Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Problemas para la materia de Cálculo IV

Febrero de 2015

Compilación de problemas propuestos como parte de exámenes parciales ordinarios y extraordinarios en el curso de Cálculo IV por los profesores: José Juan Rincón Pasaye, Sigridt García Martínez y Antonio Ramos Paz (durante el semestre 2014-2014).

1.- Números complejos

1. Anota en el recuadro vacío la letra correspondiente para relacionar ambas columnas.

	Forma rectangular de un número complejo	A	Función analítica
	$\cos\theta + jsen\theta$	B	Cauchy- Riemann
	Forma polar de un número complejo	C	$x + jy$
	Su derivada existe en un entorno abierto de un punto dado	D	$e^{j\theta}$
	Condición necesaria para que una función sea derivable	E	$\sqrt{z\bar{z}}$
	Su derivada existe en un punto dado	F	Función continua
	Entorno circular abierto de radio 1 con centro en el origen	G	$\|z\|\underline{\|\theta}$
	Su límite en un punto es igual a la función valuada en ese punto	H	$(z+\bar{z})/2$
	Magnitud de un número complejo	I	Función derivable
	Parte real del número complejo z	J	$\|z\|<1$

2. Completa la tabla siguiente realizando las conversiones entre polar y rectangular necesarias

Forma rectangular	Forma polar	Forma exponencial
$0.5+0.5j$		
	$\sqrt{2}\underline{\|45°}$	
		$2e^{-j\pi/4}$

3. Sea $z=1-i$, determina $|z|$ y $\operatorname{Arg}(z)$

4. Si $z_1=1+i$, $z_1=1+i$ y $z_1=1+i$, calcula:

   a) $\overline{(z_2+z_3)(z_1-z_3)}$

   b) $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

5. Resuelve la ecuación $z^4-16=0$

6. Sea $z_1=2+3i$ y $z_2=4-5i$, calcula las siguientes expresiones y representa el resultado en forma rectangular, polar y exponencial.

a) z_1z_2

b) $(z_1+z_2)^2$

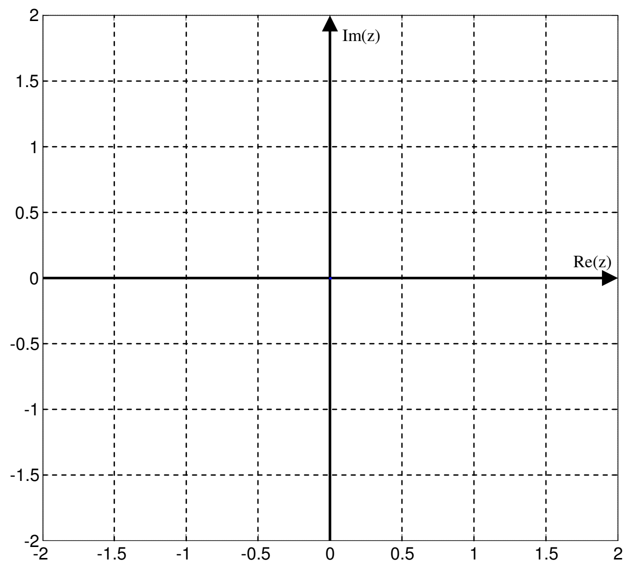
c) $\dfrac{1}{z_1}$

d) $\dfrac{z_1}{z_2}$

7. Si $z_1 = 1 - j$ y $z_2 = 1 + j$, realiza las siguientes operaciones, anotando el resultado en forma rectangular

$z_1 + z_2 =$		$z_1 / z_2 =$	
$z_1 z_2 =$		$z_1^{\,3} =$	

8. Sombrea la región del plano complejo correspondiente a la siguiente desigualdad: $\left|2z + j\right| < 1$



9. Sombrea con un color diferente la región representada por $0.5 < \left|z + i\right| \le 1$

10. Dibuja en el plano complejo las 3 raíces cúbicas de j en su representación vectorial.

11. Encuentra los valores de $\left(2 + 2\sqrt{3}i\right)^{1/3}$

12. Resuelve la ecuación $\ln z = \dfrac{1}{2} + \pi i$

13. Realiza la siguiente operación: $\dfrac{i^4 + i^9 + i^{16}}{2 - i^5 + i^{10} - i^{15}}$

14. Realiza la operación $\left(2i - 1\right)^2 \left\{\dfrac{3 - 4i}{1 - i} + \dfrac{2 - i}{1 + i}\right\}$ y expresa el resultado en forma rectangular

