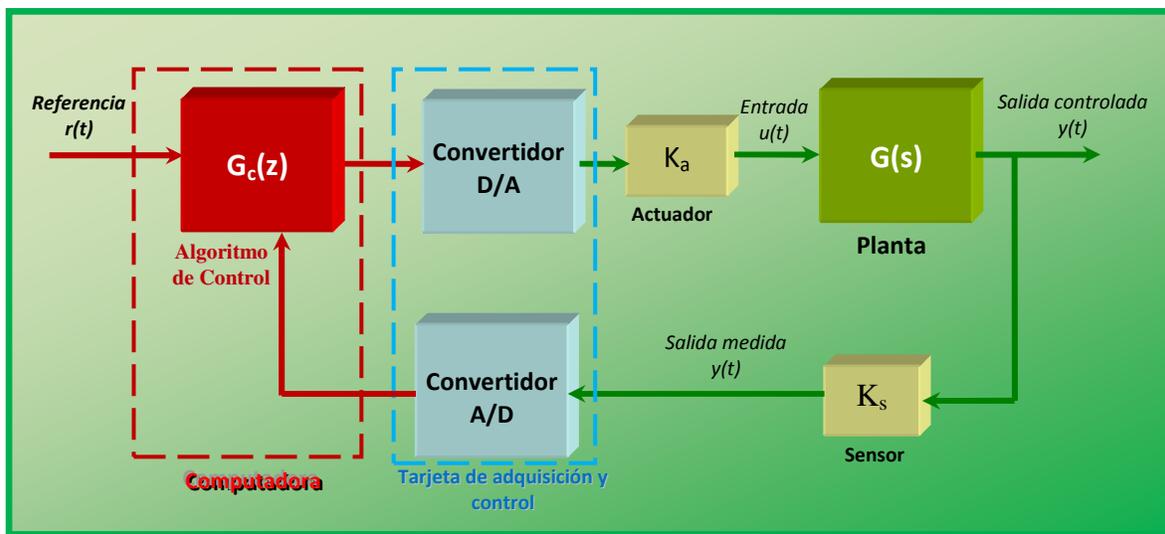


*Apuntes para el Curso de*

# *Control Digital 1*



*Facultad de Ingeniería Eléctrica*

*79E-UMS104*

*Elaboró: José Juan Rincón Pasayo*

*Enero-2015*

## Contenido

### 1.- Introducción

- 1.1.- Introducción
- 1.2.- Esbozo histórico del control por computadora
- 1.3.- Evolución de la teoría de control digital
- 1.4.- ¿Porqué una teoría de control por computadora?
- 1.4.1.- Características propias de los sistemas muestreados
- 1.4.1.1.- Dependencia del tiempo
- 1.4.1.2.- Armónicos de alto orden
- 1.4.1.3.- Tiempo de establecimiento finito
- 1.4.2.- Procesos inherentemente muestreados.

### 2.- El proceso de muestreo

- 2.1.- Introducción
- 2.2.- Descripción del proceso de muestreo y definiciones
- 2.2.1.- Muestreo periódico y no periódico
- 2.2.1.- Período de muestreo y frecuencia de muestreo
- 2.3.- Introducción al teorema fundamental del muestreo
- 2.3.1.- El Teorema de Nyquist-Shannon y su demostración
- 2.3.2.- Observaciones sobre el Teorema del muestreo
- 2.4.- La inversión del Muestreo (Reconstrucción de señales muestreadas)
- 2.4.1.- El reconstructor de Shannon
- 2.4.2.- El retenedor de orden cero.
- 2.4.3.- El retenedor de orden uno.
- 2.4.4.- El retenedor poligonal
- 2.5.- Confusión de frecuencia o Aliasing
- 2.5.1.- Tres propiedades fundamentales de las señales sinusoidales muestreadas
- 2.5.2.- Frecuencia normalizada de sinusoides muestreadas
- 2.5.3.- Prefiltrado antialiasing

### 3.- Modelado de sistemas de control en tiempo discreto

- 3.1.- Modelado desde el punto de vista de la computadora
- 3.2.- Obtención de modelos discretos a partir de modelos continuos.
- 3.2.1.- Modelo discreto invariante al escalón para un sistema continuo de primer orden
- 3.2.2.- El operador corrimiento
- 3.2.3.- Diagramas de simulación
- 3.2.4.- Aproximación de la derivada por diferencias finitas.
- 3.2.5.- Aproximación de la integral (Regla trapezoidal o de Tustin).
- 3.2.6.- Modelos discretos de sistemas continuos de orden mayor a uno.
- 3.3.- La Transformada Z.
- 3.3.1.- Definiciones de la transformada Z (bilateral y unilateral) .
- 3.3.2.- Propiedades de la transformada Z
- 3.3.2.1.- Linealidad
- 3.3.2.2.- Corrimiento en el tiempo
- 3.3.2.3.- Transformada de la convolución
- 3.3.2.4.- Teorema del valor final.
- 3.3.3.- Tablas de Transformadas Z.
- 3.4.- La función de Transferencia de pulso
- 3.5.- Polos y ceros de funciones de transferencia de pulso
- 3.6.- Modelado desde el punto de vista del proceso
- 3.6.1.- Obtención de  $G(z)$  a partir de  $G(s)$
- 3.6.2.- Discretización de funciones de transferencia en lazo abierto usando tablas de transformadas.

- 3.6.2.1.- Ejemplo. Sistema de primer orden
- 3.6.2.2.- Ejemplo. Sistema de segundo orden reducible mediante fracciones parciales
- 3.6.2.3.- Ejemplo. Sistema de segundo orden no reducible mediante fracciones parciales
- 3.6.2.4.- Ejemplo. Sistemas de orden superior.
- 3.6.3.- Reducción de bloques en cascada
- 3.6.4.- Función de transferencia de pulso de un sistema de control digital de una planta continua

### 4.- Análisis de sistemas de control en tiempo discreto

- 4.1.- Introducción
- 4.2.- Cálculo de la respuesta de un DSLIT
- 4.3.- Solución de las ecuaciones de diferencias mediante iteración numérica
- 4.3.1.- Ejemplo. Sistema de primer orden
- 4.4.- Solución de la ecuación de diferencias lineal mediante transformada Z
- 4.5.- La Transformada Z inversa.
- 4.5.1.- Cálculo directo de la integral de contorno compleja
- 4.5.2.- Cálculo por expansión en serie de potencias
- 4.5.3.- Cálculo por expansión en fracciones parciales
- 4.5.3.1.- Caso de polos distintos (reales y complejos)
- 4.5.3.2.- Caso de polos repetidos
- 4.6.- Ejemplos de cálculo de la respuesta de un sistema discreto mediante transformada Z
- 4.6.1.- Sistema de primer orden en lazo abierto
- 4.6.2.- Sistema de segundo orden el lazo abierto (Sucesión de Fibonacci)
- 4.7.- Cálculo de la respuesta de un DSLIT por convolución con la respuesta al impulso unitario
- 4.7.1.- Descomposición de una señal discreta como suma de impulsos
- 4.7.2.- Respuesta de un DSLIT ante entradas arbitrarias: La Convolución
- 4.7.3.- Respuesta al impulso de sistemas causales
- 4.8.- Análisis de estabilidad de DSLITs
- 4.8.1.- Respuesta al impulso y estabilidad
- 4.8.2.- Estabilidad y polos de una función de transferencia de pulso
- 4.9.- Análisis de estabilidad basada en los polos
- 4.9.1.- Criterio de Routh modificado
- 4.9.1.1.- Diseño de controladores estabilizantes
- 4.9.2.- Criterio de Jury
- 4.9.3.- Criterio de Schur-Cohn
- 4.9.4.- Lugar de las raíces

### 5.- Diseño de sistemas de control en tiempo discreto

- 5.1.- Introducción
  - 5.2.- Traslación del diseño analógico
  - 5.2.1.- Diferentes aproximaciones
  - 5.2.2.- Controladores P.I.D. digitales
  - 5.2.3.- Efecto Wind-up y su eliminación
  - 5.2.4.- Reglas de Takahashi-Chan-Auslander
- 5.3.- Diseño en el dominio digital.**

### Bibliografía

- 1.- Computer Controlled Systems. Astrom, Wittenmark
- 2.- Digital Control Systems. B. J. Kuo

# Capítulo 1

## Introducción

En la actualidad casi todos los controles automáticos de uso industrial, doméstico automotriz u otro tipo se implementan en forma digital, la mayoría en base a microcontroladores. Esto hace necesario entender que tipo cosas ocurren cuando un sistema físico de naturaleza continua, como son la mayoría de los procesos industriales, se controla mediante un sistema digital como es la computadora.

### 1.1.- Introducción

En la figura 1.1 se muestra un diagrama de bloques típico de un sistema de control basado en una computadora digital. En este diagrama se aprecia que la salida  $y(t)$  del proceso que se desea controlar es una función que depende en forma continua del tiempo, sin embargo, su información  $y(k)$  solo se dispone en algunos instantes discretos de tiempo denominados *instantes de muestreo*, es decir,  $k$  es una variable que toma valores discretos  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ , y por lo tanto  $y(k)$  es una variable *muestreada*.

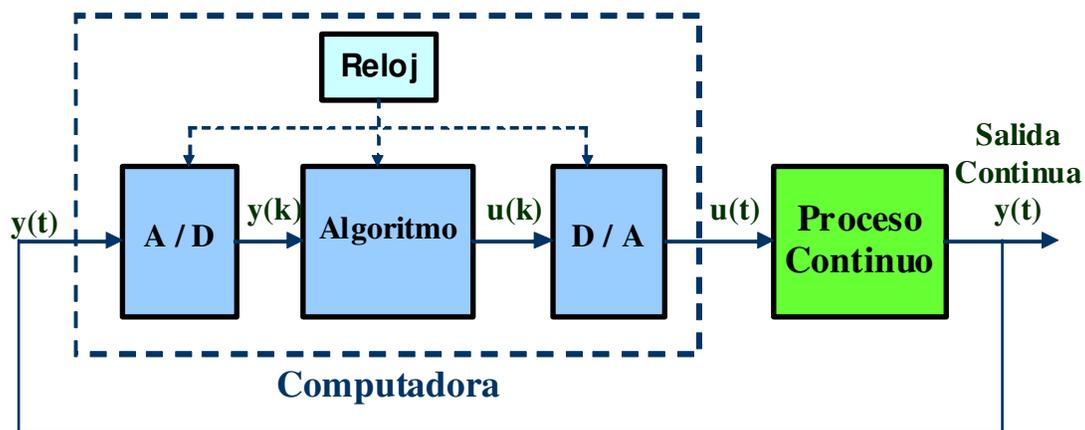


Figura 1.1. Esquema típico de control por computadora

En forma similar la entrada del proceso  $u(t)$  no puede ser actualizada en forma continua por la computadora sino que típicamente se mantiene constante entre cada instante de muestreo.

La manera en que se determina en tiempo en el que ocurren los instantes de muestreo puede ser uniforme o no-uniforme. En estas notas solamente se trata el caso de *muestreo uniforme* en el cual los instantes de muestreo están dados por

$$t_k = kT_s \quad (1.1)$$

donde  $T_s$  es el período de muestreo que se mantiene constante.

En este caso

$$y(k) = y(kT_s), \quad u(k) = u(kT_s) \quad (1.2)$$

El esquema típico de control por computadora contiene tanto variables continuas como variables muestreadas o discretas. Esta mezcla puede ser complicada, sin embargo, en ocasiones es suficiente con describir lo que *ocurre solamente en los instantes de muestreo*, en este caso solo interesan los valores de las señales en los instantes de muestreo y se pueden considerar todas ellas discretas, a este tipo de sistema se le llama sistemas de tiempo discreto. Los sistemas discretos trabajan con secuencias de valores discretos y la manera natural de modelarlos es mediante ecuaciones de diferencias.

## 1.2.- Esbozo Histórico del control por computadora

La idea del control por computadora surgió alrededor de 1950. El primer interés fue usarlo en el control de misiles y la navegación aérea, sin embargo, las computadoras de aquella época no eran adecuadas para estas aplicaciones.

La primera incorporación de una computadora digital al control de procesos industriales se desarrolla a mediados de los 50's con un esquema de control supervisorio como el mostrado en la Figura 1.2. En este esquema la computadora no participa directamente en el lazo de control, sino que solamente puede monitorear las variables medibles o modificar los "set point" o señales de referencia enviadas a los controladores analógicos conectados al proceso.

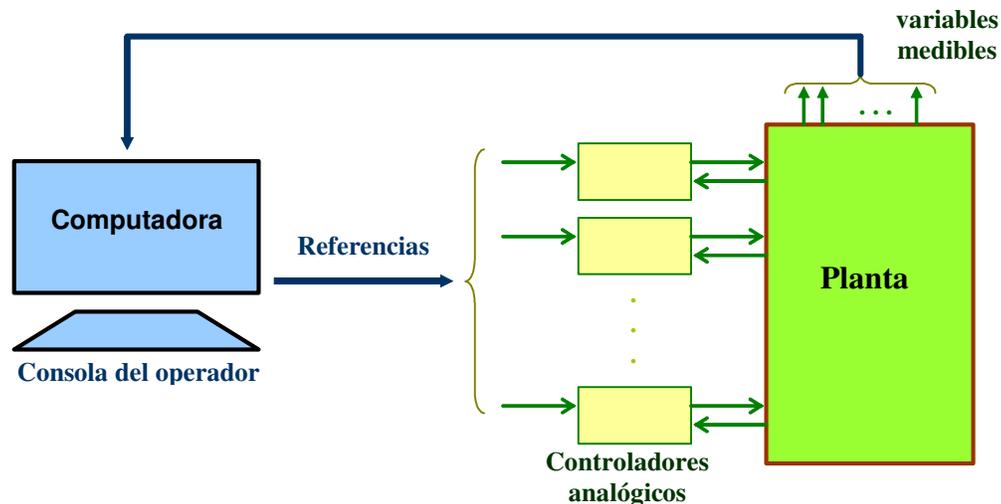


Figura 1.2. Esquema de control supervisorio.

El uso de las computadoras digitales en el control de procesos ha pasado por varios periodos que podrían clasificarse como sigue:

- Periodo Pionero (fines de los 50's)
- Período del Control Digital Directo (inicios de los 60's)
- Periodo de la minicomputadoras (fines de los 60's)
- Periodo de las microcomputadoras (inicios de los 70's)

- Uso Generalizado del control por computadora (1980 hasta nuestro días)
- Control distribuido (1990)

### Periodo Pionero (fines de los 50's):

Las primeras instalaciones computadoras en el control de proceso contemplaron a las computadoras como elementos supervisores que realizaban las funciones de un operador humano: supervisión de las variables medibles y ajustes de las referencias a los controladores que seguían siendo analógicos. De 1956 a 1959: Se realiza el primer trabajo serio implantado en la unidad de polimerización de la refinería de Port Arthur Texas de la Texaco Oil Co. (Port Arthur Texas): Control supervisorio para 26 flujos, 72 temperaturas, 3 presiones y 3 concentraciones, el desarrollo lo realizó la compañía aeroespacial Thomson Ramo Woodridge. Las funciones esenciales que realizaba el controlador eran: minimizar la presión del reactor, determinar la distribución óptima entre los flujos de alimentación de 5 reactores, controlar el flujo de agua caliente hacia el interior del reactor, basado en las mediciones de actividad catalítica y en determinar la recirculación óptima.

### Periodo del Control Digital Directo (inicios de los 60's)

En el esquema supervisorio no se utiliza la capacidad de cálculo de la computadora para ejecutar estrategias de control en tiempo real, sino solamente para determinar ajustes de los "set point" (entradas de referencia) de los controladores para optimizar o coordinar alguna estrategia global. Sin embargo, la computadora tiene la capacidad para desempeñarse en un lazo de control como se muestra en la figura 1.3 y de esta manera reemplazar los controladores analógicos conectados al proceso. El término Control Digital Directo se acuñó para dar énfasis al hecho de que la computadora controlaba el proceso directamente sin un controlador analógico de por medio. La tecnología digital pronto mostró su confiabilidad y flexibilidad y en 1962 (Imperial Chemical Industries en Inglaterra) se implanta el primer sistema que reemplaza todos los controladores analógicos de un proceso: medía 224 variables y controlaba 129 válvulas. Las ventajas económicas y la flexibilidad pronto generalizaron este enfoque.

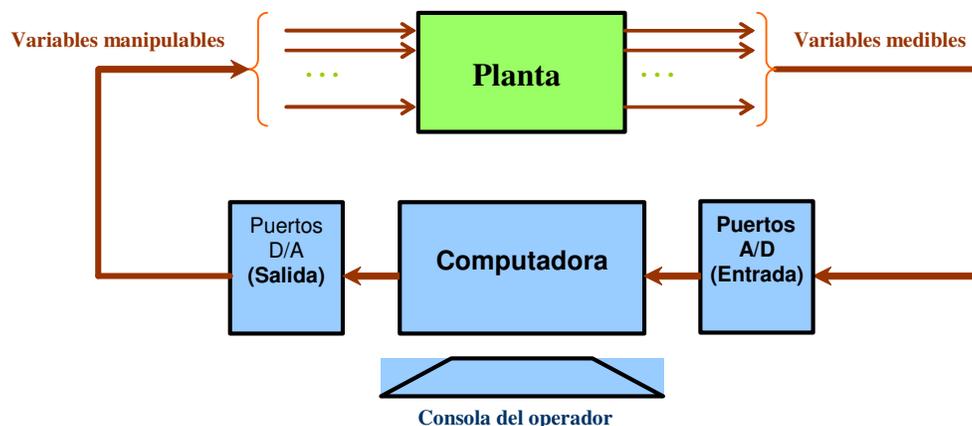


Figura 1.3. Esquema de una computadora en control digital directo.

### Periodo de la minicomputadoras (fines de los 60's)

Los avances en la tecnología de circuitos integrados permitió el desarrollo de computadoras cada vez más pequeñas, más rápidas y más poderosas, a fines de los 60s se acuñó el término minicomputadora para las computadoras basadas en la nueva tecnología que eran muy adecuadas para los requerimientos del control de procesos industriales. Una minicomputadora típica tenía una longitud de palabra de 16 bits, una memoria de 64 a 128 Kbytes, podía realizar una suma en  $2 \mu s$  y una multiplicación en  $7 \mu s$ , sin embargo, seguían siendo sistemas muy costosos en 1975 un mainframe típico de minicomputadora costaba alrededor de diez mil dólares, con lo cual un sistema completo para aplicaciones de control ascendía hasta unos cien mil dólares en total.

### Periodo de las microcomputadoras (inicios de los 70's)

Con el desarrollo del microprocesador en 1972 el costo y el tamaño de las computadoras se abatió aún más. En 1980 la tarjeta principal de una computadora con el mismo poder que una minicomputadora de 1975 costaba unos quinientos dólares. Esto trajo como consecuencia prácticamente la desaparición de los controladores analógicos y su reemplazo por controladores digitales compactos de un solo lazo basados en microcontrolador. En la figura 1.4 se muestra el aspecto físico de un controlador analógico y un controlador digital de un solo lazo, ambos implementan controladores tipo P.I.D.



Figura 1.4. Aspecto físico de un controlador industrial de un solo lazo (a) Analógico. (b) Digital.

A partir de los años 90 los **microprocesadores** se podían adquirir por unos pocos dólares, esto trajo un profundo impacto en las aplicaciones del control por computadora, al grado de que actualmente prácticamente todos los controladores están basados en computadora. Además, las industrias masivas como la automotriz impulsaron el desarrollo de computadoras de propósito especial en un solo circuito integrado llamadas **microcontroladores**, las cuales incluyen en un solo chip además de la CPU, memoria y puertos de entrada/salida, convertidores analógico/digital y digital/analógico, timers, y otros dispositivos necesarios para una gran gama de aplicaciones en el control de procesos.

En la figura 1.5 se muestran controladores digitales Yokogawa de un solo lazo, los cuales implementan las acciones clásicas de control P, PI, PD, PID, en forma digital, enriquecidas con algoritmos digitales de autosintonización, además de las prestaciones que aporta la

interface visual que aporta una pantalla LCD en color que puede conmutar a diferentes modos y presentaciones como las mostradas



Figura 1.5. Controladores digitales actuales de un solo lazo de control.

**Primer sistema de Control Distribuido: en 1975 (TDC2000 de Honeywell)**

El microcontrolador hizo económicamente posible diseñar computadoras especializadas en cada parte del proceso, de manera que en un tiempo ya se tenían computadoras interactuando y compartiendo las diferentes labores de control, supervisión, monitoreo, almacenamiento, todas ellas intercomunicadas mediante una red de área local también basada en computadoras. Este esquema mejoró notablemente la robustez del sistema global, la disponibilidad de los componentes, así como el la velocidad al realizar procesamiento en paralelo basado en múltiples computadoras. A este esquema se le denominó control distribuido (ver figura 1.6). El primer esquema de este tipo fue comercializado por Honeywell en 1975 y se denominó el TDC2000.

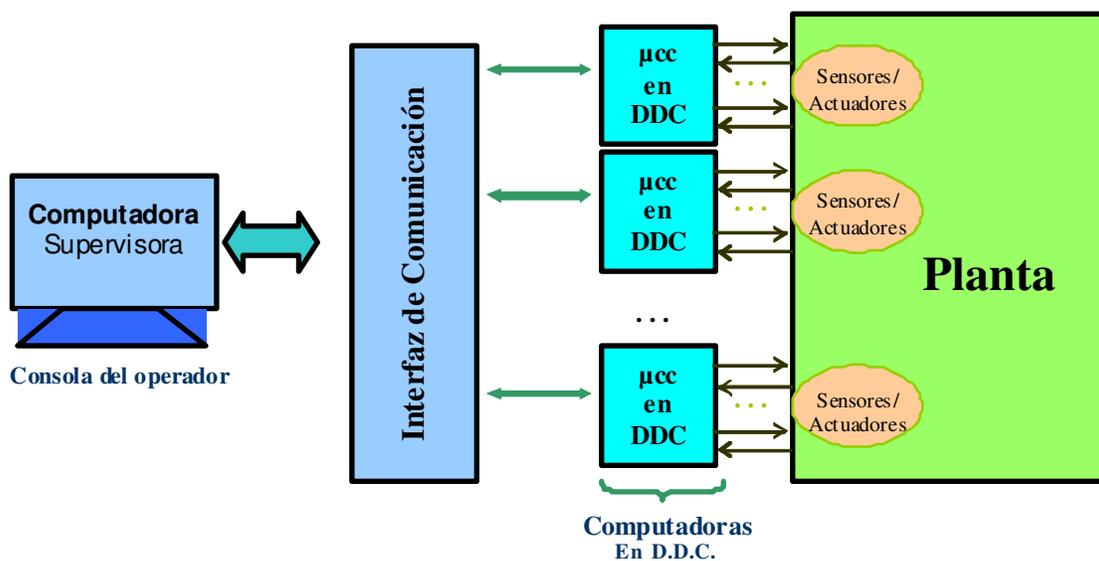


Figura 1.6. Esquema de control jerárquico o distribuido.

En la actualidad las compañías de automatización diseñan prácticamente todos sus equipos pensados como una pieza de un sistema de control distribuido, por ejemplo, en la figura 1.7 se muestra el diagrama de un sistema de control distribuido actual de la compañía Foxboro.

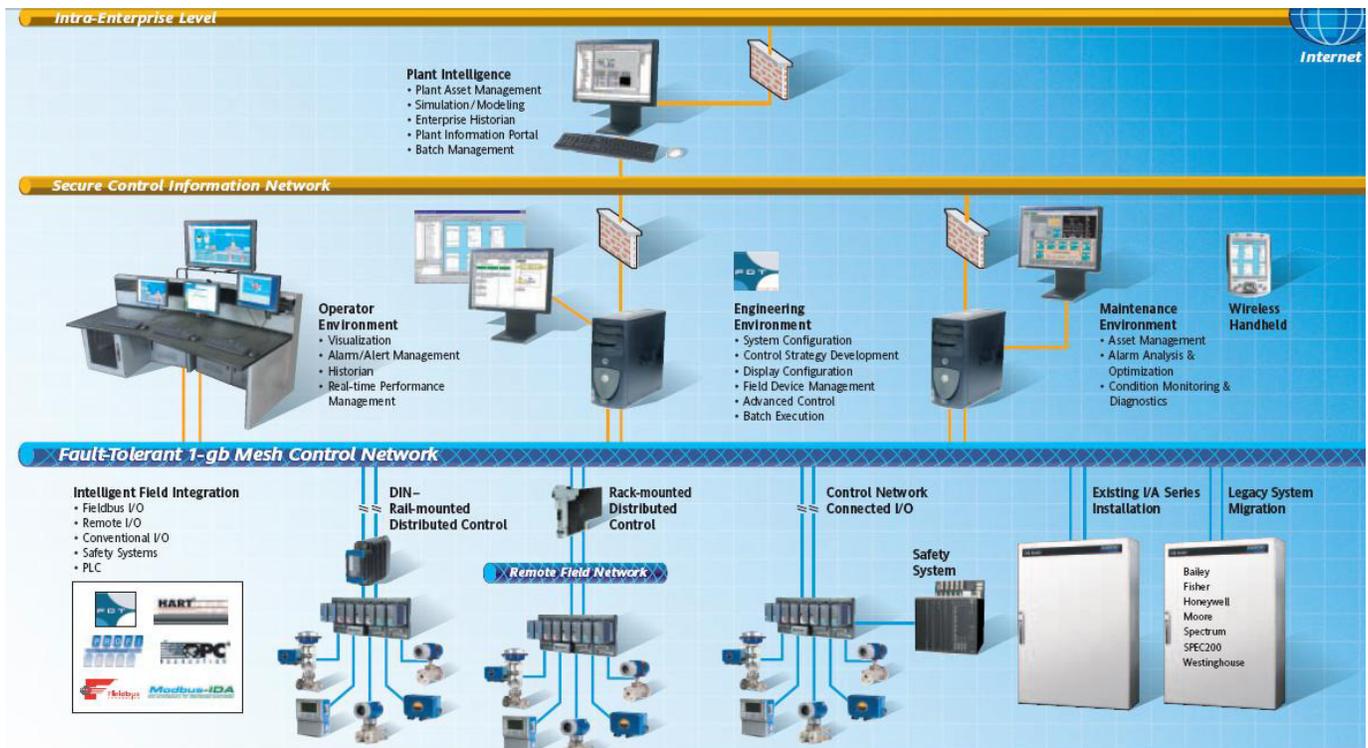


Figura 1.7. Sistema de control distribuido actual de la compañía Foxboro.

### 1.3.- Desarrollo de la Teoría del Control Digital

A continuación se enumeran algunos de los desarrollos más significativos de la teoría de control digital y de control en general.

1948 Oldenburg y Sartorius.- Ecuaciones de diferencias para SLIT's

1949 C. Shannon concreta un trabajo previo de Nyquist estableciendo el teorema fundamental del muestreo.

1947 Hurewicz define una transformación para señales discretas

1952 Ragazzini y Zadeh (USA) retoman el trabajo de Hurewicz y definen la *Transformada Z*. Esta es definida también en forma independiente por Tsytkin (URSS), Jury (USA) y Barker (Inglaterra). Otro enfoque fue desarrollado por Tsytkin en 1950, Barker en 1951, y Jury en 1956 esta alternativa fue conocida como la *Transformada Z modificada*.

1960 R. Kalman Introduce la teoría del espacio de estado.

1957 Bellman y Pontryagin (1962). Muestran que el problema del diseño de controladores puede formularse como un Problema de optimización.

1960 Kalman: problema LQR = Ecuación de Riccati. Introduce también la teoría de control estocástico convirtiendo el controlador LQR en el LQG lo que conlleva más tarde al Filtro de Kalman

1969 – 1979 Métodos polinomiales para la solución de problemas específicos de control (Kalman 1969, Rosenbrock 1970, Wonham 1974, Blomberg & Ylinen 1983, Kucera 1979).

1970's – 1980's Se desarrollan metodologías para la *identificación de procesos* basadas en computadora. Astrom y Eykhoff (1971), Ljung (1987)

1970's – 1980's paralelamente se desarrollan también metodologías para incorporar esquemas de identificación a los controladores diseñados, de manera que se obtienen *controladores adaptables* que por primera vez son viables dados los avances de la tecnología digital Astrom y Wittenmark (1973, 1980, 1995).

1974: El Británico Ebrahim Mandani, demuestra la aplicabilidad de la lógica difusa descrita (por Lofti Zadeh 10 años antes) en el campo del control, desarrolla el primer sistema de *Control con Lógica Difusa* práctico: La Regulación de un Motor de Vapor esto inaugura los primeros trabajos de técnicas de inteligencia artificial aplicadas al control: después vendrían las redes neuronales y los algoritmos genéticos.

1980's Aparecen los primeros controladores digitales que incorporan herramientas de sintonización automática desarrolladas como un producto de la teoría del control adaptable.

En 1987, aparece el concepto de "Fuzzy Boom", ya que se comercializa una multitud de productos basados en la lógica difusa, sobretudo en el Japón.

1980 a la fecha. George Zames (1981). Introduce la técnica de diseño de controladores robustos denominada control H-infinito. Alberto Isidori (1985). Retoma las herramientas de la geometría diferencial para el estudio de los sistemas no lineales

### 1.3.1.- El futuro del control por computadora

El desarrollo que se espera para el futuro próximo se deberá dar en:

**Conocimiento de los procesos.**- El conocimiento de los procesos se ve impulsado por el uso de las computadoras conectadas a los procesos, ya que de esta manera es más fácil la obtención de datos en línea así como la realización de experimentos y el proceso de los resultados.

**Tecnología de las mediciones.**- Esto es difícil de predecir, sin embargo, la combinación de sensores de distintas tecnologías con los modelos matemáticos del proceso ya aporta nuevas

técnicas de diagnóstico de fallas, además del desarrollo de medidores basados en computadora.

**Tecnología de las computadoras.**- Aquí se espera un desarrollo continuado de la reducción de la razón costo/desempeño de los circuitos principales y de soporte de las computadoras, además del desarrollo de software y periféricos cada vez más poderosos.

**Teoría del control.**- La incorporación de las herramientas teóricas desarrolladas ha sido gradual (control adaptable, control de modelo predictivo) sin embargo aún faltan por incorporarse muchos algoritmos y metodologías.

**Dificultades:** La implementación de los nuevos métodos de control en tiempo real basados en herramientas de software accesibles.

#### 1.4.- ¿Porqué una teoría de control por computadora?

Una manera simple de ver el control digital es considerarlo como una versión aproximada del control analógico, es decir, podemos usar la teoría de control analógico tradicional para desarrollar controladores analógicos y al final hacer una buena aproximación discreta del controlador obtenido, entonces ¿porqué considerar una teoría aparte para estudiar los sistemas de control por computadora?.

Una buena teoría de control debe explicar completamente el esquema básico de control por computadora mostrado en la figura 1.1. el cual tiende a comportarse como un sistema analógico conforme la frecuencia del reloj se incrementa más y más. Sin embargo, existen varios fenómenos propios de este esquema que no pueden ocurrir en un sistema puramente analógico.

##### 1.4.1.- Características propias de los sistemas muestreados.

Las siguientes características están presentes en los sistemas muestreados, sin embargo, NO pueden aparecer en los sistemas lineales invariantes en el tiempo con controladores continuos:

- Dependencia del tiempo
- Armónicos de alto orden
- Transitorio de tiempo finito (tiempo de asentamiento finito)

##### Dependencia del tiempo.

Por ejemplo, consideremos la respuesta en el tiempo de un sistema continuo y uno digital bajo la misma entrada (escalón unitario) mostrada en la figura 1.8

$$\text{Continuo: } \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

$$\text{Discreto: } y_k = 0.3679y_{k-1} + 0.6321u_k$$

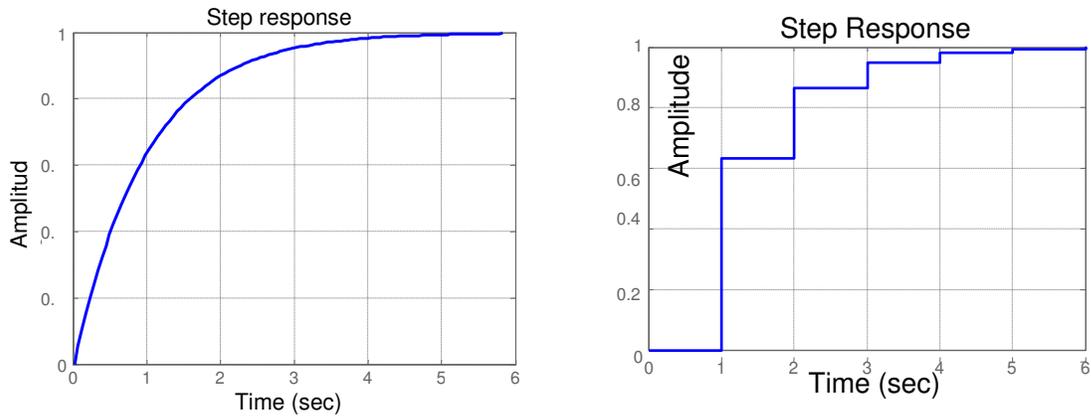


Figura 1.8. Respuesta al escalón unitario de un sistema continuo y un sistema discreto.

Y luego veamos qué ocurre si el escalón se retarda 0.5 segundos. La respuesta de ambos sistemas se muestra en la figura 1.9

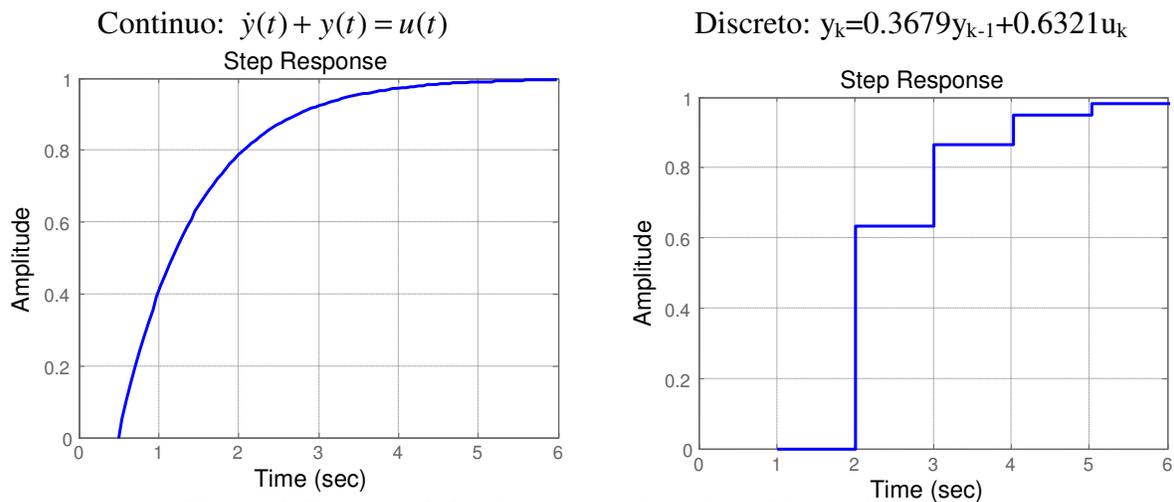


Figura 1.9. Respuesta de los sistemas anteriores al escalón retardado 0.5 seg.

De la figura 1.9 se puede observar que mientras la salida del sistema continuo cumple con la propiedad de invariancia en el tiempo:

Si la respuesta a  $u(t)$  es  $y(t)$ , entonces la respuesta a  $u(t-0.5)$  es  $y(t-0.5)$

En cambio, la salida del sistema discreto produce una salida  $y(k-1)$  en lugar de la esperada  $y(k-0.5)$ .

**Armónicos de alto orden**

Para el mismo par de sistemas del caso anterior, si obtenemos su respuesta a una entrada puramente senoidal de 0.25 hertz, con un periodo de muestreo de 1.9 segundos, obtenemos la respuesta mostrada en la figura 1.10.

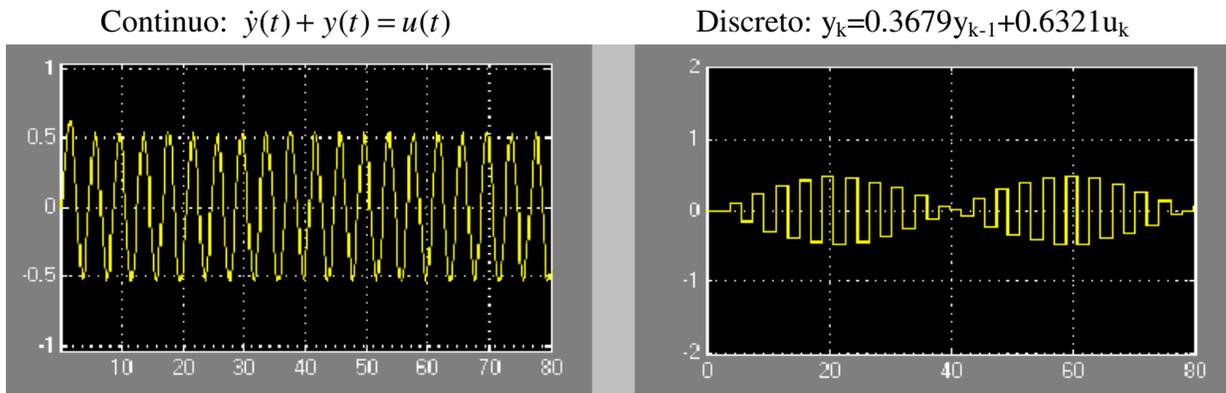


Figura 1.10. Respuesta de ambos sistemas a una señal senoidal de 0.25 hertz

Como puede observarse de la figura 1.10, mientras que el sistema continuo presenta un estado estacionario completamente senoidal con una frecuencia igual a la de entrada, la salida del sistema discreto es un tren de pulsos cuadrados, el cual contiene una gama de frecuencias muy grande, no presente en la entrada.

### Transitorio de tiempo finito

Consideremos el sistema doble integrador

$$\ddot{y} = u(t) \quad (1.3)$$

Consideremos además el controlador analógico por retroalimentación de estado:

$$u(t) = k_1 y + k_2 \dot{y} \quad (1.4)$$

Con  $k_1 = k_2 = -1$

En la figura 1.11 se muestra la respuesta del controlador analógico en color azul y la respuesta correspondiente de su versión discretizada (en color rojo) con un periodo de muestreo  $T_s = 0.1s$ . En la figura 1.12 se muestran las acciones de control necesarias para obtener la respuesta de la figura 1.11.

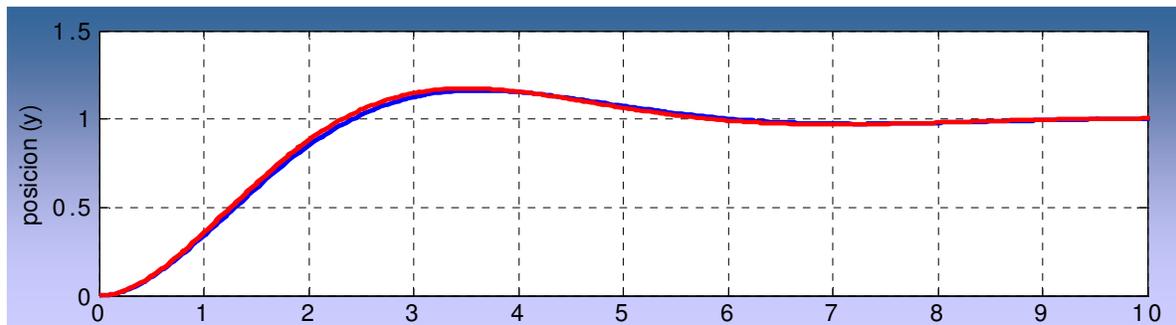


Figura 1.11. Respuesta al escalón unitario del integrador doble con la retro de estado continua y discretizada

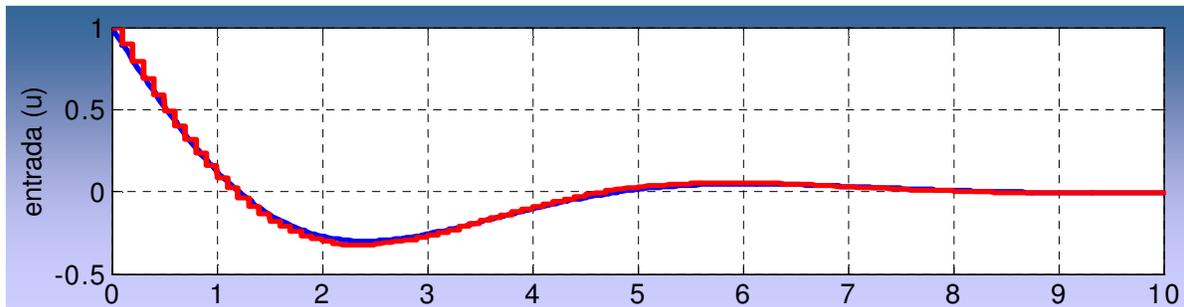


Figura 1.12. Acción de control aplicada al doble integrador con la retro de estado continua y discretizada

La ley de control discretizada se calcula en los instantes de muestreo simplemente como

$$u(kT_s) = k_1 y(kT_s) + k_2 \dot{y}(kT_s) \tag{1.5}$$

y se mantiene constante entre un instante de muestreo y el siguiente, por esta razón la gráfica de  $u(k)$  presenta la forma escalonada típica mostrada en la figura 1.12.

Utilizando teoría de control digital se demuestra que la ley de control (1.5) corresponde a un controlador “deadbeat”, el cual tiene un tiempo de asentamiento finito de  $n \cdot T_s$  donde  $n=2$  (orden del sistema) cuando se eligen las ganancias siguientes:

$$k_1 = -\frac{1}{T_s^2}, \quad k_2 = -\frac{3}{2T_s} \tag{1.6}$$

La figura 1.13 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado usando el controlador deadbeat con  $T_s=1\text{seg}$ .

