Práctica 10. Análisis de respuesta transitoria. Sistemas de segundo orden

Objetivo. Analizar con ayuda de Scilab y Xcos las características más importantes de la respuesta de sistemas lineales de segundo orden ante entradas típicas, tales como impulso y escalón. Analizar el efecto de añadir ceros y de incrementar el orden del sistema.

Introducción.

En la práctica anterior se presentaron las herramientas de Scilab para obtener la respuesta ante diferentes tipos de entradas de un SLIT de cualquier orden, especialmente se caracterizó teóricamente la respuesta de un SLIT de primer orden y se verificó en simulación lo que predice la teoría. La caracterización teórica de sistemas de orden mayor que 2 puede ser muy complicada, pero se pueden usar las caracterizaciones de primero y segundo orden como base en la mayoría de los casos.

Caracterización de la Respuesta al Escalón Unitario. Sistemas de Segundo Orden.

La función de transferencia de un sistema de segundo orden siempre se puede escribir en la forma siguiente

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\,2}} \tag{10.1}$$

y está caracterizada por sus tres parámetros (positivos para el ***caso estable***):

K : Es la Ganancia del sistema (El valor de estado estable de la respuesta al escalón unitario)
ω_n : Es la frecuencia natural del sistema (Su valor es la frecuencia a la que oscilaría el sistema si no tuviera amortiguamiento).
ζ : Es el factor de amortiguamiento.

Los dos **polos** correspondientes del sistema son

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{10.2}$$

La ecuación diferencial correspondiente a (10.1) para la entrada $x(t)$ y la salida $y(t)$ es

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\, \dot{y}(t) + \omega_n^{\,2}\, y(t) = K\omega_n^{\,2}\, x(t) \tag{10.3}$$

La solución de la ecuación diferencial anterior no resulta tan directa como en el caso de primer orden, ya que la forma de la solución cambia completamente dependiendo de los valores de los polos. Por esta razón se consideran tres casos de acuerdo al valor de ζ :

1) **Caso bajo amortiguado** (Polos complejos conjugados, $0 \leq \zeta < 1$)

En este caso los polos del sistema son

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{10.4}$$

La respuesta al escalón unitario tiene un comportamiento oscilatorio que se va amortiguando con el tiempo y está dada por la solución analítica de la ecuación diferencial (10.3), la cual considerando condiciones iniciales cero, está dada por

$$y(t) = K\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right)\right] \tag{10.5}$$

donde ω_d se denomina frecuencia natural amortiguada y está dada por

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{10.6}$$

ω_d es la frecuencia a la que oscila la respuesta del sistema.

Especificaciones de respuesta transitoria:

A diferencia del caso de primer orden, la respuesta al escalón unitario de un sistema de segundo orden, dada por (10.5) es más complicada y su forma exacta depende de tres parámetros: K, ζ y ω_n. En la figura 10.1 se muestra el caso $K=1$, $\omega_n=1$, para diferentes valores de ζ.