15. Si $z_1 = 1 - i$ $z_2 = -2 + 4i$ $z_3 = 3 - 2i$ calcula el valor numérico de:

a) $\overline{\left(z_2 + z_3\right)\left(z_1 - z_3\right)}$

b) $\left|\dfrac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right|$

16. Demuestra que se cumplen las siguientes igualdades:

a) $\mathrm{Re}\left\{z_1 z_2\right\} = \mathrm{Re}\left\{z_1\right\}\mathrm{Re}\left\{z_2\right\} - \mathrm{Im}\left\{z_1\right\}\mathrm{Im}\left\{z_2\right\}$

b) $\mathrm{Im}\left\{z_1 z_2\right\} = \mathrm{Re}\left\{z_1\right\}\mathrm{Im}\left\{z_2\right\} + \mathrm{Im}\left\{z_1\right\}\mathrm{Re}\left\{z_2\right\}$

2.- Variable compleja.

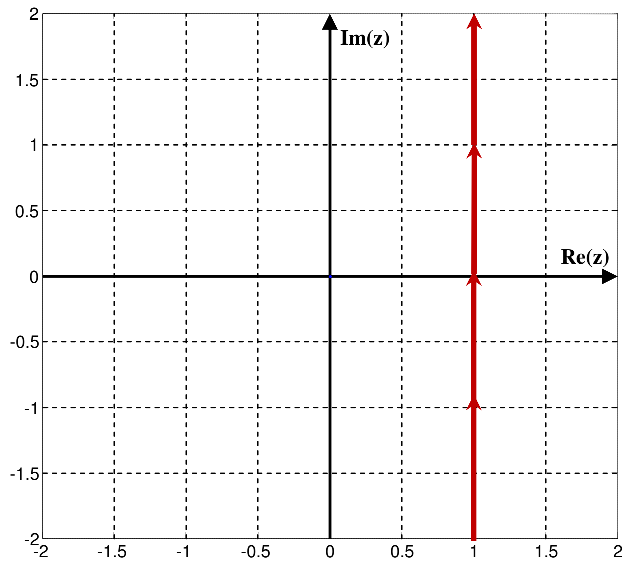
17. Calcula las funciones componentes de la función de la variable compleja $z = x + jy$, dada por $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

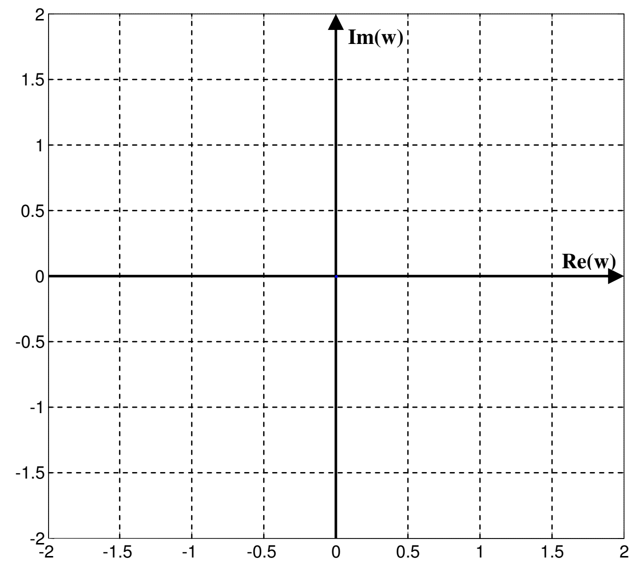
$u(x, y) =$ $\qquad\qquad$ $v(x, y) =$

18. Si $z = j$ calcula los valores de las siguientes funciones complejas, escribe los resultados en forma rectangular

$f(z) = z^{10}$	
$f(z) = e^{-jz}$	
$f(z) = z^{1/2}$	
$f(z) = \cos(\pi z)$	
$f(z) = Log(z)$	

19. Dibuja en el plano w el mapeo de la recta vertical marcada con flechas ascendentes mostrada en el plano z al transformarla con la función $w = f(z) = \dfrac{4}{z+1}$. Indica con flechas la dirección de la curva en el plano w.