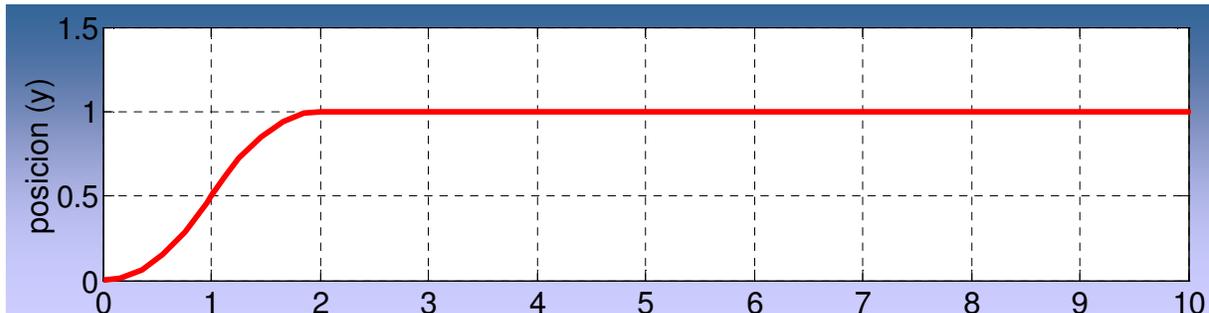


Figura 1.13 respuesta del doble integrador con el controlador deadbeat con  $T_s=1s$

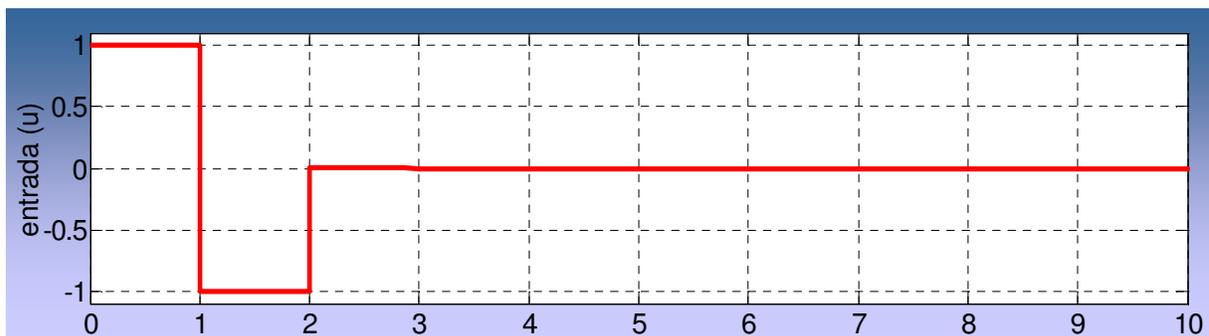


Figura 1.14 Acción de control del deadbeat aplicada al doble integrador.

Como puede apreciarse en la figura 1.13, la salida del sistema alcanza la referencia en 2 segundos y la acción de control (figura 1.14) no requiere un esfuerzo muy considerable comparado con el controlador analógico o el discretizado del primer caso (figura 1.12).

#### **1.4.2.- Procesos inherentemente muestreados.**

Si no fuera suficiente justificación la existencia de los comportamientos propios de los sistemas digitales mencionados arriba, existen también sistemas que son discretos de origen, es decir, sistemas que no son discretizaciones de procesos continuos. Por ejemplo:

- Algoritmos ejecutados en computadora. (Métodos numéricos): Muestreo gobernado por el reloj de la computadora.
- Sistemas de medición muestreados
  - Radar: muestras cada revolución de la antena
  - Instrumentos analíticos (espectrógrafos, cromatógrafos): Muestras de la sustancia procesadas fuera de línea
  - Sistemas económicos: muestras cada periodo de corte.
- Electrónica de potencia: muestreo debido al switcheo de los tiristores
- Sistemas biológicos: transmisión de señales en el sistema nervioso basadas en pulsos.
- Motores de combustión interna: están sincronizados por el proceso de explosión repetitiva.

## Capítulo 2

# Modelado del Proceso de Muestreo

### 2.1. Introducción.

El muestreo es la propiedad fundamental de los sistemas de control por computadora y es realizado como una parte del proceso de conversión de Analógico a Digital.

En el contexto de comunicaciones electrónicas y sistemas de control, “muestrear” significa reemplazar una señal continua por sus valores numéricos o muestras tomados en ciertos instantes de tiempo denominados instantes de muestreo.

El proceso inverso al muestreo consiste en convertir una secuencia de valores numéricos (muestras) a una señal continua y se denomina *inversión del muestreo* o *reconstrucción de señales*. Este proceso inverso es realizado en los convertidores de digital a analógico.

### 2.2.- Descripción del proceso de muestreo y definiciones

En la figura 2.1 se describe el proceso de muestreo que convierte la *señal analógica*  $f(t)$  en la *señal de tiempo discreto*  $f(t_k)$ .

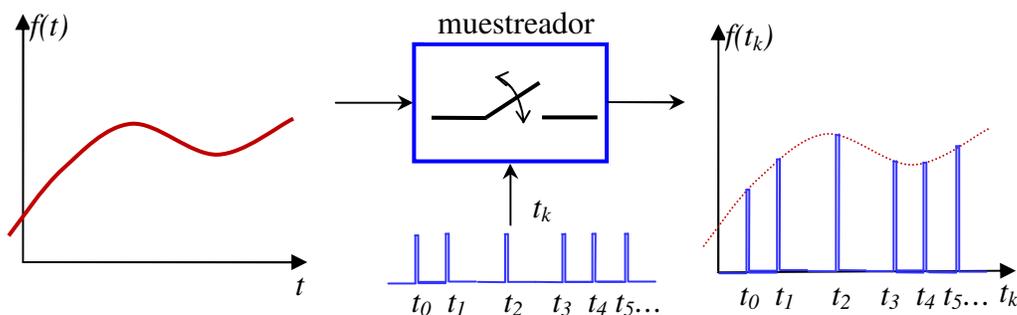


Figura 2.1. El proceso de muestreo.

El proceso de muestreo solo discretiza los valores del tiempo (escala horizontal) y no los valores de la señal (escala vertical), esto es sólo una parte de lo que ocurre en un convertidor de analógico a digital, ya que en el muestreo solo se convierten en discretos los valores del tiempo, por ello a  $f(t_k)$  se le llama señal de tiempo discreto.

En un convertidor de analógico a digital, también se discretizan los valores de  $f(t_k)$  al expresarlos con un número finito de bits (a este proceso se le llama *cuantización*). De esta manera, al usar  $n$  bits, solo se pueden representar  $2^n$  valores de  $f(t_k)$  y el resto de los valores simplemente se redondean al valor más cercano.

En la figura 2.2 se muestra la etapa de cuantización suponiendo que se usan solamente  $n=3$  bits y por lo tanto solo se pueden representar 8 valores distintos de  $f(t_k)$ .

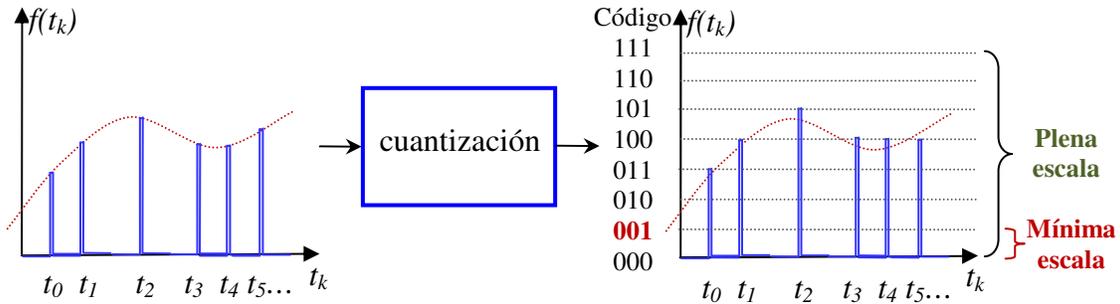


Fig. 2.2. Proceso de cuantización y codificación para  $n=3$  bits.

Después de la cuantización se asigna un código binario a cada valor representable de la señal  $f(t_k)$ , con esto se discretiza la escala vertical, obteniéndose una señal discreta en ambas escalas (vertical y horizontal).

Denotaremos los instantes de muestreo como  $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  o bien, como  $t_k$  con  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  de manera que la versión muestreada de  $f(t)$  consiste en la secuencia, lista o conjunto de valores  $f(t_k) = \{f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots\}$ .

**Muestreo uniforme o periódico.**- Es el que se considerará en este curso y corresponde al caso en que los instantes de muestreo son equidistantes, es decir, son múltiplos de un intervalo de tiempo constante  $h$ . A esta constante  $h$  se le llama **periodo de muestreo**.

$$t_k = k \cdot h$$

En este caso la secuencia  $f(t_k)$  se convierte en

$$f(t_k) = \{f(0), f(h), f(2h), f(3h), \dots\}$$

**Tasa y Frecuencia de muestreo.**- La tasa de muestreo (en muestras/seg) se denota por  $f_s$  y se define como el inverso del periodo de muestreo, es decir

$$f_s = \frac{1}{h} \text{ (muestras/seg)}$$

Y la frecuencia de muestreo(en rad/seg) se denota como  $\omega_s$  y se define como

$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{h} \text{ (rad/seg)}$$

### 2.3.- Introducción al Teorema Fundamental del Muestreo.

Una pregunta fundamental que se desprende del proceso de muestreo es la siguiente ¿Será posible recuperar la información de la señal analógica  $f(t)$  a partir de sus muestras  $f(t_k)$ ? El teorema fundamental del muestreo responde a esta pregunta. Para ganar alguna noción intuitiva respecto a este teorema observemos que entre más muestras tomemos por unidad de tiempo (es decir, entre mayor sea la frecuencia de muestreo  $f_s$ ) perderemos menos información de la señal original, pero la información perdida también depende de que tan rápido cambia dicha señal original. Para visualizar esta situación consideremos el muestreo de dos señales muestreadas a la misma frecuencia  $f_s$ , pero una señal con variaciones lentas y otra con variaciones rápidas en la figura 2.3

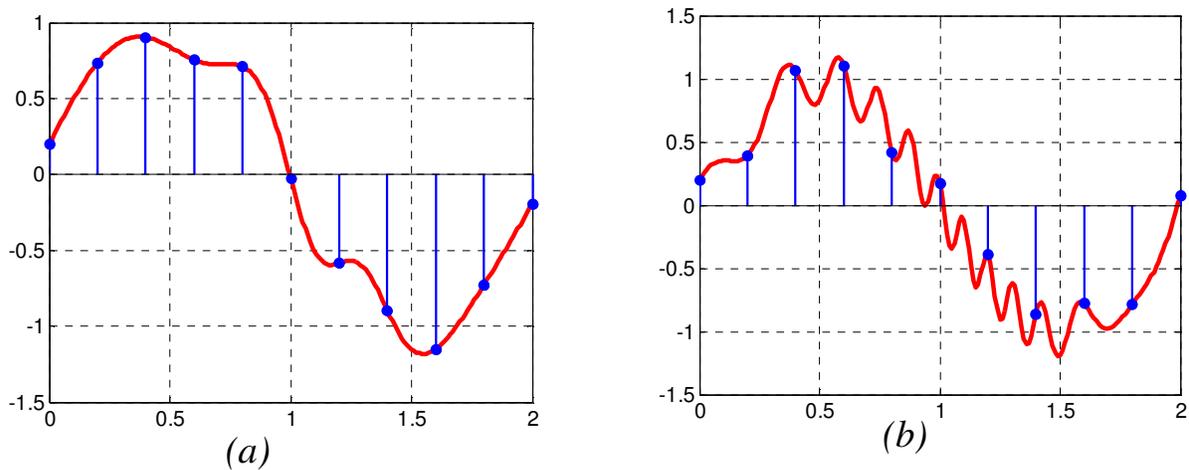


Fig. 2.3.- Dos señales muestreadas a la misma frecuencia  $f_s$ . a) Señal con variaciones lentas. b) Señal con variaciones rápidas

Como puede intuirse de la figura 2.3, es posible que no se pueda recuperar la señal original del inciso (b) a partir de sus muestras.

Un caso que hace evidente lo que ocurre en la figura 2.3(b) es el mostrado en la figura 2.4 en donde se muestrean dos señales distintas:  $f_1(t) = 1 + \sin(2\pi t)$ ,  $f_2(t) = 1$ . En este caso se obtienen las mismas muestras  $f(t_k)$  para las dos señales, por lo tanto a partir de las puras muestras es imposible saber si las muestras provienen de una señal o de la otra.

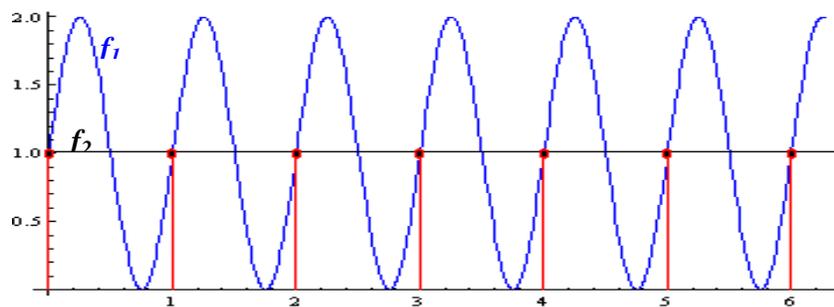


Fig. 2.4.- Dos señales que producen las mismas muestras.

**2.3.1.- El Teorema de Nyquist-Shannon.**

El teorema del muestreo de Nyquist-Shannon, también conocido como teorema del muestreo de Whittaker-Nyquist-Kotelnikov-Shannon, es un teorema fundamental de la *teoría de la información*, de especial interés en las telecomunicaciones y en el control digital. Este teorema fue formulado en forma de conjetura por primera vez por Harry Nyquist en 1928 (*Certain topics in telegraph transmission theory*), y fue demostrado formalmente por Claude E. Shannon en 1949 (*Communication in the presence of noise*). La siguiente es la versión de Shannon:

Una señal continua  $f(t)$  que no contiene frecuencias mayores a  $\omega_0$  está dada de manera única por sus muestras en puntos equidistantes  $\{..., f(-2h), f(-h), f(0), f(h), f(2h),...\}$  si  $\omega_s > 2\omega_0$

Además, la señal continua  $f(t)$  se puede calcular a partir de sus muestras mediante la siguiente *fórmula de interpolación de Shannon*.

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \text{Sinc}[\omega_s(t-kh)/2] \tag{2.1}$$

Donde la función *Sinc* se define como

$$\text{Sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

**Demostración:**

La hipótesis de que  $f(t)$  no contiene frecuencias mayores a  $\omega_0$ , significa que el espectro (contenido de frecuencia o Transformada de Fourier)  $F(\omega)$  de la señal es de *Ancho de Banda Limitada* como se muestra en la figura 2.5.

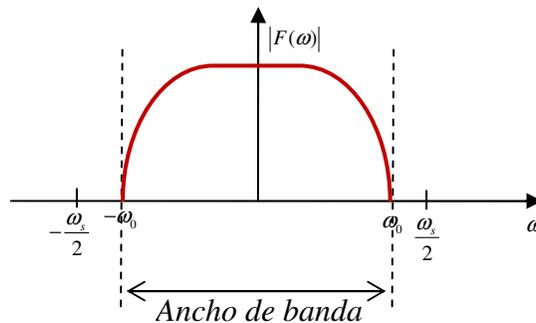


Figura 2.5.- Espectro de banda limitada

$F(\omega)$  es la Transformada de Fourier de  $f(t)$ , es decir,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \tag{2.3}$$

O bien,  $f(t)$  es la Transformada Inversa de Fourier de  $F(\omega)$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \tag{2.4}$$

A partir de  $F(\omega)$  definimos la función auxiliar siguiente

$$F_s(\omega) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega + k\omega_s) \tag{2.5}$$

Obsérvese que en el caso en que  $\omega_s > 2\omega_0$ , entonces  $F_s(\omega)$  es simplemente una secuencia periódica de copias de  $F(\omega)$  como se muestra en la figura 2.6(a).

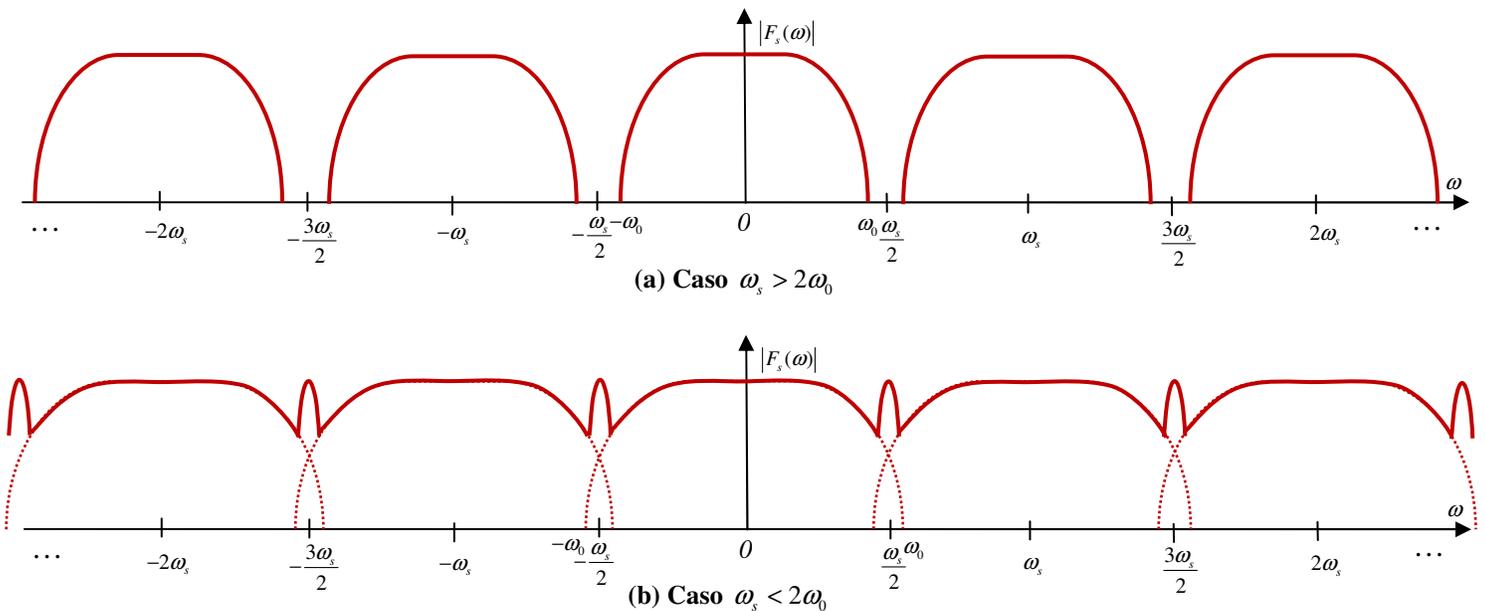


Figura 2.6.- Espectro de la señal  $F_s(\omega)$  a) Para  $\omega_s > 2\omega_0$ . b) Para  $\omega_s < 2\omega_0$

En el caso en que  $\omega_s < 2\omega_0$ ,  $F_s(\omega)$  se deforma debido a la contribución del traslape de cada copia de  $F(\omega + k\omega_s)$  con la copia vecina  $F(\omega + (k+1)\omega_s)$  lo cual hace aparecer frecuencias que no estaban en el espectro original como se observa en la figura 2.6(b).

A continuación supondremos que ocurre el caso de la figura 2.6(a), es decir, supondremos que  $\omega_s > 2\omega_0$ .

Como  $F_s(\omega)$  es periódica de periodo  $\omega_s$  se puede expandir en una serie de Fourier, como sigue

$$F_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-jkh\omega} \tag{2.6}$$

Donde los coeficientes  $C_k$  están dados por

$$C_k = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F_s(\omega) e^{jk\omega} d\omega \quad (2.7)$$

Aseguramos que  $C_k = f(kh)$ , para verificarlo, evaluemos  $f(t)$  dado por (2.4) en  $t = kh$

$$f(kh) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega kh} d\omega$$

Y como suponemos que  $\omega_s > 2\omega_0$  entonces

$$f(kh) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F(\omega) e^{j\omega kh} d\omega$$

Y como en este intervalo  $F(\omega) = hF_s(\omega)$ , entonces

$$f(kh) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F_s(\omega) e^{j\omega kh} d\omega$$

Y como  $\omega_s = \frac{2\pi}{h}$ , obtenemos

$$f(kh) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F_s(\omega) e^{j\omega kh} d\omega = C_k$$

Por lo tanto:

- Conociendo  $C_k = f(kh)$  podemos calcular de manera única  $F_s(\omega)$ , usando (2.6),
- Conociendo  $F_s(\omega)$  podemos calcular de manera única  $F(\omega)$  (truncando entre  $-\frac{\omega_s}{2}$  y  $\frac{\omega_s}{2}$ )
- y conociendo  $F(\omega)$  podemos calcular de manera única  $f(t)$  usando (2.4)

Con lo cual queda demostrado el teorema. □

A continuación demostraremos que la manera de reconstruir la señal original a partir de sus muestras se logra mediante la fórmula de interpolación (2.1)

Partiendo de (2.4), tenemos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Y si  $\omega_s > 2\omega_0$  lo anterior se puede expresar en términos de  $F_s(\omega)$  como

$$f(t) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} F_s(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Sustituyendo la serie de Fourier para  $F_s(\omega)$  (2.6) obtenemos

$$f(t) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-jk h \omega} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

Introduciendo el exponencial a la sumatoria

$$= \frac{h}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) e^{j\omega(t-kh)} d\omega$$

Usando la linealidad de la integral

$$= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} f(kh) e^{j\omega(t-kh)} d\omega$$

Sacando el factor que no depende de la variable de integración  $\omega$

$$= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} e^{j\omega(t-kh)} d\omega$$

Integrando para  $t \neq kh$

$$= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{1}{j(t-kh)} e^{j\omega(t-kh)} \Big|_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2}$$

$$= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{e^{j\omega_s(t-kh)/2} - e^{-j\omega_s(t-kh)/2}}{j(t-kh)}$$

Usando la fórmula de Euler

$$= \frac{h}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{2 \sin[\omega_s(t-kh)/2]}{(t-kh)}$$

Reacomodando las constantes y recordando que  $\omega_s = \frac{2\pi}{h}$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \frac{\sin[\omega_s(t-kh)/2]}{\omega_s(t-kh)/2}$$

Que es la fórmula de interpolación (2.1) buscada para  $t \neq kh$ . El caso  $t = kh$  sólo implica cambiar el valor de la integral por  $\omega_s$ .

### Observaciones sobre el Teorema del Muestreo:

1. A la frecuencia  $\omega_N = \frac{\omega_s}{2}$  en rad/seg se le denomina Frecuencia de Nyquist y define la máxima frecuencia contenida en la señal original que puede ser reconstruida tras el

muestreo. (no confundir con la Tasa de muestreo de Nyquist en muestras/seg, la cual se define como  $F_N = 2F_0$  y define la máxima tasa de muestreo para la cual no es posible reconstruir la señal)

2. La ecuación (2.1) define la reconstrucción de señales cuya Transformada de Fourier es nula para frecuencias mayores a  $\omega_N$
3. La fórmula (2.1) es **no causal**, ya que para calcular el valor de la señal original en un instante dado  $t$  requiere las muestras  $f(kh)$  las cuales aún no han ocurrido para  $kh > t$  (si  $t$  es el instante presente,  $kh$  es futuro si  $kh > t$ )
4. La fórmula (2.1) es una suma ponderada de las muestras  $f(kh)$ . La función de ponderación es

$$\phi(t) = \text{sinc}(\omega_s t / 2) \quad (2.8)$$

Por lo tanto la fórmula (2.1) se puede reescribir como

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)\phi(t-kh) \quad (2.9)$$

Es importante tener bien presente la forma que tiene la gráfica de la función  $\phi(t)$ , ya que es una función que aparece comúnmente en el campo del procesamiento digital de señales. Dicha gráfica se muestra en la figura 2.7.

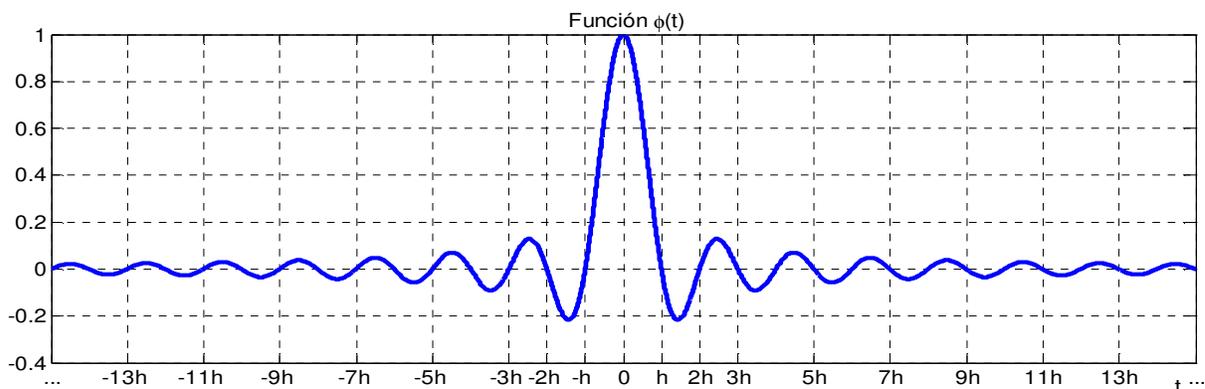


Figura 2.7.- Grafica de la función  $\phi(t) = \text{Sinc}(\omega_s t / 2)$

De la figura 2.7 se puede observar que la amplitud de la función de ponderación  $\phi(t)$  es menor del 10% para  $t > 3h$  y menor del 5% para  $t > 6h$ , por lo tanto si nos esperamos 3 o 6 periodos de muestreo podemos obtener más muestras para evaluar la fórmula disminuyendo el error de reconstrucción aproximadamente en un 10% y 5% respectivamente. Esta estrategia implica agregar *retardos* a la reconstrucción, lo cual no es deseable en sistemas de control en *tiempo real*, pero es perfectamente manejable en la reconstrucción de señales en *tiempo diferido* (señales almacenadas para su proceso posterior).

5. La fórmula (2.1) garantiza una reconstrucción perfecta cuando se cumple la condición del teorema del muestreo, es decir, cuando  $\omega_0 < \frac{\omega_s}{2}$ , pero el cálculo de la fórmula (2.1) requiere considerar todas las muestras presentes, pasadas y futuras de la señal, es decir, requiere  $f(kh)$  para  $k$  desde  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , lo cual en general no es posible. En la práctica, la sumatoria infinita se trunca a valores finitos pero muy grandes de  $k$ , obteniéndose una reconstrucción aproximada.
6. Por la razón del punto anterior, si se requiere una mejor reconstrucción en la práctica se debe exagerar la condición del teorema  $\omega_0 < \frac{\omega_s}{2}$  siendo una recomendación empírica

$$\omega_0 \ll \frac{\omega_s}{2}.$$

### Tarea No. 1

- 1.- Graficar cuatro ciclos de la señal analógica  $f(t) = \sin(200\pi t) + 0.3\cos(400\pi t)$  junto con sus muestras (ver figura 2.3). Calcular el periodo de muestreo adecuado  $h$  para tener:
  - a) 1 muestra cada ciclo
  - b) 2 muestras cada ciclo
  - c) 10 muestras cada ciclo
- 2.- Para la señal anterior calcula la frecuencia  $\omega_0$  a que hace referencia el Teorema del muestreo y para cada inciso anterior calcula  $\omega_s$  y verifica si se cumplen o no las condiciones del Teorema.
- 3.- Obtener la señal reconstruida usando la fórmula de interpolación de Shannon (2.1). Graficar la señal original junto con sus muestras y junto con la señal reconstruida para cada inciso y explicar si se obtienen los resultados esperados y si no es así explicar por qué.

## 2.4.- La Inversión del Muestreo (Reconstrucción de Señales).

Al proceso inverso del muestreo se le denomina reconstrucción de señales, es decir, la reconstrucción de señales consiste en la obtención de la señal continua  $f(t)$  a partir de la secuencia de muestras  $\{\dots, f(-2h), f(-h), f(0), f(h), f(2h), \dots\}$

### 2.4.1.- El Reconstructor de Shannon.

La fórmula de interpolación de Shannon (2.1) es el mejor método de reconstrucción en el sentido de que logra una reconstrucción perfecta cuando se cumplen las condiciones del teorema del muestreo y se aplica en la forma ideal en que está expresada.

Sin embargo, como ya se dijo antes, la mayor desventaja de este reconstructor es que se trata de una fórmula **no causal** y por lo tanto no se recomienda su uso para sistemas de control en tiempo real.

Por esta razón es conveniente disponer de métodos menos exactos pero *causales* como los que se describen a continuación

En la figura 2.8a se muestra una reconstrucción perfecta de una señal utilizando la fórmula de interpolación de Shannon. Al disminuir la frecuencia de muestreo comienzan a aparecer algunos errores en la reconstrucción como se observa en la figura 2.8b.

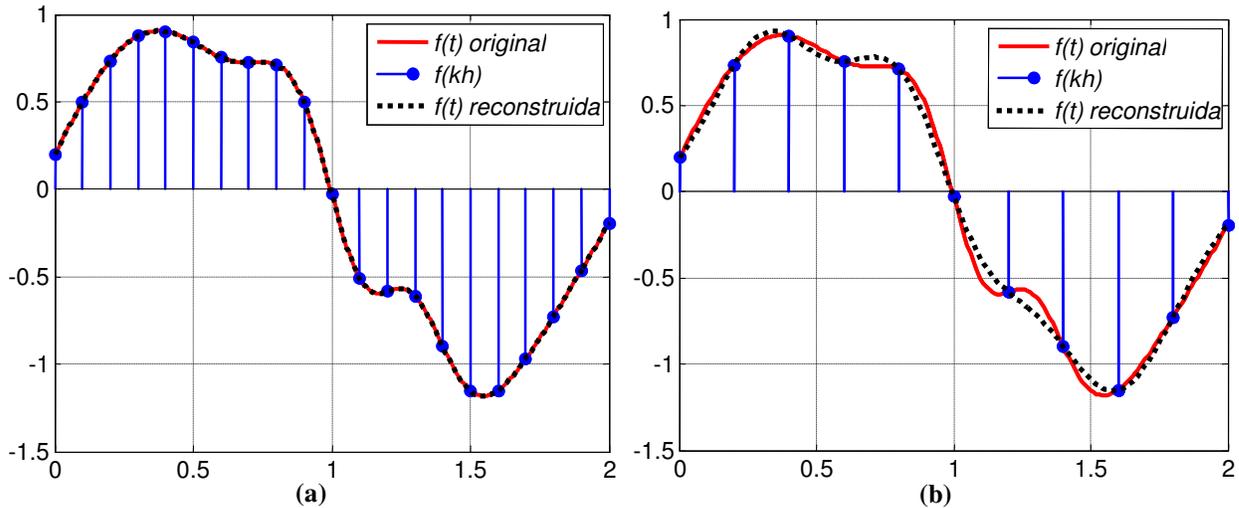


Fig. 2.8.- Reconstrucción con la fórmula de Shannon a) Caso  $\omega_s > 2\omega_0$  . b) Caso  $\omega_s < 2\omega_0$  .

### 2.4.2.- El Retenedor de Orden Cero (Zoh).

Este es el reconstructor más utilizado por su sencillez y consiste simplemente en congelar el valor de la muestra presente hasta que se tiene la siguiente muestra, es decir,

$$f(t) = f(kh) \text{ para } kh \leq t < (k+1)h \tag{2.10}$$

Por lo tanto, la señal reconstruida toma una forma escalonada como se puede ver en la figura 2.9 en la cual se muestra la reconstrucción de la misma señal que en las figuras 2.8.

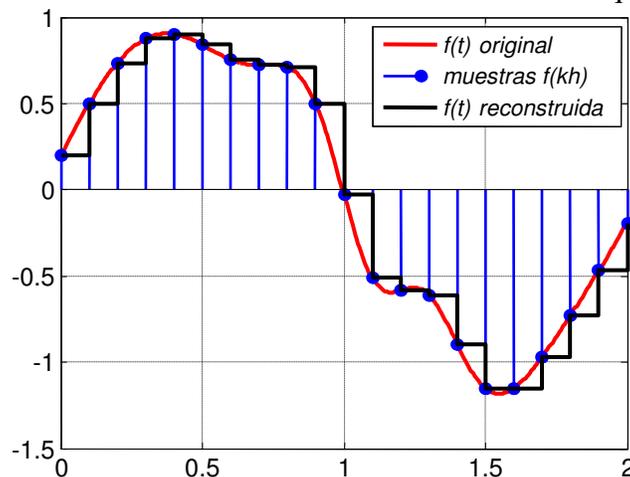


Fig. 2.9.- Reconstrucción con el retenedor de orden cero.

El retenedor de orden cero no solamente se utiliza para reconstruir señales. Es utilizado también para “retener” el valor de las muestras a la entrada de los convertidores analógico a digital mientras se realiza la conversión. En este caso el bloque de muestreo y retención van juntos como se muestra en la figura 2.10

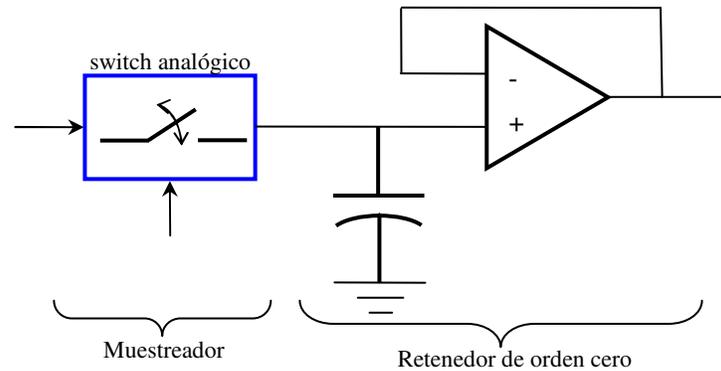


Fig. 2.10 Primera etapa de un convertidor A/D

### 2.4.3.- El Retenedor de Orden Uno (Foh).

Este retenedor une la muestra actual con la muestra siguiente mediante una línea recta cuya pendiente es igual a la línea que une la muestra pasada con la presente, es decir,

$$f(t) = f(kh) + \frac{f(kh) - f[(k-1)h]}{h}(t - kh) \text{ para } kh \leq t < (k+1)h \quad (2.11)$$

En la figura 2.11 se muestra la reconstrucción de la misma señal de la figura 2.9 mediante el retenedor de orden uno.

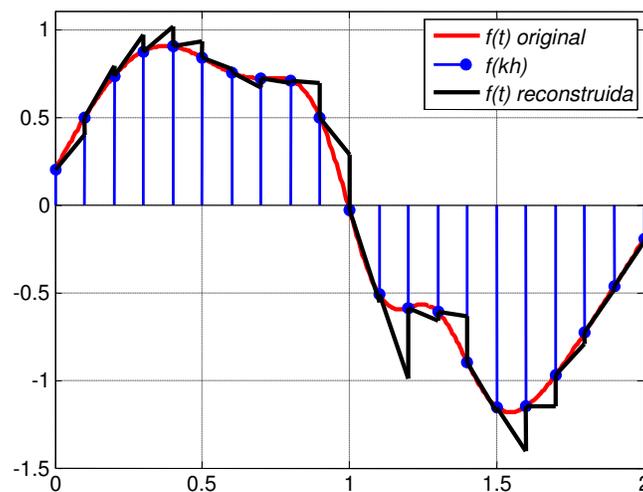


Fig. 2.11.- Reconstrucción con el retenedor de orden uno.

### 2.4.4.- El Retenedor Poligonal

Los picos de error generados por el retenedor de orden uno se deben a que es un “extrapolador”, ya que predice el comportamiento rectilíneo entre una muestra y la siguiente basado en la recta que une la muestra actual con la anterior. Si en lugar de esta idea usamos un interpolador que una la muestra actual con la siguiente mediante una recta obtenemos el retenedor poligonal siguiente

$$f(t) = f(kh) + \frac{f[(k+1)h] - f[kh]}{h}(t - kh) \text{ para } kh \leq t < (k+1)h \quad (2.12)$$

En la figura 2.12 se muestra una reconstrucción típica utilizando este retenedor poligonal.

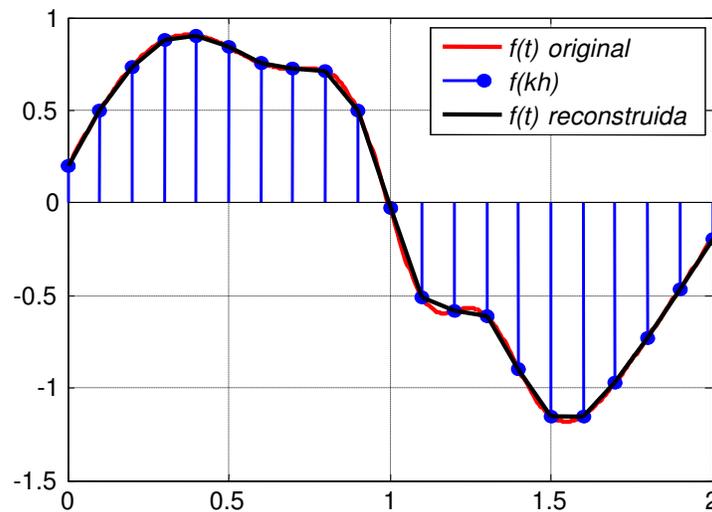


Fig. 2.12 Reconstrucción con el retenedor poligonal.

Obsérvese que la ecuación (2.12) es no-causal, por lo tanto este retenedor tampoco puede implementarse en tiempo real.

### 2.5.- Confusión de Frecuencia o Aliasing.

Cuando se muestrean señales periódicas es posible que aparezcan frecuencias lentas en la señal muestreada que no estaban presentes en la señal original.

Para explicar este fenómeno repasaremos qué es una señal periódica y estudiaremos el caso más sencillo en el que la señal periódica contiene una sola frecuencia (señal sinusoidal pura).

✚ Una señal analógica  $f(t)$  se dice periódica cuando existe una constante positiva  $T$  tal que

$$f(t) = f(t + nT) \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.13)$$

A la constante  $T$  más pequeña que cumple lo anterior se le llama el *periodo fundamental* de  $f(t)$ .

Por ejemplo, la señales sinusoidales  $f(t) = \sin(t)$  y  $g(t) = \cos(t)$  son periódicas y su periodo fundamental es  $T = 2\pi$  radianes, ya que

$$\sin(t) = \sin(t + 2n\pi) \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.14)$$

$$\cos(t) = \cos(t + 2n\pi) \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.15)$$

### Ejemplo:

La senoide de frecuencia  $\omega$  (rad/seg) dada por  $f(t) = \sin(\omega t)$  es periódica puesto que de acuerdo a (2.14)

$$f(t) = \sin(\omega t) = \sin(\omega t + 2n\pi) \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Es decir,

$$f(t) = \sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}n\right)\right) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}n\right) \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Por lo tanto su periodo fundamental es  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

En forma similar para el caso de señales discretas:

✚ Una señal de tiempo discreto  $f(kh)$  se dice periódica cuando existe un entero positivo  $N$  tal que

$$f(kh) = f(kh + nNh) \text{ con } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.16)$$

A la constante  $N$  más pequeña que cumple lo anterior se le llama el *periodo fundamental* de  $f(kh)$ .

Ahora consideramos el muestreo de una señal analógica sinusoidal  $f(t) = \sin(2\pi f t)$ , el cual consiste en convertir la señal  $f(t)$  a sus muestras  $f(kh)$ , es decir,

$$f(kh) = \sin(2\pi f kh)$$

¿Seguirá siendo periódica la señal después del muestreo?

### 2.5.1.- Tres propiedades fundamentales de las señales sinusoidales muestreadas.

☞ Para que una señal de tiempo discreto  $f(kh)$  sea periódica debe existir un entero  $N \neq 0$  tal que

$$f(kh) = f((k + N)h) \text{ para todo entero } k \quad (2.17)$$

Es decir, para el caso de la señal sinusoidal debe existir un entero  $N$  tal que

$$\sin(2\pi f kh) = \sin(2\pi f (k + N)h) = \sin(2\pi f kh + 2\pi f Nh)$$

Comparando con (2.14) obtenemos que  $fNh = \pm 1, \pm 2, \dots$  es decir,  $fNh$  debe ser un entero, lo cual es imposible cuando  $fh$  es un número irracional.

☞ **Propiedad 1.-** La señal sinusoidal muestreada  $\sin(2\pi fkh)$  no necesariamente es periódica.

**Ejemplo:** ¿En cuál de los siguientes casos la señal sinusoidal muestreada  $\sin(2\pi fkh)$  es periódica? (considerar  $h=1$ )

- a) Para  $f = 0.1$       b) Para  $f = 1.12$       c) Para  $f = \pi$       d) Para  $f = \sqrt{2}$

**Solución:** solamente en los incisos (a) y (b) se cumple que  $fh$  es racional por lo tanto solo en esos caso la senoide es periódica.

☞ **Propiedad 2.-** Las sinusoides muestreadas cuyas frecuencias están separadas un múltiplo de  $\omega_s$  (o bien un múltiplo de  $f_s$ ) son idénticas.

$$\begin{aligned} \text{En efecto,} \quad \sin((\omega_0 + n\omega_s)kh) &= \sin(2\pi(f_0 + nf_s)kh) \\ &= \sin(2\pi f_0 kh + 2\pi nf_s kh) = \sin(2\pi f_0 kh + 2\pi nk) \\ &= \sin(2\pi f_0 kh) = \sin(\omega_0 kh) \end{aligned}$$

En otras palabras, las sinusoides de frecuencias  $\omega_0, \omega_0 + n\omega_s$ , con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (o bien,  $f_0, f_0 + nf_s$ , con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) dan exactamente el mismo resultado después del muestreo.

Por esta razón se dice que las frecuencias

$$\omega_0 + n\omega_s \tag{2.18}$$

son **ALIAS** de la frecuencia  $\omega_0$  o bien, las frecuencias

$$f_0 + nf_s \tag{2.19}$$

son un ALIAS de la frecuencia  $f_0$ .

☞ **Propiedad 3.-** La máxima frecuencia posible de una senoide muestreada es  $\omega_s / 2 = \omega_N$  (o bien  $f_s / 2$ ).

Esto es consecuencia de la propiedad anterior, ya que cualquier frecuencia  $\omega$  mayor que  $\omega_s / 2$  se puede escribir como  $\omega = \omega_0 + n\omega_s$  para algún entero  $n$  donde  $\omega_0$  puede ser positiva o negativa, pero está en el rango  $|\omega_0| < \omega_s / 2$ . Ver la figura 2.13

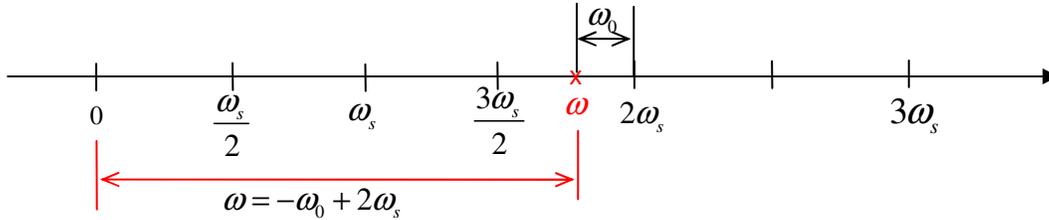


Fig. 2.13. Expresando una frecuencia  $\omega$  como  $\omega = \omega_0 + n\omega_s$

Es decir, cualquier frecuencia  $\omega$  mayor que  $\omega_s / 2$  es el alias de una frecuencia  $\omega_0$  en el rango  $-\omega_s / 2 < \omega_0 \leq \omega_s / 2$ .

