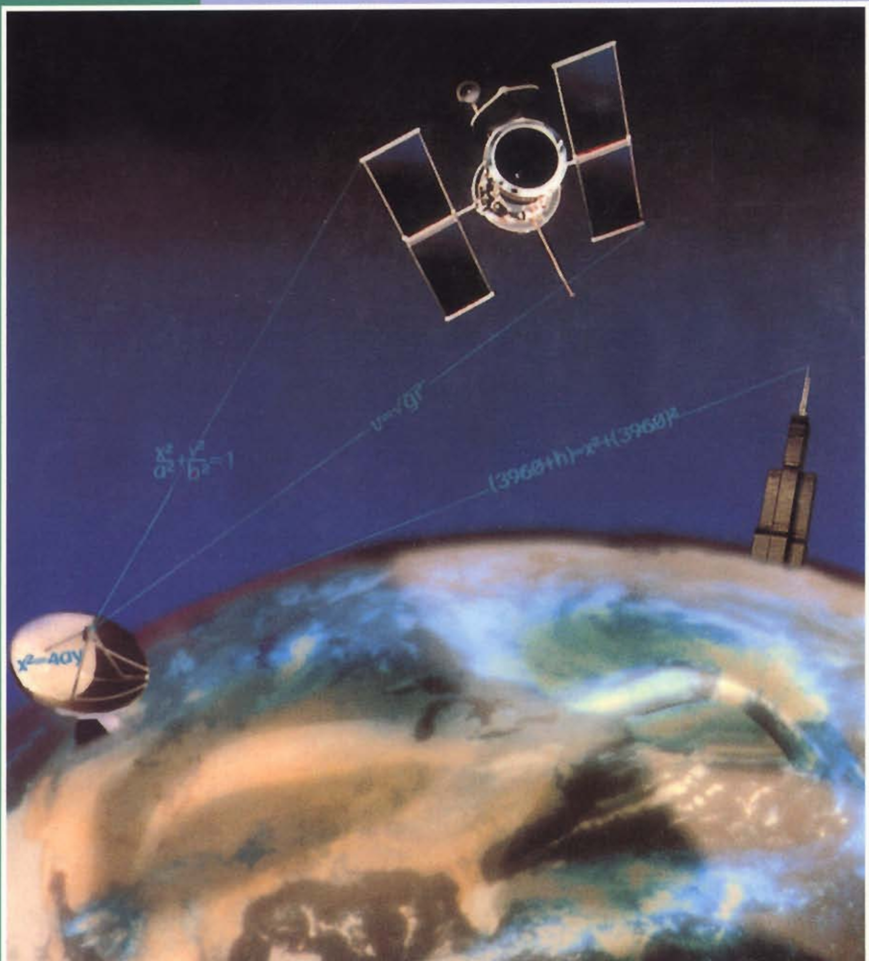
PRECALCULO

CUARTA EDICIÓN



Pearson Educación

MICHAEL SULLIVAN

Aritmética de fracciones

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0, d \neq 0$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$$

Productos especiales y Fórmulas de factorización

$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3$

$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3$

$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

Leyes de los exponentes

$a^m a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n b^n$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

Propiedades de los radicales

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n}$

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Propiedades de los logaritmos

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$\log_a M^r = r \log_a M$

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} = \frac{\ln M}{\ln a}$$

Propiedades de las desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

Números complejos

$i^2 = -1$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$\overline{a + bi} = a - bi$

Permutaciones y combinaciones

$0! = 1 \qquad 1! = 1$

$n! = n(n - 1) \cdot \cdots \cdot (3)(2)(1)$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n - r)!r!}$$

Teorema del binomio

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1}ba^{n-1} + \binom{n}{2}b^2a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{1}b^{n-1}a + b^n$$

Sucesiones aritméticas

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = na + \frac{n(n - 1)}{2}d$$

Sucesiones geométricas

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Series geométricas

$$\text{Si } |r| < 1,\ a + ar + ar^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1 - r}$$

Fórmulas y ecuaciones

Fórmulas de distancia

Si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, la distancia desde P_1 a P_2 es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ecuación de un círculo

La ecuación de un círculo de radio r con centro en (h, k) es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Pendiente de una recta

La pendiente m de la recta que contiene los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

$$m \text{ es indefinida} \qquad \text{si } x_1 = x_2$$

Ecuación punto-pendiente de una recta

La ecuación de una recta con pendiente m que contiene al punto (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación de una recta pendiente-intersección

La ecuación de una recta con pendiente m e intersección- y b es

$$y = mx + b$$

Fórmula cuadrática

Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones reales y diferentes.
Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución real repetida.
Si $b^2 - 4ac < 0$, hay dos soluciones complejas.

Funciones

Función constante $\quad f(x) = b$

Función lineal $\quad f(x) = mx + b$, $\quad m$ es la pendiente, b es la intersección-y

Función cuadrática $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$

Función polinomial $\quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Función racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Función exponencial $\quad f(x) = a^x$, $\quad a > 0, a \neq 1$

Función logarítmica $\quad f(x) = \log_a x$, $\quad a > 0, a \neq 1$

Precálculo

Cuarta Edición

Michael Sullivan
Chicago State University

TRADUCCIÓN:

Victor Hugo Ibarra Mercado
Lic. en Física y Matemáticas
ESFM-IPN

Oscar Alfredo Palmas Velasco
Facultad de Ciencias, UNAM

REVISIÓN TÉCNICA:

Carlos Hernández Garciadiego
Doctor en Matemáticas
Instituto de Matemáticas

Prentice Hall · Pearson Educación · Addison Wesley

MÉXICO • ARGENTINA • BRASIL • COLOMBIA • COSTA RICA • CHILE
ESPAÑA • GUATEMALA • PERÚ • PUERTO RICO • VENEZUELA

EDICIÓN EN ESPAÑOL

SUPERVISOR DE TRADUCCIÓN: JOSÉ LUIS NUÑES HERREJÓN
SUPERVISOR DE PRODUCCIÓN: BENITO ZEPEDA

EDICIÓN EN INGLÉS

Editor in Chief: Jerome Grant
Acquisitions Editor: Sally Denlow
Editor-in Chief of Development: Ray Mullaney
Development Editor: Charles Fenn
Director of Production and Manufacturing: David W. Riccardi
Production Editor: Robert C. Walters
Marketing Manager: Jolene Howard
Copy Editor: William Thomas
Interior Designer: Rosemarie Votta
Cover Designer: Rosemarie Votta
Cover Art: Riverwatch Marketing
Creative Director: Paula Maylahn
Art Director: Amy Rosen
Assistant to Art Director: Rod Hernández
Manufacturing Manager: Alan Fischer
Photo Reserarcher: Rona Tuccillo
Photo Editor: Lorinda Morris-Nantz
Supplements Editor: Audra J. Walsh
Production Assistant: Joanne Wendelken

SULLIVAN: PRECALCULO, 4a, Ed.

Traducido del inglés de la obra: **Precalculus, 4a. Ed.**

Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
Calle Cuatro No. 25-2°. Piso, Col. Fracc. Alce Blanco
53370 Naucalpan de Juárez, Edo. de México.

ISBN 968-880-964-0
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Num. 1524.

LITOGRAFICA INGRAMEX, S.A. DE C.V.
CENTENO NO. 162-1
MEXICO, D.F.
C.P. 09810

Original English Language Edition Published by Prentice-Hall, Inc. A Simon & Schuster Company.

ISBN 0-13-228594-0

IMPRESO EN MEXICO / PRINTED IN MEXICO

Para mis padres . . . gracias

Contenido

CAPÍTULO 8 APLICACIONES ADICIONALES DE LA TRIGONOMETRÍA 481

CAPÍTULO 9 GEOMETRÍA ANALÍTICA 543

CAPÍTULO 10 SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES 611

CAPÍTULO 11 SUCESIONES; INDUCCIÓN; MÉTODOS DE CONTEO; PROBABILIDAD 685

Prefacio

Al Instructor

Por mi experiencia como profesor en una universidad pública urbana durante más de 30 años, estoy consciente de las diversas necesidades de los estudiantes. He conocido desde los que tienen pocas bases matemáticas y temen a los cursos de esta materia, hasta quienes cuentan con una buena educación en la disciplina y están muy motivados. Para algunos de sus estudiantes éste será su último curso de matemáticas, mientras otros, quizá, continuen su educación en la materia. He escrito este libro para ambos grupos. Como autor de textos sobre precálculo, cálculo para ingenieros, matemáticas finitas y cálculo para administración, y como profesor, comprendo lo que deben saber los estudiantes para tener éxito en cursos de mayor nivel, pero como padre de cuatro, también entiendo la realidad de la vida colegial.

Cambios en la cuarta edición

Los elementos que han demostrado tener éxito en las ediciones anteriores continúan en esta edición. Sin embargo, se han realizado muchos cambios, algunos obvios, otros sutiles, como resultado de comentarios y sugerencias de colegas y estudiantes que utilizaron las ediciones anteriores. Con base en esas aportaciones, que agradezco sinceramente, esta edición será un mejor instrumento de enseñanza para los profesores y una herramienta más útil en el aprendizaje de los estudiantes.

Material revisado y reorganizado *Funciones exponenciales y logarítmicas.* La primera sección sobre funciones exponenciales va seguida por secciones que se refieren a las funciones logarítmicas y sus propiedades, de modo que sea clara la conexión entre ambos tipos. Una sección nueva relativa a las ecuaciones exponenciales y logarítmicas, distingue con cuidado entre las soluciones exactas obtenidas mediante propiedades matemáticas y las soluciones aproximadas obtenidas por medio de un dispositivo de graficación.

Funciones trigonométricas. Este capítulo ha sido mejorado con nuevos ejemplos y ejercicios en los que se plantea problemas comunes del cálculo.

Gráficas de las funciones trigonométricas. Este capítulo fue reorganizado y ampliado. Primero se analizan las gráficas de las funciones seno y coseno, seguidas por las gráficas senoidales, y se dedica una sección nueva a aplicaciones que tratan la vibración amortiguada y el movimiento armónico. En el resto del capítulo, se estudian las gráficas de las demás funciones trigonométricas y se hace un análisis de las funciones trigonométricas inversas.

Sistemas de desigualdades. Esta sección ha sido ampliada de manera que comprenda las desigualdades lineales y no lineales. La programación lineal aparece después de los sistemas de desigualdades, como una aplicación de las desigualdades lineales.
Inducción, sucesiones, conjuntos, conteo y probabilidad. Lo nuevo de esta edición son tres secciones relativas a los conjuntos, el conteo y la probabilidad. Este material se combina en un solo capítulo con los conceptos de sucesiones, inducción y el teorema del binomio. Dos secciones independientes, dedicadas a las sucesiones aritméticas y geométricas, forman parte de la reorganización del capítulo.

Por favor, consulte el Panorama incluido en el prefacio para el estudiante.

Uso funcional del color. En este nuevo diseño se utiliza el color con la intención de que sea más eficaz y funcional la identificación de definiciones, teoremas, fórmulas y procedimientos. En el prefacio para el estudiante, se incluye una explicación general de la forma en la que estos usos del color pueden apoyar la etapa de estudio. Se han incorporado muchas ilustraciones novedosas a fin de proporcionar cierto dinamismo en algunos ejemplos y ejercicios. Los símbolos de graficación y las figuras han sido generados por computadora para obtener consistencia y precisión. Para mayor claridad, las figuras utilizan dos colores. Con más de 1200 ilustraciones en todo el texto, mi objetivo es ayudar al estudiante a que visualice las matemáticas y demostrar que la visualización gráfica puede contribuir realmente a resolver problemas matemáticos.

Ejemplos. Además de los tradicionales y sólidos ejemplos de las ediciones anteriores, se han agregado muchos nuevos (que ahora suman más de 600) al texto. Se incrementó el uso de ejemplos de aplicaciones y tecnología para mayor motivación y realismo. Los problemas ilustrativos se resuelven adecuadamente y en detalle partiendo de los sencillos y razonables hasta llegar, de manera gradual, a los más desafiantes. Muchos ejemplos tienen relación con aplicaciones que se verán en cálculo y otras disciplinas.

Aplicaciones. Se ha aprovechado cada oportunidad propicia para la presentación de aplicaciones comprensibles y realistas, consistentes con las habilidades del estudiante, extraídas de fuentes como las tablas para cálculo de impuestos, el libro Guiness de marcas mundiales, así como artículos de periódicos. Para mayor interés, algunos de los ejercicios de aplicación son adaptaciones de libros de texto que el estudiante podría estar utilizando en otros cursos (como economía, química, física, etcétera).

Tecnología. Esta edición continúa apoyando el uso de la tecnología actual cuando resulta necesaria o útil. Sea un programa de computadora o una calculadora gráfica, estos dispositivos pueden proporcionar al estudiante nuevos formas de visualizar las matemáticas. El nuevo ***Apéndice sobre dispositivos de graficación*** ilustra algunas de las características del uso de calculadoras gráficas y de programas de computadora para graficar. Se han agregado muchos ejemplos y ejercicios nuevos en los que es necesario utilizar la graficación. Se distinguirá con el símbolo cuando se necesite o sugiera el uso de un dispositivo de graficación. Hemos puesto un cuidado especial en estos ejemplos y ejercicios: la mayor parte de ellos pide conclusiones que no se pueden obtener mediante los procesos algebraicos comunes. Esto sirve para reforzar el uso potencial de la tecnología al resolver problemas.

Comunicación y pensamiento crítico. Como en las ediciones anteriores, ilustro el papel que tienen la escritura, la verbalización, la investigación y el pensamiento crítico en las matemáticas. En esta edición he creado ejercicios con un diseño especial para animar a los estudiantes a que participen de manera activa en estas actividades. Estos ejercicios están indicados con el símbolo . Recomendaciones del National Council of Teachers of Mathematics, la American Association of Two Year Colleges y la Mathematics Association of America apoyan este tipo de ejercicios. Espero que usted los encuentre tan positivos como yo.

Trabajos en equipo. En cada capítulo se dedica una página completa al aprendizaje en grupo. Los proyectos comprenden varias tareas. Fueron escritos por Hester Lewellen, coautor del University of Chicago High School Mathematics Project, para ayudar a los estudiantes a reunirse y resolver problemas de manera objetiva. Algunos de los proyectos tienen sugerencias para el uso de dispositivos de graficación; todos requieren un análisis crítico y ser discutidos conjuntamente por los integrantes del equipo de trabajo.

Ejercicios. Los ejercicios añadidos a esta edición son principalmente de tres tipos: *visual* (en los que se pide a los estudiantes llegar a una conclusión a partir de una gráfica); *tecnológico* (ahí se necesita un dispositivo de graficación ; y *abierto* (el cual exige un desempeño mental crítico, escribir, labores de investigación o trabajo en equipo .) También se ha modificado casi la tercera parte de los ejercicios tradicionales. El texto contiene ahora más de 5500 ejercicios, de los cuales más de 900 son problemas de aplicación. Los conjuntos de ejercicios inician con problemas diseñados para dar confianza, en seguida se plantean los problemas que se relacionan con los ejemplos resueltos en el texto y al final vienen problemas más desafiantes. Muchos de los ejercicios, en particular los iniciales, tienen un carácter visual, como mostrar una gráfica y pedir las conclusiones.

Al final del libro aparecen las soluciones de los problemas impares.

Agradecimientos

Los libros de texto son escritos por un autor, claro está, pero desde que surge la idea hasta lograr la forma final se requiere el esfuerzo de muchas personas. Tengo un agradecimiento especial para Don Dellen, quien primero lo sugirió y después fue testigo de la culminación de este libro y los demás de mi serie Precálculo.

Existen muchas personas a las que deseo agradecer su información, ánimo, paciencia y apoyo que generosamente dieron para lograr concluir esta cuarta edición. Todas las que en seguida menciono contribuyeron tanto en las primeras tres ediciones como en la revisión actual. Les expreso mi más profundo agradecimiento y aprecio y espero se me disculpe cualquier involuntaria omisión . . .

James Africh, Brother Rice High School
Steve Agronsky, Cal Poly State University
Joby Milo Anthony, University of Central Florida
James E. Arnold, University of Wisconsin, Milwaukee
Agnes Azzolino, Middlesex County College
Wilson P. Banks, Illinois State University
Dale R. Bedgood, East Texas State University
William H. Beyer, University of Akron
Richelle Blair, Lakeland Community College
Trudy Bratten, Grossmont College
William J. Cable, University of Wisconsin—Stevens Point
Lois Calamia, Brookdale Community College
Roger Carlsen, Moraine Valley Community College
Denise Corbett, East Carolina University
Theodore C. Coskey, South Seattle Community College
John Davenport, East Texas State University
Duane E. Deal, Ball State University
Vivian Dennis, Eastfield College
Karen R. Dougan, University of Florida
Louise Dyson, Clark College
Paul D. East, Lexington Community College
Don Edmondson, University of Texas, Austin
Christopher Ennis, University of Minnesota
Garret J. Etgen, University of Houston
W. A. Ferguson, University of Illinois, Urbana/Champaign
Iris B. Fetts, Clemson University
Mason Flake, estudiante de Edison Community College
Merle Friel, Humboldt State University
Richard A. Fritz, Moraine Valley Community College
Dewey Furness, Ricke College
Wayne Gibson, Rancho Santiago College
Joan Goliday, Santa Fe Community College
Frederic Gooding, Goucher College
Ken Gurganus, University of North Carolina
James E. Hall, University of Wisconsin, Madison
Judy Hall, West Virginia University
Edward R. Hancock, DeVry Institute of Technology
Brother Herron, Brother Rice High School
Kim Hughes, California State College, San Bernardino
Ron Jamison, Brigham Young University
Richard A. Jensen, Manatee Community College
Sandra G. Johnson, St. Cloud State University
Moana H. Karsteter, Tallahassee Community College
Arthur Kaufman, College of Staten Island
Thomas Kearns, North Kentucky University
Keith Kuchar, Manatee Community College
Tor Kwembe, Chicago State University
Linda J. Kyle, Tarrant County Jr. College
H. E. Lacey, Texas A & M University
Christopher Lattin, Oakton Community College
Adele LeGere, Oakton Community College

Stanley Lukawecki, Clemson University
Virginia McCarthy, Iowa State University
James McCollow, DeVry Institute of Technology
Laurence Maher, North Texas State University
James Maxwell, Oklahoma State University, Stillwater
Carolyn Meitler, Concordia University
Eldon Miller, University of Mississippi
James Miller, West Virginia University
Michael Miller, Iowa State University
Jane Murphy, Middlesex Community College
James Nymann, University of Texas, El Paso
Sharon O'Donnell, Chicago State University
Seth F. Oppenheimer, Mississippi State University
E. James Peake, Iowa State University
Thomas Radin, San Joaquin Delta College
Ken A. Rager, Metropolitan State College
Elsi Reinhardt, Truckee Meadows Community College
Jane Ringwald, Iowa State University
Stephen Rodi, Austin Community College
Howard L. Rolf, Baylor University
Edward Rozema, University of Tennessee at Chattanooga
Dennis C. Runde, Manatee Community College
John Sanders, Chicago State University
Susan Sandmeyer, Jamestown Community College
A.K. Shamma, University of West Florida
Martin Sherry, Lower Columbia College
Timothy Sipka, Alma College
John Spellman, Southwest Texas State University
Becky Stamper, Western Kentucky University
Neil Stephens, Hinsdale South High School
Tommy Thompson, Brookhaven College
Richard J. Tondra, Iowa State University
Marvel Townsend, University of Florida
Jim Trudnowski, Carroll College
Richard G. Vinson, University of Southern Alabama
Darlene Whitkenack, Northern Illinois University
Chris Wilson, West Virginia University
Carlton Woods, Auburn University
George Zazi, Chicago State University

Hago un reconocimiento particular a las siguientes personas para agradecerles sinceramente su valiosa ayuda en la preparación de este volumen: Jerome Grant, por su apoyo y compromiso; Sally Denlow, por su auténtico interés y eficiente dirección; Bob Walters por su habilidad organizativa como supervisor de producción; Jolene Howard por sus innovadores esfuerzos de comercialización; Ray Mullaney por sus comentarios editoriales específicos; Charles Fenn por sus útiles sugerencias durante la revisión; a todo el equipo de ventas de Prentice Hall por su confianza; y a Katy Murphy y Michael Sullivan III por verificar las respuestas a todos los ejercicios. Un agradecimiento especial a Michael Sullivan III por realizar todas las figuras de las gráficas.

Michael Sullivan

Prefacio

Al estudiante

Al iniciar el estudio del precálculo, es probable que usted se sienta abrumado por la cantidad de teoremas, procedimientos y ecuaciones que supone que enfrentará. Incluso podría preguntarse si será capaz de aprender todo ese material en un único curso. Para la mayoría de las personas en el nivel de estudio similar al suyo, este podría ser su último curso de matemáticas, mientras que para otros sólo el primero de una larga serie. No se preocupe, de cualquier forma este libro fue escrito, pensando en usted. Aunque he escrito libros de matemáticas para niveles superiores, también soy padre de cuatro estudiantes que muchas veces han regresado a casa con frustración y preguntas; así que *¡sé por lo que usted está pasando!*

Este libro fue diseñado para ayudarlo a dominar la terminología y los conceptos básicos del precálculo. Tales objetivos han sido básicos para conformar todos y cada uno de los aspectos del libro. El formato del texto incorpora muchos apoyos para el aprendizaje, facilitando el estudio de la materia y haciéndolo más gratificante. Imagine que tiene en sus manos una "máquina para el aprendizaje", que le ayudará a concentrar sus esfuerzos y obtener lo más posible del tiempo y energía invertidos.

He aquí algunas de las sugerencias que doy a mis estudiantes al inicio del curso.

1. Aproveche la característica PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO. Al empezar cada capítulo he preparado una lista de conceptos de repaso. Dedíqueles el tiempo necesario; le ayudarán a avanzar más rápido y con mayor confianza.
2. Lea el material antes de tomar la clase. Si sabe qué esperar y lo que contiene el libro, escribirá menos notas y ocupará más tiempo en escuchar y comprender la exposición de su profesor.
3. Después de cada clase, reescriba sus notas mientras vuelve a leer el tema tratado, remarcando los conceptos adicionales que parezcan útiles. Asegúrese de trabajar siempre la parte titulada. Ahora resuelva el problema x, al avanzar en cada sección. Después de concluir una sección tiene que resolver los problemas asignados. Las respuestas a los problemas impares están en la parte final del libro.
4. Si algo le confunde es aconsejable que consulte de inmediato, pero en horas hábiles, a su profesor antes de atrasarse. En tal caso lleve sus tentativas de solución a los ejercicios con usted, para que el profesor ubique con claridad sus puntos problemáticos.
5. Al prepararse para un examen repase sus notas y consulte el Repaso del capítulo. Este contiene un resumen de todo lo importante del capítulo. Si no está seguro de algún concepto estúdielo de nuevo. Asegúrese de resolver los Ejercicios de repaso como práctica.

Recuerde las dos "reglas de oro" del precálculo:

1. ¡NO SE ATRASE! El curso es muy rápido y recuperarse resulta difícil.
2. RESUELVA MUCHOS PROBLEMAS. Todo necesita práctica y los problemas le descubrirán los puntos en los que necesite aplicarse más. Si no puede resolver los ejercicios de tarea sin ayuda, no logrará resolverlos en los exámenes.

Le recomiendo que examine el siguiente panorama, que contiene algunos consejos acerca de cómo utilizar este libro.

¡Le deseo lo mejor!

Michael Sullivan

PANORAMA

Capítulo 2

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de comenzar este capítulo, repase los siguientes conceptos:

Dominio de una variable (p. 3).

Gráficas de ciertas ecuaciones (ejemplo 5, p. 58; ejemplo 6, p. 60; ejemplo 7, p. 61; ejemplo 8, p. 62).

Criterios para la simetría de una ecuación (p. 59).

Pasos para plantear problemas de aplicación (pp. 24-25).

Panorama Para ir de una isla a una poblado

Una isla se encuentra a 2 millas del punto más cercano P de una costa recta. Un poblado está a 12 millas de dicha costa desde el punto P.

(a) *Si una persona puede remar en un bote a una velocidad promedio de 5 millas por hora, y luego caminar a 2 millas por hora, exprese el tiempo T que tarda en ir de la isla al poblado como una función de la distancia x de P hasta donde la persona deja anclado el bote.*

(b) *¿Cuánto tiempo tardará dicha persona en ir de la isla al poblado si deja anclado el bote a 4 millas de P?*

(c) *¿Y si deja anclado el bote a 8 millas de P? [Ejemplo 9 de la sección 2.1.]*

(d) *¿Existe un lugar para dejar el bote de modo que el tiempo de recorrido sea mínimo? ¿Piensa usted que este lugar es más cercano al poblado o a P? Analice las posibilidades y justifique su respuesta. [Problemas 63 y 64 en el ejercicio 2.1.]* ■

FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Antes de cada capítulo, a partir del segundo, viene una lista de conceptos vistos en los capítulos precedentes que usted debe comprender perfectamente antes de pasar al siguiente capítulo. Al revisar esa lista y asegurarse de manejar con comodidad el material que cubre, comenzará a observar que el aprendizaje del álgebra es un proceso de construcción. ¡El acto de repasar le asegura la colocación de bases firmes!

Cada capítulo empieza con una fotografía y una aplicación que muestra al álgebra utilizada en nuestro entorno. La fotografía va acompañada por un problema matemático que usted aprenderá a resolver en el capítulo. Esto le permitirá comprender el tipo de aspectos que serán cubiertos, así como la forma en que pueden ser utilizados en el "mundo real".

También, en la primera página de cada capítulo aparece un esquema de los temas tratados dentro de él, lo cual es una buena forma de organizar sus notas para el estudio.

La mayor parte de los capítulos comienza con un análisis histórico breve, titulado "De dónde procede este material". Es importante comprender la forma en que otras personas crearon y utilizaron las ideas planteadas en cada capítulo para resolver sus problemas cotidianos.

Los términos nuevos aparecen en negritas en el punto en el que son definidos.

Las definiciones principales vienen en un tipo de letra mayor, encerrados en una pantalla de color. Estos son elementos importantes del vocabulario que usted debe conocer.

Es posible que la idea central en matemáticas sea el concepto de *función*. Este importante capítulo trata de lo que es una función, de cómo hacer la gráfica de funciones y la manera de utilizarlas en aplicaciones.

Al parecer, la palabra *función* fue introducida por René Descartes en 1637. Para él, una función significaba tan sólo cualquier potencia entera positiva de una variable x. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), quien siempre enfatizó el lado geométrico de las matemáticas, utilizó la palabra función para denotar cualquier cantidad asociada con una curva, tal como las coordenadas de un punto sobre la curva. Leonhard Euler (1707-1783), identificaba cualquier ecuación o fórmula que contuviera variables y constantes con la palabra función; esta idea es similar a la utilizada ahora con frecuencia en los cursos que preceden al de cálculo. Posteriormente, el uso de funciones en el estudio de las ecuaciones sobre el flujo de calor condujo a una definición muy amplia, debida a Lejeune Dirichlet (1805-1859), la cual describe a una función como una regla de correspondencia entre dos conjuntos. Ésta es la definición que utilizaremos aquí.

2.1 **Funciones**

En muchas aplicaciones, con frecuencia existe cierta correspondencia entre dos conjuntos de números. Por ejemplo, la ganancia R que resulta de la venta de x artículos vendidos a \$10.00 cada uno, es $R = 10x$. Si conocemos el número de artículos vendidos, entonces podemos calcular la ganancia por medio de la regla $R = 10x$. Esta regla es un ejemplo de *función*.

Otro ejemplo, si un objeto es lanzado desde una altura de 64 pies sobre el suelo, la distancia s (en pies) del objeto hasta el suelo después de t segundos está dada (aproximadamente) por la fórmula $s = 64 - 16t^2$. Cuando $t = 0$ segundos, el objeto está a 64 pies sobre el suelo y luego de 1 segundo está a $s = 64 - 16(1)^2 = 48$ pies sobre el suelo. Después de 2 segundos el objeto golpea el suelo. La fórmula $s = 64 - 16t^2$ proporciona una forma para determinar la distancia s cuando el tiempo t $(0 \leq t \leq 2)$ es conocido. Existe una correspondencia entre cada tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ y la distancia s. Decimos que la distancia s está en función del tiempo t ya que:

1. Existe una correspondencia entre el conjunto de tiempos y el de distancias.
2. Existe exactamente una distancia s obtenida para cada tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq 2$.

Veamos ahora la definición de función.

Definición de función

Función

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales.* Una **función** de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. El conjunto X es el **dominio** de la función. Para cada elemento x en X, el elemento correspondiente y en Y es el **valor** de la función en x, o la **imagen** de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el **rango** de la función.

FIGURA 1

Observe la figura 1. Como algunos elementos en Y podrían no ser la imagen de algún elemento x en X, el rango de una función podría ser un subconjunto de Y.

La regla (o correspondencia) mencionada en la definición de función se proporciona con mayor frecuencia como una ecuación con dos variables, denotadas por lo general con x y y.

*Los dos documentos X y Y también pueden ser conjuntos de números complejos, y entonces tendríamos definida una función compleja. En la definición amplia (debida a Lejeune Dirichlet), X y Y pueden ser dos conjuntos cualesquiera.

96

Las Características históricas ubican a las matemáticas que usted va aprendiendo en su contexto histórico. Al conocer la forma en que otras personas han utilizado conceptos similares, podrá comprender mejor el cómo aplicarlos en su propio entorno. En algunos casos vienen ejercicios históricos adicionales para que los resuelva según su propio criterio.

Sección 4.1 Funciones exponenciales 263

Teorema

Función exponencial

Una **función exponencial** es una función de la forma

donde a es un número real positivo y distinto de 1. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

Gráficas de funciones exponenciales

EJEMPLO 2

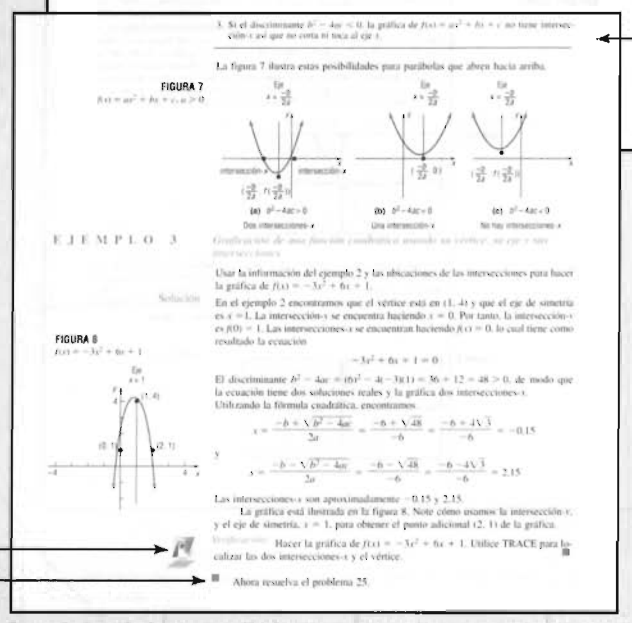


FIGURA 7

EJEMPLO 3

FIGURA 8

Ahora resuelva el problema 25.

Los teoremas se indican mediante la palabra "Teorema" en azul y es importante estudiarlos. Cuando se proporciona la demostración de un teorema también aparece la palabra "Demostración".

Todas las fórmulas y conceptos importantes están encerradas en un recuadro de color.

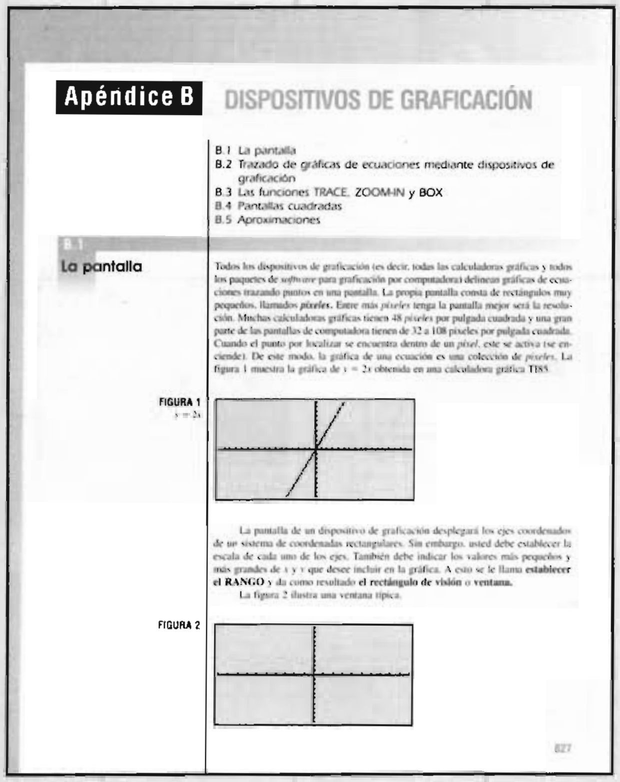
Los ejemplos son fáciles de localizar y tienen un título para que usted sepa de lo que tratan. Aunque la solución se desarrolla en forma completa debe seguirla con papel y lápiz. Si tiene problemas con un ejercicio de tarea es probable que encuentre un ejemplo que haya sido resuelto al exponer la teoría del capítulo. Muchas soluciones traen una Verificación. Siempre que sea posible, compruebe las soluciones.

La indicación "Ahora resuelva el problema" le pide resolver un problema particular antes de continuar con la sección. Esto garantizará que usted ha logrado dominar el material recién presentado. La práctica constante de resolver estos ejercicios le hará ganar confianza y ahorrará tiempo.

Los títulos de los procedimientos y pasos importantes aparecen a la izquierda del texto y en éste, entre dos líneas horizontales de color, los conceptos de que se trate. Usted deberá conocer y dominar estos procedimientos y pasos para que logre resolver los problemas de tarea sin dificultad. También le será fácil ubicarlos al prepararse para los exámenes.

Las sugerencias y advertencias aparecen oportunamente en los espacios adecuados para señalar cuando sea posible abreviar un procedimiento, o poner aviso acerca de errores comunes que los estudiantes deben conocer.

El símbolo de calculadora gráfica lo encontrará en todo el libro siempre que sea necesario hacer uso de ella o de un programa de computadora para graficar.



Apéndice B DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN

B.1 La pantalla
B.2 Trazado de gráficas de ecuaciones mediante dispositivos de graficación
B.3 Las funciones TRACE, ZOOM-IN y BOX
B.4 Pantallas cuadradas
B.5 Aproximaciones

B.1
La pantalla

Todos los dispositivos de graficación (es decir, todas las calculadoras gráficas y todos los paquetes de *software* para graficación por computadora) delinean gráficas de ecuaciones trazando puntos en una pantalla. La propia pantalla consta de rectángulos muy pequeños, llamados ***pixeles***. Entre más *pixeles* tenga la pantalla mejor será la resolución. Muchas calculadoras gráficas tienen 48 *pixeles* por pulgada cuadrada y una gran parte de las pantallas de computadora tienen de 32 a 108 pixeles por pulgada cuadrada. Cuando el punto por localizar se encuentra dentro de un *pixel*, este se activa (se enciende). De este modo, la gráfica de una ecuación es una colección de *pixeles*. La figura 1 muestra la gráfica de $y = 2x$ obtenida en una calculadora gráfica TI85.

FIGURA 1
$y = 2x$

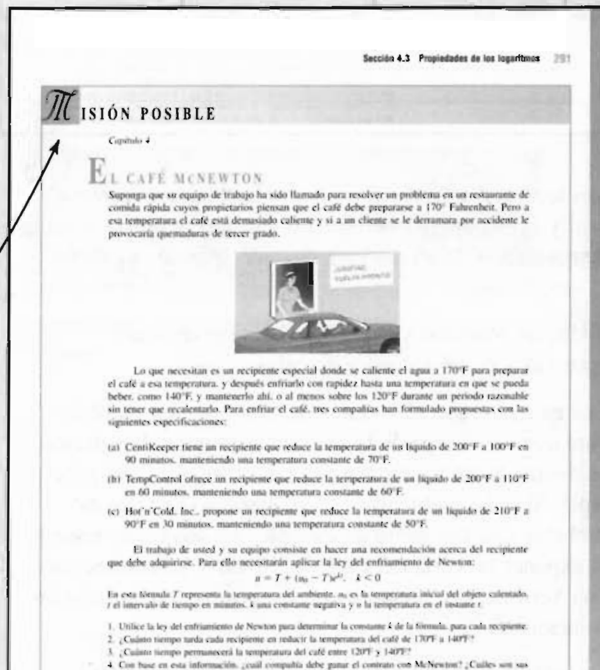
La pantalla de un dispositivo de graficación desplegará los ejes coordenados de un sistema de coordenadas rectangulares. Sin embargo, usted debe establecer la escala de cada uno de los ejes. También debe indicar los valores más pequeños y más grandes de x y y que desee incluir en la gráfica. A esto se le llama **establecer el RANGO** y da como resultado **el rectángulo de visión** o **ventana**.

La figura 2 ilustra una ventana típica.

FIGURA 2

Muchos estudiantes disponen de una calculadora gráfica o tienen acceso a programas de computadora que realizan graficación. Para ayudarle a conocer el manejo y capacidad de tales dispositivos he incluido el Apéndice B, al final del libro, bajo el título "Dispositivos de graficación". Muchos ejemplos y ejercicios del libro requieren el uso de un graficador. Tales problemas han sido elegidos con cuidado pero la mayor parte pide conclusiones que no pueden obtenerse mediante los procesos comunes del álgebra. Esto le ayudará a observar el poder de la tecnología actual para resolver muchos problemas matemáticos.

Misión posible: En el "mundo real", quienes nos rodean colaboran con frecuencia para resolver problemas difíciles o que pueden tener más de una respuesta. Todos los capítulos de este libro incluyen una "Misión posible" para que usted y sus compañeros colaboren en su resolución. Esos proyectos le piden que comunique en forma verbal o escrita sus respuestas. Una buena capacidad de comunicación es importante para tener éxito en cualquier campo que usted se desempeñe en el futuro.



Sección 4.3 Propiedades de los logaritmos

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 4

EL CAFÉ MCNEWTON

Suponga que su equipo de trabajo ha sido llamado para resolver un problema en un restaurante de comida rápida cuyos propietarios piensan que el café debe prepararse a 170° Fahrenheit. Pero a esa temperatura el café está demasiado caliente y si a un cliente se le derramara por accidente le provocaría quemaduras de tercer grado.

Lo que necesitan es un recipiente especial donde se caliente el agua a 170°F para preparar el café a esa temperatura, y después enfriarlo con rapidez hasta una temperatura en que se pueda beber, como 140°F, y mantenerlo ahí, o al menos sobre los 120°F durante un periodo razonable sin tener que recalentarlo. Para enfriar el café, tres compañías han formulado propuestas con las siguientes especificaciones:

(a) CentiKeeper tiene un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 100°F en 90 minutos, manteniendo una temperatura constante de 70°F.
(b) TempControl ofrece un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 110°F en 60 minutos, manteniendo una temperatura constante de 60°F.
(c) Hot'n'Cold, Inc., propone un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 210°F a 90°F en 30 minutos, manteniendo una temperatura constante de 50°F.

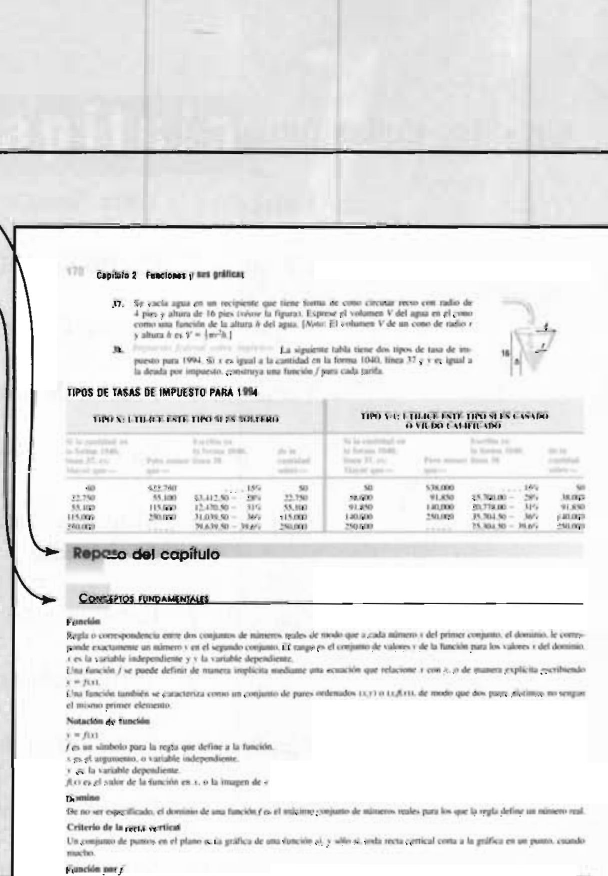
El trabajo de usted y su equipo consiste en hacer una recomendación acerca del recipiente que debe adquirirse. Para ello necesitarán aplicar la ley del enfriamiento de Newton:

$$u = T + (u_0 - T)e^{kt}, \quad k < 0$$

En esta fórmula T representa la temperatura del ambiente, u_0 es la temperatura inicial del objeto calentado, t el intervalo de tiempo en minutos, k una constante negativa y u la temperatura en el instante t.

1. Utilice la ley del enfriamiento de Newton para determinar la constante k de la fórmula, para cada recipiente.
2. ¿Cuánto tiempo tarda cada recipiente en reducir la temperatura del café de 170°F a 140°F?
3. ¿Cuánto tiempo permanecerá la temperatura del café entre 120°F y 140°F?
4. Con base en esta información, ¿cuál compañía debe ganar el contrato con McNewton? ¿Cuáles son sus razones?
5. ¿Qué son el "costo de capital" y el "costo de operación"? ¿Cómo podrían afectar su elección?

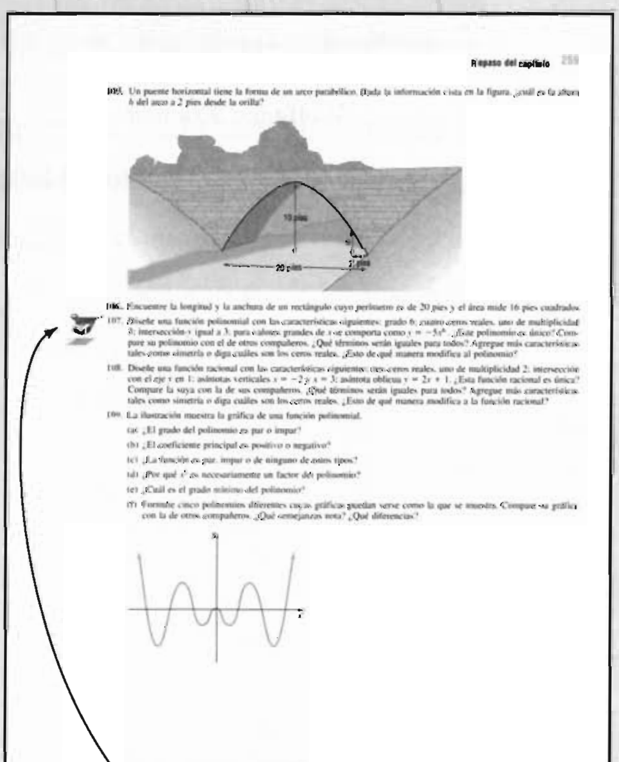
El Repaso del capítulo le servirá para verificar su comprensión de lo esencial de la teoría estudiada. "Conceptos fundamentales" es el mejor lugar para comenzar. Verifique sus habilidades de manejo de los conceptos ahí enumerados. Después demuéstrese a sí mismo que sabe cómo resolver incluso en detalle el contenido de la sección. "Complete los espacios" determinará su habilidad con el vocabulario. "Cierto o falso" comprueba su conocimiento de las definiciones. Si no está seguro de algún concepto vuelva al capítulo y estúdielo de nuevo. No deje de resolver los Ejercicios de repaso como práctica; hacerlo sirve para asegurar el éxito en este curso; haga buen uso de ellos.



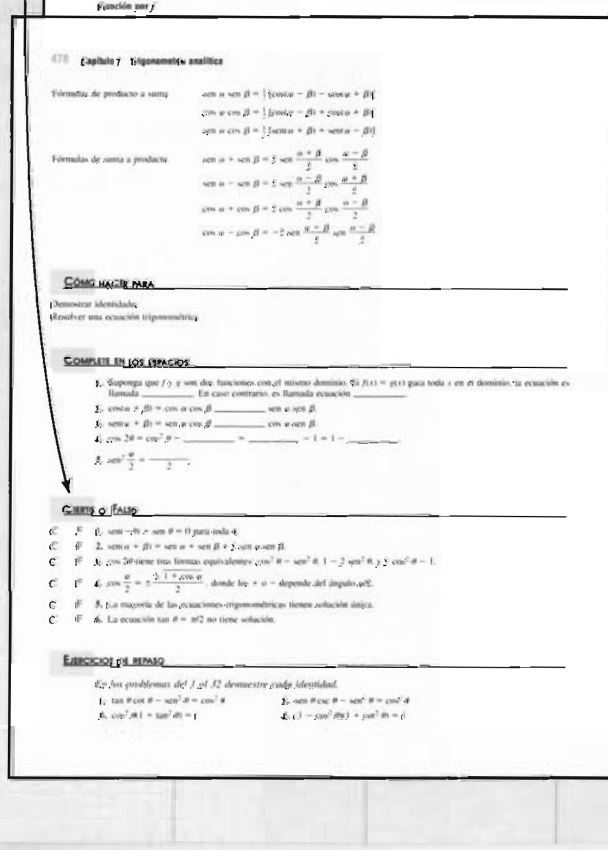
TIPOS DE TASAS DE IMPUESTO PARA 1994

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES



Repaso del capítulo



CÓMO HACER PARA

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

CIERTO O FALSO

EJERCICIOS DE REPASO

El símbolo de lápiz y cuaderno indica preguntas abiertas que requieren cierto análisis, escritura, investigación o trabajo en equipo.

Créditos de las fotografías

Capítulo 1	Torre Sears	Four by Five/Superstock
Capítulo 2	Puerto de Soller	Pedro Coll/The Stock Market
Capítulo 3	Puente Golden Gate	Deborah Davis/PhotoEdit
Capítulo 4	Prueba de sobriedad	Bachmann/Photrl
Capítulo 5	Faro de Gibbs Hill	Marvullo/The Stock Market
Capítulo 6	Montaña Cadillac, Parque Nacional de Arcadia	Larry Ulrich/Tony Stone Images
Capítulo 7	Lanzamiento de bala	Focus on Sports
Capítulo 8	Torre inclinada de Pisa	Sarah Stone/Tony Stone Images
Capítulo 9	Estación de satélite	Four by Five/Superstock
Capítulo 10	Carrera de pista	David Madison Photography
Capítulo 11	Vitral Wolfgang Koohler	Wolfgang Koohler
Capítulo 12	Avión empresarial	Joe Towers/The Stock Market

Capítulo 1

PRELIMINARES

Panorama ¿Qué tan lejos puede ver?

El edificio habitado más alto en Estados Unidos es la Torre Sears de Chicago. Si el mirador de la torre se encuentra a 1454 pies sobre el nivel del piso, ¿qué tan lejos puede ver una persona que se encuentre en él? [Problema 101 en el ejercicio 1.1.]* ■

**Fuente: Libro Guinness de marcas mundiales.*

La investigación sobre ecuaciones y sus soluciones han jugado un papel central en el álgebra durante cientos de años. De hecho, en el año 200 a.C., los babilonios tenían un álgebra tan desarrollada que incluía una solución para las ecuaciones cuadráticas. Más tarde, el estudio de las desigualdades (sección 1.4) fue igualmente importante. La idea de utilizar un sistema de coordenadas rectangulares también se remonta a la época mencionada, cuando tales sistemas eran utilizados para la medición y planeación de la traza de las ciudades. El uso esporádico de las coordenadas rectangulares continuó hasta el siglo XVII; en ese tiempo el álgebra estaba suficientemente desarrollada, de manera que a René Descartes (1596-1650) y Pierre Fermat (1601-1665) les fue posible dar el paso crucial de utilizar coordenadas rectangulares para traducir problemas de geometría en problemas algebraicos y viceversa. Este paso permitió tanto a geómetras como a algebristas concebir nuevas ideas acerca de sus objetos de estudio y con ello, hacer posible el desarrollo del cálculo.

1.1 Repaso de temas de álgebra y geometría

Conjuntos

Cuando queremos tratar con una colección de objetos de la misma especie, pero distintos entre sí, como un todo, utilizamos la idea de **conjunto**. Por ejemplo, el conjunto de *dígitos* está formado por la colección de los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Si utilizamos el símbolo D para denotar este conjunto, entonces podemos escribir

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

En esta notación, las llaves { } son utilizadas para encerrar los objetos, o **elementos**, del conjunto. Esta práctica de denotar a un conjunto es llamada **método de enumeración**. Una segunda manera de denotar a un conjunto es utilizando la **notación de construcción de conjuntos**, donde el conjunto D que nos ocupa sería escrito como

$$D = \{\quad x \quad | \; x \text{ es un dígito}\}$$

Se lee como "D es el conjunto de todas las x tales que x es un dígito".

