Tema 3

Iluminación directa

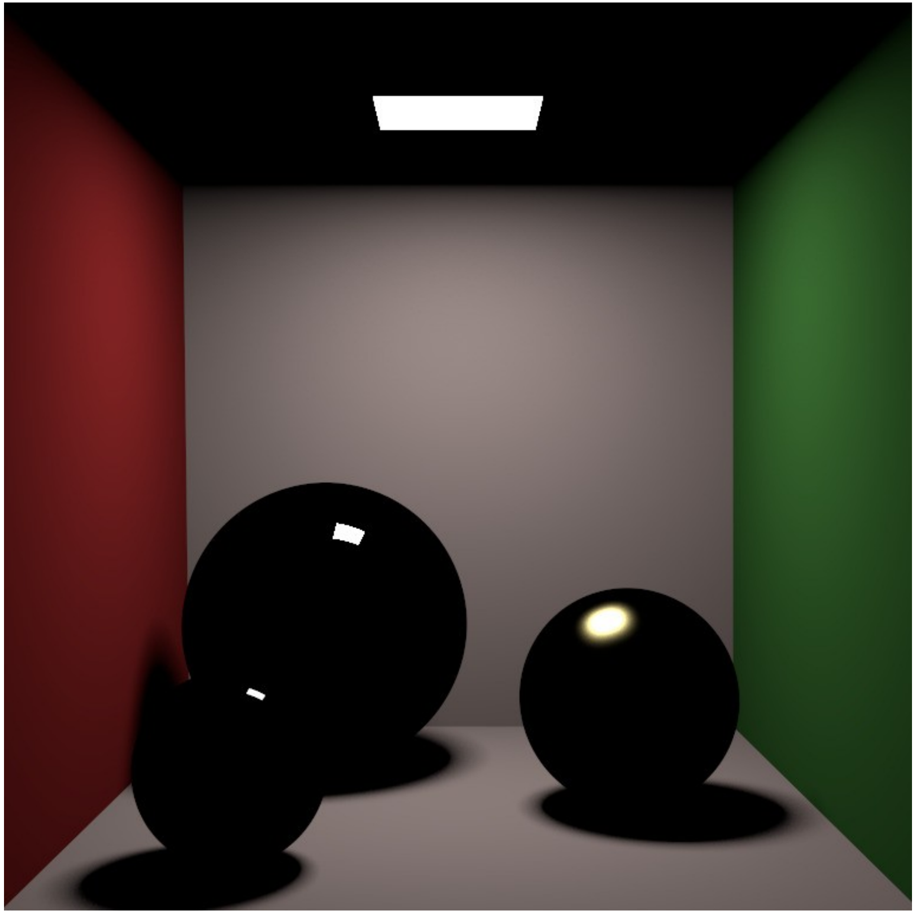
Iluminación directa

- ¿Qué es?
  - Es la iluminación que se recibe *directamente* desde una fuente luminosa

- Los puntos en la escena que no tienen *visibilidad* con una fuente luminosa no son iluminados y por lo tanto estarán completamente obscurecidos