En otras palabras, las únicas sinusoides muestreadas posibles tienen frecuencias en el *intervalo fundamental* siguiente

$$\frac{-\omega_s}{2} < \omega \leq \frac{\omega_s}{2} \text{ o bien, } \frac{-f_s}{2} < f \leq \frac{f_s}{2} \tag{2.20}$$

**Ejemplo.** Sea la frecuencia  $\omega = 175$  rad/seg, con  $\omega_s = 100$  rad/seg, como  $\omega$  no cumple con (2.20), debe ser el alias de otra frecuencia que si lo cumpla, esa frecuencia se debe escribir como (2.18), es decir,  $\omega = \omega_0 + n\omega_s$ , en este caso significa que  $175 = \omega_0 + n(100)$  para algún valor de  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , en este caso, con  $n = 2$ , se obtiene  $\omega_0 = -25$  rad/seg.

**2.5.2.- Frecuencia normalizada de sinusoides muestreadas.**

Cuando se muestrea la senoide  $f(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi ft)$  se obtiene la senoide muestreada  $f(kh) = \sin(\omega kh) = \sin(2\pi fkh)$  la cual se puede reescribir como

$$f(k) = \sin(\hat{\omega}k) = \sin(2\pi \hat{f}k) \tag{2.21}$$

Donde  $\hat{\omega} = \omega h = \frac{\omega}{F_s}$  y  $\hat{f} = fh = \frac{f}{F_s}$  son las *frecuencias normalizadas* de la señal muestreada (y sus unidades son radianes/muestra y ciclos/muestra respectivamente).

Obsérvese que los intervalos fundamentales dados por (2.20) en el caso de frecuencias normalizadas se convierten en

$$-\pi < \hat{\omega} < \pi \text{ o bien, } -\frac{1}{2} < \hat{f} < \frac{1}{2} \tag{2.22}$$

**Ejemplo:** Si las siguientes sinusoides continuas se muestrean usando una frecuencia de muestreo de  $F_s = 1 \text{ Kmuestra / seg}$ :

$$f_1(t) = \cos(450\pi t), \quad f_2(t) = \cos(1400\pi t), \quad f_3(t) = \cos(9520\pi t).$$

- ¿En que señales se convierten?
- ¿Cuál es la frecuencia en Hertz de las señales analógicas?
- Calcular la frecuencia en el intervalo fundamental de las señales muestreadas.
- ¿En qué casos se obtiene un alias de la frecuencia original?

**Solución:**

a) Al muestrear lo único que se cambia es  $t$  por  $kh$ , se obtienen las señales muestreadas siguientes:  $f_1(kh) = \cos(450\pi kh)$ ,  $f_2(kh) = \cos(1400\pi kh)$ ,  $f_3(kh) = \cos(9520\pi kh)$ .

b) Como  $f_1(t) = \cos(450\pi t) = \cos(2\pi(225)t)$  su frecuencia es de 225 Hz

Como  $f_2(t) = \cos(1400\pi t) = \cos(2\pi(700)t)$  su frecuencia es de 700 Hz

Como  $f_3(t) = \cos(9520\pi t) = \cos(2\pi(4625)t)$  su frecuencia es de 4625 Hz

c) Normalizando las frecuencias con  $F_s = 1000 \text{muest} / \text{seg}$ , es decir,  $h = 0.001 \text{seg} / \text{muestra}$  se obtiene

$$f_1(k) = \cos(0.45\pi k), \quad f_2(k) = \cos(1.4\pi k), \quad f_3(k) = \cos(9.52\pi k).$$

Calculando de qué frecuencia (en el intervalo fundamental) son alias:

$f_1(k) = \cos(0.45\pi k) = \cos(2\pi(0.225)k)$ . En este caso  $\hat{f} = 0.225$  ciclos/muestra está en el intervalo fundamental y no es un alias.

$f_2(k) = \cos(1.4\pi k) = \cos(2\pi(0.7)k) = \cos(2\pi(1-0.3)k) = \cos(2\pi(-0.3)k)$  por lo tanto, en este caso  $\hat{f} = -0.3$  ciclos/muestra. Es decir, 0.7 es un alias de -0.3.

$f_3(k) = \cos(9.52\pi k) = \cos(2\pi(4.76)k) = \cos(2\pi(5-0.24)k) = \cos(2\pi(-0.24)k)$  por lo tanto, en este caso  $\hat{f} = -0.24$  ciclos/muestra. Es decir, -0.24 es un alias de 4.76

d) Convertimos a frecuencia en Hertz multiplicando por  $F_s = 1000 \text{muest} / \text{seg}$  :

$$(0.225 \text{ciclos/muestra}) * (1000 \text{muestras/seg}) = 225 \text{ Hertz (no es alias)}$$

$$(-0.3 \text{ciclos/muestra}) * (1000 \text{muestras/seg}) = -300 \text{ Hertz (alias)}$$

$$(-0.24 \text{ciclos /muestra}) * (1000 \text{muestras/seg}) = -240 \text{ Hertz (alias)}$$

☞ Como era de esperarse, sólo en el segundo y tercer caso se obtuvieron alias, ya que solo en esos casos se viola la hipótesis del teorema fundamental del muestreo.

 **Tarea No. 2**

a) Verificar mediante la graficación de las sinusoides continuas siguientes  $f_1(t) = \cos(2\pi F_1 t)$ ,  $f_2(t) = \cos(2\pi F_2 t)$  donde  $F_1 = 1/8$  Hz y  $F_2 = -7/8$  Hz junto con sus muestras a razón de  $F_s = 1$  muestra/seg. (ver figura 2.14) que ambas sinusoides producen las mismas muestras (y por lo tanto una es el alias de la otra).

b) ¿Cuál es la frecuencia de la senoide discreta obtenida?

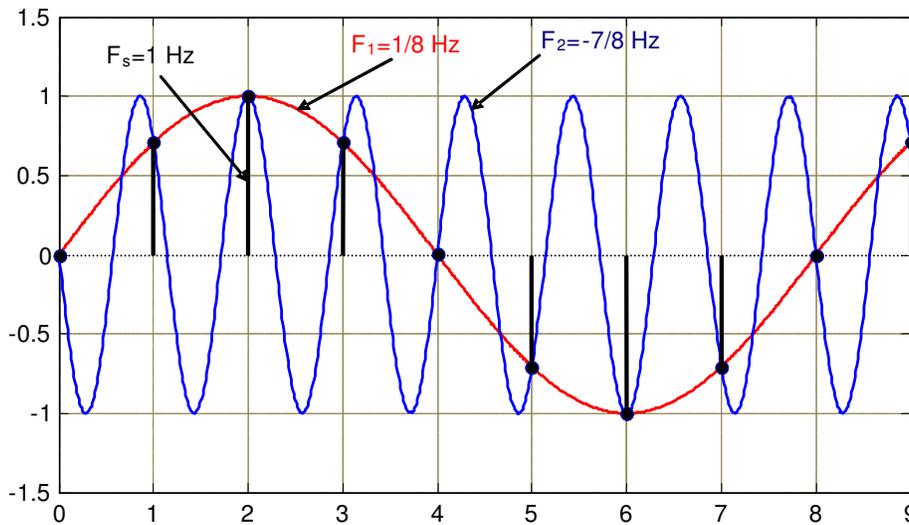


Fig. 2.14. Solución del inciso (a) de la Tarea No. 2

**Ejercicios:**

- 1.- ¿A qué frecuencia se deberá muestrear la señal  $f_1(t) = \sin(2\pi t)$  para que sea un alias de  $f_2(t) = \sin(0.4\pi t)$ ? Verificarlo graficando las dos señales junto con sus muestras a la frecuencia de muestreo calculada.
- 2.- La señal modulada  $f(t) = \sin(4\omega_0 t) \cos(2\omega_0 t)$  es muestreada con  $f_s = \frac{3\omega_0}{\pi}$ . Determina las frecuencias (en Hertz) que estarán contenidas en la señal muestreada.

**2.5.3.- Prefiltrado Antialiasing**

Una manera de asegurar que las componentes de alta frecuencia de la señal a muestrear no generen alias al muestrearse es evitando que contenga frecuencias mayores a  $\omega_N = \omega_s / 2$ , esto se puede lograr mediante un filtro analógico pasa bajas previo a la etapa de muestreo (ver figura 2.15) cuya frecuencia de corte sea  $\omega_0 \leq \omega_c \leq \omega_N$  donde  $\omega_0$  es la máxima frecuencia que nos interesa conservar de la señal original.

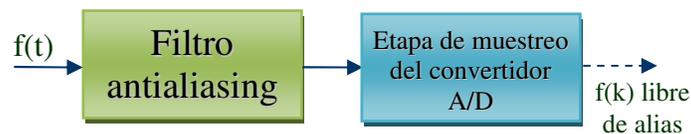


Fig. 2.15. Prefiltrado analógico antialiasing.

Un filtro pasa bajas de segundo orden con frecuencia de corte  $\omega_c$  que puede ser utilizado con este fin se muestra en la figura 2.16. La función de transferencia de este filtro es la siguiente

$$H(s) = \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\zeta\omega_c s + \omega_c^2}$$

Si se elige  $\zeta = 1/\sqrt{2}$  se tiene una respuesta de frecuencia máximamente plana en la banda de paso.

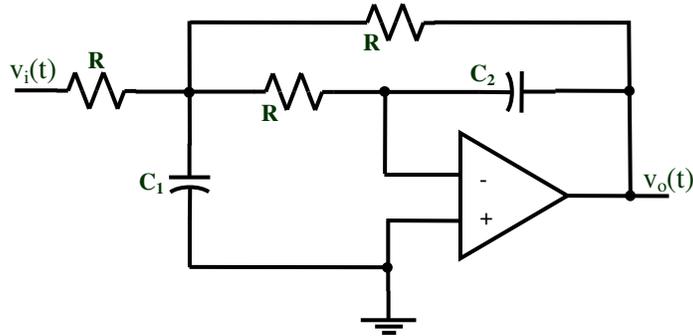


Fig. 2.16. Filtro pasabajas de segundo orden.

Los capacitores del filtro mostrado en la figura 2.16 se deben elegir como  $C_1 = \frac{3}{2\zeta}C$  y  $C_2 = \frac{2}{3\zeta}C$  para un valor de capacitancia C dado. El diagrama de Bode de Magnitud correspondiente a este filtro se muestra en la figura 2.17.

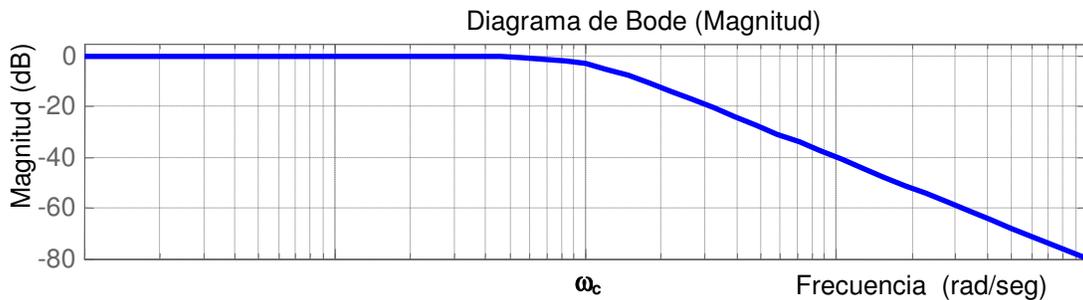


Fig. 2.17. Respuesta de frecuencia de la magnitud de ganancia del filtro pasabajas de segundo orden.

## Capítulo 3

# Modelado de Sistemas de Control Digital

### 3.1.- Modelado desde el punto de vista de la computadora.

Si nos ubicamos en el lugar del algoritmo discreto que se ejecuta en la computadora en el diagrama básico de un lazo de control digital directo (ver figura 3.1) podemos observar que desde este punto de vista, el proceso a controlar se comporta como un sistema cuya entrada manipulable es la señal discreta  $u(k)$  y cuya respuesta es la señal discreta  $y(k)$

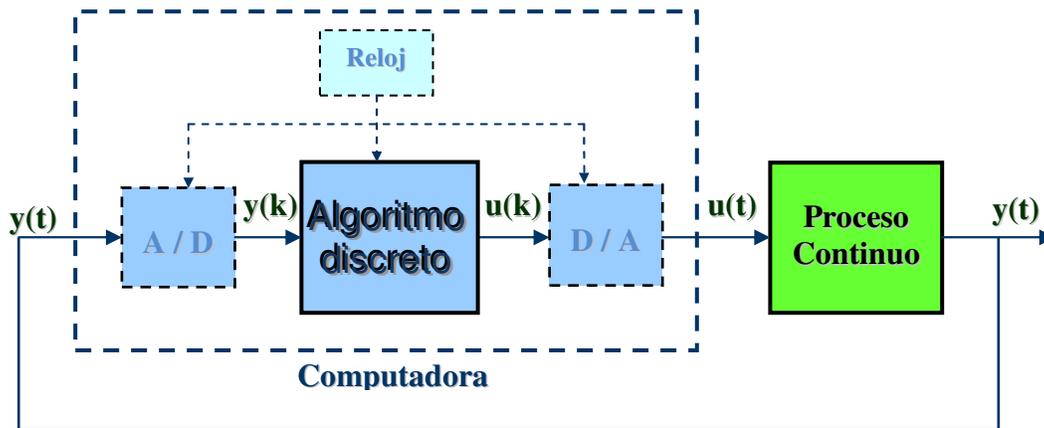


Fig. 3.1. Algoritmo discreto controlando un proceso continuo

Es decir, desde el punto de vista de la computadora, el proceso se comporta como se muestra en la figura 3.2

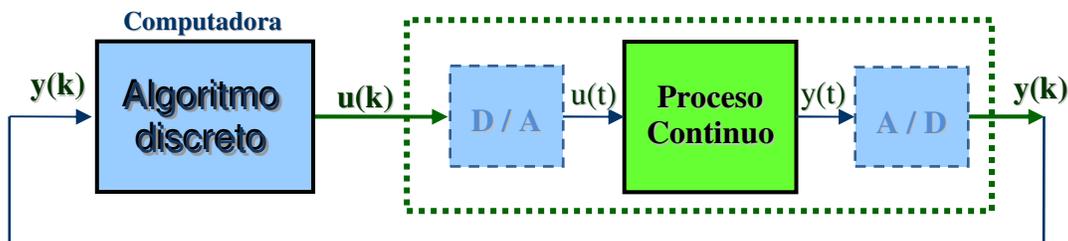


Figura 3.2. Punto de vista de la computadora

O sea que la computadora ve al proceso continuo como si fuera otro sistema que procesa entradas discretas y produce salidas discretas y por lo tanto debiera admitir un modelo discreto.

### 3.2.- Obtención de modelos discretos a partir de modelos continuos.

En esta sección se aborda el problema de obtener una representación discreta adecuada a partir del *modelo continuo lineal con coeficientes constantes* de un proceso dado.

El problema de la obtención de un modelo discreto para un sistema continuo siempre implica introducir algunas suposiciones sobre lo que ocurre entre un instante de muestreo y el siguiente (información que no se tiene) por lo cual ningún modelo discreto puede representar de manera exacta todo lo que ocurre en un sistema continuo. Para aclarar este punto partiremos de un caso particular sencillo y a partir de este caso obtendremos algunas generalizaciones.

### 3.2.1. Modelo discreto invariante al escalón para un sistema continuo de primer orden.

Supondremos que el proceso continuo es un Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT) de primer orden cuya entrada es  $u(t)$  y cuya salida es  $y(t)$ , entonces su modelo está dado por la siguiente función de transferencia

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s+a} \quad (3.1)$$

Donde  $Y(s), U(s)$  denotan la Transformada de Laplace de la salida y la entrada respectivamente y donde  $a$  y  $b$  son números reales constantes.

En el caso en que  $a$  es positiva, su único polo  $p = -a$  es negativo y el sistema es estable, resulta conveniente escribir el modelo como sigue

$$G_p(s) = \frac{K}{Ts+1} \quad (3.2)$$

Donde  $K = b/a$  es la ganancia del sistema y  $T = 1/a$  es la constante de tiempo del sistema

La ecuación diferencial correspondiente al modelo (3.1) es la siguiente

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \quad (3.3)$$

Donde  $\dot{y}(t)$  denota la derivada de la salida respecto al tiempo.

Para obtener un modelo discreto de (3.3) consideremos que las señales son muestreadas con un periodo de muestreo  $h$  y obtengamos una expresión de  $y((k+1)h)$  en función de  $y(kh)$  como se ilustra en la figura 3.3. Esto equivale a resolver la ecuación diferencial (3.3) con la condición inicial

$$y(t_0) = y(kh) \text{ para } t_0 = kh \quad (3.4)$$

La ecuación (3.3) es una ecuación diferencial lineal de primer orden y su solución general es muy conocida, está dada por

$$y(t) = e^{-a(t-t_0)} y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

La solución (3.5) nos dice cuánto vale  $y(t)$  en cualquier instante si se conoce la condición inicial  $y(t_0)$

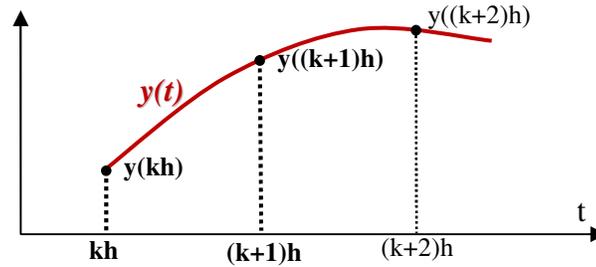


Fig. 3.3. Evolución de la salida entre instantes de muestreo consecutivos.

Sustituyendo en (3.5) la condición inicial (3.4) calcularemos el valor de la salida en el instante  $t = (k + 1)h$  como sigue

$$y((k + 1)h) = e^{-ah} y(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a(kh+h-\tau)} bu(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

La integral de la ecuación (3.6) no se puede resolver porque no se sabe como evoluciona la entrada  $u(t)$  entre instantes de muestreo, a menos que supongamos algo sobre su comportamiento.

☞ **Suposición:** Se supondrá que la entrada  $u(t)$  no varía entre instantes de muestreo. Esto podría ocurrir en la realidad de varias maneras, particularmente en los siguientes dos casos:

- 1) Si la entrada  $u(t)$  es una señal escalón.
- 2) Si  $u(t)$  se reconstruye a partir de sus muestras  $u(kh)$  mediante un retenedor de orden cero.

☞ El modelo discreto que obtendremos es **exacto en cada instante de muestreo** si se cumple la suposición anterior, debido a esto, a este modelo se le llama modelo discreto **invariante al escalón** o **equivalente discreto con retenedor de orden cero**.

Bajo la suposición anterior la ecuación (3.6) se transforma en

$$y((k + 1)h) = e^{-ah} y(kh) + bu(kh) \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-a(kh+h-\tau)} d\tau \quad (3.7)$$

Resolviendo la integral

$$y((k + 1)h) = e^{-ah} y(kh) + \frac{b}{a} u(kh) e^{-a(kh+h-\tau)} \Big|_{kh}^{(k+1)h}$$

Evaluando en los límites de la integral, obtenemos

$$y((k + 1)h) = e^{-ah} y(kh) + \frac{b}{a} (1 - e^{-ah}) u(kh) \quad (3.8)$$

Es decir, hemos obtenido el modelo discreto dado por la **ecuación de diferencias** lineal de primer orden

$$y(kh + h) = \alpha y(kh) + \beta u(kh) \quad (3.9)$$

Donde

$$\alpha = e^{-ah}, \quad \beta = \frac{b}{a}(1 - e^{-ah}) \quad (3.10)$$

o bien, en términos del polo del sistema  $p = -a$

$$\alpha = e^{ph}, \quad \beta = -\frac{b}{p}(1 - e^{ph}) \quad (3.11)$$

**Ejemplo:** Obtener el modelo discreto invariante al escalón para el sistema continuo dado por la siguiente función de transferencia. Considerar un periodo de muestreo  $h = 1$

$$G_p(s) = \frac{1}{s+1}$$

**Solución:**

En este caso  $a = b = 1$ . Sustituyendo en (3.10), obtenemos

$$\alpha = e^{-1}, \quad \beta = (1 - e^{-1})$$

Por lo tanto el modelo discreto queda

$$y((k+1)h) = e^{-1}y(kh) + (1 - e^{-1})u(kh)$$

Es decir, aproximadamente

$$y((k+1)h) = 0.3679y(kh) + 0.6321u(kh)$$

La simulación de este caso de sistema continuo y su equivalente discreto se mostraron en el capítulo 1. En la figura 3.4 se muestran nuevamente las respuestas de ambos sistemas a un escalón unitario. En esta ocasión se enciman las graficas para que se observe la perfecta coincidencia de ambos modelos en los instantes de muestreo.



Fig. 3.4. Respuesta al escalón unitario del sistema de primer orden continuo y su equivalente discreto.

### 3.2.2.- El operador corrimiento.

Antes de abordar el problema de la obtención de modelos discretos para sistemas más generales introduzcamos una notación que ayudará a simplificar la representación de los sistemas discretos.

- ✚ Se define el *operador corrimiento* o *adelanto unitario* que se denotará como  $q$  de manera que para cualquier señal discreta  $x(kh)$ 

$$qx(kh) = x(kh + h) \tag{3.12}$$

- ✚ En forma similar se define el *operador retardo unitario* o corrimiento hacia atrás denotado  $q^{-1}$  de manera que
$$qx(kh) = x(kh - h) \tag{3.13}$$

Ambos operadores se pueden aplicar de manera repetida, por ejemplo

$$q^2 x(kh) = q(qx(kh)) = qx(kh + h) = x(kh + 2h)$$

En forma similar  $q^3 x(kh) = x((k + 3)h)$ , o bien,  $q^{-3} x(kh) = x((k - 3)h)$ , etc.

### 3.2.3.- Diagramas de simulación.

Una de las ventajas del operador retardo es que este puede implementarse físicamente o simularse en una computadora. Algunos simuladores como Simulink® permiten definir una simulación mediante diagramas de bloques. Así por ejemplo, basándonos en el bloque básico de retardo unitario mostrado en la figura 3.5 podemos construir diagramas de simulación de sistemas discretos.

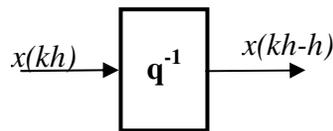


Fig. 3.5.- Bloque del operador retardo unitario

#### Ejemplo:

El diagrama de simulación para el sistema de primer orden dado por la ecuación (3.9)  $y(kh + h) = \alpha y(kh) + \beta u(kh)$  se puede obtener observando lo siguiente:

- 1) Si la salida de un bloque de retardo es  $y(kh)$ , la entrada debe ser  $y((k + 1)h)$
- 2) Entonces esta entrada puede obtenerse de la ecuación original (3.9)

Aplicando esta idea se obtiene el diagrama de la figura 3.6.

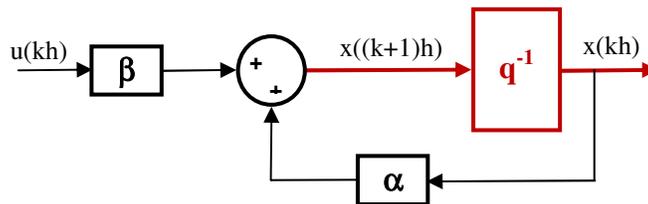


Fig. 3.6. Diagrama de simulación del sistema discreto de primer orden.

En Simulink© sólo hay algunas diferencias: la apariencia de algunos bloques, la manera en que se define el periodo de muestreo, la manera en que se definen entradas y salidas y especialmente que en lugar del símbolo  $q^{-1}$  se usa el símbolo  $1/z$ . En la figura 3.6 se muestra el diagrama correspondiente en Simulink© así como el resultado de la simulación.

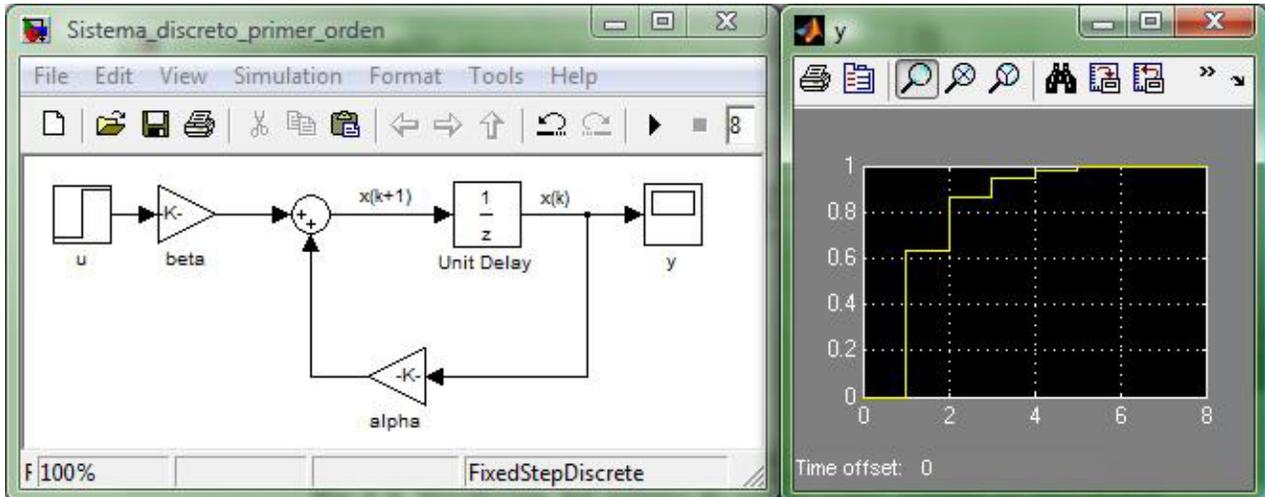


Fig. 3.6. Simulación del sistema de primer orden discreto en Simulink©.

A continuación se presentarán enfoques alternativos *aproximados* pero más sencillos para la obtención de modelos discretos de sistemas continuos.

### 3.2.4.- Aproximación de la derivada por diferencias finitas.

Una manera clásica de aproximar la derivada de una función  $y(t)$  conociendo dos puntos de dicha función es mediante la pendiente de la recta que une dichos puntos como se muestra en la figura 3.7 y se puede expresar como

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \tag{3.14}$$

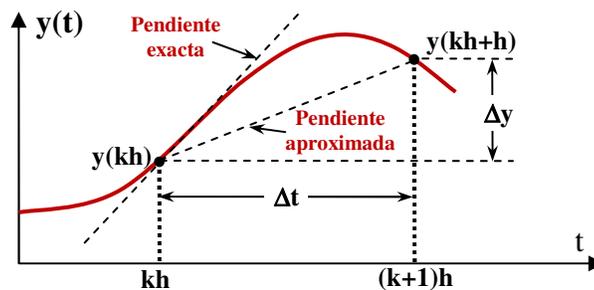


Fig. 3.7. Aproximación de la derivada.

Así, si deseamos aproximar la derivada (pendiente de la recta tangente) en  $t = kh$ , con  $\Delta t = h$ , sustituyendo en (3.14) se obtiene

$$\dot{y}(kh) \approx \frac{y(kh+h) - y(kh)}{h} \tag{3.15}$$

A la ecuación anterior se le denomina aproximación por *diferencias hacia delante*. En términos del operador  $q$  la aproximación (3.15) queda como sigue

$$\dot{y}(kh) \approx \frac{q-1}{h} y(kh) \tag{3.16}$$

En forma similar podemos obtener la aproximación por *diferencias hacia atrás* siguiente

$$\dot{y}(kh) \approx \frac{y(kh) - y(kh-h)}{h} \tag{3.17}$$

Que en términos del operador  $q$  esta otra aproximación queda como sigue

$$\dot{y}(kh) \approx \frac{1-q^{-1}}{h} y(kh) \tag{3.18}$$

**Ejemplo:**

Aplicando las dos aproximaciones al sistema continuo de primer orden  $\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t)$  :

Por diferencias hacia delante

$$y(kh+h) - y(kh) + ah y(kh) \approx bhu(kh)$$

reagrupando,

$$y(kh+h) + (ah-1)y(kh) \approx bhu(kh)$$

Por diferencias hacia atrás

$$y(kh) - y(kh-h) + ah y(kh) \approx bhu(kh)$$

reagrupando,

$$(1+ah)y(kh) - y(kh-h) \approx bhu(kh)$$

Como puede verse, las dos aproximaciones obtenidas son diferentes. En la figura 3.8 se muestran las respuestas al escalón de ambas aproximaciones comparadas con la respuesta del sistema continuo, para  $h = 0.1$  y para  $a = b = 1$ .

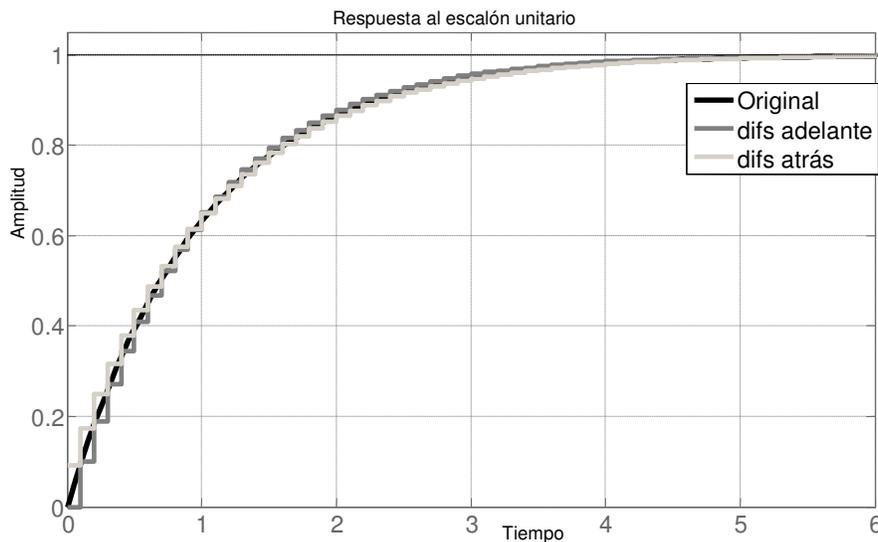


Fig. 3.8.- Respuesta al escalón unitario de ambas aproximaciones y el sistema continuo original.

Puede observarse en la figura 3.8 ninguna de las dos aproximaciones coinciden con el sistema original en los instantes de muestreo como ocurrió con la aproximación invariante al escalón (ver figura 3.4).

### 3.2.5.- Aproximación de la integral (Regla trapezoidal o de Tustin).

Si escribimos las ecuaciones diferenciales que definen al sistema continuo utilizando integrales en lugar de derivadas podemos obtener otras aproximaciones al considerar el área bajo la curva definida por la integral entre dos instantes de muestreo como se muestra en la figura 3.9.

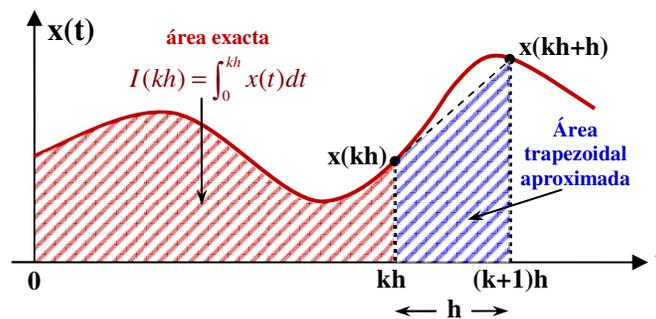


Fig. 3.9.- Aproximación mediante un trapecio del área entre los instantes  $kh$  y  $kh+h$ .

Si escribimos el área bajo la curva de la señal  $x(t)$  desde 0 hasta  $t$  como una función del tiempo tenemos

$$I(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau \quad (3.19)$$

Por lo tanto el área hasta el instante  $kh$  será

$$I(kh) = \int_0^{kh} x(t) dt \quad (3.20)$$

Y hasta el instante  $kh+h$

$$I(kh+h) = \int_0^{kh+h} x(t) dt \quad (3.21)$$

Y observando la figura, la diferencia entre estas dos áreas es el área entre los instantes  $kh$  y  $kh+h$ , la cual se puede aproximar por el área del trapecio, por lo tanto

$$I(kh+h) - I(kh) \approx \frac{x(kh+h) + x(kh)}{2} h \quad (3.22)$$

O bien,

$$I(kh+h) \approx I(kh) + \frac{x(kh+h) + x(kh)}{2} h \quad (3.23)$$

Lo cual se puede escribir en términos del operador  $q$  como sigue

$$(q-1)I(kh) \approx \frac{q+1}{2}hx(kh) \tag{3.24}$$

O bien,

$$I(kh) \approx \frac{h}{2} \left( \frac{q+1}{q-1} \right) x(kh) \tag{3.25}$$

A esta aproximación se le llama regla trapezoidal o aproximación de Tustin.

**Ejemplo:**

Para el sistema de primer orden  $\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t)$  podemos aplicar esta aproximación reescribiendo el sistema en términos de una integral como sigue

$$y(t) = \int_0^t [-ay(t) + bu(t)] dt$$

Por lo tanto

$$y(kh+h) = y(kh) + \int_{kh}^{kh+h} [-ay(t) + bu(t)] dt$$

Usando (3.23) con  $x(t) = -ay(t) + bu(t)$  obtenemos

$$y(kh+h) \approx y(kh) + \frac{[-ay(kh+h) + bu(kh+h)] + [-ay(kh) + bu(kh)]}{2} h$$

Simplificando obtenemos

$$2y(kh+h) \approx 2y(kh) - ahy(kh+h) + bhu(kh+h) - ahy(kh) + bhu(kh)$$

Despejando

$$(2+ah)y(kh+h) + (ah-2)y(kh) \approx bhu(kh+h) + bhu(kh)$$

En la figura 3.9 se muestra la respuesta al escalón unitario del sistema continuo original comparado con la respuesta del sistema discreto aproximado mediante regla trapezoidal y mediante diferencias hacia adelante y hacia atrás, para  $h = 0.5$  y para  $a = b = 1$ . Se puede observar que la regla trapezoidal produce una respuesta que queda entre las dos respuestas obtenidas mediante las aproximaciones por diferencias hacia adelante y hacia atrás.

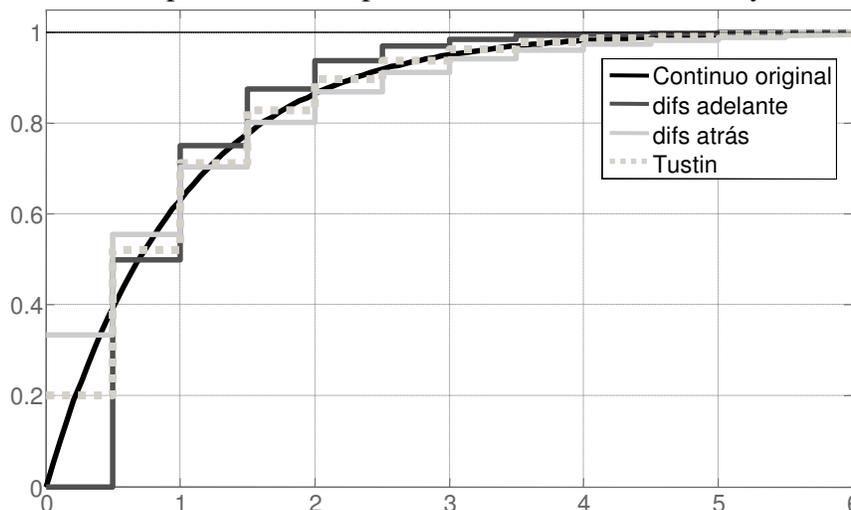


Fig. 3.9. Respuesta al escalón unitario de la aproximación por trapezios comparada con diferencias hacia atrás y hacia adelante..

### 3.2.6.- Modelos discretos de sistemas continuos de orden mayor a uno.

Hasta aquí se han ejemplificado solamente sistemas de primer orden, sin embargo, las aproximaciones anteriores se pueden aplicar a sistemas de mayor orden con ayuda del operador  $q$ , directamente a partir de la función de transferencia del sistema continuo, reemplazando cada multiplicación por la variable compleja  $s$  por una operación derivada expresada de manera aproximada en términos de  $q$  y reemplazando las variables de entrada y salida por sus muestras en el instante  $kh$ , de esta manera podemos resumir la técnica en la siguiente tabla

**Tabla 3.1. Obtención de Aproximaciones Discretas**

Método de aproximación	Reemplazar	Explicación
Derivada por diferencias hacia adelante	$s$ por $\frac{q-1}{h}$	Ecuación (3.16)
Derivada por diferencias hacia atrás	$s$ por $\frac{1-q^{-1}}{h}$	Ecuación (3.18)
Integral por regla trapezoidal (Tustin)	$s$ por $\frac{2}{h} \left( \frac{q-1}{q+1} \right)$	Ecuación (3.25)

#### Ejemplo:

Obtener la aproximación discreta por diferencias hacia adelante y por la regla trapezoidal para el siguiente sistema continuo de segundo orden dado por su ecuación diferencial

$$\ddot{y}(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = bu(t)$$

#### Solución:

La función de transferencia correspondiente al sistema es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

Es decir,

$$\left[ s^2 + a_1 s + a_0 \right] Y(s) = bU(s) \quad (3.26)$$

Usando diferencias hacia adelante

$$\left[ \left( \frac{q-1}{h} \right)^2 + a_1 \left( \frac{q-1}{h} \right) + a_0 \right] y(kh) = bu(kh)$$

Desarrollando el cuadrado

$$\left[ (q^2 - 2q + 1) + a_1 h (q - 1) + a_0 h^2 \right] y(kh) = bh^2 u(kh)$$

Es decir,

$$\left[ q^2 + (a_1 h - 2)q + (1 - a_1 h + a_0 h^2) \right] y(kh) = bh^2 u(kh)$$

En el dominio del tiempo discreto obtenemos

$$y(kh + 2h) + (a_1 h - 2)y(kh + h) + (1 - a_1 h + a_0 h^2)y(kh) = bh^2 u(kh) \quad (3.27)$$

Ahora aplicamos la regla trapezoidal a partir de (3.26), obteniendo

$$\left[ \left( \frac{2}{h} \frac{q-1}{q+1} \right)^2 + a_1 \frac{2}{h} \left( \frac{q-1}{q+1} \right) + a_0 \right] y(kh) = bu(kh)$$

Multiplicando por el común denominador  $(q+1)^2$  obtenemos

$$\left[ 4(q-1)^2 + 2a_1h(q-1)(q+1) + a_0h^2(q+1)^2 \right] y(kh) = bh^2u(kh)(q+1)^2$$

Desarrollando los productos

$$\left[ 4(q^2 - 2q + 1) + 2a_1h(q^2 - 1) + a_0h^2(q^2 + 2q + 1) \right] y(kh) = bh^2u(kh)(q^2 + 2q + 1)$$

Agrupando en potencias de  $q$

$$\left[ (4 + 2a_1h + a_0h^2)q^2 + (-8 + 2a_0h^2)q + (4 - 2a_1h + a_0h^2) \right] y(kh) = bh^2u(kh)(q^2 + 2q + 1)$$

Pasando al dominio del tiempo discreto

$$(4 + 2a_1h + a_0h^2)y(kh + 2h) + (-8 + 2a_0h^2)y(kh + h) + (4 - 2a_1h + a_0h^2)y(kh) = bh^2 [u(kh + 2h) + 2u(kh + h) + u(kh)] \quad (3.28)$$

A continuación se obtiene la respuesta al escalón unitario de ambos modelos con propósitos de comparación, en el caso  $a_1 = 4$ ,  $a_0 = 16$ ,  $b = 16$  para un periodo de muestreo  $h = 0.1$ . Los resultados se muestran en la figura 3.10.

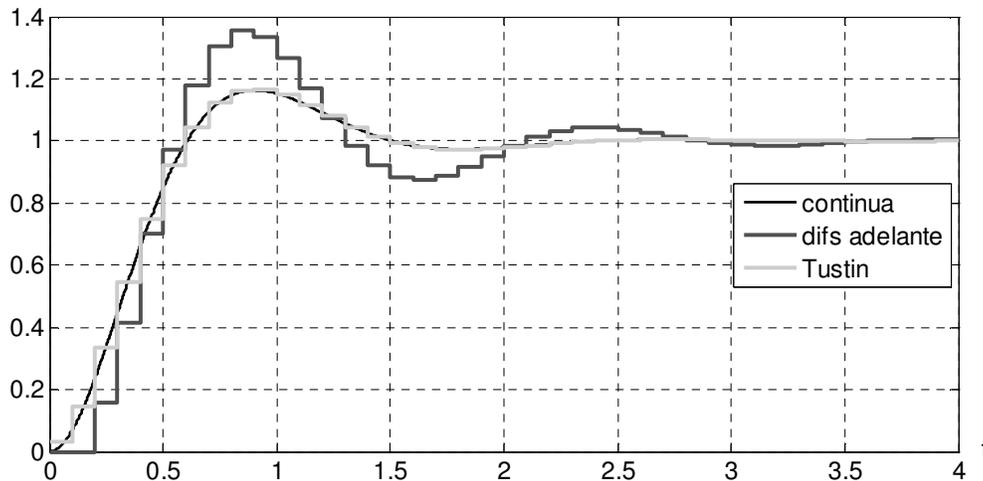


Fig. 3.10. Respuesta al escalón unitario de las aproximaciones por diferencias hacia Adelante y regla trapezoidal para un sistema de segundo orden.

### 3.3.- La Transformada Z.

Para poder tratar el caso general de la obtención de modelos discretos invariantes al escalón para sistemas de cualquier orden, debemos introducir antes una herramienta que nos permitirá extender la noción de *función de transferencia* a los sistemas discretos y de esta

forma tratar de manera unificada la parte continua y la parte discreta de un sistema de control por computadora. Dicha herramienta se denomina Transformada Z.

 **Nota Histórica:**

El origen de la *Transformada Z* se remonta a alrededor de 1730, cuando Abraham De Moivre introduce el concepto de función generadora de secuencias, sin embargo, no fue sino hasta 1947 que fue presentada por W. Hurewicz como un método para transformar señales muestreadas con la idea de resolver ecuaciones de diferencias lineales con coeficientes constantes. En 1952 el grupo de control de la Universidad de Columbia encabezado por John R. Ragazzini, (que incluía a L. A. Zadeh, E. I. Jury, R. E. Kalman, J. E. Bertram, B. Friedland y G. F. Franklin) denomina al método de Hurewicz como Transformada “Z”.