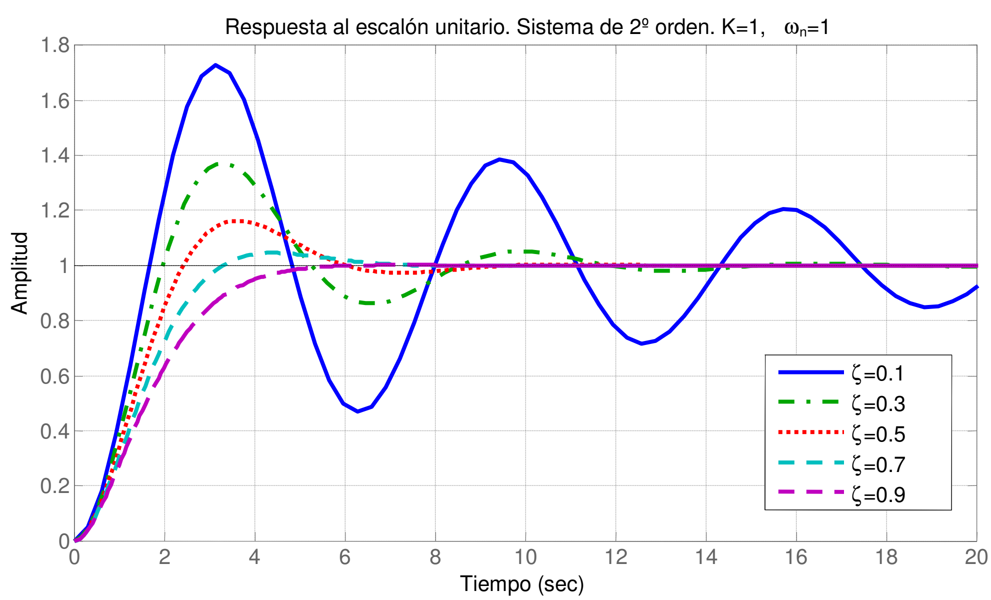

Figura 10.1.- Respuesta al escalón unitario de un sistema de 2º orden con diferentes factores de amortiguamiento (menores que 1).

Se acostumbra especificar la forma de la respuesta al escalón en términos de parámetros más prácticos (tiempos y amplitudes) , los cuales se muestran en la figura 10.2

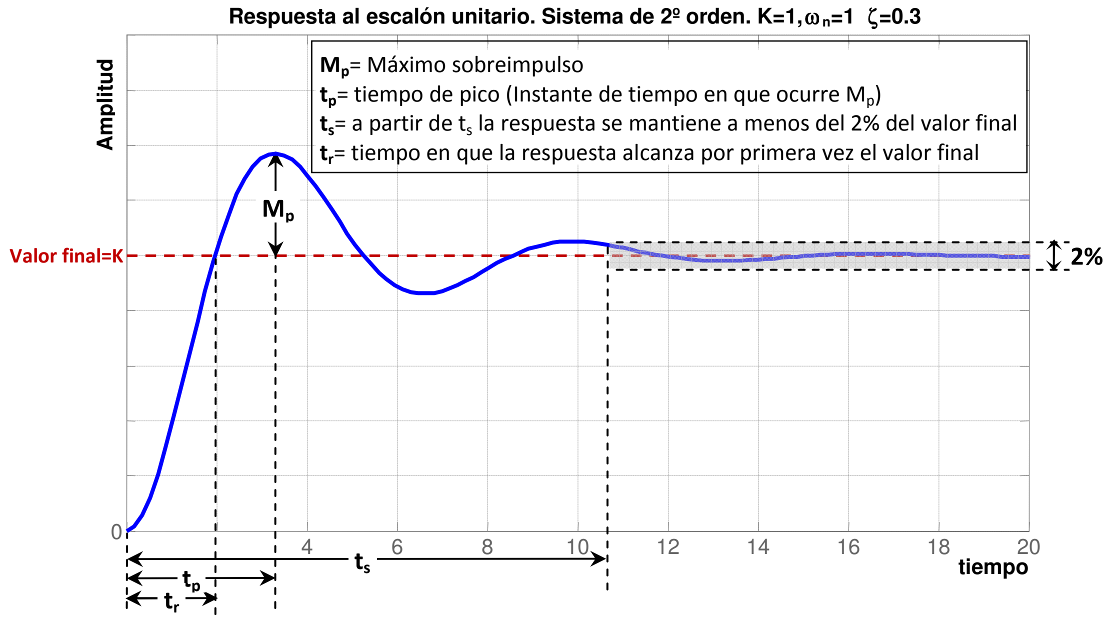

Figura 10.2.- Especificaciones de respuesta transitoria.

☞ **Observación 1**: Algunos autores dan definiciones ligeramente cambiadas para:

- El tiempo de crecimiento $\mathbf{t_r}$, al cual lo definen como el tiempo que tarda la respuesta en ir desde el 10% al 90% de su valor final. (y no del 0 al 100%)
- El tiempo de establecimiento $\mathbf{t_s}$, el cual lo definen como el tiempo a partir del cual la respuesta se mantiene a menos del 4% (y no del 2%) de su valor final.
- El máximo sobreimpulso $\mathbf{M_p}$, al cual lo miden con respecto cero (y no con respecto al valor final).

☞ **Observación 2**: Estos parámetros y sus definiciones son utilizados independientemente del orden del sistema.