EJEMPLO 1 *Uso de la notación de construcción de conjuntos y del método de enumeración*

(a) $E = \{x | x \text{ es un dígito par}\} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

(b) $O = \{x | x \text{ es un dígito impar}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ■

En el listado de los elementos de un conjunto no se debe repetir ningún elemento ya que se supone que todos son distintos. También, el orden en el que los elementos se enlisten no tiene importancia. Así, por ejemplo, $\{2, 3\}$ y $\{3, 2\}$ representan al mismo conjunto.

Si cada elemento de un conjunto A es también un elemento de un conjunto B, entonces decimos que A es un **subconjunto** de B. Si dos conjuntos A y B tienen los mismos elementos, decimos que A **es igual a** B. Por ejemplo, $\{1, 2, 3\}$ es un subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$; y $\{1, 2, 3\}$ es igual a $\{2, 3, 1\}$.

Números reales

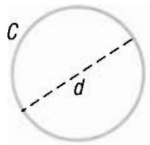
Los **números reales** se representan por símbolos como

$$25, \quad 0, \quad -3, \quad \tfrac{1}{2}, \quad -\tfrac{5}{4}, \quad 0.125, \quad \sqrt{2}, \quad \pi, \quad \sqrt[3]{-2}, \quad 0.666\ldots$$

El conjunto de **números naturales** es el conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. (Los tres puntos constituyen una forma gramatical llamada **elipsis**, la cual indica que el patrón mostrado continúa de manera indefinida.) El conjunto de los números **enteros** es el $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Un **número racional** es un número que puede ser expresado como un cociente a/b de dos enteros, donde el entero b no puede ser 0. Ejemplos de números racionales son $\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{0}{4}$, y $-\frac{2}{3}$, Ya que $a/1 = a$ para todo entero a,

FIGURA 1

$\pi = \dfrac{C}{d}$



todo entero también es un número racional. Los números reales que no son racionales se llaman **irracionales**. Ejemplos de números irracionales son $\sqrt{2}$ y π (la letra griega pi), que es igual a la razón constante de la circunferencia al diámetro de un círculo. *Véase* la figura 1.

Los números reales pueden ser representados como **decimales**. Los números reales racionales tienen representaciones decimales que **terminan** o que tienen un grupo de dígitos que se **repite**. Por ejemplo, $\frac{3}{4} = 0.75$, termina; $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$, donde el dígito 6 se repite indefinidamente. Los números reales irracionales tienen representaciones decimales que no se repiten ni terminan. Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$ y $\pi = 3.14159\ldots$. En la práctica, los números irracionales generalmente son representados por aproximaciones. Utilizamos el símbolo $\approx$ (se lee "aproximadamente igual a") para escribir $\sqrt{2} \approx 1.4142$ y $\pi \approx 3.1416$.

A menudo se utilizan letras para representar números. Si la letra es utilizada para representar a *cualquier* número de un conjunto, se hará referencia a ella como una **variable.** Una **constante** es un número fijo, tal como 5, $\sqrt{2}$, etc., o una letra que represente un número fijo (tal vez no especificado). En general, se sigue la práctica de utilizar las primeras letras del abecedario, tales como a, b, c, para representar constantes y las últimas, x, y y z para las variables.

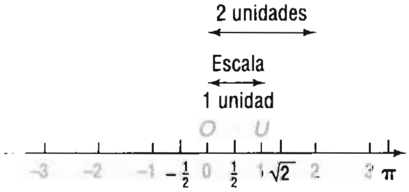
Al trabajar con expresiones o fórmulas que involucran variables, estas sólo pueden tomar valores de cierto conjunto de números, llamado **dominio de la variable.** Por ejemplo, en la expresión $1/x$, la variable x no puede tomar el valor de 0, ya que la división entre cero no puede hacerse.

Es posible demostrar que existe una correspondencia uno a uno entre los números reales y los puntos de una recta. Esto es, cada número real corresponde a un punto en la recta y, a la inversa, cada punto en la recta tiene un único número real asociado. Establecemos esta correspondencia de números reales con puntos en una recta de la siguiente forma.

Empezamos con una recta que por conveniencia es dibujada de manera horizontal. Seleccionamos un punto en la recta y lo marcamos con O, por **origen**. Luego seleccionamos otro punto a una distancia fija a la derecha de O y lo marcamos con U, por **unidad**. La distancia fija, que puede ser una pulgada, un centímetro, un año luz, o cualquier distancia unitaria, determina la **escala**. Asociamos el número real 0 con el origen O y el número 1 con el punto U. *Véase* la figura 2. El punto a la derecha de U que está dos veces tan lejano de O como U, se asocia con el número 2. El punto a la derecha de U que está tres veces tan lejano de O como U, se asocia con el número 3. El punto a la mitad entre O y U está señalado con el número 0.5 o $\frac{1}{2}$. Los puntos correspondientes a los anteriores y que están situados a la izquierda del origen O están marcados con los números $-\frac{1}{2}$, -1, -2, -3, y así sucesivamente. El número real x asociado con un punto P es llamado **coordenada** de P, y la recta a cuyos puntos se les ha asignado coordenadas es denominada **recta de los números reales**. Observe que en la figura 2 colocamos una punta de flecha en el extremo derecho de la recta para indicar la dirección en la cual aumentan los números asignados. La figura 2 también muestra los puntos asociados con los números irracionales $\sqrt{2}$ y π.

FIGURA 2

Recta de los números reales.



La recta de los números reales los divide en tres clases: los **números reales negativos,** son las coordenadas de puntos que se encuentran a la izquierda del origen O; el número real **cero,** es la coordenada del origen O; los **números reales positivos,** son las coordenadas de los puntos ubicados a la derecha del origen O.

Sean a y b dos números reales. Si la diferencia $a - b$ es positiva, entonces decimos que a es **mayor que** b y escribimos $a > b$. De manera alterna, si $a - b$ es positivo, también podemos decir que b es **menor que** a y escribimos $b < a$. Por tanto, $a > b$ y $b < a$ son proposiciones equivalentes.

Sobre la recta de los números reales, si $a > b$, el punto con coordenada a está a la derecha del punto con coordenada b. Por ejemplo, $0 > -1$, $\pi > 3$, y $\sqrt{2} < 2$. Además,

> $a > 0$ es equivalente a que a sea positiva
>
> $a < 0$ es equivalente a que a sea negativa

Si la diferencia $a - b$ de dos números reales es positiva o cero, esto es, si $a > b$ o $a = b$, entonces decimos que a es **mayor que o igual a** b y escribimos $a \geq b$. De manera alterna, si $a \geq b$, también podemos decir que b es **menor que o igual a** a y escribimos $b \leq a$.

Proposiciones de la forma $a < b$ o $b > a$ son denominadas **desigualdades estrictas**; proposiciones de la forma $a \leq b$ o $b \geq a$ son **desigualdades no estrictas**. Los símbolos $>$, $<$, $\geq$ y $\leq$ son llamados **signos de desigualdad**.

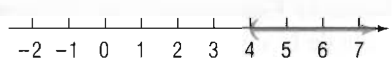
Si x es un número real y $x \geq 0$, entonces x es positivo o bien es cero. Como consecuencia, describimos la desigualdad $x \geq 0$ diciendo que x es no negativo.

Las desigualdades son útiles para representar ciertos subconjuntos de números reales. Para hacerlo pueden utilizarse otras variaciones de la notación de desigualdades.

EJEMPLO 2 *Graficación de desigualdades*

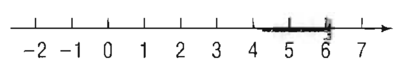
(a) En la desigualdad $x > 4$, x es cualquier número mayor que 4. En la figura 3 utilizamos un paréntesis izquierdo para indicar que el número 4 no es parte de la gráfica.

FIGURA 3
$x > 4$



(b) En la desigualdad $4 < x \leq 6$, x es cualquier número entre 4 y 6, incluso 6, pero excluyendo a 4. En la figura 4 utilizamos un corchete derecho para indicar que 6 es parte de la gráfica.

FIGURA 4
$x > 4$ y $x \leq 6$

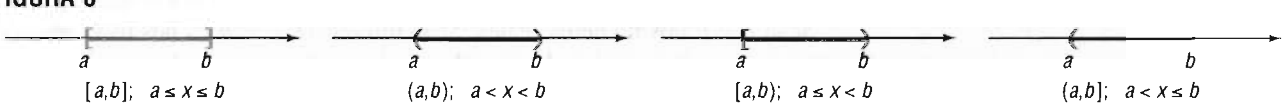


■

Ahora resuelva el problema 15 (en el conjunto de ejercicios al final de esta sección).

Sean a y b dos números reales con $a < b$: un **intervalo cerrado,** denotado por $[a, b]$, consta de todos los números reales x para los cuales $a \leq x \leq b$. Un **intervalo abierto**, denotado por (a, b), consta de todos los números reales x para los cuales $a < x < b$. Los **intervalos semiabiertos** o **semicerrados** son $(a, b]$, constituidos por todos los números reales x para los cuales $a < x \leq b$, y $[a, b)$, integrados por todos los números reales x para los cuales $a \leq x < b$. En cada una de estas definiciones a es el **extremo izquierdo** y b el **extremo derecho** del intervalo. La figura 5 ilustra cada tipo de intervalo.

FIGURA 5



(a) Intervalo cerrado **(b)** Intervalo abierto **(c)** Intervalos semiabiertos (o semicerrados)

El símbolo ∞ (se lee "infinito") no es un número real, sino una notación utilizada para indicar que no hay un límite en la dirección positiva. El símbolo $-\infty$ (se lee "menos infinito") tampoco es un número real, sino la notación utilizada para indicar que no hay un límite en la dirección negativa. Por medio de los símbolos ∞ y $-\infty$, podemos definir otras cinco clases de intervalos:

$[a, \infty)$ consiste de todos los números reales x para los cuales $a \leq x < \infty$ $(x \geq a)$

(a, ∞) consiste de todos los números reales x para los cuales $a < x < \infty$ $(x > a)$

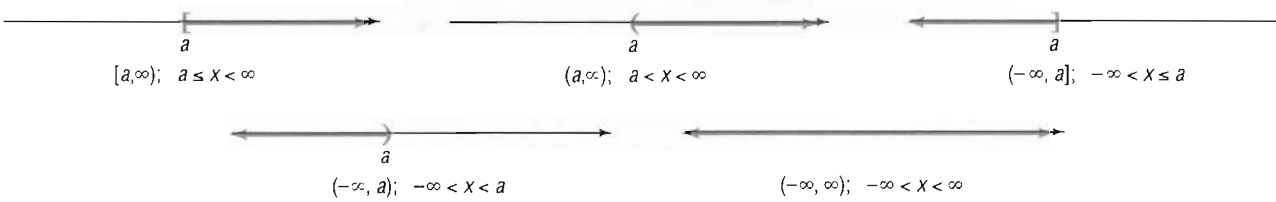
$(-\infty, a]$ consiste de todos los números reales x para los cuales $-\infty < x \leq a$ $(x \leq a)$

$(-\infty, a)$ consiste de todos los números reales x para los cuales $-\infty < x < a$ $(x < a)$

$(-\infty, \infty)$ consiste de todos los números reales x para los cuales $-\infty < x < \infty$ (todos los números reales)

La figura 6 ilustra estos tipos de intervalos.

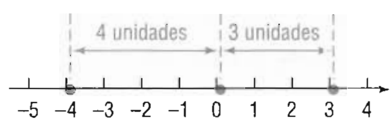
FIGURA 6



■ Ahora resuelva los problemas 21 y 25.

El *valor absoluto* de un número a es la distancia desde el punto cuya coordenada es a al origen. Por ejemplo, el punto cuya coordenada es -4 está a 4 unidades del origen. El punto cuya coordenada es 3 está a 3 unidades del origen. *Véase* la figura 7. Por tanto, el valor absoluto de -4 es 4, y el valor absoluto de 3 es 3.

FIGURA 7



Una definición más formal de valor absoluto está dada a continuación.

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real a, denotado por el símbolo $|a|$, está definido por las reglas

$$|a| = a \qquad \text{si } a \geq 0 \quad \text{y} \quad |a| = -a \qquad \text{si } a < 0$$

Por ejemplo, ya que $-4 < 0$, entonces la segunda regla debe ser utilizada para obtener $|-4| = -(-4) = 4$.

EJEMPLO 3 *Cálculo de valores absolutos*

(a) $|8| = 8$ (b) $|0| = 0$ (c) $|-15| = 15$ ■

■ Ahora resuelva el problema 29.

Vea de nuevo la figura 7. La distancia desde el punto cuya coordenada es -4 al punto cuya coordenada es 3, es 7 unidades. Esta distancia es la diferencia $3-(-4)$, obtenida restando la coordenada menor de la mayor. Sin embargo, ya que $|3-(-4)| = |7| = 7$ y $|-4-3| = |-7| = 7$, podemos utilizar el valor absoluto para calcular la distancia entre dos puntos sin preocuparnos acerca de cuál coordenada es menor.

Distancia entre P y Q

Si P y Q son dos puntos en la recta de los número reales con coordenadas a y b, respectivamente, la **distancia entre P y Q,** denotada por $d(P, Q)$, es

$$d(P, Q) = |b - a|$$

Ya que $|b-a| = |a-b|$, se sigue que $d(P, Q) = d(Q, P)$.

EJEMPLO 4 *Cálculo de la distancia en una recta numérica*

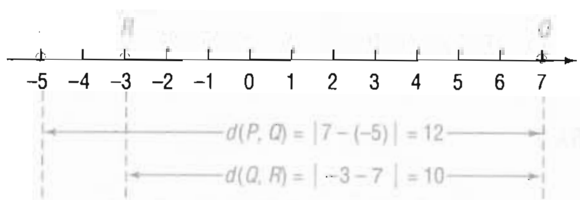
Sean P, Q y R los puntos sobre la recta de los números reales con coordenadas -5, 7, y -3, respectivamente. Encuentre la distancia:

(a) Entre P y Q (b) Entre Q y R

Solución (a) $d(P, Q) = |7-(-5)| = |12| = 12$ (*Véase* la figura 8.)

(b) $d(Q, R) = |-3-7| = |-10| = 10$

FIGURA 8



■

Exponentes

Los exponentes enteros nos proporcionan un medio abreviado para representar multiplicaciones repetidas de un número real.

Si a es un número real y n un entero positivo, entonces el símbolo $\boldsymbol{a^n}$ representa el producto de n factores de a. Esto es,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \;...\; \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

donde se entiende que $a^1 = a$. Por lo tanto, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, y así sucesivamente. En la expresión a^n, a es llamada la **base** y n es el **exponente** o **potencia.** Leemos a^n como "a elevado a la potencia n" o "a a la *enésima* potencia". Generalmente leemos a^2 como "a cuadrada" y a^3 como "a cúbica".

Se debe tener cuidado al usar paréntesis junto con exponentes. Por ejemplo, $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$, mientras que $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$. Observe la diferencia: el exponente se aplica sólo al número o expresión entre paréntesis que le precede inmediatamente.

Si $a \neq 0$, definimos

$$a^0 = 1 \qquad \text{si } a \neq 0$$

Si $a \neq 0$ y si n es un entero positivo, entonces definimos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{si } a \neq 0$$

Con estas definiciones, el significado de a^n queda establecido para cualquier número entero n.

Las propiedades siguientes, conocidas como **leyes de los exponentes**, pueden ser demostradas utilizando las definiciones anteriores. En esta lista a y b son números reales, y m y n son enteros.

Leyes de los exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \quad \text{si } a \neq 0 \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{si } b \neq 0$$

EJEMPLO 5 *Uso de las leyes de los exponentes*

Escribir cada expresión de modo que todos los exponentes sean positivos.

(a) $\dfrac{x^5 y^{-2}}{x^3 y}, \quad x \neq 0, y \neq 0$ (b) $\dfrac{xy}{x^{-1} - y^{-1}}, \quad x \neq 0, y \neq 0$

Solución

(a) $\dfrac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} = \dfrac{x^5}{x^3} \cdot \dfrac{y^{-2}}{y} = x^{5-3} \cdot y^{-2-1} = x^2 y^{-3} = x^2 \cdot \dfrac{1}{y^3} = \dfrac{x^2}{y^3}$

(b) $\dfrac{xy}{x^{-1} - y^{-1}} = \dfrac{xy}{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}} = \dfrac{xy}{\dfrac{y-x}{xy}} = \dfrac{(xy)(xy)}{y-x} = \dfrac{x^2 y^2}{y-x}$ ■

■ Ahora resuelva el problema 57.

La **enésima raíz principal de un número** a, simbolizada con $\sqrt[n]{a}$, está definida como sigue:

$\sqrt[n]{a} = b$ significa $a = b^n$ donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par y a, b son cualesquiera números reales si n es impar

Observe que si a es negativo y n par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no está definida. Cuando lo está, la raíz enésima principal de un número es única.

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ para la enésima raíz principal de a a menudo es denominado **radical**; el entero n es el **índice** y a el **radicando**. Si el índice de un radical es 2, nos referimos a $\sqrt[2]{a}$ como la **raíz cuadrada** de a y omitimos el índice 2 para escribir de manera más sencilla $\sqrt{a}$. Si el índice es 3, nos referimos a $\sqrt[3]{a}$ como la **raíz cúbica** de a.

EJEMPLO 6 *Simplificación de raíces principales enésimas*

(a) $\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $8 = 2^3$ (b) $\sqrt{64} = 8$ ya que $64 = 8^2$

(c) $\sqrt[3]{-64} = -4$ ya que $-64 = (-4)^3$ (d) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$ ya que $\frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4$

(e) $\sqrt{0} = 0$ ya que $0 = 0^2$ ■

Estos son ejemplos de **raíces perfectas**. De este modo, 8 y -64 son cubos perfectos, ya que $8 = 2^3$ y $-64 = (-4)^3$; 64 y 0 son cuadrados perfectos, ya que $64 = 8^2$ y $0 = 0^2$ y $\frac{1}{2}$ es una raíz cuarta perfecta de $\frac{1}{16}$, ya que $\frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4$.

En general, si $n \geq 2$ es un entero positivo y a un número real,

$$\sqrt[n]{a^n} = a \quad \text{si } n \text{ es impar} \tag{1a}$$
$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{si } n \text{ es par} \tag{1b}$$

Preste atención a la necesidad del valor absoluto en la ecuación (1b). Si n es par, entonces a^n es positivo siendo $a > 0$ o $a < 0$. Pero si n es par, la enésima raíz principal debe ser no negativa; he aquí la razón para utilizar el valor absoluto: obtener un resultado no negativo.

EJEMPLO 7 *Simplificación de radicales*

(a) $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
(b) $\sqrt[3]{-16} = \sqrt[3]{-8 \cdot 2} = \sqrt[3]{-8} \cdot \sqrt[3]{2} = -2\sqrt[3]{2}$
(c) $\sqrt{x^2} = |x|$ ■

■ Ahora resuelva el problema 49.

Los radicales son usados para definir **exponentes racionales**. Si a es un número real y $n \geq 2$ es un entero, entonces

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

suponiendo que $\sqrt[n]{a}$ exista.

Si a es un número real y m y n son enteros que no tienen factores comunes con $n \geq 2$, entonces

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \tag{2}$$

suponiendo que $\sqrt[n]{a}$ exista.

Para simplificar $a^{m/n}$, puede utilizarse $\sqrt[n]{a^m}$ o $(\sqrt[n]{a})^m$ Por lo general, se prefiere tomar primero la raíz, como en $(\sqrt[n]{a})^m$.

EJEMPLO 8 *Uso de la ecuación (2)*

(a) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ (b) $16^{3/2} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64$

(c) $(-8x^5)^{1/3} = \sqrt[3]{-8x^3 \cdot x^2} = \sqrt[3]{(-2x)^3 \cdot x^2} = \sqrt[3]{(-2x)^3}\sqrt[3]{x^2}$
$= -2x\sqrt[3]{x^2}$ ■

Un estudio más detallado de radicales y exponentes racionales se da en el apéndice A, sección A.2.

■ Ahora resuelva el problema 47.

Polinomios

Monomio

Un **monomio** en una variable es el producto de una constante por una variable elevada a una potencia entera no negativa. Por tanto, un monomio es de la forma

$$ax^k$$

donde a es una constante, x una variable, y $k \geq 0$ un entero.

Dos monomios ax^k y bx^k, al ser sumados, o restados pueden ser reducidos a uno solo utilizando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

$$2x^2 + 5x^2 = (2 + 5)x^2 = 7x^2 \quad \text{y} \quad 8x^3 - 5x^3 = (8 - 5)x^3 = 3x^3$$

Polinomio

Un **polinomio** en una variable es una expresión algebraica de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes,* llamadas **coeficientes** del polinomio, $n \geq 0$ es un entero y x una variable. Si $a_n \neq 0$, se le llama **coeficiente principal** del polinomio, y n es el **grado** del polinomio.

Los monomios que conforman un polinomio son llamados **términos**. Si todos los coeficientes son 0, el polinomio se llama **polinomio cero**, al cual no se le asigna grado.

* La notación a_n se lee "a subíndice n". El número n es denominado **subíndice** y no debe ser confundido con un exponente. Usamos los subíndices para distinguir una constante de otra cuando se requiere de un número grande o indeterminado de constantes.

Los polinomios por lo general se escriben en una **forma estándar**, empezando con el término distinto de cero de mayor grado y continuando en orden descendente de acuerdo al grado de cada término. Ejemplos de polinomios son

POLINOMIOS	COEFICIENTES	GRADO
$3x^2 - 5 = 3x^2 + 0 \cdot x + (-5)$	$3, 0, -5$	2
$8 - 2x + x^2 = 1 \cdot x^2 - 2x + 8$	$1, -2, 8$	2
$5x + \sqrt{2} = 5x^1 + \sqrt{2}$	$5, \sqrt{2}$	1
$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot x^0$	3	0
0	0	No se le asigna

Aunque hemos usado x para representar a la variable, también son utilizadas comúnmente letras tales como y o z. Así,

$3x^4 - x^2 + 2$ es un polinomio (en x) de grado 4.

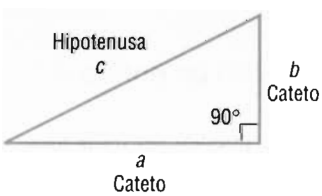
$9y^3 - 2y^2 + y - 3$ es un polinomio (en y) de grado 3.

$z^5 + \pi$ es un polinomio (en z) de grado 5.

Un estudio más detallado de polinomios se encuentra en el apéndice A, sección A.1.

Teorema de Pitágoras

FIGURA 9



El *teorema de Pitágoras* es un enunciado acerca de *triángulos rectángulos*. Un **triángulo rectángulo** es aquel que tiene un **ángulo recto**, esto es, un ángulo de 90°. El lado opuesto al ángulo de 90° es denominado **hipotenusa**; los otros dos lados son los **catetos.** En la figura 9 hemos utilizado c para representar la longitud de la hipotenusa y a y b para las longitudes de los catetos. Note el uso del símbolo ⌐ para mostrar el ángulo de 90°. A continuación establecemos el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos. Esto es, en el triángulo rectángulo de la figura 9,

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 \qquad (3)}$$

■

EJEMPLO 9

Determinación de la hipotenusa de un triángulo

En un triángulo rectángulo un cateto tiene longitud 4 y el otro tiene longitud 3. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa?

Solución

Ya que el triángulo es un triángulo rectángulo, utilizamos el teorema de Pitágoras con $a = 4$ y $b = 3$ para determinar la longitud c de la hipotenusa. Así, de la ecuación (3), tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$
$$c = 5$$

■

■ Ahora resuelva el problema 69.

El recíproco del teorema de Pitágoras también es verdadero.

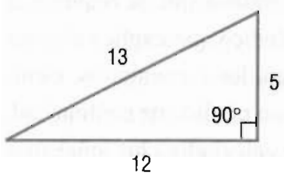
Recíproco del teorema de Pitágoras

En un triángulo, si el cuadrado de la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. El ángulo de 90° es el opuesto al lado más largo. ■

EJEMPLO 10 *Verificación de que un triángulo es un triángulo rectángulo*

Demostrar que un triángulo cuyos lados tienen longitudes de 5, 12 y 13 es un triángulo rectángulo. Identifique la hipotenusa.

FIGURA 10



Solución Elevamos al cuadrado las longitudes de los lados:

$$25, \quad 144, \quad 169$$

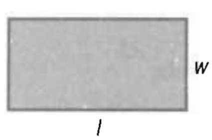
Observe que la suma de los primeros dos cuadrados (25 y 144) es igual al tercer cuadrado (169). En consecuencia, el triángulo es un triángulo rectángulo. El lado más largo, 13, es la hipotenusa. *Véase* la figura 10. ■

■ Ahora resuelva el problema 79.

Fórmulas de geometría

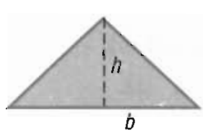
Ciertas fórmulas de geometría son útiles para la solución de problemas de álgebra. A continuación listamos algunas.

Para un rectángulo de largo l y ancho w,



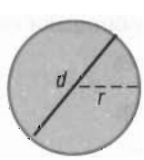
$$\text{Área} = lw \qquad \text{Perímetro} = 2l + 2w$$

Para un triángulo con base b y altura h,



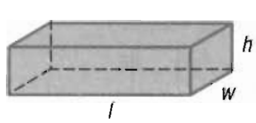
$$\text{Área} = \frac{1}{2}bh$$

Para un círculo de radio r (diámetro $d = 2r$),



$$\text{Área} = \pi r^2 \qquad \text{Circunferencia} = 2\pi r = \pi d$$

Para una caja rectangular de longitud l, anchura w y altura h,



$$\text{Volumen} = lwh$$

Calculadoras

Las calculadoras son máquinas finitas. Como consecuencia, son incapaces de desplegar decimales que tengan un número grande de dígitos. Por ejemplo, algunas calculadoras sólo pueden desplegar ocho dígitos. Cuando un número requiere más de ocho dígitos, la calculadora trunca o redondea. Para ver cómo maneja los decimales su calculadora, divida 2 entre 3. ¿Cuántos dígitos puede ver? ¿El último dígito es un 6 o un 7? Si es 6, su calculadora trunca; si es 7, redondea.

Hay diferentes clases de calculadoras. Una calculadora **aritmética** sólo puede sumar, restar, multiplicar y dividir números; por lo tanto, este tipo de calculadora no es adecuado para el presente curso. Las calculadoras **científicas** tienen todas las capacidades de las aritméticas y también tienen **teclas de función** marcadas con ln, log, sen, cos, tan, x^y, inv, etc. Conforme avance en el texto descubrirá cómo utilizar muchas de las teclas de función. Las calculadoras **gráficas** (o graficadoras) traen todas las capacidades de las calculadoras científicas y tienen una pantalla en la cual pueden desplegarse gráficas.

Para quienes tienen acceso a una calculadora gráfica hemos incluido comentarios, ejemplos y ejercicios marcados con un para indicar que se requiere el uso de una calculadora gráfica. También incluimos un apéndice que explica algunas de las capacidades de una calculadora gráfica. Si se desea, los comentarios, ejemplos y ejercicios marcados con pueden ser omitidos sin pérdida de continuidad.

Las operaciones aritméticas que deba efectuar en su calculadora las señalamos a lo largo del texto como sigue:

$\boxed{+}$ Suma $\boxed{-}$ Resta $\boxed{\times}$ Multiplicación $\boxed{\div}$ División

Su calculadora también tiene las siguientes teclas:

$\boxed{\text{AC}}$ o $\boxed{\text{C}}$ Para borrar la memoria y la ventana de despliegue de operaciones previas.

El ejemplo siguiente ilustra un uso de las teclas de paréntesis,

$$\boxed{(} \text{ y } \boxed{)}$$

EJEMPLO 11 *Uso de una calculadora*

Evaluar: $\dfrac{22 + 8}{8 + 2}$

Solución Recuerde que trataremos esta expresión como si el numerador y el denominador estuvieran entre paréntesis.

Teclear:	$\boxed{(}$	$\boxed{22}$	$\boxed{+}$	$\boxed{8}$	$\boxed{)}$	$\boxed{\div}$
Pantalla:		$\boxed{22}$		$\boxed{8}$	$\boxed{30}$	
Teclear:	$\boxed{(}$	$\boxed{8}$	$\boxed{+}$	$\boxed{2}$	$\boxed{)}$	$\boxed{=}$
Pantalla:		$\boxed{8}$		$\boxed{2}$	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$

■

¡Cuidado! Si realiza el problema del ejemplo 11 sin usar paréntesis, obtendrá $22 + 8/8 + 2 = 22 + 1 + 2 = 25$.

■ Ahora resuelva el problema 93.

1.1

Ejercicio 1.1

En los problemas del 1 al 10, reemplace el símbolo de interrogación por <, > o =, el que sea correcto.

1. $\frac{1}{2}$? 0 **2.** 5 ? 6 **3.** -1 ? -2 **4.** -3 ? $-\frac{5}{2}$ **5.** π ? 3.14

6. $\sqrt{2}$? 1.41 **7.** $\frac{1}{2}$? 0.5 **8.** $\frac{1}{3}$? 0.33 **9.** $\frac{2}{3}$? 0.67 **10.** $\frac{1}{4}$? 0.25

11. En la recta de los números reales, marque los puntos con coordenadas 0, 1, -1, $\frac{5}{2}$, -2.5, $\frac{3}{4}$, y 0.25.

12. Repita el problema 11 para las coordenadas 0, -2, 2, -1.5, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, y $\frac{2}{3}$.

En los problemas del 13 al 20, escriba cada enunciado como una desigualdad.

13. x es positivo

14. z es negativo

15. x es menor que 2

16. y es mayor que -5

17. x es menor o igual a 1

18. x es mayor o igual a 2

19. x es menor que 5 y x es mayor que 2

20. y es menor o igual a 2 y y es mayor que 0

En los problemas del 21 al 24, escriba cada desigualdad utilizando la notación de intervalo e ilústrelas mediante la recta de los números reales.

21. $0 \leq x \leq 4$ **22.** $-1 < x < 5$ **23.** $4 \leq x < 6$ **24.** $-2 < x \leq 0$

En los problemas del 25 al 28, escriba cada intervalo como una desigualdad que involucre a la variable x e ilustre cada desigualdad usando la recta de los números reales.

25. $[2, 5]$ **26.** $(1, 2)$ **27.** $[4, \infty)$ **28.** $(-\infty, 2]$

En los problemas del 29 al 32, encuentre el valor de cada expresión, si $x = 2$ y $y = -3$.

29. $|x + y|$ **30.** $|x - y|$ **31.** $|x| + |y|$ **32.** $|x| - |y|$

En los problemas del 33 al 52, simplifique cada expresión.

33. 3^0 **34.** 3^2 **35.** 4^{-2} **36.** $(-3)^2$

37. $(\frac{2}{3})^2$ **38.** $(\frac{-4}{5})^3$ **39.** $3^{-6} \cdot 3^4$ **40.** $4^{-2} \cdot 4^3$

41. $(\frac{2}{3})^{-2}$ **42.** $(\frac{3}{2})^{-3}$ **43.** $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{2 \cdot 3^{-2}}$ **44.** $\dfrac{3^{-2} \cdot 5^3}{3 \cdot 5}$

45. $9^{3/2}$ **46.** $16^{3/4}$ **47.** $(-8)^{4/3}$ **48.** $(-27)^{2/3}$

49. $\sqrt{32}$ **50.** $\sqrt[3]{24}$ **51.** $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ **52.** $\sqrt{\frac{4}{9}}$

En los problemas del 53 al 68, simplifique cada expresión de modo que todos los exponentes sean positivos. Cuando un exponente es negativo o cero, suponemos que la base es diferente de cero.

53. x^0y^2 **54.** $x^{-1}y$ **55.** $x^{-2}y$ **56.** x^4y^0

57. $\dfrac{x^{-2}y^3}{xy^4}$ **58.** $\dfrac{x^{-2}y}{xy^2}$ **59.** $\left(\dfrac{4x}{5y}\right)^{-2}$ **60.** $(xy)^{-2}$

61. $\dfrac{x^{-1}y^{-2}z}{x^2yz^3}$ **62.** $\dfrac{3x^{-2}yz^2}{x^4y^{-3}z}$ **63.** $\dfrac{(-2)^3x^4(yz)^2}{3^2xy^3z^4}$ **64.** $\dfrac{4x^{-2}(yz)^{-1}}{(-5)^2x^4y^2z^{-2}}$

65. $\dfrac{x^{-2}}{x^{-2} + y^{-2}}$ **66.** $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}$ **67.** $\left(\dfrac{3x^{-1}}{4y^{-1}}\right)^{-2}$ **68.** $\left(\dfrac{5x^{-2}}{6y^{-2}}\right)^{-3}$

En los problemas del 69 al 78, a y b son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo y c es la longitud de la hipotenusa. Encuentre la longitud que falte.

69. $a = 5, b = 12, c = ?$

70. $a = 6, b = 8, c = ?$

71. $a = 10, b = 24, c = ?$

72. $a = 4, b = 3, c = ?$

73. $a = 7, b = 24, c = ?$

74. $a = 14, b = 48, c = ?$

75. $a = 3, c = 5, b = ?$

76. $b = 6, c = 10, a = ?$

77. $b = 7, c = 25, a = ?$

78. $a = 10, c = 13, b = ?$

En los problemas del 79 al 84, se dan las longitudes de los lados de un triángulo. Determine cuáles son triángulos rectángulos y luego identifique en ellos la hipotenusa.

79. 3, 4, 5

80. 6, 8, 10

81. 4, 5, 6

82. 2, 2, 3

83. 7, 24, 25

84. 10, 24, 26

En los problemas del 85 al 96, utilice una calculadora para aproximar cada expresión. Redondee su respuesta a dos decimales.

85. $(8.51)^2$

86. $(9.62)^2$

87. $4.1 + (3.2)(8.3)$

88. $(8.1)(4.2) + 6.1$

89. $(8.6)^2 + (6.1)^2$

90. $(3.1)^2 + (9.6)^2$

91. $8.6 + \dfrac{10.2}{4.2}$

92. $9.1 - \dfrac{8.2}{10.2}$

93. $\dfrac{2.3 - 9.25}{8.91 + 5.4}$

94. $\dfrac{4.73 - 2.4}{81 + 6.39}$

95. $\dfrac{\pi + 8}{10.2 + 8.6}$

96. $\dfrac{21.3 - \pi}{6.1 + 8.8}$

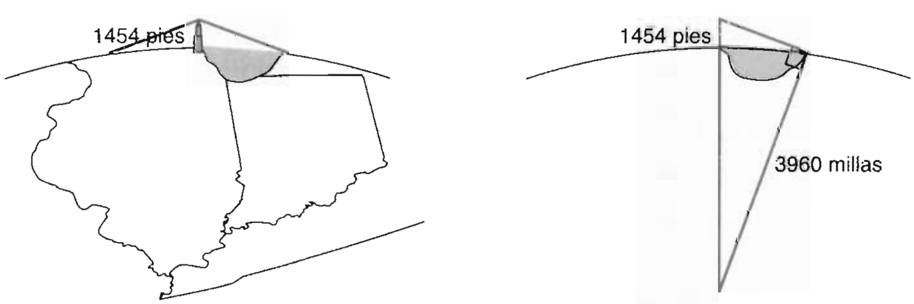
97. *Geometría.* Encuentre la diagonal de un rectángulo de 8 pulgadas de largo y 5 pulgadas de ancho.

98. *Geometría.* Encuentre la longitud de un rectángulo con una anchura de 3 pulgadas si su diagonal mide 20 pulgadas.

99. *Determinación de longitud de un cable.* Una torre de transmisión de radio tiene una altura de 100 pies. ¿Cuál debe ser la longitud de un cable que se conectará desde un punto situado a la mitad de la altura de la torre hasta otro punto que se encuentra a 30 pies de la base?

100. Resuelva el problema 99 si el cable es fijado desde la parte superior de la torre.

101. *¿Qué tan lejos puede ver?* El edificio habitado más alto de Estados Unidos es la torre Sears en Chicago.* Si el mirador de la torre está a 1454 pies por encima del nivel del suelo, utilice la figura dada a continuación para determinar qué tan lejos puede ver una persona que se encuentre en el mirador (con la ayuda de un telescopio). Utilice 3960 millas para el radio de la Tierra. [*Nota*: 1 milla = 5280 pies.]



En los problemas 102, 103 y 104, utilice el dato de que el radio de la Tierra es de 3960 millas.

102. *¿Qué tan lejos puedes ver?* La torre de mando del USS *Silverside*, un submarino de la Segunda Guerra Mundial actualmente estacionado de manera permanente en Muskegon, Michigan, se encuentra aproximadamente a 20 pies por encima del nivel del mar. ¿Qué tan lejos puede verse desde esa torre de mando?

103. *¿Qué tan lejos puedes ver?* Una persona de 6 pies de altura está parada en la playa en Fort Lauderdale, Florida, mirando hacia el Océano Atlántico. De repente, aparece un barco en el horizonte. ¿Qué tan alejado de la costa se encuentra el barco?

**Fuente: Libro Guinness de Marcas Mundiales.*

104. *¿Qué tan lejos puedes ver?* La cubierta de un buque destructor está a 100 pies por encima del nivel del mar. ¿Qué tan lejos puede ver una persona desde la cubierta? ¿Qué tan lejos puede ver una persona desde el puente, que se encuentra a 150 pies por encima del nivel del mar?

105. Si $a \leq b$ y $c > 0$, demostrar que $ac \leq bc$. [*Sugerencia*: Ya que $a \leq b$, se deduce que $a - b \leq 0$. Ahora multiplique cada lado por c.]

106. Si $a \leq b$ y $c < 0$, demuestre que $ac \geq bc$.

107. Si $a < b$, demuestre que $a < (a + b)/2 < b$. El número $(a + b)/2$ es llamado la **media aritmética** de a y b.

108. Con respecto al problema 107. Demuestre que la media aritmética de a y b es equidistante de a y de b.

109. ¿Existen números reales que sean a la vez racionales e irracionales? ¿Y que no sean de ninguna de las dos clases? Explique su razonamiento.

110. Explique por qué la suma de un número racional y uno irracional debe ser irracional.

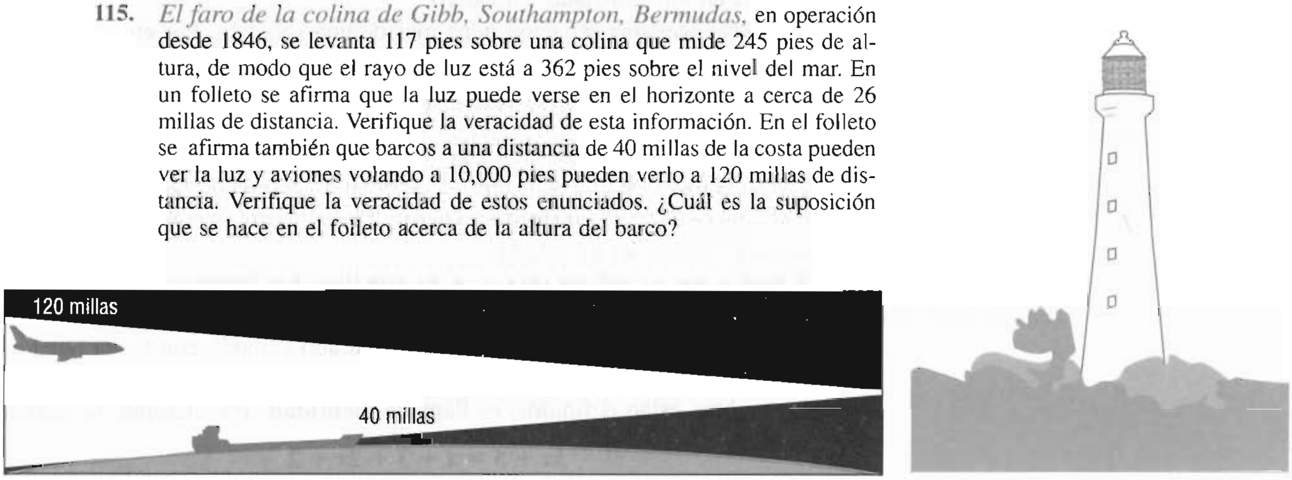
111. ¿Qué número racional es igual al decimal repetido 0.9999...?

112. ¿Existe un número real positivo "más cercano" a cero?

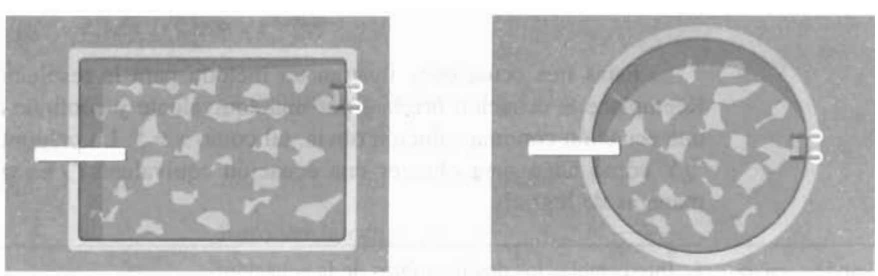
113. ¡Estoy pensando un número! Está entre 1 y 10; su cuadrado es racional y está entre 1 y 10. El número es mayor que π. Con dos decimales correctos, diga cuál es el número. Ahora piense en su propio número, descríbalo y rete a un compañero a calcularlo.

114. Escriba un párrafo breve que ilustre las semejanzas y diferencias entre "menor que" ($<$) y "menor o igual a" ($\leq$).

115. *El faro de la colina de Gibb, Southampton, Bermudas*, en operación desde 1846, se levanta 117 pies sobre una colina que mide 245 pies de altura, de modo que el rayo de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. En un folleto se afirma que la luz puede verse en el horizonte a cerca de 26 millas de distancia. Verifique la veracidad de esta información. En el folleto se afirma también que barcos a una distancia de 40 millas de la costa pueden ver la luz y aviones volando a 10,000 pies pueden verlo a 120 millas de distancia. Verifique la veracidad de estos enunciados. ¿Cuál es la suposición que se hace en el folleto acerca de la altura del barco?



116. Usted tiene 1000 pies de borde flexible para piscina y desea construir una. Experimente con proyectos de piscinas rectangulares cuyo perímetro sea de 1000 pies. ¿Cómo varían sus áreas? ¿Cuál es la forma rectangular con mayor área? Luego calcule el área encerrada por una piscina circular con perímetro (circunferencia) de 1000 pies. ¿Cuál sería su elección acerca de la forma de la piscina? Si es rectangular, ¿cuál es su preferencia acerca de sus dimensiones? Justifique su selección. Si su única consideración es tener una piscina que encierre la mayor área, ¿qué forma debe usar?



1.2 Ecuaciones

Una **ecuación en una variable** es un enunciado en el que dos expresiones, al menos una con una variable, son iguales. Estas expresiones son llamadas **miembros o lados** de la ecuación. Ya que una ecuación es una proposición, puede ser verdadera o falsa, dependiendo del valor de la variable. A menos que se indique lo contrario, los valores admisibles de la variable son aquellos que están en el dominio de la variable. Aquellos valores admisibles de la variable, si los hay, que hacen verdadero el enunciado son llamados **soluciones**, o **raíces**, de la ecuación. **Resolver una ecuación** significa encontrar todas las soluciones de la ecuación.

Por ejemplo, las siguientes son ecuaciones en una variable, x:

$$x + 5 = 9 \qquad x^2 + 5x = 2x - 2 \qquad \frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0 \qquad x^2 + 9 = 5$$

El primero de estos enunciados, $x + 5 = 9$, es verdadero cuando $x = 4$ y falso para cualquier otro valor de x. Así, 4 es una solución de la ecuación $x + 5 = 9$. También decimos que 4 **satisface** la ecuación $x + 5 = 9$, ya que, cuando x es reemplazada por 4, resulta en un enunciado verdadero.

Algunas veces una ecuación tiene más de una solución. Por ejemplo,

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0$$

tiene a $x = -2$ o $x = 2$ como solución.

Las soluciones de una ecuación se escriben a veces en notación de conjuntos obteniendo así el llamado **conjunto solución**. Por ejemplo, el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 9 = 0$ es $\{-3, 3\}$.

A menos que se indique otra cosa, en este libro nos limitaremos a trabajar con soluciones que sean números reales. Por ejemplo $x^2 + 9 = 5$ no tiene solución real, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sumado con 9 sea igual a 5.

Una ecuación que se satisface para toda elección de la variable, para la cual ambos miembros están definidos, es llamada **identidad**. Por ejemplo, la ecuación

$$3x + 5 = x + 3 + 2x + 2$$

es una identidad, ya que este enunciado es verdadero para cualquier número real x.

Dos o más ecuaciones que tienen precisamente las mismas soluciones son llamadas **ecuaciones equivalentes**. Por ejemplo, las siguientes ecuaciones son equivalentes ya que cada una tiene sólo la solución $x = 5$:

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 13 \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Estas tres ecuaciones ilustran un método para la resolución de ecuaciones: Reemplace la ecuación original por una equivalente y continúe hasta que obtenga una ecuación con una solución obvia, tal como $x = 5$. La pregunta es, desde luego: "¿Y cómo hago para obtener una ecuación equivalente?" En general, hay cinco maneras de lograrlo.

Procedimientos que conducen a ecuaciones equivalentes

1. Intercambiar los dos miembros de la ecuación:

$$\text{Reemplazar} \quad 3 = x \quad \text{por} \quad x = 3$$

2. Simplificar los miembros de la ecuación reduciendo términos semejantes, eliminando paréntesis, etcétera:

$$\text{Reemplazar } (x + 2) + 6 = 2x + (x + 1)$$
$$\text{por } x + 8 = 3x + 1$$

3. Sumar o restar la misma expresión a ambos miembros de la ecuación:

$$\text{Reemplazar } 3x - 5 = 4$$
$$\text{por } (3x - 5) + 5 = 4 + 5$$

4. Multiplicar o dividir ambos miembros de la ecuación por una misma expresión diferente de cero:

$$\text{Reemplazar } \frac{3x}{x-1} = \frac{6}{x-1} \qquad x \neq 1$$
$$\text{por } \frac{3x}{x-1} \cdot (x - 1) = \frac{6}{x-1} \cdot (x - 1)$$

5. Si un miembro de la ecuación es 0 y el otro puede ser factorizado, entonces se puede usar la ley del producto* y hacer cada factor igual a cero:

$$\text{Reemplazar } x(x - 3) = 0$$
$$\text{por } x = 0 \text{ o } x - 3 = 0$$

Siempre que le sea posible resolver una ecuación mentalmente, hágalo. Por ejemplo:

La solución de $2x = 8$ es $x = 4$.

La solución de $3x - 15 = 0$ es $x = 5$.

Aunque, a veces, sea necesario un reacomodo de los términos.

EJEMPLO 1 *Resolución de una ecuación*

Resolver la ecuación: $(x + 1)(2x) = (x + 1)(2)$

Solución Empezamos colocando todos los términos del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} (x + 1)(2x) &= (x + 1)(2) \\ (x + 1)(2x) - (x + 1)(2) &= 0 \\ (x + 1)(2x - 2) &= 0 \quad \text{Factorizar.} \\ x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad 2x - 2 &= 0 \quad \text{Aplicar la ley del producto.} \\ x = -1 \qquad 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-1, 1\}$. ■

EJEMPLO 2 *Resolución de una ecuación*

Resolver la ecuación: $\dfrac{3x}{x-1} + 2 = \dfrac{3}{x-1}$

*La ley del producto afirma que si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$ o ambos son iguales a 0.

Solución Primero, observamos que el dominio de la variable es $\{x|x \neq 1\}$. Como los dos cocientes en la ecuación tienen el mismo denominador, $x - 1$, podemos simplificar multiplicando ambos miembros por $x - 1$. La ecuación resultante es equivalente a la original, pues multiplicamos por $x - 1$, que no es cero (recuerde que, $x \neq 1$).

$$\frac{3x}{x-1} + 2 = \frac{3}{x-1}$$

$$\left(\frac{3x}{x-1} + 2\right) \cdot (x-1) = \frac{3}{\cancel{x-1}} \cdot (\cancel{x-1}) \qquad \text{Multiplicar ambos miembros por } x - 1\text{; cancelar en el lado derecho.}$$

$$\frac{3x}{\cancel{x-1}} \cdot (\cancel{x-1}) + 2 \cdot (x-1) = 3 \qquad \text{Utilizar la propiedad distributiva en el lado izquierdo; cancelar en el lado izquierdo.}$$

$$3x + (2x - 2) = 3 \qquad \text{Simplificar.}$$

$$5x - 2 = 3$$

$$5x = 5 \qquad \text{Sumar 2 a cada lado.}$$

$$x = 1 \qquad \text{Dividir ambos lados entre 5.}$$

La solución parece ser 1. Pero recuerde que $x = 1$ no está en el dominio de la variable. Así, la ecuación no tiene solución. ■

■ Ahora resuelva el problema 19.

