $z^{1/n}$ tiene n resultados que son:

$$z^{1/n} = w_k = \sqrt[n]{r}\left|\frac{\Theta + 2k\pi}{n}\right., \; k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (1.28)$$

O bien,

$$z^{1/n} = w_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\Theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\Theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \; k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (1.29)$$

Donde $r = |z|$ y $\Theta = Arg(z)$.

Si representamos geométricamente las n raíces n-ésimas de z son los vértices de un polígono regular de n lados, inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$ y uno de cuyos vértices es el punto $w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\frac{\Theta}{n} + isen\frac{\Theta}{n}\right]$, al cual se denomina la **raíz principal** de z. En la figura 1.6 se representa un número complejo z y sus n raíces n-ésimas.

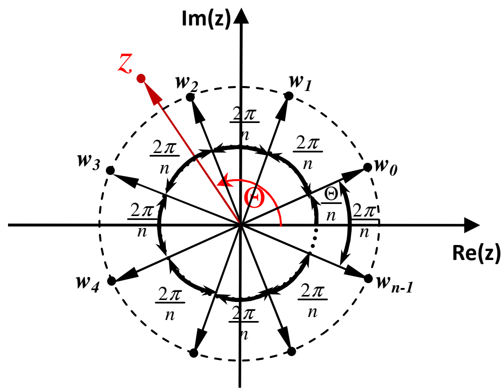


Figura 1.6.- Un número complejo z y sus n raíces n-ésimas

Ejemplo 1.12. Raíces de la unidad. En particular si $z = 1$, sus n raíces ω_k son:

$$\omega_k = 1^{1/n} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\,sen\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (1.30)$$

Si llamamos $\omega = \omega_1 = \cos(\frac{2\pi}{n}) + isen(\frac{2\pi}{n})$, en este caso, se cumple que $\omega_k = \omega^k$, entonces las n raíces de la unidad son $1,\ \omega,\ \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$. Estas raíces se representan en la figura 1.7 para el caso n=8

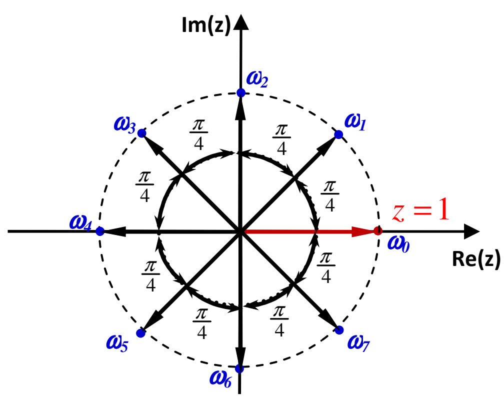


Figura 1.7.- Las 8 raíces octavas de la unidad

Una propiedad interesante que se deduce del ejemplo anterior es la siguiente: Como la multiplicación de un complejo z por ω^k equivale a incrementar el argumento de z en $\frac{2\pi k}{n}$ resulta que:

- Si u_1 es cualquier raíz n-ésima de z, las n raíces de z serán

$$u_1,\ u_1\omega,\ u_1\omega^2, \ldots, u_1\omega^{n-1} \tag{1.31}$$

, donde $\omega = 1\underline{\left|\frac{2\pi}{n}\right.}$

Ejemplo 1.13. Obtener las 3 raíces cúbicas de $z = 1 + i$ y representarlas en forma polar y en forma rectangular, también representarlas en la forma (1.31) y en forma gráfica.

Solución: Primeramente expresamos el número en su forma polar: $z = 1 + i = \sqrt{2}\underline{|\pi/4}$, es decir, $r = \sqrt{2}$, $\Theta = \pi/4$. Ahora aplicando (1.28) con n=3, se obtiene

Para k=0: $z^{1/3} = w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\underline{\left|\frac{(\pi/4)}{3}\right.} = \sqrt[6]{2}\underline{\left|\frac{\pi}{12}\right.} \approx 1.1225\underline{|15^{\circ}} \approx 1.0842 + 0.1905\,i$

Para k=1: $z^{1/3} = w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\underline{\left|\frac{(\pi/4+2\pi)}{3}\right.} = \sqrt[6]{2}\underline{\left|\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right.} \approx 1.1225\underline{|135^{\circ}} \approx -0.7937 + 0.7937i$

Para k=2: $z^{1/3} = w_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\underline{\left|\frac{(\pi/4+4\pi)}{3}\right.} = \sqrt[6]{2}\underline{\left|\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right.} \approx 1.1225\underline{|255^{\circ}} \approx -0.2905 - 1.0842i$

Que en forma gráfica se representan en la siguiente figura

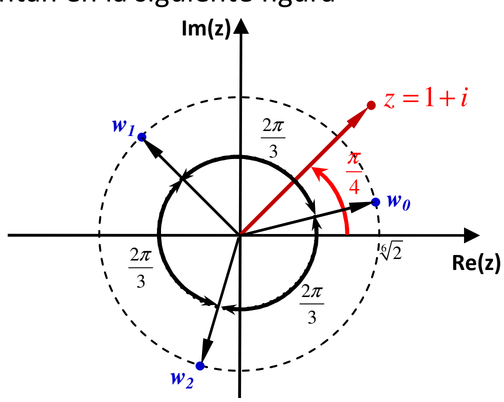


Figura 1.8.- Las tres raíces cúbicas de $z = 1 + i$

Usando la expresión (1.31), con $u_1 = w_0 = \sqrt[6]{2}\underline{\left|\frac{\pi}{12}\right.}$, las tres raíces son:

$$u_1,\ u_1\omega,\ u_1\omega^2 = \sqrt[6]{2}\underline{\left|\frac{\pi}{12}\right.},\ \sqrt[6]{2}\underline{\left|\frac{\pi}{12}\right.}\,\omega,\ \sqrt[6]{2}\underline{\left|\frac{\pi}{12}\right.}\,\omega^2$$

Donde $\omega = 1\underline{\left|\frac{2\pi}{3}\right.}$

1.2.- Desigualdades y regiones en el plano complejo.

En el conjunto de los número reales ($\mathbb{R}$) existe un **orden**, es decir, dados dos número reales x, y, siempre podemos saber si se cumple o no se cumple la desigualdad $x < y$, en otras palabras, en la recta de los números reales siempre sabemos cuál de los dos números x, y está a la **izquierda** del otro, ver figura 1.9.

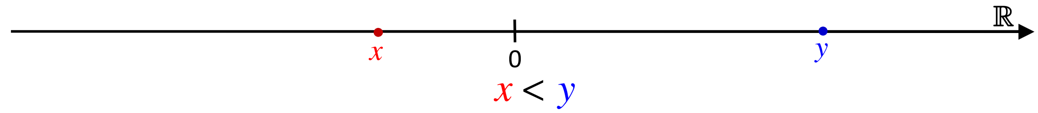


Figura 1.9.- Orden en la recta de los números reales

Por esta razón se dice que el conjunto de los números reales es un con junto ordenado.
A diferencia de $\mathbb{R}$, el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$) no está bien ordenado, por esta razón la desigualdad $z_1 < z_2$ **no** tiene sentido si z_1 o z_2 son números complejos.

Es decir, las desigualdades solo tienen sentido entre números reales, los cuales sin embargo, pueden estar especificados en términos expresiones que involucran números complejos.

Así como las desigualdades que involucran números reales conocidos y desconocidos, denotan **intervalos** o subconjuntos de la recta real, las desigualdades que involucran números complejos desconocidos y reales conocidos, representan **regiones** del plano complejo.

Ejemplo 1.14: La desigualdad $-1 < x < 2,\ x \in \mathbb{R}$ representa la región (intervalo) mostrada en la figura 1.10

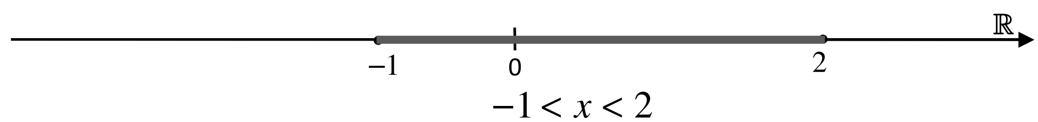


Figura 1.10.- Desigualdad $-1 < x < 2,\ x \in \mathbb{R}$ y su región correspondiente

Ejemplo 1.15: La desigualdad $-1 < z < 2,\ z \in \mathbb{C}$ no tiene sentido, pero por ejemplo, la desigualdad $-1 < \mathrm{Re}(z) < 2,\ z \in \mathbb{C}$ si lo tiene y representa la franja vertical infinita delimitada por las rectas verticales $\mathrm{Re}(z) = -1$ y $\mathrm{Re}(z) = 2$ mostrada en la figura 1.11

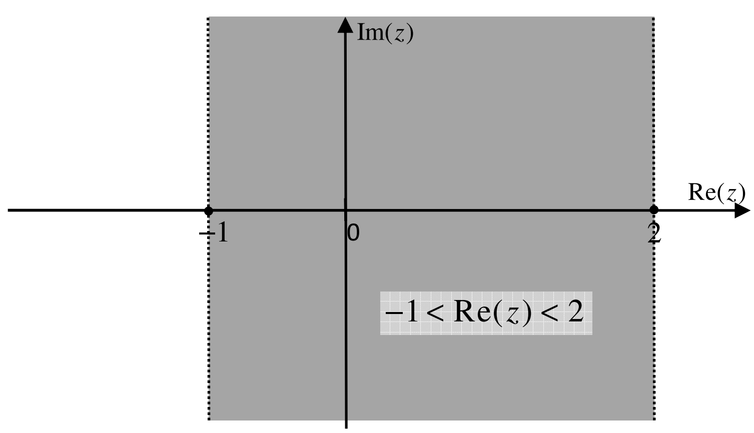


Figura 1.11.- Desigualdad $-1 < \mathrm{Re}(z) < 2,\ z \in \mathbb{C}$ y su región correspondiente

Ejemplo 1.15: En forma similar, la desigualdad $-1<\text{Im}(z)<2,\ z\in\mathbb{C}$ representa la franja horizontal infinita delimitada por las rectas horizontales $\text{Im}(z)=-1$ e $\text{Im}(z)=2$ mostrada en la figura 1.12

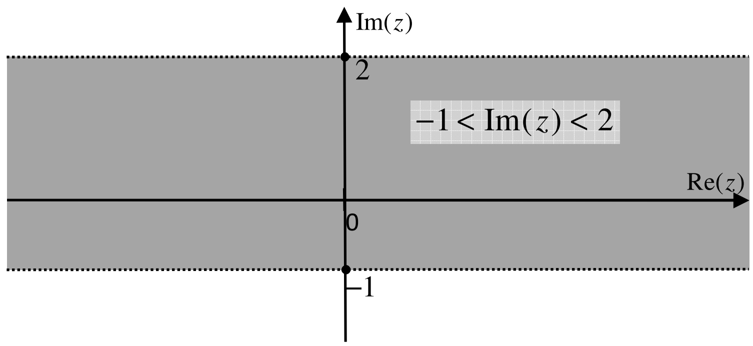


Figura 1.12.- Desigualdad $-1<\text{Im}(z)<2,\ z\in\mathbb{C}$ y su región correspondiente

Como puede verse, las igualdades que involucran números complejos desconocidos y reales conocidos también pueden representar regiones en el plano complejo

Ejemplo 1.16. De acuerdo a los ejemplos anteriores:

$\text{Re}(z)=-1$ y $\text{Re}(z)=2$ son rectas verticales
$\text{Im}(z)=-1$ e $\text{Im}(z)=2$ son rectas horizontales

Ejemplo 1.17. Una región de especial importancia es la región dada por

$$|z|=r \tag{1.32}$$

Donde r es un número real positivo.

La expresión (1.32) representa el conjunto de puntos z del plano complejo que están a una distancia dada r del origen, es decir, es un círculo de radio r con centro en el origen.

Ejemplo 1.18. En forma similar, la región

$$|z-z_0|=r \tag{1.33}$$

Donde z_0 es un número complejo conocido y $r>0$, representa los puntos z del plano complejo, tales que el vector $z-z_0$ tiene una magnitud **igual a** una constante de valor r, es decir, representa un círculo de radio r con centro en el punto z_0. Ver figura 1.13.