☞ **Observación 3:** De acuerdo a la ecuación (10.5) la constante que multiplica al tiempo en el exponencial decreciente es $\zeta\omega_n$, por lo tanto determina la rapidez con que desaparece el transitorio y la que hace el papel de ***constante de tiempo*** es la constante

$$T = \frac{1}{\zeta\omega_n} \tag{10.7}$$

es decir, usando el criterio del 2%, $t_s \approx 5T = \dfrac{5}{\zeta\omega_n}$

Scilab cuenta con un cursor interactivo que se activa mediante el icono '***Toggle datatip mode***' mostrado en la figura 10.3, el cual está ubicado en la barra de herramientas de la ventana de toda figura. Este cursor permite activar y desactivar el modo "datatip", en el cual se puedem encontrar y marcar los valores una gráfica de manera interactiva con el mouse.

Figura 10.3.- Icono para activar/desactivar el modo datatip

En la figura 10.4 se muestra el resultado para el caso $K=1, \omega_n=1, \zeta=0.3$. De acuerdo a los marcadores mostrados en la figura 10.4 se pueden observar los siguientes resultados para los parámetros correspondientes a la respuesta de este ejemplo: t_r=1.92 seg, t_p=3.32, M_p=0.37, t_s=14.3 seg.

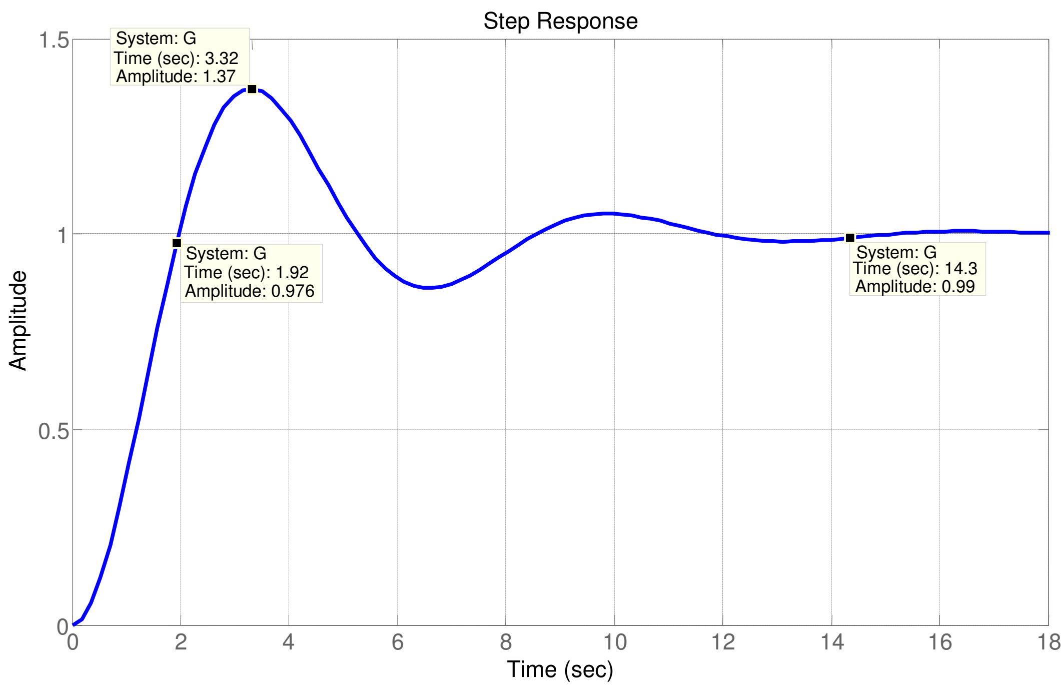

Figura 10.4.- Marcadores colocados mediante el cursor interactivo del modo "datatip".

2) **Caso sobre amortiguado** (Polos reales distintos, $\zeta > 1$).

En este caso los polos del sistema son puramente reales y están dados por (10.2). La solución analítica de la ecuación diferencial (10.3) con una entrada escalón unitario ahora no presenta oscilaciones y es simplemente una combinación de los exponenciales $e^{p_1 t}$, $e^{p_2 t}$, en donde predomina el efecto del exponencial más lento. La expresión analítica de la respuesta al escalón es

$$y(t) = K\left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{1}{p_2}e^{p_2 t} - \frac{1}{p_1}e^{p_1 t}\right)\right] \tag{10.8}$$

Donde p_1 y p_2 son los polos del sistema y están dados por (10.9). Obsérvese que entre más grande es ζ, más se alejan los valores de p_1 y p_2.

$$p_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad p_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{10.9}$$

En la figura 10.5 se muestra la respuesta de un sistema de segundo orden para el caso $K=1,\ \omega_n=1$ con diferentes valores de ζ. Obsérvese que la respuesta se parece mucho a la de un sistema de primer orden, pero ahora aparece un punto de inflexión (más apreciable para valores de ζ cercanos a 1), este punto de inflexión es inexistente en el caso de primer orden.