Pasos para resolver ecuaciones

PASO 1: Listar las restricciones que rijan sobre el dominio de la variable.
PASO 2: Simplificar la ecuación reemplazando la ecuación original por una sucesión de ecuaciones equivalentes siguiendo los procedimientos vistos líneas arriba.
PASO 3: Si el resultado del paso 2 es un producto de factores igual a cero, utilizar la ley del producto y hacer cada factor igual a cero (procedimiento 5).
PASO 4: Verificar la solución (o las soluciones).

EJEMPLO 3 *Resolución de una ecuación*

Resolver la ecuación $x^3 = 25x$

Solución Primero acomodamos la ecuación para tener un cero en el lado derecho:

$$x^3 = 25x$$

$$x^3 - 25x = 0$$

Observamos que x es un factor de cada término del lado izquierdo:

$$x(x^2 - 25) = 0$$

$$x(x+5)(x-5) = 0 \qquad \text{Diferencia de dos cuadrados.}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0 \qquad \text{Hacer cada factor igual a 0.}$$

$$x = -5 \quad \text{o} \quad x = 5 \qquad \text{Resolver.}$$

El conjunto solución es $\{-5, 0, 5\}$. ■

■ Ahora resuelva el problema 21.

A consecuencia de que existen dos puntos cuya distancia al origen es de 5 unidades, -5 y 5, la ecuación $|x| = 5$ tendrá el conjunto solución $\{-5, 5\}$.

EJEMPLO 4 *Resolución de una ecuación que involucra un valor absoluto*

Resolver la ecuación: $|x + 4| = 13$

Solución Hay dos posibilidades:

$$x + 4 = 13 \quad \text{o} \quad x + 4 = -13$$
$$x = 9 \qquad\qquad x = -17$$

Por tanto, el conjunto solución es $\{-17, 9\}$. ■

■ Ahora resuelva el problema 39.

Ecuaciones cuadráticas

Se supone que usted está familiarizado con la solución de **ecuaciones cuadráticas**; es decir, ecuaciones equivalentes a una escrita en la **forma estándar (o general)** $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Cuando una ecuación cuadrática está escrita en la forma estándar, $ax^2 + bx + c = 0$ es posible factorizar la expresión del lado izquierdo como el producto de dos polinomios de primer grado. *Véase* el apéndice A, sección A.1, para un estudio de factorización.

EJEMPLO 5 *Resolución de una ecuación cuadrática por factorización*

Resolver la ecuación: $x^2 = 12 - x$

Solución Escribimos la ecuación en la forma estándar sumando $x - 12$ a cada lado:

$$x^2 = 12 - x$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$

El lado izquierdo ahora puede ser factorizado como

$$(x + 4)(x - 3) = 0 \quad \text{Los factores 4 y } -3 \text{ de 12 tienen suma 1.}$$

Así que

$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -4 \qquad\qquad x = 3$$

El conjunto solución es $\{-4, 3\}$. ■

Cuando el lado izquierdo se factoriza en dos ecuaciones lineales con la misma solución, se dice que la ecuación cuadrática tiene una **solución repetida**. También llamamos a esta solución **raíz de multiplicidad 2,** o **raíz doble**.

EJEMPLO 6 *Resolución de una ecuación cuadrática por factorización*

Resolver la ecuación: $x^2 - 6x + 9 = 0$

Solución Esta ecuación ya está en la forma estándar y el lado izquierdo puede factorizarse:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x - 3)(x - 3) = 0$$

Así que

$$x = 3 \quad \text{o} \quad x = 3$$

La ecuación sólo tiene la solución repetida 3. ■

■ Ahora resuelva los problemas 61 y 67.

Las ecuaciones cuadráticas también pueden resolverse utilizando la *fórmula cuadrática*. *Véase* el apéndice A, sección A.3, para la deducción de ésta.

Teorema

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, las soluciones reales de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

están dadas por la **fórmula cuadrática**

Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

■

La cantidad $b^2 - 4ac$, es llamada **discriminante** de la ecuación cuadrática porque su valor nos indica si la ecuación tiene soluciones reales y cuántas soluciones esperar.

Discriminante de una ecuación cuadrática

Para una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$,

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones reales y diferentes.
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución repetida, una raíz de multiplicidad dos.
3. Si $b^2 - 4ac < 0$, no existe solución real.

En la sección 1.5 consideraremos ecuaciones cuadráticas cuyo discriminante es negativo.

EJEMPLO 7

Resolución de una ecuación cuadrática utilizando la fórmula cuadrática

Utilizar la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones reales, si las hay, de la ecuación: $3x^2 - 5x + 1 = 0$

Solución

La ecuación está en la forma estándar, de modo que la comparamos con $ax^2 + bx + c = 0$ para determinar a, b, y c:

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Con $a = 3$, $b = -5$, y $c = 1$, evaluamos el discriminante $b^2 - 4ac$:

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(1) = 25 - 12 = 13$$

Como $b^2 - 4ac > 0$, hay dos raíces reales, que pueden ser encontradas utilizando la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

El conjunto solución es $\{(5 - \sqrt{13})/6, (5 + \sqrt{13})/6\}$. ■

■ Ahora resuelva el problema 73.

EJEMPLO 8 *Resolución de una ecuación cuadrática utilizando la fórmula cuadrática*

Utilizar la fórmula cuadrática para encontrar las soluciones reales, si las hay, de la ecuación: $3x^2 + 2 = 4x$

Solución La ecuación, como aparece, no está en la forma estándar.

$$3x^2 + 2 = 4x$$

$$3x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \text{Escribirla en la forma estándar.}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Compararla con la forma estándar.}$$

Con $a = 3$, $b = -4$, y $c = 2$, encontramos

$$b^2 - 4ac = 16 - 24 = -8$$

Ya que $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución real. ■

1.2 Ejercicio 1.2

En los problemas del 1 al 72, resuelva cada ecuación.

1. $6 - x = 2x + 9$
2. $3 - 2x = 2 - x$
3. $2(3 + 2x) = 3(x - 4)$
4. $3(2 - x) = 2x - 1$
5. $8x - (2x + 1) = 3x - 10$
6. $5 - (2x - 1) = 10$
7. $\frac{1}{2}x - 4 = \frac{3}{4}x$
8. $1 - \frac{1}{2}x = 5$
9. $0.9t = 0.4 + 0.1t$
10. $0.9t = 1 + t$
11. $\frac{2}{y} + \frac{4}{y} = 3$
12. $\frac{4}{y} - 5 = \frac{5}{2y}$
13. $(x + 7)(x - 1) = (x + 1)^2$
14. $(x + 2)(x - 3) = (x - 3)^2$
15. $x(2x - 3) = (2x + 1)(x - 4)$
16. $x(1 + 2x) = (2x - 1)(x - 2)$
17. $z(z^2 + 1) = 3 + z^3$
18. $w(4 - w^2) = 8 - w^3$
19. $\frac{x}{x - 3} + 3 = \frac{3}{x - 3}$
20. $\frac{3x}{x + 2} = \frac{-6}{x + 2} - 2$
21. $x^2 = 9x$
22. $x^3 = x^2$
23. $t^3 - 9t^2 = 0$
24. $4z^3 - 8z^2 = 0$
25. $\frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x + 2}$
26. $\frac{x}{x^2 - 9} + \frac{1}{x + 3} = \frac{3}{x^2 - 9}$
27. $\frac{x}{x + 2} = \frac{1}{2}$
28. $\frac{3x}{x - 1} = 2$
29. $\frac{3}{2x - 3} = \frac{2}{x + 5}$
30. $\frac{-2}{x + 4} = \frac{-3}{x + 1}$
31. $(x + 2)(3x) = (x + 2)(6)$
32. $(x - 5)(2x) = (x - 5)(4)$
33. $\frac{6t + 7}{4t - 1} = \frac{3t + 8}{2t - 4}$
34. $\frac{8w + 5}{10w - 7} = \frac{4w - 3}{5w + 7}$
35. $\frac{2}{x - 2} = \frac{3}{x + 5} + \frac{10}{(x + 5)(x - 2)}$
36. $\frac{1}{2x + 3} + \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{(2x + 3)(x - 1)}$
37. $|2x| = 6$
38. $|3x| = 12$
39. $|2x + 3| = 5$
40. $|3x - 1| = 2$
41. $|1 - 4t| = 5$
42. $|1 - 2z| = 3$

43. $|-2x| = 8$
44. $|-x| = 1$
45. $|-2|x = 4$
46. $|3|x = 9$
47. $\frac{2}{3}|x| = 8$
48. $\frac{3}{4}|x| = 9$
49. $\left|\frac{x}{3} + \frac{2}{5}\right| = 2$
50. $\left|\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right| = 1$
51. $|x - 2| = -\frac{1}{2}$
52. $|2 - x| = -1$
53. $|x^2 - 4| = 0$
54. $|x^2 - 9| = 0$
55. $|x^2 - 2x| = 3$
56. $|x^2 + x| = 12$
57. $|x^2 + x - 1| = 1$
58. $|x^2 + 3x - 2| = 2$
59. $x^2 = 4x$
60. $x^2 = -8x$
61. $z^2 + 4z - 12 = 0$
62. $v^2 + 7v + 12 = 0$
63. $2x^2 - 5x - 3 = 0$
64. $3x^2 + 5x + 2 = 0$
65. $x(x - 7) + 12 = 0$
66. $x(x + 1) = 12$
67. $4x^2 + 9 = 12x$
68. $25x^2 + 16 = 40x$
69. $6x - 5 = \frac{6}{x}$
70. $x + \frac{12}{x} = 7$
71. $\frac{4(x - 2)}{x - 3} + \frac{3}{x} = \frac{-3}{x(x - 3)}$
72. $\frac{5}{x + 4} = 4 + \frac{3}{x - 2}$

En los problemas 73 al 82, encuentre las soluciones reales, si las hay, de cada ecuación. Utilice la fórmula cuadrática.

73. $x^2 - 4x + 2 = 0$
74. $x^2 + 4x + 2 = 0$
75. $x^2 - 5x - 1 = 0$
76. $x^2 + 5x + 3 = 0$
77. $2x^2 - 5x + 3 = 0$
78. $2x^2 + 5x + 3 = 0$
79. $4y^2 - y + 2 = 0$
80. $4t^2 + t + 1 = 0$
81. $4x^2 = 1 - 2x$
82. $2x^2 = 1 - 2x$

En los problemas 83 al 86, encuentre las soluciones reales, si las hay, de cada ecuación. Utilice la fórmula cuadrática y exprese las soluciones redondeadas a dos decimales.

83. $x^2 - 4x + 2 = 0$
84. $x^2 + 4x + 2 = 0$
85. $x^2 + \sqrt{3}x - 3 = 0$
86. $x^2 + \sqrt{2}x - 2 = 0$

En los problemas 87 al 92, utilice el discriminante para determinar si cada ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales, una solución real repetida o no tiene solución real, sin resolver la ecuación.

87. $x^2 - 5x + 7 = 0$
88. $x^2 + 5x + 7 = 0$
89. $9x^2 - 30x + 25 = 0$
90. $25x^2 - 20x + 4 = 0$
91. $3x^2 + 5x - 2 = 0$
92. $2x^2 - 3x - 4 = 0$

93. *Física.* Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 96 pies de altura con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La distancia s (en pies) de la pelota al piso después de t segundos es $s = 96 + 80t - 16t^2$.
(a) ¿Después de cuántos segundos la pelota pegará en el piso?
(b) ¿Después de cuántos segundos la pelota pasará por la parte superior del edificio en su camino hacia abajo?

94. *Física.* Un objeto es propulsado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo. La distancia s (en metros) del objeto desde el piso después de t segundos es $s = -4.9t^2 + 20t$.
(a) ¿Cuándo estará el objeto 15 metros por encima del piso?
(b) ¿Cuándo pegará contra el piso?
(c) ¿El objeto alcanzará una altura de 100 metros?
(d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará?

95. Demuestre que la suma de las raíces de una ecuación cuadrática es $-b/a$.

96. Demuestre que el producto de las raíces de una ecuación cuadrática es c/a.

97. Encuentre k tal que la ecuación $kx^2 + x + k = 0$ tenga una solución real repetida.

98. Encuentre k tal que la ecuación $x^2 - kx + 4 = 0$ tenga una solución real repetida.

99. Demuestre que las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los negativos de las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Suponga que $b^2 - 4ac \geq 0$.

100. Demuestre que las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son los recíprocos de las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Suponga que $b^2 - 4ac \geq 0$.

101. *Suma de enteros consecutivos.* La suma de los enteros consecutivos 1, 2, 3, . . . , n está dada por la fórmula $\frac{1}{2}n(n+1)$. ¿Cuántos enteros consecutivos, empezando por 1, se debe sumar para obtener una suma de 666?

102. *Geometría.* Si un polígono de n lados tiene $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonales, ¿cuántos lados tendrá un polígono con 65 diagonales? ¿Existe un polígono de 80 diagonales?

103. Explique cuál es el error en los pasos siguientes:

$$\begin{aligned} x &= 2 && (1)\\ 3x - 2x &= 2 && (2)\\ 3x &= 2x + 2 && (3)\\ x^2 + 3x &= x^2 + 2x + 2 && (4)\\ x^2 + 3x - 10 &= x^2 + 2x - 8 && (5)\\ (x-2)(x+5) &= (x-2)(x+4) && (6)\\ x + 5 &= x + 4 && (7)\\ 1 &= 0 && (8) \end{aligned}$$

104. ¿Cuáles de los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes? Explique.

(a) $x^2 = 9$; $x = 3$ (b) $x = \sqrt{9}$; $x = 3$ (c) $(x-1)(x-2) = (x-1)^2$; $x - 2 = x - 1$

105. La ecuación

$$\frac{5}{x+3} + 3 = \frac{8+x}{x+3}$$

no tiene solución a pesar de que por medio del proceso de solución obtenemos $x = -3$. Escriba un breve párrafo para explicar la causa de este.

106. Construya una ecuación que no tenga solución y désela a un compañero para que la resuelva. Pídale que escriba una crítica sobre su ecuación.

107. Describa tres maneras con las cuales se puede resolver una ecuación cuadrática. Determine el método de su preferencia y explique por qué lo seleccionó.

108. Explique los beneficios de evaluar el discriminante de una ecuación cuadrática antes de intentar resolverla.

109. Invente tres ecuaciones cuadráticas: una que tenga dos soluciones distintas, una que no tenga solución real, y una que tenga exactamente una solución real.

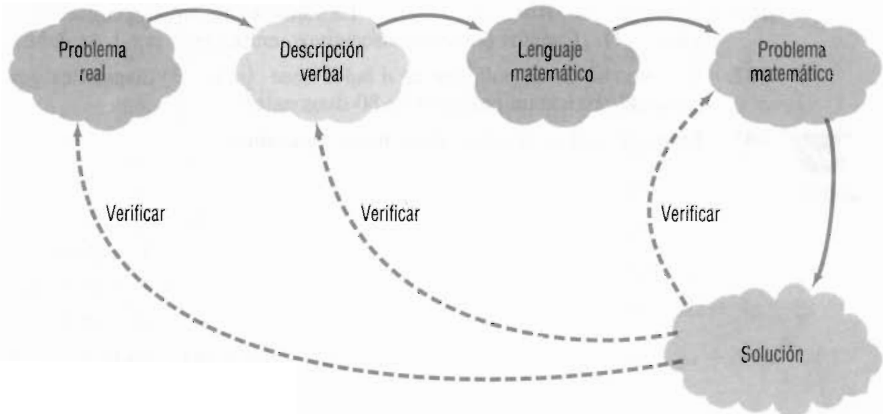
110. La palabra cuadrática parece significar *cuádruple* aunque una ecuación cuadrática es una ecuación que involucra un polinomio de grado dos. Investigue el origen del término *cuadrático* como es utilizado en la expresión *ecuación cuadrática*. Escriba un breve ensayo de sus hallazgos.

1.3 Planteamiento de ecuaciones: aplicaciones

La sección anterior nos proporciona las herramientas para resolver ecuaciones. Pero, desafortunadamente, los problemas de aplicación no vienen en la forma, "Resuelva la ecuación ...". En lugar de eso, son relatos que suministran información —siendo optimistas— suficiente para resolver la pregunta que inevitablemente surge. Así, para resolver problemas aplicados debemos ser capaces de traducir una descripción verbal al lenguaje matemático. Hacemos esto utilizando símbolos (por lo común letras del abecedario) para representar cantidades desconocidas y, después, determinamos las relaciones (tales como ecuaciones) que involucran esos símbolos. El proceso de realizar lo anterior es llamado **modelación matemática.**

Cualquier solución a un problema matemático debe ser verificada contra el problema matemático, la descripción verbal y el problema real.

Veamos algunos ejemplos que le ayudarán a traducir ciertas palabras en símbolos matemáticos.



EJEMPLO 1 *Traducción de descripciones verbales a expresiones matemáticas*

(a) El área de un rectángulo es el producto de su longitud por su anchura.

Traducción: Si A es utilizada para representar el área, l la longitud y w la anchura, entonces $A = lw$.

(b) Para el movimiento uniforme, la velocidad de un objeto es igual a la distancia recorrida dividida entre el tiempo requerido para recorrer esa distancia.

Traducción: Si v es la velocidad, s la distancia y t el tiempo, entonces $v = s/t$.

(c) Un total de \$5000.00 son invertidos, una parte en acciones y la otra en bonos. Si la cantidad invertida en acciones es x, exprese la cantidad invertida en bonos en términos de x.

Traducción: Si y es la cantidad invertida en bonos, entonces $x + y = 5000$. Así, cuando x es la cantidad invertida en acciones, la cantidad invertida en bonos es $y = 5000 - x$.

(d) Sea x un número.

El número 5 veces tan grande como x es $5x$.

El número 3 menor que x es $x - 3$.

El número que excede a x en 4 es $x + 4$.

El número que, cuando se suma a x da 5 es $5 - x$. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Las ecuaciones matemáticas que representan situaciones reales deben ser consistentes en los términos de las unidades utilizadas. En el ejemplo 1(a), si l es medido en pies, entonces w también debe ser expresado en pies y A será expresado en pies cuadrados. En el ejemplo 1(b), si v es medido en millas por hora, entonces la distancia s debe ser expresada en millas y el tiempo t en horas. Es buena práctica verificar las unidades de medición para asegurarse de que son consistentes y tienen sentido.

Aunque cada situación presenta características únicas, podemos proporcionar un bosquejo de los pasos que se siguen para plantear problemas aplicados.

Pasos para plantear problemas aplicados

PASO 1: Lea el problema cuidadosamente, tal vez dos o tres veces. Ponga atención especial a la pregunta que se hace para identificar qué es lo que está buscando. Si puede, determine posibilidades realistas para la respuesta.

PASO 2: Asigne una letra (variable) para representar lo que está buscando y, si es necesario, exprese las cantidades desconocidas restantes en términos de esa variable.

PASO 3: Haga una lista de todos los datos conocidos y escriba cualquier relación que haya entre ellos, en especial cualquiera que involucre a la variable. Las relaciones pueden tomar la forma de una ecuación (o, más adelante, de una desigualdad) que involucre a la variable. Si es posible, dibuje un diagrama identificado de manera apropiada para que le ayude. Algunas veces es posible auxiliarse con una tabla o gráfica.

PASO 4: Resuelva la ecuación para la variable y luego responda la pregunta planteada en el problema.

PASO 5: Verifique la respuesta con los datos del problema. Si coinciden, ¡felicidades! Si no, inténtelo de nuevo.

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2 *Determinación de un salario por hora*

Cecilia recibió US $435.00 una semana por trabajar 52 horas. Su patrón paga 1.5 veces cada hora extra, por encima de 40. Con esta información, ¿se puede determinar el salario por hora normal de Cecilia?

Solución

PASO 1: Buscamos un salario por hora. Nuestra respuesta estará en dólares por hora.

PASO 2: Sea x el salario regular por hora; x es medido en dólares por hora.

PASO 3: Construimos una tabla:

	HORAS TRABAJADAS	SALARIO POR HORA	SALARIO
Regular	40	x	$40x$
Tiempo Extra	12	$1.5x$	$12(1.5x) = 18x$

La suma del salario regular más el salario por el tiempo extra es US $435.00. Así, de la tabla, $40x + 18x = 435$.

PASO 4:

$$\begin{aligned} 40x + 18x &= 435 \\ 58x &= 435 \\ x &= 7.50 \end{aligned}$$

En consecuencia, el salario regular de Cecilia es de US $7.50 por hora.

PASO 5: Cuarenta horas dan un salario de $40(7.50) = 300.00$, y 12 horas de tiempo extra resultan en $12(1.5)(7.50) = 135.00$, para un total de US $435.00. ■

■ Ahora resuelva el problema 15.

Interés

El ejemplo siguiente involucra **interés**. El interés es el dinero pagado por el uso del dinero. La cantidad total prestada (sea por un banco a una persona en la forma de un crédito o por un individuo a un banco en la forma de una cuenta de ahorros) se llama **capital**. La **tasa de interés**, expresada como un porcentaje, es la cantidad cargada por el uso del capital durante un periodo, por lo común sobre una base anual.

Si un capital de P dólares es prestado durante un periodo de t años a una tasa anual r, expresado como un decimal, el interés I cargado será

Fórmula del interés simple

$$I = Prt \tag{1}$$

El interés cargado de acuerdo con la fórmula (1) es llamado **interés simple**.

EJEMPLO 3 *Planeación financiera*

Una inversionista con US \$70,000.00 decide colocar parte de su dinero en bonos corporativos que pagan 12% anual, y el resto en un Certificado de Depósito que paga 8% anual. Si ella desea obtener una ganancia total del 9% anual, ¿cuánto debe colocar en cada inversión?

Solución

PASO 1: La pregunta planteada es acerca de dos cantidades de dinero: el capital a invertir en los bonos corporativos y el capital a invertir en el Certificado de Depósito.

PASO 2: Hagamos que x represente la cantidad (en dólares) que será invertida en los bonos. Entonces $70{,}000 - x$ será la cantidad a invertir en el certificado. (¿Advierte por qué?)

PASO 3: Construimos una tabla:

	CAPITAL \$	TASA	TIEMPO yr	INTERES \$
Bonos	x	$12\% = 0.12$	1	$0.12x$
Certificado	$70{,}000 - x$	$8\% = 0.08$	1	$0.08(70{,}000 - x)$
Total	70,000	$9\% = 0.09$	1	$0.09(70{,}000) = 6300$

Ya que el interés total de las inversiones es igual a $0.09(70{,}000) = 6300$, debemos tener la ecuación

$$0.12x + 0.08(70{,}000 - x) = 6300$$

(Observe que las unidades de medición son consistentes: dólares en cada lado.)

PASO 4:

$$\begin{aligned} 0.12x + 5600 - 0.08x &= 6300 \\ 0.04x &= 700 \\ x &= 17{,}500 \end{aligned}$$

Por tanto, la inversionista debe colocar US \$17,500.00 en los bonos y $70{,}000 - 17{,}500 = 52{,}500$ en el certificado.

PASO 5: El interés sobre los bonos después de 1 año es de $0.12(17{,}500) = 2100$; el interés sobre el certificado después de 1 año es de $0.08(52{,}500) = 4200$. El interés anual total asciende a US \$6300.00, la cantidad requerida. ■

■ Ahora resuelva el problema 23.

Movimiento uniforme

Los dos ejemplos siguientes tratan acerca de objetos en movimiento.

Si un objeto se mueve a una velocidad media v, la distancia s cubierta en el tiempo t está dada por la fórmula

$$s = vt \tag{2}$$

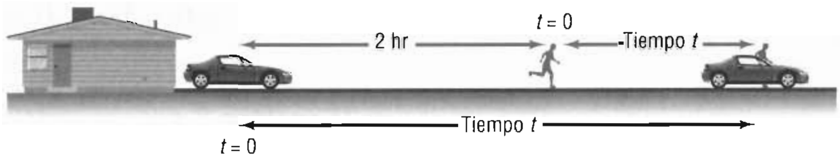
Esto es, Distancia = Velocidad · Tiempo. Sobre los objetos que se mueven de acuerdo con la fórmula (2) se dice que están en **movimiento uniforme**.

EJEMPLO 4 *Física: movimiento uniforme*

Un amigo de usted, quien es corredor de distancia, corre a una velocidad media de 8 millas por hora. Dos horas después de que su amigo inicia una carrera desde su casa, usted sale en su automóvil y sigue la misma ruta que su amigo a una velocidad media de 40 millas por hora, ¿cuánto tiempo tardará en darle alcance a su amigo? ¿A qué distancia estarán entonces de la casa?

Solución Consulte la figura 11. Utilizamos t para representar el tiempo (en horas) que le toma al automóvil alcanzar al corredor. Cuando esto ocurre, el tiempo total transcurrido para el corredor es $t + 2$ horas.

FIGURA 11



Construya la tabla siguiente:

	VELOCIDAD millas/horas	TIEMPO horas	DISTANCIA millas
Corredor	8	$t + 2$	$8(t + 2)$
Automóvil	40	t	$40t$

Ya que la distancia recorrida es la misma, establecemos la ecuación siguiente:

$$8(t + 2) = 40t$$
$$8t + 16 = 40t$$
$$32t = 16$$
$$t = \frac{1}{2} \text{ hora}$$

En $\frac{1}{2}$ hora usted alcanzará a su amigo. Cada uno habrá recorrido 20 millas.

Verificación: En 2.5 horas, el corredor cubre una distancia de $(2.5)(8) = 20$ millas. En $\frac{1}{2}$ hora, el automóvil recorre $\left(\frac{1}{2}\right)(40) = 20$ millas. ■

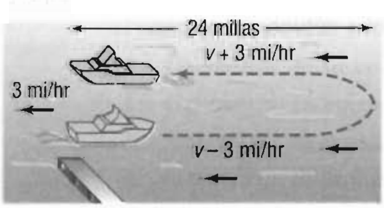
■ Ahora resuelva el problema 51.

EJEMPLO 5 *Física: movimiento uniforme*

Un bote de motor avanza río arriba una distancia de 24 millas en un río cuya corriente fluye a 3 millas por hora. El viaje de ida y vuelta es de 6 horas. Suponiendo que el bote mantiene una velocidad constante relativa al agua, ¿cuál es su velocidad?

Solución *Véase* la figura 12. Utilizamos v para representar la velocidad constante del bote de motor relativa al agua. Entonces la velocidad verdadera cuando va río arriba es $v - 3$ millas por hora, y la velocidad verdadera cuando va río abajo es $v + 3$ millas por hora. Ya que Distancia = Velocidad × Tiempo, entonces Tiempo = Distancia/Velocidad. Construimos una tabla.

FIGURA 12



	VELOCIDAD millas/horas	DISTANCIA millas	TIEMPO = DISTANCIA/VELOCIDAD horas
Río arriba	$v - 3$	24	$\frac{24}{v-3}$
Río abajo	$v + 3$	24	$\frac{24}{v+3}$

Como el tiempo total de ida y vuelta es de 6 horas, tenemos

$$\frac{24}{v-3} + \frac{24}{v+3} = 6$$

$$\frac{24(v+3) + 24(v-3)}{(v-3)(v+3)} = 6$$

$$\frac{48v}{v^2-9} = 6$$

$$48v = 6(v^2-9)$$

$$6v^2 - 48v - 54 = 0$$

$$v^2 - 8v - 9 = 0$$

$$(v-9)(v+1) = 0$$

$$v = 9 \quad \text{o} \quad v = -1$$

Descartamos la solución $v = -1$ milla por hora, de modo que la velocidad del bote de motor relativa al agua es de 9 millas por hora. ■

Otros problemas aplicados

Los dos ejemplos siguientes ilustran problemas que tal vez usted verá de nuevo, aunque en forma un poco diferente, si estudia cálculo.

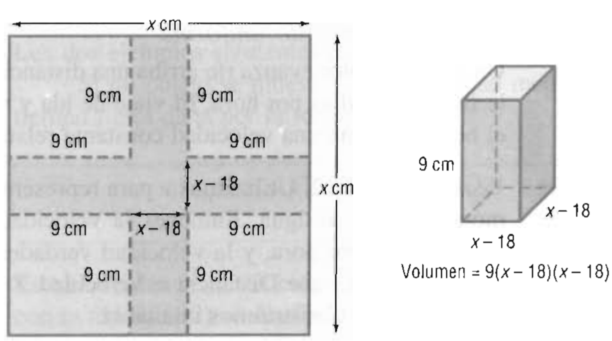
EJEMPLO 6 *Presentación de un problema de cálculo*

De cada esquina de una hoja metálica cuadrada, se corta un cuadrado de 9 centímetros por lado. Se doblan los lados para construir una caja sin tapa. Si la caja debe contener 144 centímetros cúbicos, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la hoja metálica?

Solución Utilizamos la figura 13 como guía. Hemos marcado con x la longitud de un lado de la hoja metálica. La caja tendrá una altura de 9 centímetros y su base cuadrada tendrá $x - 18$ como longitud de cada lado. Por lo tanto, el volumen (Largo × Ancho × Altura) de la caja será

$$9(x-18)(x-18) = 9(x-18)^2$$

FIGURA 13



Como el volumen de la caja será de 144 centímetros cúbicos, tenemos

$$9(x-18)^2 = 144$$

$$(x-18)^2 = 16$$

$$x - 18 = \pm 4$$

$$x = 18 \pm 4$$

$$x = 22 \quad \text{o} \quad x = 14$$

Descartamos la solución $x = 14$ (¿Puede advertir por qué?) y concluimos que la hoja metálica debe ser de 22 por 22 centímetros.

Verificación: Si de una hoja metálica de 22 por 22 centímetros cortamos un cuadrado de 9 centímetros de cada esquina y doblamos los lados, obtendremos una caja cuyas dimensiones son 9 por 4 por 4, con volumen $9 \times 4 \times 4 = 144$ centímetros cúbicos, como se pidió. ■

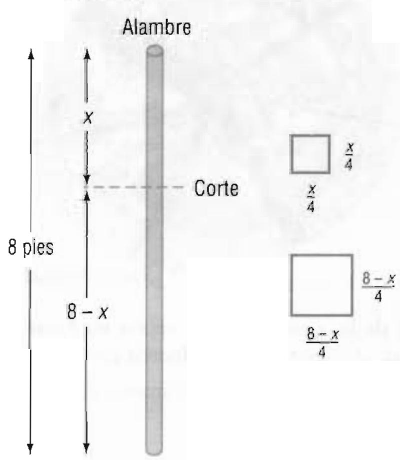
■ Ahora resuelva el problema 31.

EJEMPLO 7 *Presentación de un problema de cálculo*

Una pieza de alambre de 8 pies de longitud será cortada en dos partes y cada parte se doblará para formar un cuadrado. ¿En dónde debe cortarse el alambre si la suma de las áreas de los cuadrados debe ser de 2 pies cuadrados?

Solución Utilizamos la figura 14 como guía. Hemos marcado con x la longitud de una de las partes del alambre después que este ha sido cortado. La otra parte tendrá longitud $8 - x$. Si cada parte se dobla para formar un cuadrado, entonces uno de esos cuadrados tendrá un lado de longitud $x/4$ y el otro tendrá lados de $(8 - x)/4$. Como la suma de las áreas de estos dos cuadrados es 2, tenemos la ecuación

FIGURA 14



$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{8-x}{4}\right)^2 = 2$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{64 - 16x + x^2}{16} = 2$$

$$2x^2 - 16x + 64 = 32$$

$$2x^2 - 16x + 32 = 0 \quad \text{Escribirla en forma estándard.}$$

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \quad \text{Dividir entre 2.}$$

$$(x - 4)^2 = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

$$x = 4$$

Como $x = 4$, $8 - x = 4$ y la pieza original de alambre debe cortarse en dos partes, cada parte deberá tener una longitud de 4 pies.

Verificación: Si la longitud de cada trozo de alambre es de 4 pies, entonces cada parte puede formar un cuadrado cuyos lados midan un pie. Por lo tanto, el área de cada cuadrado es de 1 pie cuadrado, de modo que la suma de sus áreas totaliza 2 pies cuadrados, como se pidió. ■

1.3

Ejercicio 1.3

En los problemas del 1 al 10, traduzca los enunciados a una ecuación matemática. Asegúrese de identificar el significado de todos los símbolos.

1. *Geometría.* El área de un círculo es el producto del número π por el cuadrado del radio.
2. *Geometría.* La circunferencia de un círculo es el producto del número π por dos veces el radio.
3. *Geometría.* El área de un cuadrado es el cuadrado de la longitud de un lado.
4. *Geometría.* El perímetro de un cuadrado es cuatro veces la longitud de un lado.
5. *Física.* La fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración.

6. *Física.* Presión es fuerza por unidad de área.

7. *Física.* Trabajo es igual a fuerza por distancia.

8. *Física.* Energía cinética es la mitad del producto de la masa por el cuadrado de la velocidad.

9. *Negocios.* El costo total de fabricar x máquinas para lavar platos es de US \$150.00 por unidad por el número de lavadoras fabricadas.

10. *Negocios.* El ingreso total obtenido por la venta de x lavadoras de platos es de \$250.00 por unidad por el total vendido.

11. *Finanzas.* Se invertirán US \$20,000.00, una parte en bonos y otra en Certificados de Depósito (CD). Si la cantidad invertida en bonos excederá la de CD en US \$2000.00, ¿cuánto será invertido en cada tipo de inversión?

12. *Finanzas.* US \$10,000.00 serán divididos entre Isela y Miguel, él recibirá US \$2000.00 menos que Isela. ¿Cuánto recibirá cada uno?

13. *Finanzas.* Una herencia de US \$900,000.00 se repartirá entre Katy, Miguel y Daniel de la siguiente manera: Miguel recibirá $\frac{3}{4}$ de lo que obtenga Katy, mientras que Daniel obtendrá la mitad de lo que reciba Katy. ¿Cuánto recibirá cada uno?

14. *Repartir el costo de una pizza.* Miguel y Carlos convienen en dividir el costo de una pizza de US \$18.00 con base en la cantidad que comió cada uno. Si Carlos comió $\frac{2}{3}$ de la cantidad que comió Miguel, ¿cuánto debe pagar cada uno?

15. *Cálculo de un salario por hora.* Un trabajador que recibe tarifa y media por cada hora extra que trabaja después de 40 horas, tuvo un salario total semanal de US \$442.00 por 48 horas de trabajo. ¿Cuál es el salario regular por hora?

16. *Cálculo de un salario por hora.* A Cecilia se le pagó tarifa y media por cada hora trabajada después de 40 horas y el doble por las horas trabajadas en domingo. Si Cecilia recibió un sueldo semanal de US \$342.00 por trabajar 50 horas, 4 de las cuales fueron en domingo, ¿cuál es el salario regular por hora de Cecilia?

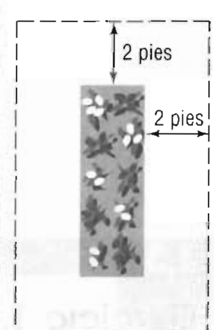
17. *Fútbol americano.* En un juego de futbol americano, un equipo anotó 41 puntos, incluyendo un *safety* (2 puntos) y dos goles de campo (3 puntos cada uno). Después de anotar un *touchdown* (6 puntos), a un equipo se le da la oportunidad de anotar un punto extra. El equipo en cuestión falló 2 puntos extra después de anotar *touchdowns*. ¿Cuántos de éstos fueron anotados?

18. *Basquetbol.* En un juego de basquetbol, un equipo anotó un total de 70 puntos e hizo el triple de canastas (2 puntos cada una) que de tiros libres (1 punto cada uno). ¿Cuántas canastas anotó?

19. *Geometría.* El perímetro de un rectángulo es de 60 pies. Encuentre su longitud y su anchura si la longitud es 8 pies mayor que la anchura.

20. *Geometría.* El perímetro de un rectángulo es de 42 metros. Encuentre su longitud y su anchura si la longitud es el doble de la anchura.

21. *Cercar un jardín.* Un jardinero tiene 46 pies de cerca que será utilizada para rodear un jardín rectangular con un borde de 2 pies de ancho (*véase* la figura).
(a) Si la longitud del jardín es el doble de su anchura, ¿cuáles son las dimensiones del jardín?
(b) ¿Cuál es el área del jardín?
(c) Si la longitud y la anchura del jardín fueran iguales, ¿cuáles serían las dimensiones del jardín?
(d) ¿Cuál sería el área del jardín cuadrado?



22. *Química: moléculas de azúcar.* Una molécula de azúcar tiene el doble de átomos de hidrógeno que de oxígeno y un átomo más de carbono que de oxígeno. Si una molécula de azúcar tiene un total de 45 átomos, ¿cuántos son de oxígeno y cuántos de hidrógeno?

23. *Planeación financiera.* Una recién jubilada necesita US \$6000.00 adicionales por año. Ella tiene US \$50,000.00 para invertir en bonos tipo B que pagan el 15% anual o en un Certificado de Depósito (CD) que paga un 7% anual. ¿Cuánto dinero debe invertir en cada instrumento para obtener exactamente US \$6000.00 de interés anual?

24. *Planeación financiera.* Después de 2 años, la jubilada del problema 23 determina que necesita US \$7000.00 anuales. Suponiendo que la información restante es la misma, ¿cómo debe ser reinvertido el dinero?

25. *Banca.* Un banco prestó US \$12,000.00, parte a una tasa del 8% anual y el resto al 18% anual. Si el interés recibido totalizó US \$1000.00, ¿cuánto fue prestado al 8% anual?

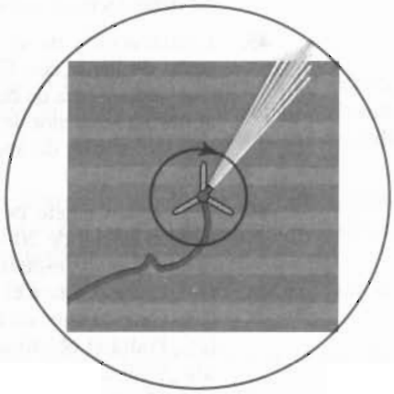
26. *Banca.* La encargada de los préstamos en un banco tiene US $1,000,000.00 para prestar y se necesita obtener una ganancia promedio del 18% anual. Si puede prestar al 19% o al 16%, ¿cuánto puede otorgar al 16% y aún cumplir con el requerimiento señalado?

27. *Dimensiones de una ventana.* El área del vano de una ventana rectangular será de 143 pies cuadrados. Si la longitud deberá tener 2 pies más que la anchura, ¿cuáles serán las dimensiones de la ventana?

28. *Dimensiones de una ventana.* El área de un vano rectangular será de 306 centímetros cuadrados. Si la longitud excederá a la anchura en 1 centímetro, ¿cuáles serán sus dimensiones?

29. *Geometría.* Encuentre las dimensiones de un rectángulo con perímetro de 26 metros y área de 40 metros cuadrados.

30. *Regando un campo.* Un aspersor que rocía agua con un patrón circular es colocado en el centro de un terreno cuadrado con área de 1250 pies cuadrados (*véase* la figura). ¿Cuál es el radio más pequeño que puede usarse si el campo debe estar totalmente contenido dentro del círculo?



31. *Construcción de una caja.* Una caja sin tapa será construida de una hoja de metal a la cual se le quitará de cada esquina un cuadrado de 1 pie por lado, y se doblará hacia arriba los lados. Si la caja tendrá capacidad para 4 pies cúbicos, ¿cuáles deben ser las dimensiones de la hoja metálica?

32. *Construcción de una caja.* Vuelva a hacer el problema 31 considerando que la hoja de metal es un rectángulo cuya longitud es el doble que su anchura.

33. *Física.* Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde la parte superior de un edificio de 96 pies de altura con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La distancia s (en pies) de la pelota con respecto al piso después de t segundos es $s = 96 + 80t - 16t^2$.
(a) ¿Cuántos segundos tardará la pelota en chocar contra el piso?
(b) ¿Después de cuántos segundos en su caída la pelota pasará por la parte superior del edificio?

34. *Construcción de un bote para café.* Un bote de 39 onzas de café necesita 188.5 pulgadas cuadradas de aluminio para ser construido. Si su altura es de 7 pulgadas, ¿cuál será su radio? (El área de la superficie A de un cilindro es a $2\pi r^2 + 2\pi rh$, donde r es el radio y h la altura.)

35. *Comercio: precio rebajado.* Un fabricante de casas rodantes reduce el precio de un modelo en un 15%. Si el precio nuevo es de $125,000.00, ¿cuál era su precio original? ¿Cuánto se puede ahorrar al comprar el modelo?

36. *Comercio: precio rebajado.* Un distribuidor de automóviles, en una liquidación de fin de año, reduce el precio de lista de los modelos del año anterior en un 15%. Si cierto modelo de cuatro puertas tiene un precio rebajado de $8000.00, ¿cuál era su precio de lista? ¿Cuánto puede ahorrarse al comprar un último modelo?

37. *Negocios:* Una librería escolar fija los precios de venta aumentando el precio que le paga al editor en un 25%. Si el precio de venta de un libro es de $56.00, ¿cuánto pagó la librería por el libro?

38. *Finanzas personales: costo de un automóvil.* El precio de lista sugerido para un automóvil nuevo es de $12,000.00. El costo del distribuidor es el 85% del precio de lista. ¿Cuánto pagará usted si el distribuidor está dispuesto a aceptar $100.00 sobre el costo del automóvil?

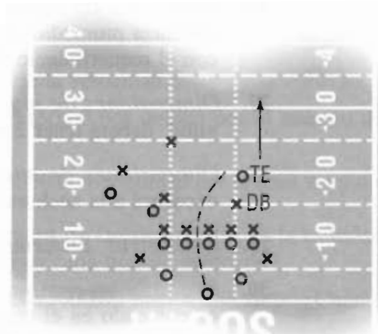
39. *Trabajo en equipo.* Miguel reparte sus periódicos en 30 minutos. A Daniel le toma 20 minutos realizar la misma ruta. ¿Cuánto tiempo tardarán en entregar los periódicos si trabajan juntos?

40. *Trabajo en equipo.* Un pintor puede pintar, él solo, cuatro cuartos en 10 horas, con un ayudante realiza el mismo trabajo en 6 horas. Si deja que el ayudante trabaje solo, ¿cuánto tiempo tardará éste en pintar cuatro cuartos?

41. *Cálculo de calificaciones.* Carlos obtuvo calificaciones en los exámenes parciales de 80, 83, 71, 61 y 95. Va a presentar un último examen que cuenta como dos exámenes parciales. ¿Cuánto necesita obtener para alcanzar un promedio de 80?

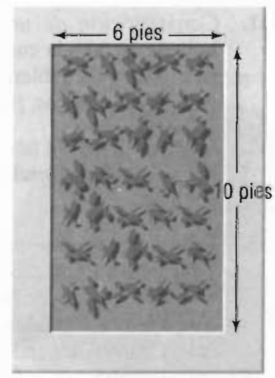
42. *Cálculo de calificaciones.* Daniel obtuvo calificaciones en los exámenes parciales de 86, 80, 84 y 90. Va a presentar el examen final que cuenta por dos tercios de la calificación final. ¿Qué necesita para merecer una B que se obtiene con una calificación promedio de 80? ¿Qué necesita para merecer una A que se otorga con un promedio de 90?

43. *Fútbol americano.* Un ala cerrada puede correr 100 yardas en 12 segundos y un apoyador defensivo lo hace en 10 segundos. El ala completa un pase en la yarda 20 de su propio campo estando el apoyador en la yarda 15. (*Véase* la figura.) Si ningún otro jugador se encuentra cerca, ¿en qué yarda el apoyador atrapará al ala?



44. *Cálculo de gastos.* Debbie, una agente foránea de ventas, utiliza su automóvil para trabajar y para uso particular. El año pasado recorrió 30.000 millas utilizando 900 galones de gasolina. Su automóvil rinde 40 millas por galón en la carretera y 25 en la ciudad. Si en su declaración de impuestos ella puede deducir todo lo recorrido en carretera, ¿cuántas millas debe declarar como gastos de operación?

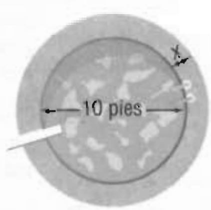
45. *Construcción de un borde alrededor de un jardín.* Un jardinero que acaba de llenar con flores un jardín rectangular de 6 por 8 pies encarga una yarda cúbica de cemento premezclado para hacer un borde de anchura uniforme alrededor del jardín. Si el borde tendrá una altura de 3 pulgadas, ¿cuánto medirá de ancho? (1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos y 12 pulgadas = 1 pie.)



46. *Física.* Un objeto es impulsado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo. La distancia s (en metros) del objeto al piso después de t segundos es $s = -4.9t^2 + 20t$.
(a) ¿Cuándo estará el objeto 15 metros por arriba del piso?
(b) ¿Cuándo chocará contra el piso?
(c) ¿Podrá el objeto alcanzar una altura de 100 metros?
(d) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada?

47. *Reducción del tamaño de una barra de chocolate.* Una barra gigante de chocolate mide 12 centímetros de largo, 7 de ancho y 3 de grosor. Debido a alzas en los costos de la cocoa, el fabricante decide reducir el volumen de la barra en un 10%. Así, la nueva presentación deberá tener los mismos 3 centímetros de grosor pero el largo y el ancho se reducirán en un número igual de centímetros. ¿Cuáles serán las nuevas dimensiones de la barra de chocolate?

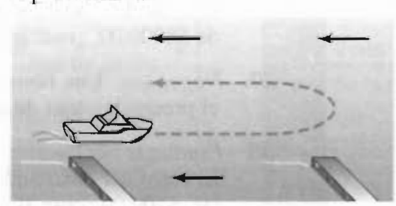
48. *Reducción del tamaño de una barra de chocolate.* Vuelva a resolver el problema 47 si la reducción es del 20 por ciento.



49. *Construcción de un borde alrededor de un piscina.* Alrededor de una piscina circular con diámetro de 10 pies se hará un borde de ancho uniforme utilizando un pie cúbico de concreto. Si el borde tendrá una altura de 3 pulgadas, ¿cuál debe ser su ancho? (1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos y 12 pulgadas = 1 pie.)

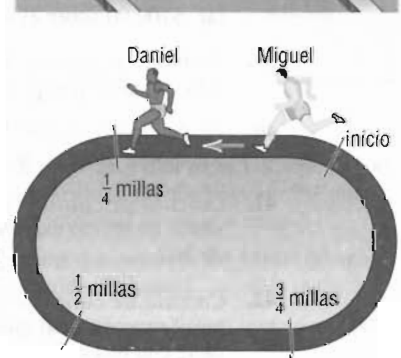
50. *Construcción de un borde alrededor de un piscina.* Vuelva a resolver el problema 49 si la altura del borde es de 4 pulgadas.

51. *Física: movimiento uniforme.* Un bote de motor puede mantener una velocidad constante de 16 millas por hora con relación al agua. El bote realiza un viaje a cierto punto río arriba en 20 minutos, el regreso le toma 15 minutos. ¿Cuál es la velocidad de la corriente? (*Véase* la figura.)



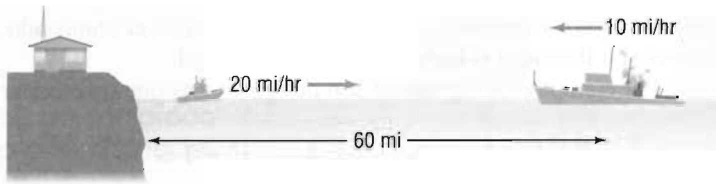
52. *Pureza del oro.* La pureza del oro se mide en quilates, el oro puro es de 24 quilates. Otras purezas se expresan como partes proporcionales de oro puro. Así, oro de 18 quilates es $\frac{18}{24}$, o 75% de oro puro; oro de 12 quilates es $\frac{12}{24}$, o 50% de oro puro, y así sucesivamente. ¿Cuánto oro de 12 quilates debe ser mezclado con oro puro para obtener 60 gramos de 16 quilates?

53. *Corredores.* Miguel puede correr una milla en 6 minutos y Daniel en 9 minutos. Si Miguel le da a Daniel ventaja de 1 minuto, ¿a partir del punto de arranque, dónde rebasará Miguel a Daniel? (*Véase* la figura.) ¿Cuánto tiempo le tomará?



54. *Física: movimiento uniforme.* Un bote de motor va río arriba en un río que tiene una corriente de 3 millas por hora. El viaje río arriba toma 5 horas y el regreso 2.5 horas. ¿Cuál es la velocidad del bote? (Suponga que se mantiene una velocidad constante con respecto al agua.)

55. *Rescate en el mar.* Un barco en peligro de hundirse envía por radio un mensaje de auxilio a la guardia costera. Cuando la embarcación de rescate parte de su estación el barco se encuentra a 60 millas y se dirige directamente hacia la estación. Si la velocidad promedio del barco es de 10 millas por hora y la de la embarcación de rescate es de 20 millas por hora, ¿cuánto tiempo le tomará a esta última llegar al barco? (*Véase* la figura.)