20. Anota una V de verdadero o una F de Falso según corresponda a las afirmaciones siguientes:

	Si una función cumple las condiciones de Cauchy- Riemann, entonces es derivable		La fórmula de Euler sirve para convertir de Polar a Rectangular
	Una función derivable en un punto es analítica en ese punto		Si una función es derivable, entonces cumple las condiciones de Cauchy- Riemann
	La fórmula de Euler sirve para convertir de Rectangular a Polar		La parte imaginaria de un número complejo es un número real

21. Verificar si la función $v = e^x \operatorname{sen} y$ es armónica y encontrar la función analítica de variable compleja correspondiente.

22. Calcular la derivada de $\left(z^2 - i\right)^2$ en $z = 3 - 2i$.

23. A partir de la Fórmula de Euler $e^{\pm i\theta} = \cos(\theta) \pm i\,sen(\theta)$, Demostrar que $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ y que $sen(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

24. Verifica que la función $u\left(x, y\right) = 4xy^3 - 4x^3 y + x$ es armónica. Encuentra además la función armónica conjugada de u.

25. ¿Cuáles de las siguientes funciones de variable compleja NO tienen puntos singulares?

a) $f(z) = \dfrac{(z-1)(z+1)}{2}$ b) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z + 1}$ c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ d) $f(z) = \dfrac{(z+1)(z+2)}{(z-1)(z-2)}$

3.- Integración de Funciones Complejas.

26. Evaluar $\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz$ a lo largo de la parábola $x = t$, $y = t^2$, donde $1 \le t \le 2$

27. Calcular $\oint_C \dfrac{e^{2z}}{\left(z+1\right)^4} dz$ donde C es el circulo $|z| = 3$.

28. Calcular $\oint_C \dfrac{3z^3 + 8z^2 - 3z + 2}{\left(z-1\right)^3} dz$, donde C es una curva simple cualquiera que encierra a $z = 1$.

29. Calcular $\oint_C \dfrac{2z+8}{\left(z+2\right)\left(z-1\right)} dz$, donde C es el cuadrado de vértices: -1-i, -1+i, -3+i, -3-i

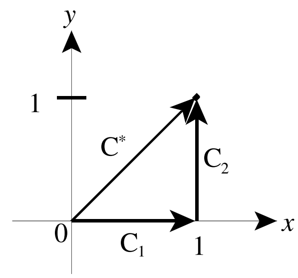
30. Calcular $\oint_C \dfrac{\cos \pi z}{z-2} dz$ donde C es cualquier curva cerrada simple que comprende $z = 2$.

31. Calcular $\oint_C \dfrac{1}{\left(z-1\right)^2 \left(z-3\right)} dz$ donde C es Un rectángulo definido por $x = 0$, $x = 4$, $y = -1$, $y = 1$.

32. Determine los residuos de la función $f(z)=\dfrac{2z+3}{(z+2)(z+4)^2}$

33. Sea $f(z)=\dfrac{z^2-5z-6}{(z-3)(z+2)(z-1)}$, calcular $\oint_C \dfrac{f'(z)}{f(z)}dz$, donde C encierra todos los ceros de $f(z)$.

34. Integra $\int_C \operatorname{Re} z\, dz$ en las trayectorias indicadas: a) C^* b) $C=C_1+C_2$



35. Integra f(z) en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del círculo unitario.

a) $f(z)=e^{\frac{z^2}{2}}$
b) $f(z)=\dfrac{1}{z^8-1.2}$

36. Usando la fórmula de la integral de Cauchy, integra en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

a) $\oint_C \dfrac{\operatorname{senh} \pi z}{z^2-3z}dz \qquad C:|z|=1$
b) $\oint_C \dfrac{dz}{z^2-1} \qquad C:|z+1|=1$
c) $\oint_C \dfrac{\cos z}{2z}dz \qquad C:|z|=\dfrac{1}{2}$

37. ¿Cuáles de las siguientes integrales son cero si C es la circunferencia $|z|=1$?

a) $\int_C z^2 dz$ b) $\int_C e^z dz$ c) $\int_C \dfrac{1}{z-2}dz$ d) $\int_C \dfrac{1}{z^2}dz$ e) $\int_C (z^3+z+1)dz$