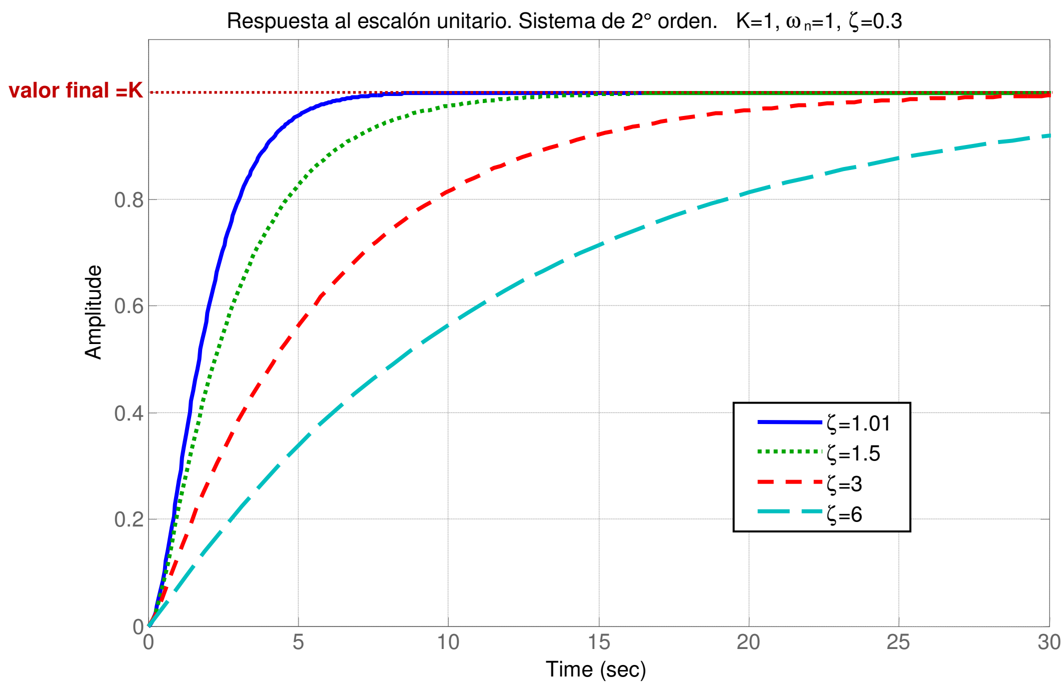

Figura 10.5.- Respuesta al escalón unitario en el caso sobreamortiguado de un sistema de 2° orden

☞ **Observación:** De acuerdo a la ecuación (10.8) las constante que multiplican al tiempo en los exponenciales decreciente son los polos: p_1 y p_2, por lo tanto la rapidez con que desaparece el transitorio la determina el polo más cercano a cero, (polo dominante) a dicho polo le corresponderá la constante de tiempo más lenta (grande) y será la que hace el papel de ***constante de tiempo*** dominante del sistema:

$$T = \max\left\{\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}\right\} \tag{10.10}$$

es decir, la respuesta del sistema llegará al 99% del valor final en aproximadamente $5T = 5\max\left\{\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}\right\}$

3) **Caso críticamente amortiguado** (Polos reales repetidos $\zeta = 1$)

En este caso el sistema tiene dos polos repetidos y cuyo valor es

$$p_{1,2} = -\omega_n \tag{10.11}$$

La expresión analítica de la respuesta al escalón unitario se obtiene nuevamente resolviendo la ecuación diferencial (10.3) y en este caso se obtiene

$$y(t) = K\left[1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)\right] \tag{10.12}$$

La forma que tiene la respuesta en este caso contiene sólo el efecto del exponencial multiplicado por el tiempo: $te^{-\omega_n t}$ y se asemeja mucho a la curva con línea continua (azul) de la figura 10.5.

☞ **Observación:** De acuerdo a la ecuación (10.12) la constante que multiplica al tiempo en el exponencial decreciente es ω_n, por lo tanto la que hace el papel de ***constante de tiempo*** del sistema es:

$$T = \frac{1}{\omega_n} \tag{10.13}$$

es decir, la respuesta del sistema llegará al 99% del valor final en aproximadamente $5/\omega_n$

Respuesta al impulso unitario. Sistemas de segundo orden.