### 3.3.1.- Definición de la Transformada Z.

La *transformada Z* de una señal discreta  $x(kh)$  se define como la serie de potencias

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kh)z^{-k} \quad (3.29)$$

donde  $z$  es una variable compleja.

La ecuación (3.29) a veces se denomina *Transformada Z bilateral* porque considera que el intervalo de muestras disponibles de la señal se extiende para todos los posibles valores de  $k$  (positivos y negativos).

En la mayoría de los casos en los sistemas de control por computadora el conteo de las muestras empieza a partir de  $k=0$ , y se supone que antes de esto el valor de todas sus señales es cero. Por ello es conveniente una definición alternativa denominada *Transformada Z unilateral*. Que será la que utilizemos de aquí en adelante

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kh)z^{-k} \quad (3.30)$$

 De aquí en adelante (a menos que se especifique lo contrario) se supondrá que todas las señales tratadas tienen valor cero antes de  $k=0$  (para  $k$  negativo), es decir, trataremos señales  $x(kh)$  tales que  $x(kh)=0$  para  $k<0$ . A este tipo de señales se les llama **señales causales**.

Al procedimiento inverso para recuperar la señal discreta  $x(kh)$  a partir de  $X(z)$  se denomina *transformada Z inversa*.

 **Notación:** Por conveniencia, en ocasiones denotaremos  $X(z)$  como sigue

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(kh)] \quad (3.31)$$

☞ **Observación:** Debido a que la transformada Z está definida mediante una serie infinita de potencias de  $z$ , puede ocurrir que la serie sea *divergente* y en ese caso  $X(z)$  no existe.  $X(z)$  solo existe para aquellos valores de  $z$  para los cuales la serie *converge*.

✚ Al conjunto de valores de  $z$  para los cuales  $X(z)$  existe se le llama *Región de Convergencia* de la Transformada y se abreviará ROC de aquí en adelante. La definición es lo único que se requiere para calcular la transformada Z de la mayoría de las señales sencillas.

✂ **Notación:** De aquí en adelante utilizaremos la representación

$\delta(kh)$  =señal **pulso unitario** discreto, y

$\mathbf{u}(kh)$  =señal **escalón unitario** discreto

Es decir,

$$\delta(kh) = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k \neq 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{u}(kh) = \begin{cases} 1 & \text{para } k \geq 0 \\ 0 & \text{para } k < 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

### Ejemplos:

Calcular  $X(z)$  y la ROC para las siguientes señales discretas de duración finita:

1)  $x(kh) = \{1, 2, 4, 5\}$ , es decir  $x(0) = 1$ ,  $x(h) = 2$ ,  $x(2h) = 4$ ,  $x(3h) = 5$ ,  $x(kh) = 0$  para  $k \geq 4$ . De la definición se obtiene:  $X(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 5z^{-3}$ , por lo tanto ROC= todo el plano complejo Z excepto  $z=0$ .

2)  $x(kh) = \delta(kh)$  = señal **pulso unitario**.

De la definición  $X(z) = 1$ , por lo tanto ROC= todo el plano complejo Z.

3)  $x(kh) = \delta(kh - nh)$  = señal **pulso unitario retardado**, donde  $n$  es una constante positiva.

De la definición  $X(z) = z^{-n}$ , por lo tanto ROC= todo el plano complejo Z excepto  $z=0$ .

**Ejemplo:** Calcula la transformada Z de la siguiente señal de duración infinita:

$$x(kh) = a^k \mathbf{u}(kh) = \begin{cases} a^k & \text{para } k \geq 0 \\ 0 & \text{para } k < 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

### Solución:

De la definición obtenemos

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \mathbf{u}(kh) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

La cual es una **serie geométrica** de razón  $az^{-1}$ , y por lo tanto converge al valor

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad (3.35)$$

siempre y cuando  $|az^{-1}| < 1$ , es decir, la ROC es  $|z| > |a|$

**Ejemplo:** Encuentre la transformada Z del escalón unitario  $\mathbf{u}(kh)$ :

**Solución:** Como puede observarse, esta señal corresponde al ejemplo anterior en el caso particular en que  $a=1$ . Por lo tanto

$$\mathbf{U}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (3.36)$$

Y por lo tanto la ROC es  $|z| > 1$ .

### 3.3.2.- Propiedades de la Transformada Z

A continuación se presentan algunas de las propiedades fundamentales que tiene la transformada Z y gracias a las cuales se ha convertido en una herramienta muy útil para el modelado, análisis y diseño de los sistemas y señales en tiempo discreto.

#### 3.3.2.1.- Linealidad

Esta propiedad es una consecuencia directa de la definición, ya que la transformada se define como una sumatoria y las sumatorias poseen la propiedad de linealidad, es decir,

$$\mathcal{Z}[ax_1(kh) + bx_2(kh)] = a\mathcal{Z}[x_1(kh)] + b\mathcal{Z}[x_2(kh)] \quad (3.37)$$

O lo que es lo mismo,

$$\text{Si } x(kh) = ax_1(kh) + bx_2(kh), \text{ entonces } X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

Donde  $a, b$  son dos constantes cualesquiera. La ROC de  $X(z)$  será la intersección de las ROC para  $X_1(z)$  y  $X_2(z)$ .

La propiedad de linealidad se extiende para cualquier número de sumandos en la combinación lineal del lado derecho de (3.37).

**Ejemplo.** Sea  $x(kh) = 3(2^k) - 2(-1)^k$ . Por la propiedad de linealidad tendremos que  $X(z) = 3\mathcal{Z}[2^k] - 2\mathcal{Z}[-1^k]$ , es decir,  $X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} - \frac{2}{1+z^{-1}}$ . La ROC de  $X(z)$  es la intersección de la ROC de cada sumando, es decir, es la intersección de  $|z| > 2$  con  $|z| > 1$ , es decir, la ROC de  $X(z)$  es  $|z| > 2$ .

**Ejemplo.** La transformada Z de la senoide discreta  $x(kh) = \sin(\omega_0 kh) \mathbf{u}(kh)$  se puede calcular usando la propiedad de linealidad y la fórmula de Euler:

$$\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad (3.38)$$

Por lo tanto

$$x(kh) = \frac{e^{j\omega_0 kh} - e^{-j\omega_0 kh}}{2j} \mathbf{u}(kh)$$

Entonces, de (3.35) y de la propiedad de linealidad obtenemos

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{1 - e^{j\omega_0 h} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0 h} z^{-1}} \right]$$

lo cual se puede escribir como sigue

$$X(z) = \frac{1}{2j} \left[ \frac{-e^{-j\omega_0 h} z^{-1} + e^{j\omega_0 h} z^{-1}}{1 - e^{j\omega_0 h} z^{-1} - e^{-j\omega_0 h} z^{-1} + z^{-2}} \right]$$

o bien,

$$X(z) = \frac{\sin(\omega_0 h) z^{-1}}{1 - 2 \cos(\omega_0 h) z^{-1} + z^{-2}} \quad (3.39)$$

y la ROC será la intersección entre  $|z| > |e^{j\omega_0 h}|$  y  $|z| > |e^{-j\omega_0 h}|$ , pero  $|e^{\pm j\omega_0 h}| = 1$ , por lo tanto la ROC es  $|z| > 1$ .

### 3.3.2.2.- Corrimiento en el tiempo.

a) **Corrimiento hacia atrás (Retardo).** Si  $X(z)$  es la transformada Z de  $x(kh)$ , entonces:

$$\mathcal{Z}[x(kh - nh)] = z^{-n} X(z) \quad (3.40)$$

Donde  $n$  es cualquier entero positivo. La ROC por lo tanto es la misma que la de  $X(z)$ , excepto por  $z = 0$ .

#### Demostración:

De la definición 
$$\mathcal{Z}[x(kh - nh)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kh - nh) z^{-k}$$

Haciendo el cambio de variable  $i = k - n$  se obtiene

$$\mathcal{Z}[x(kh - nh)] = \sum_{i=-n}^{\infty} x(ih) z^{-i-n} = z^{-n} \sum_{i=-n}^{\infty} x(ih) z^{-i}$$

Pero como ya se dijo  $x(ih) = 0$  para  $k < 0$ , por lo tanto

$$= z^{-n} \sum_{i=0}^{\infty} x(ih) z^{-i} = z^{-n} X(z)$$

b) **Corrimiento hacia adelante (Adelanto).** Si  $X(z)$  es la transformada Z de  $x(kh)$ , entonces:

$$\mathcal{Z}[x(kh + nh)] = z^n X(z) - z^n \left[ x(0) + x(h)z^{-1} + \dots + x(nh - h)z^{-(n-1)} \right] \quad (3.41)$$

Donde  $n$  es cualquier entero positivo. La ROC por lo tanto es la misma que la de  $X(z)$ , excepto por  $z = 0$ .

**Demostración:**

De la definición 
$$\mathcal{Z}[x(kh + nh)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kh + nh)z^{-k}$$

Haciendo el cambio de variable  $i = k + n$  se obtiene

$$\mathcal{Z}[x(kh + nh)] = \sum_{i=n}^{\infty} x(ih)z^{-i+n} = z^n \sum_{i=n}^{\infty} x(ih)z^{-i}$$

Sumando y restando el término  $\sum_{i=0}^{n-1} x(ih)z^{-i}$

$$\begin{aligned} &= z^n \left[ \sum_{i=0}^{\infty} x(ih)z^{-i} - \sum_{i=0}^{n-1} x(ih)z^{-i} \right] \\ &= z^n \left[ X(z) - \sum_{i=0}^{n-1} x(ih)z^{-i} \right] = z^n X(z) - z^n \sum_{i=0}^{n-1} x(ih)z^{-i} \\ &= z^n X(z) - z^n x(0) - z^{n-1} x(h) - \dots - z x(nh - h). \end{aligned}$$

☞ **Obsérvese** que si las condiciones iniciales  $x(0), x(h), \dots, x(nh - h)$  son cero, la propiedad anterior se convierte simplemente en

$$\mathcal{Z}[x(kh + nh)] = z^n X(z) \quad (3.42)$$

**Ejemplo:** Consideremos el escalón unitario discreto  $\mathbf{u}(kh)$ , calculemos las transformadas Z de las siguientes señales:

Escalón retardado 3 periodos de muestreo:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{u}(kh - 3h)] = z^{-3} \mathbf{U}(z) = z^{-3} \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{z^3 - z^2}$$

Escalón adelantado 3 periodos de muestreo:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\mathbf{u}(kh + 3h)] &= z^3 \mathbf{U}(z) - z^3 [\mathbf{u}(0) + z^{-1} \mathbf{u}(h) + z^{-2} \mathbf{u}(2h)] \\ &= z^3 \frac{1}{1 - z^{-1}} - z^3 [1 + z^{-1} + z^{-2}] \\ &= z^3 \left[ \frac{1}{1 - z^{-1}} - (1 + z^{-1} + z^{-2}) \right] = z^3 \left[ \frac{1 - (1 - z^{-1})(1 + z^{-1} + z^{-2})}{1 - z^{-1}} \right] \\ &= z^3 \frac{1 - (1 - z^{-3})}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \end{aligned}$$

Obsérvese que el resultado anterior coincide con la transformada de un escalón unitario sin retardo, esto se debe a que se está usando la transformada Z unilateral, la cual ignora cualquier valor de la señal anterior al instante  $k=0$ .

### 3.3.2.3.- Transformada de la convolución.

La convolución de señales es una operación importante en el procesamiento de señales tanto analógicas como discretas ya que nos permite expresar el efecto de un sistema lineal cualquiera sobre la señal de entrada en el dominio del tiempo. En el caso discreto, la convolución se define como sigue

✚ Sean dos señales de tiempo discreto  $x_1(kh)$ ,  $x_2(kh)$ , la **convolución** de estas dos señales denotada como  $x_1 * x_2$  está dada por la sumatoria siguiente del producto de una por el corrimiento de la otra

$$x_1 * x_2 = \sum_{k=0}^n x_1(kh)x_2(nh - kh) \quad (3.43)$$

Se puede demostrar que la convolución es conmutativa, es decir,

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1 = \sum_{k=0}^n x_1(nh - kh)x_2(kh) \quad (3.44)$$

Si la transformada Z de  $x_1(n)$  es  $X_1(z)$  y la transformada z de  $x_2(n)$  es  $X_2(z)$ , entonces

$$\mathcal{Z}[x_1 * x_2] = X_1(z)X_2(z) \quad (3.45)$$

cuya ROC es al menos la intersección de las ROC de  $X_1(z)$  y de  $X_2(z)$ .

**Demostración.** De la definición de convolución (3.43)

$$x_1 * x_2 = \sum_{k=0}^n x_1(kh)x_2(nh - kh)$$

Entonces,

$$\mathcal{Z}[x_1 * x_2] = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=0}^n x_1(kh)x_2(nh - kh)\right]$$

Por definición de la transformada Z,

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n x_1(kh)x_2(nh - kh) \right] z^{-n}$$

Observando que la sumatoria interna se puede extender hasta infinito pues como se dijo  $x_2(kh)$  es cero para  $k < 0$ , por lo tanto

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x_1(kh)x_2(nh - kh) \right] z^{-n}$$

Intercambiando el orden de las sumatorias

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_1(kh)x_2(nh - kh)z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(kh) \sum_{n=0}^{\infty} x_2(nh - kh)z^{-n}$$

Usando la propiedad de corrimiento en el tiempo

$$= \sum_{k=0}^{\infty} x_1(kh)z^{-k} X_2(z)$$

Y de la definición de transformada Z

$$= X_1(z)X_2(z).$$

**Ejemplo.** La manera directa de calcular la convolución de dos señales discretas substituyendo en la definición (3.43) y desarrollando la sumatoria término a término. Este procedimiento resulta bastante laborioso. Sin embargo, se puede facilitar un poco el cálculo si hacemos uso de la propiedad anterior, por ejemplo, calculemos la convolución de las siguientes dos señales de duración finita:

$$x_1(kh) = \{1, 2, 1, -1\}, \quad x_2(kh) = \{1, 2, 3, 1\}$$

**Solución.** Escribimos la transformada z de cada señal:

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}, \quad X_2(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}$$

multiplicamos las expresiones en el dominio z:

$$\begin{aligned} X_1(z)X_2(z) &= 1 + (2+2)z^{-1} + (1+3+4)z^{-2} + (-1+1+2+6)z^{-3} + (3-6+6)z^{-4} + (1-3)z^{-5} - z^{-6} \\ &= 1 + 4z^{-1} + 8z^{-2} + 8z^{-3} + 3z^{-4} - 2z^{-5} - z^{-6} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$x_1 * x_2 = \{1, 4, 8, 8, 3, -2, -1\}$$

☞ El ejemplo anterior revela que la convolución de señales de duración finita sigue las mismas reglas que la multiplicación de polinomios.

### 3.3.2.4.- Teorema del valor final.

Esta es una propiedad muy útil para averiguar a qué valor tiende una señal cuando el tiempo crece a infinito, usando solamente información de su Transformada Z.

$$x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(kh) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (3.46)$$

**Demostración.** Calculemos la expresión del lado derecho usando la definición de transformada Z

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} x(kh)z^{-k}$$

Usando la propiedad de corrimiento hacia atrás

$$\begin{aligned} &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x(kh)z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(kh-h)z^{-k} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=0}^N x(kh)z^{-k} - \sum_{k=0}^N x(kh-h)z^{-k} \right) \right] \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de los límites (se supone que la expresión entre corchetes es continua respecto a N y respecto a z), obtenemos

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \lim_{z \rightarrow 1} \left( \sum_{k=0}^N x(kh)z^{-k} - \sum_{k=0}^N x(kh-h)z^{-k} \right) \right]$$

Sustituyendo el límite  $z=1$ ,

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=0}^N x(kh) - \sum_{k=0}^N x(kh-h) \right]$$

Desarrollando las sumatorias

$$\begin{aligned} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ (x(0) + x(h) + \dots + x(Nh-h) + x(Nh)) - (x(-1) + x(0) + x(h) + \dots + x(Nh-h)) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [x(Nh)] = x(\infty) \end{aligned}$$

**Ejemplo.** Consideremos la siguiente señal exponencial discreta de la ecuación (3.34)

$$x(kh) = a^k \gamma(kh) = \begin{cases} a^k & \text{para } k \geq 0 \\ 0 & \text{para } k < 0 \end{cases}$$

Cuya transformada Z ya se calculó y está dada por (3.35)

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \text{ con ROC } |z| > |a|$$

De acuerdo al Teorema del valor final

$$x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1-az^{-1}} = 0$$

Sin embargo, este resultado sólo es válido en la ROC, pero como  $z \rightarrow 1$ , entonces la ROC se transforma en  $|a| < 1$ , lo cual corresponde a lo esperado (es decir, solamente las funciones exponenciales que cumplen  $|a| < 1$  tienden a cero como valor final) como se ilustra en la figura 3.11.

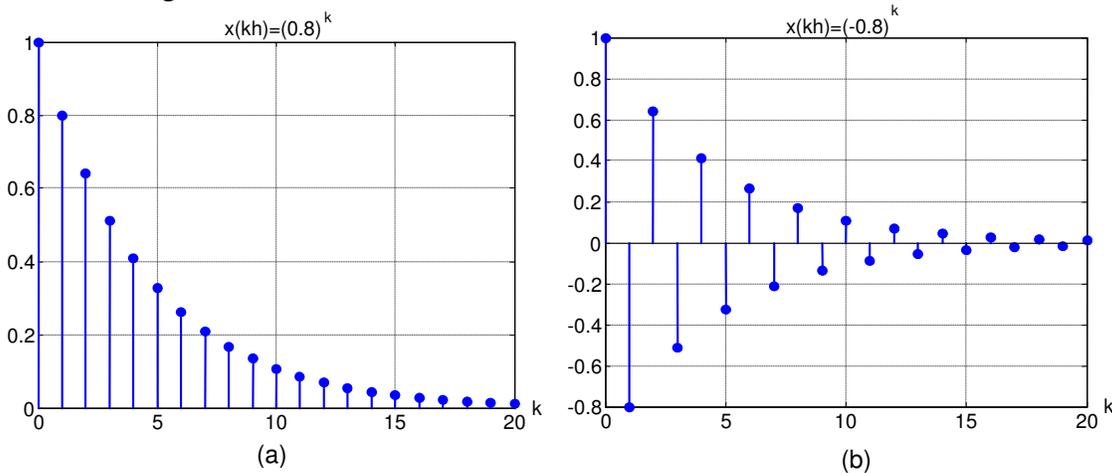


Fig. 3.11. Señal exponencial discreta para el caso  $|a| < 1$ , a)  $a = 0.8$ , b)  $a = -0.8$

### 3.3.3.- Tablas de Transformadas Z.

Usando la definición y las propiedades de la transformada Z es posible obtener expresiones para la transformada Z de una gran variedad de señales de tiempo discreto.

De esta manera, es posible elaborar un compendio de señales y sus correspondientes transformadas Z y sus respectivas ROC en forma de tabla de transformadas. Se pueden encontrar tablas muy extensas en los libros de texto o en diferentes sitios de internet, por ejemplo: [https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2009/2/EL41C/1/material\\_alumnos/bajar?id\\_material=45237](https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2009/2/EL41C/1/material_alumnos/bajar?id_material=45237)

En la tabla 3.2 se resumen las transformadas obtenidas hasta aquí y algunas otras junto con sus correspondientes transformadas de Laplace. Como puede verse en dicha tabla, todas las transformadas Z mostradas son **funciones racionales de  $z^{-1}$**  (es decir, son divisiones de polinomios en  $z^{-1}$ ). En esta sección se introducen algunos conceptos importantes relacionados con estas funciones.

**Tabla 3.2 Transformadas de algunas señales discretas**

Señal	Continua $x(t)$	$X(s)$	Discreta $x(kh)$	$X(z)$	ROC
Impulso unitario	$\delta(t)$	1	$\delta(kh)$	1	Todo el plano z
Escalón unitario	$\mathbf{u}(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathbf{u}(kh)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
Rampa unitaria	$t\mathbf{u}(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$kh\mathbf{u}(kh)$	$\frac{hz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z  > 1$
Exponencial	$e^{at}\mathbf{u}(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$e^{akh}\mathbf{u}(kh)$	$\frac{1}{1-e^{ah}z^{-1}}$	$ z  >  a^h $
Sinusoidal	$\sin(\omega_0 t)\mathbf{u}(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 kh)\mathbf{u}(kh)$	$\frac{\sin(\omega_0 h)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0 h)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
	$\cos(\omega_0 t)\mathbf{u}(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 kh)\mathbf{u}(kh)$	$\frac{1 - \cos(\omega_0 h)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0 h)z^{-1} + z^{-2}}$	$ z  > 1$
Sinusoidal modulada por exponencial	$e^{at}\sin(\omega_0 t)\mathbf{u}(t)$	$\frac{\omega_0}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{akh}\sin(\omega_0 kh)\mathbf{u}(kh)$	$\frac{e^{ah}\sin(\omega_0 h)z^{-1}}{1 - 2e^{ah}\cos(\omega_0 h)z^{-1} + e^{2ah}z^{-2}}$	$ z  >  a^h $
	$e^{at}\cos(\omega_0 t)\mathbf{u}(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{akh}\cos(\omega_0 kh)\mathbf{u}(kh)$	$\frac{1 - e^{ah}\cos(\omega_0 h)z^{-1}}{1 - 2e^{ah}\cos(\omega_0 h)z^{-1} + e^{2ah}z^{-2}}$	$ z  >  a^h $

Además de las transformadas de señales individuales es conveniente tener a la mano las propiedades de la transformada Z y de la transformada de Laplace.

En la tabla 3.3 se resumen todas las propiedades de la transformada Z presentadas en esta sección.

**Tabla 3.3. Propiedades de la Transformada Z**

Propiedad	Dominio del tiempo	Dominio Z	ROC
Linealidad	$c_1x_1(kh) + c_2x_2(kh)$	$c_1X_1(z) + c_2X_2(z)$	Intersección de las ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z)$
Corrimiento hacia atrás	$x(kh - nh)$	$z^{-n}X(z)$	La de $X(z)$ excepto $z=0$
Corrimiento hacia adelante	$x(kh + nh)$	$z^nX(z) - z^n \sum_{k=0}^{n-1} x(kh)z^k$	La misma de $X(z)$
Convolución	$x_1 * x_2$	$X_1(z)X_2(z)$	Intersección de las ROC de $X_1(z)$ y $X_2(z)$
Teorema del valor final	$\lim_{k \rightarrow \infty} x(kh)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$	Intersección de la ROC de $X(z)$ con $z=1$

### 3.4.- La Función de Transferencia de Pulso.

Como ya vimos en secciones anteriores, un sistema discreto lineal invariante en el tiempo (DSLIT) puede ser representado por una ecuación de diferencias que en general será de la forma

$$a_0y(kh + Nh) + a_1y(kh + Nh - h) + \dots + a_Ny(kh) = b_0x(kh + Mh) + b_1x(kh + Mh - h) + \dots + b_Mx(kh) \tag{3.47}$$

Donde:  $x(kh)$ ,  $y(kh)$  son la entrada y la salida del sistema respectivamente,  $a_0, a_1, \dots, a_N$ ,  $b_0, b_1, \dots, b_M$  son coeficientes constantes y N, M son los máximos adelantos involucrados de la salida y la entrada respectivamente, a N se le llama el **orden del sistema**.

☞ **Observación:** para que el sistema dado por (3.47) sea **causal** se requiere que  $N \geq M$

Calculando la transformada Z a cada lado de la ecuación (3.47) y usando la propiedad de corrimiento hacia adelante, **suponiendo condiciones iniciales cero**, obtenemos

$$a_0z^N Y(z) + a_1z^{N-1}Y(z) + \dots + a_N Y(z) = b_0z^M X(z) + b_1z^{M-1}X(z) + \dots + b_M X(z)$$

Factorizando, obtenemos

$$(a_0z^N + a_1z^{N-1} + \dots + a_N)Y(z) = (b_0z^M + b_1z^{M-1} + \dots + b_M)X(z)$$

Despejando el cociente de la salida entre la entrada

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0z^M + b_1z^{M-1} + \dots + b_M}{a_0z^N + a_1z^{N-1} + \dots + a_N} \tag{3.48}$$

Si definimos el cociente anterior como

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (3.49)$$

Entonces obtenemos la representación de la ecuación de diferencias (3.47) como una simple multiplicación de la forma

$$Y(z) = G(z)X(z) \quad (3.50)$$

✚ Al cociente (3.49) dado por la Transformada Z de la salida entre la Transformada Z de la entrada de un sistema discreto bajo condiciones iniciales cero se le llama la **Función Transferencia de Pulso** o Función de Transferencia Discreta del sistema.

Por lo tanto, de acuerdo a (3.48), un DSLIT descrito por la ecuación de diferencias lineal (3.47) tiene una función de transferencia de pulso de tipo *racional* dada por (3.48).

### Ejemplo

De acuerdo a lo anterior el DSLIT descrito por la siguiente ecuación de diferencias

$$y(kh) + 0.5y(kh - h) + y(kh - 2h) = x(kh) + x(kh - h)$$

Tendrá la siguiente función de transferencia de pulso.

$$G(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.5z^{-1} + z^{-2}}$$

Que también puede escribirse como

$$G(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 0.5z + 1}$$

✚ La función transferencia se ha convertido en un lenguaje estándar en los simuladores de sistemas dinámicos, por ejemplo, en Matlab© se puede introducir el sistema del ejemplo anterior como sigue:

```
>> num=[1 1 0]; % coeficientes del numerador en potencias decrecientes de z
>> den=[1 0.5 1]; % coeficientes del denominador
>> h=0.01; % Periodo de muestreo
>> G=tf(num,den,h); %define la función de transferencia discreta
```

### 3.5. Polos y Ceros de Funciones de Transferencia de Pulso

En general, las funciones de transferencia de pulso de un DSLIT tienen la forma de una función racional de la variable compleja  $z$ , es decir, se pueden escribir como divisiones de polinomios en potencias de  $z$  o de  $z^{-1}$

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_M}{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (3.51)$$

Donde  $a_0, a_1, \dots, a_N, b_0, b_1, \dots, b_M$ , son constantes.

La función de transferencia de pulso (3.51) puede ser escrita en términos de potencias de  $z^{-1}$  multiplicando numerador y denominador por  $z^{-N}$  para obtener

$$G(z) = \frac{b_0 z^{M-N} + b_1 z^{M-N-1} + \dots + b_M z^{-N}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

O bien,

$$G(z) = z^{-d} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (3.52)$$

Donde  $d = N - M$  es el retardo total del sistema.

Definimos un **cerro** de  $G(z)$  como un valor de  $z$  que hace cero el numerador  $B(z)$ , es decir, es un valor de  $z$  tal que  $G(z) = 0$ .

En forma similar un **polo** de  $G(z)$  es un valor de  $z$  que hace cero el denominador  $A(z)$ , es decir, un valor de  $z$  tal que  $G(z) = \infty$ .

De acuerdo a la definición anterior, la función racional  $G(z)$  puede ser expresada de manera que aparezcan en su expresión explícitamente los ceros y los polos, factorizando numerador y denominador como sigue

$$G(z) = K \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_N)} \quad (3.53)$$

Donde  $K = b_0 / a_0$ ,  $z_1, z_2, \dots, z_M$  son las raíces del numerador, es decir, los *ceros finitos* de  $X(z)$ ,  $p_1, p_2, \dots, p_N$  son las raíces del denominador, es decir, los *polos finitos* de  $X(z)$

Obsérvese que de acuerdo a la expresión (3.52) la función de transferencia de pulso tiene además  $d = N - M$  ceros repetidos para  $z = \infty$ . Por lo tanto  $G(z)$  tiene  $M$  ceros finitos,  $N$  polos finitos y  $N - M$  ceros infinitos. Si contamos tanto ceros finitos como infinitos resulta que  $X(z)$  tiene el mismo número de polos que de ceros.

### 3.6.- Modelado desde el punto de vista del proceso.

El esquema general de control digital directo mostrado en la figura 3.1 también puede ser replanteado desde el punto de vista del proceso continuo, el cual recibe como entrada la señal continua  $u(t)$ , la cual es la salida del convertidor digital/analógico de la computadora y esta a su vez recibe la salida del proceso continuo  $y(t)$ , por lo tanto, desde el punto de vista del proceso las señales discretas son invisibles, todo lo que ocurre en el lazo de control son señales continuas, esto se representa en la figura 3.12.

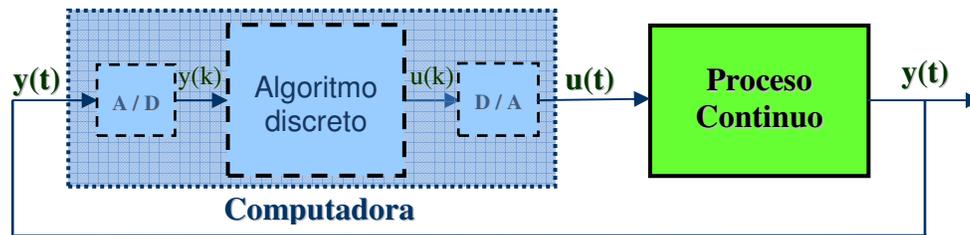


Fig. 3.12. El punto de vista del proceso continuo.

En lugar de intentar obtener un modelo continuo de los procesos discretos que ocurren en la computadora (lo cual no es posible pues dentro de la computadora no se tiene la información de lo que ocurre entre dos instantes de muestreo consecutivos) le daremos la vuelta al problema usando la noción de la función transferencia de pulso.

Mediante la transformada Z ahora podemos representar lo que ocurre dentro de la computadora en términos de su función de transferencia de pulso, de manera que el esquema general de control digital directo mostrado en la figura 3.12 se puede replantear ahora en términos de funciones de transferencia como se muestra en la figura 3.13

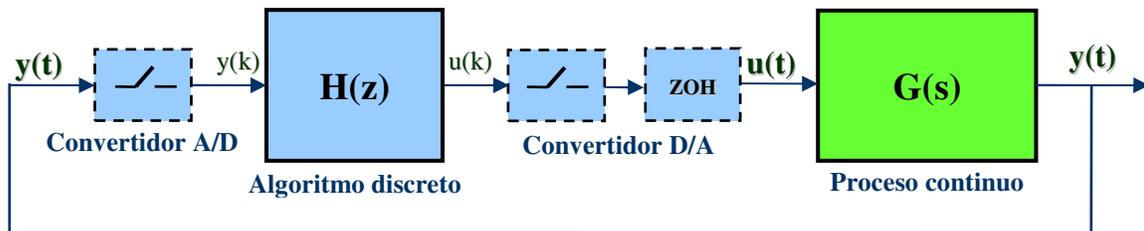


Fig. 3.13. Diagrama de control digital directo modelado mediante funciones de transferencia.

Obsérvese en la figura 3.13 que ambas  $H(z)$  y  $G(s)$  son funciones transferencia, pero en distintos dominios. Obsérvese también que el convertidor de analógico a digital se ha modelado por un muestreador mientras que el convertidor de digital a analógico se ha modelado por un muestreador seguido de un reconstructor simple ZOH (Retenedor de orden cero).

Para obtener un modelo que no mezcle variables de diferente dominio tenemos dos alternativas:

- 1) Obtener la función de transferencia en el dominio de Laplace equivalente de  $H(z)$  y de los convertidores A/D y D/A
- 2) Obtener una función de transferencia en Z equivalente del retenedor de orden cero en cascada con  $G(s)$

La primera opción no es posible porque dentro de la computadora se ejecuta un algoritmo discreto que no tiene la información de tiempo continuo, sin embargo, la segunda opción tampoco es muy atractiva porque implica discretizar la información continua de  $G(s)$  y por lo tanto perder información, sin embargo es el único camino posible y a pesar de perder

información de lo que ocurre entre instantes de muestreo aplicaremos esta idea que se esquematiza como se ilustra en la figura 3.14.

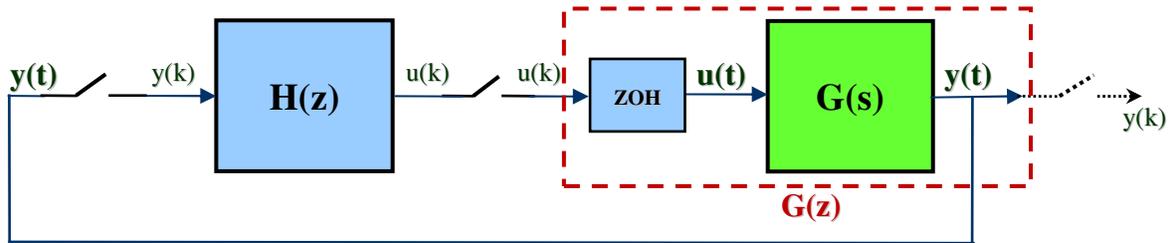


Fig. 3.14. Adición de un muestreador ficticio a la salida de la planta continua.

Obsérvese que en la figura 3.14 se ha agregado un muestreador ficticio a la salida de la planta continua, las razones para hacer esto son las siguientes:

- 1) No es posible obtener una función de transferencia  $G(z)$  que relacione la salida continua  $y(t)$  con la entrada discreta  $u(k)$
- 2) El muestreador representa la pérdida de información de  $y(t)$  entre instantes de muestreo.
- 3) Considerando el muestreador sí es posible obtener una función de transferencia  $G(z)$  que relacione la salida  $y(k)$  con la entrada  $u(k)$

### 3.6.1.- Obtención de $G(z)$ a partir de $G(s)$ .

Una manera de calcular  $G(z)$  a partir de  $G(s)$  es suponer el siguiente experimento: En la figura 3.14 supongamos que  $u(k) = \gamma(kh)$ , es decir, la computadora genera un escalón unitario discreto, por lo tanto

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \tag{3.54}$$

Por lo tanto debido al retenedor de orden cero  $u(t) = \mathbf{u}(t)$  (escalón unitario continuo), por lo tanto  $\mathbf{U}(s) = \frac{1}{s}$  y por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} \tag{3.55}$$

Por lo tanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \tag{3.56}$$

Además

$$Y(z) = \mathcal{Z}[y(kh)]$$

Podemos definir

$$\tilde{Y}(z) = \mathcal{Z}[y(t)] = \mathcal{Z}[y(kh)] \tag{3.57}$$

Esta definición implica que al no poder calcular la transformada Z de la señal continua  $y(t)$ , introducimos un muestreo ficticio para reemplazar  $y(t)$  por  $y(kh)$ . Con esta definición, podemos obtener  $G(z)$  como sigue

$$G(z) = \frac{\tilde{Y}(z)}{U(z)} \tag{3.58}$$

Entonces, de (3.54)

$$G(z) = (1 - z^{-1})\tilde{Y}(z) \tag{3.59}$$

Y sustituyendo (3.56)

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \right]$$

Que por comodidad abreviaremos como

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z} \left[ \frac{G(s)}{s} \right] \tag{3.60}$$

Tomando en cuenta la pérdida de información entre instantes de muestreo en la salida  $y(k)$  podemos finalmente transformar todo el diagrama de bloques de la figura 3.14 a un solo dominio como se muestra en la figura 3.15

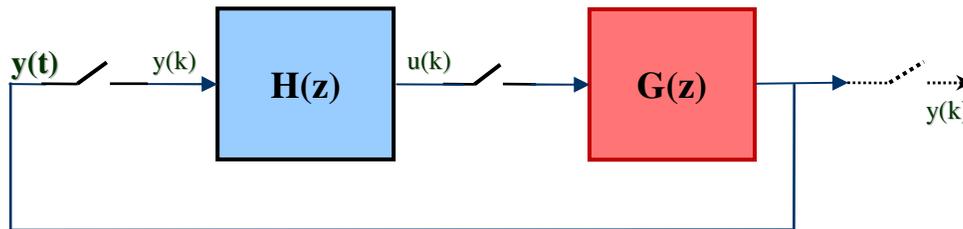


Fig. 3.15. Diagrama de bloques del lazo de control digital directo en el dominio z.

Obsérvese que ahora los muestreadores no son ya necesarios porque todas las señales que fluyen en el diagrama son de tiempo discreto, por lo tanto se pueden eliminar los muestreadores como se muestra en la figura 3.16.

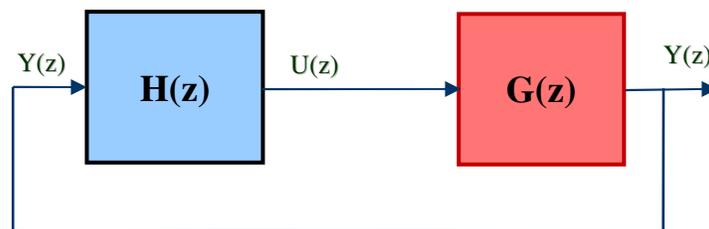


Fig. 3.16. Eliminación de los muestreadores.

Para poder aplicar el razonamiento descrito hasta aquí, todavía debemos detallar el cálculo de  $G(z)$  de acuerdo a (3.61), para ello veamos primeramente la obtención de  $G_{OH}(s)$ .

✚ Otra manera de calcular  $G(z)$  a partir de  $G(s)$  se basa en la siguiente observación:

En el diagrama de la figura 3.15 se tiene que

$$G(z) = \mathcal{Z}[G_{OH}(s)G(s)] \tag{3.61}$$

Donde  $G_{OH}(s)$  es la función de transferencia en el dominio de Laplace del retenedor de orden cero. A continuación obtendremos esta función de transferencia del retenedor de orden cero  $G_{OH}(s)$  usando la siguiente propiedad muy conocida de la teoría de sistemas continuos lineales invariantes en el tiempo (SLIT).

✚ La Función de transferencia de un SLIT continuo es la Transformada de Laplace de su respuesta al impulso unitario.

Al retenedor de orden cero no se le puede aplicar un impulso unitario o delta de Dirac  $\delta(t)$ , pues antes tiene que pasar por la etapa del muestreador, el cual lo convierte en un pulso unitario  $\delta(kh)$ . En la figura 3.17 se muestra la respuesta al pulso unitario  $g_{OH}(t)$ , del retenedor de orden cero, obtenida de acuerdo a su definición dada por (2.10).

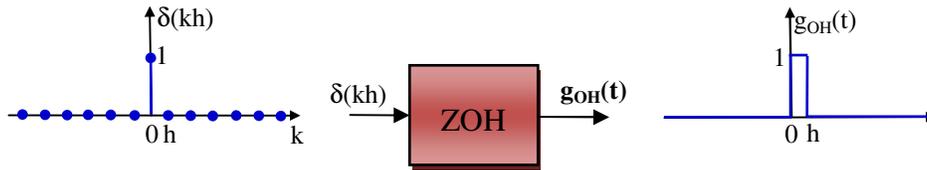


Fig. 3.17. Respuesta al pulso unitario del retenedor de orden cero.

La respuesta al pulso unitario del retenedor de orden cero es entonces un pulso de ancho  $h$  y de amplitud 1, el cual puede ser expresado como la suma de dos escalones unitarios como sigue (véase la figura 3.18).

$$g_{OH}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-h) \tag{3.62}$$

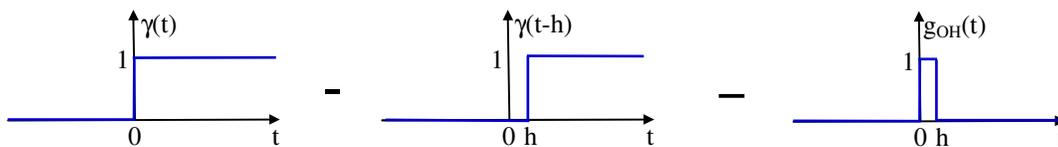


Fig. 3.18. Obtención del pulso de ancho  $h$  mediante la resta de dos escalones unitarios.

Aplicando Transformada de Laplace a (3.62) obtenemos

$$G_{OH}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-hs}) \tag{3.63}$$

Sin embargo el término  $e^{-hs}$  que representa un retardo puro de valor  $h$  no puede ser expresado como una función racional (división de polinomios de  $s$ ) y es mejor representarla en el dominio de  $z$  de acuerdo a la propiedad del retardo (3.40).

$$z^{-1} = \mathcal{Z}\left[e^{-hs}\right]$$

Y sustituyendo en (3.63) obtenemos la siguiente expresión que mezcla dos dominios

$$G_{OH}(s) = \frac{1}{s}(1 - z^{-1}) \quad (3.64)$$

Finalmente obtenemos la función de transferencia  $F(s)$  de los dos bloques en cascada: el retenedor de orden cero seguido de la planta continua  $G(s)$ :

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z}\left[G_{OH}(s)G(s)\right] \\ &= \mathcal{Z}\left[(1 - z^{-1})\frac{G(s)}{s}\right] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad (3.65)$$

La cual nos da la expresión para la discretización de la planta continua  $G(s)$  precedida por un retenedor de orden cero y por lo tanto es una discretización invariante al escalón.

### 3.6.2.- Discretización de funciones transferencia en lazo abierto usando tablas de transformadas.

Lo único que hace falta para poder aplicar la expresión (3.65) es un procedimiento para transformar una expresión del dominio de Laplace al dominio  $Z$ , lo cual se puede realizar a partir de las tablas de transformadas.

Para realizar esto tenemos que partir de expresiones de  $G(s)$  en forma de función racional de  $s$  y aplicar el procedimiento de expansión en *fracciones parciales*, las cuales son fáciles de encontrar en las tablas, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

**3.6.2.1.- Ejemplo. Sistema de primer orden.** Comencemos con el caso más simple. Consideremos que la planta continua está dada por la función de transferencia de primer orden siguiente

$$G(s) = \frac{b}{s+a} \quad (3.66)$$

Sustituyendo en (3.65), obtenemos

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{b}{s(s+a)}\right]$$

Factorizando  $b$  y desarrollando en fracciones parciales el término entre corchetes

$$G(z) = b(1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{\left(\frac{1}{a}\right)}{s} - \frac{\left(\frac{1}{a}\right)}{s+a} \right]$$

Por la propiedad de linealidad de la transformada Z

$$G(z) = b(1 - z^{-1}) \left\{ \left(\frac{1}{a}\right) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s} \right] - \left(\frac{1}{a}\right) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s+a} \right] \right\}$$

Buscamos en la Tabla de Transformadas (3.1) y obtenemos

$$G(z) = b(1 - z^{-1}) \left\{ \left(\frac{1}{a}\right) \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) - \left(\frac{1}{a}\right) \left( \frac{1}{1 - (e^{-ah})z^{-1}} \right) \right\}$$

Haciendo operaciones

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{b}{a} \left( 1 - \frac{(1 - z^{-1})}{1 - (e^{-ah})z^{-1}} \right) \\ &= \frac{b}{a} \left( \frac{1 - (e^{-ah})z^{-1} - (1 - z^{-1})}{1 - (e^{-ah})z^{-1}} \right) \end{aligned}$$

Y finalmente

$$G(z) = \frac{b(1 - e^{-ah})z^{-1}}{a - ae^{-ah}z^{-1}}$$

O bien,

$$G(z) = \frac{b}{a} \left[ \frac{1 - e^{-ah}}{z - e^{-ah}} \right] \quad (3.67)$$

Obsérvese que esta función de transferencia corresponde a la ecuación de diferencias

$$y(kh + h) = e^{-ah} y(kh) + \frac{b}{a} (1 - e^{-ah}) u(kh) \quad (3.68)$$

Compárese con (3.8) y se observará que se trata del mismo resultado, como era de esperarse, pues la inclusión de un retenedor de orden cero equivale a la suposición de que la entrada no cambia entre instantes de muestreo.