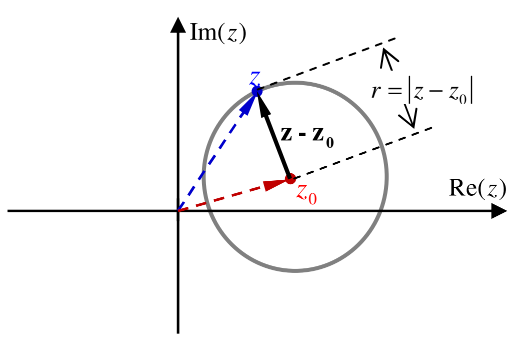


Figura 1.13.- Igualdad $|z-z_0|=r$ y su región correspondiente (círculo)

Ejemplo 1.19. En forma similar, si en lugar de una igualdad, escribimos una desigualdad, por ejemplo, la región

$$|z - z_0| < r \tag{1.34}$$

Donde z_0 es un número complejo conocido y $r > 0$, representa los puntos z del plano complejo, tales que el vector $z - z_0$ tiene una magnitud **menor que** una constante de valor r, es decir, representa **el interior de** un círculo de radio r con centro en el punto z_0.

A esta región suele llamársele **disco** de radio r con centro en z_0. Ver figura 1.14.

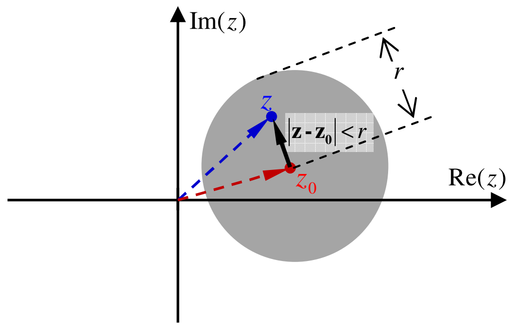


Figura 1.14.- Desigualdad $|z - z_0| < r$ y su región correspondiente (disco)

- **Conjuntos abiertos y cerrados**. Para definir cuando un conjunto es abierto o cerrado, debemos hacer notar primeramente que un conjunto o región en el plano complejo puede contener por dos tipos de puntos:
  - **Punto interior**: Es un punto del conjunto que está rodeado solamente de puntos pertenecientes al mismo conjunto.
  - **Punto frontera**: Es un punto que puede pertenecer o no al conjunto y que está rodeado tanto de puntos del conjunto como de puntos que no pertenecen al conjunto
- Un conjunto o región en el plano complejo se dice que es **abierto** si está formado solamente de puntos interiores.
- Un conjunto o región en el plano complejo se dice que es **cerrado** si es el complemento de un conjunto abierto, o bien, si contiene todos sus puntos frontera.
- El conjunto de todos los puntos frontera de un conjunto se denomina simplemente la **frontera** del conjunto.

Ejemplo 1.20. Usando las definiciones anteriores, la única diferencia entre el conjunto dado por la desigualdad

$$|z - z_0| < r \tag{1.35}$$

Con el conjunto dado por la desigualdad

$$|z - z_0| \le r \tag{1.36}$$

Es que el primero es un disco **abierto** y el segundo es un disco **cerrado**, es decir, el segundo disco sí contiene a su **frontera** que es el círculo $|z - z_0| = r$ y el primero no la contiene.

Ejemplo 1.21. La doble desigualdad siguiente

$$r_0 < |z - z_0| < r_1 \quad (1.37)$$

Donde z_0 es un número complejo conocido y además $r_1 > r_0 > 0$, representa los puntos z del plano complejo, tales que el vector $z - z_0$ tiene una magnitud **mayor que** r_0, pero **menor que** r_1, es decir, una magnitud de **valor entre** r_0 y r_1.

En otras palabras, es decir, representa el interior de una **región anular** delimitada por el círculo de radio menor r_0 y el círculo de radio mayor r_1 con centro en el punto z_0.

A esta región suele llamársele **anillo** de radio menor r_0 y radio mayor r_1 con centro en z_0. Ver figura 1.15.

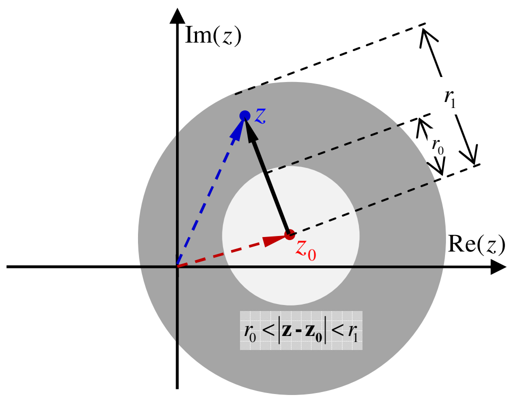


Figura 1.15.- Desigualdad $r_0 < |z - z_0| < r_1$ y su región correspondiente (región anular)

- Al conjunto dado por la desigualdad $|z - z_0| < r$ se le llama **Bola abierta** de radio r con centro en z_0 o también **Vecindad abierta** del punto z_0, de radio r.
- Al conjunto dado por la desigualdad $|z - z_0| \leq r$ se le llama **Bola cerrada** de radio r con centro en z_0 o también **Vecindad cerrada** del punto z_0, de radio r.
- Un conjunto D se dice que es **acotado** si existe un número finito positivo r, tal que D se puede encerrar completamente por una bola abierta de radio r, de lo contrario se dice que D es no acotado.

  - Todo conjunto **no acotado** es forzosamente **abierto**.

Ejemplo 1.22. Los conjuntos de los ejemplos del 1.16 al 1.21 se clasifican a continuación:

- Las rectas horizontales y verticales del ejemplo 1.16 son conjuntos no acotados, por lo tanto son abiertos.
- El círculo del ejemplo 1.17 es un conjunto acotado y es cerrado ya que todos los puntos que contiene son puntos frontera.
- El disco del ejemplo 1.18 es acotado pero abierto, ya que no contiene su frontera.
- El disco del ejemplo 1.19 es acotado y cerrado, ya que contiene toda su frontera.

- El anillo del ejemplo 1.21 es acotado pero abierto.

1.3.- Funciones de una variable compleja

1.3.1.- Repaso de conceptos básicos de funciones

- Una **función** o **aplicación** es una **relación** que se establece entre los elementos de dos conjuntos A, B, de manera que a cada valor del primer conjunto (A) le corresponde solamente un valor del segundo conjunto (B).

Ejemplo 1.23. Dados dos conjuntos de números $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ se pueden establecer muchas relaciones entre los elementos de los conjuntos, pero no todas ellas serán funciones, por ejemplo, la relación r mostrada en la figura 1.16a <u>no</u> es una función, pero la relación f mostrada en la figura 1.16b sí lo es.

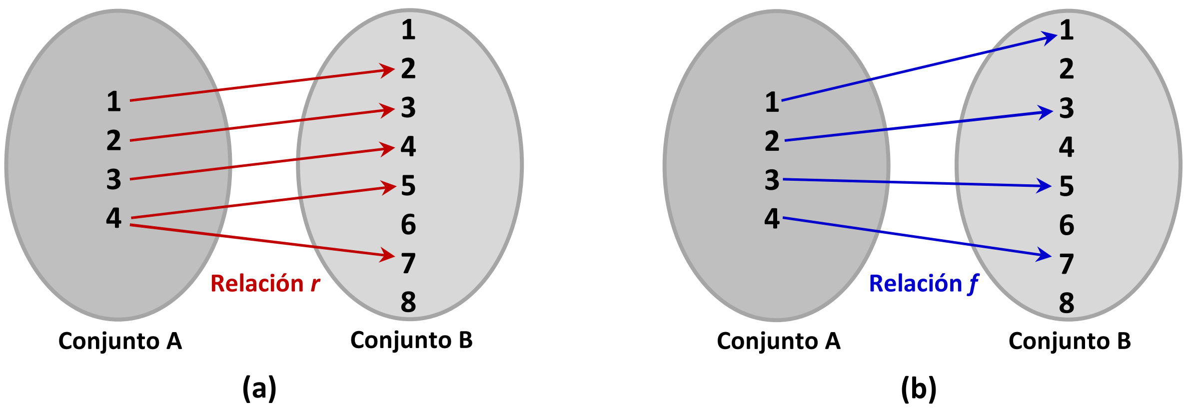


Figura 1.16.- Dos ejemplos de relaciones establecidas entre dos conjuntos A y B

- **Notación**: Una relación o función f del conjunto A al conjunto B se denota simbólicamente $f:A\rightarrow B$ y se puede representar detalladamente haciendo una lista de cómo se relaciona cada elemento y del segundo conjunto (B) con el elemento x del primer conjunto (A) como sigue:

$$y=f(x) \tag{1.38}$$

  Expresión que se deberá leer como: "el elemento y está en la relación o función f con el elemento x"

- En la expresión (1.38) también se acostumbra decir que el elemento $y\in B$ es la **<u>imagen</u>** del elemento $x\in A$ bajo la función f, o bien, que $x\in A$ es la **<u>preimagen</u>** de $y\in B$ bajo la función f.

- A una relación que asigna múltiples imágenes a un solo elemento del primer conjunto en ocasiones se le llama **<u>función multivaluada</u>**.

☞ Otra manera de ver la notación (1.38) muy usual en física y en ingeniería es verla como la expresión de una relación de **dependencia**. En este caso x e y se consideran **variables** y se dice que y depende de x mediante la función f. Por lo tanto y es la **variable dependiente**, mientras que x es la **variable dependiente** .

Ejemplo 1.24. Usando la notación anterior, la relación r mostrada en la figura 1.16a se puede representar por la siguiente lista:

$$2 = r(1),\; 3 = r(2),\; 4 = r(3),\; 5 = r(4),\; 7 = r(4) \tag{1.39}$$

Obsérvese que esta relación asigna múltiples (dos) imágenes al elemento $4 \in A$, es decir, $r(4) = 5, 7$ por esta razón **no** es una función, pero puede considerarse una función multivaluada.

Y la función f de la figura 1.16b se puede representar por la siguiente lista:

$$1 = f(1),\; 3 = f(2),\; 5 = f(3),\; 7 = f(4) \tag{1.40}$$

Obsérvese que esta lista se puede abreviar enunciando simplemente la regla algebraica para formarla:

$$y = f(x) = 2x - 1 \tag{1.41}$$

La cual se aplica a cada elemento del conjunto A para obtener su imagen en el conjunto B.

Es de esperarse que si los conjuntos A, B son infinitos (como los reales o los complejos) , en lugar de hacer una lista como en (1.39) o en (1.40), se preferirá la expresión algebraica como en (1.41).

⚐ En el caso de conjuntos infinitos, una forma equivalente a la lista de imágenes con su preimagen es el conjunto de pares ordenados (preimagen, imagen), es decir, $\left(x, f(x)\right)$ que pueden representarse en un plano y conforman la **gráfica** de la función f .

Ejemplo 1.25. Si en el ejemplo dado por la figura 1.16b y por la expresión (1.41) los conjuntos A, B se reemplazan por el conjunto de los números reales, entonces $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y la gráfica de la función $f(x) = 2x - 1$ se muestra en la figura 1.17.

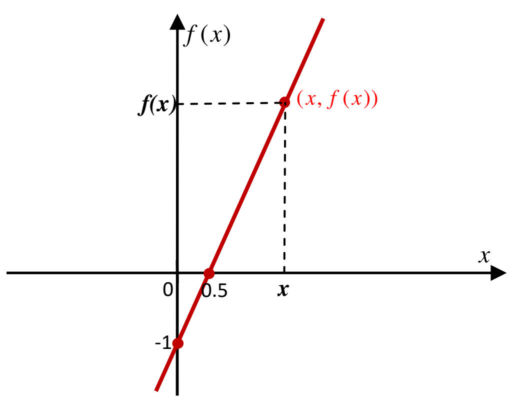


Figura 1.17.- Ejemplo de función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y su gráfica (recta inclinada)

1.3.2.- Funciones en el caso complejo.

Si en una función $f : A \to B$ consideramos que los conjuntos A, B pueden ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ entonces se tienen cuatro posibilidades:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Función real de variable real
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: Función real de variable compleja
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$: Función compleja de variable real
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: Función compleja de variable compleja.