56. *Física: movimiento uniforme.* Dos autos entran a la autopista de Florida en el Boulevard Comercial a las 8:00 de la mañana rumbo a Wildwood. La velocidad promedio de un auto es de 10 millas por hora más que el otro. El auto más rápido llega a Wildwood a las 11:00 am, media hora antes que el otro. ¿Cuál es la velocidad promedio de cada automóvil? ¿Qué distancia recorrió cada uno?

57. *Vaciar un camión cisterna de petróleo.* Un camión cisterna de petróleo puede ser vaciado por una bomba principal en 4 horas y por una bomba auxiliar en 9 horas. Si la bomba principal arrancó a las 9:00 de la mañana, ¿cuándo debe ser activada la bomba auxiliar de modo que el camión esté vacío al mediodía?

58. *Mezcla de cemento.* Una bolsa de 20 libras contiene 25% de cemento y 75% de arena. ¿Cuánto cemento puro se debe agregar para producir una mezcla de cemento al 40 por ciento?

59. *Vaciar una tina.* Una tina de baño se llenará en 15 minutos si sus dos llaves permanecen abiertas y se tapa el desagüe. Con ambas llaves cerradas y quitando el tapón la tina se vaciará en 20 minutos. ¿En cuánto tiempo se llenará la tina si ambas llaves están abiertas y no está puesto el tapón?

60. *Autonomía de un avión.* Un avión de rescate vuela a 300 millas por hora con el viento en calma. Si lleva combustible para 5 horas de vuelo y después del despegue encuentra un viento de 30 millas por hora, ¿qué tan lejos puede ir y regresar de manera segura? (Suponga que el viento permanece constante.)

61. *Préstamo para casa.* Suponga que obtiene una hipoteca por $100,000.00 de la cual sólo hará pagos por los intereses mensuales a una taza de 10% de interés anual, pagando todo el capital dentro de cinco años. Usted decide invertir parte del préstamo en un certificado de depósito a 5 años que paga el 9% compuesto y que se paga por mes. La otra parte la invierte en un bono pagadero a 5 años que rinde el 12% compuesto y también se paga mensualmente. ¿Cuál es la mayor cantidad que puede invertir en el certificado de depósito para asegurarse de que el pago mensual del préstamo se realice?

62. *Compararación de héroes olímpicos.* En los Juegos Olímpicos de 1984, Carl Lewis de Estados Unidos ganó la medalla de oro en la carrera de los 100 metros con un tiempo de 9.99 segundos. En los Juegos Olímpicos de 1896, Thomas Burke, también de Estados Unidos, ganó la medalla de oro en la misma prueba en 12 segundos. Si ellos pudieran competir entre sí en la misma carrera repitiendo sus respectivos tiempos, ¿por cuántos metros le ganaría Lewis a Burke?

63. *Cálculo de velocidades promedio.* De Chicago a Atlanta un automóvil promedia 45 millas por hora, y de Atlanta a Miami promedia 55 millas por hora. Si Atlanta está a la mitad del camino entre Chicago y Miami, ¿cuál es la velocidad promedio desde Chicago hasta Atlanta? Exponga una solución intuitiva y escriba un párrafo defendiéndola. Después resuelva el problema de manera algebraica y diga si su solución intuitiva resultó igual a la algebraica? Si no es así, encuentre el error.

64. *Velocidad de un avión.* En un vuelo reciente de Phoenix a Kansas, a una distancia de 919 millas náuticas, el avión llegó 20 minutos antes de lo previsto. A la salida del avión le pregunté al capitán cuál había sido nuestro viento a favor. Él contestó que no lo sabía pero que nuestra velocidad respecto a la tierra fue de 550 nudos. ¿Cómo puede usted determinar si se tiene suficiente información para encontrar la velocidad del viento a favor? Si es posible encuentre dicha velocidad. (1 nudo = 1 milla náutica por hora.)

65. *Pensamiento crítico.* Usted es el administrador de una tienda de ropa y acaba de comprar 100 camisas de vestir en $20.00 cada una. Después de un mes de venta a precio regular, planea ofrecer el 40% de descuento sobre el precio original. Sin embargo, aún quiere obtener una ganancia de $4.00 por camisa. ¿Cuál debe ser el precio de venta original para asegurar la ganancia deseada? Si en lugar del 40% ofrece el 50% de descuento, ¿en cuánto se reducirán las ganancias?

66. *Pensamiento crítico.* Redacte un problema que requiera resolver una ecuación lineal como parte de su solución. Intercambie problemas con un compañero y escriba una crítica del problema de su compañero.

67. *Pensamiento crítico.* Sin resolver, explique lo que es erróneo en el siguiente problema de mezclas: ¿Cuántos litros de etanol al 25% deben ser agregados a 20 litros de etanol al 48% para obtener una solución al 58%? Luego resuelva de manera algebraica y explique el resultado.

1.4 Desigualdades

Una **desigualdad en una variable** es un enunciado que involucra dos expresiones, donde al menos una expresión contiene la variable, separadas por uno de los símbolos de desigualdad $<$, $\leq$, $>$, o $\geq$. **Resolver una desigualdad** significa encontrar todos los valores de la variable para los cuales el enunciado es cierto. Estos valores son llamados **soluciones** de la desigualdad.

Por ejemplo, las siguientes son desigualdades que involucran una variable, x:

$$x + 5 < 8 \qquad 2x - 3 \geq 4 \qquad x^2 - 1 \leq 3 \qquad \frac{x+1}{x-2} > 0$$

Al trabajar con desigualdades necesitaremos conocer ciertas propiedades que éstas cumplen:

Empecemos por la **propiedad de tricotomía,** la cual establece que cualesquiera dos números son iguales o uno de ellos es menor que el otro.

Para cualquier par de números reales a y b,

Propiedad de la tricotomía

$$a < b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad b < a$$

Si $b = 0$, la ley de tricotomía establece que, para cualquier número a,

$$a < 0 \quad \text{o} \quad a = 0 \quad \text{o} \quad a > 0$$

Esto es, cualquier número real es negativo, cero o positivo, un hecho que ya habíamos notado.

Para cualquier número real, tenemos

Propiedad de no negatividad

$$a^2 \geq 0$$

En las propiedades siguientes, a, b y c son números reales.

Propiedad transitiva de las desigualdades

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Propiedad de suma de las desigualdades

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.

La **propiedad de suma** afirma que el sentido, o dirección, de una desigualdad no cambia si se suma el mismo número a cada lado.

Propiedad de multiplicación de las desigualdades

Si $a < b$ y si $c > 0$, entonces $ac < bc$.
Si $a < b$ y si $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Si $a > b$ y si $c > 0$, entonces $ac > bc$.
Si $a > b$ y si $c < 0$, entonces $ac < bc$.

Las **propiedades de multiplicación** afirman que el sentido, o dirección, de una desigualdad *no cambia* si cada lado se multiplica por un número real *positivo*; pero si cada lado se multiplica por un número real *negativo*, sí se invertirá la dirección.

La **propiedad del recíproco** afirma que el recíproco de un número real positivo es positivo y el de un número real negativo es negativo.

Propiedad del recíproco para desigualdades

$$\text{Si } a > 0, \text{ entonces } \frac{1}{a} > 0.$$

$$\text{Si } a < 0, \text{ entonces } \frac{1}{a} < 0.$$

Resolución de desigualdades

Dos desigualdades que tienen exactamente el mismo conjunto solución son llamadas **desigualdades equivalentes**.

Como en las ecuaciones, un método para resolver una desigualdad es reemplazarla por una serie de desigualdades equivalentes, hasta que se obtenga una desigualdad con una solución obvia, tal como $x < 3$. Obtenemos desigualdades equivalentes aplicando alguna de las operaciones que se usaron para encontrar ecuaciones equivalentes. La propiedad de adición y las propiedades de multiplicación constituyen la base para proceder como sigue:

Procedimientos que no alteran el símbolo de desigualdad

1. Simplificar ambos lados de la desigualdad reduciendo términos semejantes y eliminando paréntesis:

$$\text{Reemplazar} \quad (x + 2) + 6 > 2x + (x + 1)$$
$$\text{por} \quad x + 8 > 3x + 1$$

2. Sumar o restar la misma expresión a ambos lados de la desigualdad:

$$\text{Reemplazar} \quad 3x - 5 < 4$$
$$\text{por} \quad (3x - 5) + 5 < 4 + 5$$

3. Multiplicar o dividir ambos lados de la desigualdad por la misma expresión *positiva*:

$$\text{Reemplazar} \quad 4x > 16 \quad \text{por} \quad \frac{4x}{4} > \frac{16}{4}$$

Procedimientos que invierten el sentido o dirección del símbolo de desigualdad

1. Intercambiar los lados de la desigualdad:

$$\text{Reemplazar} \quad 3 < x \quad \text{por} \quad x > 3$$

2. Multiplicar o dividir ambos lados de la desigualdad por la misma expresión *negativa*:

$$\text{Reemplazar} \quad -2x > 6 \quad \text{por} \quad \frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2}$$

EJEMPLO 1 *Resolución de una desigualdad*

Resolver la desigualdad $4x + 7 \geq 2x - 3$, y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución

$$4x + 7 \geq 2x - 3$$

$$4x + 7 - 7 \geq 2x - 3 - 7 \qquad \text{Restar 7 de ambos lados.}$$

$$4x \geq 2x - 10 \qquad \text{Simplificar.}$$

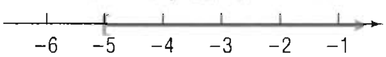
$$4x - 2x \geq 2x - 10 - 2x \qquad \text{Restar } 2x \text{ de ambos lados.}$$

$$2x \geq -10 \qquad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{2x}{2} \geq \frac{-10}{2} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 2. (El sentido de la desigualdad no cambia.)}$$

$$x \geq -5 \qquad \text{Simplificar.}$$

FIGURA 15
$-5 \leq x < \infty$ o $[-5, \infty)$



El conjunto solución es $\{x | -5 \leq x < \infty\}$ o, utilizando notación de intervalos, todos los números en el intervalo $[-5, \infty)$.

Véase la gráfica en la figura 15. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 2 *Resolución de una desigualdad combinada*

Resolver la desigualdad $-5 < 3x - 2 < 1$, y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución La desigualdad

$$-5 < 3x - 2 < 1$$

es equivalente a las dos desigualdades

$$-5 < 3x - 2 \quad \text{y} \quad 3x - 2 < 1$$

Resolveremos cada una de estas desigualdades por separado. Para la primera desigualdad,

$$-5 < 3x - 2$$

$$-5 + 2 < 3x - 2 + 2 \qquad \text{Sumar 2 a ambos lados.}$$

$$-3 < 3x \qquad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{-3}{3} < \frac{3x}{3} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 3.}$$

$$-1 < x \qquad \text{Simplificar.}$$

La segunda desigualdad se resuelve como sigue:

$$3x - 2 < 1$$

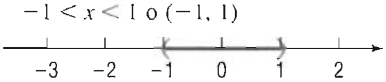
$$3x - 2 + 2 < 1 + 2 \qquad \text{Sumar 2 a ambos lados}$$

$$3x < 3 \qquad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{3x}{3} < \frac{3}{3} \qquad \text{Dividir ambos lados entre 3.}$$

$$x < 1 \qquad \text{Simplificar.}$$

FIGURA 16
$-1 < x < 1$ o $(-1, 1)$



El conjunto solución de la pareja de desigualdades original consiste de todas las x para las cuales

$$-1 < x \quad \text{y} \quad x < 1$$

Lo cual puede ser escrito de manera más breve como $\{x | -1 < x < 1\}$. En notación de intervalos, la solución es $(-1, 1)$. *Véase* la gráfica en la figura 16. ■

Observemos en este proceso que la solución de ambas desigualdades requirieron exactamente de los mismos pasos. Una forma abreviada de resolver la desigualdad original es tratar con las dos desigualdades al mismo tiempo, como sigue:

$$
\begin{array}{rcll}
-5 < & 3x - 2 & < 1 & \\
-5 + 2 < & 3x - 2 + 2 & < 1 + 2 & \text{Sumar 2 a ambos lados.} \\
-3 < & 3x & < 3 & \text{Simplificar.} \\
\dfrac{-3}{3} < & \dfrac{3x}{3} & < \dfrac{3}{3} & \text{Dividir ambos lados entre 3.} \\
-1 < & x & < 1 & \text{Simplificar.}
\end{array}
$$

■ Ahora resuelva el problema 11.

Para resolver desigualdades que contengan polinomios de grado 2 o mayores, así como expresiones racionales, las reacomodamos de modo que la expresión polinomial o racional esté en el lado izquierdo y el cero del lado derecho. Un ejemplo nos mostrará el por qué.

EJEMPLO 3 *Resolución de una desigualdad cuadrática*

Resolver la desigualdad $x^2 + x - 12 > 0$, y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución Factorizamos el lado izquierdo, obteniendo

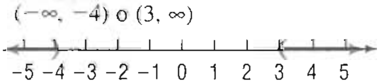
$$x^2 + x - 12 > 0$$
$$(x + 4)(x - 3) > 0$$

El producto de dos números reales es positivo si ambos factores son positivos o si ambos factores son negativos.

AMBOS NEGATIVOS	O	AMBOS POSITIVOS
$x + 4 < 0$ y $x - 3 < 0$ $x < -4$ y $x < 3$		$x + 4 > 0$ y $x - 3 > 0$ $x > -4$ y $x > 3$
Los números x que son menores que -4 y al mismo tiempo menores que 3 son simplemente		Los números x que son mayores que -4 y al mismo tiempo mayores que 3 son simplemente
$x < -4$	o	$x > 3$

FIGURA 17

$-\infty < x < -4$ o $3 < x < \infty$;
$(-\infty, -4)$ o $(3, \infty)$



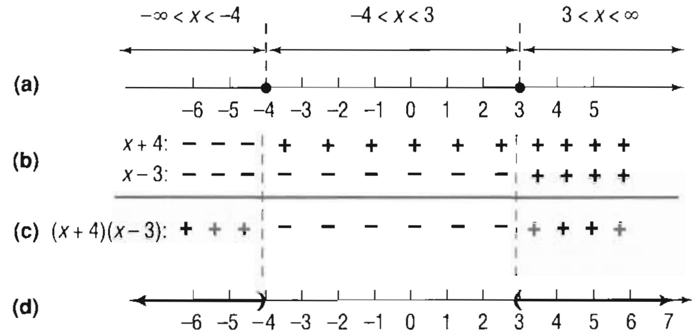
El conjunto solución es $\{x \mid -\infty < x < -4 \text{ o } 3 < x < \infty\}$. En notación de intervalos escribimos la solución como $(-\infty, -4)$ o $(3, \infty)$. *Véase* la figura 17. ■

También podemos obtener la solución a la desigualdad del ejemplo 3 por otro método. Factorizamos el lado izquierdo de la desigualdad de modo que se transforme en $(x + 4)(x - 3) > 0$, como antes. Luego usamos la recta de los números reales para construir una gráfica que utilice las soluciones de la ecuación

$$x^2 + x - 12 = (x + 4)(x - 3) = 0$$

que son $x = -4$ y $x = 3$. Estos números dividen la recta de los números reales en tres intervalos: $-\infty < x < -4$, $-4 < x < 3$, and $3 < x < \infty$. *Véase* la figura 18(a).

FIGURA 18



Ahora, si $x < -4$, entonces $x + 4 < 0$. Indicamos este hecho acerca de la expresión $x + 4$ colocando signos menos $(---)$ a la izquierda de -4. *Véase* la figura 18(b). Si $x > -4$, entonces $x + 4 > 0$. Indicamos este hecho acerca de $x + 4$ colocando signos más $(+++)$ a la derecha de -4.

De manera análoga, si $x < 3$, entonces $x - 3 < 0$. Indicamos este hecho acerca de $x - 3$ colocando signos menos a la izquierda de 3. Si $x > 3$, entonces $x - 3 > 0$, lo cual indicamos colocando signos más a la derecha de 3. *Véase* la figura 18(b).

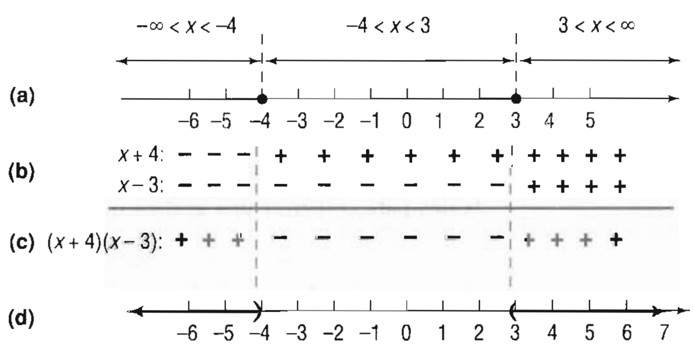
Ahora preparemos la figura 18(c): como sabemos que las expresiones $x + 4$ y $x - 3$ son ambas negativas para $x < -4$, deducimos que su producto es positivo para $x < -4$. Como sabemos que $x - 3$ es negativo y $x + 4$ es positivo para $-4 < x < 3$, deducimos que su producto es negativo para $-4 < x < 3$. Por último, como ambas expresiones son positivas para $x > 3$, su producto es positivo para $x > 3$. Colocamos signos más y menos como se muestra en la figura 18(c) para indicar lo anterior.

Por último, en la figura 18(d) mostramos sobre la recta numérica en dónde es positiva la expresión $(x + 4)(x - 3)$. Como antes, la solución a la desigualdad original $(x + 4)(x - 3) = x^2 + x - 12 > 0$ es $\{x| -\infty < x < -4 \text{ o } 3 < x < \infty\}$.

El estudio precedente demuestra que el signo de cada factor en una expresión es el mismo en cada intervalo en que fue dividida la recta de los números reales. En consecuencia, un enfoque alterno y más sencillo para obtener la figura 18(c) sería seleccionar un **número de prueba** en cada intervalo y usarlo para evaluar cada factor a fin de ver si es positivo o negativo. Podemos seleccionar cualquier número del intervalo.

En la figura 19(a), los números de prueba -5, 1, 4 que seleccionamos están en azul. Para $x + 4$, insertamos signos menos debajo de $-\infty < x < -4$, porque, para el número de prueba -5, el valor de $x + 4$ es $-5 + 4 = -1$, un número negativo.

FIGURA 19



Continuando, insertamos signos más debajo de $-4 < x < 3$ porque, para el número de prueba 1, el valor de $x + 4$ es $1 + 4 = 5$, un número positivo. Este proceso se continúa para cada factor y cada intervalo con el fin de obtener la figura 19(b). El resto de la figura 19 se obtiene como antes.

Emplearemos el método de utilizar un número de prueba para resolver desigualdades en otro ejemplo que muestra todos los detalles.

EJEMPLO 4 *Resolución de una desigualdad cuadrática*

Resolver la desigualdad $x^2 \leq 4x + 12$, y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución Primero reacomodamos la desigualdad de modo que en el lado derecho esté el 0:

$$x^2 \leq 4x + 12$$
$$x^2 - 4x - 12 \leq 0$$
$$(x + 2)(x - 6) \leq 0 \qquad \text{Factorizar.}$$

Luego hacemos el lado izquierdo igual a 0 y resolvemos la ecuación resultante:

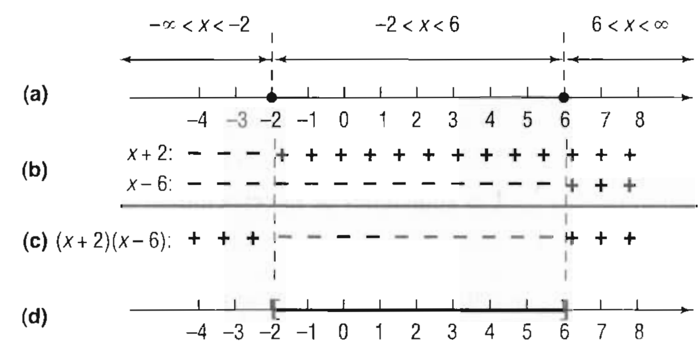
$$(x + 2)(x - 6) = 0$$

Las soluciones de la ecuación son -2 y 6, y dividen la recta de los números reales en tres intervalos:

$$-\infty < x < -2 \qquad -2 < x < 6 \qquad 6 < x < \infty$$

Véase la figura 20.

FIGURA 20



Ahora, para el número de prueba -3, encontramos que $x + 2 = -3 + 2 = -1$, un número negativo, de modo que colocamos signos menos debajo del intervalo $-\infty < x < -2$. Para el número de prueba 1, encontramos $x + 2 = 1 + 2 = 3$, un número positivo, de modo que colocamos signos más debajo del intervalo $-2 < x < 6$. Continuando de esta manera obtenemos la figura 20(b).

Ahora colocamos los signos del producto $(x + 2)(x - 6)$ de la figura 20(c). Como queremos conocer en dónde es negativo el producto $(x + 2)(x - 6)$, concluimos que las soluciones son los números x para los cuales $-2 < x < 6$. Sin embargo, ya que la desigualdad original no es estricta, los números x que satisfacen la ecuación $x^2 = 4x + 12$ también son soluciones de la desigualdad $x^2 \leq 4x + 12$. Por tanto, incluimos -2 y 6, y el conjunto solución de la desigualdad dada es $\{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$, esto es, todas las x en $[-2, 6]$. *Véase* la figura 20(d). ■

■ Ahora resuelva los problemas 15 y 21.

Hemos resuelto desigualdades reacomodando las expresiones de modo que aparezca un cero en el lado derecho, haciendo el lado izquierdo igual a cero y resolviendo la ecuación resultante. Las soluciones son utilizadas para dividir la recta de los números reales en intervalos. ¿Pero qué pasa cuando la ecuación resultante no tiene solución real? En ese caso contamos con el resultado siguiente.

Teorema Si una ecuación polinomial no tiene soluciones reales, el polinomio siempre es positivo o siempre es negativo. ■

Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 5x + 8 = 0$$

no tiene soluciones reales. (¿Advierte por qué? Porque su discriminante, $b^2 - 4ac = 25 - 32 = -7$ es negativo.) Por lo tanto, el valor de $x^2 + 5x + 8$ siempre será positivo o negativo. Para ver cuál es el sentido cierto, probamos su valor en algún número (0 es el más fácil). Ya que $0^2 + 5(0) + 8 = 8$ es positivo, concluimos que $x^2 + 5x + 8 > 0$ para toda x.

EJEMPLO 5 *Resolución de una desigualdad polinomia*

Resolver la desigualdad $x^4 \le x$ y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución Reescribimos la desigualdad de modo que 0 esté en el lado derecho:

$$\begin{aligned} x^4 &\le x \\ x^4 - x &\le 0 \end{aligned}$$

Después procedemos a factorizar el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} x^4 - x &\le 0 \\ x(x^3 - 1) &\le 0 \\ x(x - 1)(x^2 + x + 1) &\le 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de la ecuación

$$x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

son sólo 0 y 1, ya que la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales. Notamos que la expresión $x^2 + x + 1$ siempre es positiva. (¿Advierte por qué?) Ahora usamos 0 y 1 para separar la recta de los números reales en tres intervalos:

$$-\infty < x < 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 1 < x < \infty$$

Después construimos la figura 21 que muestra los signos de x, $x - 1$ y $x^2 + x + 1$. Observe que como $x^2 + x + 1 > 0$ para toda x, colocamos signos más a continuación de ella.

FIGURA 21

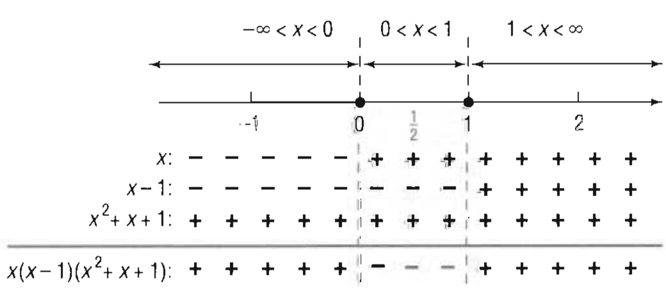
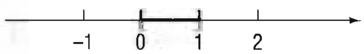


FIGURA 22
$0 \le x \le 1$ o $[0, 1]$



Como queremos saber en dónde $x^4 \le x$ o, de manera equivalente, dónde $x(x-1)(x^2+x+1) \le 0$, concluimos de la figura 21 que el conjunto solución es $\{x|0 \le x \le 1\}$, esto es, toda x en $[0, 1]$. *Véase* la figura 22. ■

■ Ahora resuelva el problema 33.

E J E M P L O 6 *Resolución de una desigualdad racional*

Resolver la desigualdad $\dfrac{4x+5}{x+2} \ge 3$, y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución Primero observamos que el dominio de la variable consiste de todos los números reales exceptuando a -2. Reacomodamos los términos de modo que 0 aparezca en el lado derecho:

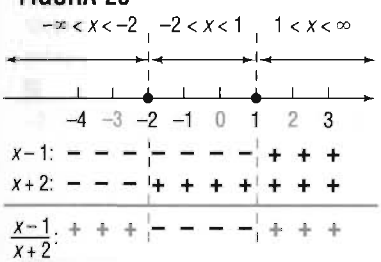
$$\frac{4x+5}{x+2} \ge 3$$

$$\frac{4x+5}{x+2} - 3 \ge 0$$

$$\frac{4x+5-3(x+2)}{x+2} \ge 0 \qquad \text{Reescribir utilizando } x+2 \text{ como denominador.}$$

$$\frac{x-1}{x+2} \ge 0 \qquad \text{Simplificar.}$$

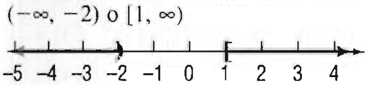
FIGURA 23



El signo de la expresión racional depende de los signos de su numerador y de su denominador. Por tanto, para una expresión racional, separamos la recta de los números reales en intervalos utilizando los números obtenidos haciendo el numerador y el denominador iguales a cero. Para este ejemplo, son -2 y 1. *Véase* la figura 23.

La línea inferior en la figura 23 revela los números x para los cuales $(x-1)/(x+2)$ es positiva. Sin embargo, queremos conocer en dónde la expresión $(x-1)/(x+2)$ es positiva o cero. Ya que $(x-1)/(x+2) = 0$ sólo si $x = 1$, concluimos que el conjunto solución es $\{x|-\infty < x < -2$ o $1 \le x < \infty\}$, esto es, todas las x en $(-\infty, -2)$ o $[1, \infty)$. *Véase* la figura 24. ■

FIGURA 24
$-\infty < x < -2$ o $1 \le x < \infty$
$(-\infty, -2)$ o $[1, \infty)$



En el ejemplo 6, tal vez se sorprendió porque no multiplicamos primero ambos lados de la desigualdad por $x + 2$ para quitar el denominador. La razón es que no sabemos si $x + 2$ es positivo o negativo y, como consecuencia de ello, no sabemos si podemos invertir el sentido del signo de la desigualdad después de multiplicar por $x + 2$. Sin embargo, no hay nada que nos impida multiplicar ambos lados por $(x+2)^2$, que siempre es positivo, ya que $x \ne -2$. (¿Advierte por qué?) Entonces

$$\frac{4x+5}{x+2} \ge 3 \qquad x \ne -2$$

$$\frac{4x+5}{x+2}(x+2)^2 \ge 3(x+2)^2$$

$$(4x+5)(x+2) \ge 3(x^2+4x+4)$$

$$4x^2+13x+10 \ge 3x^2+12x+12$$

$$x^2+x-2 \ge 0$$

$$(x+2)(x-1) \ge 0 \qquad x \ne -2$$

Esta última expresión conduce al mismo conjunto solución obtenido en el ejemplo 6.

■ Ahora resuelva el problema 41.

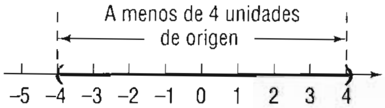
Veamos una desigualdad que involucra valor absoluto.

EJEMPLO 7 *Resolución de una desigualdad que involucra un valor absoluto*

Resolver la desigualdad $|x| < 4$ y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución Estamos buscando todos los puntos x cuya distancia al origen sea menor que 4 unidades. Para una ilustración *véase* la figura 25. Puesto que cualquier x entre -4 y 4 satisface la condición $|x| < 4$, el conjunto solución consiste de todos los números x para los cuales $-4 < x < 4$, esto es, todas las x en $(-4, 4)$. ■

FIGURA 25 $-4 < x < 4$ o $(-4, 4)$

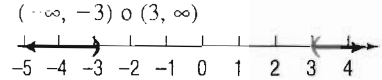


EJEMPLO 8 *Resolución de una desigualdad que involucra un valor absoluto*

Resolver la desigualdad $|x| > 3$ y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución Buscamos todos los puntos x cuya distancia al origen sea mayor que 3 unidades. La figura 26 ilustra la situación. Concluimos que cualquier x menor que -3 o mayor que 3 satisface la condición $|x| > 3$. En consecuencia, el conjunto solución consiste de todos los números x para los cuales $-\infty < x < -3$ o $3 < x < \infty$, esto es, todas las x en $(-\infty, -3)$ o $(3, \infty)$. ■

FIGURA 26
$-\infty < x < -3$ o $3 < x < \infty$;
$(-\infty, -3)$ o $(3, \infty)$



Llegamos así a los resultados siguientes:

Teorema Si a es cualquier número positivo, entonces

$\lvert u\rvert < a$	es equivalente	$-a < u < a$	(1)
$\lvert u\rvert \le a$	es equivalente	$-a \le u \le a$	(2)
$\lvert u\rvert > a$	es equivalente	$u < -a$ o $u > a$	(3)
$\lvert u\rvert \ge a$	es equivalente	$u \le -a$ o $u \ge a$	(4)

■

EJEMPLO 9 *Resolución de una desigualdad que involucra un valor absoluto*

Resolver la desigualdad $|2x + 4| \le 3$ y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución

$$|2x + 4| \le 3 \quad \text{Esto tiene la forma de la proposición (2); la expresión } u = 2x + 4 \text{ está dentro de las barras de valor absoluto.}$$

$$-3 \le 2x + 4 \le 3 \quad \text{Aplicar la ecuación (2).}$$

$$-3 - 4 \le 2x + 4 - 4 \le 3 - 4 \quad \text{Restar 4 de cada parte.}$$

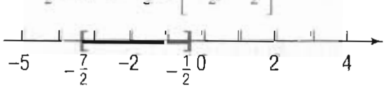
$$-7 \le 2x \le -1 \quad \text{Simplificar.}$$

$$\frac{-7}{2} \le \frac{2x}{2} \le -\frac{1}{2} \quad \text{Dividir entre 2 cada parte.}$$

$$-\frac{7}{2} \le x \le -\frac{1}{2} \quad \text{Simplificar.}$$

El conjunto solución es $\{x| -\frac{7}{2} \le x \le -\frac{1}{2}\}$, esto es, todas las x en $[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}]$. *Véase* la figura 27. ■

FIGURA 27 $-\frac{7}{2} \le x \le -\frac{1}{2}$ o $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$



■ Ahora resuelva el problema 49.

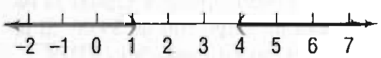
EJEMPLO 10 *Resolución de una desigualdad que involucra valor absoluto*

Resolver la desigualdad $|2x - 5| > 3$, y hacer la gráfica del conjunto solución.

Solución

$\|2x - 5\| > 3$			Esto tiene la forma de la proposición (3); la expresión $u = 2x - 5$ está dentro de las barras de valor absoluto.
$2x - 5 < -3$	o	$2x - 5 > 3$	Aplicar la ecuación (3).
$2x - 5 + 5 < -3 + 5$	o	$2x - 5 + 5 > 3 + 5$	Sumar 5 a cada parte.
$2x < 2$	o	$2x > 8$	Simplificar.
$\frac{2x}{2} < \frac{2}{2}$	o	$\frac{2x}{2} > \frac{8}{2}$	Dividir entre 2 cada parte.
$x < 1$	o	$x > 4$	Simplificar.

FIGURA 28
$-\infty < x < 1$ o $4 < x < \infty$;
$(-\infty, 1)$ o $(4, \infty)$



El conjunto solución es $\{x| \; -\infty < x < 1$ o $4 < x < \infty\}$, esto es, todas las x en $(-\infty, 1)$ o $(4, \infty)$. *Véase* la figura 28. ■

Advertencia: Un error común es escribir la solución $x < 1$ o $x > 4$, como $1 > x > 4$, lo cual es incorrecto, ya que no existen números x para los que $x < 1$ y $x > 4$. Otro error común es "mezclar" los símbolos y escribir $1 < x > 4$, lo que, por supuesto, no tiene sentido.

1.4

Ejercicio 1.4

En los problemas del 1 al 56, resuelva cada desigualdad y haga la gráfica del conjunto solución.

1. $3x - 1 \geq 3 + x$
2. $2x - 2 \geq 3 + x$
3. $-2(x + 3) < 8$
4. $-3(1 - x) < 12$
5. $4 - 3(1 - x) \leq 3$
6. $8 - 4(2 - x) \leq -2x$
7. $\frac{1}{2}(x - 4) > x + 8$
8. $3x + 4 > \frac{1}{2}(x - 2)$
9. $\frac{x}{2} \geq 1 - \frac{x}{4}$
10. $\frac{x}{3} \geq 2 + \frac{x}{6}$
11. $0 \leq 2x - 6 \leq 4$
12. $4 \leq 2x + 2 \leq 10$
13. $-5 \leq 4 - 3x \leq 2$
14. $-3 \leq 2 - 2x \leq 9$
15. $(x - 5)(x + 2) < 0$
16. $(x - 1)(x + 2) < 0$
17. $-x^2 + 9 > 0$
18. $-x^2 + 1 > 0$
19. $x^2 + x > 12$
20. $x^2 + 7x < -12$
21. $x(x - 7) > 8$
22. $x(x + 1) > 2$
23. $4x^2 + 9 < 6x$
24. $25x^2 + 16 < 40x$
25. $(x - 1)(x^2 + x + 1) > 0$
26. $(x + 2)(x^2 - x + 1) > 0$
27. $(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$
28. $(x + 1)(x + 2)(x + 3) < 0$
29. $-x^3 + 2x^2 + 3x < 0$
30. $-x^3 - 2x^2 + 8x < 0$
31. $x^4 > x^2$
32. $x^3 < 4x$
33. $x^3 > x^2$
34. $x^3 < 3x^2$
35. $\frac{x + 1}{1 - x} < 0$
36. $\frac{3 - x}{x + 1} < 0$
37. $\frac{(x - 1)(x + 1)}{x} < 0$
38. $\frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 1} < 0$
39. $\frac{(x - 2)^2}{x^2 - 1} \geq 0$

40. $\dfrac{x+5}{x^2-4} \geq 0$

41. $\dfrac{x+4}{x-2} \leq 1$

42. $\dfrac{x+2}{x-4} \geq 1$

43. $\dfrac{2x+5}{x+1} > \dfrac{x+1}{x-1}$

44. $\dfrac{1}{x+2} > \dfrac{3}{x+1}$

45. $|2x| < 8$

46. $|3x| < 12$

47. $|3x| > 12$

48. $|2x| > 6$

49. $|x-2| < 1$

50. $|x+4| < 2$

51. $|3t-2| \leq 4$

52. $|2u+5| \leq 7$

53. $|x-3| \geq 2$

54. $|x+3| \geq 2$

55. $|1-4x| < 5$

56. $|1-2x| < 3$

57. Exprese el hecho de que x difiere de 2 en menos de $\frac{1}{2}$ como una desigualdad que involucre valor absoluto. Resuelva para x.

58. Exprese el hecho de que x difiere de -1 en menos de 1 como una desigualdad que involucre valor absoluto. Resuelva para x.

59. Exprese el hecho de que x difiere de -3 por más de 2 como una desigualdad que involucre valor absoluto. Resuelva para x.

60. Exprese el hecho de que x difiere de 2 en más de 3 como una desigualdad que involucre valor absoluto. Resuelva para x.

61. *Temperatura corporal.* La temperatura "normal" del cuerpo humano es de 98.6 ° F. Si una temperatura x que difiere de la normal por al menos 1.5° es considerada no sana, escriba la condición para una temperatura no sana x como una desigualdad que involucre valor absoluto, y resuelva para x.

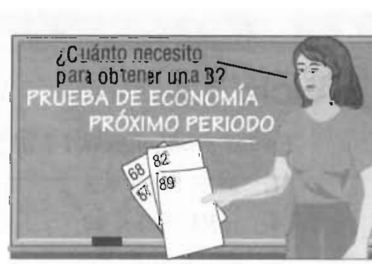
62. *Voltaje doméstico.* En Estados Unidos el voltaje casero normal es de 115 voltios. Sin embargo, no es raro que el voltaje real difiera del normal en 5 voltios, cuando mucho. Exprese esta situación como una desigualdad que involucre valor absoluto. Utilice x como el voltaje real y resuelva para x.

63. *Tasas de electricidad.* El cargo en verano por consumo de electricidad de la compañía Commonwealth Edison es de 10.819 centavos por kilowatt-hora.* Además, mensualmente la factura de electricidad lleva un cargo fijo de $9.06. Si la factura del último verano varió desde $82.14 hasta $279.63, ¿en qué rango varió el consumo (en kilowatts-hora)?

64. *Facturas de agua.* La Villa de Oak Lawn cobra a los usuarios domésticos $17.76 por trimestre más $1.34 por cada 1000 galones de agua utilizada después de 12,000 galones.† En 1991, la factura trimestral de una persona varió desde $49.92 hasta $28.48. ¿En qué rango varió el consumo de agua?

65. *Aumento en un automóvil nuevo.* El aumento sobre el costo del distribuidor de un automóvil nuevo varía desde un 12 hasta un 18%. Si el precio marcado es de $8800.00, ¿en qué rango variará el costo del distribuidor?

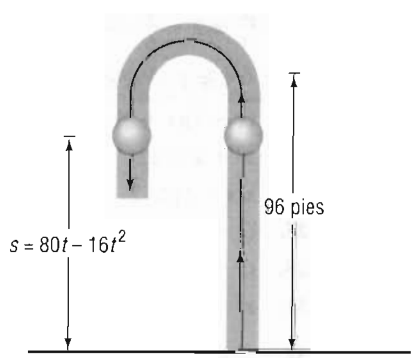
66. *Pruebas de IQ.* Una prueba estándar de inteligencia tiene una calificación promedio de 100. De acuerdo con la teoría estadística, de las personas que toman la prueba, el 2.5% con las calificaciones más altas tendrán calificaciones superiores en más de 1.95σ por arriba del promedio, donde σ (sigma, un número llamado la *desviación estándar*) depende de la naturaleza de la prueba. Si $\sigma = 12$ para esta prueba y no hay (en principio) límite superior para la calificación de la prueba, escriba el intervalo de calificaciones posibles para las personas que logren ubicarse en el 2.5% superior.



67. En la clase de economía usted obtuvo calificaciones de 68, 82, 87 y 89 en sus primeros cuatro de cinco exámenes. Para obtener una calificación de B, el promedio de los cinco exámenes debe ser mayor o igual que 80 y menor que 90. Resuelva una desigualdad para encontrar el rango de la calificación que necesita en el último examen para obtener una B.

68. Repita el problema 67 si el quinto examen cuenta el doble que cualquiera de los otros.

69. *Física.* Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 pies por segundo. La distancia s (en pies) de la pelota al suelo después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$. ¿Calcule el intervalo de tiempo en que la pelota está a más de 96 pies del suelo? (*Véase* la figura.)



70. *Física.* Repita el problema 69 para determinar cuándo la pelota está a menos de 64 pies del suelo.

71. *Comercio.* El ingreso mensual obtenido por la venta de x relojes de pulsera será $x(40 - 0.2x)$ dólares. El costo al mayoreo de cada reloj es de US $28.00. ¿Cuántos relojes deben venderse cada mes para obtener una ganancia (ingreso - costo) de al menos US $100.00 dólares?

**Fuente*: Commonwealth Edison Co., Chicago, Illinois, 1991.

†Fuente: Villa de Oak Lawn, Illinois, 1991.

72. *Comercio.* El ingreso mensual obtenido por la venta de x cajas de dulces será $x(5 - 0.5x)$ dólares. El costo al mayoreo de cada caja es de \$1.50. ¿Cuántas cajas deben venderse cada mes para obtener una ganancia de al menos \$60.00 dólares?

73. Si $a > 0$, demuestre que el conjunto solución de la desigualdad

$$x^2 < a$$

consiste de todos los números x para los cuales

$$-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

74. Si $a > 0$, demuestre que el conjunto solución de la desigualdad

$$x^2 > a$$

consiste de todos los números x para los cuales

$$x > \sqrt{a} \quad \text{o} \quad x < -\sqrt{a}$$

En los problemas del 75 al 82, utilice los resultados de los problemas 72 y 74 para resolver cada desigualdad.

75. $x^2 < 1$	76. $x^2 < 4$	77. $x^2 \geq 9$	78. $x^2 \geq 1$
79. $x^2 \leq 16$	80. $x^2 \leq 9$	81. $x^2 > 4$	82. $x^2 > 16$

83. Encuentre k tal que la ecuación $x^2 + kx + 1 = 0$ no tenga solución real.

84. Encuentre k tal que la ecuación $kx^2 + 2x + 1 = 0$ tenga dos soluciones reales distintas.

85. Construya una desigualdad que no tenga solución y una que tenga exactamente una solución.

86. La desigualdad $x^2 + 1 < -5$ no tiene solución. Explique por qué.

1.5 Números complejos

Una propiedad de un número real es que su cuadrado es no negativo. Por ejemplo, no existe número real x para el cual

$$x^2 = -1$$

Para remediar esta situación, introducimos un número llamado **unidad imaginaria,** que denotamos por $\boldsymbol{i}$ y cuyo cuadrado es -1. Así,

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Esto no debe sorprenderlo. Si nuestro universo consistiera sólo de enteros, no habría número x para el cual $2x$ fuera igual a uno. Esta circunstancia desafortunada se remedió al introducir en el ámbito matemático el uso de números tales como $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$, los *números racionales.* Si nuestro universo consistiera sólo de los números racionales, no habría número x cuyo cuadrado fuera igual a 2. Esto es, no habría una x tal que x^2 fuera igual a dos. Para remediar esto se introdujeron números tales como $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{5}$, los *números irracionales.* Los *números reales,* recordemos, consisten de los números racionales y de los irracionales. Ahora, si nuestro universo consistiera sólo de números reales, entonces no habría número x cuyo cuadrado fuera -1. Para remediar esto fue que se introdujo el número i, cuyo cuadrado es -1.

Así, cada vez que los matemáticos se han encontrado ante una situación impropia, la han resuelto introduciendo un sistema nuevo y adecuado de números. Cada nuevo sistema de números contiene al sistema anterior como un subconjunto. El sistema numérico que resultó al introducir el número i es llamado **sistema de los números complejos.**

Números complejos

Los **números complejos** son aquellos que tienen la forma $\boldsymbol{a + bi}$, donde a y b son números reales. El número real a es llamado **parte real** del número $a + bi$, el número real b es la **parte imaginaria** de $a + bi$.

Por ejemplo, el número complejo $-5 + 6i$ tiene parte real -5 y parte imaginaria 6.

Cuando un número complejo está escrito en la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, decimos que está en **forma estándar.** Pero si la parte imaginaria de un número complejo es negativa, tal como en $3 + (-2)i$, convenimos en escribirlo en la forma $3 - 2i$.

También, el número complejo $a + 0i$ por lo común se escribe sólo como a. Esto sirve para recordarnos que los números reales son un subconjunto de los números complejos. El número complejo $0 + bi$ por lo común se escribe como bi. Algunas veces el número complejo bi es llamado un **número imaginario puro.**

La igualdad, suma, resta y multiplicación de números complejos, están definidas de modo que se conserven las reglas del álgebra para los números reales. Por tanto, dos números complejos son iguales si, y sólo si, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. Esto es,

Igualdad de números complejos

$$a + bi = c + di \quad \text{si y solo si} \quad a = c \text{ y } b = d \tag{1}$$

Al sumar dos números complejos se forma otro número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales de los números complejos originales, y cuya parte imaginaria es la suma de las partes imaginarias de dichos números. Esto es,

Suma de números complejos

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \tag{2}$$

Para restar dos números complejos, seguimos la regla

Resta de números complejos

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \tag{3}$$

EJEMPLO 1 *Suma y resta de números complejos*

(a) $(3 + 5i) + (-2 + 3i) = [3 + (-2)] + (5 + 3)i = 1 + 8i$

(b) $(6 + 4i) - (3 + 6i) = (6 - 3) + (4 - 6)i = 3 + (-2)i = 3 - 2i$ ■

■ Ahora resuelva el problema 5.

El producto de números complejos se calcula como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 *Multiplicación de números complejos*

$$(5 + 3i) \cdot (2 + 7i) \underset{\text{Propiedad Distributiva}}{=} 5 \cdot (2 + 7i) + 3i(2 + 7i) \underset{\text{Propiedad Distributiva}}{=} 10 + 35i + 6i + 21i^2$$

$$\underset{i^2 = -1}{=} 10 + 41i + 21(-1)$$

$$= -11 + 41i$$

Con base en el procedimiento del ejemplo 2, definimos el **producto** de dos números complejos por la fórmula

Producto de números Complejos

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad (4)$$

No se preocupe por memorizar la fórmula (4). En lugar de eso, siempre que sea necesario multiplicar dos números complejos, siga las reglas de la multiplicación de dos binomios, como en el ejemplo 2, recordando que $i^2 = -1$. Por ejemplo,

$$(2i)(2i) = 4i^2 = -4$$

$$(2 + i)(1 - i) = 2 - 2i + i - i^2 = 3 - i$$

■ Ahora resuelva el problema 11.

Las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la suma y la multiplicación, son ciertas para los números complejos. Sin embargo, la propiedad de que todo número complejo distinto de cero tiene un inverso multiplicativo, o recíproco, requiere un análisis más cuidadoso.

Conjugados

Conjugado

Si $z = a + bi$ es un número complejo, entonces su **conjugado,** denotado por $\bar{z}$, se define como

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Por ejemplo, $\overline{2 + 3i} = 2 - 3i$ y $\overline{-6 - 2i} = -6 + 2i$.

EJEMPLO 3 *Multiplicación de un número complejo por su conjugado*

Encuentre el producto de los números complejos $z = 3 + 4i$ y su conjugado $\bar{z}$.

Solución Como $\bar{z} = 3 - 4i$, tenemos

$$z\bar{z} = (3 + 4i)(3 - 4i) = 9 + 12i - 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$$

El resultado obtenido en el ejemplo 3 tiene una generalización importante:

Teorema El producto de un número complejo por su conjugado es un número real no negativo. Por tanto, si $z = a + bi$, entonces

$$\boxed{z\bar{z} = a^2 + b^2 \qquad (5)}$$

Prueba Si $z = a + bi$, entonces

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2 \qquad \blacksquare$$

Para expresar el recíproco de un número complejo distinto de cero, z en la forma estándar, multiplicamos el numerador y el denominador por su conjugado $\bar{z}$. Por tanto, si $z = a + bi$ es un número complejo distinto de cero, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} &= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}\\ &= \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usar (5).}}}{=}\frac{a-bi}{a^2+b^2}\\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 *Expresar el recíproco de un número complejo en la forma estándar*

Escriba $\dfrac{1}{3+4i}$ en forma estándar $a + bi$; esto es, encuentre el recíproco de $3 + 4i$.

Solución La idea es multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de $3 + 4i$, es decir, por el número complejo $3 - 4i$. El resultado es

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{3-4i}{9+16} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \qquad \blacksquare$$

Para expresar el cociente de dos números complejos en la forma estándar, multiplicamos el numerador y el denominador del cociente por el conjugado del denominador.

EJEMPLO 5 *Forma estándar del cociente de números complejos*

Escribir cada uno de los siguientes cocientes en la forma estándar:

(a) $\dfrac{1+4i}{5-12i}$ (b) $\dfrac{2-3i}{4-3i}$

Solución (a) $\dfrac{1+4i}{5-12i} = \dfrac{1+4i}{5-12i}\cdot\dfrac{5+12i}{5+12i} = \dfrac{5+20i+12i+48i^2}{25+144}$

$$= \frac{-43+32i}{169} = \frac{-43}{169} + \frac{32}{169}i$$

(b) $\dfrac{2-3i}{4-3i} = \dfrac{2-3i}{4-3i}\cdot\dfrac{4+3i}{4+3i} = \dfrac{8-12i+6i-9i^2}{16+9} = \dfrac{17-6i}{25} = \dfrac{17}{25} - \dfrac{6}{25}i$

■

■ Ahora resuelva el problema 19.