Si en lugar de un escalón unitario consideramos un impulso unitario, la respuesta exacta bajo condiciones iniciales cero del sistema de segundo orden dado por (10.1) será

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{K\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\ 2}}\right] \tag{10.14}$$

Dependiendo del caso, la expresión resultante de (10.14) es una de las siguientes:

Caso bajo amortiguado ($0 \le \zeta < 1$):

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sen(\omega_d t) \tag{10.15}$$

Caso sobre amortiguado (Polos reales distintos, $\zeta > 1$)

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(e^{p_2 t} - e^{p_1 t}\right) \tag{10.16}$$

Caso críticamente amortiguado (Polos reales repetidos $\zeta = 1$)

$$y(t) = K\omega_n^{\ 2} te^{-\omega_n t} \tag{10.17}$$

☞ **Observación**: Derivando los resultados anteriores y evaluando en cero se verifica que en los tres casos:

$$\dot{y}(0) = K\omega_n^{\ 2} \tag{10.18}$$

Respuesta (sin entrada) a condiciones iniciales diferentes a cero. Sistemas de segundo orden.

Para obtener la respuesta sin entrada a las condiciones iniciales diferentes a cero

$$y(0) = y_0,\ \ \dot{y}(0) = y_1 \tag{10.19}$$

consideramos la ecuación diferencial original (10.3) sin entrada

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n\,\dot{y}(t) + \omega_n^{\,2}\,y(t) = 0 \tag{10.20}$$

Y aplicamos transformada de Laplace con las condiciones iniciales (10.19), obteniendo

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 2\zeta\omega_n\left[sY(s) - y(0)\right] + \omega_n^{\,2}Y(s) = 0 \tag{10.21}$$

Despejando

$$Y(s) = \frac{\dot{y}(0) + \left[s + 2\zeta\omega_n\right]y(0)}{s^2 + 2\zeta\omega_n\,s + \omega_n^{\,2}} \tag{10.22}$$

Por lo tanto, la respuesta a las condiciones iniciales dadas por (10.19) será

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{y_1 + \left[s + 2\zeta\omega_n\right]y_0}{s^2 + 2\zeta\omega_n\,s + \omega_n^{\,2}}\right] \tag{10.23}$$

☞ **Observación**: Comparando (10.23) con (10.14) Es fácil ver que la respuesta del sistema con condiciones iniciales cero ante un impulso unitario coincide con la respuesta del sistema sin entrada ante las condiciones iniciales $y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = K\omega_n^{\,2}$

Ejemplo: Determinar un intervalo de tiempo de simulación adecuado y escribir las instrucciones en Scilab para obtener la respuesta del sistema sin entrada ante las condiciones iniciales $y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$ para el siguiente sistema de segundo orden

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s^2 + s + 4} \tag{10.24}$$

Solución: En este caso $\omega_n = 2$, $K = 0.5$, $\zeta = 0.25$. Se trata del caso bajo amortiguado. El intervalo de tiempo adecuado para la simulación será de unas 8 constantes de tiempo, es decir, se simulará de 0 a $8/\zeta\omega_n = 16\ seg$, para poder apreciar el transitorio completo y una porción del estado estable. La respuesta a las condiciones iniciales dadas se puede obtener de dos maneras:

Solución 1.- Obteniendo la respuesta a un impulso de valor $\delta(t)/K\omega_n^{\,2}$ de la función de transferencia dada por (10.24). El resultado se muestra en la figura 10.6

```
s=poly(0,'s','r'); // Variable de Laplace
G=2/(s^2+s+4); // Define la función de Transferencia del sistema
t=0:0.01:16;  //Intervalo de tiempo de simulación
K=0.5; wn=2;
y=csim('impuls',t,G); //obtiene la respuesta al impulso unitario
y=y/(K*wn^2); // la divide entre KWn^2
plot(t,y,'linewidth',4); xgrid;
a=get("current_axes");
a.font_size=4;
title('Respuesta a un impulso de valor 1/Kwn^2','fontSize',4);
xlabel('t (seg)','fontSize',4);
ylabel('y(t)','fontSize',4);
```