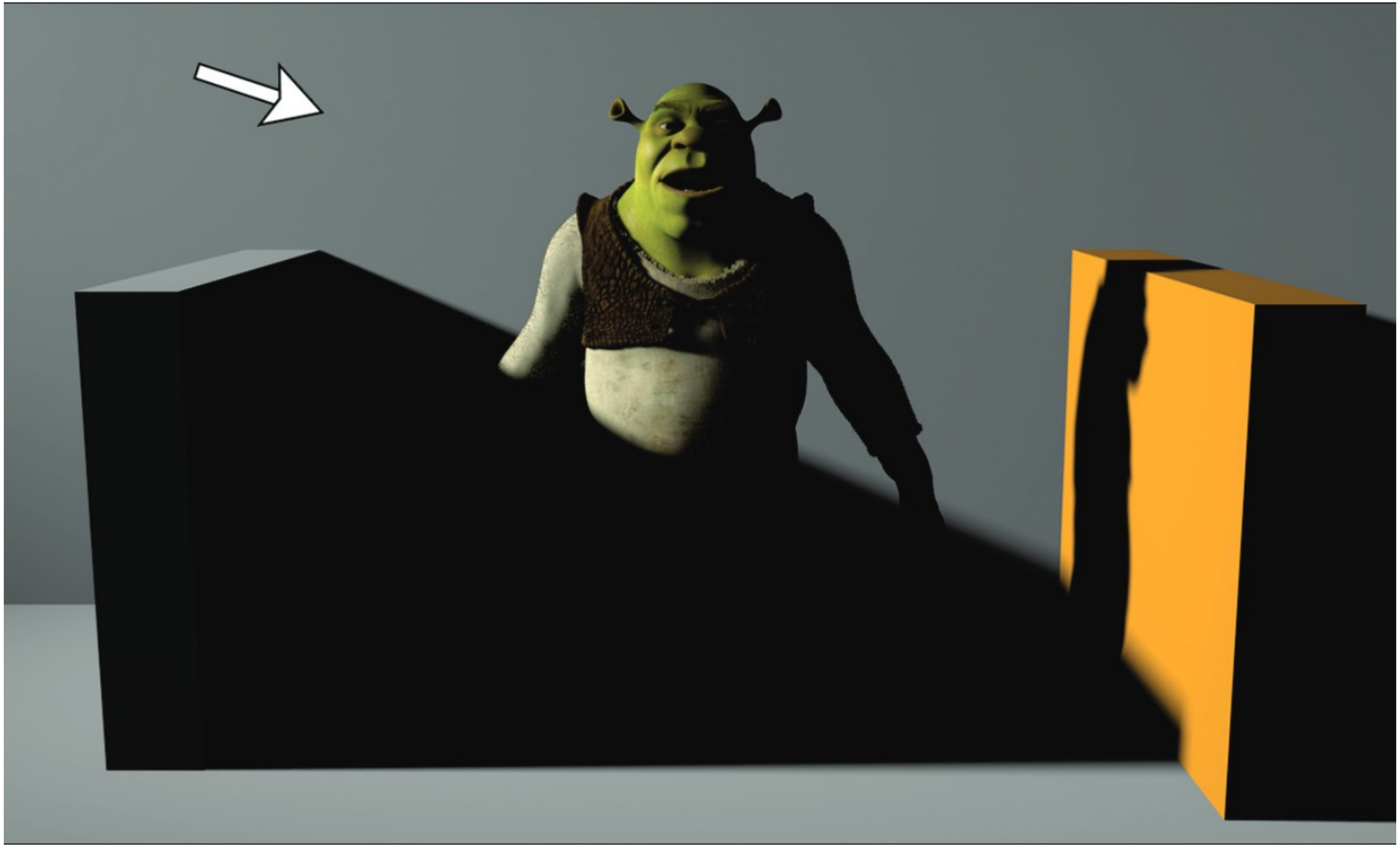
San Miguel scene –
Direct Illumination

Iluminación directa vs global



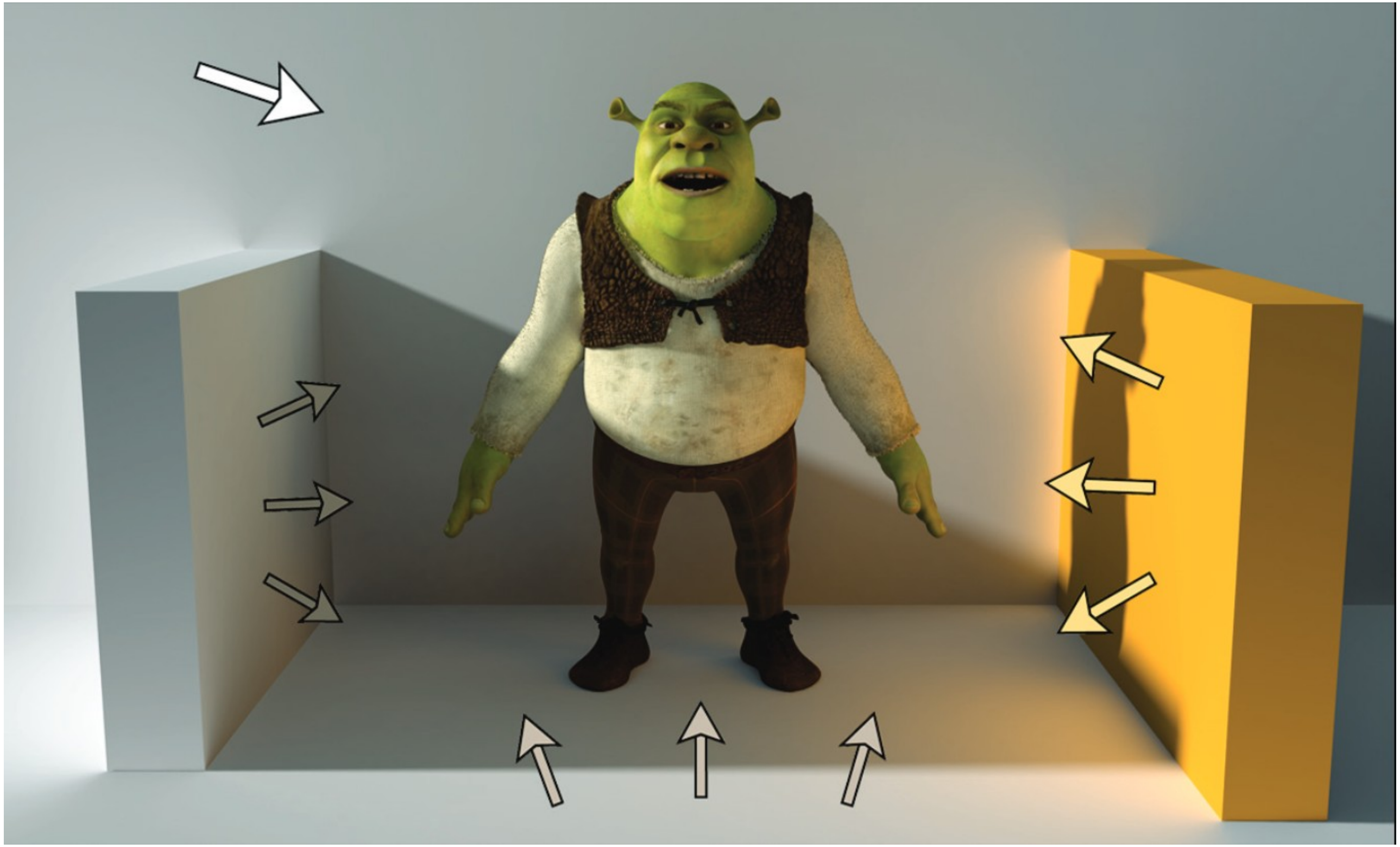
Iluminación directa vs global

Iluminación directa



Iluminación directa vs global

Iluminación global



RTX Boulevard – Direct Illumination demo

NVIDIA

https://developer.nvidia.com/rtxdi

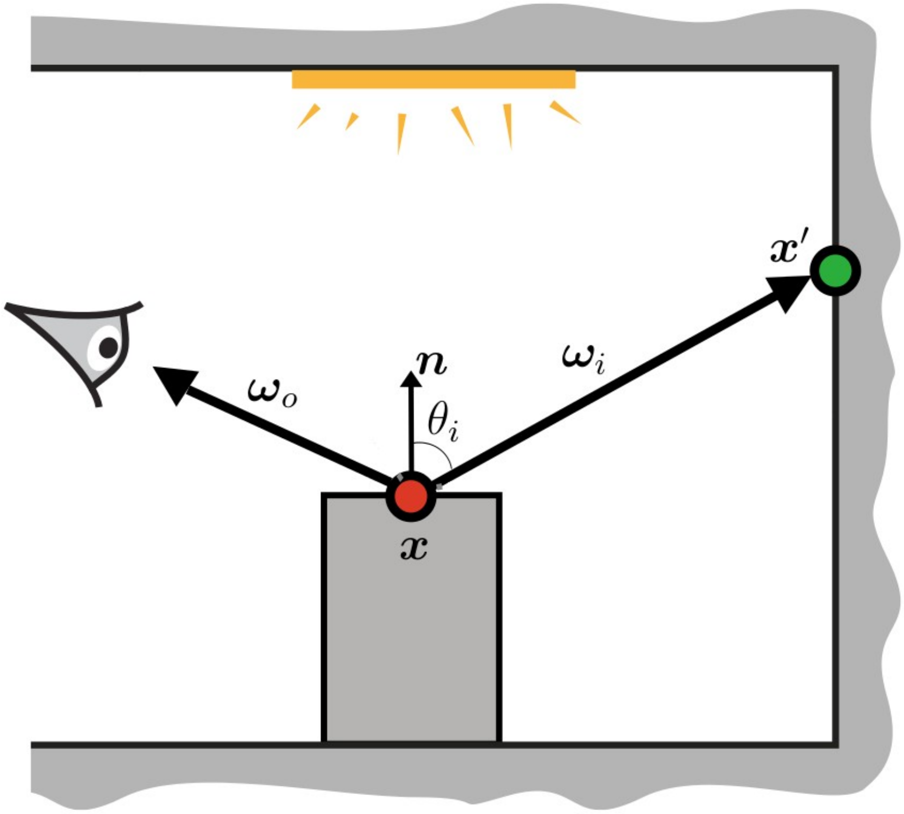
RTX Boulevard – Direct Illumination demo

NVIDIA

https://developer.nvidia.com/rtxdi

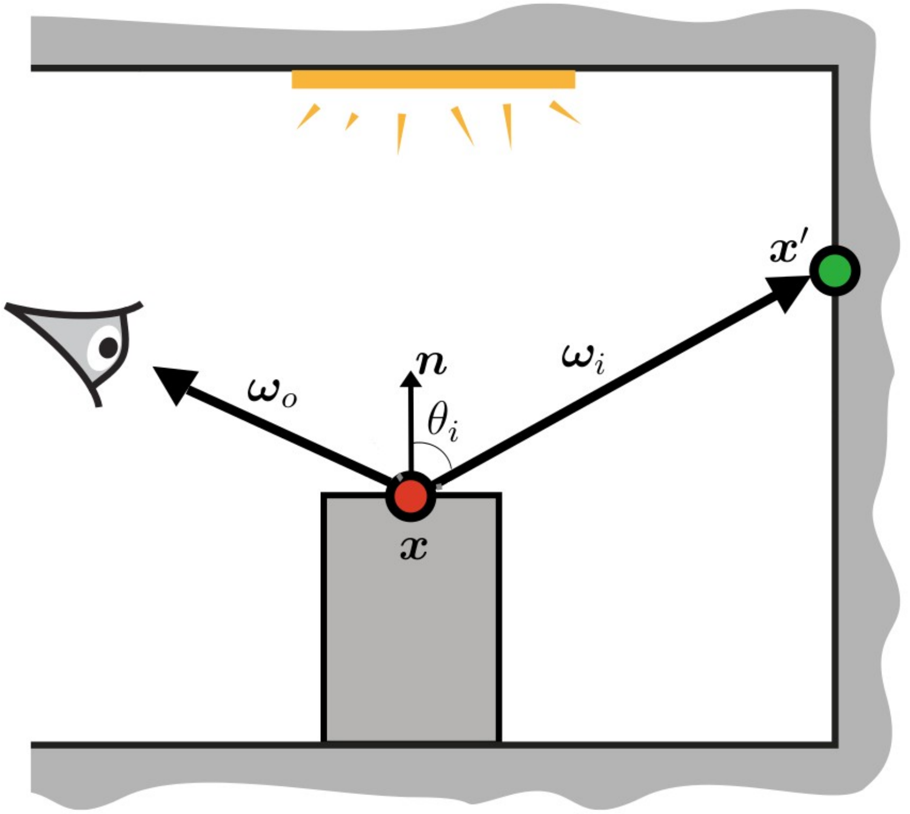
La ecuación de ilum. directa

- Considere la siguiente escena, observada por un sensor desde algún punto
  - El sensor observa un punto x en la escena con una dirección $\omega_{\mathbf{o}}$



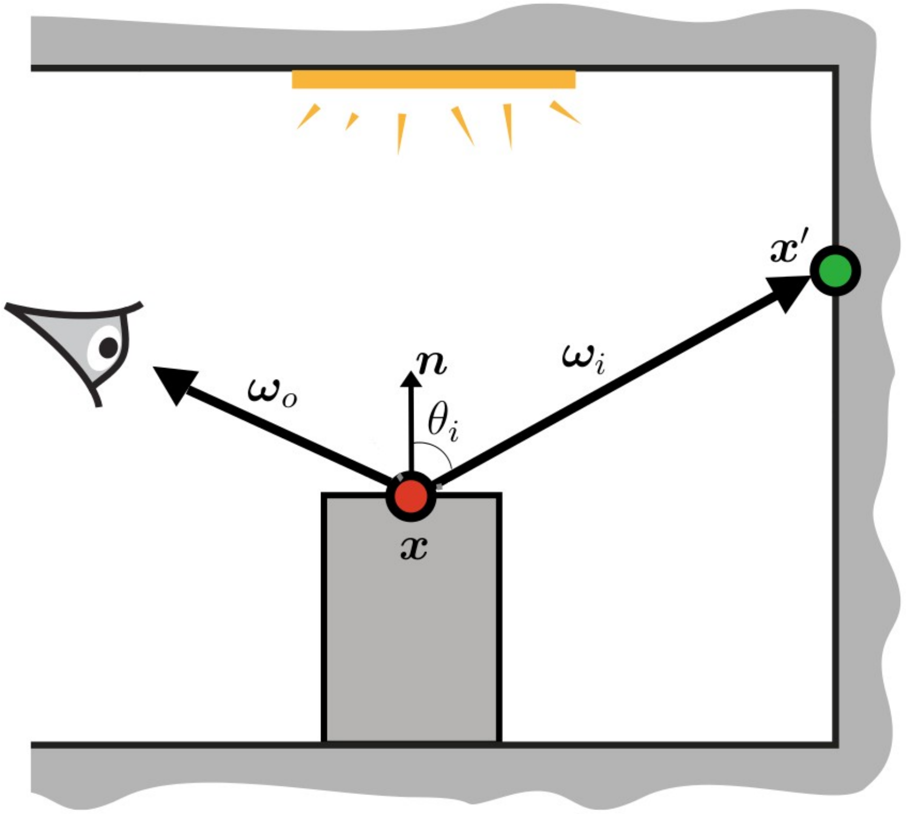
La ecuación de ilum. directa

- Considere la siguiente escena, observada por un sensor desde algún punto
  - El sensor observa un punto x en la escena con una dirección $\omega_{\mathbf{o}}$
  - En ese punto la normal es n



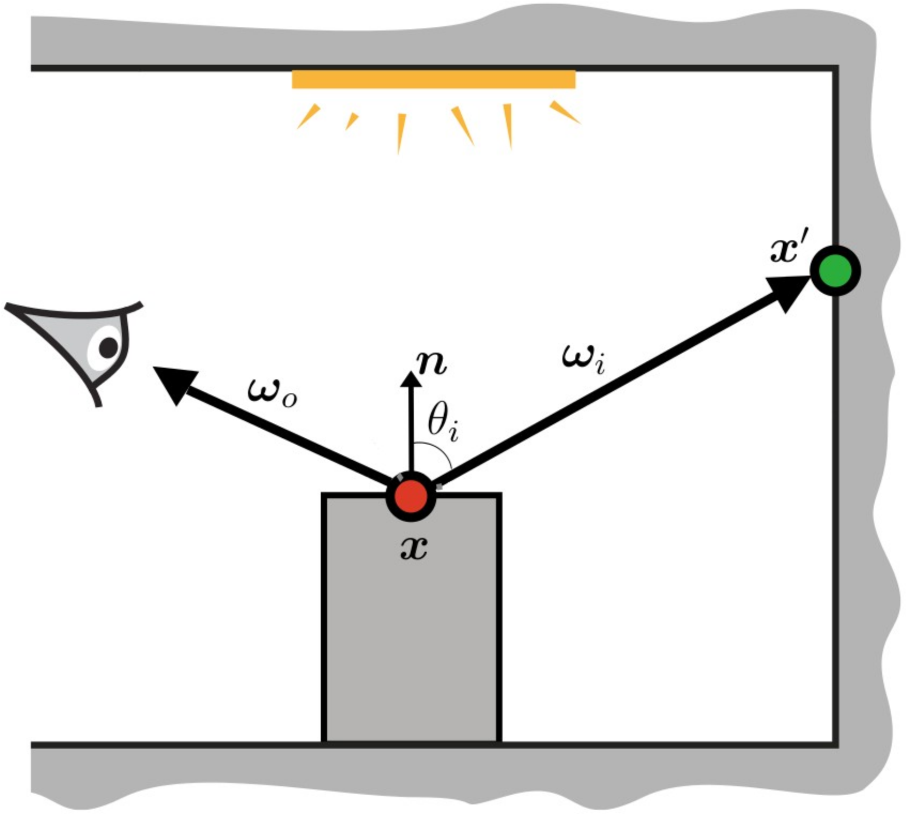
La ecuación de ilum. directa

- Considere la siguiente escena, observada por un sensor desde algún punto
  - El sensor observa un punto x en la escena con una dirección $\omega_{\mathbf{o}}$
  - En ese punto la normal es n
  - La luz entrante tendrá una dirección $\omega_{\mathbf{i}}$ desde algún punto x'