38. Usando la fórmula de la integral de Cauchy, calcula las siguientes integrales si C es la circunferencia $|z|=4$.

a) $\int_C \dfrac{1}{z}dz$

b) $\int_C \dfrac{z}{z-1}dz$

39. Usando el Teorema de los Residuos, calcula las siguientes integrales si C es la circunferencia $|z| = 4$.

a) $\int_C \frac{1}{z(z-1)} dz$

b) $\int_C \frac{z}{z^2-1} dz$

40. Anota en el recuadro vacío la letra correspondiente para relacionar ambas columnas.

	Si f es analítica en el camino cerrado C y en su interior, entonces $\int_C f(z)dz = 0$	A	Residuo
	Serie donde cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una constante	B	Serie de Taylor
	Serie cuya suma total es finita	C	Serie de Laurent
	Si f es analítica en el camino cerrado C y en su interior, y z_0 es un punto en el interior de la región rodeada por C, entonces $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi j f(z_0)$	D	Teorema de Cauchy-Gousart
	Expresión en términos del índice que representa a cualquier término de una sucesión	E	Fórmula de Cauchy
	Serie de potencias positivas de $(z-z_0)$ que representa a $f(z)$ cerca de z_0	F	Sucesión
	Serie de potencias positivas y negativas de $(z-z_0)$ que representa a $f(z)$ cerca de z_0	G	Serie geométrica
	Define el tamaño de la región de convergencia de una serie.	H	Serie convergente
	Coeficiente b_{-1} de la Serie de Laurent alrededor de un punto singular z_0	I	Radio de convergencia
	Conjunto infinito de números ordenados en base a un índice entero	J	Término general

41. ¿Cuál de las siguientes series es convergente?

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (1+j)^k$ b) $\sum_{k=0}^{\infty} (1.1)^k$ c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1+j)^k}$

42. ¿Cuál de las sucesiones cuyo término general se muestra, es convergente?

a) $\frac{1}{k}$ b) $(0.9)^k$ c) $1+\frac{1}{2^k}$ d) $\frac{k(k-1)}{2}$

43. Escribe el término general y la suma de todos los términos de las siguientes sucesiones

Sucesión	Término General	Suma total
a) $1, 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125...$		
b) $1, -0.5, 0.25, -0.125, 0.0625, -0.03125, ...$		
c) $1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, ...$		

44. Desarrollar $f(z) = e^z$, en una serie de Taylor alrededor de $z = 1$ y desarrollar su serie de Maclarin.

45. Desarrolla la función $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$ en serie de Maclaurin indicando en que región es válido el desarrollo. Escribe el procedimiento. *Sugerencia*: Expresar $f(z)$ en términos de $\dfrac{1}{z-1}$.

46. Desarrolla la función $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$ en serie de Laurent en el dominio $1<|z|<8$. (misma sugerencia). Escribe el procedimiento.

47. Encuentra la serie de Taylor y de Laurent con centro en $z_0=0$ para la función $f(z)=\dfrac{1}{1-z^3}$

48. Calcula el residuo de la función $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)}$ en cada uno de sus polos. Escribe el procedimiento.

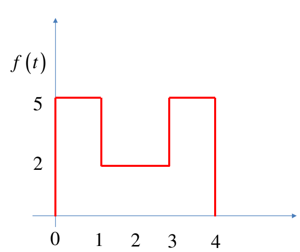
4.- Transformada de Laplace

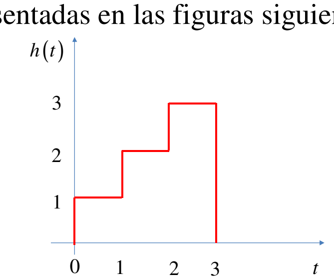
49. Utilizando la definición de la transformada de Laplace calcula la transformada de Laplace de $f(t)=e^{5t}+6e^{-4t}+3$

50. Determina la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

$f(t)=4t^3+8t^2-9t+5$ $\qquad f(t)=2\operatorname{sen}3t+5\cos 3t$ $\qquad f(t)=\left(e^{3t}-e^{-3t}\right)^2$

51. Obtener la transformada de Laplace de la funciones representadas en las figuras siguientes





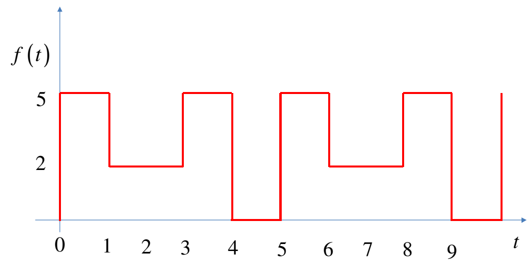
52. Calcula la transformada inversa de Laplace para las siguientes funciones:

$F(s)=\dfrac{3s+1}{s+4}$ $\qquad F(s)=\dfrac{4}{s^2+4s+3}$ $\qquad F(s)=\dfrac{s^2-2s+4}{(s+1)(s+2)^2}$

53. Resuelve las siguiente ecuación diferencial con las condiciones iniciales que se indican:

$$y''(t)+2y'(t)+10y(t)=3\cos 2t \qquad \text{con} \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=-2$$

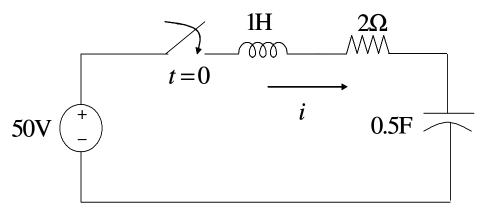
54. Calcula la transformada de Laplace de la siguiente función <u>periódica</u>:



55. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = 2x(t) - 3y(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = y(t) - 2x(t) \end{cases} \quad \text{con las condiciones iniciales:} \quad x(0) = 8 \qquad y(0) = 3$$

56. Si en el circuito RLC serie mostrado en la Figura siguiente, no hay carga inicial en el capacitor ni corriente inicial en la inductancia y el interruptor se cierra en $t = 0$, determínese la expresión de la corriente resultante respecto al tiempo.



57. Anota en el recuadro vacío la letra correspondiente para relacionar ambas columnas.

	Variable de Laplace	A	Armónico
	Función Escalón Unitario	B	Linealidad
	Convierte una ecuación diferencial en una ecuación algebraica	C	Espectro de frecuencia
	Sinusoide cuya frecuencia es un múltiplo de la fundamental	D	Coeficientes de Fourier
	Su transformada de Laplace es la multiplicación de funciones	E	Serie de Fourier
	Ponderan los armónicos en la serie de Fourier	F	Transformada de Laplace
	Representa en forma gráfica el contenido de frecuencia de una señal	G	Transformada de Fourier
	Sumatoria de armónicos que contiene una señal periódica	H	Convolución
	Expresa el contenido de frecuencia de una señal no periódica	I	$u(t) = 1 \; si \; t \geq 0, u(t) = 0 \; si \; t < 0$
	La transformada de una suma ponderada es la suma ponderada de las transformadas	J	$s = \sigma + j\omega$

58. ¿Cuál de las siguientes es la Transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{-3(t-1)}\cos(2(t-1))u(t-1)$?

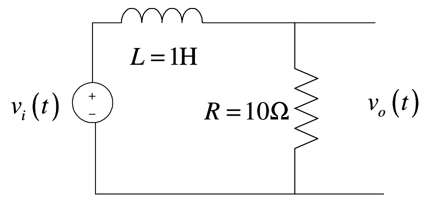
a) $e^{-3s}\dfrac{(s+1)}{(s+1)^2+4}$ b) $e^{-s}\dfrac{(s+3)}{(s+3)^2+4}$ c) $e^{s}\dfrac{(s+3)}{(s+3)^2+2}$ d) $e^{-s}\dfrac{(s-3)}{(s-3)^2+4}$ e) $e^{s}\dfrac{(s-1)}{(s-1)^2+4}$

59. Para la ecuación diferencial $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} - 4x(t) = u(t)$, ¿Cuál de las siguientes representaciones algebraicas se obtiene al aplicarle la Transformada de Laplace, con condiciones iniciales cero?

a) $s^2 - 4 = 1$ b) $(s^2 - 4)X(s) = 1$ c) $(s-4)X(s) = 1/s$ d) $s(s^2-4)X(s) = 1$

60. Mediante Transformada inversa de Laplace, calcula la solución particular de la ecuación diferencial del problema anterior.

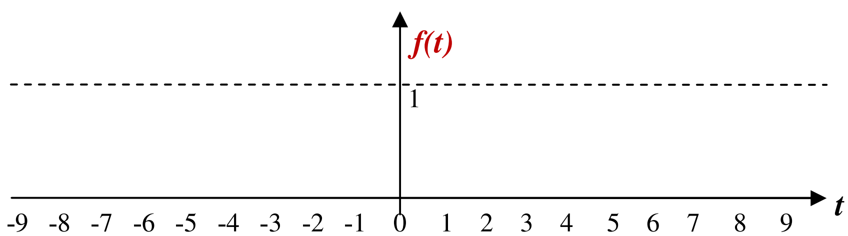
61. Determina $v_o(t)$ para el circuito de la Figura siguiente, si $v_i(t) = 6e^{-3t}u(t)$.