### 3.6.2.1.- Ejemplo. Sistema de segundo orden reducible mediante fracciones parciales.

Consideremos ahora la planta continua dada por la siguiente función transferencia de segundo orden

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

Sustituyendo en (3.65), obtenemos

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s(s^2 + s)} \right]$$

Como el factor cuadrático del denominador tiene raíces  $s_1 = s_2 = 0$  y  $s_3 = -1$ , las cuales son reales, por lo tanto podemos desarrollar en fracciones parciales de primer orden como sigue

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_1}{s} + \frac{B}{s+1} \right]$$

Donde los coeficientes  $A_2$  y  $A_1$  se pueden obtener de la fórmula para el cálculo de residuos en el caso de polos repetidos,

$$A_i = \frac{1}{(n-i)!} \frac{d^{n-i}}{ds^{n-i}} (s-p)^n F(s) \Big|_{s=p} \quad (3.69)$$

En este caso  $F(s) = \frac{G(s)}{s}$ ,  $p = 0$ ,  $n = 2$ , se obtiene  $A_2 = 1$ ,  $A_1 = -1$ .

En forma similar el coeficiente B se obtiene de la fórmula para el cálculo de residuos en el caso de polos simples,

$$B = (s-p)F(s) \Big|_{s=p} \quad (3.70)$$

En este caso  $F(s) = \frac{G(s)}{s}$ ,  $p = -1$ , se obtiene  $B = 1$ . Por lo tanto

$$G(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right]$$

Por la propiedad de linealidad de la transformada Z

$$G(z) = (1-z^{-1}) \left\{ \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s^2} \right] - \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s} \right] + \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s+1} \right] \right\}$$

Buscamos en la Tabla de Transformadas (3.1) y obtenemos

$$G(z) = (1-z^{-1}) \left\{ \left( \frac{hz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \right) - \left( \frac{1}{1-z^{-1}} \right) + \left( \frac{1}{1-e^{-h}z^{-1}} \right) \right\}$$

Haciendo la multiplicación

$$G(z) = \frac{hz^{-1}}{1-z^{-1}} - 1 + \frac{1-z^{-1}}{1-e^{-h}z^{-1}}$$

Haciendo la suma de fracciones

$$G(z) = \frac{hz^{-1}(1-e^{-h}z^{-1}) - (1-z^{-1})(1-e^{-h}z^{-1}) + (1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})(1-e^{-h}z^{-1})}$$

Factorizando

$$G(z) = \frac{(1-e^{-h}z^{-1})[(h+1)z^{-1}-1] + (1-z^{-1})^2}{(1-z^{-1})(1-e^{-h}z^{-1})}$$

Ordenando en potencias de  $z^{-1}$  y simplificando, obtenemos finalmente

$$G(z) = \frac{(h-1+e^{-h})z^{-1} + (1-e^{-h}-he^{-h})z^{-2}}{1-(1+e^{-h})z^{-1}+e^{-h}z^{-2}} \quad (3.71)$$

### 3.6.2.3.- Ejemplo. Sistema de segundo orden no reducible mediante fracciones parciales.

Consideremos ahora la planta continua dada por la siguiente función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Sustituyendo en (3.65), obtenemos

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} \right]$$

Como el factor cuadrático del denominador tiene raíces  $s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$ , las cuales son complejas conjugadas, por lo tanto no se puede desarrollar en fracciones parciales de primer orden sino que el factor de segundo orden se conservará como sigue

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + s + 1} \right]$$

Donde las constantes A, B, C se pueden obtener por igualación de coeficientes, obteniéndose en este caso A=1, B=-1, C=-1, por lo tanto

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s} - \frac{s + 1}{s^2 + s + 1} \right]$$

Por la propiedad de linealidad de la transformada Z

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left\{ \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s} \right] - \mathcal{Z} \left[ \frac{s + 1}{s^2 + s + 1} \right] \right\}$$

El segundo término no es fácil de encontrar en una tabla de transformadas, a menos que lo escribamos en términos de  $(s + a)$  donde  $a$  es una constante, para esto completamos el cuadrado en el denominador, obteniendo

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left\{ \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s} \right] - \mathcal{Z} \left[ \frac{(s + \frac{1}{2})}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right] \right\}$$

Buscamos en la Tabla de Transformadas (3.2) y obtenemos

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left\{ \left( \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) - \left( \frac{1 - e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1}}{1 - 2e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1} + e^{-h} z^{-2}} \right) - \left( \frac{\frac{1}{2} e^{-h/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1}}{1 - 2e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1} + e^{-h} z^{-2}} \right) \right\}$$

Haciendo la multiplicación

$$G(z) = 1 - \frac{(1 - z^{-1})(1 - e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1})}{1 - 2e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1} + e^{-h} z^{-2}} - \frac{\frac{1}{2}(1 - z^{-1})e^{-h/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1}}{1 - 2e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1} + e^{-h} z^{-2}}$$

Haciendo la suma de fracciones

$$G(z) = \frac{1 - 2e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1} + e^{-h} z^{-2} - (1 - z^{-1})(1 - e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1}) - \frac{1}{2}(1 - z^{-1})e^{-h/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1}}{1 - 2e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1} + e^{-h} z^{-2}}$$

Simplificando, en forma de división de polinomios en potencias de  $z^{-1}$  obtenemos finalmente

$$G(z) = \frac{\left(1 - e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) - \frac{1}{2} e^{-h/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} h)\right) z^{-1} + \left(e^{-h} - e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) + \frac{1}{2} e^{-h/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} h)\right) z^{-2}}{1 - 2e^{-h/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} h) z^{-1} + e^{-h} z^{-2}}$$

### 3.6.2.4.- Ejemplo. Sistemas de orden superior.

Cuando se tiene una planta de orden mayor que 2, siempre es posible expresarla en términos de los dos casos anteriores. Consideremos por ejemplo la planta continua dada por la siguiente función de transferencia de cuarto orden

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 5s + 2}$$

Como las raíces del denominador son  $s_1 = -1, s_2 = -2, s_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$ , se puede factorizar como sigue

$$G(s) = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s^2 + s + 1)}$$

Por lo tanto

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{s + 3}{s(s + 1)(s + 2)(s^2 + s + 1)}$$

Y por lo tanto  $\frac{G(s)}{s}$  se puede desarrollar en fracciones parciales como sigue

$$\frac{G(s)}{s} = \left[ \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2} + \frac{Ds + E}{s^2 + s + 1} \right]$$

Donde  $A = \frac{3}{2}, B = -2, C = \frac{1}{6}, D = \frac{1}{3}$  y  $E = -\frac{4}{3}$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C}{s + 2} + \frac{Ds + E}{s^2 + s + 1} \right]$$

etc... (El resto del procedimiento es similar al de los ejemplos anteriores).

### 3.6.3.- Reducción de Bloques en Cascada.

Con el procedimiento descrito en la sección anterior ya podemos expresar un sistema de control que involucra elementos continuos y discretos en un solo dominio (el dominio Z). De esta manera podemos extender las reglas de reducción de diagramas de bloques al dominio Z con una sola excepción que en la que hay que tener precaución especial:

#### Bloques en Cascada con muestreador de por medio

En el caso en que dos bloques continuos están conectados en cascada con un muestreador (convertidor A/D) de por medio la equivalencia es directa como se muestra en la figura 3.17

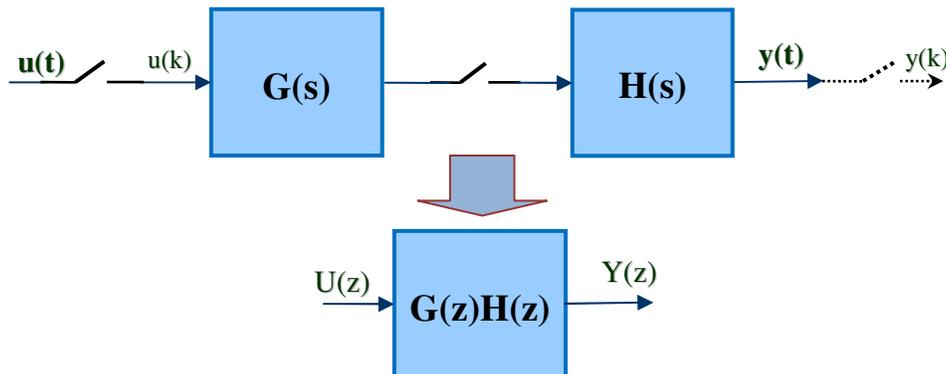


Fig. 3.17. Bloques continuos en cascada con muestreador de por medio.

De manera que en la figura 3.17 se pueden obtener las funciones de transferencia de pulso de cada bloque en forma directa como

$$G(z) = \mathcal{Z}[G(s)] \text{ y } H(z) = \mathcal{Z}[H(s)]$$

Y por lo tanto el diagrama de la figura 3.17 se puede convertir a un sólo bloque o función de transferencia de pulso dado por

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z)H(z) \quad (3.72)$$

### Bloques en Cascada sin muestreador de por medio

Si no existe un muestreador en medio de dos bloques continuos se aplica el procedimiento explicado en la sección anterior para el caso (Retenedor ZOH – Planta Continua) y de esta manera la equivalencia por bloques es como se muestra en la figura 3.17

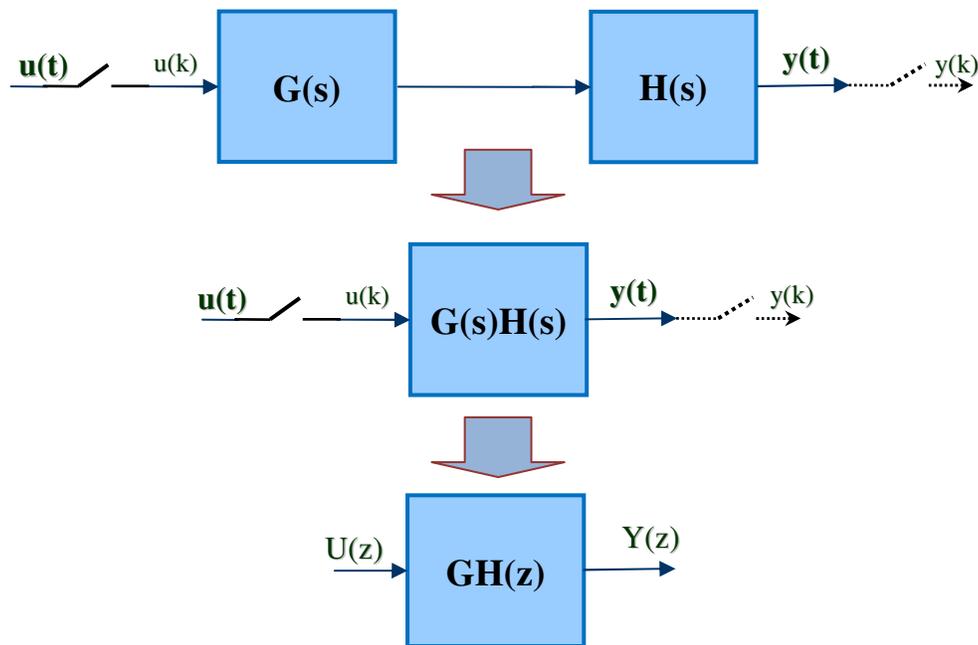


Fig. 3.17. Bloques continuos en cascada sin muestreador de por medio

En la figura 3.17 el bloque equivalente  $GH(z)$  se obtiene discretizando el equivalente en cascada  $G(s)H(s)$  de los bloques continuos, es decir

$$GH(z) = \mathcal{Z}[G(s)H(s)] \quad (3.73)$$

**3.6.4.- Función de transferencia de pulso de un sistema de control digital de una planta continua.**

Una vez que tenemos expresada la función de transferencia de la planta en cascada con el retenedor de orden cero tenemos expresado todo el sistema en un solo dominio y podemos aplicar todas las reglas de reducción de diagramas de bloques para obtener una expresión simplificada del sistema en lazo cerrado.

Así por ejemplo, para obtener la función de transferencia del siguiente sistema de control digital directo mostrado en la figura 3.19. Donde  $M(s)$  representa la función de transferencia de un sensor analógico.

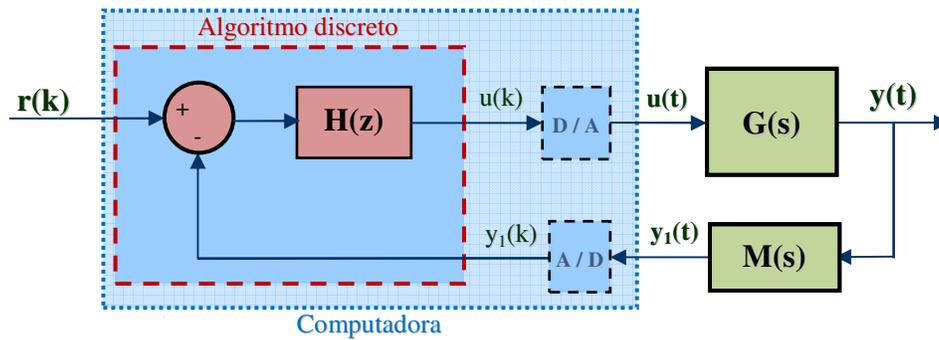


Fig. 3.19.- Sistema de control digital directo con entrada de referencia.

Usando el razonamiento explicado en la sección anterior, el sistema se transforma al mostrado en la figura 3.20

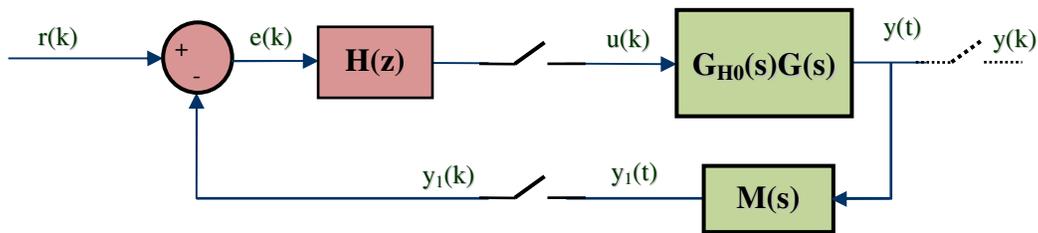


Fig. 3.20. Sistema de control digital directo con entrada de referencia en el dominio Z.

De la figura 3.20 obtenemos las relaciones siguientes

$$Y(z) = G(z)U(z) \tag{3.74}$$

Donde, de acuerdo con (3.65)

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

Además, también del diagrama de la figura 3.20 se tiene que

$$U(z) = H(z)E(z) \tag{3.75}$$

Donde

$$E(z) = R(z) - Y_1(z) \quad (3.76)$$

Pero

$$Y_1(z) = GM(z)U(z) \quad (3.77)$$

Donde de acuerdo a (3.65) ,

$$GM(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{G(s)M(s)}{s} \right] \quad (3.78)$$

Sustituyendo (3.75), (3.76) y (3.77) en (3.74) se obtiene

$$Y(z) = G(z)H(z)[R(z) - GM(z)U(z)]$$

Despejamos ahora U(z) en (3.74) y sustituyendo se obtiene

$$Y(z) = G(z)H(z) \left[ R(z) - GM(z) \frac{Y(z)}{G(z)} \right]$$

Factorizando Y(z) se obtiene

$$Y(z)[1 + H(z)GM(z)] = G(z)H(z)R(z)$$

Finalmente la función de transferencia de lazo cerrado queda como sigue

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)H(z)}{1 + GM(z)H(z)} \quad (3.79)$$

Obsérvese que en el caso particular en que el sensor tiene la función de transferencia  $M(s)=1$  se tiene que  $GM(z) = G(z)$  y entonces la ecuación anterior se transforma en la expresión más familiar

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)H(z)}{1 + G(z)H(z)} \quad (3.80)$$

**Ejemplo.** Obtener la función de transferencia de lazo cerrado del sistema de control digital directo de la figura (3.19) con sensor  $M(s)=1$ , para la planta continua dada por

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s}$$

Y para el algoritmo de control proporcional dado por

$$H(z) = K_p$$

**Solución.** Como ya se calculó en un ejemplo anterior, (ver ecuación (3.71)) en este caso se tiene que

$$G(z) = \frac{(h-1+e^{-h})z^{-1} + (1-e^{-h}-he^{-h})z^{-2}}{1 - (1+e^{-h})z^{-1} + e^{-h}z^{-2}}$$

Sustituyendo en (3.80) se obtiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_p \frac{(h-1+e^{-h})z^{-1} + (1-e^{-h}-he^{-h})z^{-2}}{1 - (1+e^{-h})z^{-1} + e^{-h}z^{-2}}}{1 + K_p \frac{(h-1+e^{-h})z^{-1} + (1-e^{-h}-he^{-h})z^{-2}}{1 - (1+e^{-h})z^{-1} + e^{-h}z^{-2}}}$$

Eliminando denominador común se obtiene

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_p \left[ (h-1+e^{-h})z^{-1} + (1-e^{-h}-he^{-h})z^{-2} \right]}{1 - (1+e^{-h})z^{-1} + e^{-h}z^{-2} + K_p \left[ (h-1+e^{-h})z^{-1} + (1-e^{-h}-he^{-h})z^{-2} \right]}$$

Expresando en potencias de  $z^{-1}$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K_p \left[ (h-1+e^{-h})z^{-1} + (1-e^{-h}-he^{-h})z^{-2} \right]}{1 - \left[ (1+e^{-h}) + K_p(h-1+e^{-h}) \right] z^{-1} + \left[ e^{-h} + K_p(1-e^{-h}-he^{-h}) \right] z^{-2}} \quad (3.81)$$

Una vez que tenemos el modelo del sistema completo en una sola función de transferencia, es deseable poder utilizar este modelo para responder algunas preguntas básicas sobre el comportamiento del sistema: ¿Es estable?, ¿Oscila?, ¿su respuesta crece o decrece con el tiempo? ¿tiende a una constante?. Este problema lo trataremos con mayor detenimiento en el siguiente capítulo, en donde presentaremos algunas herramientas que nos permiten responder estas y otra preguntas. Sin embargo poseemos una herramienta que ya nos permite responder algunas de las preguntas anteriores: El Teorema del valor final.

### Ejemplo:

Usando el Teorema del Valor Final calcularemos a que tiende la respuesta del sistema del ejemplo anterior ante una entrada escalón unitario. Sea

$$G_{cl}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}$$

Entonces

$$Y(z) = G_{cl}(z)R(z)$$

Del teorema del valor final

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})G_{cl}(z)R(z)$$

Y si la entrada de referencia es un escalón unitario obtenemos simplemente

$$y(\infty) = G_{cl}(1) \quad (3.82)$$

Sustituyendo en (3.81)

$$y(\infty) = \frac{K_p \left[ (h-1+e^{-h})(1)^{-1} + (1-e^{-h}-he^{-h})(1)^{-2} \right]}{1 - \left[ (1+e^{-h}) + K_p(h-1+e^{-h}) \right] (1)^{-1} + \left[ e^{-h} + K_p(1-e^{-h}-he^{-h}) \right] (1)^{-2}}$$

Simplificando

$$y(\infty) = \frac{K_p (h - he^{-h})}{K_p (h - he^{-h})} = 1$$

En otras palabras, la respuesta al escalón es estable y tiende sin error a la referencia al transcurrir el tiempo, y este comportamiento es independiente de los valores de  $K_p$  y  $h$  siempre y cuando no sean cero.

## Capítulo 4

# Análisis de Sistemas de Tiempo Discreto

### 4.1.- Introducción.

En el capítulo anterior se ha descrito la obtención de dos tipos de modelos para sistemas discretos o para el equivalente discreto de un sistema continuo: La ecuación de diferencias y la función de transferencia de pulso

Una vez que tenemos el modelo de un sistema discreto, podemos utilizarlo para predecir cuál es el comportamiento del sistema que representa ante condiciones iniciales distintas de cero, o ante diferentes entradas de prueba. Especialmente, es importante saber si presentará o no una respuesta acotada u oscilatoria, si tendrá sobreimpulsos, que tan rápida o lenta será, etc. Este es el problema que abordaremos en este capítulo.

### 4.2.- Cálculo de la Respuesta de un DSLIT.

*El problema de análisis* de un sistema consiste en obtener la respuesta del sistema ante una entrada dada. Existen dos métodos para abordar este problema:

- i. Obtener la solución de la ecuación de diferencias que representa al sistema. Para obtener la solución de una ecuación de diferencias es posible utilizar varias metodologías distintas:
  - 1) Métodos analíticos
  - 2) Solución iterativa
  - 3) Transformada Z inversa
- ii. Obtener la respuesta del sistema a una señal de prueba elemental (señal pulso unitario) , descomponer la entrada en términos de estas entradas elementales y aplicar la propiedad de linealidad.

La solución por métodos analíticos es muy similar a como se trata en el caso del cálculo de la solución de una ecuación diferencial y no será tratada en estos apuntes.

### 4.3.- Solución de las ecuaciones de diferencias mediante iteración numérica.

El método iterativo constituye la manera más sencilla de resolver una ecuación de diferencias, ya que simplemente evaluamos repetitivamente la ecuación a partir de las condiciones iniciales especificadas.

-  **Ventajas.** El método iterativo es sencillo y se puede implementar en una computadora de manera directa.

- ✚ **Desventajas.** En general es difícil obtener una expresión analítica de la solución con este método.

Si no tenemos una solución analítica de la solución  $y(kh)$ , esto implica que si deseamos por ejemplo el valor  $y(5000h)$ , necesitamos realizar 5000 iteraciones a partir de la condición inicial para obtenerlo, en cambio, si conociéramos la solución analítica, bastaría con sustituir  $k=5000$  en la expresión analítica de la solución.

#### 4.3.1.- Ejemplo. Sistema de primer orden

Obtener la respuesta al escalón unitario del sistema dado por la siguiente ecuación de diferencias de primer orden, para condiciones iniciales cero.

$$y(kh + h) = \alpha y(kh) + \beta u(kh) \quad (4.1)$$

##### Solución.

Haciendo las iteraciones a partir de la condición inicial  $y(0) = 0$ , obtenemos

$$\text{Para } k=0: \quad y(h) = \alpha y(0) + \beta u(0) = \alpha(0) + \beta(1) = \beta$$

$$\text{Para } k=1: \quad y(2h) = \alpha y(h) + \beta u(h) = \alpha(\beta) + \beta(1) = (\alpha + 1)\beta$$

$$\text{Para } k=2: \quad y(3h) = \alpha y(2h) + \beta u(2h) = \alpha(\alpha + 1)\beta + \beta(1) = (\alpha^2 + \alpha + 1)\beta$$

$$\text{Para } k=3: \quad y(4h) = \alpha y(3h) + \beta u(3h) = \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1)\beta + \beta(1) = (\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)\beta$$

...

Por inducción, para  $k=n-1$ :

$$y(nh) = \alpha y(nh - h) + \beta u(nh - h) = (\alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)\beta$$

Mediante inducción en este caso es posible obtener una expresión analítica para la solución, como sigue

$$y(nh) = (\alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)\beta$$

Pero el término entre paréntesis se puede escribir como

$$\alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1 = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha}$$

La cual es una sumatoria geométrica con razón de crecimiento  $\alpha$ , por lo tanto, la solución analítica es

$$y(nh) = \frac{1 - \alpha^n}{1 - \alpha} \beta \quad (4.2)$$

En la figura 4.1 se muestra el comportamiento de esta respuesta para  $h=1$ ,  $\beta=1$  y para diferentes valores de la constante  $\alpha$

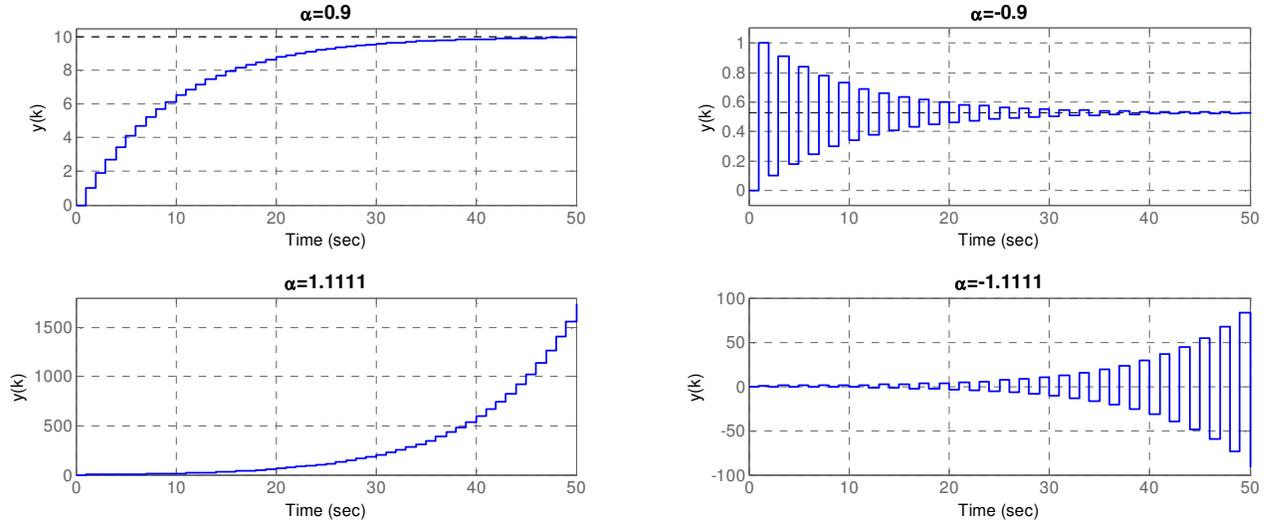


Fig. 4.1.- Respuesta al escalón unitario del sistema de primer orden para diferentes valores de  $\alpha$

Como se puede observar en la figura 4.1, dependiendo del valor de la constante  $\alpha$  el comportamiento de la respuesta al escalón del sistema de primer orden (4.1) puede ser dramáticamente diferente, y puede pasar de ser oscilatorio, no oscilatorio hasta ser inestable. Más adelante analizaremos como esta situación también se presenta en sistemas de orden mayor.

El método iterativo se puede emplear para sistemas de cualquier orden, sin embargo entre mayor sea el orden del sistema es más difícil encontrar una expresión analítica de la solución, por esta razón es importante tener un método orientado al cálculo de soluciones analíticas.

#### 4.4.- Solución de la Ecuación Lineal de Diferencias Mediante Transformada Z Inversa.

Si deseamos calcular la respuesta  $y(kh)$  ante una entrada  $u(kh)$  *bajo condiciones iniciales cero*, para un sistema discreto dado por su función de transferencia

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) \tag{4.3}$$

Será suficiente con calcular  $Y(z)$

$$Y(z) = G(z)U(z) \tag{4.4}$$

y luego expresar el resultado en el dominio del tiempo discreto, es decir,

$$y(kh) = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] \tag{4.5}$$

Para evaluar la expresión anterior expresaremos  $Y(z)$  en términos fáciles de encontrar en las tablas de Transformadas Z, o bien, aplicaremos alguno de los siguientes métodos para el cálculo de la Transformada Z inversa.

#### 4.5.- Cálculo de la Transformada Z Inversa.

Al proceso de obtener la señal en el tiempo discreto  $x(kh)$  a partir de su expresión transformada  $X(z)$  se le denomina transformada Z inversa. Se puede obtener la siguiente fórmula de inversión explícita usando teoría de variable compleja:

$$x(kh) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz \quad (4.6)$$

Donde C es un trayecto cerrado en el plano complejo Z que encierra al origen y se encuentra dentro de la ROC de  $X(z)$ .

La Transformada Z inversa se puede obtener por inspección a partir de la tabla de transformadas Z ya calculadas, sin embargo, en las tablas no siempre se pueden encontrar todas las posibles expresiones en Z, por esta razón a veces se usa alguno de los tres métodos que se describirán a continuación.

##### 4.5.1.- Cálculo directo de la integral de contorno compleja.

El Teorema Integral de Cauchy y la fórmula de Cauchy (Teorema de los Residuos) los cuales son resultado de la teoría de variable compleja proporcionan una herramienta para calcular la integral (4.6)

##### Teorema Integral de Cauchy:

Si  $f(z)$  es una función analítica para todos los puntos sobre y dentro de un contorno cerrado simple C, entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (4.7)$$

##### Fórmula integral de Cauchy:

Si  $f(z)$  es una función analítica sobre y dentro de un contorno cerrado simple C y si  $z = z_0$  es un punto en el interior del contorno, entonces

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \quad (4.8)$$

y también,

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} dz = \frac{1}{(k-1)!} \left. \frac{d^{k-1} f(z)}{dz^{k-1}} \right|_{z=z_0} \quad (4.9)$$

A partir de los resultados anteriores se puede obtener un método práctico para evaluar la integral de contorno para una función racional de la forma:

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (4.10)$$

supongamos que  $f(z)$  tiene  $n$  raíces simples  $z_1, z_2, \dots, z_n$  dentro de  $C$ , expandiendo  $f(z)$  en fracciones parciales, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \left[ \sum_{i=1}^n \frac{R_i(z)}{z - z_i} \right] dz \quad (4.11)$$

donde  $R_i$  es el residuo de  $f(z)$  en el polo  $z=z_i$ , es decir,

$$R_i(z) = (z - z_i) f(z) \quad (4.12)$$

De (4.11) y usando (4.8), obtenemos

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_C f(z) dz = \sum_{i=1}^n R_i(z_i) = \sum_{\text{todos los polos } z_i} [\text{residuos de } f(z)] \quad (4.13)$$

La fórmula anterior funciona también cuando los polos son repetidos, pero en ese caso se debe usar (4.9) en lugar de (4.8)

Finalmente, la fórmula (4.13) aplicada al cálculo de la transformada inversa queda

$$x(kh) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz = \sum_{z_i \text{ dentro de } C} [\text{Residuos de } X(z) z^{k-1} \text{ en } z = z_i] \quad (4.14)$$

donde  $z_i$  son los polos de  $X(z) z^{k-1}$ .

### Ejemplo.

Calcular la transformada inversa de  $X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$  con ROC  $|z| > |a|$ .

### Solución.

Usando la fórmula de integración obtenemos

$$X(kh) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{1 - az^{-1}} z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{z^k}{z - a} dz$$

donde  $C$  es una circunferencia de radio mayor que  $|a|$ . Para el cálculo consideraremos dos casos:

Para  $k \geq 0$ : En este caso el único polo encerrado por  $C$  es  $z=a$ , y el residuo correspondiente es:

$$R_1 = z^k \Big|_{z=a} = a^k$$

por lo tanto

$$x(kh) = a^k \text{ para } k \geq 0 \quad (4.15)$$

Para  $k < 0$ : En este caso  $\frac{z^k}{z-a}$  tiene un polo en  $z=0$  además del polo en  $z=a$ .

Calcularemos los residuos para cada valor de  $k$ :

Para  $k=-1$ :

$$R_1(0) = \frac{1}{z-a} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{a}, \quad R_2(a) = \frac{1}{z} \Big|_{z=a} = \frac{1}{a}$$

por lo tanto

$$x(-h) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z(z-a)} dz = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 0$$

Para  $k=-2$ :

$$x(-2h) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^2(z-a)} dz = \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z-a} \right) \Big|_{z=0} + \frac{1}{z^2} \Big|_{z=a} = 0$$

...etc., en general (para  $k < 0$ ):

$$x(kh) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^k(z-a)} dz = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( \frac{1}{z-a} \right) \Big|_{z=0} + \frac{1}{z^k} \Big|_{z=a}$$

Pero,

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left( \frac{1}{z-a} \right) = (-1)^k (k-1)! \frac{1}{(z-a)^k}$$

$$x(kh) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{1}{z^k(z-a)} dz = (-1)^k \frac{1}{(z-a)^k} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z^k} \Big|_{z=a} = 0$$

Por lo tanto

$$x(kh) = 0 \quad \text{para } k < 0 \quad (4.16)$$

Tomando en cuenta los dos casos: (4.15) y (4.16) obtenemos que

$$x(kh) = a^k \gamma(kh)$$

☞ **Observación:** Como la ROC especificada es el exterior de un círculo, se espera que la señal  $x(kh)$  sea causal, por lo tanto  $x(kh) = 0$  para  $k < 0$  era un resultado esperado y podemos omitir el análisis del caso  $k < 0$  si hacemos desde el inicio esta observación.

#### 4.5.2.- Cálculo por expansión en serie de potencias

La idea de este método consiste en expandir  $X(z)$  en una serie de potencias de  $z$  que converge en la ROC dada, es decir, se expresa  $X(z)$  en la forma

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} \quad (4.17)$$

Entonces de la definición y de la unicidad de la transformada z, obtenemos simplemente

$$x(n) = c_n \text{ para todo } n \quad (4.18)$$

### Ejemplo:

Determine la transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

cuando la ROC es

- a)  $|z| > 1$
- b)  $|z| < 0.5$

### Solución:

- a) En este caso como la ROC es el exterior de un círculo, la señal es de tipo causal, por lo que buscaremos una serie en potencias de  $z^{-1}$ . Usando el procedimiento de división de polinomios obtenemos:

$$\begin{array}{r} 1 + \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{7}{4}z^{-2} + \frac{15}{8}z^{-3} + \dots \\ 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \overline{)1} \\ \hline 1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} \\ \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} \\ \hline \frac{3}{2}z^{-1} - \frac{9}{4}z^{-2} + \frac{3}{4}z^{-3} \\ \frac{7}{4}z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-3} \\ \hline \frac{7}{4}z^{-2} - \frac{21}{8}z^{-3} + \frac{7}{8}z^{-4} \\ \frac{15}{8}z^{-3} - \frac{7}{8}z^{-4} \\ \hline \dots \end{array}$$

Es decir,  $x(n) = \{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \dots\}$ , o bien,

$$x(n) = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} u(n) = \left[ 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u(n)$$

- b) En este caso la ROC es el interior de un círculo por lo tanto corresponde a una señal anticausal por ello desarrollamos en potencias positivas de z. usando nuevamente el procedimiento de división de polinomios, pero ordenando al revés:

$$\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \Bigg) \frac{2z^2 + 6z^3 + 14z^4 + 30z^5 + 62z^6 \dots}{1} \\ \frac{1 - 3z + 2z^2}{3z - 2z^2} \\ \frac{3z - 9z^2 + 6z^3}{7z^2 - 6z^3} \\ \frac{7z^2 - 21z^3 + 14z^4}{15z^3 - 14z^4} \\ \frac{15z^3 - 45z^4 + 30z^5}{31z^4 + 30z^5} \\ \dots$$

de donde,

$$x(n) = \{ \dots, 62, 30, 14, 6, 2, 0, 0 \}$$

↑

es decir,

$$x(n) = \left[ 2^{-n} - 2 \right] u(-n-1) = - \left[ 2 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right] u(-n-1)$$

### 4.5.3.- Cálculo por expansión en fracciones parciales

Este método consiste en realizar una expansión en fracciones parciales de la función racional  $\frac{X(z)}{z}$  para posteriormente buscar para cada fracción parcial su correspondiente expresión en el tiempo en una tabla de transformadas Z de funciones básicas.

Para aplicar este método previamente se deberá escribir  $X(z)$  como una función racional *propia*, es decir, como una división de polinomios de la forma

$$X(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0} \tag{4.19}$$

Donde  $M < N$ .

Toda función racional *impropia* ( $M \geq N$ ) se puede expresar siempre como la suma de un polinomio más una función propia. La transformación inversa de un polinomio es inmediata, por lo cual sólo queda el problema de transformar la parte propia.

**Ejemplo:** Expresar la siguiente función racional impropia como un polinomio más una fracción racional propia:

$$X(z) = \frac{z^3 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{2}z + 1}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{2}}$$

**Solución:**

Primero observamos que se deben eliminar del numerador las potencias  $z^3$  y  $z^2$ , por lo tanto usamos el procedimiento de división de polinomios arreglando los polinomios en potencias descendentes de  $z$  y paramos el proceso cuando el grado del residuo sea menor que el grado del denominador:

$$\begin{array}{r} z + \frac{4}{3} \\ z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{2} \overline{) z^3 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{2}z + 1} \\ \underline{z^3 - \frac{2}{3}z^2 + \frac{1}{2}z} \phantom{+ 1} \\ \frac{4}{3}z^2 + 0z + 1 \\ \underline{\frac{4}{3}z^2 - \frac{8}{9}z + \frac{4}{6}} \\ \frac{8}{9}z + \frac{2}{6} \end{array}$$

Por lo tanto

$$X(z) = z + \frac{4}{3} + \frac{\frac{8}{9}z + \frac{2}{6}}{z^2 - \frac{2}{3}z + \frac{1}{2}}$$

**4.5.3.1.- Caso de Polos Distintos (Reales y Complejos)**

**Ejemplo. Polos reales distintos:** Obtener la expansión en fracciones parciales de  $\frac{X(z)}{z}$ , para

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

**Solución:**

Multiplicando numerador y denominador por  $z^2$  se obtiene

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2 - 1.5z + 0.5}$$

factorizando el denominador obtenemos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{R_1}{z-1} + \frac{R_2}{z-0.5}$$

donde

$$R_1 = \left. \frac{z}{z-0.5} \right|_{z=1} = 2, \quad R_2 = \left. \frac{z}{z-1} \right|_{z=0.5} = -1$$

Finalmente

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

Esta expresión contiene solamente funciones básicas cuya transformada Z inversa se puede obtener de la tabla de transformadas Z, una vez que se especifique la ROC correspondiente.

El procedimiento mostrado en el ejemplo anterior puede ser utilizado *siempre y cuando los polos no sean repetidos*, inclusive aunque éstos sean complejos como se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo. Polos complejos distintos:** Obtener la expansión en fracciones parciales de  $\frac{X(z)}{z}$ , para

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

**Solución:**

Multiplicando numerador y denominador por  $z^2$  se obtiene

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z^2-z+0.5}$$

factorizando el denominador obtenemos

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

donde  $p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$ .

Expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{R_1}{(z-p_1)} + \frac{R_2}{(z-p_2)}$$

donde

$$R_1 = \left. \frac{z+1}{z-p_2} \right|_{z=p_1} = \frac{p_1+1}{p_1-p_2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}j}{j} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}j, \quad R_2 = \left. \frac{z+1}{z-p_1} \right|_{z=p_2} = \frac{p_2+1}{p_2-p_1} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j}{-j} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}j$$

\* Obsérvese que  $R_1 = \bar{R}_2$ , lo cual es una consecuencia de que  $p_1 = \bar{p}_2$ .

Sustituyendo, se obtiene

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}j}{(z - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}j)} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}j}{(z - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j)}$$

La cual no es una expresión muy adecuada, ya que si en la expresión original solo teníamos coeficientes reales, deberíamos esperar lo mismo en la expresión expandida. Esta dificultad puede ser resuelta al transformar al dominio del tiempo:

Así, si

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{R}{(z-p)} + \frac{\bar{R}}{(z-\bar{p})}$$

entonces

$$x(n) = Rp^n u(n) + \bar{R}\bar{p}^n u(n) = \left[ Rp^n + \overline{Rp^n} \right] u(n) = \text{Re}\{Rp^n\} u(n)$$

Donde  $u(n)$  es el escalón unitario discreto y se escribe solo para enfatizar que la señal es causal.

Si denotamos  $R, p$  en forma polar:  $R = |R|e^{j\phi}$ ,  $p = |p|e^{j\theta}$  se obtiene

$$x(n) = \text{Re}\{Rp^n\} u(n) = \text{Re}\{|R||p|^n e^{(\phi+jn\theta)}\} u(n)$$

o bien,

$$x(n) = |R||p|^n \cos(n\theta + \phi) u(n)$$

Para el ejemplo,  $R = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{2}}e^{j\phi}$ ,  $\phi = \tan^{-1}(-3)$ ,  $p = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{j\frac{\pi}{4}}$ , por lo tanto

$$X(kh) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \cos\left(\frac{\pi}{4}kh + \phi\right)$$

En la figura 3.3 se muestra el comportamiento en el tiempo de esta señal

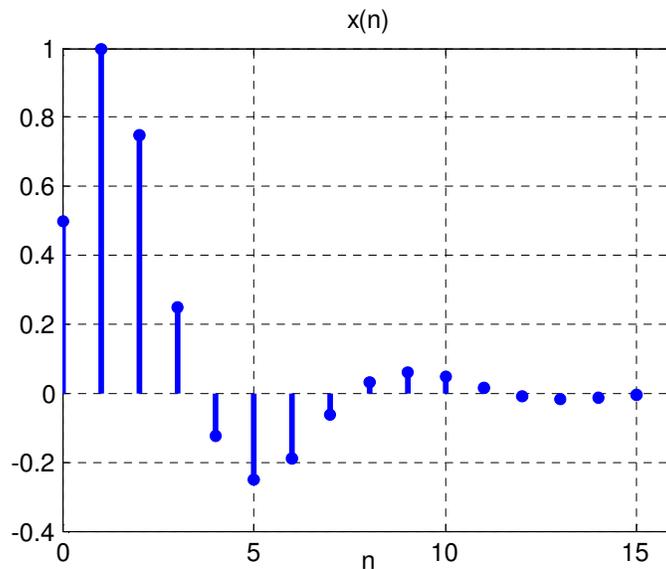


Fig. 4.2. Gráfica de la señal  $X(n) = \sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \phi\right)$  del ejemplo

**4.5.3.2.- Polos repetidos.**

Cuando el denominador de  $\frac{X(z)}{z}$  contiene términos de la forma  $(z-p)^n$ , se generará una sumatoria de  $n$  fracciones parciales de la forma:

$$\frac{R_1}{(z-p)} + \frac{R_2}{(z-p)^2} + \dots + \frac{R_n}{(z-p)^n} \quad (4.20)$$

Donde los coeficientes de los numeradores se calculan como sigue

$$R_i = \frac{1}{(n-i)!} \left. \frac{d^{n-i}}{dz^{n-i}} \left[ (z-p)^n \frac{X(z)}{z} \right] \right|_{z=p} \quad (4.21)$$

**Ejemplo:** Obtener la expansión en fracciones parciales de  $\frac{X(z)}{z}$ , para

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

**Solución:**

Multiplicando numerador y denominador por  $z^2$  se obtiene

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$$

Es decir,

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{R_1}{(z-1)} + \frac{R_2}{(z-1)^2} + \frac{R_3}{(z+1)}$$

donde

$$R_1 = \frac{d}{dz} \left[ \frac{z^2}{z+1} \right] \Big|_{z=1} = \left[ \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2} \right] \Big|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

$$R_2 = \left[ \frac{z^2}{z+1} \right] \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}$$

$$R_3 = \left[ \frac{z^2}{(z-1)^2} \right] \Big|_{z=-1} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la expansión en fracciones parciales queda

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{3}{4}z}{(z-1)} + \frac{\frac{1}{2}z}{(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}z}{(z+1)}$$

Donde cada sumando se puede encontrar en una tabla de Transformadas Z.

