AJUSTE DE ALGUNAS SUPERFICIES

Marlen de la C Álvarez Labrador
Antonio Mazón Ávila

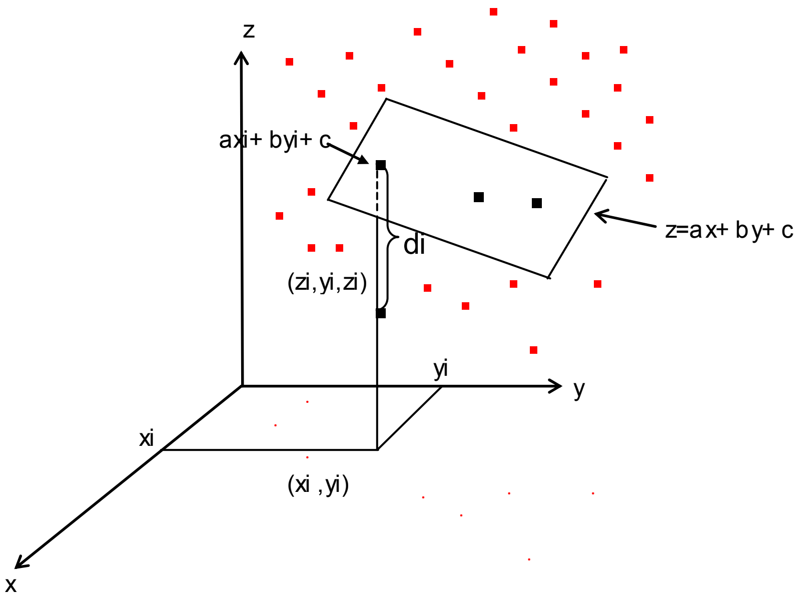
Introducción.
En el trabajo se ajusta un plano y paraboloides, así como se resuelve un problema, utilizando las funciones de dos variables anteriores para representar lo mejor posible un conjunto de puntos del espacio y se determina la superficie más aproximante.

Desarrollo
En la resolución de un grupo de problemas prácticos se utilizan fórmulas empíricas basadas en los datos de la experiencia y observaciones. El problema de encontrar dichas fórmulas de manera que represente a los datos lo mejor posible se le llama Ajuste de Superficies para el caso en que los datos de la experiencia y el conjunto de observaciones constituyan un conjunto de puntos del espacio. Para realizar el ajuste utilizaremos el Métodos de los Mínimos Cuadrados.

El ajuste de superficies se caracteriza por:
-El número de puntos es mucho mayor que el grado del polinomio de ajuste
-La superficie ajustar puede contener o no a los puntos dados
-El tipo de superficie ajustar se obtiene a partir del conocimiento físico del problema o de la representación gráfica de los puntos
- Hay una gran información poca exacta

Un investigador al observar y representar los puntos $(x_i, y_{i,} z_i)$, con, i =1, 2, 3,…, n, puede conjeturar que las variables x, y, z están relacionadas linealmente, es decir se puede expresar z = ax+by+c, para los números a, b y c. Por los puntos anteriores se pueden trazar una familia de planos, pues tres puntos no alineados determinan un plano.
¿Cómo hallar el plano α, cuya ecuación sea la que mejor ajuste a los puntos anteriores? Se puede encontrar α utilizando el Método de los Mínimos Cuadrados.

En correspondencia con cada par de valores observados de (x_i, y_i), consideremos dos valores de z: el valor observado z_i y el dado por la cota del plano $ax_i + by_i$+c, para cada i. Llamaremos desviación o error a, $d_i = ax_i + by_i + c - z_i$ para el punto (x_i, y_i, z_i). Esta relación la podemos observar en el siguiente gráfico:



Para un plano que se ajuste aproximadamente a todos los puntos observados, algunas de las desviaciones serán positivas y otras negativas, pero sus cuadrados serán todos positivos, de donde en la expresión $\sum_{i=1}^{n} d_i^{\,2}$ se considera como equivalentes una desviación positiva d, y otra negativa –d. Esta suma de cuadrados de las desviaciones depende de la elección de a, b y c. Es siempre positiva y solo es igual a cero en el caso de que todas las desviaciones sean nulas; es decir, cuando a, b y c se eligen de modo que el ajuste es perfecto.