☞ Dado que en realidad $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (todo número real es también complejo) el cuarto caso de la lista anterior incluye los primeros tres casos. Sin embargo en ocasiones se consideran los cuatro casos para hacer énfasis en el tipo de valores que se espera que tomen las variables consideradas y los resultados de las operaciones realizadas.

⚐ Una **función compleja** f **de una variable compleja** z en general es una función de un conjunto $D \subset \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es decir, $f : D \to \mathbb{C}$ y se denota por $w = f(z)$. Al conjunto D se le llama el **Dominio** de la función.

Es decir, f es la función que a cada número complejo $z \in D$, le asocia un único número complejo w que se puede calcular con la expresión algebraica $w = f(z)$

⚐ Si a cada valor de z en D corresponde más de un valor de w, **no** se trata de una función, pero suele decirse que w es una **función multivaluada o multiforme** de z (por ejemplo la función $w = z^{1/n}$, que a cada número complejo z le hace corresponder sus n raíces n-ésimas).

⚐ Una función multivaluada puede considerarse como una colección de funciones **monovaluadas**. Cada miembro de la colección se llama una ***rama*** de la función. Se suele considerar un miembro particular como ***rama principal*** de la función multiforme y al valor de la función correspondiente a esa rama se le llama ***valor principal***.

⚐ El **conjunto imagen, recorrido o rango de una función** es el conjunto de valores que toma la función:

$$R(f) = \{ w \in \mathbb{C} \mid w = f(z) \text{ para algún } z \in D \} \tag{1.42}$$

1.3.3.- Funciones componentes.

Una función compleja de variable compleja se puede expresar siempre en términos de dos funciones de reales de variable real llamadas sus **funciones componentes**.

Así, si consideramos la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $w = f(z)$, como tanto w como z son variables complejas, se pueden expresar en forma rectangular como sigue

$$w = u + iv, \ z = x + iy$$

Pero como w depende de z, entonces u, v dependerán de $x,\ y$, es decir,

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y) \tag{1.43}$$

En otras palabras, la función compleja de una sola variable compleja $w = f(z)$ se puede expresar en términos de dos funciones reales de dos variables reales $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$, estas son las funciones componentes de $w = f(z)$.

Ejemplo 1.26. La función $f(z) = z^2$, puede expresarse como $f(z) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$, por lo tanto sus funciones componentes son: $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

A la inversa, dadas dos funciones reales $u(x,y)$, $v(x,y)$ de las variables reales x, y, se puede construir siempre la función $w = u(x,y) + iv(x,y)$, la cual es una función de $z = x+iy$, recordando que:

$$x = \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \tag{1.44}$$

y que

$$y = \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \tag{1.45}$$

Ejemplo 1.27. En el caso del ejemplo anterior, donde $w = (x^2 - y^2) + 2xyi$, sustituyendo las expresiones (1.44), (1.45) se obtiene:

$$w = \frac{1}{4}(z+\overline{z})^2 - \frac{1}{4i^2}(z-\overline{z})^2 + 2\frac{z+\overline{z}}{2}\frac{(z-\overline{z})}{2i}i$$

Simplificando se obtiene

$$w = z^2$$

Ejemplo 1.28. Tomando ahora la función $w = (x^2 + y^2) + 2xyi$, se obtiene:

$$w = \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 + 2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)i$$

Simplificando

$$w = \frac{1}{2}(z^2 - \overline{z}^{\,2} + 2z\overline{z})$$

que es función de z en la que también interviene $\overline{z}$.

☞ Más adelante se verá una condición suficiente para que la función $u(x,y) + iv(x,y)$ dependa únicamente de z, sin intervención de $\overline{z}$, como ocurrió en el ejemplo 1.27 y no ocurre en los ejemplos 1.28 y 1.29.

Ejemplo 1.29. Si consideramos la función $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$, se obtienen sus funciones componentes al sustituir $z = x+iy$, entonces $f(z) = x^2 + y^2$, es decir, $u(x,y) = x^2 + y^2$, $v(x,y) = 0$, en otras palabras, el resultado es puramente real, por lo tanto f es un ejemplo de **función real de variable compleja**.

☞ Si la variable z se representa en coordenadas polares $z = r\underline{|\theta}$, entonces, las funciones componentes quedan de la forma : $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$

1.3.4. Representación gráfica. La función de variable compleja como transformación o mapeo.

No puede hacerse una representación gráfica de la función $w = f(z)$ tan conveniente como en el caso de funciones reales de una variable real $y = f(x)$, que se representan mediante curvas en el plano, o como en el caso de funciones reales de dos variables reales $z = f(x, y)$, que se representan mediante superficies en el espacio tridimensional.

Para el caso de funciones complejas $w = f(z)$, es decir $u + iv = f(x + iy)$, se necesitaría un espacio de dimensión cuatro ya que intervienen cuatro variables (dos independientes x, y y dos dependientes u, v).

Una manera de lograr una representación gráfica es mediante dos planos complejos; el plano z (variable dependiente) de ejes x e y, y el plano w (variable independiente) de ejes u y v. Se trazarán algunos puntos (arbitrarios) en el plano complejo z y se obtendrán los puntos correspondientes en el plano w.

$$z = x + iy \xrightarrow{f(z)} w = u + iv$$

⚐ Toda función f de variable compleja define una **transformación** o **mapeo** entre el plano z y el plano w como sigue: A cada punto $P(x, y)$ en el plano z, en el dominio de definición de la función f le corresponderá el punto $P'(u,v)$ en el plano w. También se dice que el punto $P(x, y)$ se ***transforma*** o se **mapea** en el punto $P'(u,v)$ mediante la transformación o mapeo f. Entonces P' es la ***imagen*** de P bajo la transformación f.

Se puede obtener información más descriptiva sobre el comportamiento de f, estudiando cómo se transforman algunas curvas o regiones seleccionadas del plano z, en lugar de representar simplemente la transformación de puntos individuales.

Ejemplo 1.30. Graficar en el plano w la transformación del rectángulo marcado en el plano z (figura 1.18). Marcar en el plano w los puntos: A’, B’, C’ y D’ correspondientes a la transformación de los puntos A, B, C y D respectivamente, mediante la función compleja $w = f(z) = z^2$.

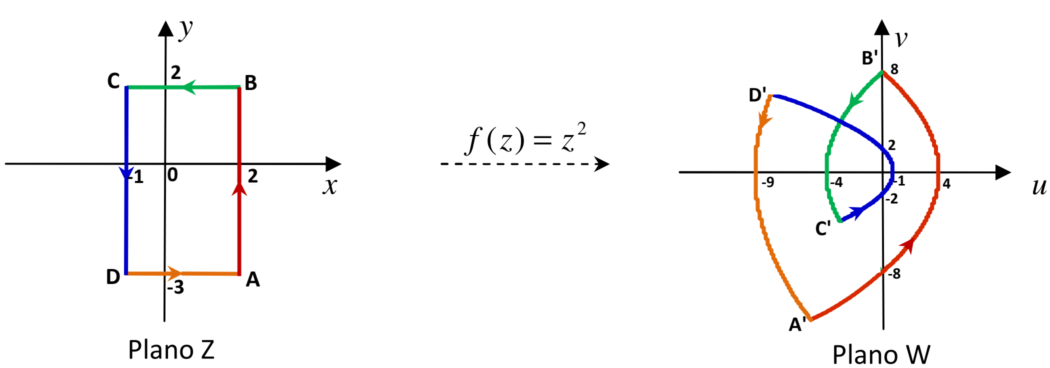


Figura 1.18.- Mapeo de un rectángulo del plano Z al plano W mediante la función $w = f(z) = z^2$

Solución: Las funciones componentes de $f(z) = z^2$ son

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \tag{1.46}$$

$$v(x, y) = 2xy \tag{1.47}$$

A partir de estas dos ecuaciones podemos obtener la ecuación que describe el comportamiento de v en términos de w de dos maneras: eliminando x o eliminando y :

Para eliminar x se despeja en una ecuación y se sustituye en la otra, obteniéndose

$$u = x^2 - \frac{v^2}{4x^2} \tag{1.48}$$

La cual (si x es constante) es la ecuación de una parábola simétrica respecto al eje horizontal u con vértice en $u = x^2$ que se abre hacia la izquierda (conforme v crece, u se va haciendo más negativo).

Para eliminar y se despeja en una ecuación y se sustituye en la otra, obteniéndose

$$u = \frac{v^2}{4y^2} - y^2 \tag{1.49}$$

La cual (si y es constante) es la ecuación de una parábola simétrica respecto al eje horizontal u con vértice en $u = -y^2$ que se abre hacia la derecha (conforme v crece, u se va haciendo más positivo).

El rectángulo dado en el plano Z consta de líneas verticales y horizontales. Al moverse un punto del plano Z por las líneas verticales x permanece constante y podemos aplicar la ecuación (1.48), mientras que al moverse un punto del plano Z por las líneas horizontales y permanece constante y entonces podemos aplicar la ecuación (1.49).

Segmento AB: En este segmento $x = 2$, obteniéndose la parábola $u = 4 - \frac{v^2}{16}$. Esta parábola solo se recorre para valores de y en el intervalo $-3 \le y \le 2$, es decir, de acuerdo a la ecuación (1.47), v varía el intervalo $-12 \le v \le 8$, y por lo tanto u varía en el intervalo $-5 \le u \le 4$, obteniéndose el segmento de parábola en color rojo mostrada en la figura 1.18.

Segmento CD: En este segmento $x = -1$, obteniéndose la parábola $u = 1 - \frac{v^2}{4}$. Esta parábola se recorre para valores de y variando de 2 a -3, es decir, de acuerdo a la ecuación (1.47), v varía de -4 a 6, y por lo tanto u varía de -3 a -8, obteniéndose el segmento de parábola en color azul mostrada en la figura 1.18.

Segmento BC: En este segmento $y = 2$, obteniéndose la parábola $u = \frac{v^2}{16} - 4$, esta parábola se recorre para valores de x de 2 a -1, es decir, de acuerdo a la ecuación (1.47), v varía de 8 a -4, por lo tanto u varía de 0 a -3, obteniéndose el segmento de parábola en color verde mostrado en la figura 1.18.

Segmento DA: En este segmento $y=-3$, obteniéndose la parábola $u=\frac{v^2}{36}-9$, esta parábola se recorre para valores de x de -1 a 2, es decir, de acuerdo a la ecuación (1.47), v varía de 6 a -12, por lo tanto u varía de -8 a -5, obteniéndose el segmento de parábola en color naranja mostrado en la figura 1.18.

A veces, para usar conceptos geométricos sencillos como traslación, rotación, simetría, etc. se superponen los planos z y w, considerando la transformación entre puntos de un solo plano. Por ejemplo, $w=z+2$ representa una traslación de cada punto z, dos unidades a la derecha, o bien, por ejemplo $w=\overline{z}$, transforma cada punto z en su simétrico respecto al eje real.

1.4.- Límite de una función de variable compleja

Definición. Sea f una función de variable compleja definida en todos los puntos de un entorno de z_0. Se dice que $f(z)$ tiende a w_0 si para todo número $\varepsilon>0$, existe otro número $\delta(\varepsilon)>0$ tal que siempre que $0<|z-z_0|<\delta$ ocurrirá que $|f(z)-w_0|<\varepsilon$

Al número w_0 se le llama límite de la función f cuando z tiende a z_0 y se denota

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0 \tag{1.50}$$

En la figura 1.19 se muestran las vecindades circulares involucradas en la definición del límite, obsérvese que de acuerdo a la definición, dado una vecindad de radio arbitrario ε que encierra a w siempre podremos encontrar una vecindad dentro de la cual se puede mover libremente z sin que w se salga del radio dado.