#### 4.6.- Ejemplos de cálculo de la respuesta de un sistema discreto mediante transformada Z

##### 4.6.1.- Sistema de primer orden en lazo abierto

Consideremos el modelo discreto de una planta de primer orden, dada por su ecuación de diferencias

$$y(kh + h) = \alpha y(kh) + \beta u(kh) \quad (4.22)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes.

La función de transferencia de pulso correspondiente a (4.22) está dada por

$$G(z) = \frac{\beta}{z - \alpha} \quad (4.23)$$

Calcularemos la respuesta al escalón unitario bajo condiciones iniciales cero, es decir, consideraremos que la entrada a la planta es

$$U(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Entonces  $Y(z) = G(z)U(z)$ , es decir,

$$Y(z) = \left( \frac{\beta}{z - \alpha} \right) \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

O bien,

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\beta}{(z - \alpha)(z - 1)}$$

Desarrollando en fracciones parciales

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\beta}{1 - \alpha} \left( \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - \alpha} \right)$$

Por lo tanto

$$Y(z) = \frac{\beta}{1 - \alpha} \left( \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - \alpha} \right)$$

De las tablas obtenemos la Transformada Z inversa, por lo tanto

$$y(kh) = \frac{\beta}{1 - \alpha} [1 - \alpha^k] \quad (4.24)$$

Compárese con (4.2), como es de esperarse, se obtiene el mismo resultado puesto que (4.23) es la función de transferencia correspondiente a la ecuación de diferencias (4.1).

☞ **Observación.** El modelo discreto (4.23) no necesariamente proviene de la discretización de una planta continua, pero en el caso en que así sea, la planta continua correspondiente sería

$$G(s) = \frac{b}{s+a}$$

Y se tendría que  $\alpha = e^{-ah}$ ,  $\beta = \frac{b}{a}(1 - e^{-ah})$  y entonces la ecuación (4.24) se convierte en

$$y(kh) = \frac{b}{a} [1 - e^{-akh}] \quad (4.25)$$

Que no es más que la discretización de

$$y(t) = \frac{b}{a} [1 - e^{-at}] \quad (4.26)$$

La cual es la respuesta de la planta continua ante un escalón unitario, bajo condiciones iniciales cero.

#### 4.6.2.- Sistema de segundo orden (Sucesión de Fibonacci)

Una de las aplicaciones del cálculo de la solución analítica de un sistema discreto es el cálculo del término general en una sucesión numérica, por ejemplo, consideremos el ejemplo clásico de la sucesión de Fibonacci, la cual se obtiene sumando los dos números anteriores para generar el siguiente. Por ejemplo, si empezamos con las condiciones iniciales  $x(0) = 1$ ,  $x(1) = 1$ , la sucesión sería la siguiente secuencia discreta

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots\} \quad (4.27)$$

La pregunta es: ¿Cuál es el término general de la sucesión?, es decir, ¿cuánto vale  $x(k)$ ?

**Solución:** Podemos considerar la sucesión (4.27) como la salida del sistema dado por la ecuación de diferencias que nos dice como obtener  $x(k)$  en términos de los sus valores anteriores

$$x(k) = x(k-1) + x(k-2) \quad (4.28)$$

La cual es válida para  $k \geq 2$

O bien, adelantando la ecuación 2 instantes de muestreo se obtiene

$$x(k+2) = x(k+1) + x(k) \quad (4.29)$$

La cual es válida para  $k \geq 0$

Aplicando Transformada Z a (4.29), como en este caso las condiciones iniciales no son cero, obtenemos

$$z^2 [X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] = z[X(z) - x(0)] + X(z)$$

Factorizando

$$(z^2 - z - 1)X(z) = (z^2 - z)x(0) + x(1)z$$

Despejando  $X(z)$

$$X(z) = \frac{(z^2 - z)x(0) + x(1)z}{z^2 - z - 1}$$

Sustituyendo las condiciones iniciales

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \quad (4.30)$$

Cuyos polos son

$$p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad (4.31)$$

Y por lo tanto (4.30) se puede factorizar como

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

Expandiendo en fracciones parciales

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{\frac{p_1}{p_1 - p_2}}{z - p_1} + \frac{\frac{p_2}{p_2 - p_1}}{z - p_1}$$

O bien, tomando en cuenta que  $p_1 - p_2 = \sqrt{5}$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{p_1}{z - p_1} - \frac{p_2}{z - p_1} \right)$$

Por lo tanto

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{p_1 z}{z - p_1} - \frac{p_2 z}{z - p_1} \right)$$

Y de las Tablas de Transformadas obtenemos

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ (p_1)^{k+1} - (p_2)^{k+1} \right]$$

#### 4.7.- Cálculo de la Respuesta de un DSLIT por Convolución con la Respuesta al Impulso Unitario.

Como ya se comentó antes, una metodología que permite obtener la respuesta de un sistema ante una señal de entrada arbitraria  $x(kh)$  consiste en expresar esta señal como una combinación de señales elementales (pulsos unitarios) para luego, por linealidad, obtener la respuesta del sistema como una combinación de las respuestas a estas señales elementales.

##### 4.7.1.- Descomposición de una señal discreta en términos de impulsos

Una de las señales más sencillas de generar es el **pulso unitario**, el cual se definió anteriormente. La respuesta de un DSLIT a ésta señal lo caracteriza completamente, es decir, la respuesta de un DSLIT ante cualquier tipo de entrada puede ser expresada en términos de su **respuesta al pulso unitario**.

Para verificar lo anterior primeramente expresemos una señal arbitraria como una sumatoria de impulsos, para ello notemos que una secuencia arbitraria  $x(kh)$  cumple con la siguiente propiedad:

$$x(kh)\delta(kh-nh) = x(nh)\delta(kh-nh) \tag{4.32}$$

puesto que el impulso unitario retardado  $\delta(kh-nh)$  vale cero en todos lados excepto en  $k = n$ , en donde vale 1, pero en ese instante justamente  $x(kh)$  vale  $x(nh)$ . El resultado de esta operación se ilustra en forma gráfica en la figura 4.3. para  $n = 8$ .

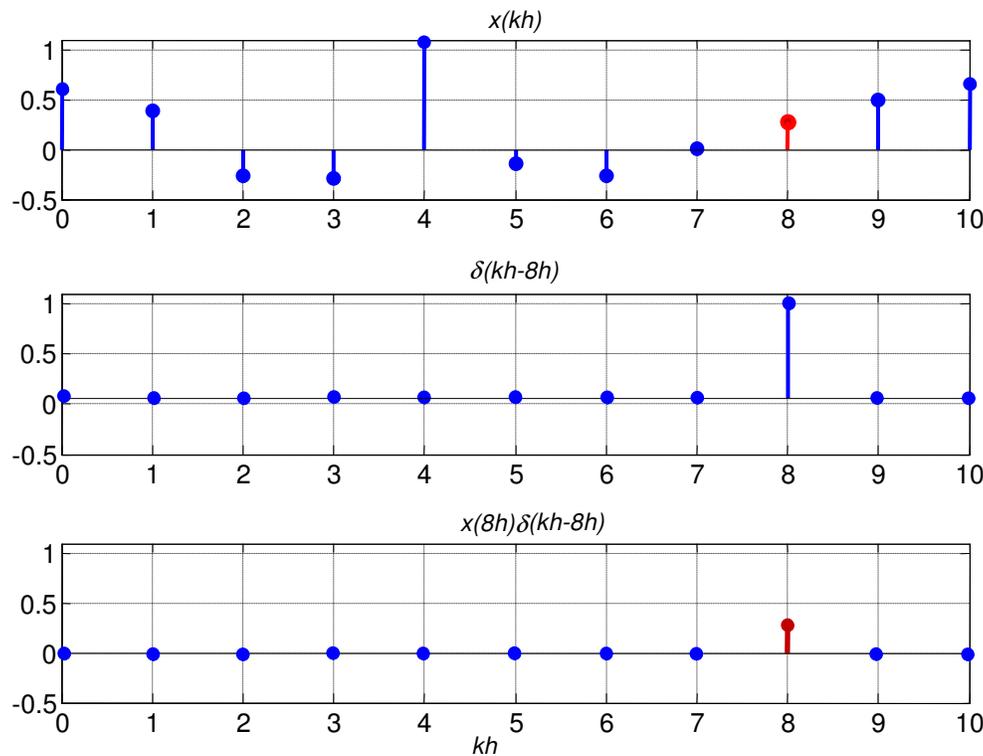


Fig. 4.3.. Extracción de la muestra  $x(8)$  mediante la operación  $x(k)\delta(k-8)$ .

Es decir, al multiplicar una señal  $x(kh)$  por  $\delta(kh-nh)$ , extraemos la muestra  $x(nh)$ . Si repetimos este proceso para todos los valores de  $n$  podremos expresar la señal original  $x(kh)$  como sigue (se supone una señal causal)

$$x(kh) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nh)\delta(kh-nh) \tag{4.33}$$

La expresión anterior nos dice que podemos expresar cualquier señal discreta como una sumatoria ponderada de impulsos desplazados.

**Ejemplo:** Expresar la siguiente señal discreta causal de duración finita como sumatoria ponderada de impulsos desplazados:

$$x(kh) = \{1, -1, 3, 1, -2\}$$

**Solución.**

$$x(kh) = \delta(kh) - \delta(kh-h) + 3\delta(kh-2h) + \delta(kh-3h) - 2\delta(kh-4h)$$

#### 4.7.2.- Respuesta de un DSLIT ante Entradas arbitrarias: La Convolución.

A continuación consideraremos el experimento mostrado en la figura 4.4 que consiste en aplicar un pulso unitario a un sistema discreto en el instante  $k = n$ . Denotaremos la respuesta del sistema a este pulso unitario por  $g(kh - nh)$ .

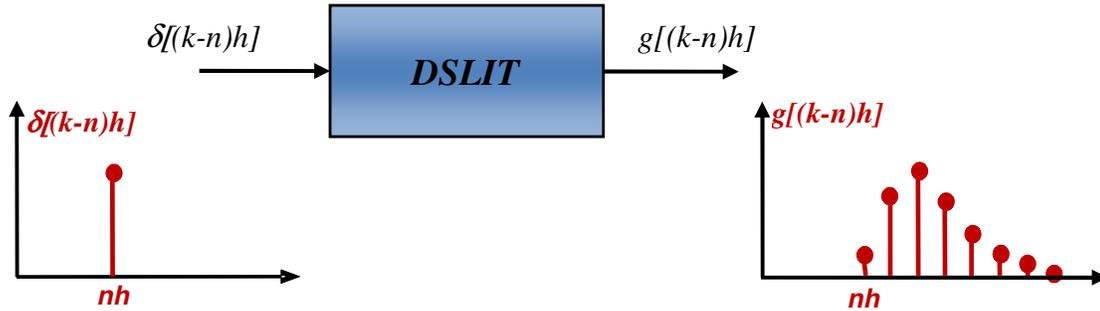


Fig. 4.4. Respuesta a un pulso unitario aplicado en el instante  $k=n$

De acuerdo a la ecuación (4.33), una entrada discreta cualquiera  $x(kh)$  puede ser expresada como el siguiente tren de impulsos modulado en amplitud:

$$x(kh) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nh) \delta(kh - nh)$$

Por lo tanto, si el sistema es lineal, por superposición, la respuesta del sistema  $y(kh)$  puede expresarse como sigue

$$y(kh) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nh) g(kh - nh) \quad (4.34)$$

A la sumatoria anterior se le llama **sumatoria de convolución**, por lo tanto,

☞ La respuesta de un DSLIT a una entrada arbitraria  $x(kh)$  es la convolución de la entrada con la respuesta al pulso unitario  $g(kh)$  del sistema.

En ocasiones la sumatoria de convolución se denota como sigue

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nh) g(kh - nh) = x(kh) * g(kh) \quad (4.35)$$

Se puede demostrar sin mucha dificultad que la convolución es conmutativa, es decir,

$$x(kh) * g(kh) = g(kh) * x(kh)$$

o sea que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(nh) g(kh - nh) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nh) x(kh - nh)$$

☞ **Observación:** En el caso continuo se tiene un resultado completamente similar. Si  $h(t)$  es la respuesta al impulso unitario continuo  $\delta(t)$  del sistema continuo, la respuesta a una señal cualquiera  $x(t)$ , está dada por la **integral de convolución**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

**Ejemplo:** Si la respuesta al impulso de un DSLIT es

$$g(kh) = \{1, 2, 1, -1\}$$

Determina la respuesta del sistema ante la entrada

$$x(kh) = \{1, 2, 3, 1\}$$

**Solución:** En la siguiente tabla se muestran los pasos intermedios para calcular la sumatoria de convolución  $x(kh) * g(kh)$  :

$$y(kh) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nh)g(kh - nh) = \sum_{n=0}^3 x(nh)g(kh - nh)$$

Evaluando:

$$y(0) = x(0)g(0) = 1$$

$$y(1) = x(0)g(1) + x(1)g(0) = 4$$

$$y(2) = x(0)g(2) + x(1)g(1) + x(2)g(0) = 8$$

$$y(3) = x(0)g(3) + x(1)g(2) + x(2)g(1) + x(3)g(0) = 8$$

$$y(4) = x(1)g(3) + x(2)g(2) + x(3)g(1) = 3$$

$$y(5) = x(2)g(3) + x(3)g(2) = -2$$

$$y(6) = x(3)g(3) = -1$$

$n$	0	1	2	3	
$x(nh)$	1	2	3	1	
$k$	$g(kh)$	$g(kh-h)$	$g(kh-2h)$	$g(kh-3h)$	$y(kh)$
0	1	0	0	0	1
1	2	1	0	0	4
2	1	2	1	0	8
3	-1	1	2	1	8
4	0	-1	1	2	3
5	0	0	-1	1	-2
6	0	0	0	-1	-1
7	0	0	0	0	0

Es decir,

$$y(kh) = \{1, 4, 8, 8, 3, -2, -1\}$$

☞ **Observación:** La convolución de dos secuencias finitas, una de longitud N y la otra de longitud M, produce otra secuencia finita de longitud N+M-1

### 4.7.3.- Respuesta al impulso de sistemas causales

Como la respuesta  $y(kh)$  de un sistema causal no puede depender de información anterior al instante  $k$ , su respuesta al impulso  $g(kh - ih)$  debe ser cero para  $k < i$ . Por lo tanto

$$y(kh) = \sum_{i=0}^{\infty} x(ih)g(kh - ih) = \sum_{i=0}^k x(ih)g(kh - ih)$$

es decir, la respuesta de un sistema causal a una entrada causal  $x(kh)$  estará dada por la sumatoria de convolución finita siguiente

$$y(kh) = \sum_{i=0}^k x(ih)g(kh - ih) = \sum_{i=0}^k g(ih)x(kh - ih) \quad (4.36)$$

**Ejemplo:** Determinar la respuesta al escalón unitario  $\mathbf{u}(kh)$  del sistema de primer orden dado por su ecuación de diferencias lineal

$$y(kh + h) = \alpha x(kh) + \beta u(kh)$$

**Solución:**

Primeramente obtenemos la respuesta del sistema al pulso unitario. Esto lo podemos hacer transformando al dominio  $z$  como sigue

$$Y(z) = \frac{\beta}{z - \alpha} U(z)$$

pero si la entrada  $u(kh)$  es un pulso unitario,  $U(z) = 1$ , entonces

$$G(z) = Y(z) = \frac{\beta}{z - \alpha}$$

De las tablas obtenemos

$$g(kh) = \mathcal{Z}^{-1}[G(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\beta}{z - \alpha}\right] = \beta\alpha^{k-1}$$

Obsérvese que el resultado no es válido para  $k=0$ , pues la función de transferencia supone condiciones iniciales cero, es decir,

$$g(kh) = \begin{cases} \beta\alpha^{k-1} & \text{para } k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

Como el sistema y la entrada son causales podemos usar la ecuación (4.36), Si además ahora la entrada es un escalón unitario,  $u(kh) = \mathbf{u}(kh) \equiv 1$  para  $k \geq 0$ , por lo tanto:

$$y(kh) = \sum_{i=0}^k g(ih)\mathbf{u}(kh - ih) = \sum_{i=0}^k g(ih) = \sum_{i=1}^k \beta\alpha^{i-1}$$

lo cual se puede expresar como

$$y(kh) = \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^k \alpha^i = \frac{\beta}{\alpha} \left( \sum_{i=0}^k \alpha^i - 1 \right)$$

Por lo tanto

$$y(kh) = \frac{\beta}{\alpha} \left( \frac{1 - \alpha^{k+1}}{1 - \alpha} - 1 \right)$$

simplificando, finalmente se obtiene

$$y(kh) = \beta \frac{1 - \alpha^k}{1 - \alpha} \quad (4.37)$$

Comparando con (4.2) se observa que se tratan del mismo resultado.

#### 4.8.- Análisis de Estabilidad de DSLITs

Una de las propiedades más importantes de los sistemas es su estabilidad. En estos apuntes consideramos la noción de estabilidad desde el punto de vista entrada-salida siguiente:

- ✚ Se dice que un sistema es estable en el sentido BIBO (Bounded input – Bounded Output), si a toda señal de entrada  $u(kh)$  *acotada* responde con una salida  $y(kh)$  también *acotada*.

La estabilidad BIBO de un sistema puede ser obtenida observando la respuesta al impulso del sistema, ya que se puede demostrar el siguiente resultado

##### 4.8.1.- Respuesta al Pulso y Estabilidad

Podemos establecer la estabilidad BIBO de un sistema DSLIT a partir de su respuesta al pulso unitario  $g(kh)$  como sigue:

Suponiendo que el sistema es BIBO estable, deberá producir una salida  $y(kh)$  acotada para cualquier entrada acotada  $u(kh)$ , es decir, existen dos constantes finitas  $M_u$ ,  $M_y$ , tales que

$$|u(kh)| < M_u, \quad |y(kh)| < M_y \quad \text{para todo valor de } k,$$

pero la respuesta del sistema se puede calcular mediante convolución en términos de su respuesta al impulso  $g(kh)$ , de acuerdo a (4.36), por lo tanto

$$|y(kh)| = \left| \sum_{i=0}^k g(ih)u(kh - ih) \right|$$

y de la desigualdad del triángulo, el valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de sus valores absolutos, por lo tanto

$$|y(kh)| \leq \sum_{i=0}^k |g(ih)u(kh - ih)|$$

Además el valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos, por lo tanto

$$|y(kh)| \leq \sum_{i=0}^k |g(ih)||u(kh - ih)|$$

pero como  $u(kh)$  está acotada por  $M_u$ :

$$|y(kh)| < \sum_{i=0}^k |g(ih)| M_u$$

Es decir,

$$|y(kh)| < M_u \sum_{i=0}^k |g(ih)|$$

Es decir, para que  $y(kh)$  esté acotada para todo valor de  $k$  se requiere que el lado derecho de la desigualdad anterior sea un número finito  $M_y$  aún cuando  $k$  tiende al infinito, es decir, se requiere que exista un número positivo  $M_g$  finito que acote a la sumatoria infinita de los valores absolutos de la respuesta al pulso unitario, es decir,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |g(ih)| \leq M_g < \infty \quad (4.38)$$

La condición anterior se enuncia diciendo que la respuesta al impulso  $g(kh)$  es **absolutamente sumable**. Es decir:

☞ Un DSLIT es BIBO estable si su respuesta al impulso es absolutamente sumable.

La condición (4.38) no solo es suficiente, también es necesaria, esta condición tiene dos consecuencias que se pueden demostrar con un poco de análisis:

- i. Para que  $g(kh)$  sea absolutamente sumable es necesario que  $g(kh)$  tienda a cero conforme  $k$  tiende a infinito. (Esta condición no es suficiente en general, pero sí lo es para DSLITs).
- ii. Si  $g(kh)$  es absolutamente sumable cualquier entrada de duración finita al sistema producirá una salida  $y(kh)$  que tiende a cero conforme  $k$  tiende a infinito.

### Ejemplo:

Obtener el rango de valores de la constante  $a$  para el cual es estable el sistema causal cuya respuesta al impulso es

$$g(kh) = a^k \text{ para } k \geq 0$$

### Solución:

Evaluamos la condición de sumabilidad absoluta (4.38)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} |g(ih)| &= \sum_{i=0}^{\infty} |a^i| \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} |a|^i = 1 + |a| + |a|^2 + |a|^3 + \dots \end{aligned}$$

La cual es una Serie Geométrica con razón de crecimiento  $|a|$ , la suma de sus primeros  $N$  términos es

$$S_N = \frac{1 - |a|^{N+1}}{1 - |a|}$$

Para que el límite de  $S_N$  cuando  $N$  tiende a infinito exista, se requiere que  $|a| < 1$ , así  $|a|^{N+1}$  tiende a cero conforme  $N$  tiende a infinito y por lo tanto

$$\sum_{i=0}^{\infty} |a|^i = \frac{1}{1 - |a|}$$

es decir, el sistema es BIBO estable solamente si  $|a| < 1$ .

#### 4.8.2.- Estabilidad y Polos de la función Transferencia de Pulso.

Consideremos un DSLIT con entrada  $u(kh)$  y salida  $y(kh)$ , cuya función de transferencia de pulso está dada por

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Si la entrada es un pulso unitario se tiene que  $U(z) = 1$  y por lo tanto  $Y(z) = G(z)$  es la respuesta al pulso unitario en el dominio Z. Es decir,

☞ La Transformada Z de la respuesta al pulso unitario  $g(kh)$  es la función de transferencia de pulso  $G(z)$  del sistema.

Por lo tanto, si conocemos la Función de Transferencia  $G(z)$  del sistema podemos obtener la respuesta al impulso unitario del sistema mediante transformación inversa de  $G(z)$ .

De acuerdo a la sección anterior, si  $G(z)$  es racional con polos no repetidos  $p_1, p_2, \dots, p_n$  se podrá escribir como sigue

$$G(z) = \frac{R_1 z}{z - p_1} + \frac{R_2 z}{z - p_2} + \dots + \frac{R_n z}{z - p_n} \quad (4.39)$$

por lo tanto, su respuesta al impulso en el tiempo será una sumatoria de exponenciales cuyas bases estarán dadas por los polos.

$$g(kh) = R_1 p_1^k + R_2 p_2^k + \dots + R_n p_n^k \quad (4.40)$$

☞ Si todos los polos tienen magnitud menor que la unidad esta respuesta al impulso tenderá a cero conforme el tiempo crece y bastará con que algún polo no cumpla esta condición para que  $g(kh)$  crezca indefinidamente conforme  $k$  crece, es decir,

$$|p_i| < 1 \text{ para todo } i \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g(kh) \rightarrow 0 \quad (4.41)$$

Como los polos pueden ser complejos, la desigualdad  $|p_i| < 1$  representa una región del plano complejo Z. La condición (4.41) se puede expresar también como sigue

$$(todos\ los\ polos\ p_i\ dentro\ del\ círculo\ unitario) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g(kh) \rightarrow 0$$

La condición (4.41) garantiza la condición de sumabilidad absoluta de  $g(kh)$  en el caso de DSLITs, por lo tanto la podemos tomar como una condición necesaria y suficiente para la estabilidad BIBO de este tipo de sistemas.

☞ Un sistema DSLIT causal es BIBO estable si y solo si todos sus polos están en el interior del círculo unitario.

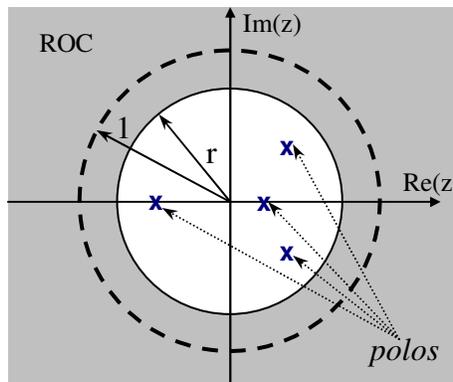


Fig. 4.5. Polos de un DSLIT causal BIBO-estable y ROC de su función de transferencia.

**Ejemplo:** La función sistema  $H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$  como ya se vio en un ejemplo anterior, tiene los polos  $p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$ ,  $p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$  que en forma gráfica se muestran como cruces en el plano z en la figura 4.5 de donde se aprecia que se encuentran en el interior del círculo unitario, por lo tanto,  $g(kh)$  debe tender a cero conforme k crece, lo cual en efecto ocurre, como se aprecia en la figura 4.2.

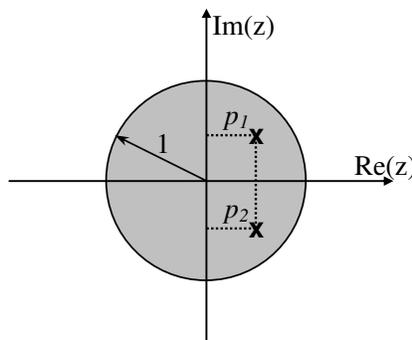


Fig. 4.6. Representación en el plano Z de los polos  $p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}$

#### 4.9. Métodos para el análisis de estabilidad basada en los polos

Como se mostró en la sección anterior, el problema de averiguar la estabilidad de un DSLIT se convierte en el problema de averiguar si todos los polos de su función de transferencia  $G(z)$  están o no dentro del círculo unitario.

Este problema se puede resolver usando métodos numéricos para búsqueda de raíces de polinomios, sin embargo los métodos numéricos solo se pueden aplicar cuando se conocen todos los coeficientes de  $G(z)$  lo cual no siempre es posible. Cuando  $G(z)$  contiene coeficientes desconocidos el problema de cálculo de raíces se vuelve muy complicado para orden 2 e intratable para orden 3 o mayor, en estos casos en lugar de calcular las raíces se reduce el problema a averiguar si hay algunas fuera del círculo unitario.

Así como en el caso continuo existen métodos analíticos como el Criterio de Routh para averiguar si las raíces de un polinomio están en el semiplano complejo derecho, para el caso discreto se han desarrollado criterios como el de Schur-Cohn o el Criterio de Jury que nos permiten averiguar si un polinomio tiene alguna raíz en el exterior del círculo unitario.

##### 4.9.1.- Criterio de Routh Modificado.

El criterio de Routh nos da un procedimiento para averiguar si un polinomio tiene raíces con parte real positiva. Es posible utilizar el procedimiento dado por el criterio de Routh para averiguar si un polinomio tiene raíces en el exterior del círculo unitario, si previamente realizamos una transformación de variables que convierta el exterior del círculo unitario en el semiplano complejo derecho.

##### La Transformación Bilineal de Möbius.

Los siguientes cambios de variable compleja tienen la propiedad de transformar los números complejos  $z$  ubicados en el interior del círculo unitario en números complejos  $v$  ó  $w$  ubicados en el semiplano complejo izquierdo como se ilustra en la figura 4.7

$$v = \frac{z+1}{z-1} \quad \text{para } z \neq 1 \quad (4.42)$$

O bien,

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{para } z \neq -1 \quad (4.43)$$

Las transformaciones anteriores son conocidas como transformaciones bilineales de Möbius sus correspondientes transformaciones inversas son las siguientes.

$$z = \frac{v+1}{v-1} \quad \text{para } v \neq 1 \quad (4.44)$$

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad \text{para } w \neq 1 \quad (4.45)$$

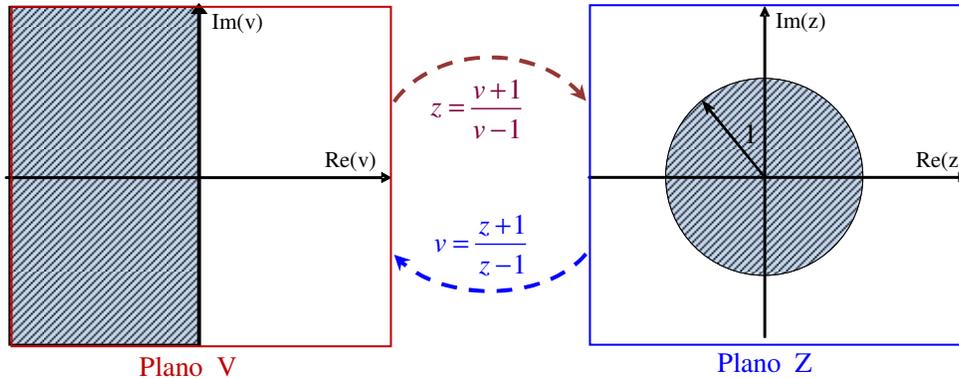


Figura 4.7.- Transformación de Möbius entre los planos V y Z .

**Ejemplo.** Utilizando la transformación bilineal y el criterio de Routh, averiguar cuántas raíces fuera del círculo unitario tiene el siguiente polinomio.

$$A(z) = z^3 + 0.5z^2 - z + 1 = 0$$

**Solución.**

Sustituyendo  $z=1$  podemos observar que el polinomio dado no tiene raíces en  $z=1$ , por lo tanto podemos usar la transformación (4.42).

$$\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^3 + 0.5\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 - \left(\frac{v+1}{v-1}\right) + 1 = 0$$

Multiplicando por  $(v-1)^3$  se obtiene

$$(v+1)^3 + 0.5(v+1)^2(v-1) - (v+1)(v-1)^2 + (v-1)^3 = 0$$

Desarrollando los productos

$$(v^3 + 3v^2 + 3v + 1) + 0.5(v^2 + 2v + 1)(v-1) - (v+1)(v^2 - 2v + 1) + (v^3 - 3v^2 + 3v - 1) = 0$$

$$(v^3 + 3v^2 + 3v + 1) + 0.5(v^3 + v^2 - v - 1) - (v^3 - v^2 - v + 1) + (v^3 - 3v^2 + 3v - 1) = 0$$

Agrupando términos semejantes

$$1.5v^3 + 1.5v^2 + 6.5v - 1.5 = 0$$

O bien,

$$v^3 + v^2 + \frac{13}{3}v - 1 = 0$$

La *condición necesaria* para estabilidad del Criterio de Routh (todos los coeficientes deben ser positivos) no se cumple.

Para ver cuántas raíces están en el semiplano complejo derecho construimos el arreglo de coeficientes correspondiente, obteniendo

1	$\frac{13}{3}$
1	-1
$\frac{16}{3}$	
-1	

De donde se observa que el número de cambios de signo en la primera columna es 1, por lo tanto, existe una raíz del polinomio  $A(v)$  en el semiplano complejo derecho lo cual significa que existe una raíz del polinomio original  $A(z)$  fuera del círculo unitario.

En este ejemplo se conocen todos los coeficientes del polinomio y no se aprecia la ventaja de usar el criterio de Routh, ya que mediante un método numérico podemos calcular las raíces del polinomio, las cuales son

Raíces de $A(z)$	Magnitud
-1.5558	1.5558
$0.5279+0.6034j$	0.8017
$0.5279-0.6034j$	0.8017

De donde se puede observar a simple vista que hay una raíz (valor marcado en fondo gris) fuera del círculo unitario

**4.9.1.1.- Diseño de controladores estabilizantes en lazo cerrado.**

A continuación trataremos dos ejemplos en los cuales los polinomios involucrados contienen coeficientes desconocidos. Estos son problemas típicos de diseño de controladores para lograr la estabilidad del sistema completo en lazo cerrado.

**Ejemplo:** Calcular el rango de valores de la ganancia  $K_p$  de un controlador proporcional para el siguiente esquema de control digital directo, en donde  $G(s) = \frac{1}{s+1}$ .

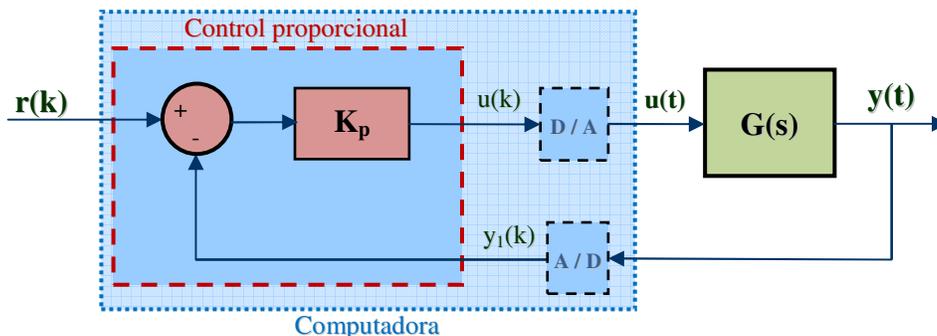


Figura 4.8. Control digital proporcional de una planta continua

**Solución.**

Primero expresamos todos los bloques del sistema en el dominio  $z$  como se muestra en la siguiente figura

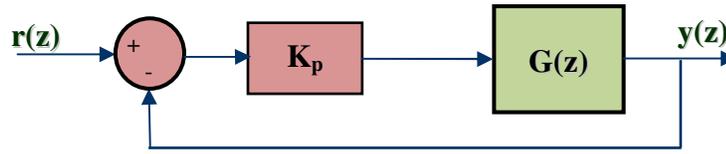


Figura 4.9. Sistema de la figura anterior expresado en  $z$ .

En donde

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s(s+1)} \right]$$

Es decir,

$$G(z) = \frac{1 - e^{-h}}{z - e^{-h}}$$

Por lo tanto la función de transferencia de lazo cerrado será

$$G_{lc}(z) = \frac{K_p G(z)}{1 + K_p G(z)} = \frac{K_p (1 - e^{-h})}{z - e^{-h} + K_p (1 - e^{-h})}$$

De donde el único polo en lazo cerrado es  $z = e^{-h} - K_p (1 - e^{-h})$ . Por lo tanto, Para que el sistema en lazo cerrado sea estable se requiere que

$$|z| = |e^{-h} - K_p (1 - e^{-h})| < 1$$

O lo que es lo mismo

$$-1 < e^{-h} - K_p (1 - e^{-h}) < 1$$

Restando  $e^{-h}$

$$-1 - e^{-h} < -K_p (1 - e^{-h}) < 1 - e^{-h}$$

Dividiendo entre  $(1 - e^{-h})$ , el cual es una cantidad positiva puesto que  $h > 0$ , obtenemos

$$\frac{-1 - e^{-h}}{1 - e^{-h}} < -K_p < 1$$

Multiplicando por (-1)

$$-1 < K_p < \frac{1 + e^{-h}}{1 - e^{-h}} \quad (4.46)$$

Así, por ejemplo, si  $h = 0.01$

$$-1 < K_p < 100.5$$

**Ejemplo:** Repetir el problema anterior para la planta continua siguiente  $G(s) = \frac{1}{s^2 + s}$ .

**Solución.** Primero expresamos todos los bloques del sistema en el dominio  $z$  igual que se hizo en el problema anterior en la figura 4.9, solo que ahora

$$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

Es decir, de acuerdo a los cálculos de un ejemplo del capítulo anterior (ver ecuación (3.71))

$$G(z) = \frac{(h-1+e^{-h})z + (1-e^{-h}-he^{-h})}{z^2 - (1+e^{-h})z + e^{-h}}$$

Por lo tanto la función de transferencia de lazo cerrado será

$$G_{lc}(z) = \frac{K_p G(z)}{1 + K_p G(z)} = \frac{K_p [(h-1+e^{-h})z + (1-e^{-h}-he^{-h})]}{z^2 - (1+e^{-h})z + e^{-h} + K_p [(h-1+e^{-h})z + (1-e^{-h}-he^{-h})]}$$

Simplificando obtenemos

$$G_{lc}(z) = \frac{K_p [(h-1+e^{-h})z + (1-e^{-h}-he^{-h})]}{z^2 + [K_p(h-1+e^{-h}) - (1+e^{-h})]z + e^{-h} + K_p(1-e^{-h}-he^{-h})}$$

Por lo tanto, los polos de lazo cerrado son las raíces del polinomio del denominador

$$A(z) = z^2 + [K_p(h-1+e^{-h}) - (1+e^{-h})]z + e^{-h} + K_p(1-e^{-h}-he^{-h}) = 0$$

Aún calculando las raíces de este polinomio sería difícil llegar a conclusiones sobre estabilidad. En lugar de calcular las raíces para analizar la estabilidad del sistema en lazo cerrado aplicaremos el criterio de Routh modificado, para ello aplicamos primeramente la transformación bilineal

$$A(v) = \left(\frac{v+1}{v-1}\right)^2 + [K_p(h-1+e^{-h}) - (1+e^{-h})]\left(\frac{v+1}{v-1}\right) + e^{-h} + K_p(1-e^{-h}-he^{-h}) = 0$$

Eliminando el denominador común

$$A(v) = (v+1)^2 + [K_p(h-1+e^{-h}) - (1+e^{-h})](v^2 - 1) + [e^{-h} + K_p(1-e^{-h}-he^{-h})](v-1)^2 = 0$$

Agrupando términos semejantes

$$A(v) = [1 + K_p(h-1+e^{-h}) - (1+e^{-h}) + e^{-h} + K_p(1-e^{-h}-he^{-h})]v^2 + [2 - 2e^{-h} - 2K_p(1-e^{-h}-he^{-h})]v + 1 - [K_p(h-1+e^{-h}) - (1+e^{-h})] + e^{-h} + K_p(1-e^{-h}-he^{-h}) = 0$$

Simplificando, obtenemos

$$A(v) = K_p h(1-e^{-h})v^2 + 2[1 - e^{-h} - K_p(1-e^{-h}-he^{-h})]v + 2(1+e^{-h}) + K_p(2-h-2e^{-h}-he^{-h}) = 0$$

Aplicando el Criterio de Routh, obtenemos:

- 1) Condición necesaria: Todos los coeficientes deben ser positivos, por lo tanto:

$$K_p h(1 - e^{-h}) > 0 \quad (4.47)$$

$$2[1 - e^{-h} - K_p(1 - e^{-h} - he^{-h})] > 0 \quad (4.48)$$

$$2(1 + e^{-h}) + K_p(2 - h - 2e^{-h} - he^{-h}) > 0 \quad (4.49)$$

Como  $h > 0$  y  $(1 - e^{-h}) > 0$ , la condición (4.47) se satisface si

$$K_p > 0 \quad (4.50)$$

La condición (4.48) se puede reescribir como sigue

$$1 - e^{-h} - K_p(1 - e^{-h} - he^{-h}) > 0$$

Graficando el término entre paréntesis  $(1 - e^{-h} - he^{-h})$  se puede ver que siempre es positivo, por lo tanto la desigualdad anterior se puede escribir como

$$K_p < \frac{1 - e^{-h}}{1 - e^{-h} - he^{-h}} \quad (4.51)$$

Además la condición (4.49) se puede reescribir como

$$2(1 + e^{-h}) - K_p[-2 + h + 2e^{-h} + he^{-h}] > 0$$

En forma similar al graficar el término entre corchetes  $-2 + h + 2e^{-h} + he^{-h}$  se observa que siempre es positivo, por lo tanto, despejando

$$K_p < \frac{2(1 + e^{-h})}{-2 + h + 2e^{-h} + he^{-h}} \quad (4.52)$$

Para que se cumplan las tres condiciones (4.50), (4.51) y (4.52), se requiere

$$0 < K_p < \min \left\{ \frac{1 - e^{-h}}{1 - e^{-h} - he^{-h}}, \frac{2(1 + e^{-h})}{-2 + h + 2e^{-h} + he^{-h}} \right\} \quad (4.53)$$

Si graficamos las expresiones involucradas en el lado derecho de (4.53) observamos que se puede reescribir como sigue:

$$\text{Si } h < 3.7208: \quad 0 < K_p < \frac{1 - e^{-h}}{1 - e^{-h} - he^{-h}} \quad (4.54)$$

$$\text{Si } h > 3.7208: \quad 0 < K_p < \frac{2(1 + e^{-h})}{-2 + h + 2e^{-h} + he^{-h}} \quad (4.55)$$

La ecuación (4.54) será la más usual, ya que normalmente  $h$  es pequeño. Por ejemplo, para  $h=0.1$ :

$$0 < K_p < \frac{1 - e^{-0.1}}{1 - e^{-0.1} - he^{-0.1}} = 20.34$$

**4.9.2.- Criterio de Joury.**

A diferencia del criterio de Routh, el criterio de Joury analiza un polinomio directamente en el plano Z y sin necesidad de hacer ninguna transformación de coordenadas nos dice cuántas raíces fuera del círculo unitario tiene dicho polinomio.

Consideremos el polinomio siguiente

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n \tag{4.56}$$

A partir de los coeficientes del polinomio anterior se forma el arreglo numérico siguiente

<b> renglón</b>						
1:	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{n-1}$	$a_n$
2:	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
3:	$b_0$	$b_1$	$\dots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
4:	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$	
5:	$c_0$	$\dots$	$c_{n-3}$	$c_{n-2}$		
6:	$c_{n-2}$	$\dots$	$c_1$	$c_0$		
⋮	⋮					
2n+1:	$z_0$					

En donde

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}}{a_0}, \quad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_n \\ a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}}{a_0}, \quad \dots, \quad b_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}}{a_0} \\
 c_0 &= \frac{\begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{vmatrix}}{b_0}, \quad \dots, \quad c_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} b_{n-2} & b_{n-1} \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix}}{b_0} \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Obsérvese que por cada par de renglones del arreglo anterior solamente se calcula el primero y el siguiente simplemente se invierte en orden respecto al calculado.

Obsérvese también que si los elementos sombreados (que aquí llamaremos pivotes) en el arreglo de Joury son cero, los cálculos no se pueden continuar.

**Criterio de Joury.**

*Suponiendo que  $a_0 > 0$ : El polinomio  $A(z)$  no tiene raíces fuera del disco unitario si y solo si todos los pivotes son positivos, es decir,*

$$b_0 > 0, c_0 > 0, \dots, z_0 > 0 \quad (4.58)$$

Si ningún pivote es cero, el número de pivotes negativos es igual al número de raíces fuera del disco unitario.

☞ **Observación:** Si se cumple la condición (4.58), la última desigualdad ( $z_0 > 0$ ) es la más laboriosa de evaluar, pero en su lugar se puede sustituir por la condición equivalente más sencilla de evaluar:

$$A(1) > 0 \quad \text{y} \quad (-1)^n A(-1) > 0 \quad (4.59)$$

☞ **Observación:** Por procedimiento se recomienda evaluar primero la condición (4.59) antes de construir el arreglo de Jury. La condición (4.59) se puede considerar como una condición necesaria para que el polinomio tenga todas sus raíces dentro del círculo unitario, ya que si no se cumple existirá al menos una raíz fuera del disco unitario.