EJEMPLO 6 *Forma estándar de otras expresiones*

Si $z = 2 - 3i$ y $w = 5 + 2i$, escribir cada una de las expresiones siguientes en forma estándar:

(a) $\dfrac{z}{w}$ (b) $\overline{z + w}$ (c) $z + \bar{z}$

Solución (a) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \dfrac{(2 - 3i)(5 - 2i)}{(5 + 2i)(5 - 2i)} = \dfrac{10 - 15i - 4i + 6i^2}{25 + 4}$

$= \dfrac{4 - 19i}{29} = \dfrac{4}{29} - \dfrac{19}{29}i$

(b) $\overline{z + w} = \overline{(2 - 3i) + (5 + 2i)} = \overline{7 - i} = 7 + i$

(c) $z + \bar{z} = (2 - 3i) + (2 + 3i) = 4$ ■

El conjugado de un número complejo tiene ciertas propiedades generales que nos serán útiles más adelante. Veamos:

Para un número real $a = a + 0i$, el conjugado es $\bar{a} = \overline{a + 0i} = a - 0i = a$. Así,

Teorema El conjugado de un número real es el mismo número real. ■

Otras propiedades del conjugado, consecuencias directas de su definición, se dan en seguida. En cada enunciado z y w representan números complejos.

Teorema El conjugado del conjugado de un número complejo es el número complejo mismo:

$$(\bar{\bar{z}}) = z \tag{6}$$

El conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \tag{7}$$

El conjugado del producto de dos números complejos es igual al producto de sus conjugados:

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \tag{8}$$

Le dejamos como ejercicio demostraciones de las ecuaciones (6), (7) y (8).

Potencias de *i*

Las **potencias de *i*** siguen un patrón que es útil conocer

$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

Y así sucesivamente. Por tanto, las potencias de i se repiten cada cuarta potencia.

EJEMPLO 7 *Evaluación de potencias de i*

(a) $i^{27} = i^{24} \cdot i^3 = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1^6 \cdot i^3 = -i$

(b) $i^{101} = i^{100} \cdot i^1 = (i^4)^{25} \cdot i = 1^{25} \cdot i = i$ ■

EJEMPLO 8 *Forma estándar de las potencias de un número complejo*

Escribir $(2 + i)^3$ en forma estándar.

Solución Usamos la fórmula del producto notable $(x + a)^3$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(2 + i)^3 &= 2^3 + 3 \cdot i \cdot 2^2 + 3 \cdot i^2 \cdot 2 + i^3 \\ &= 8 + 12i + 6(-1) + (-i) \\ &= 2 + 11i\end{aligned}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 33.

Ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo

Las ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo no tienen solución en los números reales. Pero si extendemos nuestro sistema numérico hasta admitir números complejos, siempre encontraremos una solución para las ecuaciones cuadráticas. Ya que la solución de una ecuación cuadrática involucra la raíz cuadrada del discriminante, empecemos con el estudio de las raíces cuadradas de números negativos.

Raíz cuadrada principal de $-N$

Si N es un número real positivo, definimos la **raíz cuadrada principal de $-N$,** denotada por $\sqrt{-N}$, como

$$\boxed{\sqrt{-N} = \sqrt{N}\, i}$$

donde i es la unidad imaginaria $i^2 = -1$.

EJEMPLO 9 *Evaluación de la raíz cuadrada de números negativos*

(a) $\sqrt{-1} = \sqrt{1}i = i$ (b) $\sqrt{-4} = \sqrt{4}i = 2i$

(c) $\sqrt{-8} = \sqrt{8}i = 2\sqrt{2}i$ ■

EJEMPLO 10 *Resolución de ecuaciones*

Resolver cada ecuación en el sistema de números complejos.

(a) $x^2 = 4$ (b) $x^2 = -9$

Solución (a)
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

La ecuación tiene dos soluciones, -2 y 2.

(b)
$$x^2 = -9$$
$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}i = \pm 3i$$

La ecuación tiene dos soluciones, $-3i$ y $3i$. ■

■ Ahora resuelva el problema 45.

Advertencia: Cuando trabajamos con raíces cuadradas de números negativos, no podemos afirmar que la raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas (lo que sí puede hacerse con números positivos). Para ver por qué, observe este cálculo: sabemos que $\sqrt{100} = 10$. Sin embargo, también es cierto que $100 = (-25)(-4)$, de modo que

$$10 = \sqrt{100} = \sqrt{(-25)(-4)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Aquí está el error.}}}{=} \sqrt{-25}\sqrt{-4}$$
$$= (\sqrt{25}i)(\sqrt{4}i) = (5i)(2i) = 10i^2 = -10$$

Como hemos definido la raíz cuadrada de un número negativo, ahora podemos volver a plantear la fórmula cuadrática sin restricción.

Teorema En el sistema de números complejos, las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$, están dadas por la fórmula

Fórmula cuadrática

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (9)}$$

EJEMPLO 11 *Resolución de ecuaciones cuadráticas en el sistema de números complejos*

Resolver la ecuación $x^2 - 4x + 8 = 0$ en el sistema de números complejos.

Solución En este caso $a = 1$, $b = -4$, $c = 8$, y $b^2 - 4ac = 16 - 4(8) = -16$. Utilizando la ecuación (9), encontramos

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16}i}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

La ecuación tiene el conjunto solución $\{2 - 2i, 2 + 2i\}$.

Verificación:

$$2+2i;\quad (2+2i)^2-4(2+2i)+8 = 4+8i+4i^2-8-8i+8 = 4-4=0$$

$$2-2i;\quad (2-2i)^2-4(2-2i)+8 = 4-8i+4i^2-8+8i+8 = 4-4=0$$

■ Ahora resuelva el problema 51.

El discriminante, b^2-4ac, de una ecuación cuadrática aún sirve como una vía para determinar el carácter de la solución.

Discriminante de una ecuación cuadrática

En el sistema de números complejos, considere una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ con coeficientes reales.

1. Si $b^2-4ac>0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $b^2-4ac=0$, la ecuación tiene una solución real repetida —una raíz doble.
3. Si $b^2-4ac<0$, la ecuación tiene dos soluciones complejas que no son reales. Las soluciones son conjugadas una de la otra.

1.5

Ejercicio 1.5

En los problemas del 1 al 38, escriba cada expresión en la forma estándar $a+bi$.

1. $(2-3i)+(6+8i)$ **2.** $(4+5i)+(-8+2i)$ **3.** $(-3+2i)-(4-4i)$ **4.** $(3-4i)-(-3-4i)$

5. $(2-5i)-(8+6i)$ **6.** $(-8+4i)-(2-2i)$ **7.** $3(2-6i)$ **8.** $-4(2+8i)$

9. $2i(2-3i)$ **10.** $3i(-3+4i)$ **11.** $(3-4i)(2+i)$ **12.** $(5+3i)(2-i)$

13. $(-6+i)(-6-i)$ **14.** $(-3+i)(3+i)$ **15.** $\dfrac{10}{3-4i}$ **16.** $\dfrac{13}{5-12i}$

17. $\dfrac{2+i}{i}$ **18.** $\dfrac{2-i}{-2i}$ **19.** $\dfrac{6-i}{1+i}$ **20.** $\dfrac{2+3i}{1-i}$

21. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$ **22.** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^2$ **23.** $(1+i)^2$ **24.** $(1-i)^2$

25. i^{23} **26.** i^{14} **27.** i^{-15} **28.** i^{-23}

29. i^6-5 **30.** $4+i^3$ **31.** $6i^3-4i^5$ **32.** $4i^3-2i^2+1$

33. $(1+i)^3$ **34.** $(3i)^4+1$ **35.** $i^7(1+i^2)$ **36.** $2i^4(1+i^2)$

37. $i^6+i^4+i^2+1$ **38.** $i^7+i^5+i^3+i$

En los problemas del 39 al 44, realice las operaciones indicadas y exprese su respuesta en la forma $a+bi$.

39. $\sqrt{-4}$ **40.** $\sqrt{-9}$ **41.** $\sqrt{-25}$

42. $\sqrt{-64}$ **43.** $\sqrt{(3+4i)(4i-3)}$ **44.** $\sqrt{(4+3i)(3i-4)}$

En los problemas del 45 al 64, resuelva cada ecuación en el sistema de los números complejos.

45. $x^2+4=0$ **46.** $x^2-4=0$ **47.** $x^2-16=0$ **48.** $x^2+25=0$

49. $x^2-6x+13=0$ **50.** $x^2+4x+8=0$ **51.** $x^2-6x+10=0$ **52.** $x^2-2x+5=0$

53. $8x^2-4x+1=0$ **54.** $10x^2+6x+1=0$ **55.** $5x^2+2x+1=0$ **56.** $13x^2+6x+1=0$

57. $x^2+x+1=0$ **58.** $x^2-x+1=0$ **59.** $x^3-8=0$ **60.** $x^3+27=0$

61. $x^4-16=0$ **62.** $x^4-1=0$ **63.** $x^4+13x^2+36=0$ **64.** $x^4+3x^2-4=0$

En los problemas del 65 al 70, sin resolver, determine el carácter de las soluciones de cada ecuación en el sistema de los números complejos.

65. $3x^2 - 3x + 4 = 0$ **66.** $2x^2 - 4x + 1 = 0$ **67.** $2x^2 + 3x - 4 = 0$

68. $x^2 + 2x + 6 = 0$ **69.** $9x^2 - 12x + 4 = 0$ **70.** $4x^2 + 12x + 9 = 0$

71. $2 + 3i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. Encuentre la otra solución.

72. $4 - i$ es una solución de una ecuación cuadrática con coeficientes reales. Encuentre la otra solución.

En los problemas del 73 al 76, $z = 3 - 4i$ y $w = 8 + 3i$. Escriba cada expresión en la forma estándar $a + bi$.

73. $z + \bar{z}$ **74.** $w - \bar{w}$ **75.** $z\bar{z}$ **76.** $\overline{z - w}$

77. Utilice $z = a + bi$ para demostrar que $z + \bar{z} = 2a$ y que $z - \bar{z} = 2bi$.

78. Utilice $z = a + bi$ para demostrar que $(\bar{\bar{z}}) = z$.

79. Utilice $z = a + bi$ y $w = c + di$ para demostrar que $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.

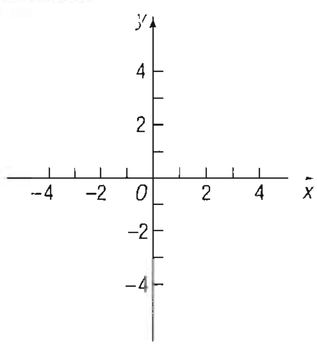
80. Utilice $z = a + bi$ y $w = c + di$ para demostrar que $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

81. Explique a un compañero cómo sumaría y cómo multiplicaría usted dos números complejos. Explique las diferencias entre sus dos explicaciones.

82. Escriba un párrafo breve donde compare el método usado para racionalizar el denominador de una expresión racional y el método para escribir un número complejo en la forma estándar.

1.6 Coordenadas rectangulares y gráficas

FIGURA 29



Ubicamos un punto en la recta de los números reales asignándole un solo número real, llamado *coordenada del punto*. Para trabajar en un plano de dos dimensiones, ubicamos puntos utilizando dos números.

Empezamos con dos rectas de números reales en el mismo plano: una horizontal y otra vertical. A la recta horizontal le llamamos **eje *X*,** a la vertical **eje *Y*,** y al punto de intersección de ellas **origen *O*.** Asignamos coordenadas a cada punto de estas rectas de números, como se describió anteriormente (sección 1.1) y se muestra en la figura 29, utilizando una escala conveniente. En matemáticas, por lo común utilizamos la misma escala en cada uno de los ejes; en aplicaciones, con frecuencia se utilizan escalas diferentes en cada eje. El origen O tiene un valor de cero en los dos ejes. Seguimos la convención usual de que puntos a la derecha de O están asociados con números reales positivos y puntos a la izquierda de O tienen coordenada negativa. Los puntos por encima de O están asociados con números reales positivos y aquellos abajo del origen se asocian con números reales negativos. En la figura 29 el eje X y el eje Y están marcados con x y y, respectivamente, y hemos utilizado una flecha en los extremos superior y derecho de cada eje para indicar la dirección positiva.

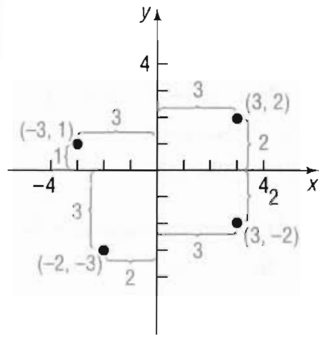
El sistema de coordenadas descrito líneas arriba es llamado **sistema rectangular** o **cartesiano* de coordenadas.** El plano formado por los ejes X y Y algunas veces es llamado **plano *xy*,** y nos referimos al eje x y al eje y como los **ejes de coordenadas.**

Cualquier punto P en el plano xy puede ser localizado utilizando una **pareja ordenada (x, y)** de números reales. Sea x la distancia con signo desde P al eje y (*con signo* quiere decir que si P está a la derecha del eje y entonces $x > 0$, y si P está a la izquierda del eje y, entonces $x < 0$) y y la distancia con signo desde P al eje x. La pareja ordenada (x, y), también llamada **coordenadas** de P, nos dan suficiente información para localizar al punto P en el plano.

Por ejemplo, para localizar al punto cuyas coordenadas son $(-3, 1)$, avanzamos 3 unidades a lo largo del eje x hacia la izquierda de O, después avanzamos una unidad

*Llamado así en honor de René Descartes (1596-1650), un matemático, filósofo y teólogo francés.

FIGURA 30



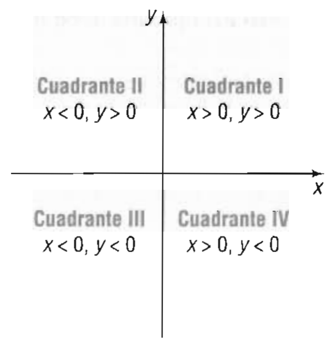
hacia arriba. **Marcamos** este punto colocando un punto en ese lugar. *Véase* la figura 30, en la cual están marcados los puntos $(-3, 1)$, $(-2, -3)$, $(3, -2)$ y $(3, 2)$.

El origen tiene coordenadas $(0, 0)$. Cualquier punto en el eje x tiene coordenada $(x, 0)$ y cualquier punto en el eje y tiene coordenada $(0, y)$.

Si (x, y) son las coordenadas de un punto P, entonces x es llamada **coordenada x**, o **abscisa**, de P y y es la **coordenada y**, u **ordenada**, de P. Identificamos al punto P mediante sus coordenadas (x, y) escribiendo $P = (x, y)$. Por lo común, sólo diremos "el punto (x, y)", en lugar de "el punto cuyas coordenadas son (x, y)".

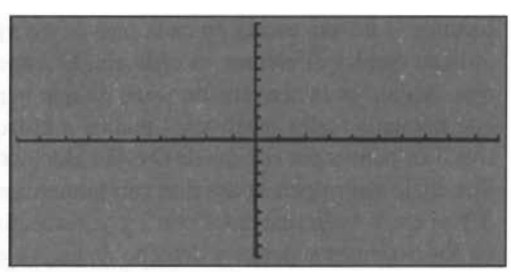
Los ejes de coordenadas dividen al plano xy en cuatro secciones, llamadas **cuadrantes**, como se muestra en la figura 31. En el primer cuadrante las coordenadas x, y de todos los puntos son positivas; en el segundo cuadrante x es negativa y y positiva; en el tercer cuadrante, tanto x como y son negativas; en el cuarto cuadrante x es positiva y y negativa. Los puntos que se ubiquen sobre los ejes coordenados no pertenecen a ningún cuadrante.

FIGURA 31



Comentario: En una calculadora gráfica puede establecer la escala de cada eje y luego obtener **la ventana o pantalla de visualización**. *Véase* la figura 32 para conocer una ventana típica. Ahora es momento de leer la sección B.1, *La ventana (pantalla) de visualización*, en el apéndice B.

FIGURA 32



Si se utilizan las mismas unidades de medida, tales como pulgadas, centímetros, pies, metros, etc., en ambos ejes, entonces todas las distancias en el plano xy podrán ser medidas utilizando esta unidad de medida. La *fórmula de distancia* proporciona un método directo para calcular la distancia entre dos puntos en el plano xy.

Teorema La distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, denotada por $d(P_1, P_2)$, es

Fórmula de distancia

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

EJEMPLO 1 *Determinación de la distancia entre dos puntos*

Encontrar la distancia d entre los puntos $(-4, 5)$ y $(3, 2)$.

Solución Utilizando la fórmula (1), la solución se obtiene como sigue:

$$d = \sqrt{[3-(-4)]^2 + (2-5)^2} = \sqrt{7^2 + (-3)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58} \approx 7.62$$

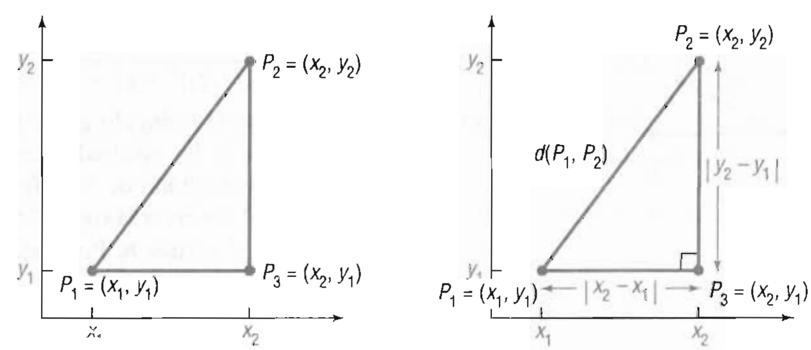
■

Demostración de la fórmula de distancia Sean (x_1, y_1) las coordenadas del punto P_1 y (x_2, y_2) las coordenadas del punto P_2. Suponga que la recta que une P_1 y P_2 no es horizontal ni vertical. *Véase* la figura 33(a). Las coordenadas de P_3 son (x_2, y_1). La distancia horizontal de P_1 a P_3 es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas x, o $|x_2 - x_1|$. La distancia vertical desde P_3 hasta P_2 es el valor absoluto de la diferencia de sus coordenadas y, o $|y_2 - y_1|$. *Véase* la figura 33(b). La distancia $d(P_1, P_2)$ que buscamos es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo; de modo que, por el teorema de Pitágoras, deducimos

$$[d(P_1, P_2)]^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

FIGURA 33



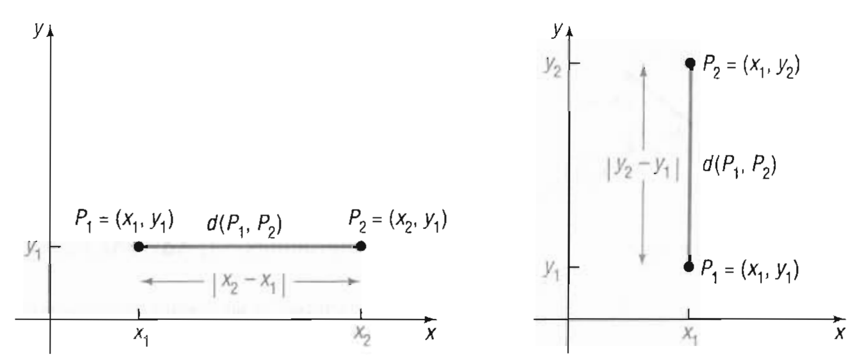
(a) (b)

Ahora, si la recta que une a P_1 y a P_2 es horizontal, entonces la coordenada y de P_1 es igual a la coordenada y de P_2; esto es, $y_1 = y_2$. *Véase* la figura 34(a). En este caso, la fórmula de distancia (1) aún sirve, ya que, para $y_1 = y_2$, se reduce a

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

De manera semejante, este argumento es cierto si la recta que une a P_1 y P_2 es vertical. *Véase* la figura 34(b). Por lo tanto, la fórmula de distancia es válida en todos los casos.

FIGURA 34



(a) (b)

La distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ nunca es un número negativo. Además, la distancia entre dos puntos es cero sólo cuando los puntos son idénticos —esto es, cuando $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$. También, puesto que $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, no hay diferencia si la distancia es calculada de P_1 a P_2 o desde P_2 a P_1 —esto es, $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$.

Las coordenadas rectangulares nos permiten traducir problemas de geometría a problemas de álgebra, y viceversa. El ejemplo siguiente muestra cómo el álgebra (la fórmula de distancia) puede ser utilizada para resolver un problema de geometría.

EJEMPLO 2 *Uso de álgebra para resolver un problema geométrico*

Considerar los tres puntos $A = (-2, 1)$, $B = (2, 3)$ y $C = (3, 1)$.

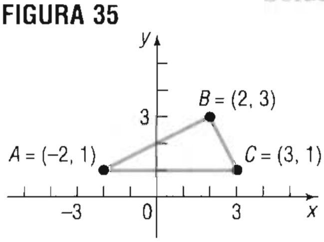
(a) Marcar cada punto y formar el triángulo ABC.

(b) Encontrar la longitud de cada lado del triángulo.

(c) Verificar que el triángulo es un triángulo rectángulo.

(d) Encontrar el área del triángulo.

FIGURA 35



Solución

(a) En la figura 35 se marcan los puntos A, B, C y el triángulo ABC.

(b) $d(A, B) = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$d(B, C) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$d(A, C) = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$

(c) Para demostrar que el triángulo es un triángulo rectángulo, necesitamos comprobar que la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos lados más pequeños es igual al cuadrado de la longitud del lado más grande. (¿Por qué es esto suficiente?) Al observar la figura 35, parece razonable conjeturar que el ángulo recto está en el vértice B. Por tanto, verificaremos que

$$[d(A, B)]^2 + [d(B, C)]^2 = [d(A, C)]^2$$

Encontramos

$$\begin{aligned}[d(A, B)]^2 + [d(B, C)]^2 &= (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 \\ &= 20 + 5 = 25 = [d(A, C)]^2\end{aligned}$$

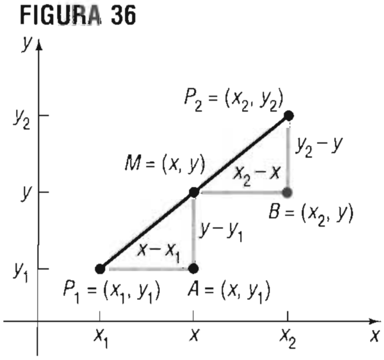
de modo que se deduce del recíproco del teorema de Pitágoras que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo.

(d) Ya que el ángulo recto está en B, los lados AB y BC forman la base y la altura del triángulo. Por lo tanto, su área es

$$\text{Área} = \tfrac{1}{2}(\text{Base})(\text{Altura}) = \tfrac{1}{2}(2\sqrt{5})(\sqrt{5}) = 5 \text{ bases cuadradas}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 19.

FIGURA 36



Ahora deduciremos una fórmula para las coordenadas del **punto medio de un segmento de recta.** Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ los extremos de un segmento de recta, y sea $M = (x, y)$ el punto del segmento de la recta que está a la misma distancia de P_1 y de P_2. *Véase* la figura 36. Los triángulos P_1AM y MBP_2 son congruentes.* [¿Advierte por qué? Porque el ángulo AP_1M = ángulo

*La proposición siguiente es un teorema de geometría. Dos triángulos son congruentes si sus lados son de la misma longitud (LLL), o si dos lados y el ángulo incluido son iguales (LAL), o si dos ángulos u el lado incluido son iguales (ALA).

BMP_2.* El ángulo P_1MA = ángulo MP_2B, y, por hipótesis, $d(P_1, M) = d(M, P_2)$. Así que tenemos Ángulo-Lado-Ángulo.] En consecuencia, los lados correspondientes son de la misma longitud. Esto es,

$$\begin{aligned} x - x_1 &= x_2 - x & \quad \text{y} \quad y - y_1 &= y_2 - y \\ 2x &= x_1 + x_2 & 2y &= y_1 + y_2 \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2} & y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

Teorema

El punto medio (x, y) del segmento de recta $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ está dado por

Fórmula del punto medio

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \tag{2}$$

Por tanto, para encontrar el punto medio de un segmento de recta promediamos las coordenadas x, y las coordenadas y de los puntos extremos

EJEMPLO 3 *Determinación del punto medio de un segmento de recta*

Encontrar el punto medio del segmento de recta que va de $P_1 = (-5, 3)$ a $P_2 = (3, 1)$. Marcar los puntos P_1 y P_2 y su punto medio. Verificar la respuesta..

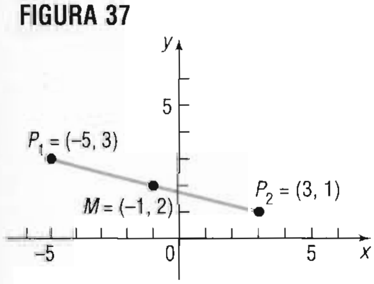
Solución

Aplicamos la fórmula del punto medio (2) utilizando $x_1 = -5$, $x_2 = 3$, $y_1 = 3$, y $y_2 = 1$. *Véase* la figura 37. Entonces las coordenadas (x, y) del punto medio M son

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{3 + 1}{2} = 2$$

Esto es, $M = (-1, 2)$.

FIGURA 37



Verificación: Ya que M es el punto medio, revisamos la respuesta verificando que $d(P_1, M) = d(M, P_2)$:

$$d(P_1, M) = \sqrt{[-1 - (-5)]^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$
$$d(M, P_2) = \sqrt{[3 - (-1)]^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

■ Ahora resuelva el problema 5.

Gráficas de ecuaciones

La **gráfica de una ecuación** de dos variables x y y está constituida por el conjunto de puntos en el plano xy cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Veamos algunos ejemplos.

*Otra proposición de la geometría afirma que la transversal $\overline{P_1P_2}$ forma ángulos correspondientes iguales con las rectas paralelas $\overline{P_1A}$ y $\overline{MB}$.

EJEMPLO 4 *Gráfica de una ecuación*

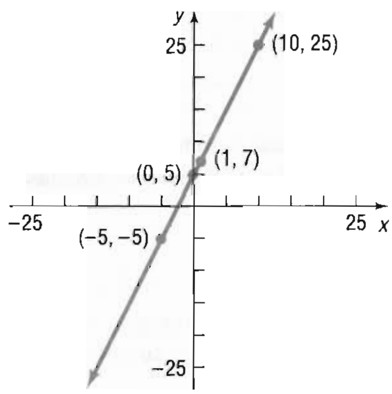
Hacer la gráfica de la ecuación: $y = 2x + 5$

Solución Queremos encontrar todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación. Para localizar algunos (y así tener una idea del patrón de la gráfica), asignamos algunos números a x y encontramos los valores correspondientes para y:

SI	ENTONCES	PUNTO DE LA GRÁFICA
$x = 0$	$y = 2(0) + 5 = 5$	$(0, 5)$
$x = 1$	$y = 2(1) + 5 = 7$	$(1, 7)$
$x = -5$	$y = 2(-5) + 5 = -5$	$(-5, -5)$
$x = 10$	$y = 2(10) + 5 = 25$	$(10, 25)$

Marcamos estos puntos y conectándolos después, obtenemos la gráfica de la ecuación (una línea recta), como se muestra en la figura 38. ■

FIGURA 38
$y = 2x + 5$



EJEMPLO 5 *Gráfica de una ecuación*

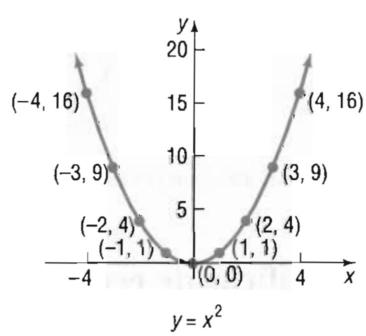
Hacer la gráfica de la ecuación: $y = x^2$

Solución La tabla 1 proporciona varios puntos de la gráfica. En la figura 39, marcamos estos puntos y los conectamos con una curva suave para obtener la gráfica (una *parábola*).

TABLA 1

x	$y = x^2$	(x, y)
-4	16	$(-4, 16)$
-3	9	$(-3, 9)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$
4	16	$(4, 16)$

FIGURA 39
$y = x^2$



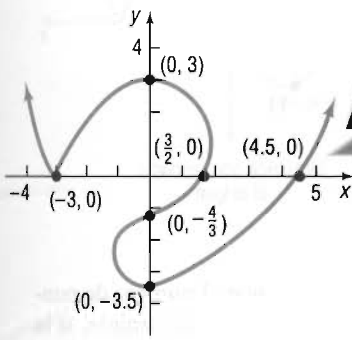
■

Las gráficas de las ecuaciones mostradas en las figuras 38 y 39 no muestran todos los puntos. Por ejemplo, en la figura 38 el punto (20, 45) es una parte de la gráfica de $y = 2x + 5$, pero no se muestra. Ya que la gráfica de $y = 2x + 5$ podría ser extendida tanto como quisiéramos, utilizamos flechas para indicar que el patrón mostrado continúa. Así, cuando se ilustre una gráfica, es importante presentar una parte suficiente de ella para que cualquiera pueda "ver" el resto como una continuación obvia de lo que aparece. Esto se llama una **gráfica completa.**

Una manera de obtener una gráfica completa de una ecuación es marcando un número suficiente de puntos de la gráfica hasta que sea evidente un patrón. Luego esos puntos se conectan mediante una curva suave que siga el patrón sugerido. Pero, ¿cuántos puntos son suficientes? Algunas veces el conocimiento de la ecuación nos lo dice. Por ejemplo, aprenderemos en la sección siguiente que, si una ecuación es de la forma $y = mx + b$ entonces su gráfica es una línea recta. En este caso, dos puntos serían suficientes para obtener la gráfica.

Un objetivo de este libro es investigar las propiedades de las ecuaciones con el fin de poder decidir cuándo una gráfica es completa. En esta sección haremos gráficas de ecuaciones marcando un número suficiente de puntos de la gráfica hasta que sea evidente un patrón; luego conectaremos esos puntos con una curva suave que siga el patrón sugerido. En resumen, investigaremos varias técnicas que nos permitirán hacer la gráfica de una ecuación sin tener que marcar demasiados puntos.

FIGURA 40



Comentario: Otra manera de obtener la gráfica de una ecuación es utilizando un instrumento de graficación. Lea la sección B.2, *Graficación de ecuaciones mediante un dispositivo de graficación*, en el apéndice B.

Dos técnicas que reducen el número de puntos necesarios para hacer la gráfica de una ecuación involucran la determinación de *intersecciones* y la verificación de *simetría*.

Los puntos, si los hay, en los cuales la gráfica cruza los ejes de coordenadas son llamados **intersecciones.** La coordenada x de un punto en el cual la gráfica cruza o toca el eje x es una **intersección-x**, y la coordenada y de un punto en el que la gráfica cruza o toca el eje y es una **intersección-y**. Por ejemplo, la gráfica de la figura 40 tiene tres intersecciones -3, $\frac{3}{2}$, y 4.5, y tres intersecciones -3.5, $-\frac{4}{3}$, y 3.

Procedimiento para encontrar intersecciones

1. Para encontrar las intersecciones-x, si las hay, de la gráfica de una ecuación, se debe hacer $y = 0$ en la ecuación y resolver para x.
2. Para encontrar las intersecciones-y, si las hay, de la gráfica de una ecuación, se debe hacer $x = 0$ en la ecuación y resolver para y.

Comentario: En muchas ecuaciones puede no ser fácil encontrar las intersecciones. En tales casos un dispositivo de graficación puede ser utilizado. Lea la sección B.3, funciones TRACE, ZOOM-IN y BOX, en el apéndice B para encontrar cómo un dispositivo de graficación localiza las intersecciones.

Otra herramienta útil para la graficación de ecuaciones involucra la *simetría*; en particular, la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen.

Simetría con respecto al eje x

Una gráfica es **simétrica con respecto al eje x** si, para cada punto (x, y) en la gráfica, el punto $(x, -y)$ también está en la gráfica.

Simetría con respecto al eje y

Una gráfica es **simétrica con respecto al eje y** si, para cada punto (x, y) en la gráfica, el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica.

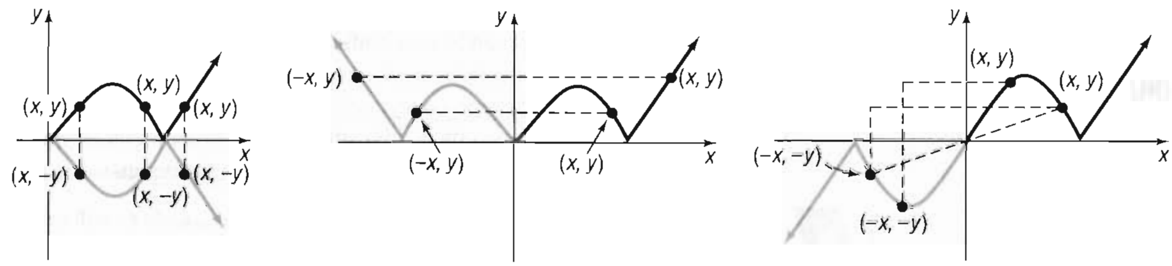
Simetría con respecto al eje *centro*

Una gráfica es **simétrica con respecto al origen** si, para cada punto (x, y) en la gráfica, el punto $(-x, -y)$ también está en la gráfica.

La figura 41 ilustra la definición. Observe que, cuando una gráfica es simétrica con respecto al eje x, la parte de la gráfica por encima de ese eje es una reflexión de la parte que está abajo de él, y viceversa. Y cuando una gráfica es simétrica con respecto al eje y, la parte de la gráfica a la derecha de ese eje es una reflexión de la parte que está a la izquierda de él, y viceversa. La simetría con respecto al origen puede verse de dos maneras:

1. Como una reflexión con respecto al eje y seguida de una reflexión con respecto al eje x.
2. Como una proyección a lo largo de una recta que pasa por el origen de modo que las distancias desde el origen son iguales.

FIGURA 41



Simétrica con respecto al eje x | Simétrica con respecto al eje y | Simétrica con respecto al origen

■ Ahora resuelva el problema 29.

Cuando la gráfica de una ecuación es simétrica, se reduce el número de puntos que se necesita trazar para ver el patrón que sigue la gráfica. Por ejemplo, si la gráfica de una ecuación es simétrica con respecto al eje y, entonces, una vez que los puntos a la derecha de ese eje son trazados, se puede obtener un número igual de puntos de la gráfica reflejándolos con respecto al eje y. Así, antes de que hagamos la gráfica de una ecuación, primero determinemos si tiene alguna simetría. Las pruebas siguientes son utilizadas con ese fin.

Pruebas de simetría

Para verificar la simetría de la gráfica de una ecuación con respecto al:

Eje x: Reemplazar y por $-y$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje x.

Eje y: Reemplazar x por $-x$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al eje y.

Origen: Reemplazar x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación. Si se obtiene una ecuación equivalente, la gráfica de la ecuación es simétrica con respecto al origen.

EJEMPLO 6

Graficación de una ecuación determinando intersecciones y verificando la simetría.

Hacer la gráfica de la ecuación $y = x^3$. Primero encontrar las intersecciones con los ejes y verificar la simetría.

Solución Primero, buscamos las intersecciones con los ejes. Cuando $x = 0$, entonces $y = 0$; y cuando $y = 0$, entonces $x = 0$. Por tanto, el origen $(0, 0)$ es la única intersección con los ejes. Ahora verificamos la simetría:

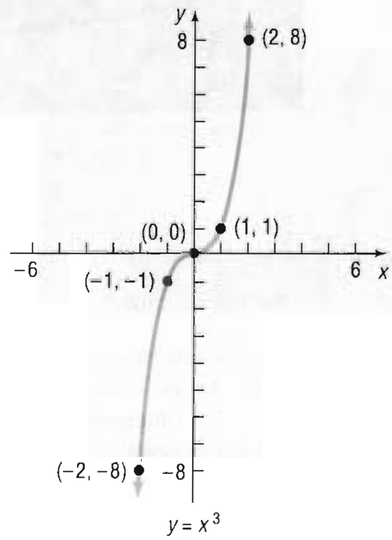
Eje x: Reemplazar y por $-y$. Como el resultado, $-y = x^3$, no es equivalente a $y = x^3$, la gráfica no es simétrica con respecto al eje x.

Eje y: Reemplazar x por $-x$. Como el resultado, $y = -x^3$, no es equivalente a $y = x^3$, la gráfica no es simétrica con respecto al eje y.

Origen: Reemplazar x por $-x$ y y por $-y$. Como el resultado, $-y = -x^3$, es equivalente a $y = x^3$, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Como consecuencia de la simetría, sólo necesitamos localizar puntos de la gráfica para $x \geq 0$, tales como (0, 0), (1, 1) y (2, 8). La figura 42 muestra la gráfica.

FIGURA 42
Simetría con respecto al origen



■ Ahora resuelva el problema 35.

EJEMPLO 7 *Graficación de una ecuación*

Hacer la gráfica de la ecuación $x = y^2$. Primero encontrar las intersecciones con los ejes y verificar la simetría.

Solución La única intersección con los ejes es (0, 0). La gráfica es simétrica con respecto al eje x. (¿Advierte por qué? remplace y por $-y$.) La figura 43 muestra la gráfica. ■

FIGURA 43
Simetría con respecto al eje x

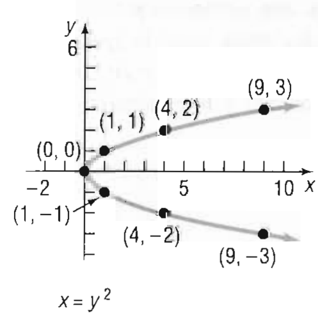
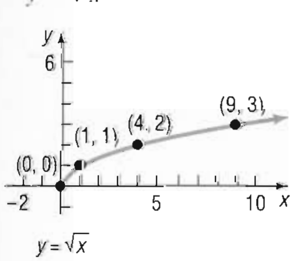


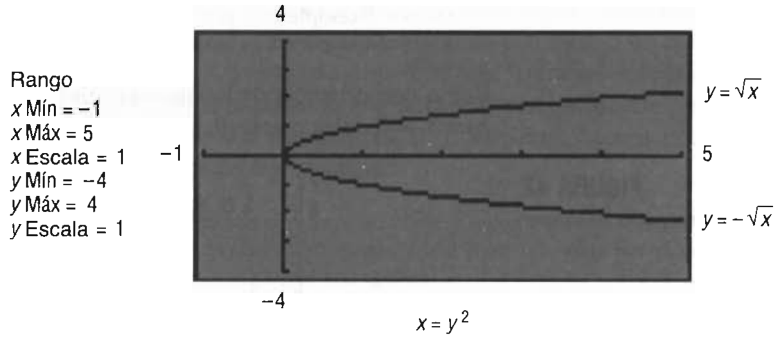
FIGURA 44
$y = \sqrt{x}$



Si restringimos y de modo que $y \geq 0$, la ecuación $x = y^2$, $y \geq 0$, puede ser escrita de manera equivalente como $y = \sqrt{x}$. Por lo tanto, la parte de la gráfica $x = y^2$ en el primer cuadrante es la gráfica de $y = \sqrt{x}$. *Véase* la figura 44.

Comentario: Para ver la gráfica de la ecuación $x = y^2$ en una calculadora gráfica, necesitaremos hacer las gráficas de dos ecuaciones, $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$. Se analizará la razón en el capítulo siguiente. *Véase* la figura 45.

FIGURA 45



EJEMPLO 8 *Graficación de una ecuación*

Hacer la gráfica de la ecuación: $y = \dfrac{1}{x}$

Primero encontrar las intersecciones con los ejes y verificar la simetría.

Solución Primero buscamos las intersecciones con los ejes. Si hacemos $x = 0$ obtenemos un 0 en el denominador, lo cual no está permitido. En consecuencia, no hay intersecciones-y. Si hacemos $y = 0$, obtenemos la ecuación $1/x = 0$, que no tiene solución. De aquí que no haya intersección-x. Por tanto, la gráfica de $y = 1/x$ no cruza los ejes de coordenadas.

Ahora verificamos la simetría:

Eje x: Reemplazando y por $-y$ se obtiene $-y = 1/x$, que no es equivalente a $y = 1/x$.

Eje y: Reemplazando x por $-x$ se obtiene $y = -1/x$, que no es equivalente a $y = 1/x$.

Origen: Reemplazando x por $-x$ y y por $-y$ se obtiene $-y = -1/x$, que sí es equivalente a $y = 1/x$.

La gráfica es simétrica con respecto al origen.

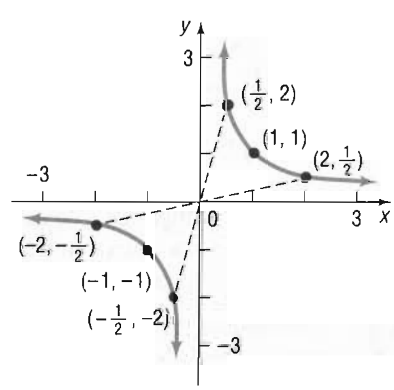
Por último, construimos la tabla 2 enlistando varios puntos de la gráfica. Como consecuencia de la simetría con respecto al origen, sólo usamos valores positivos de x. De la tabla 2 inferimos que, si x es un número positivo grande, entonces $y = 1/x$ es un número positivo cercano a cero. También podemos deducir que, si x es un número positivo cercano a cero, entonces $y = 1/x$ es un número positivo grande. Con base en esta información, podemos hacer la gráfica de la ecuación. La figura 46 ilustra algunos de estos puntos y la gráfica de $y = 1/x$. Observe cómo fue utilizada la ausencia de intersecciones con los ejes y la existencia de simetría con respecto al origen.

TABLA 2

x	$y = 1/x$	(x, y)
$\frac{1}{10}$	10	$(\frac{1}{10}, 10)$
$\frac{1}{3}$	3	$(\frac{1}{3}, 3)$
$\frac{1}{2}$	2	$(\frac{1}{2}, 2)$
1	1	$(1, 1)$
2	$\frac{1}{2}$	$(2, \frac{1}{2})$
3	$\frac{1}{3}$	$(3, \frac{1}{3})$
10	$\frac{1}{10}$	$(10, \frac{1}{10})$

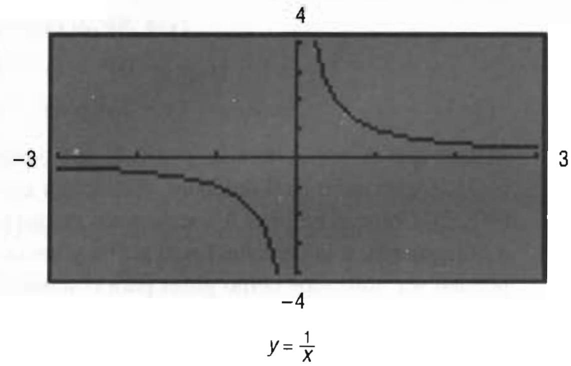
FIGURA 46

$y = \dfrac{1}{x}$



Comentario: La figura 47 muestra la gráfica de $y = 1/x$ utilizando un dispositivo de graficación. De la gráfica inferimos que no hay intersecciones con los ejes. También podemos conjeturar que hay simetría con respecto al origen. La función TRACE proporciona más evidencia de esta simetría. Conforme la gráfica se va trazando se obtienen los puntos $(-x, -y)$ y (x, y). Por ejemplo, la pareja de puntos $(-0.95238, -1.05)$ y $(0.95238, 1.05)$ pertenecen a la gráfica.

FIGURA 47
$y = \dfrac{1}{x}$



■ Ahora resuelva el problema 77.

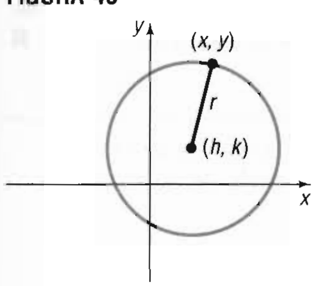
Círculos

Una de las ventajas de un sistema de coordenadas es que nos permite traducir un enunciado geométrico en uno algebraico, y viceversa. Por ejemplo, considere el siguiente enunciado geométrico que define un círculo.

Círculo

> Un **círculo** es un conjunto de puntos en el plano *xy* que están a una distancia fija, *r*, de un punto fijo (h, k). La distancia fija *r* es llamada **radio,** y el punto fijo (h, k) es el **centro** del círculo.

FIGURA 48



La figura 48 muestra la gráfica de un círculo. ¿Hay una ecuación que tenga esta gráfica? Siendo así, ¿cuál es esa ecuación? Para encontrarla, hacemos que (x, y) represente las coordenadas de cualquier punto en el círculo con radio r y centro en (h, k). Entonces la distancia entre los puntos (x, y) y (h, k) siempre debe ser igual a r. Esto es, por la fórmula de distancia,

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

o, de manera equivalente,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

La **forma estándar de la ecuación de un círculo** con radio r y centro (h, k) es

Forma estándar de la ecuación de un círculo

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (3)$$

De igual manera, invirtiendo los pasos, concluimos: la gráfica de cualquier ecuación de la forma de la ecuación (3) es un círculo con radio r y centro (h, k).

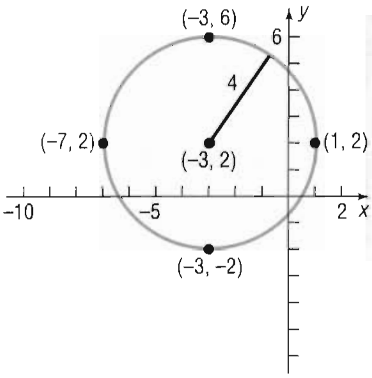
EJEMPLO 9 *Graficación de un círculo*

Hacer la gráfica de la ecuación: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

Solución Comparando la ecuación dada con la forma estándar de la ecuación de un círculo, concluimos que la gráfica de la ecuación dada es un círculo. Además, la comparación da información acerca del círculo:

$$\begin{aligned} (x + 3)^2 + (y - 2)^2 &= 16 \\ [x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 &= 4^2 \\ (x - h)^2 + (y - k)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

FIGURA 49



Vemos que $h = -3$, $k = 2$, y $r = 4$. En consecuencia, el círculo tiene centro en $(-3, 2)$ y un radio de 4 unidades. Para trazar este círculo primero marcamos el centro $(-3, 2)$. Como el radio es 4, localizamos cuatro puntos sobre el círculo al ir 4 unidades a la izquierda, a la derecha, hacia arriba y hacia abajo del centro. Estos cuatro puntos pueden ser utilizados como guías para obtener la gráfica. *Véase* la figura 49. ■

■ Ahora resuelva el problema 61.

Comentario: Lea la sección B.4, Pantallas cuadradas, en el apéndice B.

EJEMPLO 10 *Uso de un dispositivo de graficación para trazar un círculo*

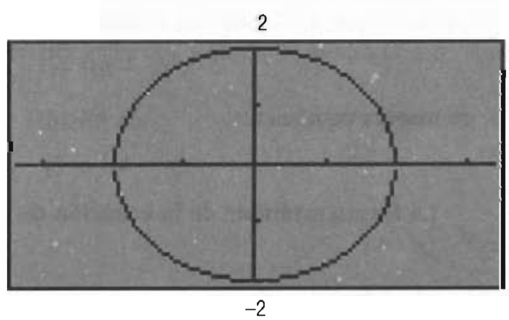
Hacer la gráfica de la ecuación: $x^2 + y^2 = 4$

Solución Esta es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio 2. Para hacer su gráfica primero debemos resolver para y.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{4 - x^2} \end{aligned}$$

Debemos hacer las gráficas de dos ecuaciones: primero haremos la gráfica de $y = \sqrt{4 - x^2}$ y después $y = -\sqrt{4 - x^2}$ en la misma pantalla cuadrada. (Su círculo parecerá óvalo si no utiliza una pantalla cuadrada.) *Véase* la figura 50. ■

FIGURA 50
$x^2 + y^2 = 4$



$x^2 + y^2 = 4$

EJEMPLO 11 *Forma estándar de la ecuación de un círculo*

Escribir la forma estándar de la ecuación del círculo con radio 3 y centro $(1, -2)$.

Solución Usando la forma de la ecuación (3) y sustituyendo los valores $r = 3$, $h = 1$, y $k = -2$, tenemos

$$\begin{aligned}(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2\\(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 9\end{aligned}$$

■

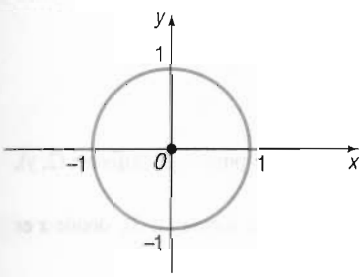
La forma estándar de la ecuación de un círculo de radio r con centro en el origen (0, 0), es

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

Si el radio es igual a uno, el círculo cuyo centro está en el origen es llamado **círculo unitario** y tiene la ecuación

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

FIGURA 51
Círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$



Véase la figura 51.