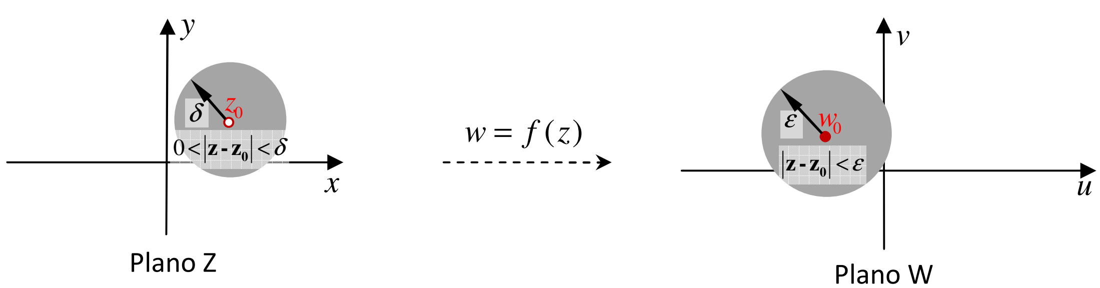


Figura 1.18.- Siempre que z se encuentre en el disco de radio δ, w se encontrará en el disco de radio ε

Si expresamos los números complejos involucrados en la definición en forma rectangular: $z=x+iy$, $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$, $w_0=u_0+iv_0$, la definición anterior equivale a lo siguiente

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]=u_0+iv_0 \tag{1.51}$$

Que corresponde al límite de una función vectorial real de dos variables reales, es decir, de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, todas las propiedades de los límites de tales funciones vectoriales son aplicables al límite de una función compleja de variable compleja.

De ahí que puedan afirmarse las siguientes propiedades que se demuestran en un curso de funciones vectoriales de dos variables.

Propiedades de los límites de funciones de variable compleja

i. Si el límite existe, es único.

ii. Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$, y $\lim_{z \to z_0} g(z) = \omega_0$, entonces $\begin{cases} \lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + \omega_0 \\ \lim_{z \to z_0} \lambda f(z) = \lambda w_0 \\ \lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = w_0 \omega_0 \\ \lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_0}{\omega_0}, \ si \quad \omega_0 \neq 0 \end{cases}$

iii. Sea $\begin{cases} f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \\ z_0 = x_0 + iy_0 \\ w_0 = u_0 + iv_0 \\ \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \end{cases}$ entonces $\begin{cases} \lim_{z \to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = \operatorname{Re} w_0 = u_0 \\ \lim_{z \to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = \operatorname{Im} w_0 = v_0 \\ \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0| \\ \lim_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0} \end{cases}$

iv. Generalizaciones de la definición para límites que involucran al infinito:

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists \delta(M) > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > M$
- $\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) > 0$ tal que $|z| > N \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$
- $\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ \exists N(M) > 0$ tal que $|z| > N \Rightarrow |f(z)| > M$

Ejemplo 1.31. Demostrar que $\lim_{z \to i} (2z + i) = 3i$ encontrando el número $\delta > 0$ correspondiente a un $\varepsilon > 0$ tal que $0 < |z - i| < \delta$ implica que $|(2z + i) - 3i| < \varepsilon$.

Solución:

Suponiendo que $|(2z + i) - 3i| < \varepsilon$, simplificando se obtiene

$$|2z - 2i| < \varepsilon$$

factorizando

$$2|z - i| < \varepsilon$$

es decir,

$$|z - i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pero si $z \neq i$

$$0 < |z - i| < \frac{\varepsilon}{2}$$

por lo tanto, si se elige $\delta = \varepsilon / 2$ se pueden seguir los pasos del último hacia el primero y se garantiza que $\left|(2z+i)-3i\right| < \varepsilon$.

Ejemplo 1.32. Demostrar que el siguiente límite no existe

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} \tag{1.52}$$

Solución.

Si el límite existe, de acuerdo a la propiedad (i) debe ser el mismo independientemente de la dirección por la cual z tienda a cero. A continuación se calcula el límite por dos direcciones distintas:

Si primero se supone que z tiende a cero en forma horizontal, es decir, tomando puros valores reales, es decir, si $z = x+iy$ supondremos que $y=0$, por lo tanto

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x\to 0}\frac{\overline{(x+i0)}}{x+i0} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

Ahora se supone que z tiende a cero en forma vertical, es decir, tomando puros valores imaginarios, o es decir, si $z = x+iy$ supondremos que $x=0$, por lo tanto

$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{y\to 0}\frac{\overline{(0+iy)}}{0+iy} = \lim_{y\to 0}\frac{-iy}{iy} = -1$$

Como el resultado depende de la dirección elegida, el límite no puede existir, pues si existiera el resultado habría sido único.

Ejemplo 1.33. Calcular el límite siguiente

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z} \tag{1.53}$$

Solución 1. Podemos expresar todo en términos de funciones reales de variables reales y usar la propiedad (iii), es decir,

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[u(x,y), v(x,y)\right]$$

donde $u(x,y),\ v(x,y)$ son las funciones componentes de $f(z)=\dfrac{z^2}{z}$, es decir,

$$u(x,y)=\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2},\ \ v(x,y)=\frac{y^3+x^2y}{x^2+y^2}$$

Sustituyendo

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2},\ \frac{y^3+x^2y}{x^2+y^2}\right]$$

$$= \left[\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2},\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{y^3+x^2y}{x^2+y^2}\right]$$

Factorizando

$$= \left[\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{y(y^2+x^2)}{x^2+y^2} \right]$$

$$= \left[\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x, \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} y \right] = [0,0]$$

es decir, $u \to 0$, $v \to 0$, por lo tanto $f(z) \to 0$

Solución 2. Por lo general es menos laborioso trabajar todo con números complejos y usar la propiedad (ii):

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{z} = \lim_{z\to 0} (z) \cdot \left(\frac{z}{z} \right) = \left(\lim_{z\to 0} z \right) \cdot \left(\lim_{z\to 0} \frac{z}{z} \right) = 0 \cdot 1 = 0$$

1.4.1. Continuidad

Definición. Una función de variable compleja $w = f(z)$ se dice que es continua en un punto z_0 si

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \tag{1.54}$$

En forma similar, $w = f(z)$ se dice que es continua en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ si es continua en todo punto de dicho dominio.

De acuerdo a la definición anterior, existen tres formas en las cuales una función $w = f(z)$ puede no ser continua en un punto z_0, entonces se dice que es **discontinua** en z_0 si:

1) Si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ no existe,
2) Si $f(z_0)$ no existe,
3) O si ambos $\lim_{z\to z_0} f(z)$, $f(z_0)$ existen pero son distintos.

Ejemplo 1.34. De acuerdo al ejemplo anterior, la función $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$ es continua en todo punto del plano complejo, excepto en $z = 0$

De las propiedades de los límites se deducen las siguientes propiedades:

Propiedades de las funciones continuas

- Si $f(z)$, $g(z)$ son continuas en z_0, también lo son las funciones $\begin{cases} f(z)+g(z) \\ \lambda f(z) \\ f(z)g(z) \\ \dfrac{f(z)}{g(z)}, \; para \; g(z_0) \neq 0 \end{cases}$
- Si $f(z)$ es continua en z_0, lo son $\overline{f(z)}$ y $|f(z)|$

- Si $f(z)=u+iv$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$, sus funciones componentes $u(x,y)$, $v(x,y)$ lo son en (x_0, y_0)
- La composición de funciones continuas, es continua.

1.5. La derivada de una función de variable compleja

Definición. Sea $w = f(z)$ una función compleja de variable compleja, definida en un entorno del punto z_0. Se dice que $f(z)$ es **derivable** en z_0 si existe el límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (1.55)$$

Si dicho límite existe, recibe el nombre de **derivada *de*** $f(z)$ en z_0.

Notación. Se acostumbra denotar la derivada de $f(z)$ en z_0 de cualquiera de las siguientes maneras: $f'(z_0)$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=z_0}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

Ejemplo 1.35. Usando la definición, calcular la derivada de la función $f(z) = z^2$ en z_0**.**

Solución. Directamente de la definición

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - {z_0}^2}{\Delta z}$$

haciendo las operaciones

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{{z_0}^2 + 2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2 - {z_0}^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z}$$

factorizando

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z}$$

si $\Delta z \neq 0$ se obtiene

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0$$

Obsérvese que el resultado anterior es válido para cualquier punto arbitrario $z_0 \in \mathbb{C}$, es decir, la función $f(z) = z^2$ es derivable en todos los puntos del plano complejo.

Ejemplo 1.36. Usando la definición, encontrar los puntos del plano complejo en donde la función $f(z) = \overline{z}$ es derivable**.**

Solución. De la definición se tiene que

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Como ya se demostró en el ejemplo 1.32, el límite anterior no existe para ningún valor de $z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 1.37. Usando la definición, encontrar los puntos del plano complejo en donde la función $f(z)=|z|^2$ es derivable**.**

Solución. De la definición se obtiene

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z\overline{\Delta z}+\overline{z}\Delta z+\Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$$
$$=\overline{z}+\lim_{\Delta z\to 0}\left(z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$$

La única manera en que este último límite puede existir es que z=0, es decir, la derivada solo existe si z=0 y su valor es:

$$f'(0)=\overline{0}+\lim_{\Delta z\to 0}\left(0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)=0$$

1.6.- Funciones analíticas y puntos singulares.

La existencia de la derivada de una función compleja de variable compleja, tiene consecuencias muy importantes en lo que se refiere a las propiedades de la función. La investigación de estas consecuencias es el tema central de la teoría de funciones de variable compleja.

A continuación introducimos un conjunto de definiciones que nos permitirán distinguir algunos aspectos relacionados con la existencia de la derivada de una función de variable compleja.

- **Función analítica en un conjunto abierto**. Una función de variable compleja $f(z)$ se dice **analítica en un conjunto abierto** $A\subset\mathbb{C}$, si es derivable en todos los puntos de dicho conjunto A. También se dice entonces que $f(z)$ es **regular** u **holomorfa** en A.
  - Para que $f(z)$ sea analítica en un conjunto cerrado C, se requiere que sea analítica en algún conjunto abierto que contenga totalmente a C

- **Función analítica en un punto**. Una función de variable compleja $f(z)$ se dice **analítica en un punto** z_0 si es analítica algún conjunto abierto que contiene a dicho punto z_0.

- **Función entera**. Una función de variable compleja $f(z)$ se dice **entera** si es analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$.

- **Punto singular**. Un punto z_0 se dice **punto singular aislado** o **singularidad aislada** de $f(z)$ si la función no es derivable en z_0, pero sí es analítica en algún entorno de z_0.

Ejemplo 1.38 La función $f(z)=z^2$ es ***entera*** (ver ejemplo 1.35):

Ejemplo 1.39 En forma similar al ejemplo 1.35 se puede verificar que la función polinomial $f(z)=a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+...+a_1 z + a_0$ donde n es un número natural arbitrario y $a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes complejas arbitrarias, es una función ***entera***.

Ejemplo 1.40 La función constante $f(z)=a$, la función identidad $f(z)=z$, y la función potencia $f(z)=z^n$ son casos particulares de la anterior, por lo tanto son enteras. Además $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 1.41 La función $f(z)=\overline{z}$ no es derivable en ningún punto (ver ejemplo 1.36).

Ejemplo 1.42 La función $f(z)=|z|^2$ solo es derivable en $z=0$, (ver ejemplo 1.37).

1.6.1.- Relación entre derivabilidad y continuidad:

🏳 **Teorema:** Si una función de variable compleja $w=f(z)$ es derivable en un punto z_0, entonces es continua en z_0

Demostración: Sea $f(z)$ derivable en z_0, entonces $f'(z_0)$ existe y por lo tanto el siguiente límite

$$\lim_{\Delta z\to 0}\left[f(z_0+\Delta z)-f(z_0)\right]=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\Delta z\right]$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left[\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}\right]\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z$$

Se puede escribir como

$$= f'(z_0)\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{\Delta z\to 0} f(z_0+\Delta z)=f(z_0)$$

Por lo tanto $f(z)$ es continua en z_0.

☞ **Observación 1**: El recíproco no siempre se cumple, es decir, existen funciones que siendo continuas, no son derivables.

Ejemplo 1.43: la función $f(z)=|z|^2$ es continua en todo $\mathbb{C}$ y sin embargo, como se ha visto en el ejemplo 1.37, solo es derivable en $z=0$.

☞ **Observación 2**: Una manera usual de aplicar el teorema anterior es en forma negada, es decir, si una función $f(z)$ **no** es continua en un punto, **no** puede ser derivable en dicho punto.