Sea o no posible hallar un plano que proporcione un ajuste perfecto, el Método de los Mínimos Cuadrados dice: tómase como plano z = ax+by+c de ajuste óptimo, aquel para el cual la suma de los cuadrados de las desviaciones, $d^2{}_1 + d^2{}_1 + \ldots + d^2{}_n$ es mínima

Así, pues, se trata de hallar los valores de a, b y c para los que la función

f (a, b, c) = $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i + c - z_i)^2$, alcance el valor más pequeño posible, luego hace falta que se cumpla la condición:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + by_i + c - z_i)x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} ax_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} bx_i y_i + \sum_{i=1}^{n} cx_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + by_i + c - z_i)y_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} ax_i y_i + \sum_{i=1}^{n} by_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} cy_i = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i \qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + by_i + c - z_i) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} by_i + \quad cn \quad = \sum_{i=1}^{n} z_i \qquad (3)$$

A partir de la solución de este sistema de ecuaciones se obtiene los valores de a, b y c

Ajuste de paraboloides

Si $z = ax^2 + by^2$, entonces $d_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^{\,2} + by_i^{\,2} - z_i)^2$, a partir de la desviación cuadrática definimos la función f (a, b) = $\sum_{i=1}^{n} (ax_i^{\,2} + by_i^{\,2} - z_i)^2$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^{\,2} + by_i^{\,2} - z_i)x_i^{\,2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} ax_i^{\,4} + \sum_{i=1}^{n} bx_i^{\,2} y_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} z_i \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i^{\,2} + by_i^{\,2} - z_i)y_i^{\,2} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} ax_i^{\,2} y_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} by_i^{\,4} = \sum y_i^{\,2} z_i \qquad (2)$$

A partir de la solución de este sistema de ecuaciones se obtiene los valores de a y b

Ejemplo: En la siguiente tabla hay ocho tipos de hojas de acero trabajadas en frío, con diferentes composiciones de cobre y temperaturas de templado. Al medir se obtuvieron los siguientes datos:

Dureza (z)	Contenido del cobre(x)	Temp. de templado(y)
71,9	0,02	1000
63,1	0,02	1100
53,8	0,02	1200
45,3	0,02	1300
74,6	0,10	1000
65,5	0,10	1100
59,2	0,18	1200
49,9	0,18	1300

Donde x: representa el contenido del cobre
y: representa la temperatura de templado
z: representa la dureza.

a) Obtenga la ecuación del plano de mejor ajuste y la desviación cuadrática.
b) Estime la dureza de una lámina de acero para un contenido de cobre del 0.05% y una temperatura de templado de 1150 grados Fahrenheit
c) Obtenga la ecuación del paraboloide de mejor ajuste y la desviación cuadrática.
d) Estime la dureza de una lámina de acero para un contenido de cobre de 0.05% y una temperatura de templado de 1150 grados Fahrenheit
e) ¿Cuál de los dos modelos representan mejor a los datos?

i	x_i	y_i	z_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	$x_i z_i$	$z_i y_i$
1	0,02	1000	71,9	0,0004	1000000	20	1,438	71900
2	0.02	1100	63,1	0,0004	1210000	22	1,262	69410
3	0,02	1200	53,8	0,0004	1440000	24	1,076	64560
4	0,02	1300	45,3	0,0004	1690000	26	0,906	58890

5	0,10	1000	74,6	0,01	1000000	100	7,46	74600
6	0,10	1100	65,5	0,01	1210000	110	6,55	72050
7	0,18	1200	59,2	0,0324	1440000	216	10,656	71040
8	0.18	1300	49,9	0,0324	1690000	234	8,982	64870
suma	0.64	9200	483.3	0.0856	0680000	752	38,33	547320

Sustituyendo en el sistema de ecuaciones obtenemos:

0,0856a+752b+0,64c = 38,33 (1)

752a+ 10680000b+9200c =547320 (2)

0.64a+9200b+8c =483.3 (3)

Utilizando el derive 5, la ecuación del plano es z = 31,15x-0,08y + 161,11, evaluando para x = 0.05
y =1150 en la ecuación del plano tendremos z = 31,15 (0.05)-0.08 (1150)+161.11 =70.67. Calculemos la desviación cuadrática.

i	x_i	y_i	$z(x_i, y_i)$	$z(x_i, y_i) - z_i$	$(z(x_i, y_i) - z_i)^2$
1	0,02	1000	81,733	9,833	96,68
2	0,02	1100	73,733	10,633	113,06
3	0,02	1200	65,733	11,933	142,39
4	0,02	1300	57,733	12,433	154,57
5	0,10	1000	84,225	9,625	92,64
6	0,10	1100	76,225	10,725	115,02
7	0.18	1200	70,717	11,517	132,64
8	0.18	1300	62,717	12,817	164,27
Suma					1011,30