Si eliminamos los paréntesis en la forma estándar de la ecuación de un círculo obtenida en el ejemplo 11, tenemos

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 9\\x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 &= 9\end{aligned}$$

que encontramos, después de simplificar, que es equivalente a

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Completando los cuadrados en los términos de x y de y, puede demostrarse que cualquier ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

tiene una gráfica que es un círculo, un punto o que no representa ninguna gráfica. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ es el único punto (0, 0). La ecuación $x^2 + y^2 + 5 = 0$, o $x^2 + y^2 = -5$, no tiene gráfica, ya que la suma de cuadrados de números reales nunca es negativa. Cuando su gráfica es un círculo, la ecuación

Forma general de la ecuación de un círculo

$$\boxed{x^2 + y^2 + ax + by + c = 0}$$

recibe el nombre de **forma general de la ecuación de un círculo.**

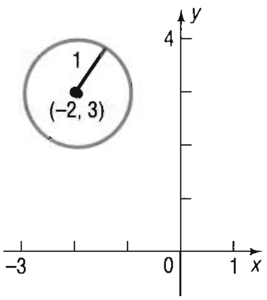
■ Ahora resuelva el problema 45.

El siguiente ejemplo muestra cómo transformar una ecuación que está en la forma general en una ecuación equivalente que tenga forma estándar. Como dijimos antes, la idea es utilizar el método de completar cuadrados en los términos x y y.

EJEMPLO 12 *Graficación de un círculo cuya ecuación está en la forma general*

Hacer la gráfica de la ecuación: $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

FIGURA 52
$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$



Solución Reacomodamos la ecuación como sigue:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) = -12$$

Ahora, completamos el cuadrado de cada expresión entre paréntesis. Recuerde que cualquier número que se sume del lado izquierdo también debe sumarse del lado derecho:

$$\begin{aligned}(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) &= -12 + 4 + 9 \\ (x + 2)^2 + (y - 3)^2 &= 1\end{aligned}$$

Reconocemos esta ecuación como la forma estándar de la ecuación de un círculo con radio 1 y centro $(-2, 3)$. La figura 52 ilustra la gráfica. ■

■ Ahora resuelva el problema 63.

1.6 Ejercicio 1.6

En los problemas 1 y 2 marque cada punto en el plano xy. Diga en qué cuadrante o en qué eje coordenado está cada punto.

1. (a) $A = (-3, 2)$ (b) $B = (6, 0)$ (c) $C = (-2, -2)$
(d) $D = (6, 5)$ (e) $E = (0, -3)$ (f) $F = (6, -3)$

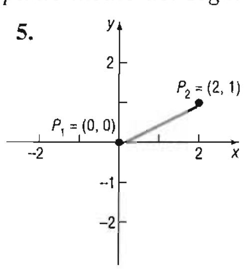
2. (a) $A = (1, 4)$ (b) $B = (-3, -4)$ (c) $C = (-3, 4)$
(d) $D = (4, 1)$ (e) $E = (0, 1)$ (f) $F = (-3, 0)$

3. Marque los puntos $(2, 0)$, $(2, -3)$, $(2, 4)$, $(2, 1)$ y $(2, -1)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma $(2, y)$, donde y es un número real.

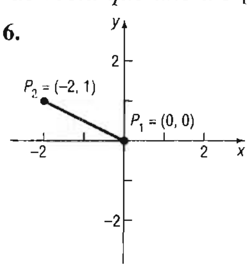
4. Marque los puntos $(0, 3)$, $(1, 3)$, $(-2, 3)$, $(5, 3)$ y $(-4, 3)$. Describa todos los puntos de la forma $(x, 3)$, donde x es un número real.

En los problemas del 5 al 10 encuentre la distancia $d(P_1, P_2)$ entre los puntos P_1 y P_2. También encuentre el punto medio del segmento de recta que une a P_1 y P_2.

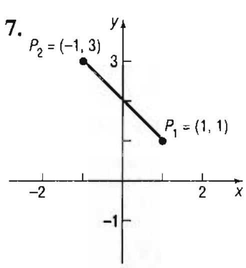
5.



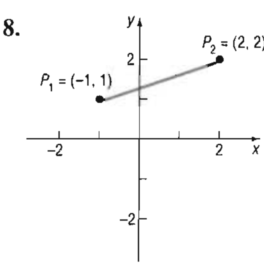
6.



7.



8.



9. $P_1 = (3, -4)$; $P_2 = (3, 1)$

10. $P_1 = (-1, 0)$; $P_2 = (2, 1)$

11. $P_1 = (-3, 2)$; $P_2 = (6, 0)$

12. $P_1 = (2, -3)$; $P_2 = (4, 2)$

13. $P_1 = (4, -3)$; $P_2 = (6, 1)$

14. $P_1 = (-4, -3)$; $P_2 = (2, 2)$

15. $P_1 = (-0.2, 0.3)$; $P_2 = (2.3, 1.1)$

16. $P_1 = (1.2, 2.3)$; $P_2 = (-0.3, 1.1)$

17. $P_1 = (a, b)$; $P_2 = (0, 0)$

18. $P_1 = (a, a)$; $P_2 = (0, 0)$

En los problemas del 19 al 22, marque cada punto y forme un triángulo ABC. Verifique si el triángulo es un triángulo rectángulo y encuentre su área.

19. $A = (-2, 5)$; $B = (1, 3)$; $C = (-1, 0)$

20. $A = (-2, 5)$; $B = (12, 3)$; $C = (10, -11)$

21. $A = (-5, 3)$; $B = (6, 0)$; $C = (5, 5)$

22. $A = (-6, 3)$; $B = (3, -5)$; $C = (-1, 5)$

23. Encuentre todos los puntos que tengan coordenada x igual a 2 y cuya distancia al punto $(-2, 1)$ sea 5.

24. Encuentre todos los puntos que tengan coordenada y igual a -3 y cuya distancia al punto $(1, 2)$ sea 13.

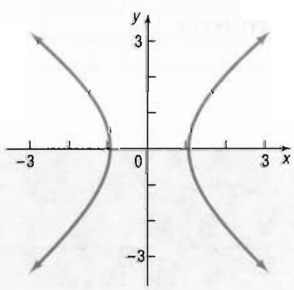
25. Encuentre todos los puntos sobre el eje x que estén a 5 unidades del punto $(2, -3)$.

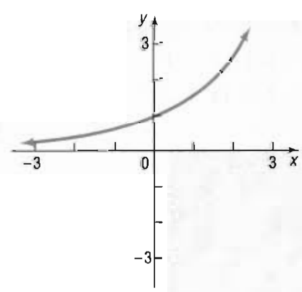
26. Encuentre todos los puntos sobre el eje y que estén a 5 unidades del punto $(-4, 4)$.

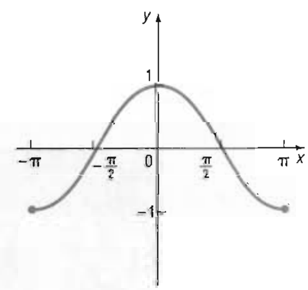
En los problemas del 27 al 34 marque cada punto y su simétrico con respecto:
(a) Al eje x (b) Al eje y (c) Al origen

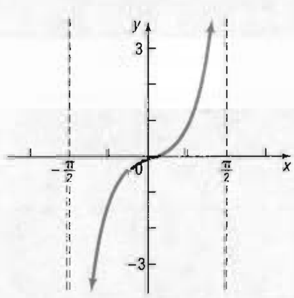
27. $(3, 4)$	**28.** $(5, 3)$	**29.** $(-2, 1)$	**30.** $(4, -2)$
31. $(1, 1)$	**32.** $(-1, -1)$	**33.** $(-3, -4)$	**34.** $(4, 0)$

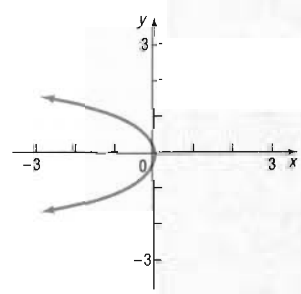
En los problemas del 35 al 44 se da la gráfica de una ecuación.
(a) Enliste las intersecciones con los ejes de cada gráfica.
(b) Diga si cada gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y y/o al origen.

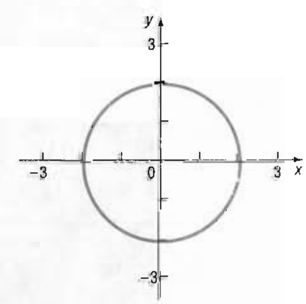
35.


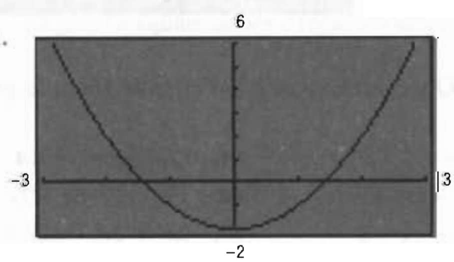
36.


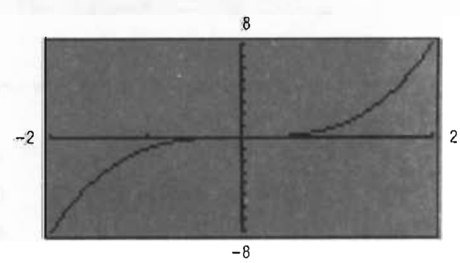
37.


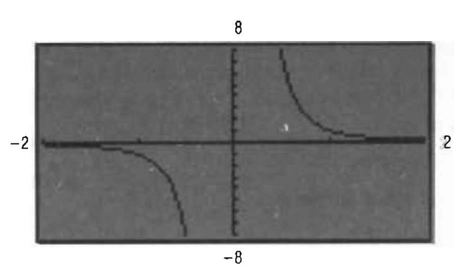
38.


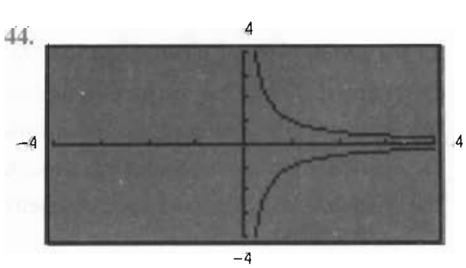
39.


40.


41.


42.


43.


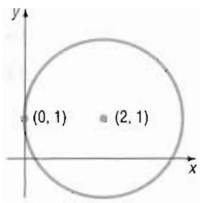
44.


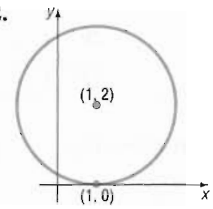
En los problemas del 45 al 50, escriba la forma estándar de la ecuación y la forma general de la ecuación de cada círculo de radio r y centro (h, k).

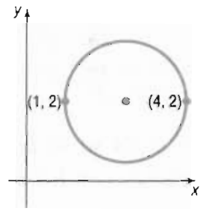
45. $r = 2$; $(h, k) = (0, 2)$ **46.** $r = 3$; $(h, k) = (1, 0)$ **47.** $r = 5$; $(h, k) = (4, -3)$

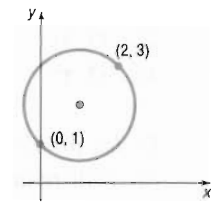
48. $r = 4$; $(h, k) = (2, -3)$ **49.** $r = 2$; $(h, k) = (0, 0)$ **50.** $r = 3$; $(h, k) = (0, 0)$

En los problemas del 51 al 54 encuentre el centro y el radio de cada círculo. Escriba la forma estándar de la ecuación.

51.


52.


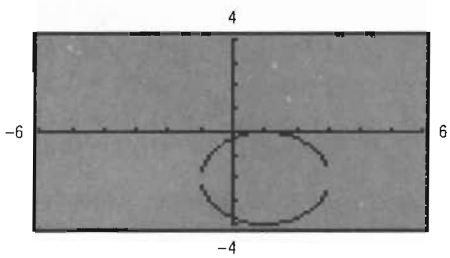
53.


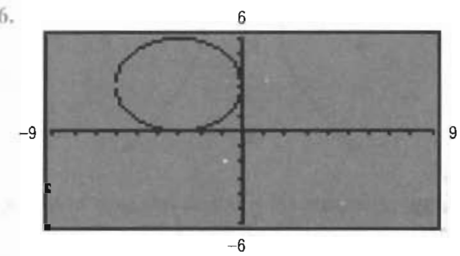
54.


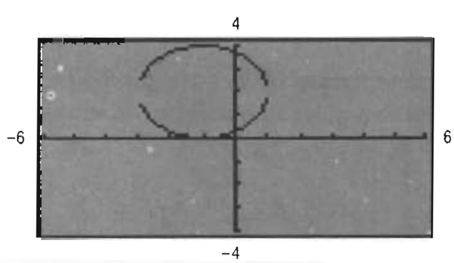
En los problemas del 55 al 58 relacione cada gráfica con la ecuación correcta.

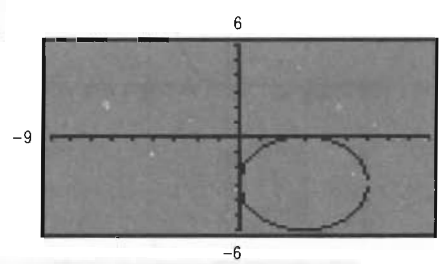
(a) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ *(c)* $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$

(b) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ *(d)* $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$

55.


56.


57.


58.


En los problemas del 59 al 68, encuentre el centro (h, k) y el radio r de cada círculo. Haga la gráfica del círculo.

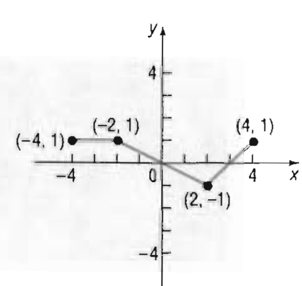
59. $x^2 + y^2 = 4$ **60.** $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ **61.** $(x - 3)^2 + y^2 = 4$

62. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ **63.** $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ **64.** $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0$

65. $x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$ **66.** $x^2 + y^2 + x + y - \frac{1}{2} = 0$ **67.** $2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 24 = 0$

68. $2x^2 + 2y^2 + 8x + 7 = 0$

En los problemas del 69 al 72, utilice la gráfica anexa.



69. Extienda la gráfica para hacerla simétrica con respecto al eje x.

70. Extienda la gráfica para hacerla simétrica con respecto al eje y.

71. Extienda la gráfica para hacerla simétrica con respecto al origen.

72. Extienda la gráfica para hacerla simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.

En los problemas del 73 al 86, enliste las intersecciones con los ejes y verifique la simetría.

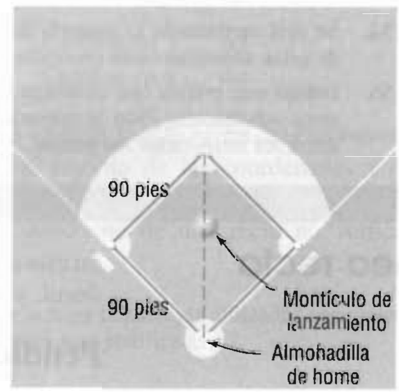
73. $x^2 = y$	**74.** $y^2 = x$	**75.** $y = 3x$	**76.** $y = -5x$
77. $x^2 + y - 9 = 0$	**78.** $y^2 - x - 4 = 0$	**79.** $4x^2 + 9y^2 = 36$	**80.** $x^2 + 4y^2 = 4$
81. $y = x^3 - 27$	**82.** $y = x^4 - 1$	**83.** $y = x^2 - 3x - 4$	**84.** $y = x^2 + 4$
85. $y = \dfrac{x}{x^2 + 9}$	**86.** $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$		

87. *Béisbol.* En el juego de béisbol, el "diamante" en realidad es un cuadrado de 90 pies por lado (*véase* la figura). Sobreponiendo un sistema de coordenadas en el diamante de manera que el origen esté en el *home*, la dirección positiva del eje x en la dirección de *home* a primera base, y la dirección positiva del eje y apunte del *home* a la tercera base:

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de la primera, segunda y tercera bases? Utilice pies como la unidad de medida.

(b) Si el jardinero derecho está ubicado en (310, 15), ¿a qué distancia está de la segunda base?

(c) Si el jardinero central está en (300, 300), ¿a qué distancia está de la tercera base?



88. *Liga infantil de béisbol.* La disposición de un campo de béisbol de liga infantil es un cuadrado de 60 pies por lado.* Sobreponiendo un sistema rectangular sobre el diamante de modo que el origen esté en el *home*, el sentido positivo del eje x esté en la dirección de *home* a primera base, y la dirección positiva del eje y vaya de *home* a la tercera base:

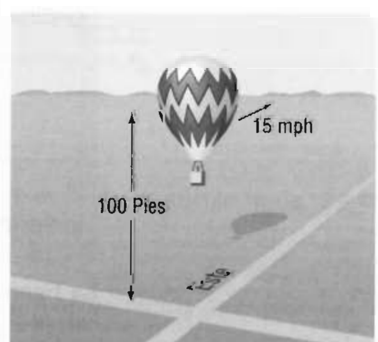
(a) ¿Cuáles son las coordenadas de la primera, segunda y tercera bases? Utilice pies como la unidad de medida.

(b) Si el jardinero derecho está ubicado en (180, 20), ¿a qué distancia está de la segunda base?

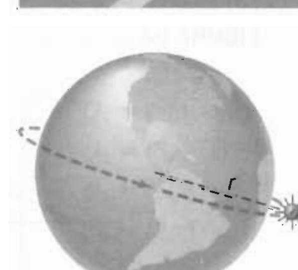
(c) Si el jardinero central está ubicado en (220, 220), ¿a qué distancia está de la tercera base?

89. Un automóvil y un camión pasan por una intersección al mismo tiempo. El automóvil va rumbo al este a una velocidad promedio de 40 millas por hora, mientras que el camión va hacia el sur a una velocidad promedio de 30 millas por hora. Encuentre una expresión para la distancia entre estos vehículos d (en millas) después de t horas.

90. Un globo aerostático que va hacia el este, a una velocidad promedio de 15 millas por hora y altitud constante de 100 pies, pasa sobre una intersección (véase la figura). Encuentre una expresión para la distancia d (medida en pies) del globo a la intersección t segundos después.



91. *Satélite meteorológico.* La Tierra está representada en un mapa de una parte del Sistema solar de modo que su superficie es el círculo con ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4091 = 0$. Un satélite da vueltas alrededor de la Tierra 0.6 unidades por arriba de ella con el centro de su órbita circular en el centro del planeta. Encuentre la ecuación para la órbita del satélite en ese mapa.



*Fuente: *Little League Baseball, Official Regulations and Playing Rules*, 1991.

En el problema 92 puede utilizar una calculadora gráfica, pero en realidad no se necesita.

92. (a) Haga la gráfica de $y = \sqrt{x^2}$, $y = x$, $y = |x|$, y $y = (\sqrt{x})^2$, tome nota de cuáles gráficas son iguales.
(b) Explique por qué las gráficas de $y = \sqrt{x^2}$ y $y = |x|$ son iguales.
(c) Explique por qué las gráficas de $y = x$ y $y = (\sqrt{x})^2$ no son iguales.
(d) Explique por qué las gráficas de $y = \sqrt{x^2}$ y $y = x$ no son iguales.

93. Construya una ecuación con intersecciones (2, 0), (4, 0) y (0, 1). Compare su ecuación con la de un compañero y comente sus semejanzas.

94. Se está verificando la simetría de una ecuación con respecto al eje x, al eje y y al origen. Explique por qué, si dos de estas simetrías están presentes, la restante debe estarlo también.

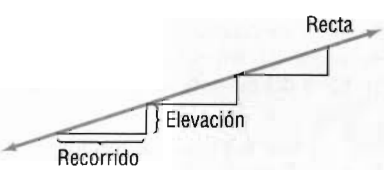
95. Dibuje una gráfica que contenga los puntos $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, 5)$. Compare su gráfica con las gráficas de otros estudiantes. ¿Son la mayoría líneas rectas? ¿Cuántas están curvas? Analice las diferentes maneras en que podrían ser conectados los puntos.

1.7 La línea recta

En esta sección estudiaremos un tipo de ecuación que tiene dos variables, la *ecuación lineal*, y su gráfica, la *línea recta*.

Pendiente de una recta

FIGURA 53



Considere la escalera ilustrada en la figura 53. Cada escalón tiene exactamente el mismo **recorrido** horizontal y la misma **elevación** vertical. La razón de la elevación al recorrido, llamada *pendiente*, es una medida numérica de la inclinación de la escalera. Por ejemplo, si el recorrido se aumenta y la elevación permanece sin cambio, la escalera se vuelve menos inclinada. Si el recorrido se mantiene igual pero se aumenta la elevación, la escalera se vuelve más inclinada. Esta característica importante de una recta se define mejor utilizando coordenadas rectangulares.

Pendiente de una recta

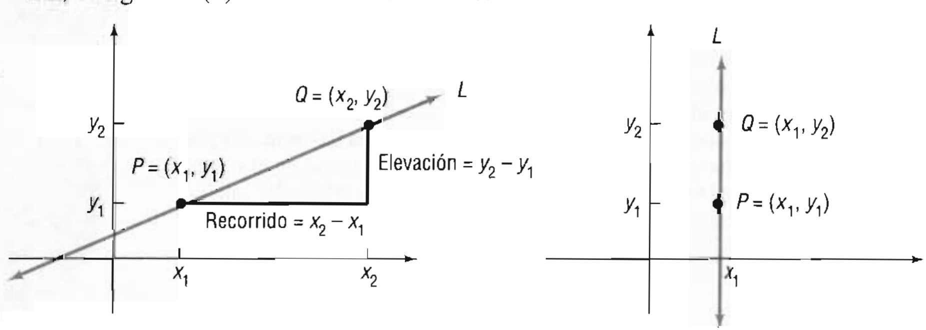
Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos distintos con $x_1 \neq x_2$. La **pendiente *m*** de la recta no vertical L que contiene a P y Q esta definida por la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad x_1 \neq x_2 \tag{1}$$

Si $x_1 = x_2$, L es una **recta vertical** y la pendiente m de L esta **indefinida** (ya que resulta en una división entre 0).

La figura 54(a) proporciona una ilustración de la pendiente de una recta no vertical; la figura 54(b) ilustra una recta vertical.

FIGURA 54



(a) La pendiente de L es $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **(b)** Pendiente indefinida

Como puede apreciarse en la figura 54(a), la pendiente m de una recta no vertical puede ser vista así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Elevación}}{\text{Recorrido}}$$

También podemos expresar la pendiente m de una recta vertical como

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{Cambia en } y}{\text{Cambia en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Esto es, la pendiente m de una recta no vertical L es la razón del cambio en las coordenadas y de P a Q, $\Delta y = y_2 - y_1$, al cambio de las coordenadas x de P a Q, $\Delta x = x_2 - x_1$.

Dos comentarios acerca de la pendiente de una recta no vertical pueden sernos útiles:

1. Cualesquiera dos puntos distintos sobre la recta pueden ser utilizados para calcular la pendiente de la recta. (*Véase* la figura 55 para una justificación.)

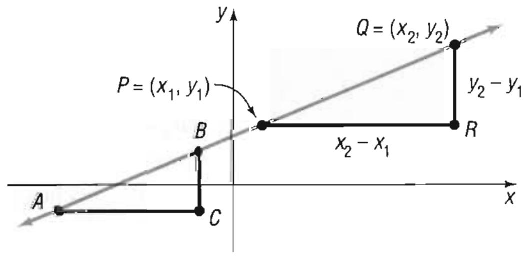


FIGURA 55
Los triángulos ABC y PQR son semejantes (ángulos iguales). En consecuencia, las razones de los lados correspondientes son proporcionales. Por tanto:

$$\text{Pendiente usando } P \text{ y } Q = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \text{pendiente usando } A \text{ y } B = \frac{d(B, C)}{d(A, C)}$$

2. La pendiente de una recta puede ser calculada de $P = (x_1, y_1)$ a $Q = (x_2, y_2)$ o de Q a P, porque

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

■ Ahora resuelva el problema 71.

Para comprender mejor el significado de pendiente m de una recta L, considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 *Determinación de las pendientes de varias rectas que tienen el mismo punto (2, 3)*

Calcular las pendientes de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 que tienen los siguientes pares de puntos. Hacer las gráficas de las cuatro rectas en el mismo conjunto de ejes coordenados.

$$\begin{aligned}
L_1&: \quad P = (2, 3) \qquad Q_1 = (-1, -2)\\
L_2&: \quad P = (2, 3) \qquad Q_2 = (3, -1)\\
L_3&: \quad P = (2, 3) \qquad Q_3 = (5, 3)\\
L_4&: \quad P = (2, 3) \qquad Q_4 = (2, 5)
\end{aligned}$$

Solución Sean m_1, m_2, m_3 y m_4 las pendientes de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4, respectivamente. Entonces de modo que por cada movimiento horizontal de -5 unidades (un movimiento hacia la izquierda) habrá un correspondiente movimiento vertical de 4 unidades (hacia arriba). Este enfoque nos lleva al punto $(-2, 6)$, que también se muestra en la gráfica de la figura 59. ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

Ecuaciones de rectas

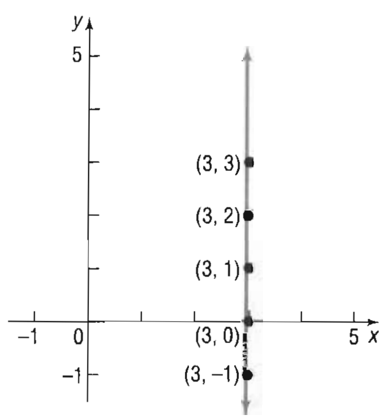
Una vez asimilado el concepto de pendiente de una recta, estamos preparados para deducir ecuaciones de rectas. Como veremos, hay varias formas de la ecuación de una recta. Iniciemos con un ejemplo.

EJEMPLO 3 *Graficación de una recta*

Hacer la gráfica de la ecuación: $x = 3$

Solución Buscamos todos los puntos (x, y) en el plano para los cuales $x = 3$. Así, no importa qué coordenada y se utilice, la correspondiente coordenada x siempre será igual a 3. En consecuencia, la gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección-x igual a 3 y pendiente indefinida. *Véase* la figura 60.

FIGURA 60
$x = 3$



■

Como se sugirió por el ejemplo 3, tenemos el resultado siguiente:

Teorema Una recta vertical está dada por una ecuación de la forma

Ecuación de una recta vertical

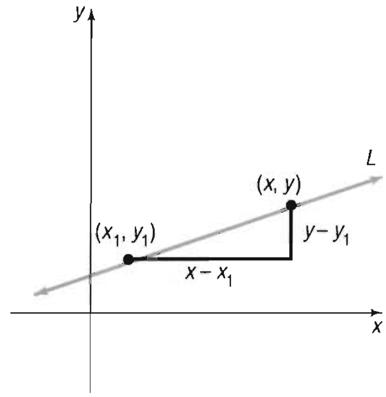
$$\boxed{x = a}$$

donde a es la intersección$-x$. ■

Comentario: Para hacer la gráfica de una ecuación utilizando un dispositivo de graficación necesitamos expresar la ecuación en la forma y = expresión en x. Pero $x = 3$ no puede ser puesta en esta forma. Sin embargo, la mayoría de los dispositivos de graficación tiene maneras especiales de dibujar rectas verticales. LINE, PLOT y VERT están entre las más comunes. Consulte su manual para determinar el método correcto a utilizar.

Ahora sea L una recta no vertical con pendiente m y con el punto (x_1, y_1). *Véase* la figura 61. Para cualquier otro punto (x, y) sobre L, tenemos

FIGURA 61



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{o} \quad y - y_1 = m(x - x_1)$$

Teorema

Una ecuación de una recta no vertical con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) es

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (2)$$

■

EJEMPLO 4

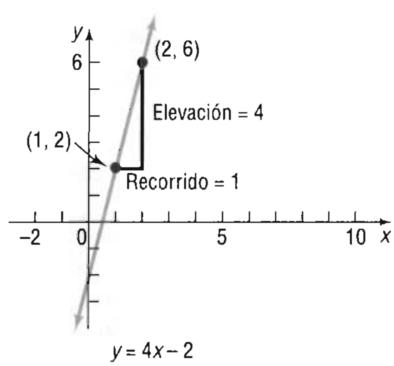
La forma punto–pendiente de una recta

Una ecuación de la recta con pendiente 4 y que pasa por el punto (1, 2) puede ser encontrada utilizando la forma punto-pendiente con $m = 4$, $x_1 = 1$, y $y_1 = 2$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = 4(x - 1)$$
$$y = 4x - 2$$

Véase la figura 62. ■

FIGURA 62
$y = 4x - 2$



EJEMPLO 5

Determinación de la ecuación de una recta horizontal

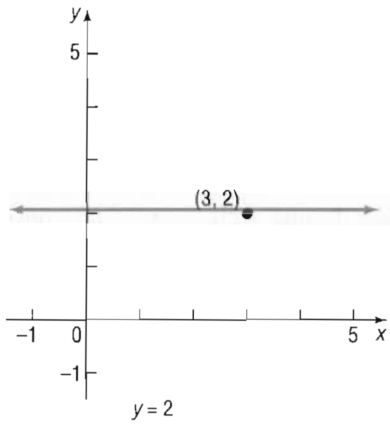
Hallar una ecuación de la recta horizontal que pasa por el punto (3, 2).

Solución La pendiente de una recta horizontal es 0. Para obtener una ecuación, utilizamos la forma punto-pendiente con $m = 0$, $x_1 = 3$, y $y_1 = 2$:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 2 &= 0 \cdot (x - 3) \\ y - 2 &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Véase la figura 63 para la gráfica.

FIGURA 63
$y = 2$



Como es sugerido por el ejemplo 5, tenemos el resultado:

Teorema Una recta horizontal está dada por una ecuación de la forma

Ecuación de una recta horizontal

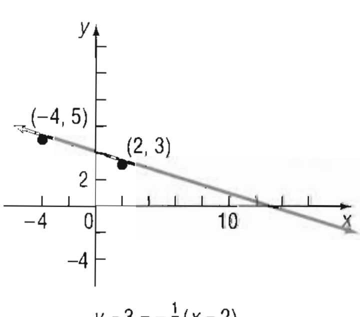
$$\boxed{y = b}$$

donde b es la intersección -y.

EJEMPLO 6 *Determinación de una ecuación de una recta dados dos puntos*

Encontrar una ecuación de la recta L que pasa por los puntos (2, 3) y (−4, 5). Hacer la gráfica de la recta L.

FIGURA 64
$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 2)$



Solución Ya que tenemos dos puntos, primero calculamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{5 - 3}{-4 - 2} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Utilizamos el punto (2, 3) y el hecho de que la pendiente $m = -\dfrac{1}{3}$ para obtener la forma punto-pendiente de la ecuación de la recta:

$$y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 2)$$

Para la gráfica *véase* la figura 64.

En la solución del ejemplo 6, podríamos haber usado el otro punto $(-4, 5)$, en lugar del $(2, 3)$. La ecuación que resulta, aunque parece diferente, es equivalente a la obtenida en el ejemplo. (Inténtelo.)

Otra forma de la ecuación de la recta del ejemplo 6 puede ser obtenida multiplicando ambos miembros de la ecuación punto-pendiente por 3 y agrupando términos:

$$\begin{aligned} y - 3 &= -\frac{1}{3}(x - 2) \\ 3(y - 3) &= 3\left(-\frac{1}{3}\right)(x - 2) \quad \text{Multiplicar por 3.} \\ 3y - 9 &= -1(x - 2) \\ 3y - 9 &= -x + 2 \\ x + 3y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Forma general de la ecuación de una recta

La ecuación de una recta L está en **forma general** cuando está escrita como

$$Ax + By + C = 0 \tag{3}$$

donde A, B y C son tres números reales y A y B no son ambos cero.

■ Ahora resuelva los problemas 31 y 35.

Toda recta tiene una ecuación que es equivalente a la escrita en la forma general. Por ejemplo, una recta vertical cuya ecuación es

$$x = a$$

puede ser escrita en la forma general

$$1 \cdot x + 0 \cdot y - a = 0 \quad A = 1, B = 0, C = -a$$

Una recta horizontal cuya ecuación es

$$y = b$$

puede ser escrita en la forma general

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - b = 0 \quad A = 0, B = 1, C = -b$$

Rectas que no sean verticales ni horizontales tendrán ecuaciones generales en la forma

$$Ax + By + C = 0 \quad A \neq 0 \text{ y } B \neq 0$$

Ya que la ecuación de toda recta puede ser escrita en la forma general, cualquier ecuación equivalente a (3) es llamada **ecuación lineal.**

Otra ecuación útil de una recta se obtiene cuando la pendiente m y la intersección con el eje y son conocidas. En este caso, conocemos tanto la pendiente m de la recta como un punto $(0, b)$ sobre la recta; así, podemos utilizar la forma punto-pendiente, ecuación (2), para obtener la ecuación:

$$y - b = m(x - 0) \quad \text{o} \quad y = mx + b$$

Teorema

Forma pendiente-intersección de una ecuación de una recta

Una ecuación de una recta L con pendiente m e intersección-y igual a b es

$$y = mx + b \tag{4}$$

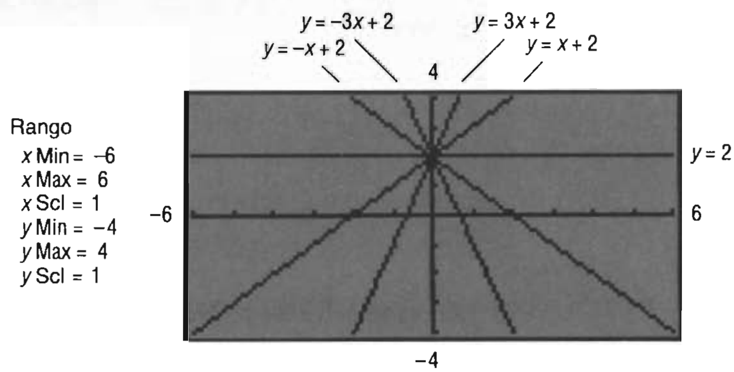
■

Exploración: En la misma pantalla, haga las gráficas de las siguientes rectas (*véase* la figura 65):

$$y = 2$$
$$y = x + 2$$
$$y = -x + 2$$
$$y = 3x + 2$$
$$y = -3x + 2$$

¿Qué puede concluirse de las rectas $y = mx + 2$?

FIGURA 65
$y = mx + 2$

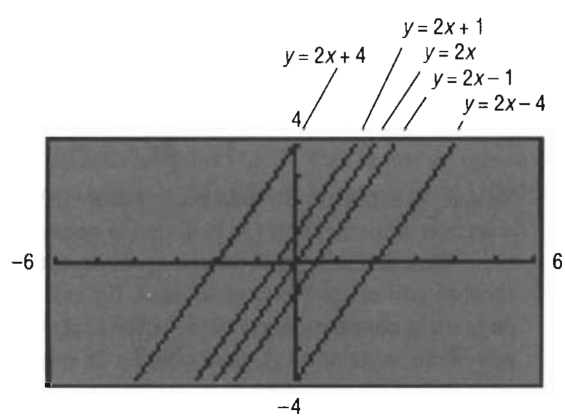


En la misma pantalla, haga ahora las gráficas de las siguientes rectas (*véase* la figura 66):

$$y = 2x$$
$$y = 2x + 1$$
$$y = 2x - 1$$
$$y = 2x + 4$$
$$y = 2x - 4$$

¿Qué puede concluirse de las rectas $y = 2x + b$?

FIGURA 66
$y = 2x + b$



MISIÓN POSIBLE

Capítulo 1

EL FUTURO DE LOS EVENTOS DE PISTA EN LOS JUEGOS OLÍMPICOS

Algunas personas piensan que las mujeres atletas están empezando a "alcanzar" a los hombres en los eventos de pista en los Juegos Olímpicos. De hecho, investigadores de la UCLA publicaron en 1992 datos que parecían indicar que dentro de 65 años los mejores corredores hombres y mujeres podrían competir en igualdad de condiciones. Otros investigadores no coinciden con esto. A continuación están los datos de la carrera de 200 metros con los tiempos ganadores en los Juegos Olímpicos de diferentes años.

	TIEMPO EN SEGUNDOS PARA VARONES	TIEMPO EN SEGUNDOS PARA DAMAS
1948	21.1	24.4
1952	20.7	23.7
1956	20.6	23.4
1960	20.5	24.0
1964	20.3	23.0
1968	19.83	22.5
1972	20.00	22.40
1976	20.23	22.37
1980	20.19	22.03
1984	19.80	21.81
1988	19.75	21.34
1992	19.73	21.72

(Note que la introducción de mejores dispositivos de cronometraje significa medidas más precisas, a partir de 1968 para los varones y de 1972 para las damas.)

1. Inicie su investigación acerca de la conjetura de UCLA haciendo una gráfica de estos datos. Para obtener la clase de precisión que necesita debe utilizar papel milimétrico. Trabajará sólo en el primer cuadrante. En su eje x coloque el año de las Olimpiadas desde 1948 hasta 2048, de cuatro en cuatro. En su eje y ponga los números desde 15 hasta 25, que representan los segundos; si utiliza papel milimétrico tome cuatro cuadros para cada segundo. Utilice X para representar los tiempos de los varones y O para los de las mujeres. Esto formará lo que llamamos *gráfica de dispersión*, no es una línea o curva bien definida.
2. Con una regla o una escuadra, dibuje una recta que represente aproximadamente la pendiente y dirección indicadas por las marcas de los varones. Haga lo mismo con las marcas de las damas. Escriba una o dos oraciones explicando por qué piensa que su recta es una buena representación de la gráfica de dispersión.
3. Ahora encuentre la ecuación de cada recta utilizando su gráfica para estimar la pendiente y la intersección-y de cada una. Trate de ser lo más preciso posible, recordando sus unidades y usando los puntos en donde la recta cruza intersecciones de la cuadrícula. La pendiente estará en segundos por año.
4. ¿Parece que sus dos rectas se cruzan? ¿En qué año se cruzan? Si resuelve las dos ecuaciones algebraicamente, ¿obtiene la misma respuesta?
5. (Opcional) Algunas calculadoras gráficas le permiten hacer este problema en el modo de estadística, marcando los puntos individuales que usted teclee y encontrando una regresión lineal que represente los datos. Si tiene una calculadora gráfica compruebe si las ecuaciones de la calculadora coinciden con las de usted.
6. Tome una decisión con el grupo acerca de si piensa que los tiempos de las damas alcanzarán a los de los varones. Escriba dos o tres oraciones explicando por qué sí o por qué no cree que lo harán.

Cuando la ecuación de una recta está escrita en la forma pendiente-intersección, es fácil encontrar la pendiente m y la intersección-y b de la recta. Por ejemplo, suponga que la ecuación de la recta es

$$y = -2x + 3$$

Compárela con $y = mx + b$:

$$\begin{array}{c} y = -2x + 3 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ y = mx + b \end{array}$$

La pendiente de esta línea es -2 y su intersección-y es 3.

Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 7 *Determinación de la pendiente y de la intersección y de una recta*

Hallar la pendiente m y la intersección-y b de la recta $2x + 4y - 8 = 0$. Haga la gráfica de la recta.

Solución Para obtener la pendiente y la intersección-y, transformamos la ecuación a su forma pendiente-intersección. Por tanto, necesitamos resolver para y:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 8 &= 0 \\ 4y &= -2x + 8 \\ y &= -\tfrac{1}{2}x + 2 \end{aligned}$$

El coeficiente de x, $-\frac{1}{2}$, es la pendiente, y la intersección-y es 2. Podemos hacer la gráfica de la recta de dos maneras:

1. Usando el hecho de que la intersección-y es 2 y la pendiente es $-\frac{1}{2}$. Después, iniciando en el punto (0, 2), yendo a la derecha 2 unidades y hacia abajo 1 unidad hasta el punto (2, 1). *Véase* la figura 67.

O

2. Localizando las intersecciones con los ejes. Ya que la intersección-y es 2, sabemos que una intersección es (0, 2). Para obtener la intersección-x, hacemos $y = 0$ y resolvemos para x. Cuando $y = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} 2x + 4 \cdot 0 - 8 &= 0 \\ 2x - 8 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las intersecciones con los ejes son (4, 0) y (0, 2). *Véase* la figura 68.

FIGURA 67
$2x + 4y - 8 = 0$

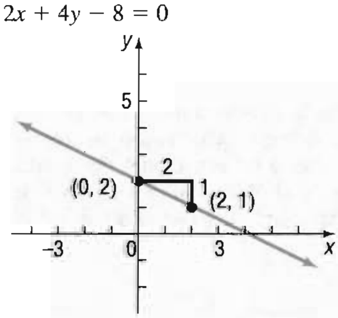
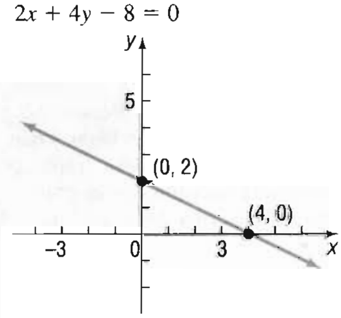


FIGURA 68
$2x + 4y - 8 = 0$

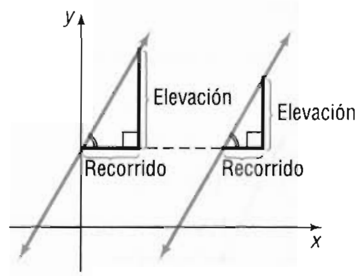


■ Ahora resuelva el problema 63.

Rectas paralelas y perpendiculares

Cuando en un plano dos rectas no tienen puntos en común se dice que son **paralelas.** *Véase* la figura 69. Ahí trazamos dos rectas y triángulos rectángulos dibujando lados paralelos a los ejes coordenados. Estas rectas son paralelas si, y sólo si, los triángulos rectángulos son semejantes. (¿Advierte por qué? Porque dos ángulos son iguales.) Pero los triángulos son semejantes si, y sólo si, las razones de los lados correspondientes son iguales.

FIGURA 69
Las rectas son paralelas si, y sólo si, sus pendientes son iguales



Esto sugiere el resultado siguiente:

Teorema

Dos rectas no verticales distintas son paralelas si, y sólo si, sus pendientes son iguales. ■

El uso de las palabras "si, y sólo si" en el teorema anterior significa que en realidad se están haciendo dos enunciados, uno es el recíproco del otro.

Si dos rectas no verticales distintas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

Si dos rectas no verticales distintas tienen pendientes iguales, entonces son paralelas.

EJEMPLO 8

Demostración de que dos rectas son paralelas

Demostrar que las rectas dadas por las ecuaciones siguientes son paralelas:

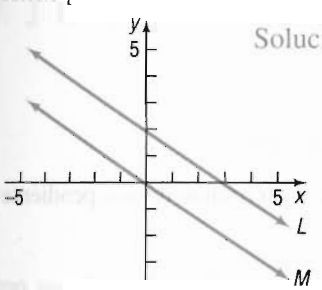
$$L:\quad 2x + 3y - 6 = 0 \qquad M:\quad 4x + 6y = 0$$

Solución

Para determinar si estas rectas tienen pendientes iguales, escribimos cada ecuación en la forma pendiente-intersección:

$$\begin{aligned} L:\quad 2x + 3y - 6 &= 0 \\ 3y &= -2x + 6 \\ y &= -\tfrac{2}{3}x + 2 \\ \text{Pendiente} &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M:\quad 4x + 6y &= 0 \\ 6y &= -4x \\ y &= -\tfrac{2}{3}x \\ \text{Pendiente} &= -\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

FIGURA 70
Rectas paralelas



Rectas paralelas

Puesto que estas rectas tienen la misma pendiente,, $-\frac{2}{3}$, pero diferentes intersecciones-y, concluimos que son paralelas. *Véase* la figura 70. ■

EJEMPLO 9

Determinación de que una recta es paralela a otra especificada

Hallar una ecuación de la recta que contenga al punto $(2, -3)$ y sea paralela a la recta $2x + y - 6 = 0$.

Solución

Buscamos que la pendiente de la recta sea igual a la pendiente de $2x + y - 6 = 0$, ya que las dos rectas serán paralelas. Así, empezamos escribiendo la ecuación de la recta $2x + y - 6 = 0$ en la forma pendiente-intersección:

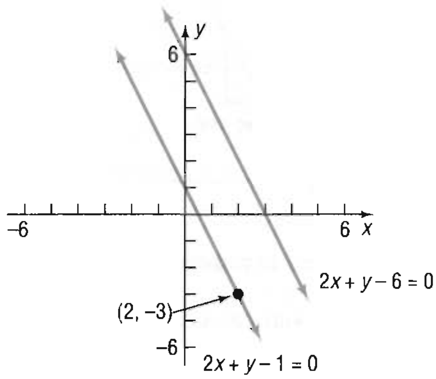
$$\begin{aligned} 2x + y - 6 &= 0 \\ y &= -2x + 6 \end{aligned}$$

La pendiente es -2. Como queremos que la recta contenga al punto $(2, -3)$, usamos la forma punto-pendiente para obtener

$$\begin{aligned} y + 3 &= -2(x - 2) \\ 2x + y - 1 &= 0 \quad \text{Forma general.} \\ y &= -2x + 1 \quad \text{Forma pendiente–intersección} \end{aligned}$$

Esta recta es paralela a la recta $2x + y - 6 = 0$ y contiene al punto $(2, -3)$. *Véase* la figura 71.

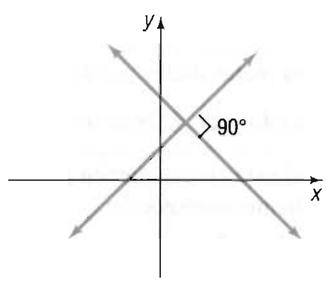
FIGURA 71



■ Ahora resuelva el problema 43.

Cuando dos rectas se cortan formando un ángulo recto (90°), se dice que son **perpendiculares.** *Véase* la figura 72.

FIGURA 72
Rectas perpendiculares



El resultado siguiente nos da una condición, en términos de sus pendientes, para que dos rectas sean perpendiculares:

Teorema Dos rectas no verticales son perpendiculares si, y sólo si, el producto de sus pendientes es -1. ■

Aquí comprobaremos la parte "sólo si" del enunciado:

Si dos rectas no verticales son perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es -1.

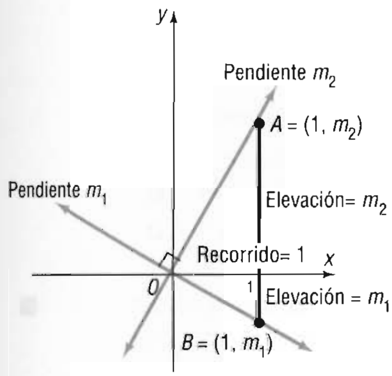
En el problema 100 se le pide que demuestre la parte "si" del teorema; esto es,

Si dos rectas no verticales tienen pendiente cuyo producto es -1, entonces son perpendiculares.

Prueba

Sean m_1 y m_2 las pendientes de las dos rectas. No hay pérdida de generalidad (esto es, ni el ángulo ni las pendientes están afectadas) si colocamos las rectas de modo que se corten en el origen. *Véase* la figura 73. El punto $A = (1, m_2)$ está sobre la recta que tiene pendiente m_2 y el punto $B = (1, m_1)$ sobre la recta que tiene pendiente m_1. (¿Advierte por qué esto es cierto?)

FIGURA 73



Suponga que las rectas son perpendiculares. Entonces el triángulo OAB es un triángulo rectángulo. Como consecuencia del teorema de Pitágoras, se deduce que

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2 \tag{5}$$

Por la fórmula de distancia, podemos escribir cada una de estas distancia como

$$[d(O, A)]^2 = (1 - 0)^2 + (m_2 - 0)^2 = 1 + m_2^2$$
$$[d(O, B)]^2 = (1 - 0)^2 + (m_1 - 0)^2 = 1 + m_1^2$$
$$[d(A, B)]^2 = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

Utilizando estos hechos en la ecuación (5), obtenemos

$$(1 + m_2^2) + (1 + m_1^2) = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

lo cual, después de la simplificación, puede escribirse como

$$m_1m_2 = -1$$

Por tanto, si las rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes será -1. ■

Puede que le sea más fácil recordar la condición necesaria para que dos rectas no verticales sean perpendiculares, observando que la igualdad $m_1m_2 = -1$ significa que m_1 y m_2 son recíprocos negativos uno del otro; esto es, $m_1 = -1/m_2$ o $m_2 = -1/m_1$.

EJEMPLO 10 *Determinación de la pendiente de una recta perpendicular a otra*

Si una recta tiene pendiente $\frac{3}{2}$, cualquier recta que tenga pendiente $-\frac{2}{3}$ es perpendicular a ella. ■

EJEMPLO 11 *Determinación de una recta perpendicular a otra*

Hallar una ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2)$ y es perpendicular a la recta $x + 3y - 6 = 0$. Hacer la gráfica de las dos rectas.