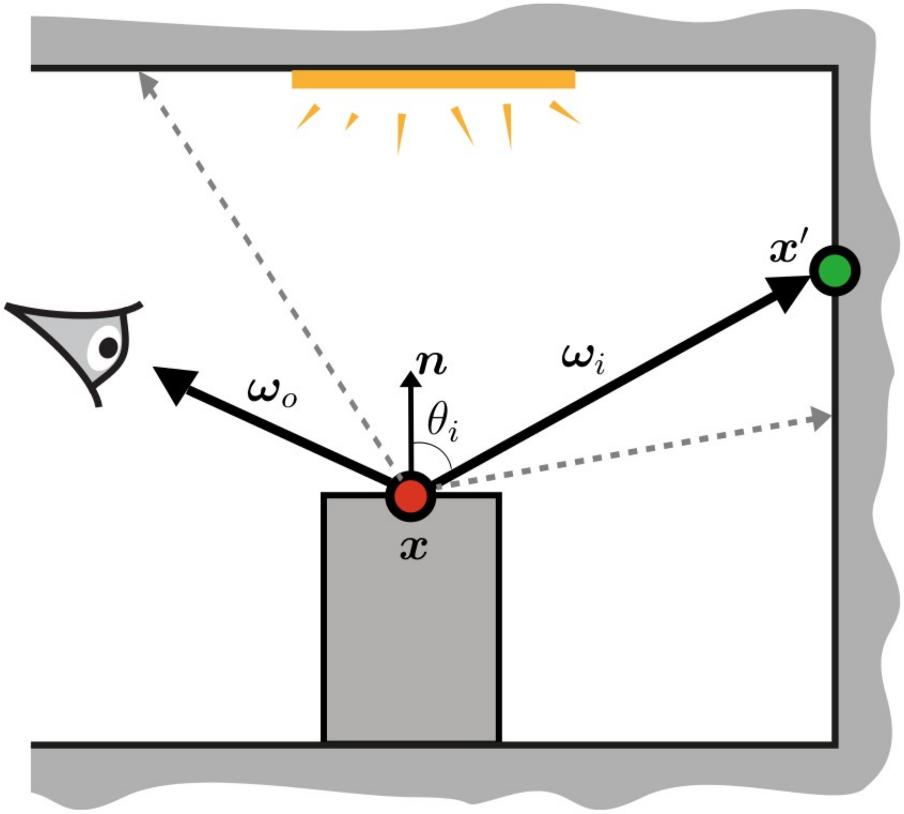
La ecuación de ilum. directa

- Considere la siguiente escena, observada por un sensor desde algún punto
  - El sensor observa un punto x en la escena con una dirección $\omega_{\mathbf{o}}$
  - En ese punto la normal es n
  - La luz entrante tendrá una dirección $\omega_{\mathbf{i}}$ desde algún punto x'
  - Tenemos un ángulo θ_i entre la normal y la dirección entrante



La ecuación de ilum. directa

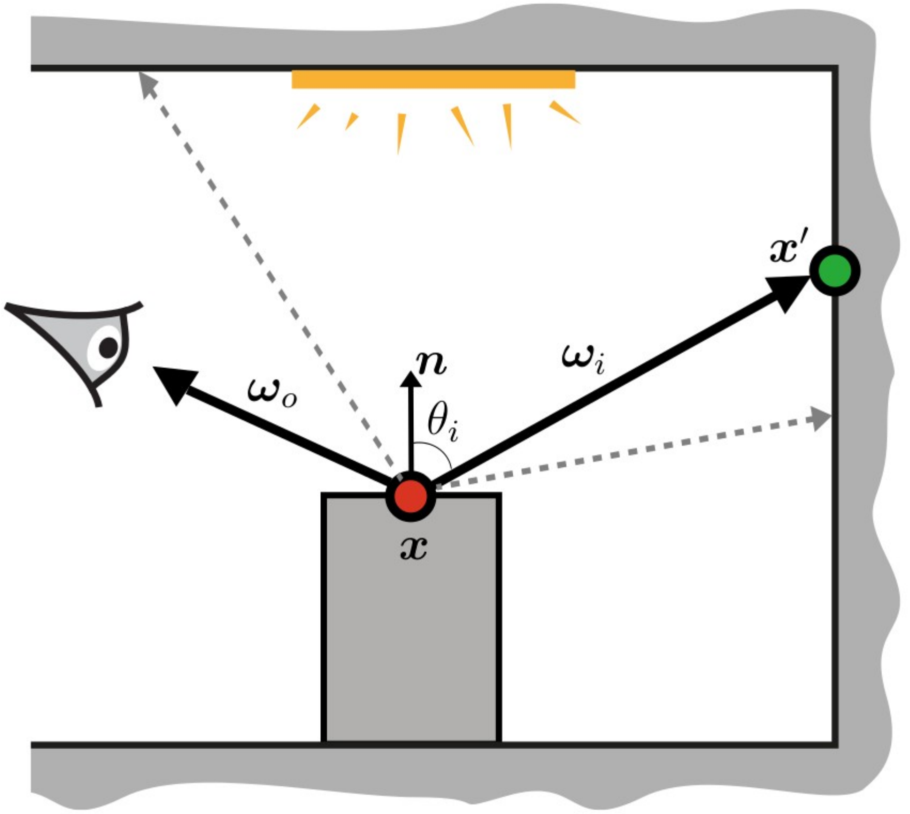
- ¡El punto x' no emite luz!
  - Hay que trazar más rayos



La ecuación de ilum. directa

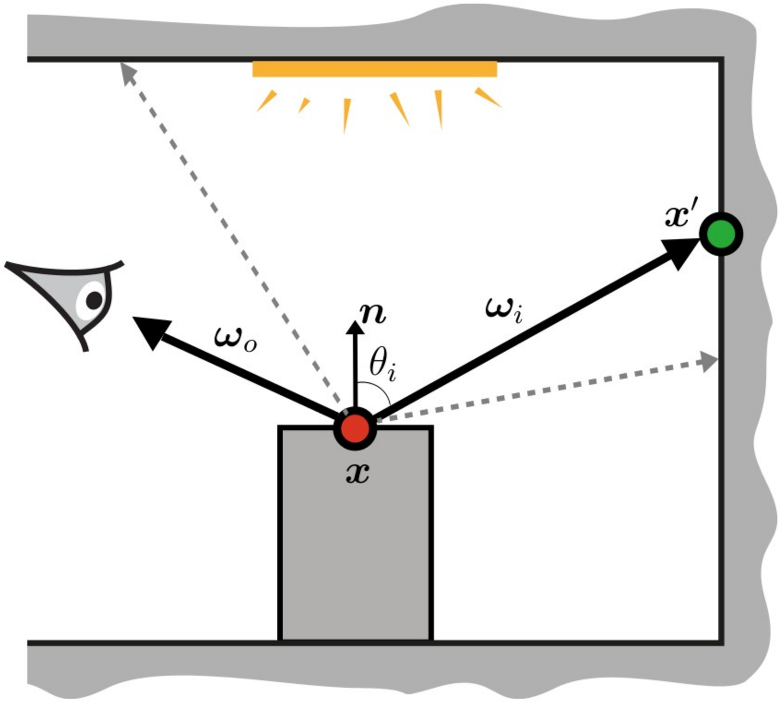
- ¡El punto x' no emite luz!
  - Hay que trazar más rayos
  - La luz saliente (hacia el sensor) desde el punto observado es la *suma* de la luz *reflejada* desde todas las direcciones *alrededor* del punto observado.

$$\sum_{\Omega} \longrightarrow \int_{\Omega}$$



La ecuación de ilum. directa

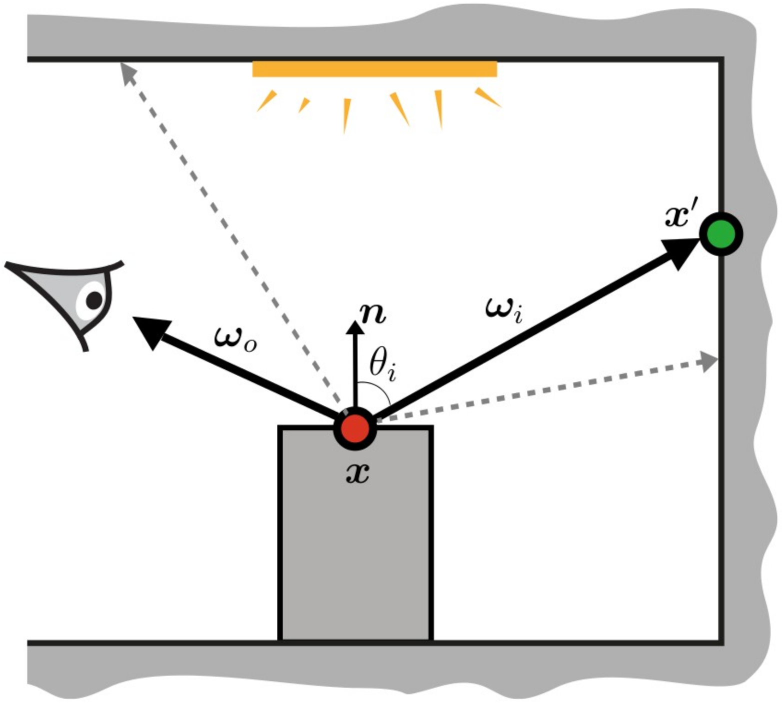
- La ecuación de renderizado para iluminación directa:
  - La radiancia saliente en dirección $\omega_{\mathbf{o}}$ desde un punto x



$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) = \int_{\Omega} L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}})(\mathbf{n}_x \cdot \omega_{\mathbf{i}}) \mathrm{d}\omega_{\mathbf{i}}$$

La ecuación de ilum. directa

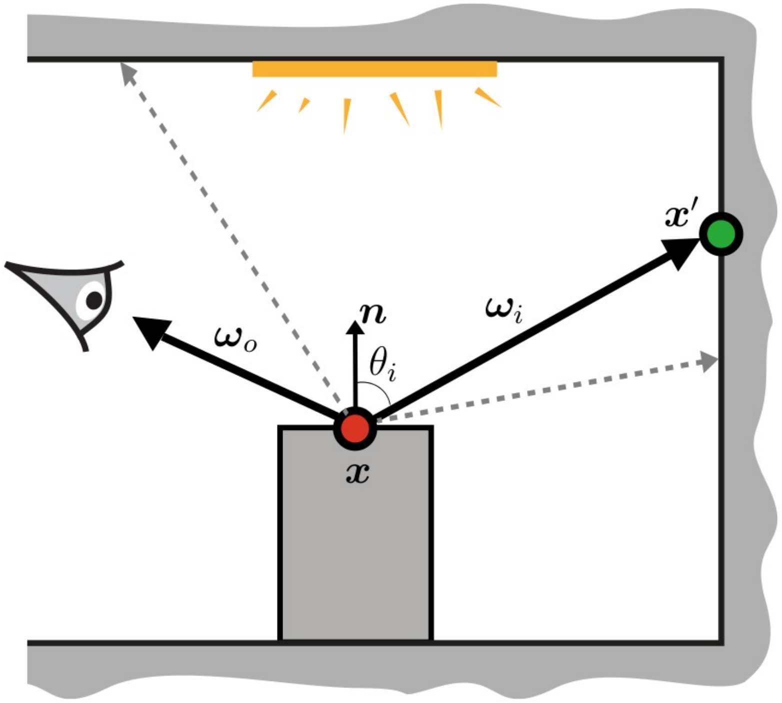
- La ecuación de renderizado para iluminación directa:
  - La radiancia saliente en dirección $\omega_{\mathbf{o}}$ desde un punto x
  - Es la suma para todas las direcciones incidentes $\omega_{\mathbf{i}}$



$$L(\mathrm{x},\omega_{\mathbf{o}}) = \int_{\Omega} L_e(\mathrm{x}',-\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x},\omega_{\mathbf{o}},\omega_{\mathbf{i}})(\mathbf{n}_x \cdot \omega_{\mathbf{i}})\mathrm{d}\omega_{\mathbf{i}}$$