### 4.9.3.- Criterio de Schur- Cohn

Dado el polinomio de grado  $m$   $A_m(z)$  dado por

$$A_m(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m} = \sum_{k=0}^m a_k z^{-k} \quad (4.60)$$

El polinomio recíproco de  $A_m(z)$  se define como

$$B_m(z) = z^{-m} A_m(z^{-1}) = z^{-m} \sum_{k=0}^m a_k z^k = \sum_{k=0}^m a_k z^{-(m-k)} = a_0 z^{-m} + a_1 z^{-(m-1)} + \dots + a_{m-1} z^{-1} + a_m \quad (4.61)$$

Es decir los coeficientes de  $B_m(z)$  son los mismos que los de  $A_m(z)$  pero en orden inverso.

Para aplicar el Criterio de Schur-Cohn al polinomio

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N} \quad (4.62)$$

Comenzamos haciendo

$$A_N(z) = A(z) \quad (4.63)$$

y

$$K_N = a_N \quad (4.64)$$

Y luego obtenemos los polinomios de grado decreciente  $A_m(z)$  donde  $m = N, N-1, \dots, 1$ , de acuerdo a la siguiente ecuación recursiva:

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2} \quad (4.65)$$

Donde el coeficiente  $K_m$  es el coeficiente de la máxima potencia de  $z^{-1}$  en  $A_m(z)$ , es decir,

$$K_m = a_m \quad (4.66)$$

El criterio de Schur-Cohn establece que el polinomio  $A(z)$  tiene todos sus polos en el interior del círculo unitario si y solo si se satisface la condición

$$|K_m| < 1 \text{ para todo } m = 1, 2, \dots, N \quad (4.67)$$

**Ejemplo:** ¿Es o no estable el sistema dado por la siguiente función de transferencia?

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

**Solución.**

Como la estabilidad solo depende de los polos, es decir, del denominador, hacemos

$$A_2(z) = 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}$$

de donde

$$K_2 = -\frac{1}{2}$$

Además

$$B_2(z) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}$$

sustituyendo en (4.65) obtenemos

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \frac{A_2(z) - K_2 B_2(z)}{1 - K_2^2} \\ A_1(z) &= \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{4}z^{-1} + z^{-2}\right)}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{4}{3} \left[ \frac{3}{4} - \frac{21}{8}z^{-1} \right] = 1 - \frac{7}{2}z^{-1} \end{aligned}$$

de donde

$$K_1 = -\frac{7}{2}$$

Como  $|K_1| = \frac{7}{2} > 1$  se concluye que el sistema es inestable. En este ejemplo se puede verificar fácilmente esta conclusión, ya que el denominador se puede factorizar como

$$\begin{aligned} A_2(z) &= 1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2} = z^{-2}(z^2 - \frac{7}{4}z - \frac{1}{2}) \\ &= z^{-2}(z + 2)(z - \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

de donde se observa que el polo  $p_1 = -2$  está fuera del círculo unitario.

En forma similar al criterio de Routh o al de Joury, la utilidad del Criterio de Schur-Cohn radica en que se puede aplicar, aún si algún coeficiente del polinomio es desconocido.

#### 4.9.4.- El Lugar de las Raíces.

El objetivo del método del Lugar de las Raíces es obtener las condiciones sobre el parámetro K para la estabilidad del sistema lineal cuya función transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{KG(z)}{1 + KG(z)H(z)} \quad (4.68)$$

El método se basa en la obtención de una gráfica de la variación de los polos de lazo cerrado al variar K, es decir la variación de las raíces de la ecuación característica:

$$1 + KG(z)H(z) = 0 \quad (4.69)$$

Una vez que se tiene la gráfica. Se analiza a simple vista si existen trayectorias de variación de los polos de lazo cerrado que salgan del círculo unitario y por lo tanto indiquen la inestabilidad del sistema en lazo cerrado.

##### 4.9.4.1.- Reglas para el trazado del Lugar de las Raíces

Las dos herramientas fundamentales para el trazado de este lugar geométrico se obtienen de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado (4.69) como sigue

$$KG(z)H(z) = -1 = -1 + j0 \quad (4.70)$$

O bien, en forma polar,

$$KG(z)H(z) = 1 \angle (2n+1)\pi \quad (4.71)$$

Donde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

La ecuación (4.71) se descompone en dos igualdades que se deben cumplir de manera simultánea:

**Condición de la Magnitud:**

$$|G(z)H(z)| = \frac{1}{|K|}$$

**Condición del Ángulo:** (con  $n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ )

$$\text{cis}[G(z)H(z)] = \begin{cases} (2n+1)\pi & \text{para } K \geq 0 \\ 2n\pi & \text{para } K \leq 0 \end{cases}$$

Basados en las dos condiciones anteriores se pueden obtener las siguientes 11 reglas:

1. **Puntos en  $K=0$ .**- De la condición de magnitud se ve que éstos puntos corresponden a los polos de lazo abierto (los polos de  $G(z)H(z)$ ).
2. **Puntos en  $K=\infty$ .**- Por la misma razón éstos corresponden a los ceros de lazo los ceros de  $G(z)H(z)$ .
3. **Número de ramas.**- Es igual al número de polos de lazo abierto (ya que cada polo es el inicio de una rama que comienza cuando  $K=0$  y termina en un cero de  $G(z)H(z)$  cuando  $K \rightarrow \infty$ ).
4. **Puntos sobre el eje Real.**- Sobre el eje real sólo se cumple la condición de ángulo a la izquierda de un número impar de polos y ceros reales de  $G(z)H(z)$ .
5. **Simetrías.**- El Lugar de las Raíces (L.R.) es simétrico respecto al eje real.
6. **Asíntotas.**- Cuando  $Z$  tiende a  $\infty$  el L.R. es asintótico a las líneas rectas cuyos ángulos de inclinación están dados por:

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{|n-m|},$$

donde:  $n$  = número de polos finitos de lazo abierto  
 $m$  = número de ceros finitos de  $G(z)H(z)$   
 $k = 0, 1, 2, \dots, |n-m|$

7. **Intersección de las asíntotas.**- Esta siempre ocurre en el eje real, en la posición dada por

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{Re}\{\text{polos de } G(z)H(z)\} - \sum \text{Re}\{\text{ceros de } G(z)H(z)\}}{n-m}$$

8. **Ángulos de partida y de llegada.**- Las ramas que llegan a ceros complejos de  $G(z)H(z)$  o parten de polos complejos de  $G(z)H(z)$  lo hacen formando un ángulo que se determinan usando la condición de del ángulo, suponiendo un punto  $S$  sobre el lugar de las raíces “infinitamente cercano” y trazando vectores  $s-p_i$  desde cada polo finito  $p_i$  y  $s-z_i$  desde cada cero finito  $z_i$  de  $G(z)H(z)$  y evaluando.

$$\text{cis}[G(z)H(z)] = 180^\circ = \sum_{\text{ceros de } G(z)H(z)} \text{cis}(z-z_i) - \sum_{\text{polos de } G(z)H(z)} \text{cis}(z-p_i)$$

9. **Intersección del L.R. con el Círculo Unitario.**- El lugar donde esto ocurre puede ser determinado por el Criterio de Jury o el de Routh Modificado.
10. **Puntos de Bifurcación.**- Como estos corresponden a lugares donde ocurren raíces múltiples, se pueden encontrar hallando las raíces de la siguiente ecuación:

$$\frac{dG(z)H(z)}{dz} = 0$$

**11. Valores de K sobre el L.R.-** El valor de K en cualquier punto  $z_0$  del L.R.se puede determinar de la condición de magnitud como sigue:

$$12. |K| = \frac{1}{|G(z)H(z)|} = \frac{\prod_{\text{polos de } G(z)H(z)} |p_i - z_0|}{\prod_{\text{ceros de } G(z)H(z)} |z_i - z_0|}$$

# Capítulo 5

## Diseño de Sistemas de Control en Tiempo Discreto

### 5.1.- Introducción

El problema de diseñar un controlador digital para controlar una planta continua puede ser tan sencillo como el de partir de un controlador continuo ya diseñado previamente y simplemente implementar una versión discreta adecuada del mismo, o puede pasar por el uso de herramientas de diseño específicas para el caso digital, partiendo de objetivos de diseño, un modelo discreto de la planta y analizando el comportamiento completo del sistema en lazo cerrado mediante las técnicas de modelado de sistemas discretos vistas en los capítulos anteriores para verificar o asegurar el cumplimiento de los objetivos del diseño.

### 5.2.- Traslación del diseño analógico

El enfoque más sencillo para el diseño, es no hacer el diseño, es decir, si ya se tiene un controlador continuo diseñado previamente y que satisface los requerimientos en lazo cerrado, se puede proponer simplemente su reemplazo por una versión discretizada de dicho controlador continuo. En este caso el problema se reduce a tres problemáticas menores:

- Seleccionar el mejor método de discretización
- Elegir el periodo de muestreo adecuado
- Evitar la distorsión de la respuesta de frecuencia

#### 5.2.1.- Diferentes aproximaciones discretas

En el capítulo 3 se presentaron varias aproximaciones discretas para sistemas continuos. Cualquiera de estas puede ser utilizada para obtener versiones discretas de controladores continuos. Todas ellas producen un error con respecto a la versión continua, siendo por lo general las más simples las que producen mayor error. En la siguiente tabla se presenta un resumen de algunas aproximaciones y sus características más sobresalientes.

**Tabla 5.1. Aproximaciones Discretas y sus Características**

Método de aproximación	Reemplazar	Características
Diferencias hacia adelante	$s$ por $\frac{z-1}{h}$	Sencillez
Diferencias hacia atrás	$s$ por $\frac{1-z^{-1}}{h}$	
Regla trapezoidal (Tustin)	$s$ por $\frac{2}{h} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)$	Complejidad intermedia
Invariante al escalón	$G(s)$ por $(1-z^{-1})\mathcal{Z} \left( \frac{G(s)}{s} \right)$	Exacta ante entradas constantes

**Ejemplo.** Considérese el sistema de control analógico de velocidad de un motor de C. D. mediante un compensador en adelanto mostrado en la figura siguiente.

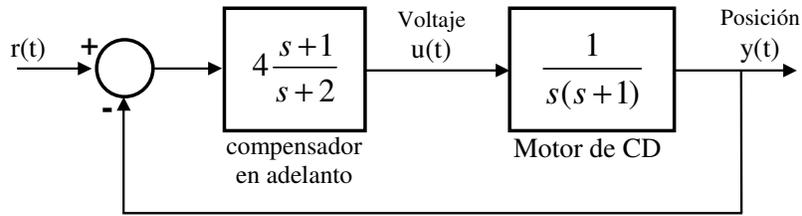


Figura 5.1. Control analógico de posición angular de un motor de CD

Se va a implementar la función de transferencia  $H(s) = 4 \frac{s+1}{s+2}$  del controlador analógico mediante un controlador digital  $H(z)$ . A continuación se obtienen las diferentes aproximaciones discretas, del controlador, para comparar en simulación las características logradas con cada aproximación utilizada. De esta manera, el esquema de control analógico de la figura 5.1 se transforma en el esquema de control digital directo de la figura siguiente

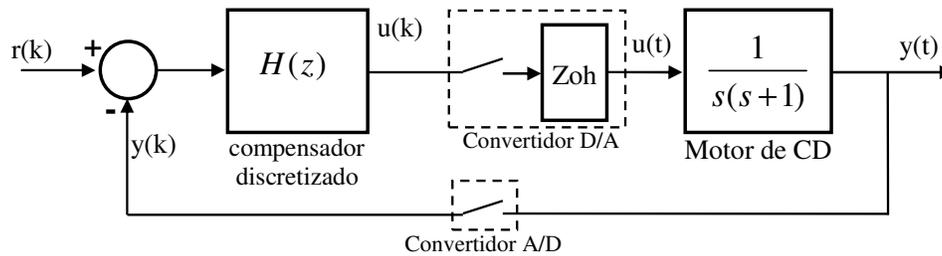


Figura 5.2. Control digital de velocidad de un motor de CD

Por diferencias hacia adelante:

$$H_1(z) = 4 \frac{\frac{z-1}{h} + 1}{\frac{z-1}{h} + 2} = 4 \frac{z - (1-h)}{z - (1-2h)}$$

Por diferencias hacia atrás:

$$H_2(z) = 4 \frac{\frac{1-z^{-1}}{h} + 1}{\frac{1-z^{-1}}{h} + 2} = 4 \frac{h+1}{2h+1} \frac{z - (\frac{1}{1+h})}{z - (\frac{1}{1+2h})}$$

Mediante la aproximación trapezoidal:

$$H_4(z) = 4 \frac{\frac{2}{h} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + 1}{\frac{2}{h} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + 2} = 4 \frac{(h+2)z + (h-2)}{(2h+2)z + (2h-2)} = 4 \frac{h+2}{2h+2} \frac{z - (\frac{2-h}{h+2})}{z - (\frac{2-2h}{2h+2})}$$

Discretización invariante al escalón:

$$H_5(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left( 4 \frac{s+1}{s(s+2)} \right)$$

Desarrollando en fracciones parciales

$$H_5(z) = 2(1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s + 2}\right)$$

$$H_5(z) = 2(1 - z^{-1})\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-2h}z^{-1}}\right),$$

es decir,

$$H_5(z) = 2\left(1 + \frac{1 - z^{-1}}{1 - e^{-2h}z^{-1}}\right) = 2\frac{2z - (1 + e^{-2h})}{z - e^{-2h}} = 4\frac{z - \left(\frac{1 + e^{-2h}}{2}\right)}{z - e^{-2h}}$$

En la figura 5.3 se muestran la repuesta al escalón del sistema en lazo cerrado utilizando el controlador analógico y las diferentes aproximaciones discretas, para  $h=0.2$  seg.

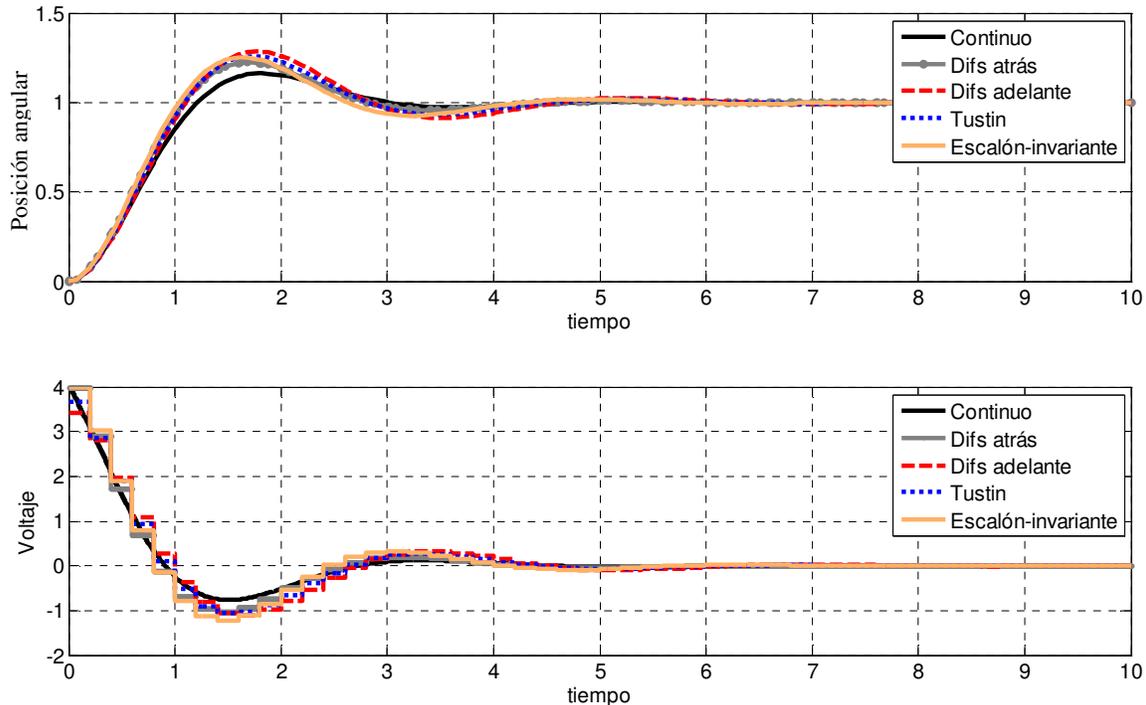


Figura 5.3. Control de posición angular de un motor de CD con controlador continuo y con diferentes controladores digitales aproximados con  $h=0.2$ .

Como puede apreciarse en la figura 5.3, tanto la respuesta del sistema como la acción de control con el controlador continuo y con las diferentes aproximaciones discretas son muy similares entre sí, además, si se disminuye el periodo de muestreo, las respuestas son aún más parecidas, sin embargo, si se usa un periodo de muestreo mayor, las versiones discretas tienden a diferir cada vez más de la versión continua, llegándose inclusive a perder la estabilidad original como se puede apreciar en la figura 5.4, en donde se eligió un periodo de muestreo  $h=1$ .

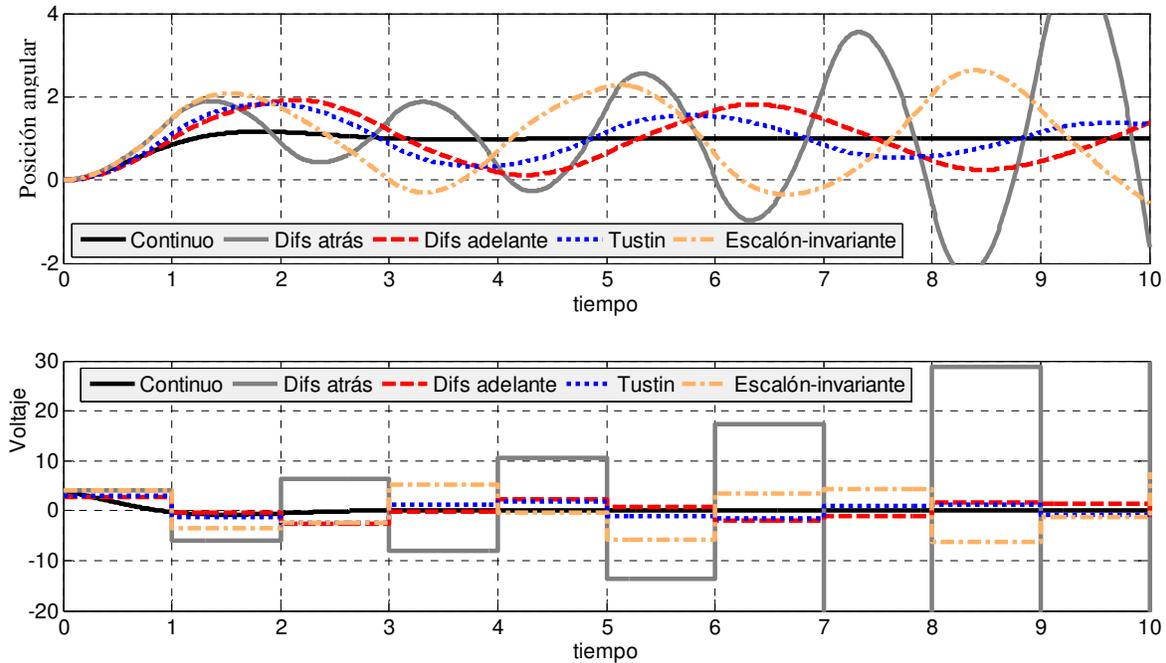


Figura 5.4. Control de posición angular de un motor de CD con controlador continuo y con diferentes controladores digitales aproximados con  $h=1$ .

### 5.2.2.- Elección del periodo de muestreo

Como se puede advertir del ejemplo de la sección anterior, el periodo de muestreo utilizado en la implementación del controlador digital es crucial para obtener un buen desempeño del sistema en lazo cerrado. En ausencia de mayor información se deberá elegir el periodo de muestreo lo más pequeño posible para mantener un desempeño lo más parecido posible al controlador continuo ya diseñado.

Sin embargo, al elegir un periodo de muestreo demasiado pequeño, el controlador estará recalculando el algoritmo de control más veces por segundo y por lo tanto consumirá una mayor potencia de cálculo, en algunas aplicaciones esto podría ser una exigencia muy difícil de cumplir, por esta razón si se tiene información sobre el modelo de la planta es posible elegir periodos de muestreo no tan pequeños, pero que cumplan la siguiente regla empírica, la cual está basada en permitir una disminución del margen de fase aproximado de  $5^\circ$  a  $15^\circ$ :

👉 Elegir el periodo de muestreo  $h$  de manera que

$$h\omega_c \approx 0.15 \rightarrow 0.5 \tag{5.1}$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia de corte de la función de transferencia de lazo abierto de la planta (Controlador continuo y planta en cascada).

**Ejemplo.** Para el ejemplo del control de posición angular del motor de CD se tiene que la función de transferencia de lazo abierto es

$$H(s)G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Cuyo diagrama de Bode se muestra en la figura 5.5, en esta figura se puede apreciar que la frecuencia de corte es aproximadamente  $\omega_c \approx 1.6 \text{ rad/seg}$ , por lo tanto, de acuerdo a la recomendación empírica anterior  $h \approx 0.1 \rightarrow 0.3 \text{ seg}$ . Obsérvese que esta recomendación da buenos resultados para todas las aproximaciones, como pudo observarse para  $h=0.2 \text{ seg}$  en la figura 5.3.

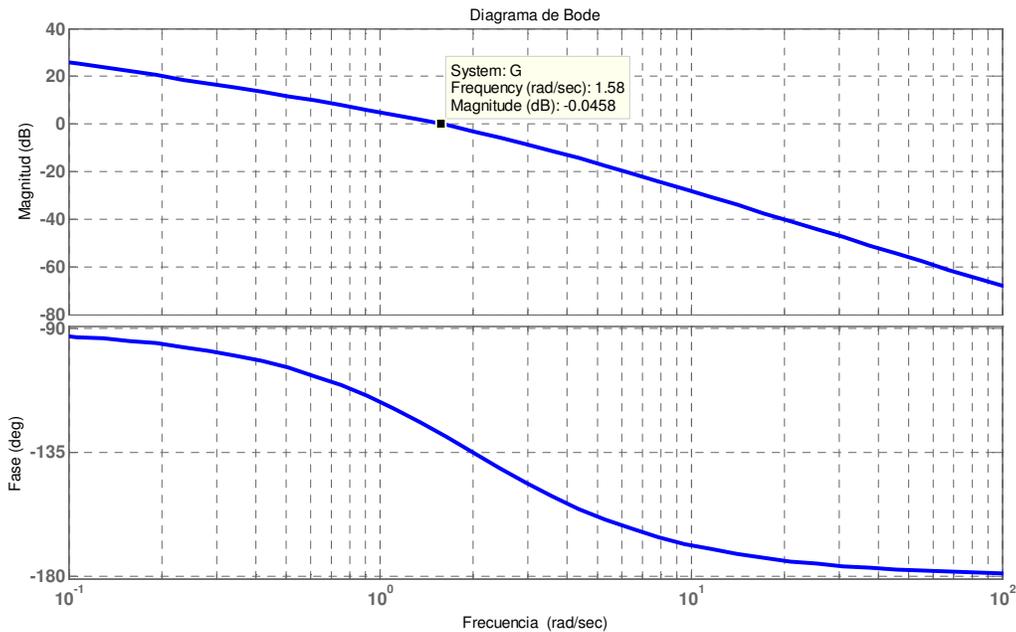


Figura 5.5. Diagrama de Bode de la función de transferencia en lazo abierto para el control de posición angular del motor de CD.

### 5.2.3.- P.I.D. Analógicos

El controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) se ha convertido en un controlador estándar en la mayoría de los procesos industriales y otras aplicaciones de control, tales como servomecanismos, subsistemas automotrices, electrodomésticos, etc.

En su origen, los controladores PID eran implementados usando tecnología analógica, que a lo largo de la historia y las aplicaciones fue desde válvulas neumáticas, relevadores, motores, transistores, hasta circuitos integrados. Actualmente la casi totalidad de controladores PID son implementados en forma digital.

En la figura 5.6. se muestra la ubicación del bloque de control PID en el esquema de control analógico clásico.

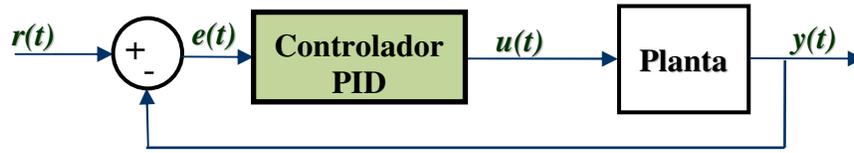


Figura 5.6. Controlador PID

La versión analógica de "libro de texto" de un controlador PID es la siguiente

$$u(t) = K \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right) \quad (5.2)$$

Donde:  $u(t)$  es la acción de control o entrada a la planta,

$e(t) = r(t) - y(t)$  es la señal de error actuante,

$r(t)$  es la entrada de referencia o "set point",

$y(t)$  es la salida de la planta

$K, T_i, T_d$  son constantes a elegir para lograr un comportamiento deseado, denominadas Ganancia proporcional, tiempo de integración y tiempo derivativo respectivamente.

Otra versión del PID ligeramente modificada es la siguiente

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t) \quad (5.3)$$

Donde se han cambiado las constantes originales  $K, T_i, T_d$  por las constantes  $K_p, K_i, K_d$ , de manera que

$$K_p = K, \quad K_i = \frac{K}{T_i}, \quad K_d = K_p T_d \quad (5.4)$$

Las primeras implementaciones digitales de PID's eran una discretización directa de las ecuaciones (5.2) o (5.3); pero en la actualidad se han introducido algunas mejoras que incorporan la larga experiencia ganada a lo largo del uso histórico del PID. Algunas de estas mejoras se describen a continuación para el PID dado por (5.3), el cual se puede escribir separando las partes Proporcional, Integral y Derivativa, en el dominio de Laplace como sigue

$$U(s) = P(s) + I(s) + D(s) \quad (5.5)$$

donde

$$P(s) = K_p E(s), \quad I(s) = \frac{K_i}{s} E(s), \quad D(s) = K_d s E(s) \quad (5.6)$$

**Parte Proporcional:** Se recomienda no afectar por igual ambos términos de la señal de error, esto se logra introduciendo un coeficiente fraccionario ( $b$ ) que afecta a la entrada de referencia, es decir  $P(s) = K_p E(s) = K_p [R(s) - Y(s)]$  se reemplaza por  $K_p [bR(s) - Y(s)]$ .

**Parte Derivativa:** Una acción derivativa ni se puede ni se debe implementar de manera exacta, ya que amplificaría enormemente el ruido de medición (que suele ser de alta frecuencia). Por esta razón, Se debe incluir un término que limite la amplificación a partir de alguna frecuencia seleccionable. Esto se puede lograr reemplazando el término  $D(s) = K_d s E(s)$  por

$$D(s) = \frac{K_d s}{1 + s \frac{K_d}{N}} E(s), \quad (5.7)$$

donde  $N$  es el valor de la amplificación de las altas frecuencias y se puede elegir un valor en el rango de  $3K_p$  a  $20K_p$ . Además de esta consideración se recomienda que la acción derivativa no afecte a toda la señal de error, sino solamente a la señal de salida, para evitar que cambios bruscos en la señal de referencia produzcan una amplificación muy grande en el término derivativo. Con estas consideraciones el PID dado por (5.6) se convierte en el PID mejorado siguiente

$$U(s) = K_p [bR(s) - Y(s)] + \frac{K_i}{s} E(s) + \frac{K_d s}{1 + \frac{K_d}{N} s} [-Y(s)] \quad (5.8)$$

La incorporación de estas mejoras y las diferentes alternativas de discretización producen como resultado que **no hay una, sino varias versiones de PID digital**, dependiendo de la estrategia de discretización utilizada y de las mejoras incorporadas. A continuación se describen dos de estas versiones.

#### 5.2.4.- El PID Digital

Esta versión se obtiene discretizando directamente cada término del PID. A continuación se discretiza cada término de la versión dada por (5.8).

**Parte proporcional:** Esta es una parte estática y su discretización es directa (cambiando el tiempo continuo  $t$  por  $kh$ ), es decir,

$$P(kh) = K_p [br(kh) - y(kh)] \quad (5.9)$$

**Parte integral:** Se puede aproximar la integral por el método de los rectángulos, es decir,  $I(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau$  se aproxima por la ecuación recursiva

$$I(kh + h) = I(kh) + K_i h e(kh) \quad (5.10)$$

O por el método de los trapecios como

$$I(kh + h) = I(kh) + \frac{K_i h}{2} [e(kh + h) + e(kh)] \quad (5.11)$$

**Parte derivativa:** La parte derivativa de (5.8) en el dominio del tiempo corresponde a la ecuación diferencial

$$D(t) + \frac{K_d}{N} \frac{dD(t)}{dt} = -K_d \frac{dy(t)}{dt} \quad (5.12)$$

La cual se puede discretizar mediante diferencias hacia atrás como sigue

$$D(kh) + \frac{K_d}{N} \frac{D(kh) - D(kh-h)}{h} = -K_d \frac{y(kh) - y(kh-h)}{h}$$

Es decir,

$$D(kh) = \frac{K_d}{Nh + K_d} D(kh-h) - \frac{NK_d}{Nh + K_d} [y(kh) - y(kh-h)] \quad (5.13)$$

Finalmente se suman los tres términos dados por (5.9), (5.10) o (5.11) y (5.13) para obtener

$$u(kh) = P(kh) + I(kh) + D(kh) \quad (5.14)$$

A esta versión del PID se le llama **algoritmo absoluto o de posición**, ya que su salida es directamente la acción de control  $u(kh)$ . Otras alternativas llamadas **algoritmos incrementales o de velocidad** tienen como salida el incremento de la señal de control  $\Delta u(kh) = u(kh) - u(kh-h)$ , lo cual resulta natural en algunas aplicaciones, tales como en el control de motores de pasos.

### 5.2.5.- Sintonización de PID's analógicos

La selección de los valores adecuados de los parámetros de un controlador PID es fundamental para lograr un buen desempeño del control en lazo cerrado. Al procedimiento para la selección de estos valores se le llama **sintonización** del PID. Ziegler y Nichols desarrollaron en 1942 un conjunto de reglas heurísticas para lograr una sintonización que proporcione una buena atenuación de perturbaciones, pero permitiendo un sobreimpulso no muy pequeño. Estas reglas fueron derivadas por una búsqueda de los parámetros de control que proporcionarían un adecuado amortiguamiento del modo de oscilación dominante en lazo cerrado y un valor razonablemente pequeño de la integral del valor absoluto del error para una entrada escalón. Las reglas son fundamentalmente empíricas más que teóricas y no garantizan un buen funcionamiento en todos los casos.

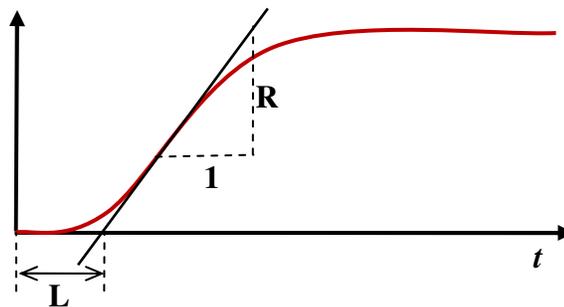


Figura 5.7. Curva de reacción de un sistema estable sobreamortiguado

Ziegler y Nichols desarrollaron dos métodos: el **método de la respuesta transitoria** y el método de la ganancia límite. El método de la respuesta transitoria se utiliza para sistemas estables en lazo abierto, sobreamortiguados que tienen una respuesta al escalón (curva de reacción) en forma de “S” como se muestra en la figura 5.7.

En este método se miden sobre la curva de reacción los parámetros son R y L , donde R es el valor de la pendiente de la recta tangente de mayor pendiente que sea posible trazar sobre la curva de la respuesta al escalón del proceso, y L es el tiempo al cual la recta tangente cruza el eje del tiempo, ver figura 5.7.

En el **método de la ganancia límite**, ver figura 5.8, se hace un experimento con la planta en lazo cerrado con un controlador proporcional que lleva al sistema al límite de su estabilidad es decir, que lo hace oscilar de manera sostenida, los dos parámetros que se utilizan son  $K_u$  y  $T_u$ , donde  $K_u$  es la ganancia del controlador proporcional que logra la oscilación y  $T_u$  es el período de la oscilación resultante.

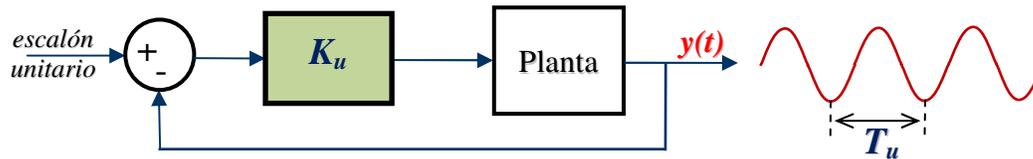


Figura 5.8. Método de ganancia límite

El controlador clásico continuo PID de acuerdo a (5.2) está dado en el dominio de Laplace como sigue

$$U(s) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s) \tag{5.15}$$

Las fórmulas de sintonización dadas por Ziegler y Nichols, se muestran en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1. Reglas de Ziegler y Nichols

	<i>Método de la respuesta transitoria</i>			<i>Método de la ganancia límite</i>		
	<i>K</i>	$1/T_i$	$T_d$	<i>K</i>	$1/T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$1/RL$	--	--	$0.5K_u$	--	--
<b>PI</b>	$0.9/RL$	$0.3/L$	--	$0.45K_u$	$1.2/T_u$	--
<b>PID</b>	$1.2/RL$	$0.5/L$	$0.5L$	$0.6K_u$	$2/T_u$	$T_u/8$

### 5.2.6. Sintonización de PID's digitales.

Takahashi, Chan y Auslander propusieron en 1970, un conjunto de reglas, que utilizan los dos métodos propuestos por Ziegler y Nichols para el controlador PID en continuo, a fin de

determinar valores aceptables para  $K_p$ ,  $K_I$ ,  $K_D$ . La Tabla 2 muestra los valores propuestos por Takahashi y otros para el ajuste de los parámetros del controlador PID discreto.

Las reglas de ajuste se derivaron para sistemas lineales pero la mayoría de los sistemas reales contienen algún grado de no linealidad así que es de interés práctico observar qué tan bien trabajan éstas ganancias con sistemas reales.

	<b>Método de la respuesta transitoria</b>			<b>Método de la ganancia límite</b>		
	$K_p$	$K_I$	$K_D$	$K_p$	$K_I$	$K_D$
<b>P</b>	$\frac{1}{R(L+h)}$			$\frac{K_U}{2}$		
<b>PI</b>	$\frac{0.9}{R(L+\frac{h}{2})} - \frac{K_I}{2}$	$\frac{0.27h}{R(L+\frac{h}{2})^2}$		$0.45K_U - \frac{K_I}{2}$	$0.54 \frac{K_U}{T_U} h$	
<b>PID</b>	$\frac{1.2}{R(L+h)} - \frac{K_I}{2}$	$\frac{0.6h}{R(L+\frac{h}{2})^2}$	$\frac{0.6^*}{Rh}$	$0.6K_U - \frac{K_I}{2}$	$1.2 \frac{K_U}{T_U} h$	$\frac{3}{40} \frac{K_U T_U}{h}$

\* Si  $\frac{L}{T} \approx 0, 1$  ó  $2$ , se usa  $\frac{0.5}{Rh}$

Para el método de la respuesta transitoria los valores de  $K_p$  y  $K_I$  para el controlador PI son sumamente elevados cuando  $L/T$  tiende a cero, por lo que no se recomienda su uso.

Takahashi y otros muestran que el valor de  $K_I$  para el método de la ganancia límite dado en la Tabla 2 es bastante alto cuando  $L = T/4$  y por tanto, recomiendan una reducción en  $K_I$  cuando tal condición se presenta. Por otra parte, el método de la ganancia límite proporciona mejores resultados que el de la respuesta transitoria cuando  $L/T$  tiende a cero. En el rango  $0.5 \leq L/T$  los dos métodos proporcionan resultados similares.

Para el controlador PID, en el caso del método de la respuesta transitoria, el valor de  $K_D$  que se recomienda utilizar es de  $0.5/RT$ , cuando el valor de  $L/T$  esté cercano a un número entero. En el caso del método de ajuste de la ganancia límite las reglas propuestas son aceptables para el rango  $L/T \geq 0.5$ . Aún cuando las reglas proporcionan resultados más o menos aceptables en el límite  $L/T \rightarrow 0$ , no son nunca recomendables cuando  $L/T \approx 1/4$ .

### 5.3.- El efecto windup y su eliminación.

En sistemas de control reales es muy común que los actuadores presenten el fenómeno de saturación, es decir, solo pueden producir señales de control en un rango limitado de valores.

La presencia de una acción integral en el controlador y un actuador que se satura puede producir efectos indeseables en el sistema, ya que si la señal de error actuante toma valores grandes, saturará al actuador y el integrador al ser un sistema inestable hará crecer rápidamente su salida mientras el actuador se mantenga saturado, de manera que aunque el error regrese a valores pequeños, la salida del integrador habrá crecido tanto que tardará

mucho en recuperarse a valores normales, a este efecto se le llama "enredado del integrador" o efecto windup.

### Antiwindup

Si no se incluye un mecanismo que evite el efecto windup, la salida del sistema puede alcanzar elevados sobreimpulsos y además, la recuperación para llegar a valores normales se ve grandemente retardada. Esto se puede apreciar en la figura 5.9, en donde se muestra el comportamiento de la entrada y salida de la planta controlada mediante un PID con y sin antiwindup.

Hay varias maneras de evitar el efecto windup. La más sencilla es detener la integración en el momento en que el actuador se satura y reanudarla en cuanto el actuador deja de estar saturado.

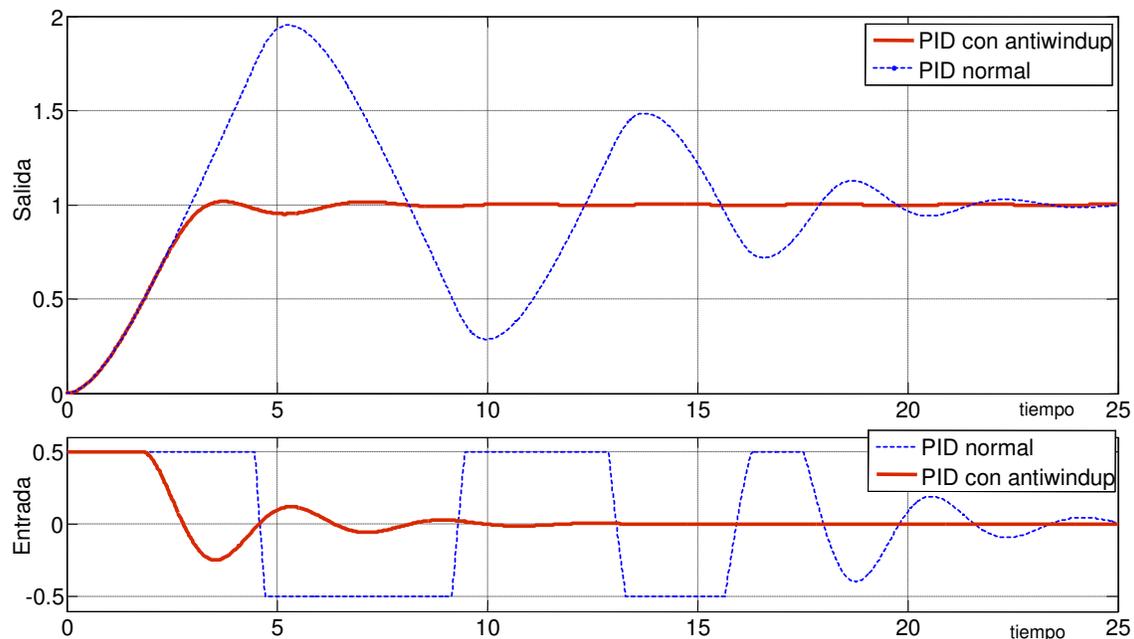


Figura 5.9.- Entrada y salida de la planta con un PID con y sin antiwindup.

Otra estrategia es la que se muestra en la figura 5.10, la cual consiste en generar una señal  $e_s$  que indique si la entrada y la salida del actuador son diferentes, lo cual indicaría que ha entrado en saturación. Esta señal  $e_s$  se comporta como sigue

$$e_s = \begin{cases} 0 & \text{no hay saturación} \\ \text{negativo} & \text{saturado en alto} \\ \text{positivo} & \text{saturado en bajo} \end{cases} \quad (5.16)$$

de manera que si se suma un múltiplo de  $e_s$  a la entrada del integrador el efecto contrarrestará la saturación.

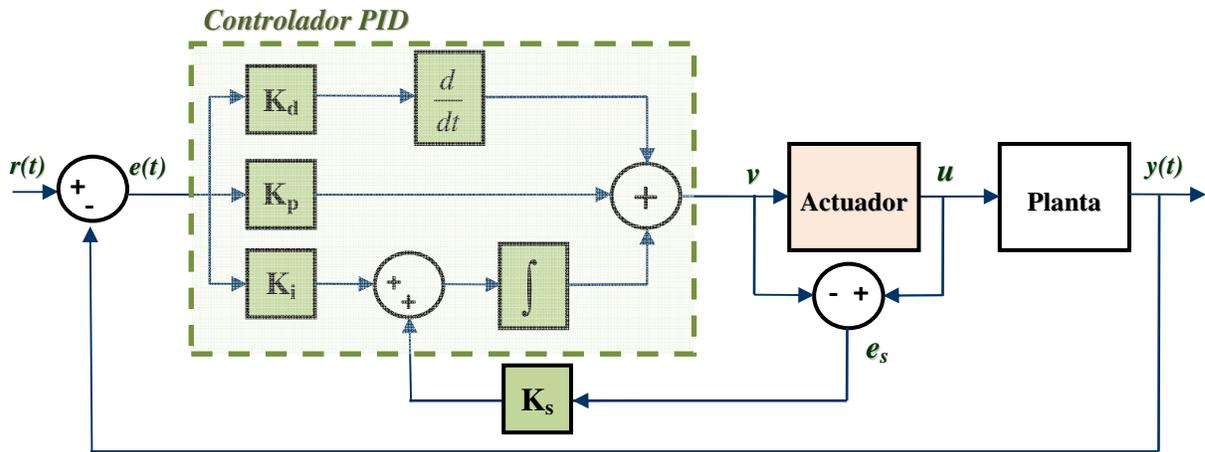


Figura 5.10.- Control PID con antiwindup.