Solución

Primero escribimos la ecuación de la recta dada en la forma pendiente-intersección para encontrar su pendiente

$$x + 3y - 6 = 0$$
$$3y = -x + 6$$
$$y = -\tfrac{1}{3}x + 2$$

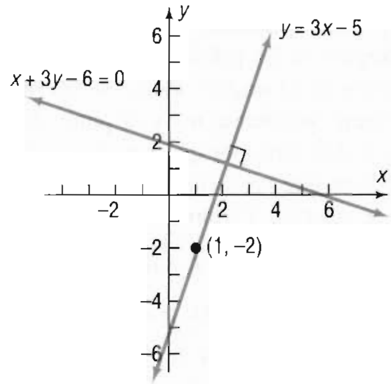
La recta dada tiene pendiente $-\frac{1}{3}$. Cualquier recta perpendicular a ésta tendrá pendiente 3. Ya que necesitamos que el punto $(1, -2)$ esté sobre esta recta con pendiente 3, usamos la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

$$y - (-2) = 3(x - 1)$$
$$y + 2 = 3(x - 1)$$

Esta ecuación es equivalente a las formas

$$3x - y - 5 = 0 \quad \text{Forma general.}$$
$$y = 3x - 5 \quad \text{Forma pendiente-intersección.}$$

FIGURA 74



Véase la figura 74. ■

■ Ahora resuelva el problema 51.

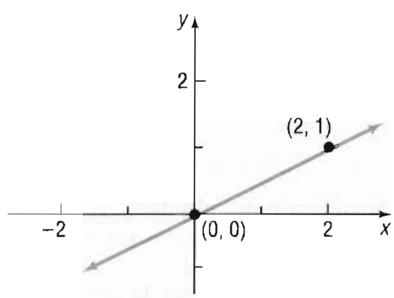
Advertencia: Asegúrese de utilizar una pantalla cuadrada cuando haga gráficas de rectas perpendiculares; de otra forma el ángulo entre las rectas aparecerá distorsionado.

1.7

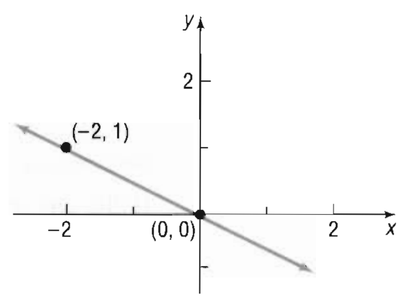
Ejercicio 1.7

En los problemas del 1 al 4, encuentre la pendiente de la recta.

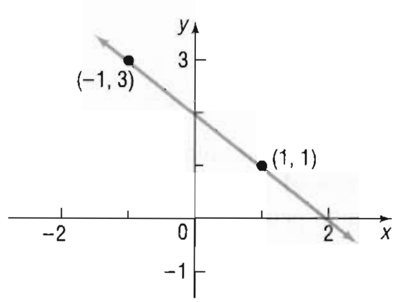
1.



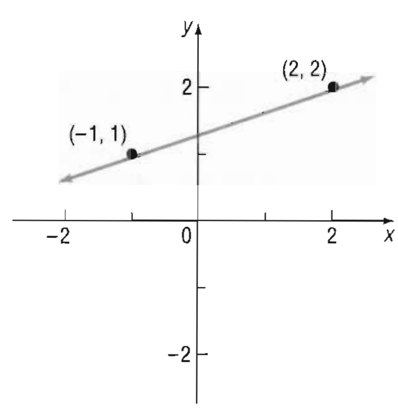
2.



3.



4.



En los problemas del 5 al 14, marque cada pareja de puntos y determine la pendiente de la recta que los contiene. Haga la gráfica de la recta.

5. $(2, 3); (4, 0)$ **6.** $(4, 2); (3, 4)$ **7.** $(-2, 3); (2, 1)$ **8.** $(-1, 1); (2, 3)$

9. $(-3, -1); (2, -1)$ **10.** $(4, 2); (-5, 2)$ **11.** $(-1, 2); (-1, -2)$ **12.** $(2, 0); (2, 2)$

13. $(\sqrt{2}, 3); (1, \sqrt{3})$ **14.** $(-2\sqrt{2}, 0); (4, \sqrt{5})$

En los problemas del 15 al 22, haga la gráfica de la recta que pasa por el punto P y tiene la pendiente m.

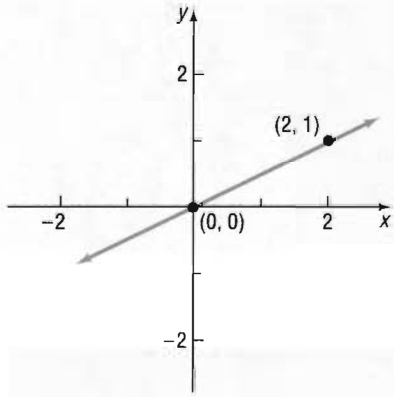
15. $P = (1, 2)$; $m = 3$ **16.** $P = (2, 1)$; $m = 4$ **17.** $P = (2, 4)$; $m = \frac{-3}{4}$

18. $P = (1, 3)$; $m = \frac{-2}{5}$ **19.** $P = (-1, 3)$; $m = 0$ **20.** $P = (2, -4)$; $m = 0$

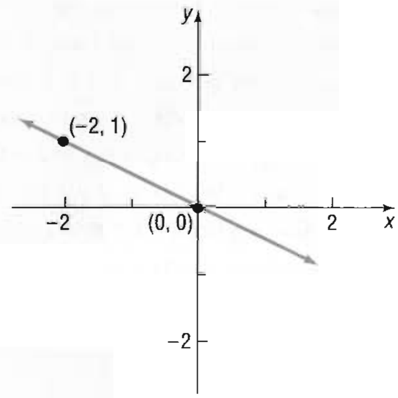
21. $P = (0, 3)$; pendiente indefinida **22.** $P = (-2, 0)$; pendiente indefinida

En los problemas del 23 al 30 encuentre una ecuación de cada recta. Exprese su respuesta usando la forma general o la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, la que usted prefiera.

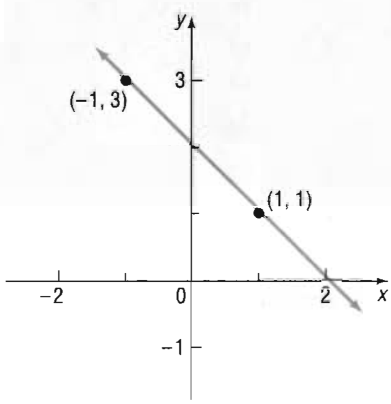
23.



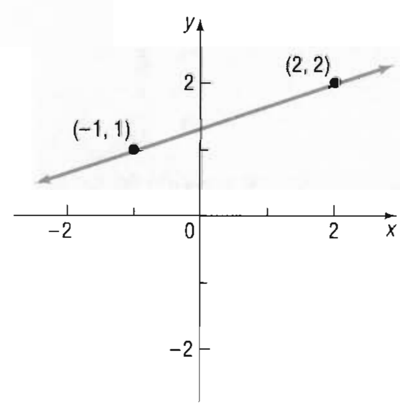
24.



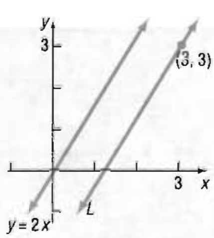
25.



26.

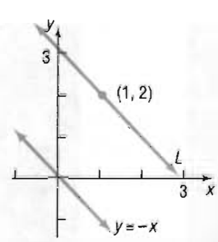


27.



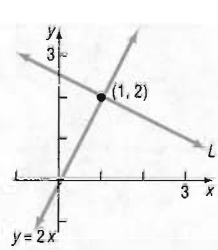
L es paralela a $y = 2x$

28.



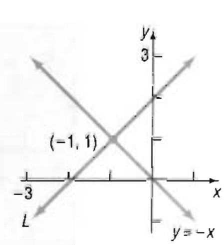
L es paralela a $y = -x$

29.



L es perpendicular a $y = 2x$

30.



L es perpendicular a $y = -x$

En los problemas del 31 al 54 encuentre una ecuación de la recta con las propiedades dadas. Exprese su respuesta usando la forma general o la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, la que usted prefiera.

31. Pendiente $= 3$; pasa por $(-2, 3)$

32. Pendiente $= 2$; pasa por $(4, -3)$

33. Pendiente $= -\frac{2}{3}$; pasa por $(1, -1)$

34. Pendiente $= \frac{1}{2}$; pasa por $(3, 1)$

35. Pasa por $(1, 3)$ y $(-1, 2)$

36. Pasa por $(-3, 4)$ y $(2, 5)$

37. Pendiente $= -3$; intersección-$y = 3$

38. Pendiente $= -2$; intersección-$y = -2$

39. intersección-$x = 2$; intersección-$y = -1$

40. intersección-$x = -4$; intersección-$y = 4$

41. Pendiente indefinida; pasa por $(2, 4)$

42. Pendiente indefinida; pasa por $(3, 8)$

43. Paralela a la recta $y = 2x$; pasa por $(-1, 2)$

44. Paralela a la recta $y = -3x$; pasa por $(-1, 2)$

45. Paralela a la recta $2x - y + 2 = 0$; pasa por $(0, 0)$

46. Paralela a la recta $x - 2y + 5 = 0$; pasa por $(0, 0)$

47. Paralela a la recta $x = 5$; pasa por $(4, 2)$

48. Paralela a la recta $y = 5$; pasa por $(4, 2)$

49. Perpendicular a la recta $y = \frac{1}{2}x + 4$; pasa por $(1, -2)$

50. Perpendicular a la recta $y = 2x - 3$; pasa por $(1, -2)$

51. Perpendicular a la recta $2x + y - 2 = 0$; pasa por $(-3, 0)$

52. Perpendicular a la recta $x - 2y + 5 = 0$; pasa por $(0, 4)$

53. Perpendicular a la recta $x = 8$; pasa por $(3, 4)$

54. Perpendicular a la recta $y = 8$; pasa por $(3, 4)$

En los problemas del 55 al 74, encuentre la pendiente y la intersección-y de cada recta. Haga la gráfica de la recta.

55. $y = 2x + 3$ **56.** $y = -3x + 4$ **57.** $\frac{1}{2}y = x - 1$ **58.** $\frac{1}{3}x + y = 2$ **59.** $y = \frac{1}{2}x + 2$

60. $y = 2x + \frac{1}{2}$ **61.** $x + 2y = 4$ **62.** $-x + 3y = 6$ **63.** $2x - 3y = 6$ **64.** $3x + 2y = 6$

65. $x + y = 1$ **66.** $x - y = 2$ **67.** $x = -4$ **68.** $y = -1$ **69.** $y = 5$

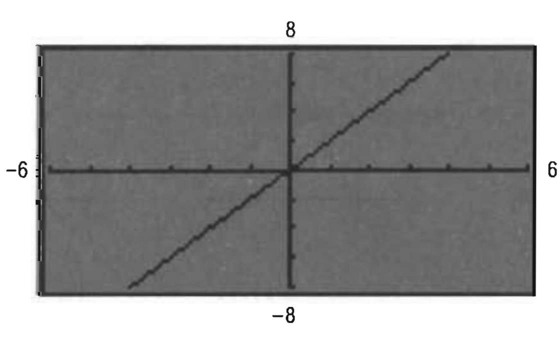
70. $x = 2$ **71.** $y - x = 0$ **72.** $x + y = 0$ **73.** $2y - 3x = 0$ **74.** $3x + 2y = 0$

75. Encuentre una ecuación del eje x.

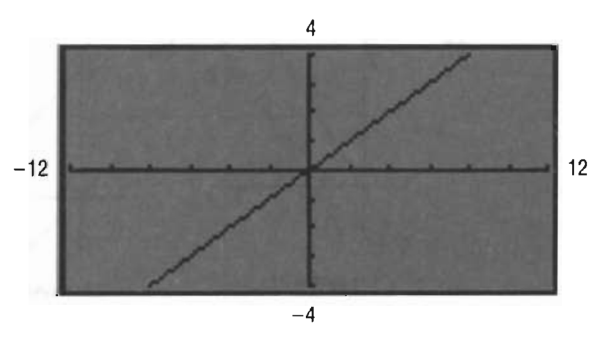
76. Encuentre una ecuación del eje y.

En los problemas del 77 al 80 relacione cada gráfica con la ecuación correcta:
(a) $y = x$ *(b)* $y = 2x$ *(c)* $y = x/2$ *(d)* $y = 4x$

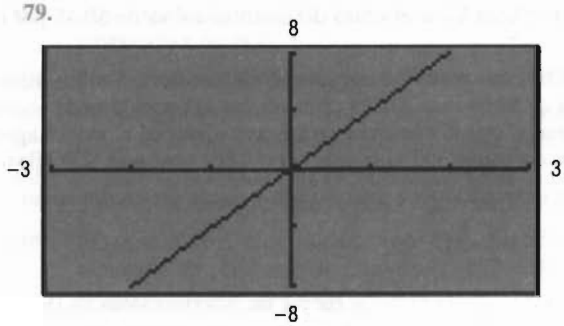
77.



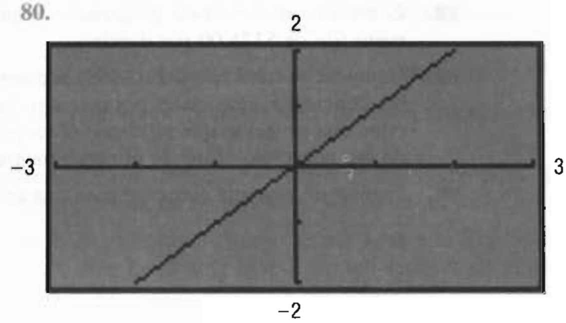
78.



79.

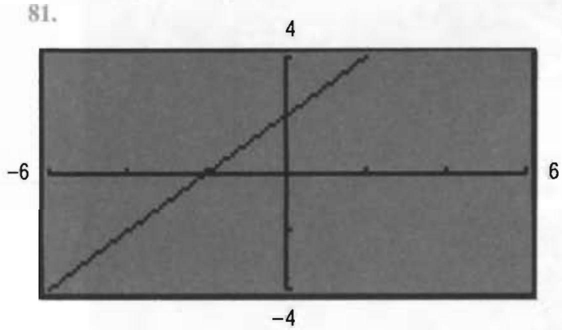


80.

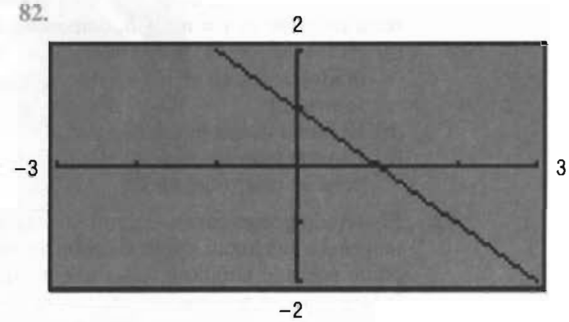


En los problemas del 81 al 84 escriba una ecuación de cada recta. Exprese su respuesta usando la forma general o la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, la que usted prefiera.

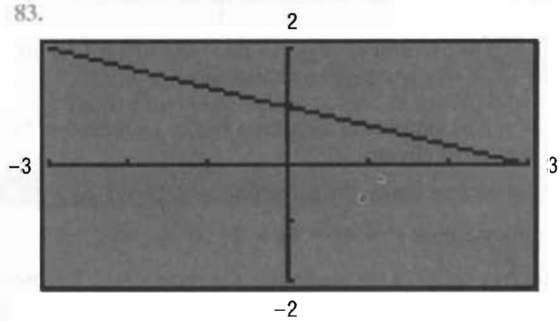
81.



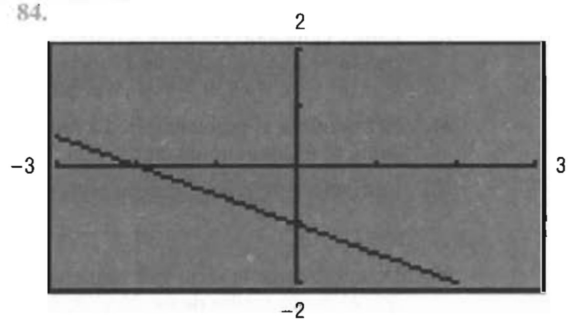
82.



83.



84.



85. *Medición de temperatura.* La relación entre los grados Celsius (°C) y los Fahrenheit (°F) para medir la temperatura es lineal. Encuentre una ecuación que relacione °C y °F, si 0°C corresponde a 32°F y 100°C corresponden a 212°F. Utilice la ecuación para hallar la medida Celsius de 70°F.

86. *Medición de temperatura.* La escala Kelvin (K) para medición de temperatura se obtiene sumando 273 a la temperatura Celsius.

(a) Escriba una ecuación que relacione K y °C.

(b) Escriba una ecuación que relacione K y °F (*véase* el problema 85).

87. *Comercio: cálculo de ganancia.* Cada domingo un estanquillo vende x copias de cierto periódico a \$1.00 cada una. El costo del distribuidor es de \$0.50 por periódico y se paga un costo fijo de almacenaje, envío, etc., de \$100.00 cada domingo.

(a) Escriba una ecuación que relacione la ganancia P con el número x de copias vendidas. Haga la gráfica de esa ecuación.

(b) ¿Cuál es la ganancia para el estanquillo si se venden 1000 copias?

(c) ¿Y si se venden 5000 copias?

88. *Comercio: cálculo de ganancia*. Repita el problema 87 si el costo del distribuidor es de \$0.45 por copia y el costo fijo de \$125.00 por domingo.

89. *Costo de electricidad*. En 1991, la compañía Commonwealth Edison suministró electricidad en los meses de verano a clientes residenciales por un cargo mensual de \$9.06 más 10.819 centavos por kilowatt-hora de consumo.* Escriba una ecuación que relacione el cargo mensual C con el número x de kilowatts-hora en el mes. Haga la gráfica de esa ecuación. ¿Cuál es el cargo mensual por consumir 300 kilowatts-hora? ¿Por consumir 900 kilowatts-hora?

90. Demuestre que una ecuación para una recta con intersección-x e intersección-y puede ser escrita como

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

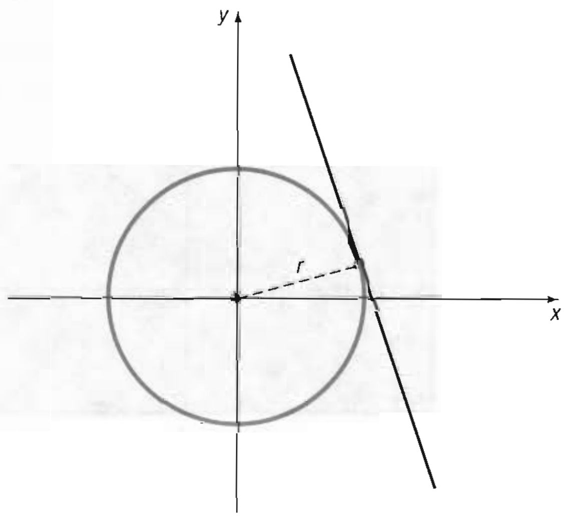
donde a es la intersección-x y b la intersección-y. Esta es la llamada **forma de intersecciones (o simétrica)** de la ecuación de una recta.

91. La **recta tangente** a un círculo puede ser definida como la recta que corta al círculo en un solo punto, llamado **punto de tangencia** (*véase* la figura). Si la ecuación del círculo es $x^2 + y^2 = r^2$, y la ecuación de la recta tangente es $y = mx + b$, demuestre que:

(a) $r^2(1 + m^2) = b^2$ [*Sugerencia*: La ecuación cuadrática $x^2 + (mx + b)^2 = r^2$ tiene exactamente una solución.]

(b) El punto de tangencia es $(-r^2m/b, r^2/b)$.

(c) La recta tangente es perpendicular a la recta que contiene el centro del círculo y el punto de tangencia.



92. El método griego para encontrar la ecuación de la recta tangente a un círculo, usaba el hecho de que en cualquier punto sobre el círculo la recta que contiene al radio y la tangente son perpendiculares (*véase* el problema 91). Utilice este método para hallar una ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 9$ en el punto $(1, 2\sqrt{2})$.

93. Utilice el método griego descrito en el problema 92 para encontrar una ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ en el punto $(3, 2\sqrt{2} - 3)$.

94. Refiriéndose al problema 91. La recta $x - 2y + 4 = 0$ es tangente al círculo en $(0, 2)$. La recta $y = 2x - 7$ es tangente al mismo círculo en $(3, -1)$. Encuentre el centro del círculo

95. Encuentre una ecuación de la recta que contiene los centros de los dos círculos

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$$

96. Demuestre que la recta que contiene los puntos (a, b) y (b, a) es perpendicular a la recta $y = x$. También demuestre que el punto medio de (a, b) y (b, a) pertenece a la recta $y = x$.

97. La ecuación $2x - y + C = 0$ define una **familia de rectas**, una recta para cada valor de C. En un conjunto de ejes de coordenadas, haga las gráficas de los miembros de la familia cuando $C = -4$, $C = 0$, y $C = 2$. ¿Puede sacar una conclusión acerca de cada miembro de esta familia de rectas, a partir de la gráfica?

98. Repita el problema 97 para la familia de rectas $Cx + y + 4 = 0$.

99. Si un círculo de radio 2 se hace rodar a lo largo del eje x, ¿cuál será la ecuación para la trayectoria del centro del círculo?

100. Probar que si dos rectas no verticales tienen pendientes cuyo producto es -1, entonces son perpendiculartes [*Sugerencia:* Consulte la figura 73.]

101. ¿Cuál forma de la ecuación de una recta es la que prefiere utilizar? Justifique su posición con un ejemplo donde muestre que su elección es mejor que otra. Dé razones.

102. ¿Todas las rectas pueden ser escritas en la forma pendiente-intersección? Explique su respuesta.

103. ¿Todas las rectas tienen dos intersecciones con los ejes distintos? ¿Hay rectas que no tienen intersecciones con los ejes? Explique sus respuestas

104. ¿Qué puede decir acerca de dos rectas que tienen pendientes iguales e intersecciones-y iguales?

**Fuente:* Commonwealth Edison Co., Chicago, Illinois, 1991.

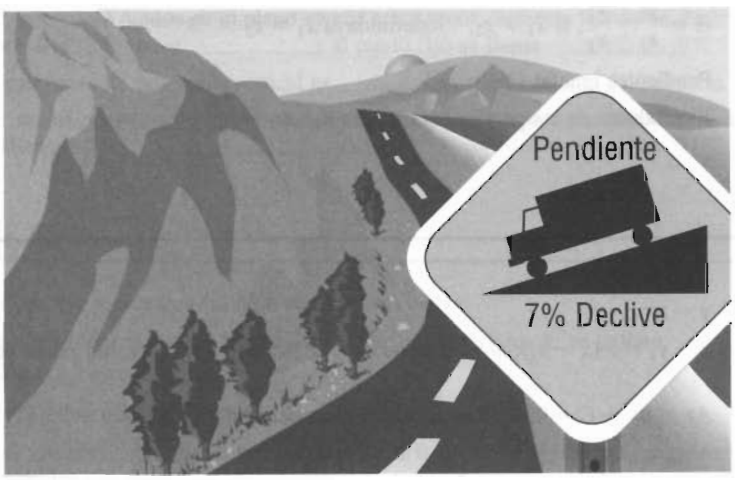
105. ¿Qué puede decir acerca de dos rectas con la misma intersección-x y la misma intersección-y. Suponga que la intersección-x no es 0.

106. Si dos rectas tienen la misma pendiente, pero diferente intersección-x, ¿pueden tener la misma intersección-y?

107. Si dos rectas tienen la misma intersección-y, pero diferentes pendientes, ¿pueden tener la misma intersección-x? ¿Cuál es la única manera en que esto puede suceder?

108. El símbolo adoptado para denotar la pendiente de una recta es la letra m. Investigue el origen de este simbolismo. Empiece consultando en un diccionario de francés la palabra *monter*. Escriba un breve ensayo acerca de sus hallazgos.

109. El término *declive* es utilizado para describir la inclinación de una carretera. ¿Cómo se relaciona este término con la noción de pendiente de una recta? ¿Un declive del 4% es muy inclinado? Investigue los declives de algunas carreteras montañosas y determine sus pendientes. Escriba un breve ensayo acerca de sus hallazgos.



110. *Carpintería.* Los carpinteros utilizan el término inclinación para describir la pendiente de escaleras y tejados. ¿Cómo se relaciona la inclinación con la pendiente? Investigue inclinaciones típicas para escaleras y tejados. Escriba un breve ensayo acerca de sus hallazgos.

Repaso del capítulo

Conceptos Fundamentales

Valor absoluto	$\lvert a\rvert = a$ si $a \geq 0$, $\lvert a\rvert = -a$ si $a < 0$.
Raíz enésima principal de a	$\sqrt[n]{a} = b$ significa $a = b^n$, donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par y a, b, son cualesquiera números reales cuando n es impar.
Polinomio	Expresión algebraica de la forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$; si $a_n \neq 0$, entonces n es el grado del polinomio
Teorema de Pitágoras	En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Fórmulas

Ecuación cuadrática y fórmula cuadrática	Si $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Discriminante	Si $b^2 - 4ac > 0$, existen dos soluciones reales distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una solución real repetida. Si $b^2 - 4ac < 0$, existen dos soluciones complejas distintas que no son reales; las soluciones son el conjugado una de la otra.
Valor absoluto	Si $\lvert u\rvert = a$, $a > 0$, entonces $u = -a$ o $u = a$. Si $\lvert u\rvert \le a$, $a > 0$, entonces $-a \le u \le a$. Si $\lvert u\rvert \ge a$, $a > 0$, entonces $u \le -a$ o $u \ge a$.
Fórmula de la distancia	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Fórmula del punto medio	$(x, y) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$
Pendiente	$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, si $x_1 \neq x_2$; indefinida si $x_1 = x_2$
Rectas paralelas	Pendientes iguales ($m_1 = m_2$)
Rectas perpendiculares	El producto de las pendientes es -1 ($m_1 \cdot m_2 = -1$)

ECUACIONES

Recta vertical	$x = a$
Recta horizontal	$y = b$
Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta	$y - y_1 = m(x - x_1)$; m es la pendiente de la recta, (x_1, y_1) es un punto de la recta
Forma general de la ecuación de una recta	$Ax + By + C = 0$, A, B no siendo ambos cero 0
Forma-pendiente-intersección de la ecuación de una recta	$y = mx + b$; m es la pendiente de la recta, b es la intersección-y.
Forma estándard de la ecuación de un círculo	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$; r es el radio del círculo, (h, k) es el centro del círculo
Forma general de la ecuación de un círculo	$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

CÓMO HACER PARA

Resolver ecuaciones

Resolver desigualdades

Resolver problemas aplicados

Utilizar la fórmula de distancia

Hacer gráficas de ecuaciones trazando puntos

Encontrar las intersecciones con los ejes de una gráfica

Verificar la simetría en una ecuación

Encontrar el centro y el radio de un círculo, dada la ecuación.

Obtener la ecuación de un círculo.

Hacer gráficas de círculos.

Encontrar la pendiente y las intersecciones con los ejes de una recta, dada la ecuación.

Hacer gráfica de rectas.

Obtener la ecuación de una recta.

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. Dos ecuaciones (o desigualdades) que tienen precisamente el mismo conjunto solución son llamadas __________.
2. Una ecuación que se satisface para toda elección de la variable para la cual ambos miembros tienen sentido es llamada un(a) __________.

3. La cantidad $b^2 - 4ac$ es llamada __________ de una ecuación cuadrática. Si es __________, la ecuación no tiene solución real.
4. Si $a < 0$, entonces $|a| =$ __________.
5. $\sqrt{x^2} =$ __________.
6. Si cada lado de una desigualdad se multiplica por un número __________ entonces la dirección de la desigualdad se invierte.
7. En el número complejo $5 + 2i$, el número 5 es llamado la parte __________; el número 2 es la parte __________ y el número i se denomina __________ __________.
8. Si, para todo punto (x, y) en la gráfica, el punto $(-x, y)$ también está en la gráfica, entonces la gráfica es simétrica con respecto al __________.
9. El conjunto de puntos en el plano xy que están a una distancia fija de un punto fijo es llamado __________. A la distancia fija se le llama __________; al punto fijo se llama __________.
10. La pendiente de una recta vertical es __________; la pendiente de una recta horizontal es __________.
11. Dos rectas no verticales tienen pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Las rectas son paralelas si. las rectas son perpendiculares si__________ __________.

CIERTO O FALSO

C F 1. Los número racionales también son número reales

C F 2. Los números irracionales tienen decimales que ni termina ni se repiten.

C F 3. El conjunto de $2 + \sqrt{5}i$ es $-2 + \sqrt{5}i$.

C F 4. La circunferencia de un círculo de diámetro d es πd.

C F 5. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es positivo, entonces tiene dos soluciones complejas que son conjugadas una de la otra.

C F 6. La expresión $x^2 + x + 1$ es positiva para cualquier número real x.

7. Si $a < b$ y $c < 0$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

C F (a) $a \pm c < b \pm c$

C F (b) $a \cdot c < b \cdot c$

C F (c) $a/c > b/c$

C F 8. Las rectas verticales tienen pendiente indefinida.

C F 9. La pendiente de la recta $2y = 3x + 5$ is 3.

C F 10. Las rectas perpendiculares tienen pendientes que son recíprocos una de la otra

C F 11. El radio del círculo $x^2 + y^2 = 9$ is 3.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 24, encuentre todas las soluciones reales, si las hay, de cada ecuación (Donde aparezcan, a, b, m, y n son constantes.)

1. $2 - \dfrac{x}{3} = 5$
2. $\dfrac{x}{4} - 2 = 4$
3. $-2(5 - 3x) + 8 = 4 + 5x$
4. $(6 - 3x) - 2(1 + x) = 6x$
5. $\dfrac{3x}{4} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{12}$
6. $\dfrac{4 - 2x}{3} + \dfrac{1}{6} = 2x$
7. $\dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{5}{4}$
8. $\dfrac{4x - 5}{3 - 7x} = 4$
9. $x(1 - x) = 6$

10. $x(1+x)=2$

11. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{4}-\frac{x}{6}$

12. $\frac{1-3x}{4}=\frac{x+6}{3}+\frac{1}{2}$

13. $(x-1)(2x+3)=3$

14. $x(2-x)=3(x-4)$

15. $2x+3=4x^2$

16. $1+6x=4x^2$

17. $\sqrt[3]{x^2-1}=2$

18. $\sqrt{1+x^3}=3$

19. $x(x+1)+2=0$

20. $3x^2-x+1=0$

21. $|2x-3|=5$

22. $|3x+1|=5$

23. $10a^2x^2-2abx-36b^2=0$

24. $\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n}=\frac{2}{x}$

En los problemas 25 al 44, resuelva cada respuesta.

25. $\frac{2x-3}{5}+1\le\frac{x}{2}$

26. $\frac{5-x}{3}\le 6x-1$

27. $-9\le\frac{2x+3}{-4}\le 7$

28. $-4<\frac{2x-2}{3}<6$

29. $6>\frac{3-3x}{12}>2$

30. $6>\frac{5-3x}{2}\ge -3$

31. $2x^2+5x-12<0$

32. $3x^2-2x-1\ge 0$

33. $\frac{6}{x+2}\ge 1$

34. $\frac{-2}{1-3x}<-1$

35. $\frac{2x-3}{1-x}<2$

36. $\frac{3-2x}{2x+5}\ge 2$

37. $\frac{(x-2)(x-1)}{x-3}>0$

38. $\frac{x+1}{x(x-5)}\le 0$

39. $\frac{x^2-8x+12}{x^2-16}>0$

40. $\frac{x(x^2+x-2)}{x^2+9x+20}\le 0$

41. $|3x+4|<\frac{1}{2}$

42. $|1-2x|<\frac{1}{3}$

43. $|2x-5|\ge 7$

44. $|3x+1|\ge 2$

En los problemas del 45 al 52, resuelva cada ecuación en el sistema de los números complejos.

45. $x^2+x+1=0$

46. $x^2-x+1=0$

47. $2x^2+x-2=0$

48. $3x^2-2x-1=0$

49. $x^2+3=x$

50. $2x^2+1=2x$

51. $x(1-x)=6$

52. $x(1+x)=2$

En los problemas del 53 al 58, escriba cada ecuación de modo que todos los exponentes sean positivos.

53. $\frac{x^{-2}}{y^{-2}}$

54. $\left(\frac{x^{-1}}{y^{-3}}\right)^2$

55. $\frac{(x^2y)^{-4}}{(xy)^{-3}}$

56. $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}}$

57. $(25x^{-4/3}y^{-2/3})^{3/2}$

58. $(16x^{-2/3}y^{4/3})^{-3/2}$

En los problemas del 59 al 68, utilice el sistema de los números complejos y escriba cada expresión en la forma estándard $a+bi$.

59. $(6-3i)-(2+4i)$

60. $(8+3i)+(-6-2i)$

61. $4(3-i)+3(-5+2i)$

62. $2(1+i)-3(2-3i)$

63. $\frac{3}{3+i}$

64. $\frac{4}{2-i}$

65. i^{68}

66. i^{21}

67. $(2+3i)^3$

68. $(3-2i)^3$

En los problemas 69 al 78, encuentre una ecuación general de la recta que tiene las características dadas.

69. Pendiente $=-2$; pasa por $(2,-1)$

70. Pendiente $=0$; pasa por $(-3,4)$

71. Pendiente indefinida; pasa por $(-3, 4)$
72. intersección -$x = 2$; pasa por $(4, -5)$
73. intersección-$y = -2$; pasa por $(5, -3)$
74. Pasa por $(3, -4)$ y $(2, 1)$
75. Paralela a la recta $2x - 3y + 4 = 0$; pasa por $(-5, 3)$
76. Paralela a la recta $x + y - 2 = 0$; pasa por $(1, -3)$
77. Perpendicular a la recta $x + y - 2 = 0$; pasa por $(1, -3)$
78. Perpendicular a la recta $3x - y + 4 = 0$; pasa por $(-2, 2)$

En los problemas del 79 al 84, haga la gráfica de cada recta y marque las intersecciones con los ejes

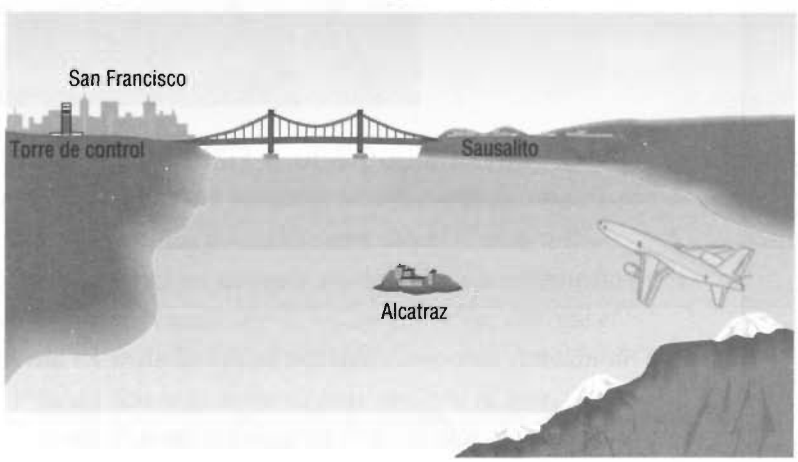
79. $4x - 5y + 20 = 0$
80. $3x + 4y - 12 = 0$
81. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{6} = 0$
82. $-\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 0$
83. $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = \sqrt{6}$
84. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$

En los problemas del 85 al 88, encuentre el centro y el radio de cada círculo

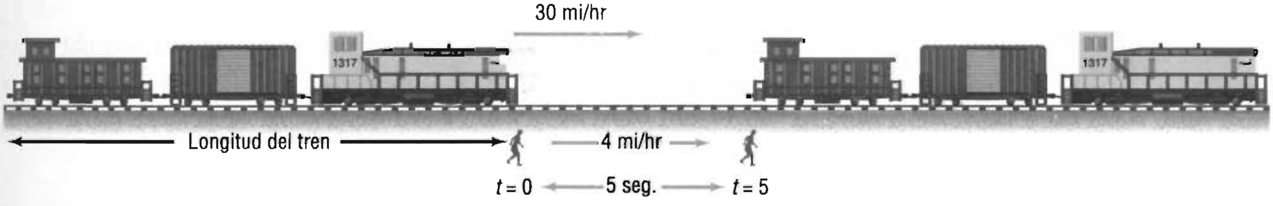
85. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$
86. $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$
87. $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 0$
88. $2x^2 + 2y^2 - 4x = 0$

En los problemas del 89 al 96, enliste las intersecciones con los ejes y verifique la simetría

89. $2x = 3y^2$
90. $y = 5x$
91. $4x^2 + y^2 = 1$
92. $x^2 - 9y^2 = 9$
93. $y = x^4 + 2x^2 + 1$
94. $y = x^3 - x$
95. $x^2 + x + y^2 + 2y = 0$
96. $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$
97. *¿Qué tan lejos puede ver un piloto?* En el vuelo reciente a San Francisco, el piloto anunció que estaban a 139 millas de la ciudad, volando a una altura de 35,000 pies. El piloto afirmó que podía ver el puente Golden Gate y más allá. ¿Estaba diciendo la verdad? ¿Qué tan lejos podía ver en realidad?



98. *Física: Movimiento uniforme.* Un hombre camina paralelamente a una vía férrea a una velocidad de 4 millas por hora . Un tren de carga que va en la misma dirección a una velocidad promedio de 30 millas por hora requiere de 5 segundos para rebasar al hombre. ¿Cuál es la longitud del tren de carga? Dé su respuesta en pies. (Véase la figura siguiente).



99. *Alcance de rastreo y rescate.* Un avión de rastreo mantiene una velocidad de crucero de 250 millas por hora y lleva combustible para un máximo de 5 horas de vuelo. Si hay un viento que promedia 30 millas por hora, y la dirección de búsqueda es a favor del viento de ida y en contra de regreso, ¿qué tan lejos puede hacer un recorrido este avión?

100. *Alcance de rastreo y rescate.* Si el avión de rastreo descrito en el problema 99 puede agregar un tanque adicional de combustible que le permita 2 horas más de vuelo, ¿cuánto más lejos puede extender su recorrido?

101. *Nivelación en una carrera.* En una carrera de 100 metros Miguel cruza la meta 5 metros adelante de Daniel. Para nivelar las cosas, Miguel sugiere a Daniel que corran otra vez pero con Miguel 5 metros atrás de la línea de salida.

(a) Suponiendo que Miguel y Daniel corren al mismo ritmo que antes, ¿la segunda carrera finalizará en empate?
(b) Si no, ¿quién gana?
(c) El que gana, ¿por cuántos metros lo hace?
(d) ¿Qué tan atrás debe iniciar Miguel de modo que la carrera termine en empate?

Después de correr la segunda vez Daniel se coloca 5 metros adelante de la línea de salida y vuelven a correr.

(e) Suponiendo otra vez que corren al mismo ritmo que en la primera carrera, ¿el resultado ahora es un empate?
(f) Si no es así, ¿quién gana?
(g) ¿Por cuántos metros?
(h) ¿A qué distancia debe colocarse Daniel delante de la línea de salida para que la carrera termine empatada?

102. Explique las diferencias entre los siguientes tres problemas. ¿Hay alguna similitud en sus soluciones?

(a) Escriba la expresión como un solo cociente: $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x}{x^2-4}$

(b) Resuelva: $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x}{x^2-4} = 0$

(c) Resuelva: $\dfrac{x}{x-2} + \dfrac{x}{x^2-4} < 0$

103. Redacte cuatro problemas de lo que se podría hacer dados los dos puntos $(-3, 4)$ y $(6, 1)$. Cada problema debe involucrar un concepto diferente. Asegúrese de establecer instrucciones de manera clara.

104. Describa cada una de las gráficas siguientes. Dé una justificación.

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x + y = 0$ (d) $xy = 0$ (e) $x^2 + y^2 = 0$

Capítulo 2

FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de comenzar este capítulo, repase los siguientes conceptos:

Dominio de una variable (p. 3).

Gráficas de ciertas ecuaciones (ejemplo 5, p. 58; ejemplo 6, p. 60; ejemplo 7, p. 61; ejemplo 8, p. 62).

Criterios para la simetría de una ecuación (p. 59).

Pasos para plantear problemas de aplicación (pp. 24-25).

Panorama Para ir de una isla a una poblado

Una isla se encuentra a 2 millas del punto más cercano P de una costa recta. Un poblado está a 12 millas de dicha costa desde el punto P.

(a) *Si una persona puede remar en un bote a una velocidad promedio de 5 millas por hora, y luego caminar a 2 millas por hora, exprese el tiempo T que tarda en ir de la isla al poblado como una función de la distancia x de P hasta donde la persona deja anclado el bote.*

(b) *¿Cuánto tiempo tardará dicha persona en ir de la isla al poblado si deja anclado el bote a 4 millas de P?*

(c) *¿Y si deja anclado el bote a 8 millas de P? [Ejemplo 9 de la sección 2.1.]*

(d) *¿Existe un lugar para dejar el bote de modo que el tiempo de recorrido sea mínimo? ¿Piensa usted que este lugar es más cercano al poblado o a P? Analice las posibilidades y justifique su respuesta. [Problemas 63 y 64 en el ejercicio 2.1.]*

Es posible que la idea central en matemáticas sea el concepto de *función*. Este importante capítulo trata de lo que es una función, de cómo hacer la gráfica de funciones y la manera de utilizarlas en aplicaciones.

Al parecer, la palabra *función* fue introducida por René Descartes en 1637. Para él, una función significaba tan sólo cualquier potencia entera positiva de una variable x. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), quien siempre enfatizó el lado geométrico de las matemáticas, utilizó la palabra función para denotar cualquier cantidad asociada con una curva, tal como las coordenadas de un punto sobre la curva. Leonhard Euler (1707-1783), identificaba cualquier ecuación o fórmula que contuviera variables y constantes con la palabra función; esta idea es similar a la utilizada ahora con frecuencia en los cursos que preceden al de cálculo. Posteriormente, el uso de funciones en el estudio de las ecuaciones sobre el flujo de calor condujo a una definición muy amplia, debida a Lejeune Dirichlet (1805-1859), la cual describe a una función como una regla de correspondencia entre dos conjuntos. Esta es la definición que utilizaremos aquí.

2.1 Funciones

En muchas aplicaciones, con frecuencia existe cierta correspondencia entre dos conjuntos de números. Por ejemplo, la ganancia R que resulta de la venta de x artículos vendidos a \$10.00 cada uno, es $R = 10x$. Si conocemos el número de artículos vendidos, entonces podemos calcular la ganancia por medio de la regla $R = 10x$. Esta regla es un ejemplo de *función*.

Otro ejemplo, si un objeto es lanzado desde una altura de 64 pies sobre el suelo, la distancia s (en pies) del objeto hasta el suelo después de t segundos está dada (aproximadamente) por la fórmula $s = 64 - 16t^2$. Cuando $t = 0$ segundos, el objeto está a 64 pies sobre el suelo y luego de 1 segundo está a $s = 64 - 16(1)^2 = 48$ pies sobre el suelo. Después de 2 segundos el objeto golpea el suelo. La fórmula $s = 64 - 16t^2$ proporciona una forma para determinar la distancia s cuando el tiempo t $(0 \leq t \leq 2)$) es conocido. Existe una correspondencia entre cada tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq 2$ y la distancia s. Decimos que la distancia s está en función del tiempo t ya que:

1. Existe una correspondencia entre el conjunto de tiempos y el de distancias.
2. Existe exactamente una distancia s obtenida para cada tiempo t en el intervalo $0 \leq t \leq 2$.

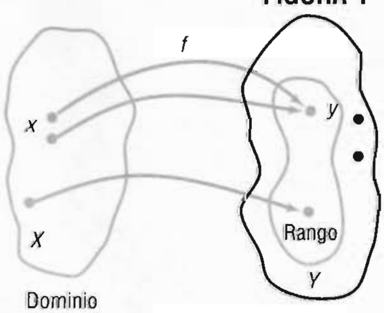
Veamos ahora la definición de función.

Definición de función

Función

Sean X y Y dos conjuntos no vacíos de números reales.* Una **función** de X en Y es una regla o correspondencia que asocia a cada elemento de X un único elemento de Y. El conjunto X es el **dominio** de la función. Para cada elemento x en X, el elemento correspondiente y en Y es el **valor** de la función en x, o la **imagen** de x. El conjunto de todas las imágenes de los elementos del dominio es el **rango** de la función.

FIGURA 1



Observe la figura 1. Como algunos elementos en Y podrían no ser la imagen de algún elemento x en X, el rango de una función podría ser un subconjunto de Y.

La regla (o correspondencia) mencionada en la definición de función se proporciona con mayor frecuencia como una ecuación con dos variables, denotadas por lo general con x y y.

*Los dos documentos X y Y también pueden ser conjuntos de números complejos, y entonces tendremos definida una función compleja. En la definición amplia (debida a Lejeune Dirichlet), X y Y pueden ser dos conjuntos cualesquiera.

Comentario: Al hacer la gráfica de una función en una calculadora gráfica, los valores de Xmín, Xmáx indican el dominio que queremos ver, mientras que Ymín, Ymáx nos dan el rango que queremos ver. Pero, por lo general, estos valores no representan el dominio y el rango reales de la función.

EJEMPLO 1

Ejemplo de una función

Considere la función definida por la ecuación

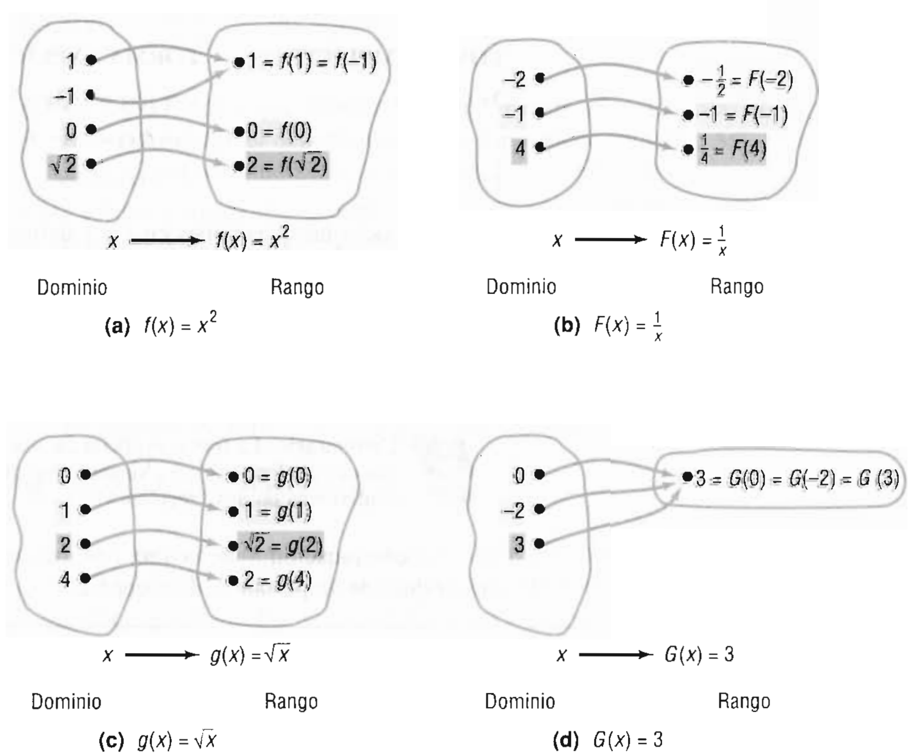
$$y = 2x - 5 \qquad 1 \leq x \leq 6$$

El dominio $1 \leq x \leq 6$ especifica que el número x está restringido a los números reales entre 1 y 6, inclusive. La regla $y = 2x - 5$ establece que el número x se multiplica por 2 y que después se resta 5 del resultado para obtener y. Por ejemplo, el valor de la función en $x = \frac{3}{2}$ (es decir, la imagen de $x = \frac{3}{2}$) es $y = 2 \cdot \frac{3}{2} - 5 = -2$. ■

Con frecuencia, las funciones se denotan por letras como f, F, g, G, y así sucesivamente. Si f es una función, para cada número x en su dominio la imagen correspondiente en el rango es designada por el símbolo $f(x)$, el cual se lee "f de x". Nos referimos a $f(x)$ como el **valor de f en el número x.** Así, $f(x)$ es el número obtenido cuando x es conocido y se aplica la regla para f; $f(x)$ no significa "f por x". Por ejemplo, la función dada en el ejemplo 1 puede ser escrita como $f(x) = 2x - 5$, $1 \leq x \leq 6$.

La figura 2 ilustra algunas otras funciones. Observe que en cada una existe un valor en el rango para cada x en el dominio.

FIGURA 2



(a) $f(x) = x^2$

(b) $F(x) = \frac{1}{x}$

(c) $g(x) = \sqrt{x}$

(d) $G(x) = 3$

EJEMPLO 2 *Determinar los valores de una función*

Para la función

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \qquad -5 \leq x \leq 5$$

determinar el valor de f en:

(a) $x = 0$ (b) $x = 1$ (c) $x = -4$ (d) $x = 5$

Solución (a) Para determinar el valor de f en $x = 0$, reemplazamos x por 0 en la regla establecida. Así,

$$f(0) = 0^2 + 3(0) - 4 = -4$$

(b) $f(1) = 1^2 + 3(1) - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

(c) $f(-4) = (-4)^2 + 3(-4) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$

(d) $f(5) = 5^2 + 3(5) - 4 = 25 + 15 - 4 = 36$ ■

■ Ahora resuelva el problema 3.