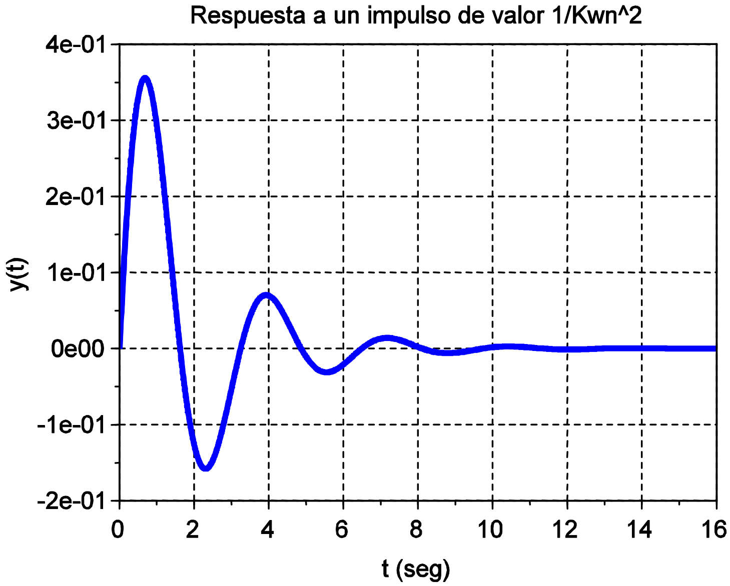

Figura 10.6.- Respuesta del sistema de 2º orden a un impulso $\delta(t)/K\omega_n^2$.

Solución 2.- Obteniendo el modelo de espacio de estado correspondiente a (10.24) y aplicando directamente las condiciones iniciales dadas, con entrada cero. Definiendo el vector de estados como $x_1 = y,\ x_2 = \dot{y}$ se obtiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} x(t) \tag{10.25}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{10.26}$$

Donde $x(t)$ es la señal de entrada.

```
A=[0 1;-4 -1]; B=[0;2]; C=[1 0]; D=0; // Matrices del sistema
S=syslin('c',A,B,C,D); // Define El modelo de estado del sistema
t=0:0.01:16;  //Intervalo de tiempo de simulación
x0=[0;1]; //Condiciones iniciales
u=zeros(t); // Entrada cero
y=csim(u,t,S,x0); //obtiene la respuesta al impulso unitario
plot(t,y,'linewidth',4); xgrid;
a=get("current_axes");
a.font_size=4;
title('Respuesta condiciones iniciales y(0)=0, dy(0)=1','fontSize',4);
xlabel('t (seg)','fontSize',4);
ylabel('y(t)','fontSize',4);
```

La gráfica obtenida es idéntica a la obtenida en la primera solución (Figura 10.6).

Sistemas de orden mayor a dos.

Un sistema de orden superior a dos se puede expresar de manera factorizada para hacer explícito el efecto de los subsistemas de primero y de segundo orden que lo forman.

Ejemplo: Consideremos la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 4s + 1} \tag{10.27}$$

Con ayuda de Scilab podemos obtener la factorización correspondiente

```
den=[1 8 4 1];
p=roots(den)
p  =
  - 7.4833361
  - 0.2583320 + 0.2586404i
  - 0.2583320 - 0.2586404i
//Los dos polos complejos corresponden a un factor de segundo orden
//Obtenemos dicho factor a continuación:
s=poly(0,'s','r');
fact=(s-p(2))*(s-p(3))
 fact  =
Parte real
                              2
    0.1336302 + 0.5166639s + s
Parte imaginaria
    0
```

Es decir, la función de transferencia (10.27) se puede factorizar como sigue

$$G(s) = \frac{1}{(s + 7.4833361)(s + 0.2583 + j0.2586)(s + 0.2583 - j0.2586)} \tag{10.28}$$

pero también como

$$G(s) = \frac{1}{(s + 7.4833361)(s^2 + 0.5166639s + 0.1336302)} \tag{10.29}$$

En la expresión (10.29) se observa que el sistema tendrá un comportamiento dominante de segundo orden, es decir,

$$G(s) \approx \frac{1/7.4833}{s^2 + 0.5167s + 0.1336} \tag{10.30}$$

Obsérvese que el numerador de (10.30) se ha calculado de manera que el valor final de la respuesta no se modifique con respecto al valor final de la respuesta del sistema original.

En la figura 10.7 se muestra la respuesta al escalón unitario del sistema original (10.27) comparada con la respuesta de la aproximación (10.30). En dicha figura se observa que el polo despreciado prácticamente no influye en la respuesta.