Ejemplo 1.44 La función $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$ no es continua en los puntos $z=i$, $z=-i$, por lo tanto no será derivable en $z=i$, $z=-i$, se puede demostrar que fuera de estos puntos la función sí es derivable, por lo tanto, estos son puntos singulares aislados de $f(z)$.

Propiedades de las operaciones con funciones analíticas.

i. Si $f(z)$ y $g(z)$ son derivables en z_0, lo son también $f+g$, λf, fg y también f/g si $g(z_0)\neq 0$ y sus derivadas vienen dadas por las mismas reglas de derivación que las funciones reales de variable real.

ii. Análogamente si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en un dominio D, también lo son $f+g$, λf, fg en D y también f/g si $g(z)\neq 0\ \forall z\in D$.

iii. Si $w=f(z)$ es analítica en un dominio D y $g(w)$ lo es un dominio que contiene la imagen de D bajo f, entonces la **función compuesta** $h(z)=g\left[f(z)\right]$ es analítica en D y se cumple la **regla de la cadena**: $h'(z)=g'\left[f(z)\right].f'(z)$, $\forall z\in D$, es decir,

$$\frac{dh}{dz}=\frac{dg}{df}\frac{df}{dz} \tag{1.56}$$

iv. Si $w=f(z)$ es analítica en un dominio D y existe la **función inversa** $z=f^{-1}(w)$ y es analítica en D', su derivada es: $\dfrac{df^{-1}(z)}{dz}=\dfrac{1}{f'(z)}$

Las demostraciones de estas últimas propiedades son formalmente idénticas al caso de funciones reales de variable real, dado que la definición formal de límite y de derivada son idénticas en ambos casos.

1.7.- Condiciones necesarias para la derivabilidad (condiciones de Cauchy-Riemann)

Sea $w=f(z)$ definida en un dominio $D\subset\mathbb{C}$. Si la función se escribe en términos de sus funciones componentes $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.¿Qué condiciones que deben cumplir las funciones componentes $u(x,y)$, $v(x,y)$ para que f sea derivable en un punto $z_0\in D$?. a continuación se obtienen dichas condiciones.

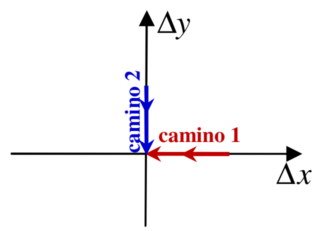
Si se supone que la función $w=f(z)$ es ***derivable*** en el punto $z_0\in D$, es decir, que existe $f'(z_0)$, entonces existe el límite

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{1.57}$$

se puede escribir en términos de las funciones componentes como

$$f'(z_0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{\Delta x+i\Delta y} \tag{1.58}$$

Como el límite anterior existe, no importa por cual camino $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tienda a cero, el resultado será el mismo. A continuación se hará tender a cero Δz de dos caminos distintos, uno horizontal y otro vertical, como se muestra en la figura 1.19



Plano Δz

Figura 1.19.- Dos caminos por los cuales $\Delta z \to 0$

Por el **camino 1**.- Δz se hace tender a cero tomando solamente valores reales, o sea $\Delta y = 0$ y por lo tanto $\Delta z = \Delta x$, entonces, de acuerdo a (1.58)

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

es decir,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

de donde resulta que

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} \qquad (1.59)$$

Por el **camino 2**.- Δz se hace tender a cero tomando solamente valores imaginarios, o sea $\Delta x = 0$ y por lo tanto $\Delta z = i\Delta y$, entonces, de acuerdo a (1.58)

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

es decir,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

simplificando

$$f'(z_0) = -i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

de donde resulta que

$$f'(z_0) = -i \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \qquad (1.60)$$

Por tanto, se han obtenido dos expresiones diferentes (1.59) y (1.60) para la derivada $f'(z_0)$. Igualando partes reales y partes imaginarias por separado de estas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}&=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}\\ \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}&=-\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}\end{aligned} \qquad (1.61)$$

Por lo tanto, si la derivada existe se deben cumplir las ecuaciones (1.61), por lo tanto, las ecuaciones (1.61) son las condiciones **necesarias** para existencia de la derivada $f'(z_0)$.

A las ecuaciones (1.61) se les llama **condiciones de Cauchy-Riemann** y son necesarias pero no suficientes para que $f'(z_0)$ exista.

☞ **Observación 1**: Si una función $f(z)$ cumple las condiciones de Cauchy-Riemann en un punto z_0, no se puede asegurar la existencia de su derivada en dicho punto.

☞ **Observación 2**: Si una función $f(z)$ no cumple las condiciones de Cauchy-Riemann en un punto, si se podrá asegurar la no existencia de su derivada en dicho punto.

Ejemplo 1.45. La función $f(z)=\overline{z}$ no es derivable en ningún punto (ver ejemplo 1.36). Verificar que las condiciones de Cauchy-Riemann no se cumplen en ningún punto.

Solución. Las funciones componentes de $f(z)=\overline{z}$ son: $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$. Calculando las derivadas parciales se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

por lo tanto, no se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en ningún punto, ya que $\frac{\partial u}{\partial x}=1$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-1$ son distintas $\forall (x,y)\in\mathbb{C}$.

Ejemplo 1.46. La función $f(z)=|z|^2$ solo es derivable en el origen, (ver ejemplo 1.37). Verificar en qué puntos se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Solución. Las funciones componentes de $f(z)=|z|^2$ son: $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=0$. Calculando las derivadas parciales se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

por lo tanto, el único punto en el que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann es el origen, es decir $x=0,\ y=0$, por lo tanto, la función $f(z)=|z|^2$ no puede ser derivable en ningún punto, excepto en el origen.

Ejemplo 1.47. La función $f(z)=z^2$ es entera (derivable en todos lados) (ver ejemplo 1.35). Verificar en qué puntos se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Solución. Las funciones componentes de $f(z)=z^2$ son: $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$. Calculando las derivadas parciales se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\,,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y\,,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y$$

por lo tanto, se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en todos los puntos del plano complejo, como era de esperarse.

1.7.1 Condiciones suficientes para derivabilidad

Como ya se aclaró en la sección anterior, si una función $f(z)$ cumple las condiciones de Cauchy-Riemann en un punto z_0, no se puede asegurar la existencia de su derivada en dicho punto, es decir, las condiciones de Cauchy-Riemann son necesarias pero no son suficientes para la garantizar la derivabilidad de la función en un punto.

Lo anterior significa que se pueden agregar condiciones a las de Cauchy-Riemann para lograr la suficiencia y garantizar la derivabilidad de una función en un punto. A continuación se enuncian (sin demostración) dichas condiciones:

Condiciones suficientes para derivabilidad. Sea $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ definida en un dominio $D\subset\mathbb{C}$. Una condición suficiente para que $f(z)$ sea derivable en el punto $z_0=x_0+iy_0\in D$, es que las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ no solo existan, sino que sean continuas en (x_0,y_0) y cumplan en dicho punto las condiciones de Cauchy- Riemann.

Ejemplo 1.48. La función $f(z)=z^2$ tiene las funciones componentes $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$, cuyas derivadas parciales son

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\,,\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y\,,\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y$$

Estas derivadas son funciones continuas en todos los puntos (x,y) del plano, además, las condiciones de Cauchy-Riemann se cumplen también en todos los puntos del plano complejo, por lo tanto la función es derivable en todos lados, (lo cual ya se había comprobado en el problema 1.35).

1.8.- Funciones armónicas.

Definición. Sea $f(x,y)$ una función real de dos variables reales definida en un conjunto abierto D, es decir, $f:D\to\mathbb{R}$, donde $D\subset\mathbb{R}^2$, la función f se le llama armónica en D si tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en D que satisfacen la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \tag{1.62}$$

A la ecuación (1.62) se le llama la **Ecuación de Laplace**.

Las funciones armónicas están íntimamente relacionadas con las funciones componentes de una función de variable compleja analítica, de acuerdo a la siguiente propiedad

Teorema. Si una función de variable compleja $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es analítica, sus funciones componentes $u(x,y),\ v(x,y)$ son funciones armónicas y se dice que son **armónicas conjugadas**.

Demostración.
Si $u(x,y),\ v(x,y)$ son las componentes de una función analítica f, entonces dicha función es derivable en un dominio D y por lo tanto en ese dominio cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, es decir, en todos los puntos de D se cumple

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.63}$$

Derivando la primera ecuación respecto a x y la segunda respecto a y se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

restando ambas ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

pero si $u(x,y),\ v(x,y)$ son continuas y con derivadas continuas en D el orden de la derivación no altera el resultado, es decir, $\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$, por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

en forma similar se demuestra para la función $v(x,y)$ si se deriva la primera ecuación (1.63) respecto a y y la segunda respecto a x.

Ejemplo 1.49. Considerando la función $f(z)=z^2$ cuyas funciones componentes son $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$, verificar que estas componentes son funciones armónicas conjugadas.

Solución. Las derivadas parciales de las funciones componentes son $\frac{\partial u}{\partial x}=2x$, $\frac{\partial v}{\partial y}=2x$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-2y$, $\frac{\partial v}{\partial x}=2y$. Derivando nuevamente se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$$

Sustituyendo en la ecuación de Laplace se observa que para $u(x,y)$ se satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2-2=0$$

En forma similar, para $v(x,y)$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0+0=0$$

Ejemplo 1.50.
Verifica que la función $u(x,y)=4xy^3-4x^3y+x$ es armónica. Encuentra además la función armónica $v(x,y)$ conjugada de $u(x,y)$.

Solución.
Para verificar si $u(x,y)$ es armónica, obtenemos sus derivadas para sustituir en la ecuación de Laplace. Las primeras derivadas son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4y^3-12x^2y+1\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=12xy^2-4x^3$$

Derivando nuevamente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-24xy\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=24xy$$

Lo cual obviamente satisface la ecuación de Laplace.

La función armónica conjugada $v(x,y)$ debe satisfacer las condiciones de Cauchy Riemann, por lo tanto

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=4y^3-12x^2y+1 \tag{1.64}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=-\left(12xy^2-4x^3\right) \tag{1.65}$$

Integrando respecto a y la ecuación (1.64) se obtiene

$$v(x,y)=\int\left(4y^3-12x^2y+1\right)dy+\varphi(x) \tag{1.66}$$

Donde $\varphi(x)$ es la constante de integración, que puede contener a x por que se está integrando respecto a y. Integrando

$$v(x,y)=y^4-6x^2y^2+y+\varphi(x) \tag{1.67}$$

Derivando esta expresión respecto a x se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y^4-6x^2y^2+y+\varphi(x)\right)=-12xy^2+\varphi'(x) \tag{1.68}$$

Igualando la expresión anterior con (1.65) se obtiene

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\left(12xy^2-4x^3\right)=-12xy^2+\varphi'(x)$$

De donde

$$\varphi'(x) = 4x^3$$

Integrando

$$\varphi(x) = x^4$$

Finalmente se sustituye en (1.67) y la armónica conjugada buscada es

$$v(x,y) = y^4 - 6x^2y^2 + y + x^4$$

1.9.- Funciones exponenciales complejas.

En los cursos previos en donde se introducen las funciones de variable real, se definen las *funciones algebraicas* como aquellas que se pueden expresar por combinaciones finitas de sumas multiplicaciones y/o divisiones de la variable independiente y las *funciones trascendentes* que no se pueden expresar de esa manera y que son las siguientes:

- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas,
- Funciones trigonométricas,
- Funciones trigonométricas inversas
- Funciones hiperbólicas,
- Funciones hiperbólicas inversas.

A continuación se trata de extender las funciones trascendentes reales al plano complejo, es decir, definir funciones complejas de variable compleja, de forma que su restricción al caso de valores reales de la variable coincida con la función real del mismo nombre. Se pretende además que en el dominio en el que la función sea derivable, la expresión formal de la derivada coincida con la de la correspondiente función real.

Para definir la función "exponencial compleja" $f(z) = e^z$ para la variable $z \in \mathbb{C}$ de forma que si z es un valor real coincida con la función exponencial real. También se desea que la expresión de su derivada sea, como en el caso real: $f'(z) = e^z$. Y que se cumpla la propiedad más importante de la función exponencial real: la ley de exponentes.