5.- Series y Transformada de Fourier.

62. Para la función periódica $f(t)$ de periodo fundamental 4 y amplitud 1, dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & para\ -2 < t \le -1\ y\ 1 < t \le 2 \\ 1 & para\ -1 < t \le 1 \end{cases}$$, Dibuja su gráfica en el dominio del tiempo:



63. ¿Cuál es la frecuencia fundamental aproximada de la función $f(t)$ del problema anterior en rad/seg?

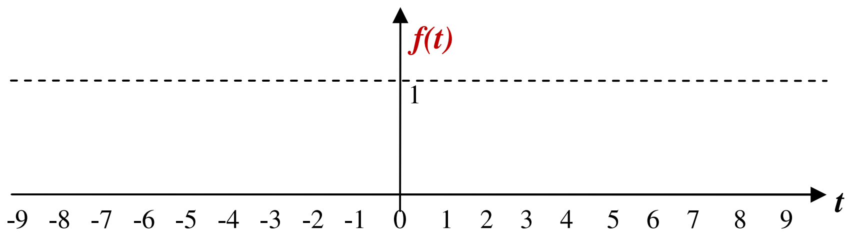
a) $\omega = 1$ b) $\omega = 0.25$ c) $\omega = 1.57$ d) $\omega = 0.785$ e) $\omega = 0$

64. Calcula por inspección visual la componente de Corriente Directa de la señal del problema anterior.

65. ¿Qué tipo de simetría tiene la señal del problema anterior? y por lo tanto ¿qué coeficientes de su serie de Fourier son cero?

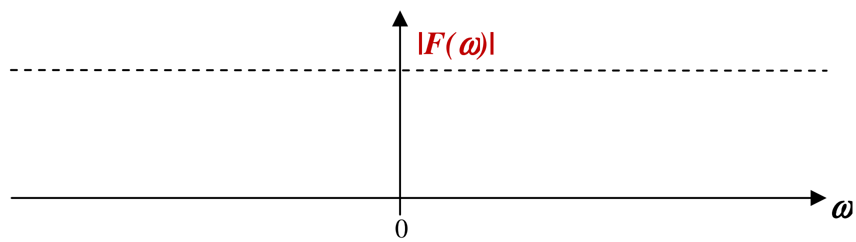
66. Calcula los coeficientes de Fourier que no son cero para la función $f(t)$ del problema anterior y escribe en forma desarrollada la serie de Fourier resultante.

67. Para la función no periódica dada por $f(t) = \begin{cases} 1 & para\ -1 \le t \le 1 \\ 0 & otro\ t \end{cases}$. Dibuja su gráfica en el dominio del tiempo:

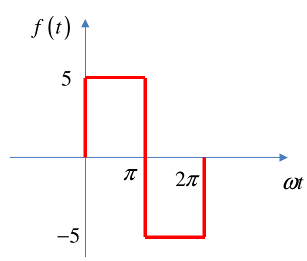


68. Calcula $F(\omega)$ para la función $f(t)$ del problema anterior.

69. Grafica el espectro de frecuencia $|F(\omega)|$ para la función del problema 7. Anota claramente los valores de ambos ejes.



70. Encuentra la serie trigonométrica de Fourier para la siguiente forma de onda mostrada en su periodo fundamental



71. Determina los primeros 5 elementos del espectro de amplitud de la forma de onda del problema anterior

72. Determina la serie de Fourier exponencial para la forma de onda del problema anterior

73. Determina la transformada de Fourier para $f(t) = 8e^{-3t}u(t)$ usando la definición de transformada de Fourier.

74. Calcula la transformada inversa de Fourier de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{10j\omega+4}{(j\omega)^2+6j\omega+8}$

b) $\dfrac{2}{(j\omega-1)(j\omega-3)}$ Sugerencia. Haga $j\omega = s$.

75. Resolver la siguiente ecuación diferencial mediante el uso de la transformada de Fourier

$$\frac{dy}{dt}+2y=e^{-t}u(t)+2e^{-2t}u(t)$$

76. Determina $i(t)$ para el circuito de la figura siguiente, dado que: $I_s=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos 3nt$ Amperes