En la siguiente sección se da más detalle de como decidir cual es la parte dominante de un sistema.

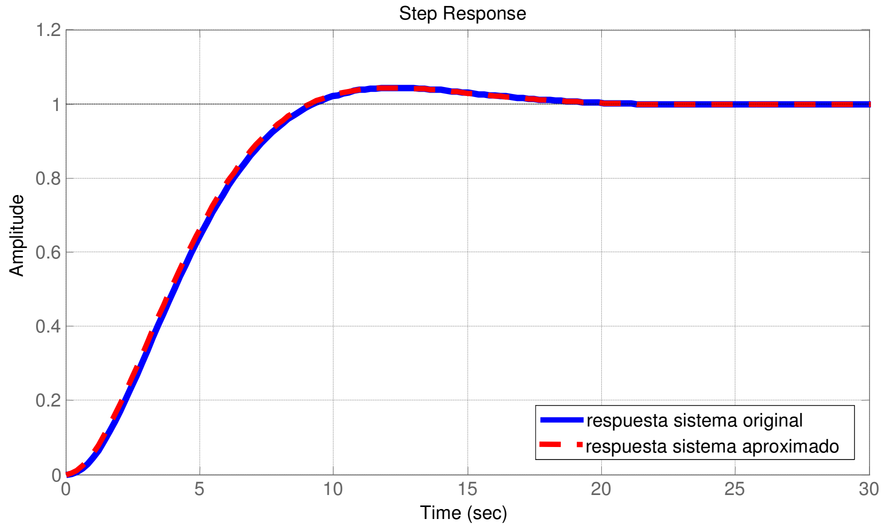

Figura 10.7.- Respuesta de un sistema dominante de segundo orden.

Polos dominantes y aproximación por reducción de orden.

Todo polo p de un sistema produce en la respuesta del sistema la componente exponencial e^{pt}. Para sistemas estables $\mathrm{Re}(p)$ es negativo, esto provoca que la componente exponencial e^{pt} tienda a desaparecer con el tiempo. Como se explicó antes el tiempo que tarda en extinguirse un término exponencial e^{pt} es aproximadamente 5 constantes de tiempo.

La **constante de tiempo** correspondiente al polo p es

$$T = \frac{1}{|\mathrm{Re}(p)|} \tag{10.31}$$

☞ El comportamiento dominante de un sistema está determinado por los exponenciales que perduran más tiempo, es decir, por las constantes de tiempo más grandes o bien, los polos con parte real más cercana a cero.

Cuando un polo está muy lejos del origen comparado con los otros polos, este polo se puede despreciar de la función de transferencia, cuidando solamente de mantener el valor final de la respuesta al escalón unitario, es decir, la Ganancia del sistema. La Ganancia K del sistema dado por la función de transferencia $G(s)$ se puede calcular como

$$K = G(0) \tag{10.32}$$

Ejemplo: Retomando el ejemplo anterior cuya función de transferencia está dada por (10.27), se tiene que

$$K = G(0) = 1$$

los polos de este sistema eran: p1= -7.4833, p2=-0.2583 + 0.2586i, p3=-0.2583 - 0.2586i. El polo p1= -7.4833 está muy lejos del origen comparado con las partes reales de los otro dos, por lo tanto los polos dominantes son p2 y p3. Entonces simplemente eliminamos el factor (s-p1) del denominador, pero esto altera la ganancia. Para no alterarla dividimos el numerador entre p1.

Ejemplo: Consideremos la siguiente función de transferencia

$$G(s)=\frac{64}{s^3+17s^2+144s+128} \tag{10.33}$$

con ayuda de Scilab obtenemos la factorización del denominador

```
den=[1 17 144 128];
p=roots(den)
 p  =
  - 8. + 8.i
  - 8. - 8.i
  - 1.
 //Los dos polos complejos corresponden a un factor de segundo orden
//Obtenemos dicho factor a continuación:
s=poly(0,'s','r');
fact=(s-p(1))*(s-p(2))
 fact  =
Parte real
                 2
    128 + 16s + s
```