La función exponencial $f(z) = e^z$ denotada también $f(z) = \exp(z)$. Para que se mantenga la ley de exponentes, deberá cumplir:

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \qquad (1.69)$$

Quedando por definir e^{iy}.

⚐ **Definición**. Si el exponencial e^{iy} se define como sigue

$$e^{iy} = \cos y + iseny \qquad (1.70)$$

Resulta que

$$e^{iy_1}e^{iy_2} = (\cos y_1 + iseny_1)(\cos y_2 + iseny_2)$$

Desarrollando el producto

$$= (\cos y_1 \cos y_2 - seny_1 seny_2) + i(seny_1 \cos y_2 + \cos y_1 seny_2)$$

Usando identidades trigonométricas lo anterior se puede escribir como

$$= \cos(y_1 + y_2) + isen(y_1 + y_2)$$

Que de acuerdo a la definición (1.70) se puede escribir como

$$= e^{i(y_1 + y_2)}$$

Y por lo tanto la definición (1.70) permite cumplir la ley de los exponentes.

Definición. Se define **la función exponencial de una variable compleja** $z = x + i\,y$, denotada $\exp(z)$ ó e^z como

$$\exp(z) = e^z = e^{x+i\,y} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\,seny) \tag{1.71}$$

donde y se expresa en radianes.

Con la definición anterior, la función exponencial cumple todas las propiedades del caso real, además de otras propiedades nuevas. A continuación se enuncian algunas de estas propiedades:

i) Cuando z es puramente real, es decir $z = x \in \mathbb{R}$, el valor de la función exponencial compleja coincide con el valor de la exponencial real e^x.

ii) La función exponencial $f(z) = e^z$ está definida y es continua $\forall z \in \mathbb{C}$.

iii) El módulo y el argumento de $f(z) = e^z$ se deduce directamente de su definición (1.71).

$$\left| e^z \right| = e^x \tag{1.72}$$

$$\arg\left(e^z\right) = y \tag{1.73}$$

iv) La función exponencial es **entera** y su derivada es

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \tag{1.74}$$

Demostración:

Por la definición, las funciones componentes de $f(z) = e^z$ son

$$u(x, y) = e^x \cos y, \;\; v(x, y) = e^x seny \tag{1.75}$$

Derivando

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \;\; \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x seny = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Además estas derivadas son continuas en todo el plano $\mathbb{R}^2$, por lo tanto e^z es analítica en todo el plano, es decir, e^z es entera, y por lo tanto su derivada se puede calcular de (1.59), obteniéndose

$$\frac{d}{dz} e^z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x seny = e^z$$

v) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$, ya que ambos miembros tienen el mismo módulo $e^{x_1+x_2}$ y el mismo argumento y_1+y_2

vi) $e^{z_1-z_2}=\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$ $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$, ya que ambos miembros tienen el mismo módulo $e^{x_1-x_2}$ y el mismo argumento y_1-y_2

vii) $e^{-z}=\dfrac{1}{e^{z}}$. Ambos miembros tienen el mismo módulo e^{-x} y el mismo argumento $-y$.

viii) $\left(e^{z}\right)^{n}=e^{nz}$ $\forall n\ entero$. Ambos miembros tienen el mismo módulo e^{nx} y el mismo argumento ny

ix) $e^{z}\neq 0$ $\forall z\in\mathbb{C}$, pues $\left|e^{z}\right|=e^{x}>0$

x) $\left|e^{iy}\right|=1$ $\forall y\in\mathbb{R}$, pues $\left|e^{iy}\right|=e^{0}=1$

xi) $e^{\pi i}=-1$

xii) Si n es cualquier número entero, $e^{2n\pi i}=1$ y recíprocamente: $e^{z}=1\Rightarrow z=2n\pi i$ donde n es un entero.

Demostración:

La primera parte es inmediata de la definición $e^{2n\pi i}=\cos(2n\pi)+isen(2n\pi)=1$

El recíproco: Si $e^{z}=1=1\underline{|2n\pi}\Rightarrow\begin{cases}\left|e^{z}\right|=1\\ \arg e^{z}=2n\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e^{x}=1\\ y=2n\pi\end{cases}\Rightarrow x=0\Rightarrow z=2n\pi i$

xiii) $e^{z_1}=e^{z_2}\Leftrightarrow z_1-z_2=2n\pi i$ para algún n entero

xiv) e^{z} es periódica con periodo $T=2\pi i$, es decir $e^{z+2\pi i}=e^{z}$

xv) $\left(e^{z}\right)^{\frac{m}{n}}=e^{\frac{m}{n}(z+2k\pi i)}$ para $k=0,1\ldots n-1$

xvi) $e^{\bar{z}}=\overline{e^{z}}$, Se sigue directamente de la definición.

xvii) **Fórmulas de Euler:** De la definición (1.70) se obtiene

$$e^{iy}=\cos y+iseny,\qquad e^{-iy}=\cos y-iseny \tag{1.76}$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} \tag{1.77}$$

Si en lugar de sumar se restan, se obtiene

$$seny = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{1.78}$$

El mapeo definido por la función exponencial

El dominio de la función $f(z) = e^z$ es todo el plano complejo, pero su recorrido excluye el origen, es decir, si $w \neq 0$ existirá algún $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$.

Como la función $f(z) = e^z$ es periódica, la igualdad $w = e^z$ se cumplirá para una infinidad de números $z \in \mathbb{C}$ que difieren entre ellos por un múltiplo del periodo $2\pi i$ (ver propiedad (xiii)).

Todo punto del plano z, puede llevarse a la banda $0 \leq y < 2\pi$ por una traslación de un múltiplo entero de $2\pi i$. Por periodicidad, esta traslación no cambia el valor de la función. Por lo tanto, los puntos contenidos en esta banda del plano z al mapearse por $w = e^z$, llenan todo el plano w (ver figura 1.20.

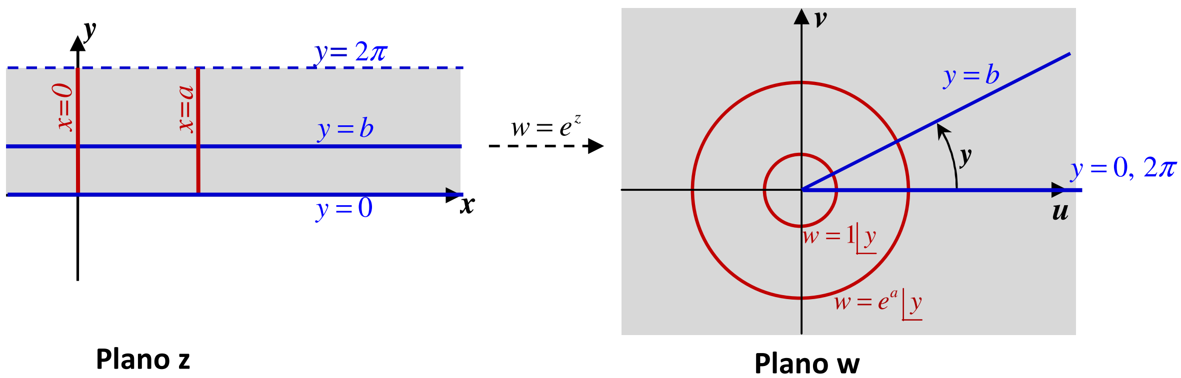


Figura 1.20.- Mapeo de rectas horizontales y verticales mediante la función $w = e^z$.

La imagen en el plano w del segmento $x = a$ al variar y de 0 a 2π es la circunferencia de radio e^a centrada en el origen. Cuando a crece de $-\infty$ a $+\infty$, el radio del círculo crece desde 0 hasta ∞, cubriendo todo el plano w.

La imagen en el plano w de la recta $y = b$ donde $0 \leq y < 2\pi$ es la semirrecta que inicia en el origen con ángulo $y = b$. Cuando x crece de $-\infty$ a $+\infty$ la semirrecta es recorrida de 0 a ∞. Cuando b crece de 0 a 2π, la semirrecta gira en torno al origen, barriendo todo el plano w.

1.9.1.- La función logaritmo de variables complejas

En los cursos básicos de cálculo con funciones de variable real se definió el logaritmo de base a, donde $a > 0,\ a \neq 1$ como la función inversa de la función exponencial de base a, es decir, si $y = \log_a x$ significa que $x = a^y$.

Para el caso particular en que la base era $a=e$ (el número de Neper), la función recibía el nombre de logaritmo neperiano o logaritmo natural y se denotaba $y=\ln(x)$. Cuando la base era $a=10$, se suprimía la a en la notación y se escribía $y=\log(x)$

En el análisis complejo, se define análogamente la función logaritmo como función inversa de la función exponencial compleja.

⚐ **Definición**. Sea $z\in\mathbb{C}$ y supóngase que $z\neq 0$. Si w es un número complejo tal que $z=e^{w}$, entonces se dice que w es un logaritmo de z. Y se escribe $w=\log(z)$. Es decir ,

$$w=\log(z) \;\Leftrightarrow\; z=e^{w} \tag{1.79}$$

☞ **Observación**. Debido a la periodicidad de la función exponencial, se verá que la ecuación $z=e^{w}$ tiene infinidad de soluciones. Es decir que $w=\log(z)$ es una función multivaluada.

En efecto, Sea $w=u+iv$ y sean $r=|z|$ y $\theta=\arg(z)=\Theta+2k\pi$ donde k es un entero y donde $-\pi<\Theta\leq\pi$, es decir, $\Theta=Arg(z)$ en radianes.

Sustituyendo en $z=e^{w}$ se obtiene

$$e^{w}=e^{u+iv}=e^{u}(\cos v+isen\,v)=r(\cos\theta+i\,sen\,\theta) \tag{1.80}$$

Igualando módulo y ángulo se obtiene $e^{u}=r$, es decir,

$$u=\ln r \tag{1.81}$$

y además

$$v=\theta=\Theta+2k\pi \tag{1.82}$$

Por lo tanto

$$w=\log z=\ln r+(\Theta+2k\pi)i \tag{1.83}$$

Para $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

⚐ Se le llama **logaritmo principal** de z o **valor principal del logaritmo**, denotado $w=Log(z)$ al valor obtenido en (1.83) cuando k=0, es decir,

$$Log(z)=\ln(r)+\Theta i \tag{1.84}$$

☞ La función **logaritmo principal** definida como en (1.84) es una función **univaluada** y está definida en todo el plano complejo, excepto en el origen. Su recorrido es la franja horizontal de anchura 2π $-\pi<v\leq\pi$, donde $v=\mathrm{Im}(w)$.

☞ En el caso en que z es puramente real y positivo, es decir, $z=x\in\mathbb{R}$ y $x>0$, entonces el valor principal de su logaritmo complejo, coincide con su logaritmo real neperiano, es decir: $Log\,x=\ln x$

En la figura 1.21 se muestra el mapeo de un círculo de radio r centrado en el origen en el plano z y una semirecta que parte del origen con un ángulo θ. Se puede observar que cada punto del círculo y cada punto de la recta tienen una infinidad de imágenes separadas una distancia vertical de 2π en el plano w. Una vuelta completa sobre el círculo en el plano z se mapea en una infinidad de segmentos verticales de recta de alto 2π en el plano w.

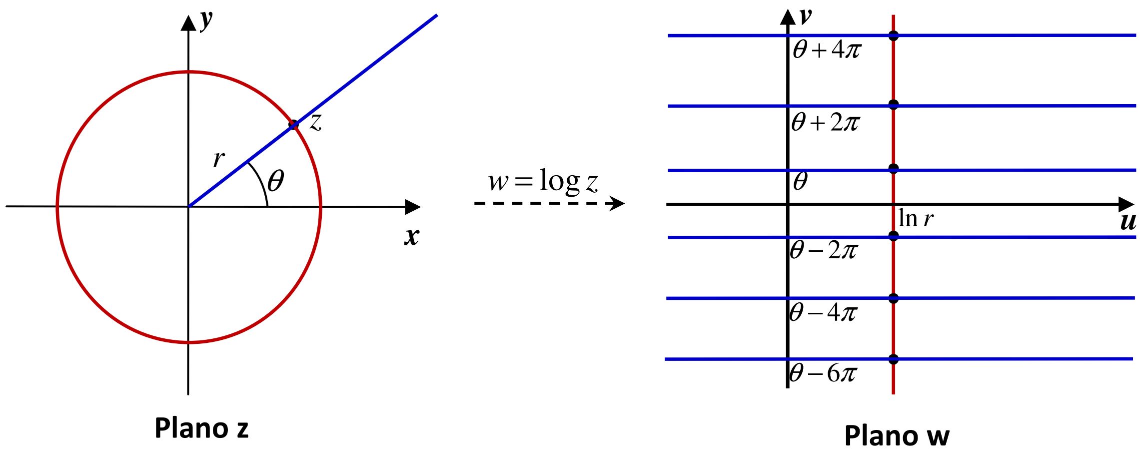


Figura 1.21.- Mapeo de un círculo de radio r y una semirecta inclinada mediante la función $w = \log(z)$.