$d_i^2 = 1011{,}30$, en la medida que d_i^2 se aproxime a cero, el modelo obtenido va representando mejor a los puntos

Conformemos la tabla que nos permite determinar el sistema de ecuaciones para el caso del ajuste del paraboloide

i	x_i	y_i	z_i	x_i^2	y_i^2	$x_i^2 y_i^2$	x_i^4	y_i^4	$x_i^2 z_i$	$y_i^2 z_i$
1	0,02	1000	71,9	0,0004	1000000	400	$1{,}6.10^{-07}$	10^{12}	0,32876	71900000
2	0,02	1100	63,1	0,0004	1210000	484	$1{,}6.10^{-07}$	$1{,}46.10^{12}$	0,02524	76351000
3	0,02	1200	53,8	0,0004	1440000	576	$1{,}6.10^{-07}$	$2{,}07.10^{12}$	0,02152	77472000
4	0,02	1300	45,3	0,0004	1690000	676	$1{,}6.10^{-07}$	$2{,}85.10^{12}$	0,01812	76557000
5	0,10	1000	74,6	0,01	1000000	10000	1.10^{-04}	10^{12}	0,746	74600000
6	0,10	1100	65,5	0,01	1210000	12100	1.10^{-04}	$1{,}46.10^{12}$	0,655	79255000
7	0,18	1200	59,2	0,0324	1440000	46656	$1{,}04.10^{-03}$	$2{,}07.10^{12}$	1,91808	85248000
8	0,18	1300	49,9	0,0324	1690000	54756	$1{,}04.10^{-03}$	$2{,}85.10^{12}$	1,61676	84331000
S				0.0856	10680000	125648	0,00228064	$14{,}76.10^{12}$	5,32948	62571400

0,00228064 a +125648 b = 5,32948 (1)
125648 a+ 14760000000000b = 62571400 (2)

Resolviendo el sistema por el derive 5 tendremos, a = 2,42 y b = 0,00004, entonces

$z = 2,42x^2+0,00004y^2$, evaluando para x = 0.05, y = 1150, $z = 2,42(0,05)^2+0,00004(1150)^2 = 52,90$

Determinemos a continuación la desviación cuadrática

i	x_i	y_i	$z(x_i, y_i)$	$z(x_i, y_i) - z_i$	$(z(x_i, y_i) - z_i)^2$
1	0,02	1000	40	-31,9	1017,61
2	0,02	1100	48,40	-5,5	30,25
3	0,02	1200	57,6	3,8	14,44
4	0,02	1300	67,6	22,3	497,29
5	0,10	1000	40,02	-34,58	1195,7764
6	0,10	1100	48,42	-17,08	291,7264
7	0.18	1200	57,67	-1,53	2,3409
8	0.18	1300	67,67	17,77	315,7729
Suma					3365,2066

$$d_i^2 = 3365,21$$

Como la desviación cuadrática correspondiente al plano es menor que la correspondiente al paraboloide concluimos que el modelo que mejor representa a los puntos es la ecuación del plano
$z = 31,15x - 0,08y + 161,11$

Conclusiones

- La realización del ajuste de un conjunto de puntos del espacio a través de un plano y un paraboloide contribuye a la asimilación del concepto de regresión múltiple, el cual se estudia en la Estadística Inferencial.
- El resultado anterior se puede utilizar para ajustar un conjunto de puntos del espacio a cualquier superficie de segundo grado.
- Una vez ajustada la superficie, se puede utilizar el modelo para predecir un resultado concreto.

Bibliografía

- Cálculo con Geometría Analítica III
- Cálculo infinitesimal y Geometría analítica, G. B. Thomas
- Matemática Numérica, volumen1, Dr. Manuel Álvarez Blanco, Dr. Alfredo Guerra Hernández, y Dr. Rogelio Lau Fernández
- Matemática de Cálculo, N.I. Danílina, N.S. Dubróvskaya. O.P.Kvashá, G.L. Smirnov
- Probabilidades y Estadística para Ingenieros, 2da parte

Marlen de la C ÁLVAREZ LABRADOR
mal@mat.upr.edu.cu
Master en Administración de Empresas Agropecuarias y Jefe del colectivo de Matemática para economía en la Universidad de Pinar del Río, Cuba.

Antonio MAZÓN ÁVILA
an@mat.upr.edu.cu
Master en Ciencias de la Educación y Jefe del colectivo de Matemática para ciencias técnicas en la Universidad de Pinar del Río, Cuba.