Es decir, la función de transferencia se puede factorizar como

$$G(s)=\frac{64}{(s+1)(s^2+16s+128)} \tag{10.34}$$

Ahora el polo dominante es el de primer orden, además , $K=G(0)=0.5$, por lo tanto podremos aproximar la función de transferencia eliminando los dos polos complejos, es decir,

$$G(s)\approx\frac{0.5}{s+1} \tag{10.35}$$

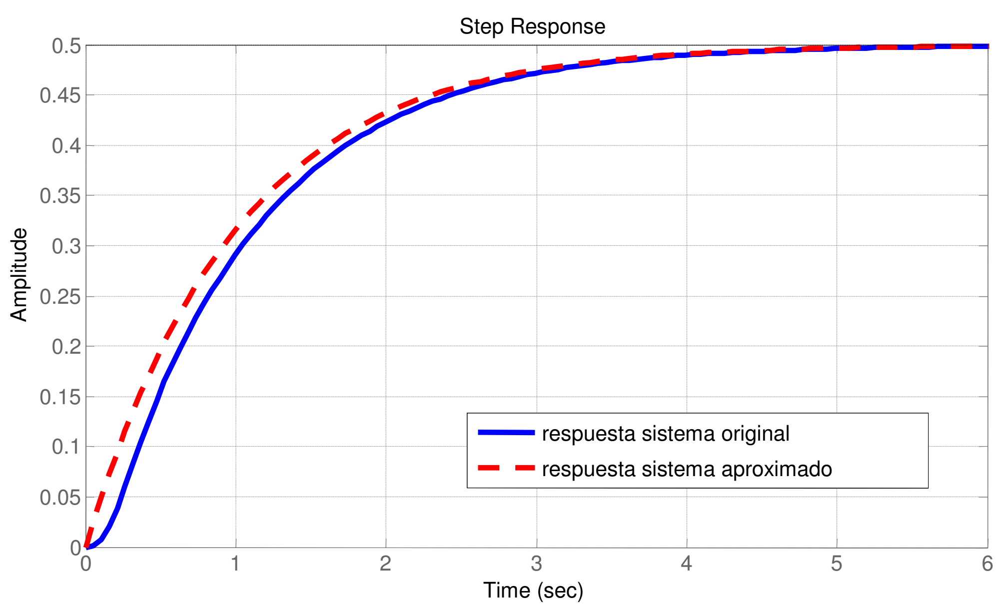

Figura 10.8.- Respuesta de un sistema dominante de primer orden.

Ejercicio.- Efecto de agregar ceros a un sistema: Genera una gráfica para representar la respuesta del sistema de segundo orden con un cero en diferentes posiciones ($z = -1/a$), es decir, la función de transferencia es

$$G(s) = \frac{(as+1)}{s^2 + 0.6s + 1} \qquad (10.36)$$

y se graficará la respuesta para los valores: $a = 0,\ 0.1,\ 0.3,\ 0.5,\ 1,\ 3$. ¿Cuando afecta más el cero?, ¿cuando afecta menos?, ¿a partir de qué valor se puede despreciar el efecto del cero?

Desarrollo de la Práctica.

1. Probar todos los ejemplos propuestos por el profesor conforme los va explicando.
2. Realizar todos los ejercicios propuestos.

Reportar:

1.- Escribe un programa que calcule el tiempo de establecimiento (t_s) de la respuesta al escalón unitario de un SLIT a partir de su función de transferencia <u>de orden arbitrario</u>. (Sugerencia: Obtener las partes reales de todos los polos del sistema, verificar que todas sean negativas y elegir la de menor valor absoluto como polo dominante).

2.- Utiliza el programa anterior para generar un intervalo de tiempo de simulación adecuado (mayor que t_s) para que otro programa pueda obtener la respuesta de un SLIT al escalón unitario y calcular los parámetros: tiempo de subida (t_r), tiempo de pico (t_p), Máximo sobreimpulso (M_p), a partir de los datos generados por la función `csim`. Coloca comentarios adecuados en las líneas del programa.

3.- Demuestra que la siguiente función de transferencia corresponde a un sistema dominante de segundo orden. Obtén la función de transferencia aproximada de segundo orden y sus parámetros K, ζ y ω_n. Grafica juntas la respuesta al escalón unitario del sistema original y la de la función de transferencia aproximada.

$$G(s) = \frac{16}{s^3 + 10s^2 + 18s + 16} \qquad (10.37)$$

4.- Investiga las expresiones analíticas en términos de K, ζ y ω_n para los parámetros que calcula el programa del ejercicio 2. Ejecuta el programa y compara los resultados que calcula el programa con los que predicen las expresiones analíticas para la función de transferencia (10.37).