La ecuación de ilum. directa

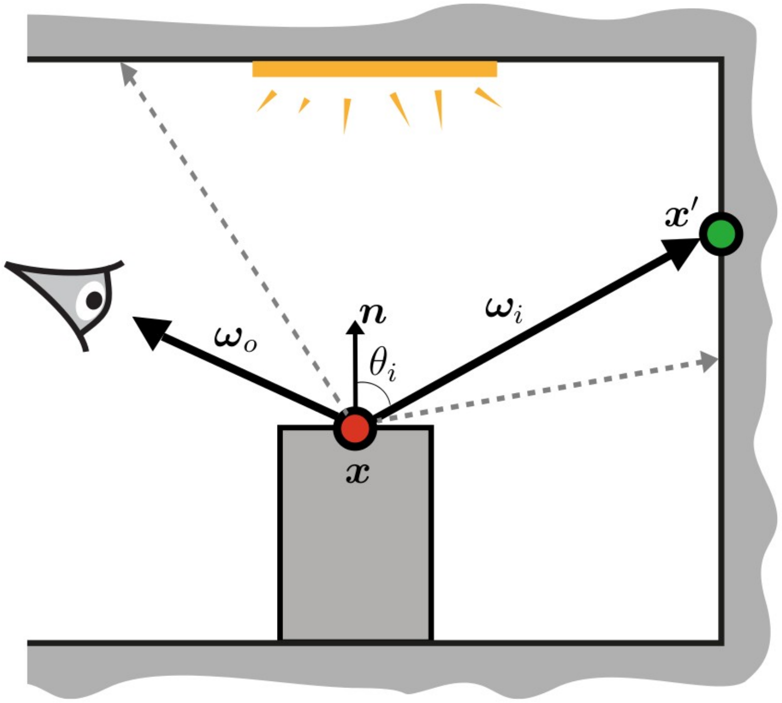
- La ecuación de renderizado para iluminación directa:
  - La radiancia saliente en dirección $\omega_\mathbf{o}$ desde un punto x
  - Es la suma para todas las direcciones incidentes $\omega_\mathbf{i}$
  - De la luz reflejada en ese punto para el par de direcciones dadas



$$L(\mathrm{x},\omega_\mathbf{o}) = \int_\Omega L_e(\mathrm{x}',-\omega_\mathbf{i}) f_r(\mathrm{x},\omega_\mathbf{o},\omega_\mathbf{i})(\mathbf{n}_x\cdot\omega_\mathbf{i})\mathrm{d}\omega_\mathbf{i}$$

Radiancia emitida

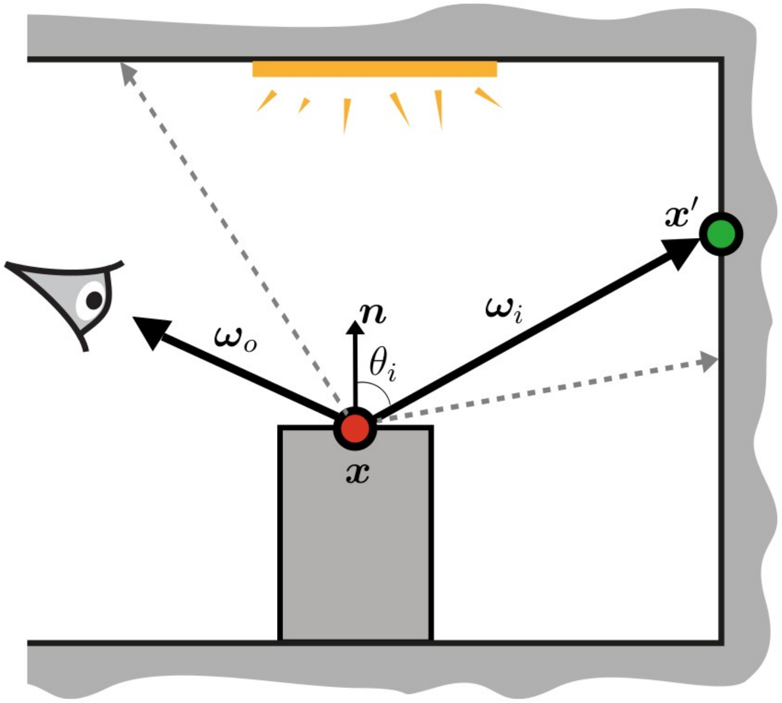
- El término L_e denota
  - La luz emitida desde x'
  - Con dirección $-\omega_{\mathbf{i}}$
  - Es decir, hacia el punto observado



$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) = \int_{\Omega} L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}})(\mathbf{n}_x \cdot \omega_{\mathbf{i}}) \mathrm{d}\omega_{\mathbf{i}}$$

BRDF

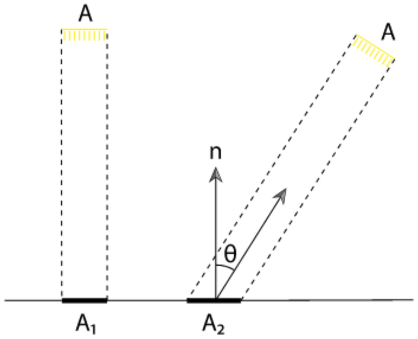
- El término f_r es
  - La BRDF: función de distribución bidireccional de reflexión
  - Define como la luz *cambia* después de interactuar con el material
  - Responde a ¿cómo es la luz reflejada en el punto x hacia una dirección $\omega_{\mathbf{o}}$ desde una dirección $\omega_{\mathbf{i}}$?



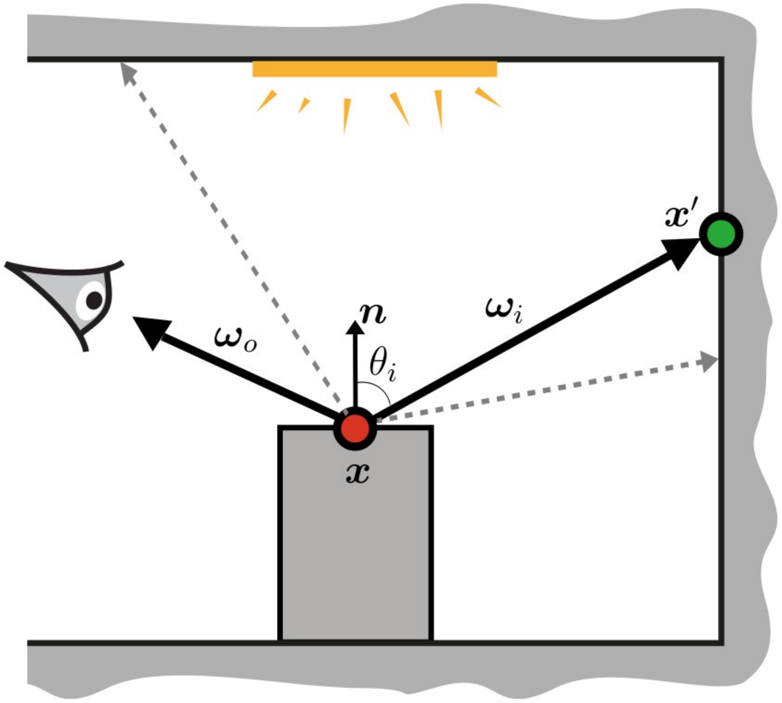
$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) = \int_{\Omega} L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) (\mathbf{n}_x \cdot \omega_{\mathbf{i}}) \mathrm{d}\omega_{\mathbf{i}}$$

Coseno

- El término $\mathbf{n}_x \cdot \omega_\mathbf{i}$ es
  - $\cos\theta_i$ (definición producto punto)
  - Necesario pues la medida de la integral es ángulos sólidos



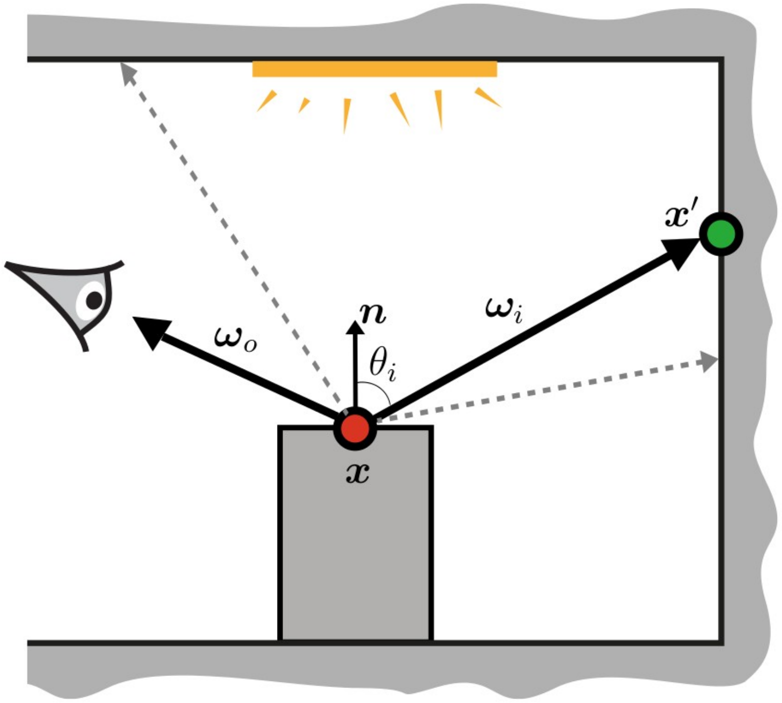
$$A = A_2 \cos\theta$$



$$L(\mathrm{x}, \omega_\mathbf{o}) = \int_\Omega L_e(\mathrm{x}', -\omega_\mathbf{i}) f_r(\mathrm{x}, \omega_\mathbf{o}, \omega_\mathbf{i}) (\mathbf{n}_x \cdot \omega_\mathbf{i}) \mathrm{d}\omega_\mathbf{i}$$