A partir de la función multiforme $\log z = \ln r + (\theta + 2k\pi)i$, además de la función univaluada $Log\, z$, obtenida dando a k el valor de cero, pueden obtenerse otras funciones univaluadas, tomando cualquier otro valor de k.

- Cada una de estas funciones recibe el nombre de ***rama*** de la función logaritmo. El dominio de todas ellas es el plano complejo excepto el origen. Y el recorrido de la rama correspondiente a un valor particular de k es la franja horizontal de anchura 2π : $(2k-1)\pi < v \le (2k+1)\pi$

- También pueden definirse otras ramas partiendo de una redefinición de la función principal como $F(z) = \ln r + \theta i$ con $r > 0$ y $\theta_0 < \theta \le \theta_0 + 2\pi$. A la semirrecta $\theta = \theta_0$ se le llama ***corte de la rama***.

- En el caso del valor principal $Log\, z$, el corte de la rama es la semirrecta $\theta = -\pi$.

Propiedades de la función logaritmo de variable compleja.

i) La función $Log\, z = \ln r + i\theta$, donde $-\pi < \theta \le \pi$ es continua en todo el plano complejo, excepto en los puntos del semieje real negativo, es decir, excepto en el corte de esta rama, por lo tanto tampoco es derivable en esos puntos.

Explicación:
En los puntos en los que $\theta \ne \pi$ la función $Log\, z = \ln r + i\theta$ no tiene ningún problema de continuidad, sus valores están bien definidos y son iguales al límite de la función al acercarse a esos valores.

Sin embargo, si $z_0 = -x_0$ es un número real negativo (por lo tanto es un punto en el semieje real negativo), entonces $z_0 = x_0\underline{|\pi}$ es decir, $r = x_0$ y $\theta = \pi$, entonces $Log\, z_0 = \ln x_0 + i\pi$, pero el límite $\lim\limits_{z\to z_0} Log\, z$ no está definido, ya que si nos acercamos por arriba de $z_0 = -x_0$ este límite tiende a $\ln x_0 + i\pi$, pero si nos acercamos por debajo de $z_0 = -x_0$ el límite tiende a $\ln x_0 - i\pi$, por lo tanto, $Log\, z$ no es continua en z_0

ii) La función $Log\, z$ es analítica en el dominio $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z \neq 0|, -\pi < Arg(z) < \pi\}$ y su derivada en ese dominio es

$$\frac{d}{dz}\left(Log\, z\right) = \frac{1}{z} \tag{1.85}$$

Demostración

De acuerdo a la propiedad (i), la función $Log\, z = \ln r + i\theta$ es continua en D y si $z = r\underline{|\theta}$, sus funciones componentes son

$$u(r,\theta) = \ln r,\ \ v(r,\theta) = \theta \tag{1.86}$$

Derivando

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r},\ \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = 1 \tag{1.87}$$

Estas derivadas son continuas y satisfacen en D las condiciones de Cauchy-Riemann que en coordenadas polares son las siguientes

$$\left.\begin{array}{l} r\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial v}{\partial \theta} \\ r\dfrac{\partial v}{\partial r} = -\dfrac{\partial u}{\partial \theta} \end{array}\right\} \tag{1.88}$$

Por lo tanto la función $Log\, z$ es analítica en D y su derivada se puede calcular como sigue

$$\frac{d}{dz} Log\, z = e^{-i\theta}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right] = e^{-i\theta}\left[\frac{1}{r}\right] = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z} \qquad \forall z \in \mathrm{D}$$

iii) Si $z_1 z_2 \neq 0$, se verifican las siguientes propiedades del logaritmo de una multiplicación

- $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$.

Demostración: de (1.83) se obtiene

$$\begin{aligned}\log(z_1 z_2) &= \ln r_1 r_2 + (\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi)i = \ln r_1 + \ln r_2 + (\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi)i \\ &= \log \mathrm{z}_1 + \log \mathrm{z}_2\end{aligned}$$

- $Log(z_1 z_2) = Log\, z_1 + Log\, z_2 + 2\pi i\, \gamma(z_1, z_2)$ siendo:

$$\gamma(\mathrm{z}_1, \mathrm{z}_2) = \begin{cases} 1 & si\ -2\pi < \operatorname{Arg} \mathrm{z}_1 + \operatorname{Arg} \mathrm{z}_2 \leq -\pi \\ 0 & si\ -\pi < \operatorname{Arg} \mathrm{z}_1 + \operatorname{Arg} \mathrm{z}_2 \leq \pi \\ -1 & si\ \pi < \operatorname{Arg} \mathrm{z}_1 + \operatorname{Arg} \mathrm{z}_2 \leq 2\pi \end{cases}$$

iv) Si $z_1 z_2 \neq 0$, se verifica: $\log(z_1 / z_2) = \log z_1 - \log z_2$. La demostración es análoga a la del producto.

1.9.2.- Exponentes complejos

- Dados dos números complejos $z_1 \neq 0$ y z_2 se define la elevación de una número complejo a una potencia compleja como sigue

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 \log z_1} = \exp(z_2 \log z_1) \tag{1.89}$$

De esta definición es evidente que $z_1^{z_2}$ tiene una infinidad de valores posibles debido a que $\log z_1$ los tiene. Se consideran a continuación los casos en que z_1 o z_2 son constantes.

Función potencia (base variable).

En el caso $f(z) = z^{\alpha}$ siendo α una constante compleja y $z \neq 0$. De acuerdo a (1.89) se tendrá que

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} \tag{1.90}$$

Si $z = re^{i\theta}$, con $-\pi < \theta \leq \pi$ resulta:

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} = e^{\alpha[\ln r + i(\theta + 2k\pi)]} \tag{1.91}$$

Donde k es un entero arbitrario

Por lo tanto la función potencia $f(z) = z^{\alpha}$ es multivaluada como $\log z$. Cada rama de $\log z$ dará lugar a una rama de la función potencia.

Si en la función potencia $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$ se toma como determinación de $\log z$ la rama principal $Log\, z$, se obtiene el **valor principal** de z^{α}, es decir,

valor principal de $z^{\alpha} = e^{\alpha Log\, z}$

Considerando este valor principal, se trata de una función continua y analítica en el dominio D definido por $\{r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$, por ser función compuesta de continua y analíticas.
Además la derivada de esta función se puede calcular como

$$\frac{d}{dz} z^{\alpha} = \alpha\, z^{\alpha - 1} \tag{1.92}$$

Demostración:

$$\frac{d}{dz} z^{\alpha} = \frac{d}{dz} e^{\alpha Log\, z} = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha Log\, z} = \alpha \frac{e^{\alpha Log\, z}}{e^{Log\, z}} = \alpha e^{(\alpha - 1) Log\, z} = \alpha z^{\alpha - 1}$$

En forma similar ocurre para otras ramas de $\log z$

Otras propiedades de la función potencia compleja se enlistan a continuación:

i. Para los valores principales de z^{α} se cumple:

$$z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} = z^{\alpha_1 + \alpha_2} \tag{1.93}$$

Demostración:

$$z^{\alpha_1 + \alpha_2} = e^{(\alpha_1 + \alpha_2) \mathrm{Log}\, z} = e^{\alpha_1 \mathrm{Log}\, z} e^{\alpha_2 \mathrm{Log}\, z} = z^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$$

ii. También para los valores principales:

$$(z_1 z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha e^{\alpha\gamma(z_1 z_2)} \tag{1.94}$$

Demostración:

$$(z_1 z_2)^\alpha = e^{\alpha Log(z_1 z_2)} = e^{\alpha[Log\, z_1 + Log\, z_2 + 2\pi i\,\gamma(z_1, z_2)]} = z_1^\alpha z_2^\alpha e^{2\pi i\alpha\gamma(z_1 z_2)}$$

Casos particulares:

Caso $\alpha = m$ **entero:**

En este caso $z^m = e^{m[\ln r + i(\theta+2k\pi)]} = e^{m\ln r} e^{im\theta} e^{2k\pi mi}$, pero $e^{2k\pi mi} = 1$. Por lo tanto $z^m = r^m e^{im\theta}$. En este caso z^m es continua y coincide con la potenciación vista antes.

Caso α **racional:** $\alpha = \dfrac{p}{q}$, donde p, q son enteros y primos entre sí.

En este caso $z^{p/q} = e^{(p/q)[\ln r + i(\theta+2k\pi)]} = e^{(p/q)\ln r} e^{i(p/q)\theta} e^{2k(p/q)\pi i}$, donde $e^{2k\pi(p/q)i} = e^{\frac{2k\pi pi}{q}} = \left(\sqrt[q]{1}\right)^p$. Por lo tanto, en este caso $z^{p/q}$ tiene q determinaciones y coincide con la potenciación de exponente racional vista antes.

Función exponencial (base constante).

En el caso $f(z) = \alpha^z$, con $\alpha \neq 0$, α complejo. De acuerdo a (1.89) se obtiene

$$\alpha^z = e^{z\log\alpha} \tag{1.95}$$

Por cada determinación de $\log\alpha$, se tendrá una determinación de α^z.

Si se toma el valor principal $\mathrm{Log}\alpha$ de $\log\alpha$, se tiene el **valor principal** de α^z.

Este valor principal es una función entera por ser composición de funciones enteras. Además, su derivada está dada por

$$\frac{d}{dz}\alpha^z = \alpha^z Log\alpha \tag{1.96}$$

Puesto que

$$\frac{d}{dz}\alpha^z = \frac{d}{dz}e^{zLog\alpha} = (Log\alpha)e^{zLog\alpha} = \alpha^z Log\alpha$$

1.10.- Funciones trigonométricas de variable compleja.

Una forma natural de definir las funciones seno y coseno de una variable compleja es a partir de la generalización de la Fórmula de Euler que se ha visto que se cumple para variables reales y aplicarla para variables complejas, es decir, para $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{1.97}$$

$$sen\, z = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad (1.98)$$

Evidentemente, de (1.97) y (1.98) se puede obtener la Fórmula de Euler siguiente

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z) \qquad (1.99)$$

Propiedades de las funciones trigonométricas de variable compleja:

A partir de las definiciones del seno y el coseno (1.97), (1.98) se pueden demostrar las siguientes propiedades:

i) Para el caso real $z = x \in \mathbb{R}$, el valor de las funciones definidas en (1.97), (1.98) coincide con el valor de las funciones seno y coseno de variable real.

ii) Las funciones $\sin(z)$ y $\cos(z)$ son enteras y sus derivadas son:

$$\frac{d}{dz}(senz) = \cos z \qquad (1.100)$$

$$\frac{d}{dz}(\cos z) = -senz \qquad (1.101)$$

Demostración: Son enteras por ser combinaciones lineales de las funciones enteras: e^{iz} y e^{-iz}, además

$$\frac{d}{dz}(senz) = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

En forma similar para $\cos z$.

iii) Las funciones $\sin(z)$ y $\cos(z)$ son periódicas con periodo 2π. Esto se cumple debido a que la función e^{z} es de periodo $2\pi i$, por lo tanto e^{iz}, e^{-iz} lo son de periodo 2π.

