Sustituyendo en la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{-5 - 7}{6} = -2$$

Las raíces son:

$$x_1 = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = -2$$

5

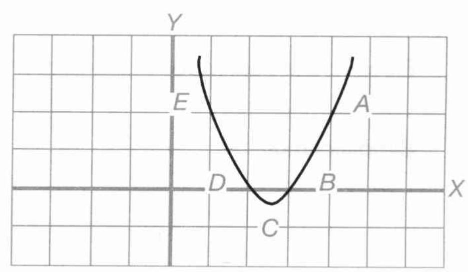
Gráfica de una ecuación de segundo grado

La representación gráfica de toda ecuación de *primer grado es una recta;* **la de una ecuación de** *segundo grado* **no siempre es la misma, sin embargo,** *todas pertenecen a la familia de las secciones cónicas.*

Ejemplo:

Representar y resolver gráficamente la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$. El primer miembro de esta ecuación es una función de segundo grado de x; hacemos la función igual a y y asignamos valores a x para obtener los de y.

x	4	3	$2\frac{1}{2}$	2	1
y	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	2
Puntos	A	B	C	D	E



Esta curva se llama parábola.

Las abscisas de los puntos en que la curva corte al eje XX' son las raíces de la ecuación; en este caso la curva corta al eje XX' en dos puntos cuyas abscisas son 2 y 3, que son las raíces de la ecuación.

Podemos comprobar el resultado obtenido por factorización.

$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad x_1 = 2$

$(x - 2)(x - 3) = 0 \qquad x_2 = 3$

Cuando las dos raíces obtenidas en el resultado *son reales y desiguales,* la curva corta al eje de las x en dos puntos distintos.

Conclusión: Para resolver gráficamente una ecuación de segundo grado en x es suficiente encontrar los puntos en que la curva corta al eje de las x.

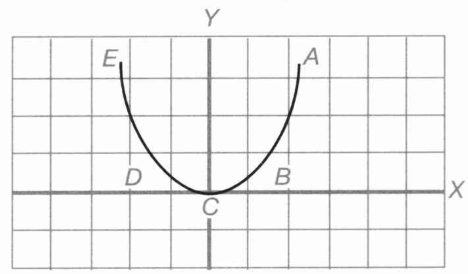
Ejemplo:

Construir y resolver gráficamente la ecuación $x^2 = 2y$.
Como en estos casos despejamos la y

$$y = \frac{x^2}{2}$$

Asignamos valores a x para obtener los de y.

x	2	1	0	−1	−2
y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
Puntos	A	B	C	D	E



6 Ecuaciones reducibles a cuadráticas

6.1 Ecuaciones con radicales

Las ecuaciones que incluyen radicales en algunos casos se pueden reducir a ecuaciones cuadráticas. *Una vez que elevamos al cuadrado para cancelar los radicales,* las soluciones han de *comprobarse* en la ecuación inicial pues *algunas pueden no ser* solución de las citadas ecuaciones.

Observa los siguientes ejemplos.

1. Resolver $\sqrt{5y-1} - \sqrt{y} = 1$

Transponiendo

$$\sqrt{5y-1} = 1 + \sqrt{y}$$

Elevamos al cuadrado

$$5y - 1 = 1 + 2\sqrt{y} + y$$

Simplificamos

$$5y - y - 1 - 1 = 2\sqrt{y}$$

$$4y - 2 = 2\sqrt{y}$$

Dividimos entre dos

$$2y - 1 = \sqrt{y}$$

Elevamos al cuadrado

$$4y^2 - 4y + 1 = y$$

$$4y^2 - 5y + 1 = 0$$

Factorizamos de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$4y^2 - 5y + 1 = (y-1)(4y-1)$$

$$y_1 = 1; \qquad y_2 = \frac{1}{4}$$

Comprobación en la ecuación inicial:

Para $y = \frac{1}{4}$

$$\sqrt{5y-1}-\sqrt{y}=1$$

$$\sqrt{5\left(\frac{1}{4}\right)-1}-\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

$$\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

$$0\neq 1$$

$y=\frac{1}{4}$ no satisface la ecuación

Para $y=1$

$$\sqrt{5y-1}-\sqrt{y}=1$$

$$\sqrt{5-1}-\sqrt{1}=1$$

$$2-1=1$$

$$1=1$$

Sol. La raíz es $y=1$

2. Resolver $\sqrt{y-3}-\sqrt{2y+2}=2$

Transponiendo

$$\sqrt{y-3}=2+\sqrt{2y+2}$$

Elevamos al cuadrado. Simplificamos

$$y-3=4+4\sqrt{2y+2}+2y+2$$

$$y-3-4-2-2y=4\sqrt{2y+2}$$

$$-y-9=4\sqrt{2y+2}$$

Elevamos al cuadrado. Simplificamos

$$y^2+18y+81=16(2y+2)$$

$$y^2-14y+49=0$$

Factorizamos

$$y^2-14y+49=(y-7)(y-7)$$

$$y_1=7;\quad y_2=7$$

Comprobación en la ecuación inicial:

$$\sqrt{y-3}-\sqrt{2y+2}=2$$

Para $y=7$

$$\sqrt{7-3}-\sqrt{14+2}=2$$

$$\sqrt{4}-\sqrt{16}=2$$

$$2-4=2$$

$$-2\neq 2$$

Conclusión: la ecuación inicial no tiene solución.

3. Resolver $\sqrt{y^2 - \sqrt{2y+1}} = 2 - y$

Elevamos al cuadrado. Simplificamos

$$y^2 - \sqrt{2y+1} = 4 - 4y + y^2$$
$$\cancel{y^2} - \cancel{y^2} + 4y - 4 = \sqrt{2y+1}$$

Elevamos al cuadrado. Simplificamos

$$16y^2 - 32y + 16 = 2y + 1$$
$$16y^2 - 34y + 15 = 0$$

Solución de la ecuación con la fórmula general

$$y_1 = \frac{3}{2}; \quad y_2 = \frac{5}{8}$$

Comprobación en la ecuación inicial

$$\sqrt{y^2 - \sqrt{2y+1}} = 2 - y$$

para $y_1 = \dfrac{3}{2}$

$$\sqrt{\frac{9}{4} - \sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right) + 1}} = 2 - \frac{3}{2}$$
$$\sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Para $y_2 = \dfrac{5}{8}$ no satisface la ecuación.

Sol. La raíz es $y = \dfrac{3}{2}$

6.2 Algunas ecuaciones de cuarto grado pueden reducirse a ecuaciones de segundo grado

Ejemplo:

Resolver $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

Si ponemos $x^2 = a$, la ecuación toma la forma

$$a^2 - 7a + 12 = 0$$

Factorizamos

$$a^2 - 7a + 12 = (a - 4)(a - 3)$$
$$a_1 = 4; \; a_2 = 3$$

Como

$$x^2 = a$$
$$x^4 = a^2$$

de donde,

$$a_1^2 = 4$$
$$a_2^2 = 3$$

Sol. $x_1 = 2$
$x_2 = -2$
$x_3 = \sqrt{3}$
$x_4 = -\sqrt{3}$

6.3 Ecuaciones en que la incógnita se encuentra en los denominadores

1. **Usando el *mcm* de los denominadores.**

Ejemplo:

Resolver $\dfrac{x-1}{x+3} + \dfrac{x-2}{x+1} = 1$

mcm de los denominadores $(x + 3)(x + 1)$. Multiplicamos por este mcm ambos miembros de la ecuación inicial y obtenemos

$$(x + 1)(x - 1) + (x + 3)(x - 2) = (x + 3)(x + 1)$$

Desarrollando y simplificando

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Factorizando

$$x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$$

Sol. $x_1 = 5;\ x_2 = -2$

2. **En el siguiente tipo de ecuaciones con la incógnita en el denominador *no se usa el mcm.* Las soluciones obtenidas deben *comprobarse* en la ecuación inicial pues algunas pueden *no ser* solución de la ecuación.**

Ejemplo:

Resolver $\dfrac{10}{y} + 3 - \dfrac{8}{y^2} = 0$

Ponemos $a = \dfrac{1}{y};\quad a^2 = \dfrac{1}{y^2}$

Sustituimos en la ecuación y queda

$$10a + 3 - 8a^2 = 0$$

Ordenamos, multiplicamos por -1

$$8a^2 - 10a - 3 = 0$$