Reto

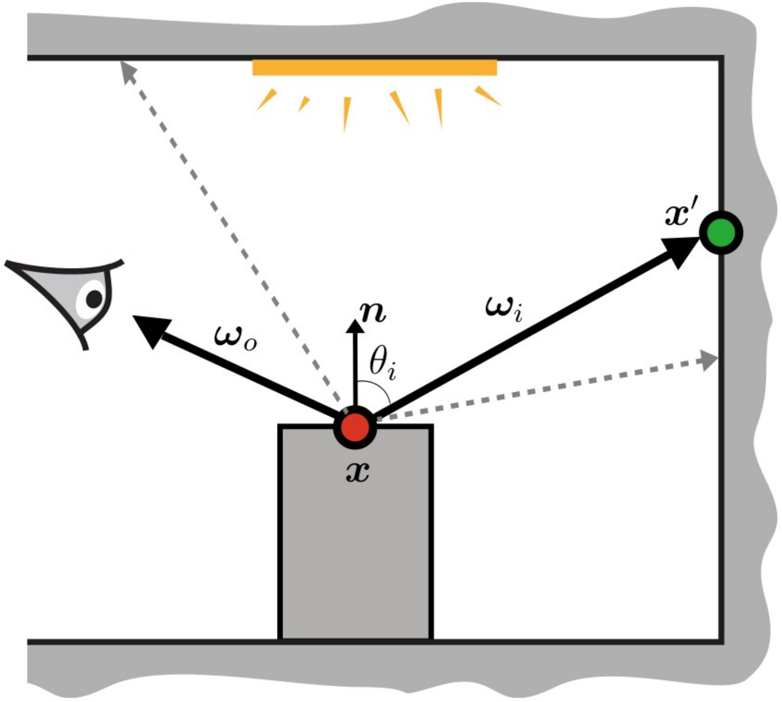
- ¿Cómo encontrar la solución a esta ecuación?
  - Analítico: no existe salvo en casos muy limitados
    - La geometría de la escena es arbitraria
    - La BRDF puede ser muy compleja



$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) = \int_{\Omega} L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) \cos\theta_{\mathbf{i}} \mathrm{d}\omega_{\mathbf{i}}$$

Reto

- ¿Cómo encontrar la solución a esta ecuación?
  - Numéricamente:
    - Es computacionalmente complejo
    - No hay otra opción



$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) = \int_{\Omega} L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) \cos\theta_{\mathbf{i}} \mathrm{d}\omega_{\mathbf{i}}$$

Integración numérica

- Los métodos numéricos cómo la regla trapezoidal o de cuadratura son útiles para integrales *suaves* de baja dimensionalidad
  - Se toman puntos o muestras en el dominio de integración y se evalúa la función a integrar para calcular una pequeña área
  - Si 10 puntos dan un buen resultado para una dimensión, entonces se necesitan 10^n para *n* dimensiones

- En rendering tenemos integrales *no suaves*, *discontinuas* e *infinito-dimensionales*

Integración Monte Carlo

- El método Monte Carlo fue desarrollado para problemas de simulación nuclear
  - Nombrado por el casino Monte Carlo en Mónaco
- Los puntos o muestras del dominio son tomados de manera *aleatoria*
- ¡Su ratio de convergencia es independiente al número de dimensiones!

El estimador

- El método Monte Carlo calcula el valor de una integral por medio del estimador:

$$I = \int_D f(\mathrm{x})\mathrm{dx} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{f(\mathrm{x}_i)}{p(\mathrm{x}_i)}$$

- En donde cada *muestra* x_i es tomada *aleatoriamente* del dominio D, y tiene una probabilidad $p(\mathrm{x}_i)$

Evaluación

- La evaluación es *trivial*
  - Únicamente es necesario conocer la función que se pretende integrar

$$I = \int_D f(\mathrm{x})\mathrm{dx} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \frac{f(\mathrm{x}_i)}{p(\mathrm{x}_i)}$$

Muestreo

- El muestreo consiste en obtener una muestra aleatoria x_i en el dominio de integración D
  - Requisito **indispensable** que sea posible muestrear el espacio en el que la función es distinta a 0

$$I = \int_{D} f(\mathrm{x})\mathrm{dx} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{f(\mathrm{x}_i)}{p(\mathrm{x}_i)}$$

Probabilidad de muestra

- Finalmente dividimos por la probabilidad de la muestra x_i
  - Si la función es distinta a 0, también la probabilidad debe serlo

$$I = \int_D f(\mathrm{x})\mathrm{dx} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{f(\mathrm{x}_i)}{\color{red}{p(\mathrm{x}_i)}}$$

El estimador para iluminación directa

- Nuestro estimador Monte Carlo para la ecuación de iluminación directa será:

$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) = \int_{\Omega} L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) \cos\theta_{\mathbf{i}} \mathrm{d}\omega_{\mathbf{i}}$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) \cos\theta_{\mathbf{i}}}{p(\omega_{\mathbf{i}})}$$

- Muestrear direcciones $\omega_{\mathbf{i}}$ y calcular su probabilidad

Muestreo y probabilidad

- Antes de muestrear direcciones, revisemos el muestreo uniforme en un intervalo:
  - Dado un número aleatorio $\xi \in [0, 1)$
  - Podemos obtener una muestra aleatoria en un intervalo $[a, b)$

$$x_j = a + (b - a)\xi$$

  - Al estar uniformemente distribuido su probabilidad es

$$p(x_j) = \frac{1}{b - a}$$

Muestreo de esfera

- Muestreo uniforme en la esfera
  - Podemos muestrear uniformemente los ángulos polares y azimutales

$$\theta_j = \arccos(1 - 2\xi_1)$$
$$\phi_j = 2\pi\xi_2$$

  - Convertir la dirección esférica muestreada a coordenadas cartesianas (¡es una dirección local!)
  - Probabilidad: inverso del área $p(\omega_j) = \frac{1}{A} = \frac{1}{4\pi}$

Muestreo de hemisferio

- Muestreo uniforme en un hemisferio
  - Podemos muestrear uniformemente los ángulos polares y azimutales

$$\theta_j = \arccos(\xi_1)$$
$$\phi_j = 2\pi\xi_2$$

  - Convertir la dirección esférica muestreada a coordenadas cartesianas (¡es una dirección local!)
  - Probabilidad: inverso del área $p(\omega_j) = \frac{1}{A} = \frac{1}{2\pi}$

El estimador para iluminación directa (2)

- La implementación del estimador Monte Carlo:

$$L(\mathbf{x}, \omega_\mathbf{o}) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_e(\mathrm{x}', -\omega_\mathbf{i}) f_r(\mathrm{x}, \omega_\mathbf{o}, \omega_\mathbf{i}) \cos \theta_\mathbf{i}}{p(\omega_\mathbf{i})}$$

  – Un rayo desde la cámara con dirección $\omega_\mathbf{o}$ intersecta la escena en un punto x (queremos estimar el color)

El estimador para iluminación directa (2)

- La implementación del estimador Monte Carlo:

$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) \cos\theta_{\mathbf{i}}}{p(\omega_{\mathbf{i}})}$$

  - Muestrear direcciones $\omega_{\mathbf{i}}$ y calcular su probabilidad
    - OJO: la dirección muestreada generalmente es *local* y posiblemente sea necesario cambiarla a *global*

El estimador para iluminación directa (2)

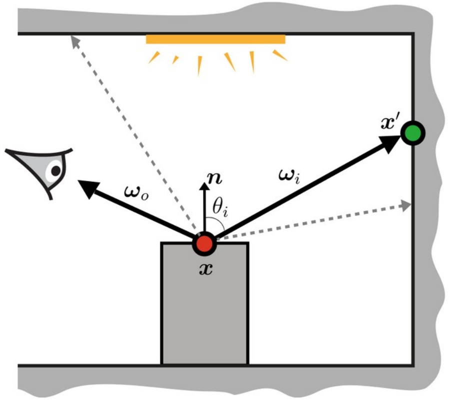
- La implementación del estimador Monte Carlo:

$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) \cos\theta_{\mathbf{i}}}{p(\omega_{\mathbf{i}})}$$

  - Determinar la normal en x
  - Calcular el coseno del ángulo entre la dirección muestreada y la normal

$$\cos\theta_{\mathbf{i}} = \mathbf{n} \cdot \omega_{\mathbf{i}}$$

El estimador para iluminación directa (2)

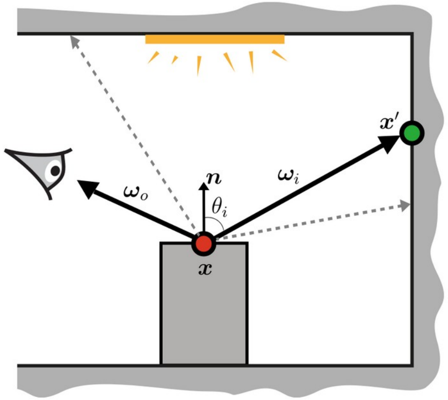


- La implementación del estimador Monte Carlo:

$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) \cos \theta_{\mathbf{i}}}{p(\omega_{\mathbf{i}})}$$

  - Lanzar un rayo secundario desde x con dirección $\omega_{\mathbf{i}}$
  - Determinar el punto x' en el que este nuevo rayo intersecta la escena

El estimador para iluminación directa (2)



- La implementación del estimador Monte Carlo:

$$L(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}) \approx \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{L_e(\mathrm{x}', -\omega_{\mathbf{i}}) f_r(\mathrm{x}, \omega_{\mathbf{o}}, \omega_{\mathbf{i}}) \cos\theta_{\mathbf{i}}}{p(\omega_{\mathbf{i}})}$$

  - Si el punto x' está localizado en una fuente luminosa, su radiancia será mayor que 0
    - Si el objeto no emite luz su radiancia es 0

El estimador para iluminación directa (2)

- La implementación del estimador Monte Carlo:

$$L(\mathrm{x},\omega_{\mathbf{o}}) \approx \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{L_e(\mathrm{x}',-\omega_{\mathbf{i}})\,{\color{red}f_r(\mathrm{x},\omega_{\mathbf{o}},\omega_{\mathbf{i}})}\cos\theta_{\mathbf{i}}}{p(\omega_{\mathbf{i}})}$$

  - Determinar la naturaleza de la luz reflejada en el punto x , desde la dirección incidente $\omega_{\mathbf{i}}$ hacia la dirección saliente $\omega_{\mathbf{o}}$
  - La BRDF estará definida según el material
    - Caso simple BRDF difusa
    - ρ es el color o albedo

$$f_r(\mathrm{x},\omega_{\mathbf{o}},\omega_{\mathbf{i}}) = \frac{\rho}{\pi}$$

Muestreo de importancia

- El muestreo de importancia es una técnica para hacer que nuestro estimador Monte Carlo converja más rápido

$$I = \int_D f(\mathrm{x})\mathrm{dx} \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{f(\mathrm{x}_i)}{p(\mathrm{x}_i)}$$