☞ Todas las **identidades trigonométricas** que se demuestran en un curso básico de trigonometría se pueden demostrar también para variables complejas a partir de las definiciones (1.97), (1.98). A continuación se enlistan solo algunas de las más importantes:

iv) $\sin(z) = -\sin(-z)$ y $\cos(z) = \cos(-z)$. Es consecuencia directa de la definición.

v) $sen^2 z + \cos^2 z = 1$. Se obtiene directamente de la definición

vi) $\begin{cases} sin(z_1 \pm z_2) = sinz_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 sinz_2 \\ \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp sinz_1 sinz_2 \end{cases}$

Demostración: Sustituyendo las definiciones en la expresión $sinz_1 \cos z_2 + \cos z_1 sinz_2$ se obtiene

$$sinz_1 \cos z_2 + \cos z_1 sinz_2 = \frac{1}{4i}\Big[\left(e^{iz_1} - e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} + e^{-iz_2}\right) + \left(e^{iz_1} + e^{-iz_1}\right)\left(e^{iz_2} - e^{-iz_2}\right)\Big]$$

Desarrollando los productos y simplificando

$$=\frac{1}{2i}\left[e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}\right]=sen(z_1+z_2)$$

En forma similar para la diferencia y para el coseno.

vii) $sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=\cos z$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=sinz$.

Demostración. Se puede demostrar partiendo de la propiedad anterior, pues $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{z}\right)=\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\cos\mathrm{z}-\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{senz}=\cos\mathrm{z}$.

Y en forma similar para $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{z}\right)$

viii) $\cos nz+i\,sen\,nz=\left(\cos z+i\,senz\right)^n$. Esta propiedad se obtiene directamente de la fórmula de Euler (1.99):

$$\cos nz+i\,sen\,nz=e^{inz}=\left(e^{iz}\right)^n=\left(\cos z+i\,senz\right)^n$$

ix) $\begin{cases} sen\,z=sen\,x\cosh y+i\cos x\sinh y \\ \cos z=\cos x\cosh y-i\,sen\,x\sinh y \end{cases}$, donde $\cosh y=\cos(iy)=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$, $\sinh y=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}=-i\,sen(iy)$

Partiendo de la la propiedad (vi)

$$sen\,z=sen(x+iy)=sen\,x\cos iy+\cos x\,sen\,iy=sen\,x\,\cosh y+i\cos x\sinh y \qquad (1.102)$$

$$\cos z=\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-sen\,x\,sen\,iy=\cos x\cosh y-i\,sen\,x\sinh y \qquad (1.103)$$

x) $sen\bar{z}=\overline{senz}$ $\qquad \cos\bar{z}=\overline{\cos z}$

En efecto, $\overline{senz}=\overline{\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)}=\frac{e^{-i\bar{z}}-e^{i\bar{z}}}{-2i}=\frac{e^{i\bar{z}}-e^{-i\bar{z}}}{2i}=sen\bar{z}$.

En forma similar para el coseno

xi) Las funciones $\sin(z)$ y $\cos(z)$ **no** son acotadas, pues

$$\left|\cos z\right|^2=\cos^2 x+\sinh^2 y\,, \qquad \left|senz\right|^2=sen^2x+\sinh^2 y$$

En efecto, de (1.102) se obtiene

$$\left|sen\,z\right|^2=sen^2x\cosh^2 y+\cos^2 x\,\sinh^2 y$$

$$=sen^2x\left[1+\sinh^2 y\right]+\cos^2 x\sinh^2 y=sen^2x+\sinh^2 y$$

Análogo para $\cos(z)$.

xii) $\cos z=0 \Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi$; $senz=0 \Leftrightarrow z=k\pi$ donde k es un entero arbitrario.

Es decir, que las raíces de $sen(z)$ y $\cos(z)$ son las mismas de de senx y cosx respectivamente.

Demostración: $senz = 0 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz = 2k\pi i$ por lo tanto $z = k\pi$.
Análogo para el coseno

Las funciones trigonométricas restantes

- Para números complejos $z \in \mathbb{C} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\ entero \right\}$ se definen la tangente y la secante

$$\tan z = tg(z) = \frac{senz}{\cos z} \tag{1.104}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \tag{1.105}$$

- Y para números complejos $z \in \mathbb{C} - \{k\pi,\ k\ entero\}$ se definen la cotangente y la cosecante

$$\cot g\ z = \frac{\cos z}{sen\, z} \tag{1.106}$$

$$\csc z = \frac{1}{sen\, z} \tag{1.107}$$

Propiedades: Las siguientes son solo algunas de varias propiedades que se pueden obtener directamente de las definiciones anteriores.

i) Las funciones anteriores son analíticas en sus respectivos campos de existencia y en ellos su derivada está dada por:

$$\frac{d}{dz}(tg\ z) = \sec^2 z = 1 + tg^2 z \qquad \frac{d}{dz}(\sec z) = \sec z\, tg\ z$$

$$\frac{d}{dz}(\cot g\ z) = -\csc^2 z \qquad \frac{d}{dz}(\csc z) = -\csc z \cot g\ z$$

ii) $tg(z_1 \pm z_2) = \dfrac{tg\ z_1 \pm tg\ z_2}{1 \mp tg\ z_1 tg\ z_2}$

1.11.- Funciones hiperbólicas de variable compleja.

- Las funciones seno y coseno hiperbólicos de una variable compleja $z \in \mathbb{C}$ se definen formalmente con la mismas expresiones usadas en el caso de variable real:

$$Ch\, z = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{1.108}$$

$$Sh\, z = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{1.109}$$

A partir de las definiciones anteriores, se pueden demostrar las siguientes propiedades de las funciones seno y coseno hiperbólicos de variable compleja

i) En el caso en que z sea puramente real, es decir, $z = x \in \mathbb{R}$, el valor de estas funciones coincide por definición con el valor de las funciones coseno y seno hiperbólico reales.

ii) Las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ son enteras por ser combinaciones lineales de las funciones enteras e^z y e^{-z}. y sus derivadas son las siguientes:

$$\frac{d}{dz}(\sinh z) = \cosh z \tag{1.110}$$

$$\frac{d}{dz}(\cosh z) = \sinh z \tag{1.111}$$

iii) Las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ son periódicas con periodo 2πi, pues e^z y e^{-z} son periódicas con ese periodo.

iv) Directamente de comparar las definiciones de las funciones trigonométricas con las hiperbólicas se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$\cos iz = \cosh z \tag{1.112}$$

$$\sin iz = i \sinh z \tag{1.113}$$

$$\cosh iz = \cos z \tag{1.114}$$

$$\sinh iz = i \sin z \tag{1.115}$$

☞ De acuerdo con (1.112) y (1.113) se deduce que “*De toda identidad trigonométrica válida en el campo complejo, se deduce una identidad hiperbólica válida también en el campo complejo, reemplazando z por iz y expresando las funciones trigonométricas de iz por medio de funciones hiperbólicas de z mediante* (1.112) y (1.113)*”.* Las siguientes identidades se pueden obtener utilizando esta observación.

v) $\cosh(-z) = \cos z$, $\sinh(-z) = -\sinh z$

vi) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
Se puede obtener partiendo de la identidad $\cos^2 z + sen^2 z = 1$: cambiando z por iz: $\cos^2 iz + sen^2 iz = 1$ según (1.112) y (1.113): $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

vii) $\begin{cases} \sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh\ z_2 \\ \cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2 \end{cases}$, Se obtienen aplicando la observación a la propiedad (vi) para funciones trigonométricas.

viii) $\begin{cases} \sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x\, sen\, y \\ \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x\, sen\, y \end{cases}$, Se demuestra directamente sustituyendo $z = x + iy$ y luego aplicando la propiedad anterior.

ix) $\sinh \bar{z} = \overline{\sinh z}$, $\cosh \bar{z} = \overline{\cosh z}$

x) $|\cosh z|^2 = \cos^2 y + \sinh^2 x$ $|\sinh z|^2 = sen^2 y + \sinh^2 x$

xi) $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{\pi}{2} i + k\pi i$, $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i$ donde k es un entero arbitrario. Esto se cumple pues $\sinh z = 0 \Leftrightarrow e^z - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z = 2k\pi i \Leftrightarrow z = k\pi i$.
Análogo para $\cosh z$.

Las funciones hiperbólicas restantes

- Se definen para números complejos $z \in \mathbb{C} - \left\{ \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi \right) i \right\}$ donde k es un entero arbitrario:

$$Thz = \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \tag{1.116}$$

$$\sec h\, z = \frac{1}{\cosh z} \tag{1.117}$$

- Se definen para números complejos $z \in \mathbb{C} - \{k\pi i\}$ donde k es un entero arbitrario:

$$Cth\, z = \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \tag{1.118}$$

$$\csc h\, z = \frac{1}{\sinh z} \tag{1.119}$$

Propiedades

i) Las funciones anteriores son analíticas en sus respectivos campos de existencia y en ellos su derivada está dada por:

$$\frac{d}{dz}(\tanh z) = sech^2 z \qquad \frac{d}{dz}(\sec h\, z) = -\sec h\, z \tanh z$$
$$\frac{d}{dz}(\coth z) = -\csc h^2 z \qquad \frac{d}{dz}(\csc h\, z) = -\csc h\, z \, \coth z$$

ii) Otras propiedades de estas funciones se obtienen a partir de las propiedades vistas para $\sinh z$ y $\cosh z$.

1.12.- Funciones trigonométricas inversas

Dado que las funciones trigonométricas se han definido en términos de exponenciales, sus funciones inversas se podrán expresar en términos de funciones logarítmicas.

Se define la función $w = \arcsin z = arcsen\, z$, como la inversa del seno es decir:

$$w = \arcsin z \iff z = \sin w \tag{1.120}$$

Pero de la definición de la función seno:

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

Multiplicando ambos miembros por $2ie^{iw}$ se obtiene

$$2ie^{iw} z = e^{2iw} - 1$$

Igualando a cero

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0 \tag{1.121}$$

La ecuación anterior es una ecuación cuadrática en e^{iw}, despejando

$$e^{iw} = iz + \sqrt{-z^2 + 1} \tag{1.122}$$

de donde

$$w = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right) \tag{1.123}$$

Por lo tanto

$$w = arcsen\, z = -i \log\left[iz + \sqrt{1 - z^2}\right] \tag{1.124}$$

Como es sabido $\sqrt{1 - z^2}$ es función bivaluada de z, por lo tanto (1.124) define una función con una doble infinitud de determinaciones.

Si se usan ramas concretas para la raíz y el logaritmo, la correspondiente función $w = \arcsin z$ será analítica por ser función compuesta de funciones analíticas.

En forma similar se define la función inversa del coseno

$$w = \arccos z \iff z = \cos w \tag{1.125}$$

Procediendo de forma análoga a lo hecho para $\arcsin z$ se obtiene:

$$w = \arccos\ z = -i \log\left[z + \sqrt{z^2 - 1}\right] \tag{1.126}$$

Y en forma similar

$$w = \arctan z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z} \tag{1.127}$$

Tomando una rama analítica de cada una de ellas, se demuestra que sus derivadas son:

$$\frac{d}{dz} \arcsin z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \qquad \frac{d}{dz} \arccos z = \frac{-1}{\sqrt{1 - z^2}}, \qquad \frac{d}{dz} \arctan z = \frac{1}{1 + z^2}$$

1.13.- Funciones hiperbólicas inversas

Actuando de forma análoga a como se ha hecho con las funciones inversas de las trigonométricas

Se define la función inversa del seno hiperbólico como

$$w = \operatorname{arcsin} h\, z \iff z = \frac{e^w - e^{-w}}{2} \tag{1.128}$$

De la definición

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$$

por lo tanto

$$e^w = z + \sqrt{1 + z^2}$$

es decir,

$$w = \operatorname{arcsin} h\, z = \log\left[z + \sqrt{1 + z^2} \right] \tag{1.129}$$

Y análogamente:

$$w = \operatorname{arccos} h\, z = \log\left[z + \sqrt{z^2 - 1} \right] \tag{1.130}$$

$$w = \operatorname{arctan} h\, z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \tag{1.131}$$

Tomando una rama concreta de cada función, las correspondientes funciones obtenidas son analíticas en su dominio de definición siendo sus respectivas derivadas:

$$\frac{d}{dz} \operatorname{arcsin} h\, z = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad ; \quad \frac{d}{dz} \operatorname{arccos} h\, z = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \quad ; \quad \frac{d}{dz} \operatorname{arctan} h\, z = \frac{1}{1-z^2}$$