La implementación del mecanismo antiwindup de la figura 5.10 requiere realizar la medición de la salida del actuador  $u(t)$  para poder calcular la señal de corrección  $e_s$ . Esto implica la necesidad de un sensor adicional. Si no se cuenta con un sensor, o no se desea incluir uno, se puede reemplazar en la figura 5.10 el bloque del actuador real por un modelo del actuador que incluya el efecto de la saturación, si se usa esta última opción, la señal  $u(t)$  será la que se envíe a la entrada del actuador real como se muestra en la figura 5.11.

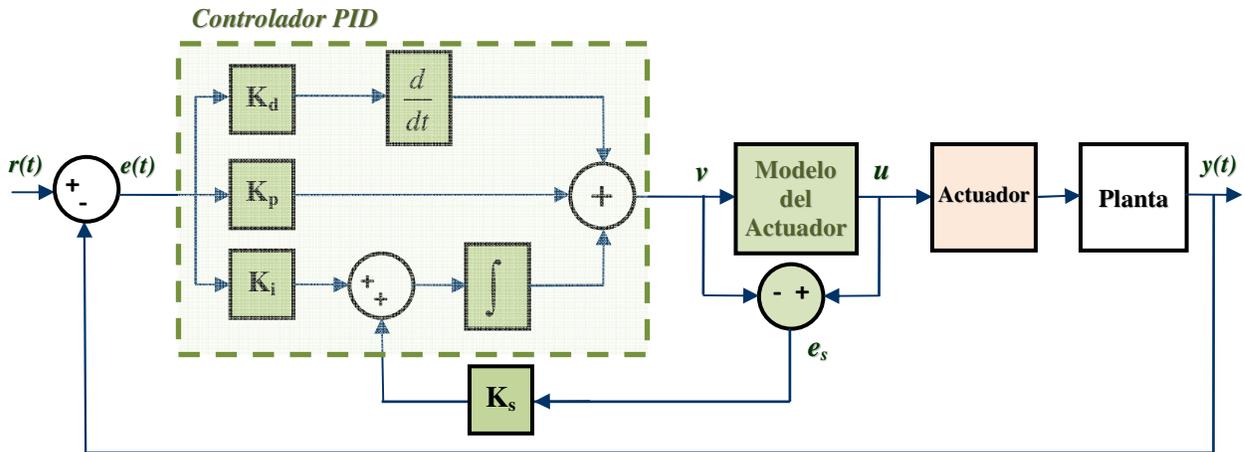


Figura 5.10.- Control PID con antiwindup mediante modelo de la saturación del actuador.

### 5.3.- Diseño en el dominio Digital. Controladores Digitales Simples.

Como se mencionó desde el capítulo introductorio, los sistemas digitales son más ricos en comportamientos posibles que los sistemas analógicos, por esta razón resulta conveniente realizar diseños de controladores digitales de manera independiente al diseño analógico.

Es decir, existen controladores digitales que **no** tienen ningún equivalente analógico y por lo tanto pueden producir comportamientos imposibles de lograr con controladores analógicos. Para sacar provecho de esta riqueza de comportamientos disponible en los controladores digitales, es necesario abordar el problema de diseño de controladores digitales directamente considerando todo el sistema de control en lazo cerrado (incluyendo la planta) como un sistema discreto.

El material de esta sección es una traducción del publicado en la siguiente dirección de la Universidad de Newcastle, elaborado por el Dr. Ming T. Tham.

<http://lorien.ncl.ac.uk/ming/digicont/control/digital1.htm>

#### 5.3.1.- Introducción

Dada la flexibilidad de la computadora digital, los algoritmos de control digital no necesitan estar restringidos a ser versiones digitales de diseños analógicos. En particular, es posible formular controladores que bajo condiciones ideales produzcan una respuesta en lazo cerrado preestablecida. El diagrama esquemático de un sistema de control con datos muestreados que se considerará en esta sección se muestra en la figura 5.12

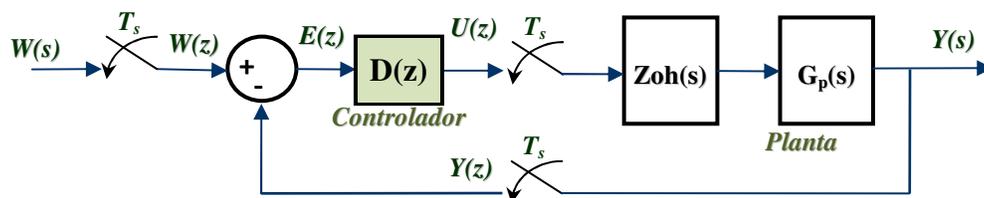


Figura 5.12.- Esquema de control digital directo.

En la figura 5.12 se muestra explícitamente la posición de los muestreadores. Aunque ésta es una implementación estándar no es necesario dibujar los muestreadores, en lugar de la figura 5.12, podemos usar el diagrama de bloques simplificado de la figura 5.13 siguiente

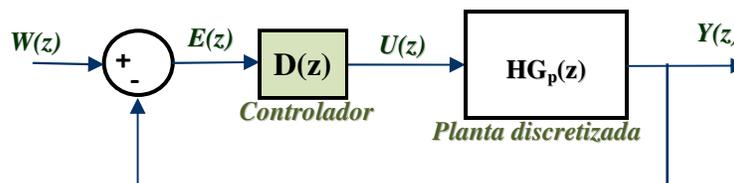


Figura 5.13.- Esquema de control digital directo escondiendo el proceso de muestreo.

En la figura 5.13  $W(z)$ ,  $E(z)$ ,  $U(z)$  y  $Y(z)$  son respectivamente, la referencia o set-point, el error, la salida del controlador y la salida controlada de la planta. El bloque  $D(z)$  representa el controlador digital, mientras que el bloque  $HG_p(z)$  se refiere a la Transformada Z de el retenedor de orden cero en cascada con el proceso que está siendo controlado.

El retenedor de orden cero tiene la siguiente función de transferencia

$$Zoh(s) = \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} \quad (5.17)$$

Por lo tanto,

$$HG_p(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1 - e^{-T_s s}}{s} G_p(s) \right\} \quad (5.18)$$

es decir,

$$HG_p(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\} \quad (5.19)$$

### 5.3.2.- Diseño de Controladores por Síntesis Directa.

El sistema dado por el diagrama de bloques mostrado en la figura 5.13 tiene la siguiente función de transferencia de lazo cerrado

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{D(z)HG_p(z)}{1 + D(z)HG_p(z)} \quad (5.20)$$

Ahora supóngase que deseamos que el sistema en lazo cerrado responda de cierta manera preestablecida, dada por ejemplo por la función de transferencia  $G_m(z)$ . En otras palabras, se desea que la dinámica de lazo cerrado esté dada por  $G_m(z)$ , es decir,

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = G_m(z) \quad (5.21)$$

Igualando (5.20) con (5.21) y despejando, la función de transferencia del controlador que producirá el comportamiento de lazo cerrado deseado deberá satisfacer la siguiente relación

$$D(z) = \frac{1}{HG_p(z)} \left( \frac{G_m(z)}{1 - G_m(z)} \right) \quad (5.22)$$

La ecuación (5.22) es conocida como **Ecuación de Síntesis**. Obsérvese que esta ecuación involucra la función de transferencia inversa de la planta, es decir, la función de

transferencia  $\frac{1}{HG_p(z)}$ , la cual se obtiene intercambiado el numerador por el denominador (y por lo tanto los ceros por los polos) con respecto a  $HG_p(z)$ .

Dependiendo de la manera en que se elige la función de transferencia  $G_m(z)$ , la cual es especificada por el diseñador se pueden obtener diferentes tipos de controladores. Dos de los más comunes son los siguientes:

1. Controlador [dead-beat](#)
2. Controlador [Dahlin](#)

### 5.3.3.- El controlador Dead-Beat.

El controlador dead-beat, también llamado controlador de tiempo se diseña para lograr la mejor respuesta posible ante un cambio del valor de la referencia. Cualitativamente esto significa que ante un cambio en el valor de la referencia después de un lapso de tiempo igual al retardo del sistema, la salida alcanzará el valor de la nueva referencia y permanecerá ahí. Este requerimiento puede ser formulado como sigue

$$G_m(z) = z^{-k}, \quad k \geq 1 \quad (5.23)$$

donde  $k$  es el retardo del sistema (expresado en múltiplos del periodo de muestreo  $T_s$ ).

**Nota:** El retardo del sistema deberá ser al menos de un periodo de muestreo, puesto que el sistema incluye al menos el retardo unitario del muestreador. Es decir, en cualquier instante particular de muestreo el valor de la salida actual es muestreado, mientras que al mismo tiempo la señal de control es enviada a la planta, es sólo hasta el siguiente instante de muestreo en el que la consecuencia de esta acción de control podrá ser observada. Por lo tanto, **en un lazo de control digital siempre hay un retardo mínimo de 1 período de muestreo.**

Sustituyendo (5.23) en (5.22), entonces el controlador dead-beat se puede calcular como sigue

$$D(z) = \frac{1}{HG_p(z)} \left( \frac{z^{-k}}{1 - z^{-k}} \right) \quad (5.24)$$

### Ejemplo (Diseño de un controlador Dead-beat)

Consideremos la siguiente función de transferencia de la planta continua.

$$G_p(s) = \frac{2e^{-4s}}{1+20s} \quad (5.25)$$

Entonces, la función de transferencia discreta se obtiene mediante (5.19), es decir,

$$HG_p(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{(1-e^{sT_s})G_p(s)}{s} \right\} = (1-z^{-1})\mathcal{Z} \left\{ \frac{2e^{-4s}}{s(1+20s)} \right\} \quad (5.26)$$

En la expresión anterior se ha hecho uso de la relación  $z = e^{sT_s}$  para poder factorizar el término  $(1-e^{sT_s})$  como  $(1-z^{-1})$ .

A continuación seleccionaremos el periodo de muestreo como un 10% de la constante de tiempo de la planta, es decir, seleccionamos  $T_s = 2$ , por lo tanto, el retardo de la planta es  $e^{-4s} = e^{-(2T_s)s} = z^{-2}$ , es decir, 2 periodos de muestreo. Factorizando este término en (5.26) se obtiene

$$HG_p(z) = 2z^{-2}(1-z^{-1})\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(1+20s)} \right\} \quad (5.27)$$

Lo único que resta ahora es buscar en las tablas de transformada z para transformar los términos restantes

$$\mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s(1+20s)} \right\} = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1/20}{s(1/20+s)} \right\} = \left( \frac{1}{1-z^{-1}} \right) \frac{(1-e^{-T_s/20})z^{-1}}{(1-e^{-T_s/20}z^{-1})} \quad (5.28)$$

es decir,

$$HG_p(z) = 2z^{-2}(1-z^{-1}) \left( \frac{1}{1-z^{-1}} \right) \frac{(1-e^{-0.1})z^{-1}}{(1-e^{-0.1}z^{-1})} \quad (5.29)$$

Haciendo operaciones, se obtiene

$$HG_p(z) = \frac{0.19z^{-3}}{1-0.905z^{-1}} \quad (5.30)$$

Por lo tanto, el controlador dead-beat requerido está dado por

$$D(z) = \frac{1-0.905z^{-1}}{0.19z^{-3}} \frac{z^{-3}}{1-z^{-3}} = 5.254 \frac{1-0.905z^{-1}}{1-z^{-3}} \quad (5.31)$$

Usando este controlador se obtiene la respuesta de lazo cerrado mostrada en la figura 5.14.

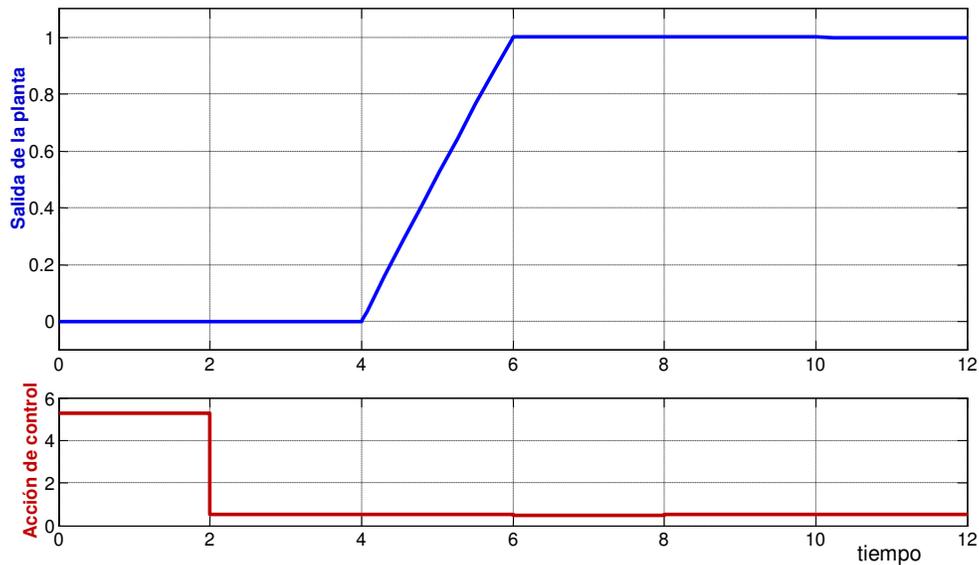


Figura 5.14.- Respuesta al escalón unitario en lazo cerrado con el controlador Dead-Beat.

Aunque el controlador dead-beat proporciona un excelente control de la respuesta del sistema (obsérvese que se alcanza el valor de la referencia en exactamente en 3 periodos de muestreo y de ahí en adelante se mantiene el valor alcanzado), la magnitud de la acción de control necesaria para lograr este comportamiento requiere una excursión a valores demasiado altos para ser deseables. En la práctica puede ser más prudente obtener una respuesta de lazo cerrado menos exacta con tal de evitar el desgaste de los actuadores e inclusive, para preservar la integridad de procesos que no pueden tolerar cambios tan súbitos en las entradas manipulables. En ese caso es mejor usar el controlador [Dahlin](#), el cual está pensado para cumplir con estas consideraciones.

### 5.3.4.- El controlador Dahlin

Se puede conseguir un control menos exacto que el dead-beat, especificando un comportamiento de lazo cerrado como el de un retardo de ganancia unitaria más un sistema de primer orden, en lugar de buscar el seguimiento de los cambios de la señal de referencia de la manera más rápida posible (con el retardo puro). Esto nos lleva a la siguiente especificación para  $G_m(z)$  en lugar de (5.23):

$$G_m(z) = \frac{(1 - e^{-T_s/\tau})z^{-k}}{1 - e^{-T_s/\tau}z^{-1}}, \quad k \geq 1 \quad (5.32)$$

Esta expresión es el equivalente con con retenedor de orden cero de  $\frac{e^{-\theta s}}{1 - \tau s}$ , donde  $\theta = kT_s$  es el retardo del proceso que está siendo controlado y  $\tau$  es la constante de tiempo del la

respuesta deseada en lazo cerrado y puede ser usado como un parámetro de sintonización para variar la velocidad de la respuesta en lazo cerrado.

Sustituyendo (5.32) en la [ecuación de síntesis](#) (5.22), se obtiene la siguiente expresión para el controlador

$$D(z) = \frac{1}{HG_p(z)} \left( \frac{(1-q)z^{-k}}{1-qz^{-1} - (1-q)z^{-k}} \right), \quad q = e^{-T_s/\tau} \quad (5.33)$$

el cual se conoce como el Controlador **Dahlin**. (obsérvese que si  $\tau \rightarrow 0$ , entonces  $q \rightarrow 0$  y el controlador anterior se convierte en el dead-beat).

### Ejemplo (diseño de un controlador Dahlin).

Considerando el sistema del ejemplo anterior, es decir,  $G_p(s) = \frac{2e^{-4s}}{1+20s}$ , para un periodo de muestreo  $T_s = 2$ . Si escogemos  $\tau = 10$ , se obtiene  $q=0.819$ , por lo tanto

$$D(z) = \frac{1-0.905z^{-1}}{0.19z^{-3}} \frac{0.181z^{-3}}{1-0.819z^{-1} - 0.181z^{-3}} \quad (5.34)$$

simplificando se obtiene

$$D(z) = 0.953 \frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.819z^{-1} - 0.181z^{-3}} \quad (5.35)$$

En la figura 5.15 se muestra la salida de la planta en lazo cerrado mediante el controlador Dahlin anterior, así como la acción de control generada por este controlador.

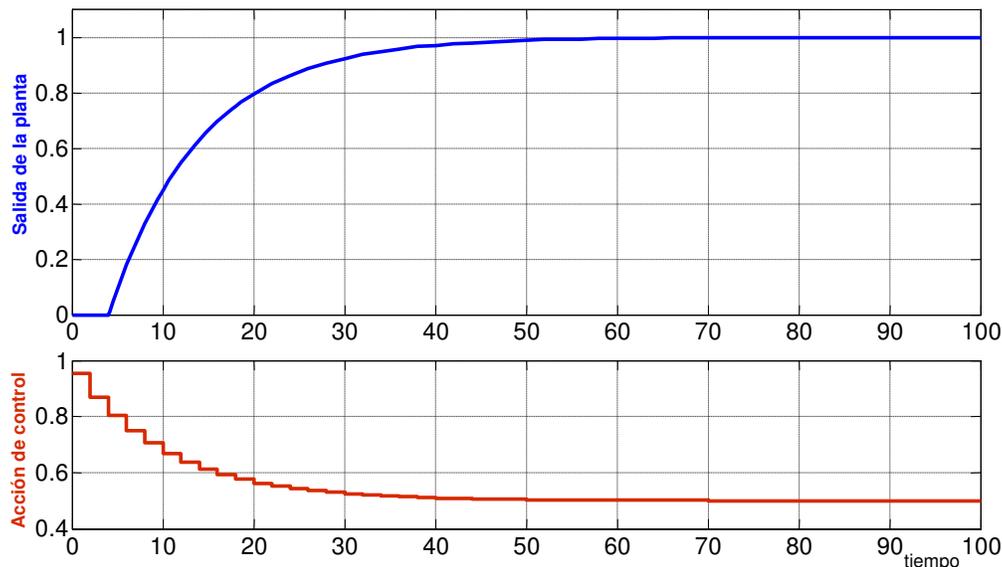


Figura 5.15.- Respuesta al escalón unitario en lazo cerrado con el controlador Dahlin.

Como puede observarse en la figura 5.15, aunque la salida de la planta controlada en lazo cerrado se aproxima a la referencia de manera más lenta que con el controlador dead-beat,

la acción de control necesaria ahora permanece en un rango mucho más pequeño y por lo tanto más aceptable.

¿Qué otras diferencias existen entre el controlador Dahlin y el dead-beat? A continuación se comparan las propiedades de estos dos controladores.

### 5.3.5.- Propiedades de los controladores Dahlin y Dead-beat.

A continuación se discute en mayor detalle las propiedades de estos dos controladores, ambos obtenidos a partir de la [Ecuación de Síntesis](#) .

#### Compensación de tiempo muerto

Como pudo notarse, ambos controladores proveen compensación inherente de tiempo muerto (retardo del sistema), esto se debe a que en la especificación de la respuesta deseada es tomado en cuenta la especificación del tiempo muerto.

#### Robustez

Intuitivamente, debido a que el controlador dead-beat sigue de manera muy exacta la referencia, generando una acción de control también muy exacta para lograr ese objetivo, cualquier desviación debida a un error de modelado producirá respuestas que se alejan de lo esperado. El más crucial es un error en el retardo considerado en el diseño del controlador y el retardo real del proceso. Por ejemplo, supóngase que se ha cometido un error al

modelar el retardo del proceso  $G_p(s) = \frac{2e^{-\tau s}}{1+20s}$  y en lugar de  $\tau = 4$  el retardo real es 3 o 5.

En las figuras 5.16 y 5.17 se muestra la respuesta de la planta en lazo cerrado con un controlador dead-beat diseñado en cada uno de estos dos casos y la correspondiente acción de control generada.

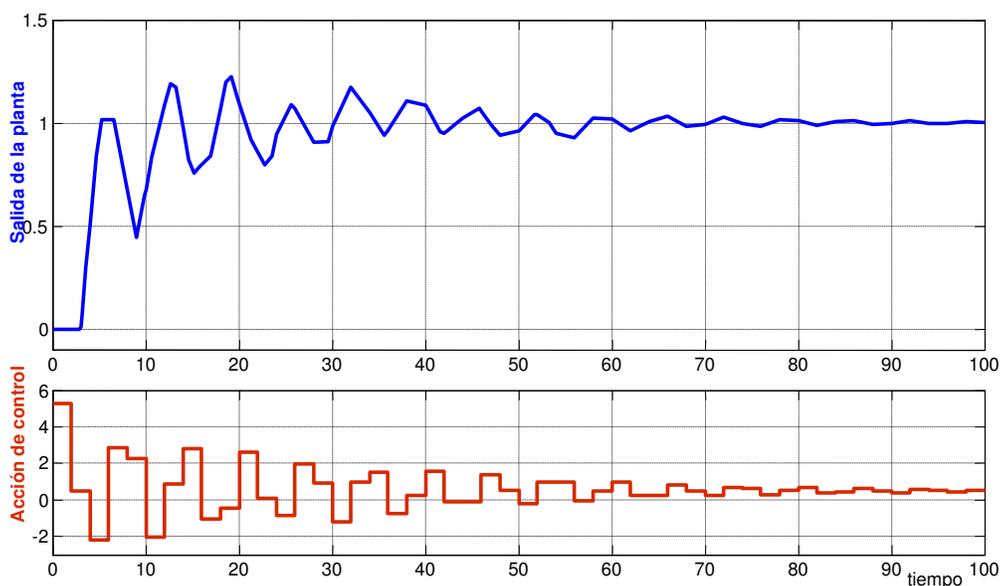


Figura 5.16.- Respuesta en lazo cerrado con controlador dead-beat cuando  $\tau = 3$  en vez de 4

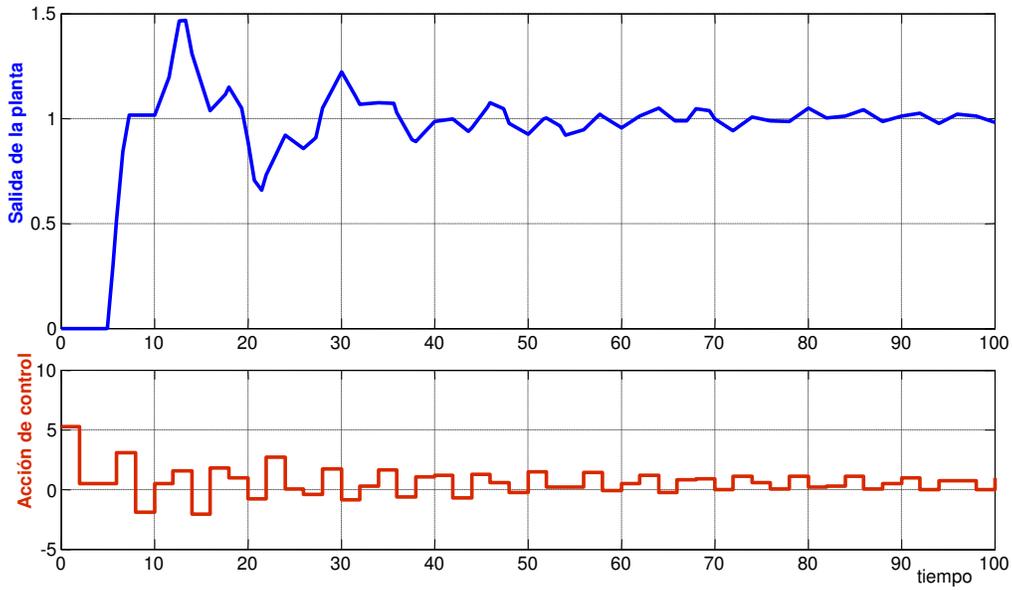


Figura 5.16.- Respuesta en lazo cerrado con controlador dead-beat cuando  $\tau = 5$  en vez de 4

Se puede observar en las figuras 5.15 y 5.16 que un error en el retardo del sistema ha causado una degradación significativa en el desempeño del controlador dead-beat.

Las respuestas correspondientes obtenidas mediante el controlador Dahlin se muestran en las figuras 5.17 y 5.18

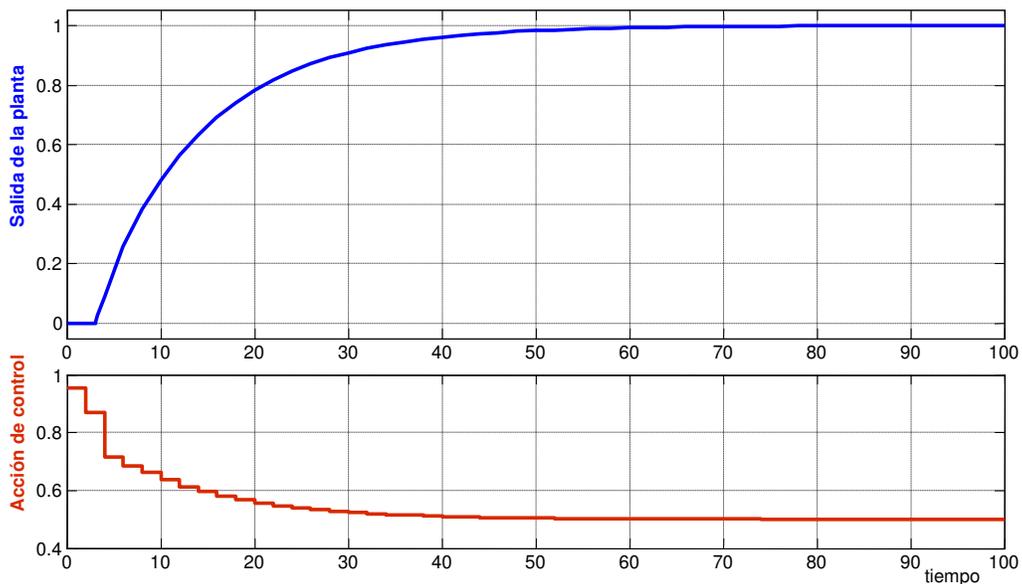


Figura 5.16.- Respuesta en lazo cerrado con controlador Dahlin cuando  $\tau = 3$  en vez de 4

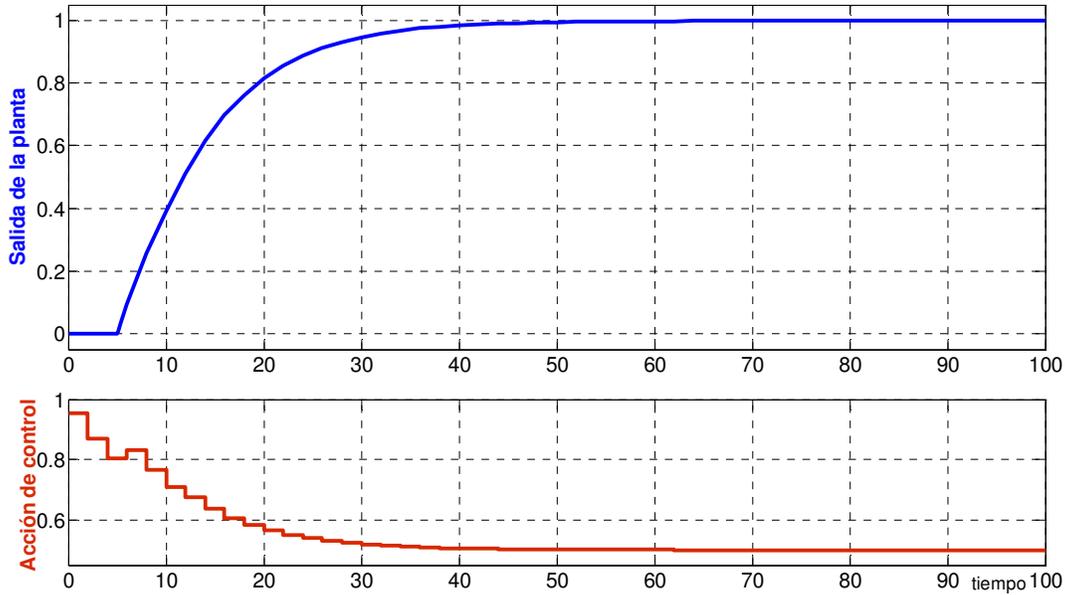


Figura 5.17.- Respuesta en lazo cerrado con controlador Dahlin cuando  $\tau = 5$  en vez de 4

Las figuras 5.16 y 5.17 muestran que el controlador Dahlin casi no es afectado por los errores en el retardo del sistema considerado. Por esta razón se puede decir que el controlador Dahlin es más robusto.

### **Sistemas de fase no-mínima**

La ecuación de síntesis es una técnica de diseño basada en modelos. Como se hizo notar antes, dicha ecuación de síntesis (5.22), la cual se reescribe a continuación, utiliza el inverso del modelo del proceso, ésta es esencialmente la manera en que posibilita al usuario especificar la respuesta deseada en lazo cerrado, es decir, usa el modelo inverso para cancelar la dinámica en lazo abierto de la planta, reemplazando la con las características especificadas de manera que la respuesta en lazo cerrado pueda ser lograda.

$$D(z) = \frac{1}{HG_p(z)} \left( \frac{G_m(z)}{1 - G_m(z)} \right) \quad (5.36)$$

Sin embargo, el uso del modelo inverso implica un problema cuando los ceros de la planta están fuera del círculo unitario, es decir, cuando la planta es de fase no-mínima (el tipo de plantas que exhiben respuestas inversas). Por ejemplo, una planta puede tener la forma general siguiente

$$HG_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)z^{-k}}{A(z)} \quad (5.37)$$

donde  $A(z)$  y  $B(z)$  son polinomios en potencias de  $z^{-1}$  y  $k$  es el retardo del sistema. Si las raíces de  $B(z)$  están en el exterior del círculo unitario, entonces, cuando  $HG_p(z)$  es invertido, su modelo inverso dado por

$$\frac{1}{HG_p(z)} = \frac{A(z)}{B(z)z^{-k}} \quad (5.38)$$

contendrá polos fuera del círculo unitario, es decir, ¡será un controlador inestable!

Por lo tanto la ecuación de diseño no deberá de ser usada para diseñar controladores para sistemas de fase no-mínima.

### **Efectos del muestreo en los ceros discretos**

Esto nos lleva a otro punto a considerar en la elección del periodo de muestreo. Se puede demostrar que **a medida que el periodo de muestreo aumenta, un sistema continuo de fase mínima se puede convertir en un sistema de fase no mínima al ser discretizado**. Esto ocurre usualmente cuando el sistema continuo tiene un exceso de polos respecto a sus ceros (grado relativo) mayor que 2.

A continuación se analiza otro fenómeno que puede ocurrir cuando se implementan controladores digitales.

#### **5.3.6.- Efecto de repique o Ringing**

En ocasiones los controladores digitales pueden generar una acción de control que oscila con amplitud decreciente hacia el valor de equilibrio final como se muestra en la figura 5.18.

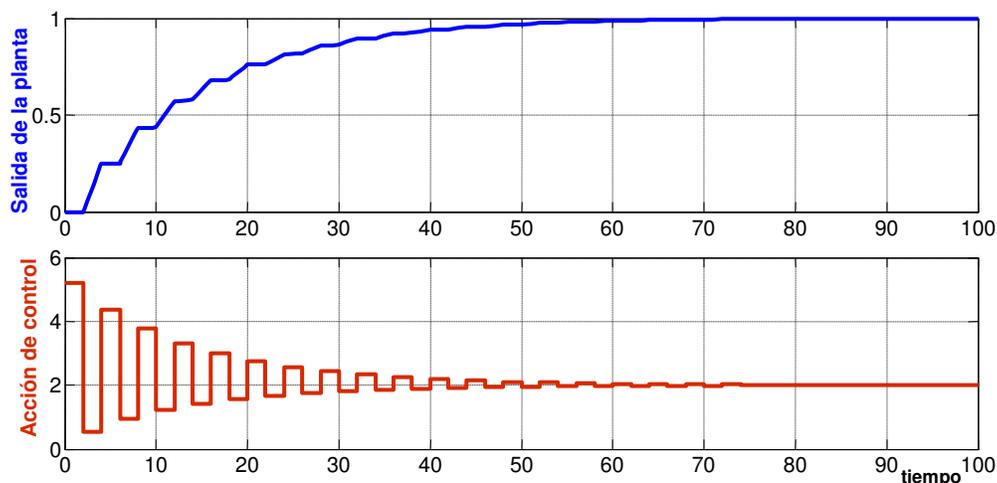


Figura 5.18.- Efecto de repique en la acción de control

Este fenómeno es conocido como repique (ringing) y es causado por la existencia de polos negativos en el controlador. La ecuación de síntesis para un controlador Dahlin (5.33) produce polos negativos cuando el parámetro  $\tau$  es muy pequeño aunado a algún grado poco de error de modelado del proceso a controlar. Entre más cercano a -1 sea el polo del controlador, más severas serán las oscilaciones por el efecto de repique, por esta razón el polo -1 es llamado el “nodo de repique” (ver figura 5.19).

Como puede observarse en la figura 5.18, aunque la señal de control es oscilatoria, estas oscilaciones no necesariamente se reflejan en la salida del proceso controlado.

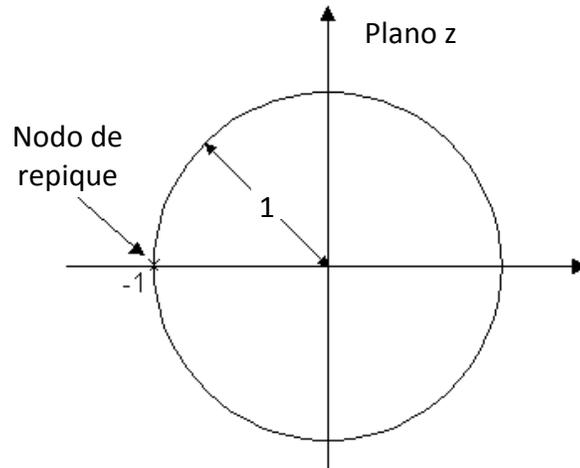


Figura 5.19.- El "nodo de repique" en  $z=-1$

Las oscilaciones del efecto repique no son deseables, ya que pueden producir desgaste en los elementos del actuador y pueden producir inestabilidad en un ambiente de lazos múltiples de retroalimentación.

El efecto de repique puede ser evitado obviamente usando modelos más exactos de la planta a controlar, sin embargo, por ejemplo los modelos de procesos químicos son notoriamente difíciles de desarrollar. Una manera rápida de evitar el efecto de repique es:

- Localizar el polo o polos del controlador cercanos a -1 y entonces
- Reemplazar el factor que contiene dichos polos por su equivalente de estado estable.

### Ejemplo.

A continuación se ilustra el procedimiento de eliminación del efecto de repique en el diseño de un controlador Dahlin. Consideraremos el sistema continuo similar al de los ejemplos anteriores, pero con un retardo de 2 segundos, es decir,

$$G_p(s) = \frac{2e^{-\tau s}}{1+20s}, \text{ con } \tau = 2 \quad (5.39)$$

por lo tanto, con el periodo de muestreo considerado de  $T_s = 2$ , ahora se obtiene

$$HG_p(z) = \frac{0.19z^{-2}}{1-0.905z^{-1}} \quad (5.40)$$

por lo tanto, de la ecuación de síntesis para el controlador Dahlin, se tendrá que

$$D(z) = \frac{1-0.905z^{-1}}{0.19z^{-2}} \frac{(1-q)z^{-k}}{1-qz^{-1}-(1-q)z^{-k}} \quad (5.41)$$

considerando  $k = 2$  y  $q = 0.01$  y simplificando se obtiene

$$D(z) = \frac{1 - 0.905z^{-1}}{0.19} \frac{0.99}{1 - 0.01z^{-1} - 0.99z^{-2}} \quad (5.42)$$

Factorizando se puede escribir como sigue

$$D(z) = \frac{1 - 0.905z^{-1}}{0.19} \frac{0.99}{(1 + 0.99z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (5.43)$$

Como se observa en la ecuación (5.43), hay un polo que puede producir el repique en  $z = -0.99$ . Para remover este polo es suficiente con reemplazar el factor correspondiente  $(1 + 0.99z^{-1})$  por su valor en  $z = 1$ , es decir, por 1.99, quedando la expresión del controlador como sigue

$$D(z) = \frac{1 - 0.905z^{-1}}{0.19} \frac{0.99}{1.99(1 - z^{-1})} \quad (5.44)$$

La figura 5.18 muestra la respuesta del controlador (5.43) en presencia de un error de modelado, la planta a controlar está dada por

$$G_p(s) = \frac{e^{-\tau s}}{1 + 20s}, \text{ con } \tau = 2 \quad (5.45)$$

mientras que el modelo considerado para el diseño tiene un error en la ganancia y está dado por (5.39). En estas condiciones se produce el efecto de repique mostrado en la figura 5.18.

A continuación se cambia el controlador (5.43) que produce efecto de repique por el controlador (5.44) y la respuesta obtenida se muestra en la figura 5.20.

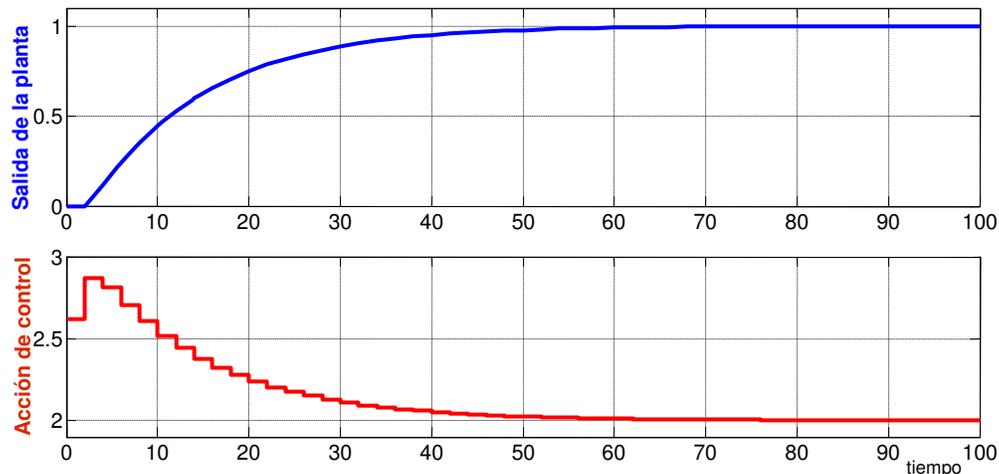


Figura 5.20.- Eliminación del polo del controlador que produce el repique.

### 5.3.7.- Control por colocación de polos

El diseño del controlador Dahlin está fuertemente relacionado con el llamado método de colocación de polos, el cual está basado en el esquema general de control digital retroalimentado mostrado en la figura 5.21.

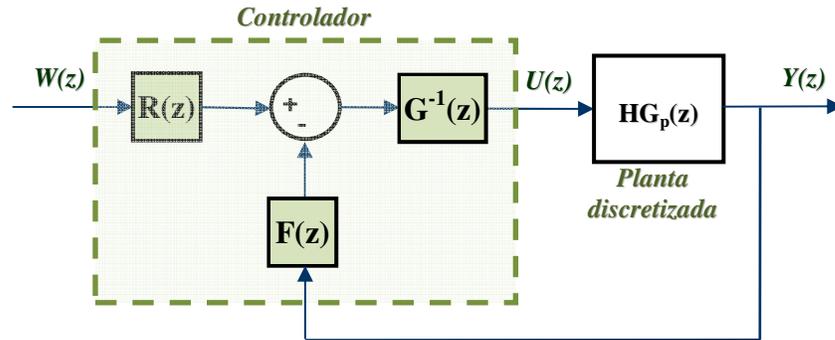


Figura 5.21.- Esquema general de un sistema de control digital retroalimentado.

El objetivo del método de colocación de polos es escoger  $R(z)$ ,  $G(z)$  y  $F(z)$  de manera que el sistema de lazo cerrado tenga los polos en las localizaciones especificadas por el usuario. Estas tres funciones de transferencia juntas constituyen el controlador como se muestra en la figura 5.21 y definen la **ley de control** de la siguiente manera

$$R(z)W(z) - F(z)Y(z) = G(z)U(z) \tag{5.46}$$

Considerando el modelo de la planta en general como sigue

$$HG_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = z^{-k} \frac{B(z)}{A(z)} \tag{5.47}$$

La función de transferencia de lazo cerrado queda

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{R(z)B(z)z^{-k}}{G(z)A(z) + z^{-k}F(z)B(z)} \tag{5.48}$$

A continuación el usuario puede especificar todas las localizaciones de los polos deseados de lazo cerrado mediante un polinomio  $T(z)$  y por lo tanto, solo resta resolver la ecuación algebraica obtenida al igualar el polinomio característico del sistema en lazo cerrado con el polinomio deseado  $T(z)$ , es decir,

$$G(z)A(z) + z^{-k}F(z)B(z) = T(z) \tag{5.49}$$

De donde se obtendrán  $G(z)$  y  $F(z)$ , dado que  $A(z)$  y  $B(z)$  se suponen conocidas.

- Nótese que en este caso no hay compensación del retardo del sistema ( $z^{-k}$ ), lo cual puede observarse, ya que éste aparece en el polinomio característico de lazo cerrado. Sin embargo, se puede realizar compensación del retardo del sistema si el

problema de diseño es planteado dentro de un esquema de control predictivo, pero este enfoque queda fuera del alcance de estas notas.

Finalmente, a continuación se hace una recapitulación de los temas cubierto en esta sección de diseño de controladores en el dominio discreto.

### **5.3.8.- Resumen de esta sección**

En esta sección se presentaron brevemente los principios en que se basa el diseño de controladores digitales simples. Algunos puntos clave a notar son los siguientes:

- Esencialmente, los controladores digitales son diseñados con base en el modelo de la planta a controlar y con algunas pocas excepciones, el diseño comienza con la especificación de algunas propiedades deseadas en lazo cerrado.
- Usando el modelo de la planta se ha obtenido la ecuación de síntesis que en ausencia de errores de modelado garantiza el comportamiento especificado deseado en lazo cerrado.
- Aunque el foco de esta sección se ha puesto en los controladores tipo dead-beat y tipo Dahlin, sus propiedades y sus limitaciones pueden encontrarse en otros algoritmos modernos de control.
- Uno de estos algoritmos modernos de control es el controlador por colocación de polos, el cual fue brevemente mencionado no solamente para mostrar que existen otros métodos de diseño, sino para mostrar también que estos métodos están relacionados de alguna manera.
- Finalmente, si se tiene una buena comprensión de las ideas básicas y con las herramientas matemáticas y de simulación pueden ser formulada una gran variedad de controladores digitales capaces de lograr varios objetivos de control. La prueba de fuego de un controlador candidato es si es suficientemente robusto como para ser implementado de manera segura en procesos reales con características inherentemente no lineales y comportamientos variantes en el tiempo.