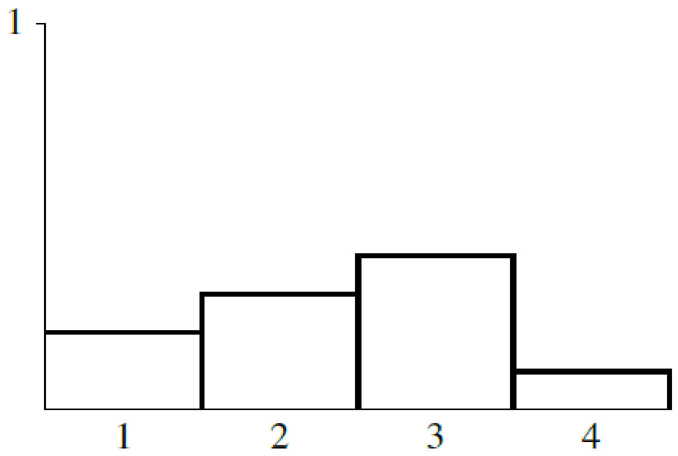
tomando muestras x_i de una distribución $p(\mathrm{x})$ que sea **similar** a la función $f(\mathrm{x})$ en el integrando

- Muestreo uniforme es subóptimo pues no considera la naturaleza del integrando

Método de inversión

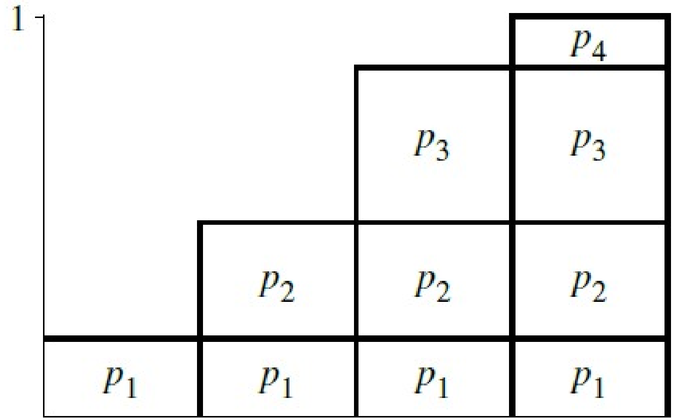
- Utiliza una o más variables aleatorias y las *mapea* a variables aleatorias de la distribución deseada.

- Principios, considere la siguiente distribución discreta:
  - Debe integrar a 1
  - Toda distribución cumple
  - Se tienen 4 eventos posibles
    - p_1, p_2, p_3 y p_4



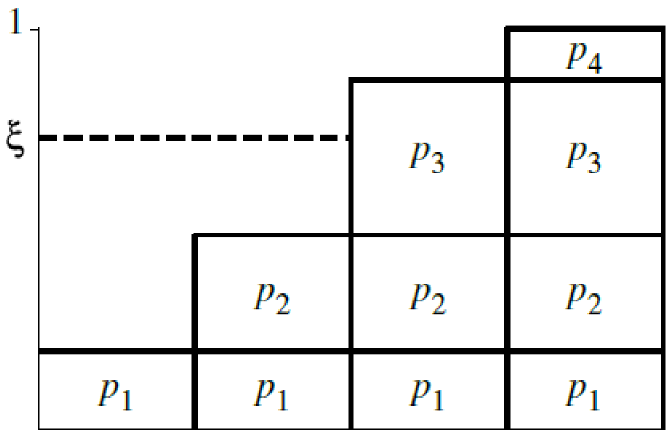
Método de inversión (2)

- La función de distribución acumulativa (CDF) será:
  - La altura de cada columna es la suma de las alturas de los eventos anteriores



Método de inversión (3)

- Para muestrear la distribución tomamos un número aleatorio y lo utilizamos para seleccionar uno de los posibles resultados de la CDF:
  - La altura de cada columna es la suma de las alturas de los eventos anteriores



Método de inversión (4)

- En el caso continuo la CDF es la integral de la distribución:
  - 1. Dada una función $p(x)$ de la que se desea muestrear, encontrar su constante de normalización integrando para el dominio de muestreo deseado:

$$\int_a^b cp(x)\mathrm{d}x = 1$$

  - 2. Utilizando esta constante obtener la CDF:

$$P(x) = \int_a^x cp(x')\mathrm{d}x'$$

Método de inversión (5)

- 3. Calcular la función inversa $P^{-1}(x)$
- 4. Obtener un número uniformemente distribuido ξ
- 5. Computar el número aleatorio con distribución $p(x)$ haciendo:

$$X_i = P^{-1}(\xi)$$

Ejemplo: distribución potencia

- La PDF de la distribución potencia está definida en el intervalo [0,1):

$$p(x) \propto x^n$$

- encontramos la constante de normalización:

$$\int_0^1 c x^n \mathrm{d}x = 1$$

$$c \frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1 = 1$$

$$c\left(\frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1}\right) = 1$$

$$\frac{c}{n+1} = 1$$

$$c = n+1$$

Ejemplo: distribución potencia (2)

- Ahora encontramos la CDF $P(x) = \int_0^x p(x')\mathrm{d}x'$

$$P(x) = \int_0^x (n+1)x'^n \mathrm{d}x' = x^{n+1}$$

- Invertimos $P(x)$

$$P^{-1}(x) = \sqrt[n+1]{x}$$

- Y ahora podemos obtener una muestra con distribución potencia:

$$X = \sqrt[n+1]{\xi}$$

Ejemplo: distribución coseno hemisférico

- Dada la ecuación de renderizado para iluminación directa, idealmente desearíamos que:

$$p(\omega) \propto L_e \times f_r \times \cos$$

- Lamentablemente, esto involucra integrar dicha función
  - ¡No se puede integrar!
  - Si la pudieramos integrar analíticamente no hariamos MC
- Pero sí podemos muestrear de acuerdo a alguno de los factores

$$p(\omega) \propto \cos\theta$$

Ejemplo: distribución coseno hemisférico (2)

- Encontramos el factor de normalización

$$\int_{H^2} c\cos\theta \mathrm{d}\omega = 1$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} c\cos\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi = 1$$

$$c2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta = 1$$

$$c2\pi\left(-\frac{1}{2}\cos^2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = c2\pi\left(-\frac{1}{2}\cos^2(\pi/2)+\frac{1}{2}\cos^2(0)\right) = 1$$

$$c2\pi\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{c2\pi}{2} = 1$$

$$c = \frac{1}{\pi}$$

Cambiamos de dominio de integración, es necesario el Jacobiano

Ejemplo: distribución coseno hemisférico (3)

- Por lo que

$$p(\theta, \phi) = \frac{1}{\pi} \cos\theta \sin\theta$$

- Ahora para obtener $p(\theta, \phi) = p_\theta(\theta) p_\phi(\phi)$ primero hacemos la función de densidad marginal $p_\theta(\theta)$

$$p_\theta(\theta) = \int_0^{2\pi} p(\theta, \phi) \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{1}{\pi} \cos\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2 \cos\theta \sin\theta$$

Ejemplo: distribución coseno hemisférico (4)

- Ahora necesitamos la función de densidad condicional:

$$p(\phi|\theta) = p_\phi(\phi) = \frac{p(\theta,\phi)}{p_\theta(\theta)} = \frac{\frac{1}{\pi}\cos\theta\sin\theta}{2\cos\theta\sin\theta} = \frac{1}{2\pi}$$

- Y ahora continuamos obteniendo la CDF de cada función:

$$P_\theta(\theta) = \int_0^\theta 2\cos\theta'\sin\theta'\mathrm{d}\theta' = -\frac{2}{2}\cos^2\theta'\Big|_0^\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$P_\phi(\phi) = \int_0^\phi \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}\phi' = \frac{1}{2\pi}\int_0^\phi \mathrm{d}\phi' = \frac{\phi}{2\pi}$$

Ejemplo: distribución coseno hemisférico (5)

- Invertimos ambas funciones:

$$P_\theta(\theta) = 1 - \cos^2\theta \qquad P_\theta^{-1}(\xi_1) = \arccos\sqrt{1-\xi_1}$$

$$P_\phi(\phi) = \frac{\phi}{2\pi} \qquad P_\phi^{-1}(\xi_2) = 2\pi\xi_2$$

- La dirección muestreada es *LOCAL* y *ESFÉRICA*
- Y la probabilidad de una dirección muestreada es:

$$p(\omega) = \frac{1}{\pi}\cos\theta$$

¡¡¡Ya no es constante!!!

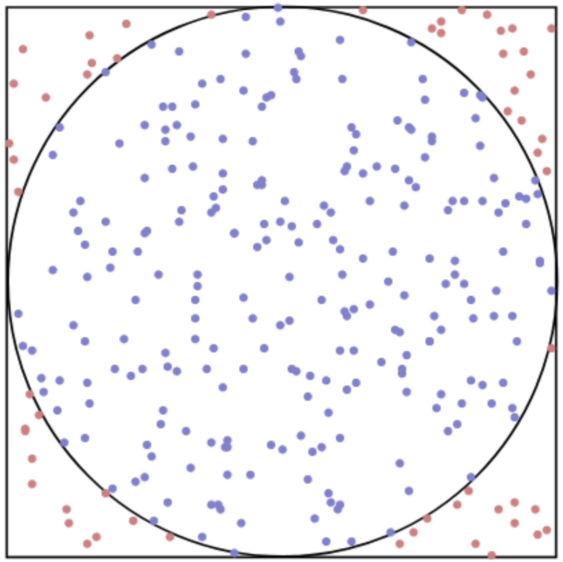
No confundir con $p(\theta, \phi)$

Muestreo de rechazo

- Es posible que algunas funciones no puedan ser integradas para encontrar su PDF
  - o su CDF no puede ser invertida analíticamente.
- El método del rechazo permite generar muestras de estas distribuciones sin necesidad de integrar o invertir
  - Es análogo a tirar dardos
  - Toma muestras de una distribución hasta que la muestra *caiga* en el dominio de integración.

Ejemplo: muestreo de rechazo

- Supongamos que queremos muestrear uniformemente puntos dentro del círculo unitario
  - Pero podemos tomar muestras del cuadrado circunscrito

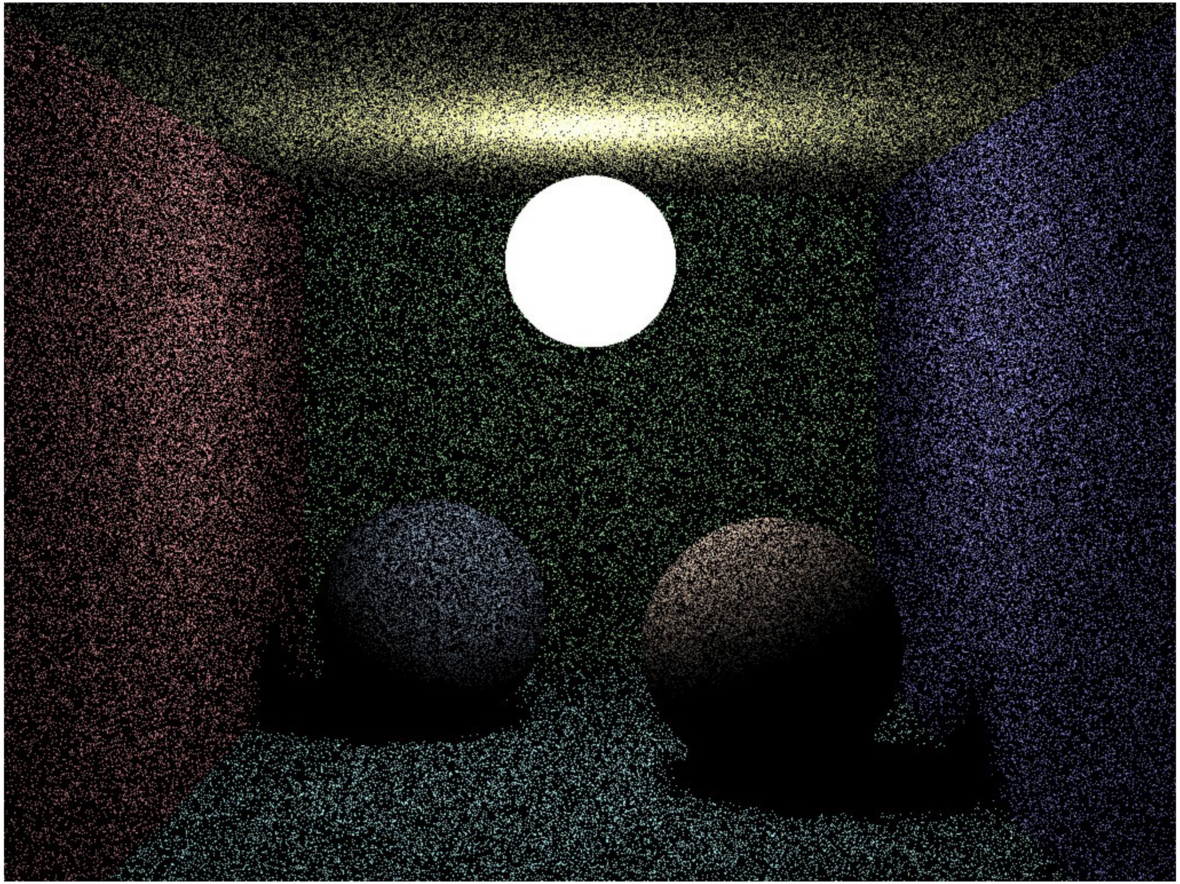


```
Point2f RejectionSampleDisk(RNG &rng) {
    Point2f p;
    do {
        p.x = 1 - 2 * rng.UniformFloat();
        p.y = 1 - 2 * rng.UniformFloat();
    } while (p.x * p.x + p.y * p.y > 1);
    return p;
}
```

El impacto del muestreo

Muestreo de Uniforme en la esfera

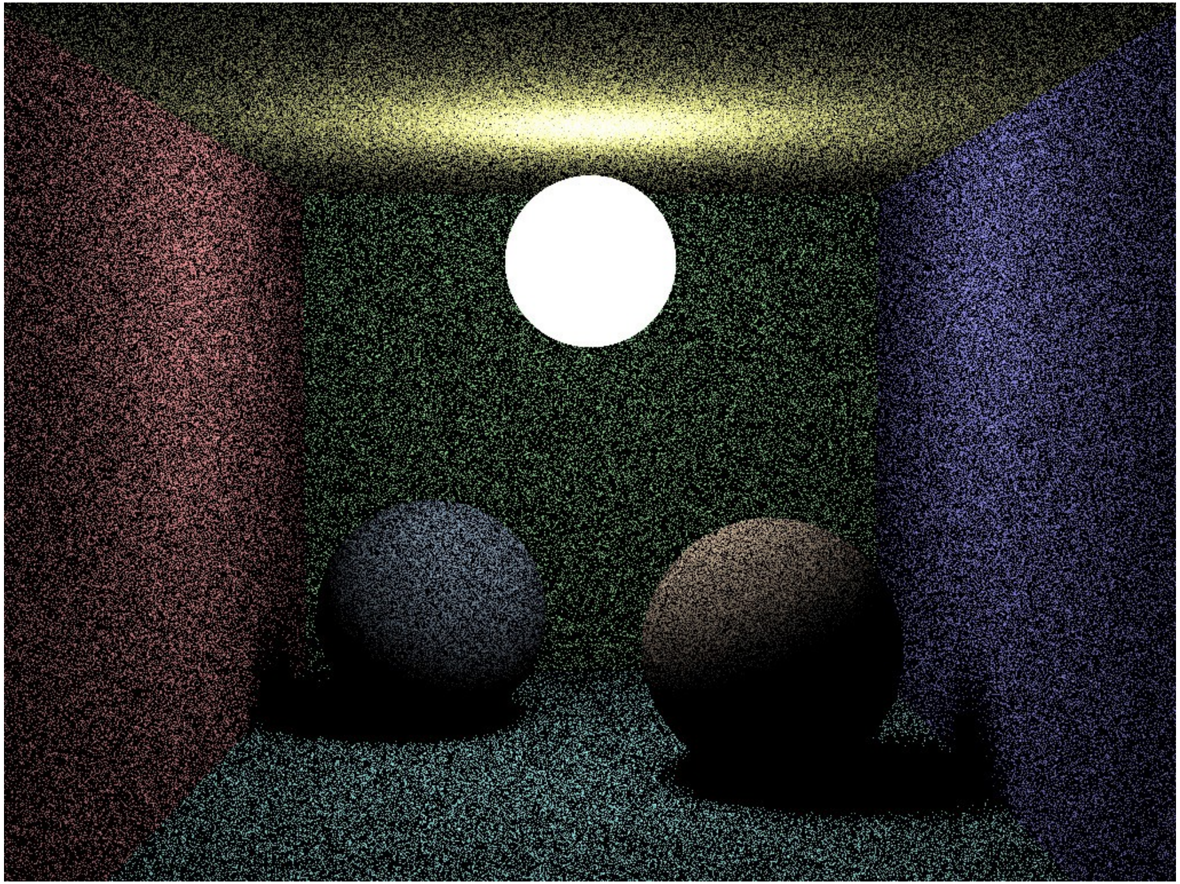
32 spp



El impacto del muestreo

Muestreo de Uniforme en hemisferio

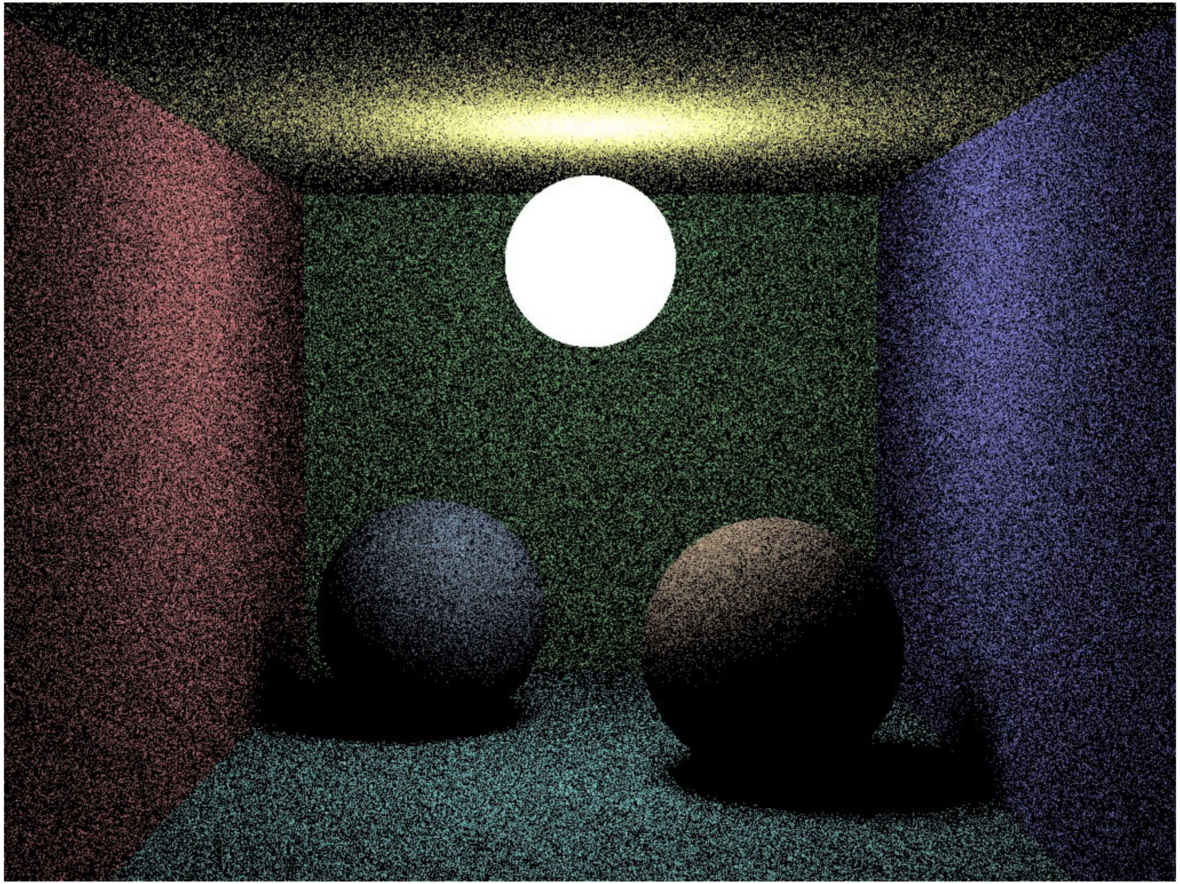
32 spp



El impacto del muestreo

Muestreo de coseno hemisférico

32 spp



Muestreo de importancia

- ¿Nuestra estrategia hasta ahora es la correcta?

$$p(\omega) \propto L_e \times f_r \times \cos$$

Muestreo de importancia

- ¿Nuestra estrategia hasta ahora es la correcta?

$$p(\omega) \propto L_e \times f_r \times \cos$$

- ¡NO!
  - Muestrear respecto al coseno es bueno pero se ignora:
    - La importancia de las fuentes luminosas, $p_{L_e}(\omega) \propto L_e$
    - La importancia del material, normalmente $p_{f_r}(\omega) \propto f_r \times \cos$

Muestreo de luz

- Muestrea direcciones de modo que el rayo resultante conecte con una fuente luminosa

$$p_{L_e}(\omega) \propto L_e$$

- ¿Cómo manejar la visibilidad?
  - ¿Muestreo de rechazo?
    - Costoso
    - ¿Y si la fuente está completamente ocluida?
  - ¿Incorporar la geometría?
  - La muestra contribuirá sólo si hay visibilidad, de otro modo la contribución es 0

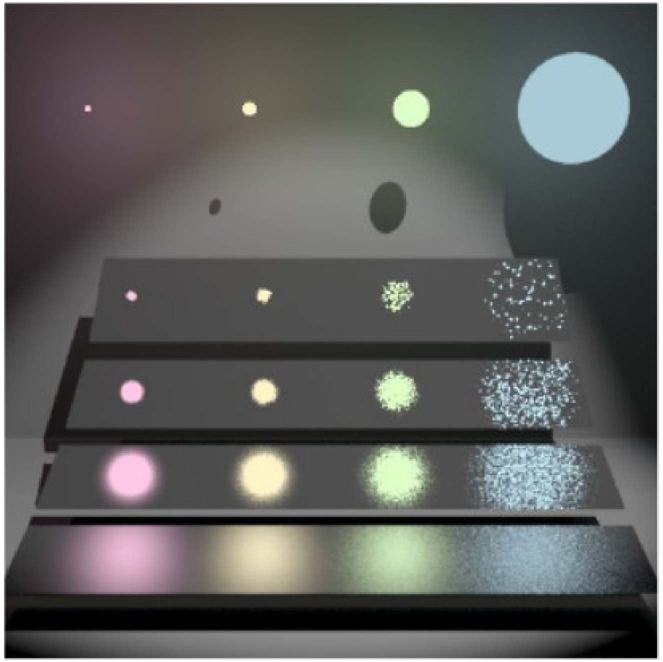
Muestreo de BRDF

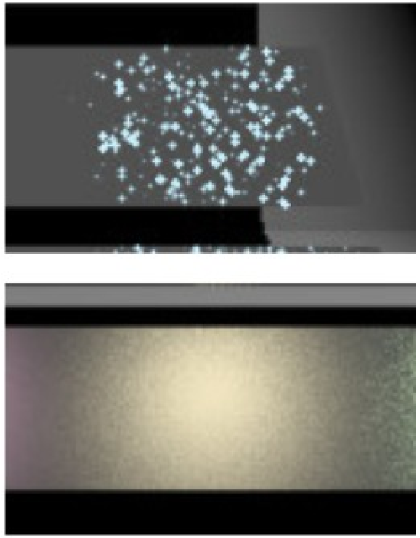
- Muestrea direcciones de acuerdo a la distribución del material

$$p_{f_r}(\omega) \propto f_r \times \cos$$

- No siempre resultará en un rayo que conecte con una fuente luminosa
  - Poca variancia cuando sí lo sea

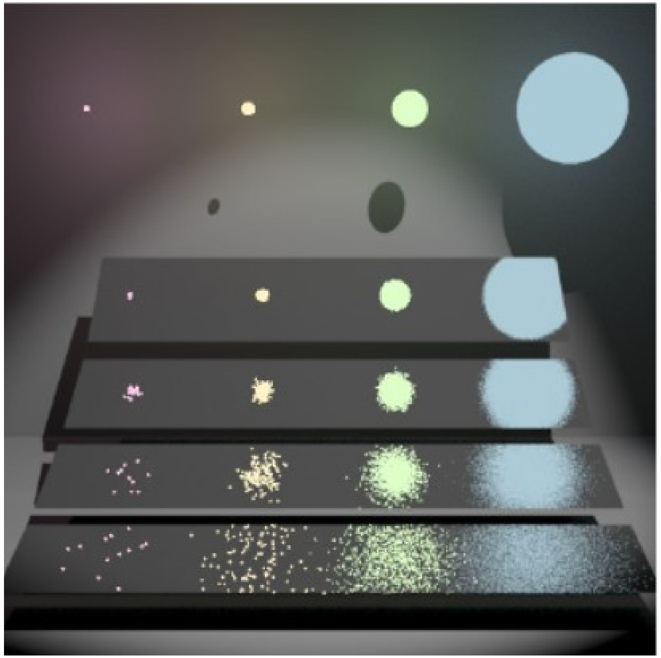
- Muestreo de luz

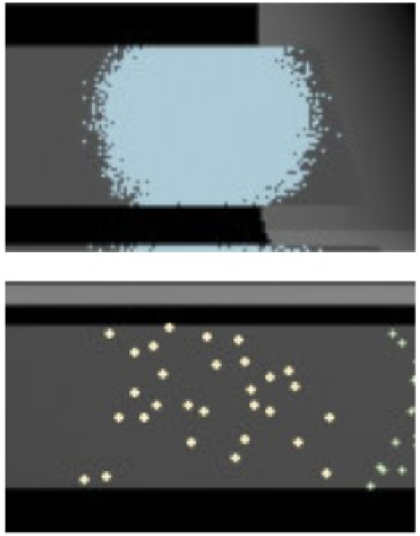




$$p_{L_e}(\omega) \propto L_e$$

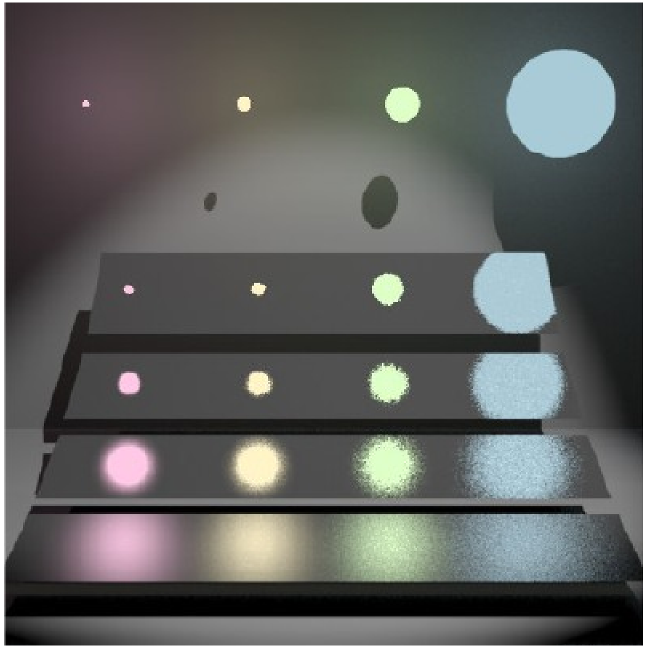
- Muestreo BRDF

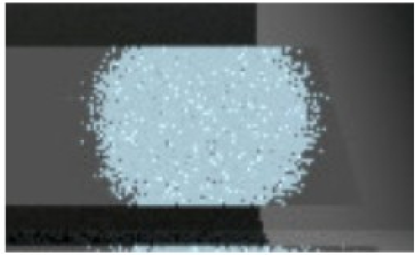




$$p_{f_r}(\omega) \propto f_r \times \cos$$

- ¿Y si combinamos estrategias?





$$p(\omega) \propto L_e + f_r \times \cos$$

Muestreo de Importancia Múltiple

- Considere que se desea integrar el producto de funciones y cuyo estimador Monte Carlo es:

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{f(X_i)g(X_i)}{p(X_i)}$$

- Y tenemos métodos para generar muestras tomando cualquiera de las dos funciones es decir:

$$p_f(x) \propto f(x) \qquad\qquad p_g(x) \propto g(x)$$

Muestreo de Importancia Múltiple

- El muestreo de importancia múltiple, nos permite crear el nuevo estimador Monte Carlo:

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x \approx$$

$$\frac{1}{N_f}\sum_{i=1}^{N_f}\left[\frac{f(X_i)g(X_i)}{p_f(X_i)}w_f(X_i)\right]+\frac{1}{N_g}\sum_{j=1}^{N_g}\left[\frac{f(X_j)g(X_j)}{p_g(X_j)}w_g(X_j)\right]$$

- Que es la suma de dos estimadores Monte Carlo con distinta estrategia y *ponderados* por medio de w_f y w_g

Muestreo de Importancia Múltiple

- Normalmente el número de muestras de cada estimador es igual por lo que:

$$\int f(x)g(x)\mathrm{d}x \approx$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{f(X_{i_0})g(X_{i_0})}{p_f(X_{i_0})}w_f(X_{i_0}) + \frac{f(X_{i_1})g(X_{i_1})}{p_g(X_{i_1})}w_g(X_{i_1})\right]$$

- Observación: entre corchetes hay un estimador Monte Carlo de una muestra.

Ponderando los estimadores

- El *peso* w es una función especial escogida de modo que el *valor esperado* del estimador sea el valor de la integral.

- Estas funciones toman en cuenta *todas* las formas en que pudo haber sido generada una muestra.

Heurística de balance

- Es la función de ponderación:

$$w_s(x) = \frac{n_s p_s(x)}{\sum_i n_i p_i(x)}$$

- Que en el caso particular de dos estrategias (luz y brdf) y una sóla muestra, estarán dados por:

$$w_f(x) = \frac{p_f(x)}{p_f(x) + p_g(x)} \qquad w_g(x) = \frac{p_g(x)}{p_f(x) + p_g(x)}$$

Heurística de balance (2)

- ¿Por qué funciona?
- Considere un muestreo proporcional a $f(x)$ cuya evaluación genera un valor alto pero con poca probabilidad
  - ¡Mucha variancia!

$$\frac{f(X)g(X)}{p_f(X)}$$

- Ahora considere el mismo valor muestreado, donde la probabilidad de acuerdo a $p_g(X)$ sea adecuada
  - El denominador no será pequeño

$$\frac{f(X)g(X)}{p_f(X)} \frac{p_f(X)}{p_f(X)+p_g(X)}$$

Heurística de potencia

- En la práctica la heurística de potencia reduce todavía más la varianza.

- Para un exponente beta dado, la ponderación está dada por:

$$w_s(x) = \frac{(n_s p_s(x))^\beta}{\sum_i (n_i p_i(x))^\beta}$$

- La heurística de balance se obtiene con beta = 1

Heurística de potencia (2)

- En nuestro caso de una sóla muestra, dos estrategias y siguiendo el valor de beta=2 (sugerido por Eric Veach)

$$w_f(x) = \frac{(p_f(x))^2}{(p_f(x))^2 + (p_g(x))^2} \qquad w_g(x) = \frac{(p_g(x)^2)}{(p_f(x))^2 + (p_g(x))^2}$$

```
inline Float PowerHeuristic(Float fPdf, Float gPdf) {
    Float f2 = fPdf * fPdf, g2 = gPdf * gPdf;
    return f2 / (f2 + g2);
}
```

Lo que sigue...

- Diferentes tipos de fuentes de luz
  - Muestreo de luz: iluminación directa *explícita*
- Diferentes tipos de materiales
  - Muestreo de BRDF

- Al terminar ambos temas serás capaz de construir un renderizador de iluminación directa con muestreo de importancia múltiple