En general, cuando la regla que define a una función f está dada por una ecuación en x y y, decimos que la función tiene forma **implícita.** Si es posible despejar y en términos de x en la ecuación, entonces escribimos $y = f(x)$ y decimos que la función está dada en forma **explícita.** De hecho, por lo general escribimos: "la función $y = f(x)$" para decir "la función f definida por la ecuación $y = f(x)$". Aunque este uso no es completamente correcto, es muy común y no debe causar confusión alguna. Por ejemplo:

FORMA IMPLÍCITA	FORMA EXPLÍCITA
$3x + y = 5$	$y = f(x) = -3x + 5$
$x^2 - y = 6$	$y = f(x) = x^2 - 6$
$xy = 4$	$y = f(x) = 4/x$

No todas las ecuaciones en x y y definen una función $y = f(x)$. Si se despeja y en una ecuación y se pueden obtener dos o más valores de y para una x dada, entonces la ecuación no define una función $y = f(x)$. Por ejemplo, considere la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que define un círculo. Si despejamos y, obtenemos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, de modo que los números entre -1 y 1 producen dos valores de y. Así, $x^2 + y^2 = 1$ no define una función.

Comentario: La forma explícita de una función es la que se necesita para emplear una calculadora gráfica. ¿Ve ahora por qué es necesario hacer la gráfica de una circunferencia en dos "secciones"?

A continuación, daremos un resumen de algunos hechos relativos a una función f que son importantes de recordar.

Resumen de hechos importantes acerca de las funciones

1. $f(x)$ es la imagen de x, o el valor de f en x, cuando se aplica la regla f a una x en el dominio.
2. Para cada x en el dominio de f, existe una y sólo una imagen $f(x)$ en el rango.
3. f es el símbolo que utilizamos para denotar una función. Representa el dominio y la regla que utilizamos para obtener, a partir de una x en el dominio, una $f(x)$ en el rango.

Calculadoras

Casi todas las calculadoras tienen teclas especiales que permiten determinar el valor de muchas funciones. En su calculadora, usted puede determinar la función cuadrado, $f(x) = x^2$; la función raíz cuadrada, $f(x) = \sqrt{x}$; la función recíproca, $f(x) = 1/x$; y muchas otras que serán analizadas más adelante en este libro (como $\ln x$ y $\log x$). Si usted introduce x y después oprime una de estas teclas de función, obtendrá el valor de esa función en x. Inténtelo con las funciones enumeradas en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 *Determinar los valores de una función en una calculadora*

(a) $f(x) = x^2$; $f(1.234) = 1.522756$

(b) $F(x) = 1/x$; $F(1.234) = 0.8103727$

(c) $g(x) = \sqrt{x}$; $g(1.234) = 1.1108555$ ■

Dominio de una función

Con frecuencia, el dominio de una función f no se especifica, sólo se da una regla o ecuación que define a la función. En esos casos decimos que el dominio de f es el conjunto más grande de números reales para los cuales tiene sentido la regla o, más precisamente, los valores para los que $f(x)$ es un número real. Así, el dominio de f es igual al de la variable x en la expresión $f(x)$.

EJEMPLO 4 *Determinar el dominio de una función*

Determinar el dominio de cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$ (b) $g(x) = \sqrt{4 - 3x}$

Solución

(a) La regla f indica que debemos dividir $3x$ entre $x^2 - 4$. Como no es posible la división entre 0, el denominador $x^2 - 4$ no puede anularse. Así, x no puede ser 2 ni -2. El dominio de la función f es $\{x | x \neq -2, x \neq 2\}$.

(b) La regla g indica que debemos calcular la raíz cuadrada de $-3x$. Pero sólo los números no negativos tienen raíces cuadradas reales. Por lo tanto, necesitamos que

$$\begin{aligned} 4 - 3x &\geq 0 \\ -3x &\geq -4 \\ x &\leq \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

El dominio de g $\{x | -\infty < x \leq \frac{4}{3}\}$ o el intervalo $(-\infty, \frac{4}{3}]$. ■

■ Ahora resuelva el problema 41.

Si x está en el dominio de una función f, diremos que **f está definida en x**, o que **$f(x)$ existe.** Si x no está en el dominio de f, diremos que **f no está definida en x**, o que **$f(x)$** no existe. Por ejemplo, si $f(x) = x/(x^2 - 1)$, entonces $f(0)$ existe, pero $f(1)$ y $f(-1)$ no. (¿Puede advertir por qué?)

No hemos hablado de cómo determinar el rango de una función. La razón de esto es que, cuando una función está definida por una ecuación, con frecuencia es difícil encontrar el rango. Por lo tanto, nos conformaremos con determinar el dominio de una función cuando sólo conozcamos su regla de correspondencia.

Expresaremos el dominio de una función mediante la notación de intervalos, la notación de conjuntos o con palabras, según sea más conveniente.

En aplicaciones prácticas de las funciones, el dominio puede presentar restricciones físicas o geométricas. Por ejemplo, el dominio de la función f dada por $f(x) = x^2$ es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo, si f es utilizada como la regla para obtener el área de un cuadrado, conociendo la longitud x de un lado, entonces debemos restringir el dominio de f a los números reales positivos, ya que la longitud de un lado no puede ser nunca 0 o negativa.

Variable independiente; variable dependiente

Considere una función $y = f(x)$. La variable x se denomina **variable independiente,** ya que puede asumir cualquier número permisible del dominio. La variable y es la **variable dependiente** porque su valor depende de x.

Cualquier símbolo puede ser utilizado para representar las variables independiente y dependiente. Por ejemplo, si f es la *función cúbica*, entonces puede ser definida por $f(x) = x^3$, $f(t) = t^3$ o $f(z) = z^3$. Las tres reglas son idénticas: cada una indica que debemos obtener el cubo de la variable independiente. En la práctica, los símbolos utilizados para las variables independiente y dependiente se basan en el uso común.

EJEMPLO 5 *Costo de construcción*

El costo por pie cuadrado para construir una casa es de \$110.00. Exprese el costo C como función de x, es el número de pies cuadrados. ¿Cuál es el costo de construcción para una casa de 2000 pies cuadrados?

Solución El costo C de construcción para una casa con x pies cuadrados es de $110x$. Una función que expresa esta relación es

$$C(x) = 110x$$

donde x es la variable independiente y C la variable dependiente. En este contexto el dominio es $\{x|x > 0\}$ ya que una casa no puede tener cero o una cantidad negativa de pies cuadrados construidos. El costo de construcción para una casa de 2000 pies cuadrados es

$$C(2000) = 110(2000) = \$220{,}000$$

■

Es importante observar que en la solución al ejemplo 5 utilizamos el símbolo C de dos formas: para nombrar la función y para simbolizar la variable dependiente. Este uso doble es común en las aplicaciones y no debe causarle dificultad alguna.

EJEMPLO 6 *Área de un círculo*

Exprese el área de un círculo como función de su radio.

Solución Sabemos que la fórmula para el área A de un círculo con radio r es $A = \pi r^2$. Si utilizamos r para representar la variable independiente y A para la variable dependiente, la función que expresa esta relación es

$$A(r) = \pi r^2$$

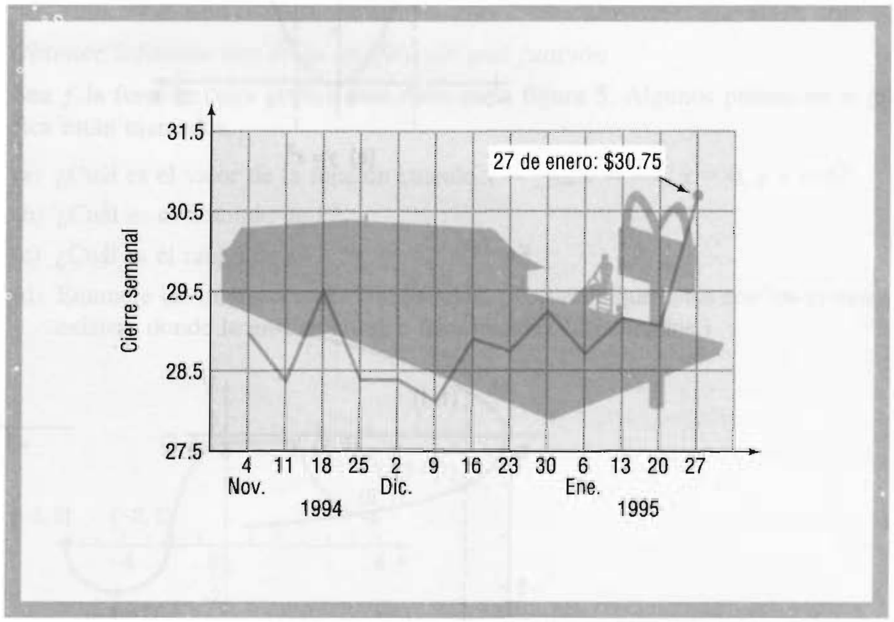
En este caso el dominio es $\{r|r > 0\}$. (¿Advierte por qué?) ■

■ Ahora resuelva el problema 61.

Gráfica de una función

En las aplicaciones, es frecuente que una gráfica muestre la relación entre dos variables con mayor claridad que una ecuación o una tabla. Por ejemplo, la figura 3 muestra el precio por acción (eje vertical) de la empresa McDonald's, al final de cada semana, del 4 de noviembre de 1994 al 27 de enero de 1995 (eje horizontal). En la gráfica podemos ver que el precio de las acciones estaba a la baja durante los días anteriores al 25 de noviembre y que subió entre el 20 y el 27 de enero. La gráfica también muestra el precio más bajo en ese periodo, ocurrido el 9 de diciembre, y el más alto, 27 de enero. Por otro lado, ecuaciones y tablas requieren por lo general de algunos cálculos e interpretación antes de que podamos "ver" este tipo de información.

FIGURA 3
Cierre semanal accionario de McDonald's



Observe de nuevo la figura 3. La gráfica muestra que para cada fecha en el eje horizontal existe sólo un precio en el eje vertical. Así, la gráfica está representando una función, aunque no tengamos la regla exacta para deducir a partir de las fechas el precio de las acciones.

Cuando la regla que define una función f está dada mediante una ecuación en x y y, la **gráfica de f** es la gráfica de la ecuación, es decir, el conjunto de puntos (x,y) en el plano xy que satisfacen a dicha ecuación.

No toda colección de puntos en el plano xy representa la gráfica de una función. Recuerde que para una función cada número x en el dominio de f tiene una, y sólo una, imagen $f(x)$. Así, la gráfica de una función no puede contener dos puntos con la misma abscisa y diferentes ordenadas. Por lo tanto, la gráfica de una función debe satisfacer el siguiente **criterio de la recta vertical:**

Teorema
Criterio de la recta vertical

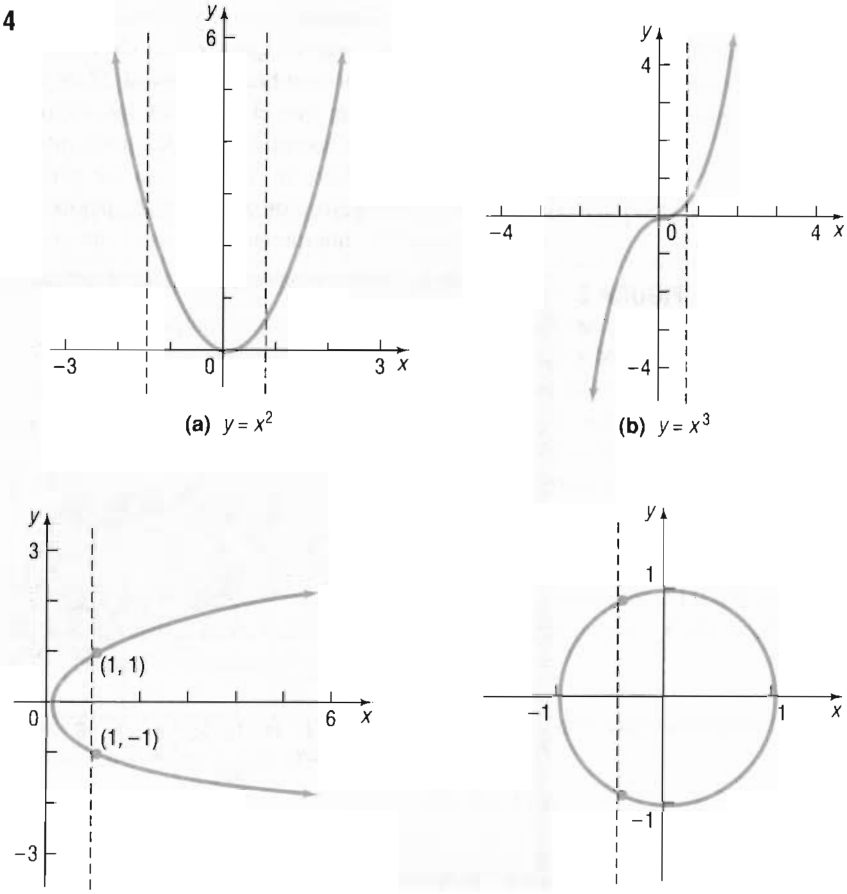
Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si, y sólo si, una recta vertical interseca la gráfica a lo más en un punto. ■

De esto se concluye que si una recta vertical interseca una gráfica en más de un punto, esa gráfica no es la de una función.

EJEMPLO 7 *Identificar la gráfica de una función*

¿En la figura 4 cuáles son gráficas de funciones?

FIGURA 4



(a) $y = x^2$ (b) $y = x^3$

(c) $x = y^2$ (d) $x^2 + y^2 = 1$

Solución Las gráficas 4(a) y 4(b) son gráficas de funciones pues una recta vertical interseca a cada una en al menos un punto. Las gráficas 4(c) y 4(d) no son gráficas de funciones pues algunas rectas verticales las intersecan en más de un punto. ■

Pares ordenados

El análisis anterior proporciona otra manera de conceptualizar una función. Podemos considerar una función f como un conjunto de **pares ordenados** (x, y) o $(x, f(x))$, donde no existen dos pares con el mismo primer elemento. El conjunto de todos los primeros elementos es el dominio de la función y el conjunto de todos los segundos elementos es su rango. Así, cada elemento x en el dominio tiene asociado un único elemento y en el rango. Un ejemplo es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) tal que $y = x^2$. Algunos de los pares en este conjunto son

$$(2, 2^2) = (2, 4) \qquad (0, 0^2) = (0, 0)$$
$$(-2, (-2)^2) = (-2, 4) \qquad \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

En este conjunto no existen dos pares ordenados con el mismo *primer* elemento (aunque sí hay pares que tienen el mismo *segundo* elemento). Este conjunto es la *función cuadrada*, la cual asocia a cada número real x el número x^2. *Véase* de nuevo la figura 4(a).

Por otro lado, tenemos los pares ordenados (x, y) para los cuales $y^2 = x$ no representa una función, ya que existen pares ordenados con el mismo primer elemento pero diferente segundo elemento. Por ejemplo $(1, 1)$ y $(1, -1)$ son pares ordenados que obedecen la relación $y^2 = x$ con el mismo primer elemento pero que tienen un segundo elemento diferente. Observe de nuevo la figura 4(c).

El siguiente ejemplo ilustra la forma para determinar el dominio y el rango de una función, dada su gráfica.

EJEMPLO 8 *Obtener información de la gráfica de una función*

Sea f la función cuya gráfica está dada en la figura 5. Algunos puntos en la gráfica están marcados.

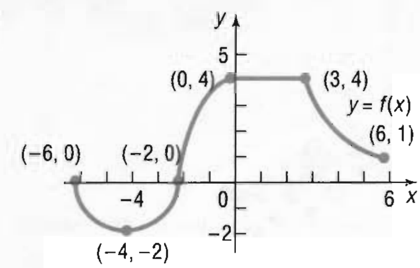
(a) ¿Cuál es el valor de la función cuando $x = -6$, $x = -4$, $x = 0$, y $x = 6$?

(b) ¿Cuál es el dominio de f?

(c) ¿Cuál es el rango de f?

(d) Enumere las intersecciones con los ejes. (Recuerde que estos son los puntos, si existen, donde la gráfica cruza o toca los ejes coordenados.)

FIGURA 5



Solución

(a) Como $(-6, 0)$ está en la gráfica de f, la ordenada 0 debe ser el valor de f en la abscisa -6: es decir, $f(-6) = 0$. De manera similar, cuando $x = -4$ tenemos que $y = -2$ o $f(-4) = -2$; cuando $x = 0$, entonces $y = 4$ o $f(0) = 4$ y cuando $x = 6$, entonces $y = 1$ o $f(6) = 1$.

(b) Para determinar el dominio de f, observamos que todos los puntos en la gráfica de f tienen abscisas entre -6 y 6, inclusive; y para cada número x entre -6 y 6, existe un punto $(x, f(x))$ en la gráfica. Así, el dominio de f es $\{x|-6 \leq x \leq 6\}$ o el intervalo $[-6, 6]$.

(c) Todos los puntos en la gráfica tienen ordenadas entre -2 y 4, inclusive; y, para cada número y, existe al menos un número x en el dominio. Por lo tanto, el rango de f es $\{y| -2 \leq y \leq 4\}$ o el intervalo $[-2, 4]$.

(d) Las intersecciones con los ejes son $(-6, 0)$, $(-2, 0)$, y $(0, 4)$. ■

Dada la gráfica de una función, su dominio puede ser visto como la sombra creada por la gráfica sobre el eje x por rayos de luz verticales. Su rango puede ser considerado como la sombra creada por la gráfica sobre el eje y por rayos de luz horizontales. Intente utilizar esta técnica con la gráfica de la figura 5.

■ Ahora resuelva los problemas 25 y 27.

EJEMPLO 9 *Para ir de una isla a un poblado*

Una isla se encuentra a 2 millas del punto P más cercano de una costa recta. Un poblado está a 12 millas de dicha costa desde el punto P.

(a) Si una persona puede remar a una velocidad promedio de 3 millas por hora y caminar 5 millas por hora, exprese el tiempo T que tardaría en ir de la isla al poblado como una función de la distancia x de P hasta donde esa persona deja anclado el bote en que llegó a la costa. Véase figura 6.

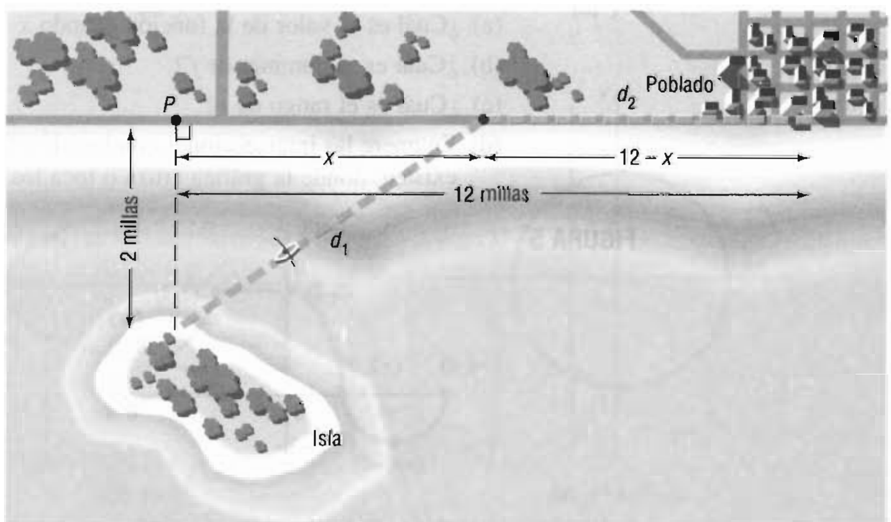
(b) ¿Cuánto tiempo tardará la persona en ir de la isla al poblado si deja anclado el bote a 4 millas de P?

(c) ¿Y si lo deja anclado a 8 millas de P?

Solución (a) La figura 6 ilustra la situación. La distancia d_1 de la isla al punto donde se deja el bote satisface la ecuación

$$d_1^2 = 4 + x^2$$

FIGURA 6



Como la velocidad promedio del bote es de 3 millas por hora, el tiempo t_1 que tarda en recorrer la distancia d_1 satisface a

$$d_1 = 3t_1$$

Así,

$$t_1 = \frac{d_1}{3} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3}$$

La distancia d_2 del punto donde se deja anclado el bote al poblado es $12 - x$, y el tiempo t_2 que tarda la persona en recorrer esta distancia caminando en promedio a 5 millas por hora satisface la ecuación

$$d_2 = 5t_2$$

Así,

$$t_2 = \frac{d_2}{5} = \frac{12 - x}{5}$$

El tiempo total T del viaje es $t_1 + t_2$. De modo que,

$$T(x) = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{3} + \frac{12 - x}{5}$$

(b) Si el bote es anclado a 4 millas de P, entonces $x = 4$. El tiempo T de duración del viaje es

$$T(4) = \frac{\sqrt{20}}{3} + \frac{8}{5} \approx 3.09 \text{ horas}$$

(c) Si el bote queda a 8 millas de P, entonces $x = 8$. El tiempo T de duración del viaje es

$$T(8) = \frac{\sqrt{68}}{3} + \frac{4}{5} \approx 3.55 \text{ horas}$$

■ Ahora resuelva el problema 63.

Resumen

A continuación encontrará parte del vocabulario importante presentado en esta sección y una descripción breve de cada término.

Función	Regla o correspondencia entre dos conjuntos de números reales de modo que a cada número x del primer conjunto, el dominio, le corresponde exactamente un número y del segundo conjunto.
	Conjunto de pares ordenados (x, y) o $(x, f(x))$ donde no existen dos pares distintos con el mismo primer elemento.
	Se llama rango al conjunto de valores y de la función para los valores x en el dominio.
	Una función f puede quedar definida en forma implícita mediante una ecuación con x y y, o en forma explícita escribiendo $y = f(x)$.
Dominio no especificado	Si definimos una función f mediante una ecuación que no especifique el dominio, entonces este será el mayor conjunto de números reales para los cuales la regla defina un número real.
Notación de función	$y = f(x)$
	f es un símbolo para la regla que define a la función.
	x es la variable independiente.
	y es la variable dependiente.
	$f(x)$ es el valor de la función en x, o la imagen de x.
Gráfica de una función	Es la colección de puntos (x, y) que satisface la ecuación $y = f(x)$.
	Una colección de puntos es la gráfica de una función cuando las rectas verticales intersecan la gráfica en al menos un punto (criterio de la recta vertical).

2.1

Ejercicio 2.1

En los problemas del 1 al 8, determine los siguientes valores para cada función:

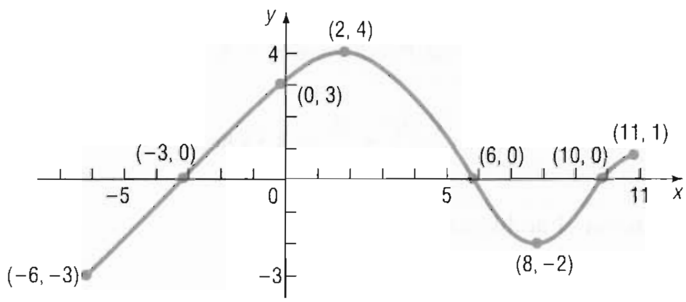
(a) $f(0)$ (b) $f(1)$ (c) $f(-1)$ (d) $f(3)$

1. $f(x) = -3x^2 + 2x - 4$ **2.** $f(x) = 2x^2 + x - 1$ **3.** $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 4}$ **5.** $f(x) = |x| + 4$ **6.** $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

7. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 5}$ **8.** $f(x) = 1 - \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

En los problemas del 9 al 20, utilice la gráfica de la función f dada en la figura.



9. Determine $f(0)$ y $f(-6)$.

10. Determine $f(6)$ y $f(11)$.

11. ¿Es $f(2)$ positivo o negativo?

12. ¿Es $f(8)$ positivo o negativo?

13. ¿Para qué números x se cumple que $f(x) = 0$?

14. ¿Para qué números x se cumple que $f(x) > 0$?

15. ¿Cuál es el dominio de f?

16. ¿Cuál es el rango de f?

17. ¿Cuáles son las intersecciones-x?

18. ¿Cuáles son las intersecciones-y?

19. ¿Cuántas veces la recta $y = \frac{1}{2}$ corta a la gráfica?

20. ¿Cuántas veces la recta $y = 3$ interseca la gráfica?

En los problemas del 21 al 24, responda las preguntas acerca de la función dada.

21. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 6}$

(a) ¿Está el punto $(3, 14)$ en la gráfica de f?
(b) Si $x = 4$, ¿cuánto vale $f(x)$?
(c) Si $f(x) = 2$, ¿cuánto vale x?
(d) ¿Cuál es el dominio de f?

22. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x + 4}$

(a) ¿Está el punto $(1, \frac{3}{5})$ en la gráfica de f?
(b) Si $x = 0$, ¿cuánto vale $f(x)$?
(c) Si $f(x) = \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale x?
(d) ¿Cuál es el dominio de f?

23. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^4 + 1}$

(a) ¿Está el punto $(-1, 1)$ en la gráfica de f?
(b) Si $x = 2$, ¿cuánto vale $f(x)$?
(c) Si $f(x) = 1$, ¿cuánto vale x?
(d) ¿Cuál es el dominio de f?

24. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 2}$

(a) ¿Está el punto $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$ en la gráfica de f?
(b) Si $x = 4$, ¿cuánto vale $f(x)$?
(c) Si $f(x) = 1$, ¿Cuánto vale x?
(d) ¿Cuál es el dominio de f?

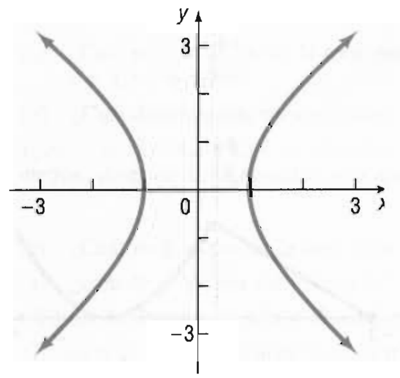
En los problemas del 25 al 36, determine si la gráfica es una función mediante el criterio de la recta vertical. Si lo es, utilice la gráfica para encontrar:

(a) Su dominio y su rango.

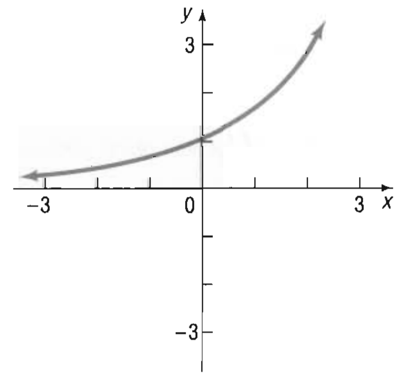
(b) Las intersecciones con los ejes, si existen.

(c) Cualquier simetría con respecto a los ejes x, y o al origen

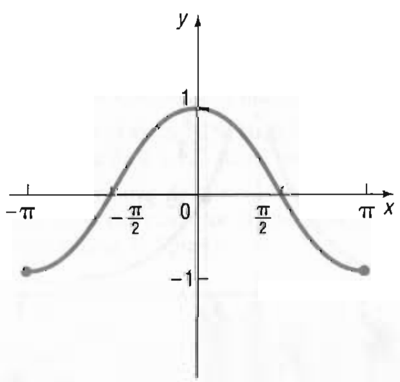
25.



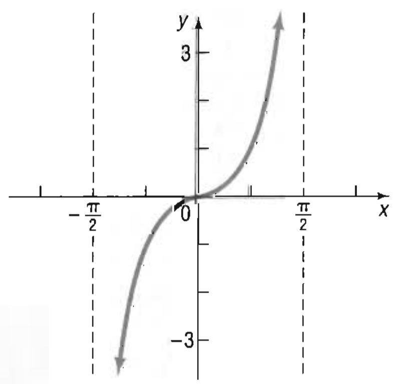
26.



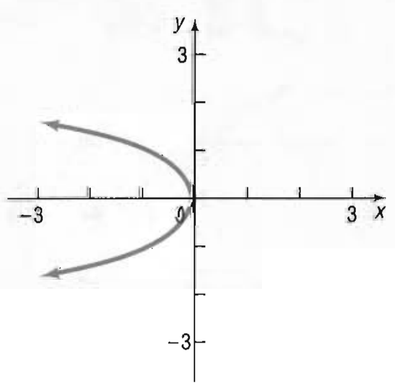
27.



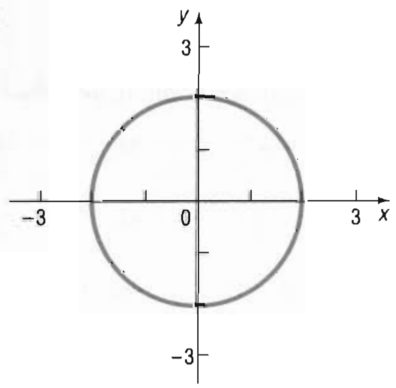
28.



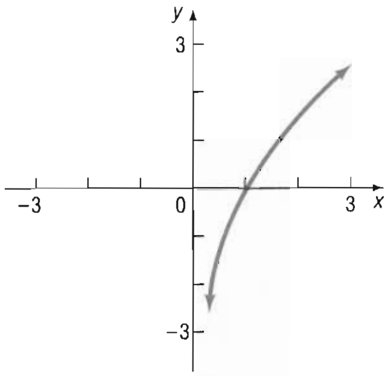
29.



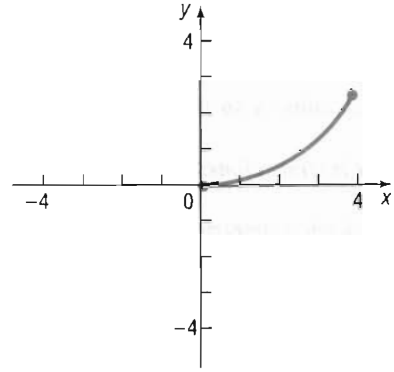
30.



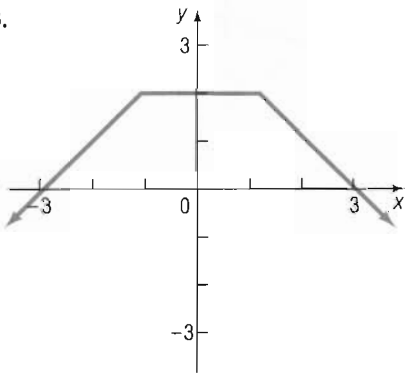
31.



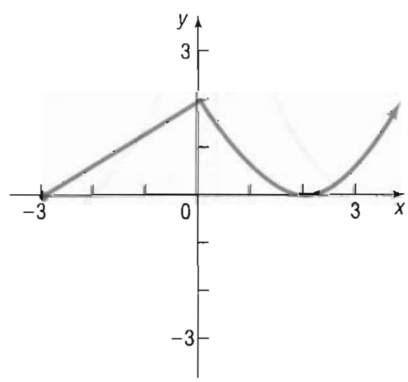
32.



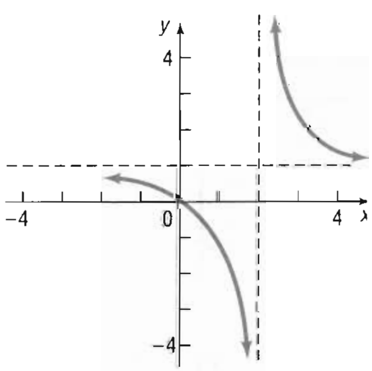
33.



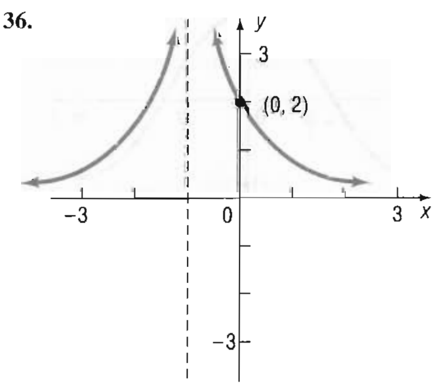
34.



35.



36.



En los problemas del 37 al 50, determine el dominio de cada función.

37. $f(x) = 3x + 4$

38. $f(x) = 5x^2 + 2$

39. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

40. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

41. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

42. $h(x) = \dfrac{x}{x - 1}$

43. $F(x) = \dfrac{x - 2}{x^3 + x}$

44. $G(x) = \dfrac{x + 4}{x^3 - 4x}$

45. $h(x) = \sqrt{3x - 12}$

46. $G(x) = \sqrt{1 - x}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

48. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

49. $p(x) = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 1}}$

50. $q(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

51. Si $f(x) = 2x^3 + Ax^2 + 4x - 5$ y $f(2) = 5$, ¿cuál es el valor de A?

52. Si $f(x) = 3x^2 - Bx + 4$ y $f(-1) = 12$, ¿cuál es el valor de B?

53. Si $f(x) = (3x + 8)/(2x - A)$ y $f(0) = 2$, ¿cuál es el valor de A?

54. Si $f(x) = (2x - B)/(3x + 4)$ y $f(2) = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor de B?

55. Si $f(x) = (2x - A)/(x - 3)$ y $f(4) = 0$, ¿cuál es el valor de A? ¿En dónde no está definida f?

56. Si $f(x) = (x - B)/(x - A)$, $f(2) = 0$, y $f(1)$ no está definida, ¿cuáles son los valores de A y B?

57. *Efecto de la gravedad en la Tierra.* Si cae una roca al suelo desde una altura de 20 metros, su altura H (en metros) después de x segundos será aproximadamente de

$$H(x) = 20 - 4.9x^2$$

(a) ¿Cuál será la altura de la roca para $x = 1$ segundo? ¿para $x = 1.1$ segundos? ¿para $x = 1.2$ segundos?, y ¿para $x = 1.3$ segundos?

(b) ¿Cuándo golpea la roca al suelo?

58. *Efecto de la gravedad en Júpiter.* Si en Júpiter cae una roca desde una altura de 20 metros, su altura H (en metros) después de x segundos será aproximadamente de

$$H(x) = 20 - 13x^2$$

(a) ¿Cuál es la altura de la roca para $x = 1$ segundo? ¿para $x = 1.1$ segundos?, y ¿para $x = 1.2$ segundos?

(b) ¿cuando golpea la roca el suelo?

59. *Geometría.* Exprese el área A de un rectángulo como función del largo x si éste mide el doble del ancho del rectángulo.

60. *Geometría.* Exprese el área A de un triángulo rectángulo isósceles como función de la longitud x de uno de los dos lados iguales.

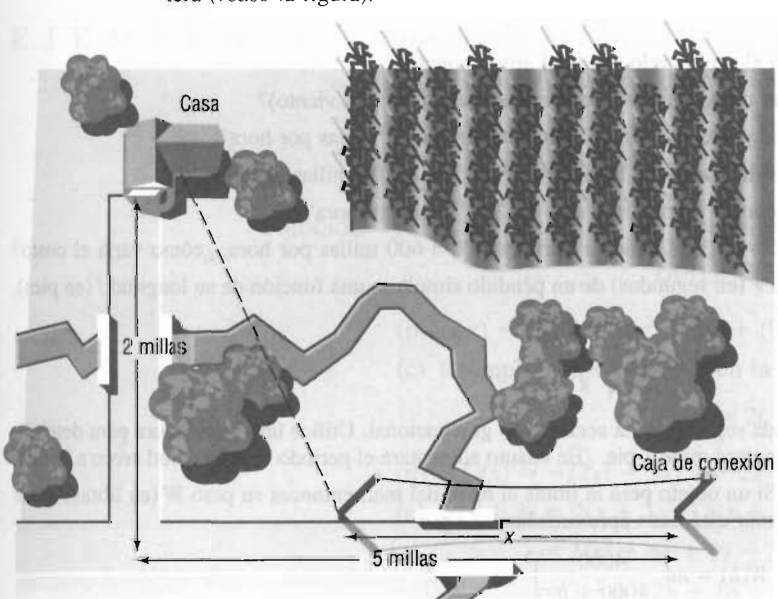
61. Exprese el salario bruto G de una persona que gana \$5.00 por hora como función del número x de horas trabajadas.

62. Un vendedor gana \$100.00 de salario base más \$10.00 por artículo vendido. Exprese el salario bruto G como función del número x de artículos vendidos.

63. Consulte el ejemplo 9. ¿Existe un lugar para anclar el bote de modo que el tiempo de recorrido sea mínimo? ¿Piensa usted que este lugar es más cercano al poblado o más cercano a P? Analice las posibilidades y justifique su respuesta.

64. Consulte el ejemplo 9. Haga la gráfica de la función $T = T(x)$. Utilice TRACE para ver cómo varía el tiempo T cuando x cambia de 0 a 12. ¿Cuál valor de x produce el menor tiempo?

65. Una compañía de televisión por cable debe proporcionar el servicio a un cliente cuya casa está a 2 millas de distancia de la carretera por donde pasa el cable. La caja de conexión más cercana está localizada a 5 millas por la carretera (*véase* la figura).



(a) Si el costo de la instalación es de \$100.00 por milla en la carretera y de \$14.00 por milla fuera de la carretera exprese el costo total C de la instalación como función de la distancia x (en millas) de la caja de conexión al punto donde la instalación del cable sale de la carretera. Indique el dominio.

(b) Calcule el costo si $x = 1$ milla.

(c) Calcule el costo si $x = 3$ millas.

(d) Haga la gráfica de la función $C = C(x)$. Utilice TRACE para ver cómo varía el costo C cuando x va de 0 a 5. ¿Cuál valor de x produce el menor costo?

66. Una isla se encuentra a 3 millas del punto más cercano P de una costa recta. Un poblado está a 20 millas de la costa desde el punto P. (Consulte en la figura 6 una situación similar.)

(a) Si alguien tiene un bote que promedia 12 millas por hora, y la misma persona puede correr a 5 millas por hora, exprese el tiempo T que dicha persona tardaría en ir de la isla al poblado como función de x, donde x es la distancia de P al punto donde quedaría anclado el bote.

(b) ¿Cuánto tiempo tardará esa persona en ir de la isla al poblado si deja el bote a 8 millas de P?

(c) ¿Cuánto tiempo tardará si el bote es anclado a 12 millas de P?

(d) Haga la gráfica de la función $T = T(x)$. Utilice TRACE para ver cómo varía el tiempo T cuando x cambia de 0 a 20. ¿Cuál valor de x produce el menor tiempo?

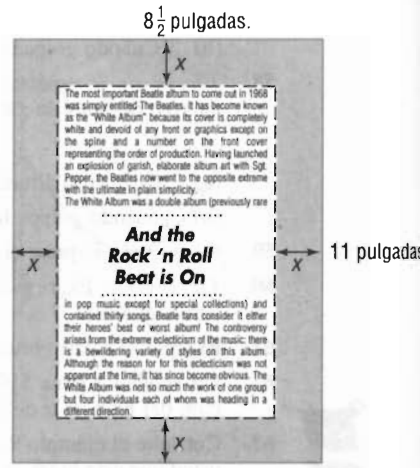
67. Una página con dimensiones de $8\frac{1}{2}$ por 11 pulgadas tiene un margen de ancho uniforme x rodeando su parte impresa, como muestra la figura.

(a) Escriba una fórmula para el área A de la parte impresa de la página como una función del ancho x del margen.

(b) Indique el dominio y el rango de A.

(c) Determine el área impresa cuyos márgenes tienen anchos de 1, 1.2 y 1.5 pulgadas.

(d) Haga la gráfica de la función $A = A(x)$. Utilice TRACE para determinar el margen mediante el cual obtendrá un área de 70 pulgadas cuadradas y otra de 50 pulgadas cuadradas.



68. *Costo de un recorrido trasatlántico.* Un avión cruza el Océano Atlántico (3000 millas) a una velocidad de 500 millas por hora. El costo C (en dólares) por pasajero está dado por

$$C(x) = 100 + \frac{x}{10} + \frac{36{,}000}{x}$$

donde x es la velocidad con respecto al suelo (velocidad del aire $\pm$ viento).

(a) ¿Cuál es el costo por transportar un pasajero en condiciones tranquilas (sin viento)?

(b) ¿Cuál es el costo por pasajero al presentarse un viento en contra de 50 millas por hora?

(c) ¿Cuál es el costo por pasajero si hay viento a favor con velocidad de 100 millas por hora?

(d) ¿Cuál es el costo por pasajero con un viento en contra de 100 millas por hora?

(e) Haga la gráfica de la función $C = C(x)$. Cuando x varía de 400 a 600 millas por hora, ¿cómo varía el costo?

69. *Periodo de un péndulo.* El periodo T (en segundos) de un péndulo simple es una función de su longitud l (en pies), la cual está definida por la ecuación

$$T(l) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde $g \approx 32.2$ pies por segundo, cada segundo es la aceleración gravitacional. Utilice una calculadora para determinar el periodo de un péndulo cuya longitud mide 1 pie. ¿En cuánto aumentará el periodo si la longitud crece a 2 pies?

70. *Efecto de la altitud sobre peso.* Si un objeto pesa m libras al nivel del mar, entonces su peso W (en libras) a una altura de h millas sobre el nivel del mar está dado aproximadamente por

$$W(h) = m\left(\frac{4000}{4000 + h}\right)^2$$

Si una mujer pesa 120 libras al nivel del mar, ¿cuánto pesará en Pike's Peak, a 14,110 pies sobre el nivel del mar?

En los problemas del 71 al 78, diga si el conjunto de pares ordenados (x,y) definidos por cada ecuación es una función.

71. $y = x^2 + 2x$ **72.** $y = x^3 - 3x$ **73.** $y = \dfrac{2}{x}$ **74.** $y = \dfrac{3}{x} - 3$

75. $y^2 = 1 - x^2$ **76.** $y = \pm\sqrt{1 - 2x}$ **77.** $x^2 + y = 1$ **78.** $x + 2y^2 = 1$

79. Algunas funciones f tienen la propiedad de que $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todos los números reales a y b. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen esta propiedad?

(a) $h(x) = 2x$ (b) $g(x) = x^2$ (c) $F(x) = 5x - 2$ (d) $G(x) = 1/x$

80. Trace la gráfica de una función cuyo dominio sea $\{x \mid -3 \leq x \leq 8, x \neq 5\}$ y cuyo rango sea $\{y \mid -1 \leq y \leq 2, y \neq 0\}$. ¿Cuál(es) punto(s) en el rectángulo $-3 \leq x \leq 8$, $-1 \leq y \leq 2$ no puede(n) estar en la gráfica? Compare su gráfica con la de sus compañeros. ¿Qué diferencias ve?

81. ¿Son iguales las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$? Explique su respuesta.

82. Describa cómo determinaría el dominio y el rango de una función si sólo tuviera su gráfica. ¿Cómo cambiaría su estrategia si, en vez de eso, tuviera la ecuación que define a la función?

83. ¿Cuántas intersecciones-x puede tener la gráfica de una función? ¿Cuántas con el eje y?

84. Si una gráfica consta de un único punto, ¿es la gráfica de una función? ¿Puede escribirse la ecuación de tal función?

85. ¿Existe alguna función cuya gráfica sea simétrica con respecto al eje x?

86. Investigue el momento histórico en que surgió la notación de función $y = f(x)$. Escriba un breve ensayo acerca de los primeros usos de esta notación.

2.2 Más acerca de funciones

Notación de función

A la variable independiente de una función a veces se le llama **argumento** de la función. Pensar en la variable independiente como un argumento en ocasiones facilita la aplicación de la regla de la función. Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = x^3$, entonces f es la regla que nos indica elevar al cubo el argumento. Así, $f(2)$ significa elevar al cubo a 2, $f(a)$ significa elevar al cubo al número a y $f(x + h)$ significa elevar al cubo la cantidad $x + h$.

EJEMPLO 1 *Determinar los valores de una función*

Para la función G definida por $G(x) = 2x^2 - 3x$, evalúe:

(a) $G(3)$ (b) $G(x) + G(3)$ (c) $G(-x)$

(d) $-G(x)$ (e) $G(x + 3)$

Solución (a) Reemplazamos x por 3 en la regla G para obtener

$$G(3) = 2(3)^2 - 3(3) = 18 - 9 = 9$$

(b) $G(x) + G(3) = (2x^2 - 3x) + (9) = 2x^2 - 3x + 9$

(c) Reemplazamos x por $-x$ en la regla de G:

$$G(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) = 2x^2 + 3x$$

(d) $-G(x) = -(2x^2 - 3x) = -2x^2 + 3x$

(e) $G(x + 3) = 2(x + 3)^2 - 3(x + 3)$ Observe aquí el uso de los paréntesis.

$$= 2(x^2 + 6x + 9) - 3x - 9$$
$$= 2x^2 + 12x + 18 - 3x - 9$$
$$= 2x^2 + 9x + 9$$

■

Observe en este ejemplo que $G(x + 3) \neq G(x) + G(3)$.

■ Ahora resuelva el problema 29.

El ejemplo 1 ilustra ciertos usos de la **notación de función.** Veamos otro uso.

EJEMPLO 2 *Uso de la notación de función*

Para la función $f(x) = x^2 + 1$, determine: $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, $x \neq 1$.

Solución Primero determinamos $f(1)$:

$$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$$

Entonces

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x^2 + 1) - (2)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1$$ ■

Las expresiones similares a la del ejemplo 2 se presentan con frecuencia en cálculo.

Cociente de diferencias

Para un número c en el dominio de una función f, la expresión

$$\boxed{\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad x \neq c \qquad (1)}$$

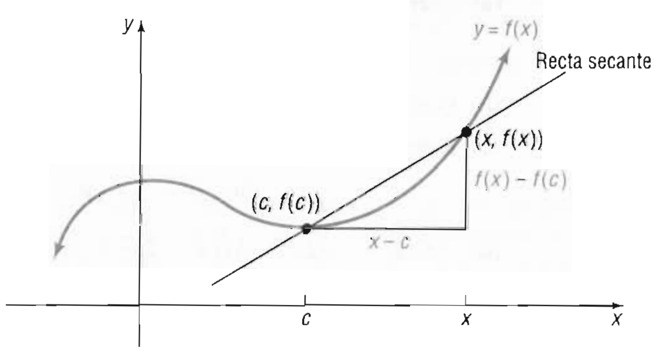
es el **cociente de diferencias** de f en c.

El cociente de diferencias de una función tiene una interpretación geométrica importante. Observe la gráfica de $y = f(x)$ en la figura 7. Hemos colocado ahí los puntos $(c, f(c))$ y $(x, f(x))$. La pendiente de la recta que contiene estos dos puntos es

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

La recta es una **recta secante.** Así, el cociente de diferencias de una función es igual a la pendiente de una recta secante que contiene dos puntos en su gráfica.

FIGURA 7



EJEMPLO 3 *Determinar un cociente de diferencias*

Encuentre el cociente de diferencias de $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en $c = 2$.

Solución De la expresión (1), queremos determinar

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \qquad x \neq 2$$

Comenzamos por calcular $f(2)$:

$$f(2) = 2(2)^2 - (2) + 1 = 8 - 2 + 1 = 7$$

Entonces el cociente de diferencias de f en 2 es

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{2x^2 - x + 1 - 7}{x - 2} = \frac{2x^2 - x - 6}{x - 2} = \frac{(2x + 3)(x - 2)}{x - 2} = 2x + 3$$

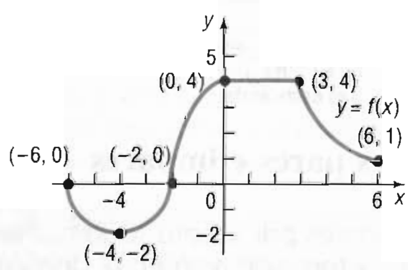
■

■ Ahora resuelva el problema 41.

Funciones crecientes y decrecientes

Considere la gráfica de la figura 8. Si la recorre de izquierda a derecha, observará que algunas de sus partes suben, otras bajan y otras más son horizontales. En tales casos, la función es *creciente, decreciente* y *constante,* respectivamente.

FIGURA 8



EJEMPLO 4 *Determinar dónde una función es creciente, decreciente o constante*

¿Dónde es creciente la función de la figura 8? ¿Dónde es decreciente? ¿Y constante?

Solución Para saber dónde una función es creciente, decreciente o constante, utilizamos desigualdades con la variable independiente x o intervalos de abscisas. La gráfica de la figura 8 sube (crece) del punto $(-4, -2)$ al punto $(0, 4)$, por ello concluimos que es creciente en el intervalo $[-4, 0]$ (o para $-4 \leq x \leq 0$). La gráfica baja (decrece) del punto $(-6, 0)$ al punto $(-4, -2)$ y de $(3, 4)$ a $(6, 1)$. Concluimos entonces que la gráfica es decreciente en los intervalos $[-6, -4]$ y $[3, 6]$ (o para $-6 \leq x \leq -4$ y $3 \leq x \leq 6$). La gráfica es constante en el intervalo $[0, 3]$ (o para $0 \leq x \leq 3$). ■

A continuación estableceremos definiciones más precisas.

Función creciente

Una función f es **creciente** en un intervalo I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) < f(x_2)$.

Función decreciente

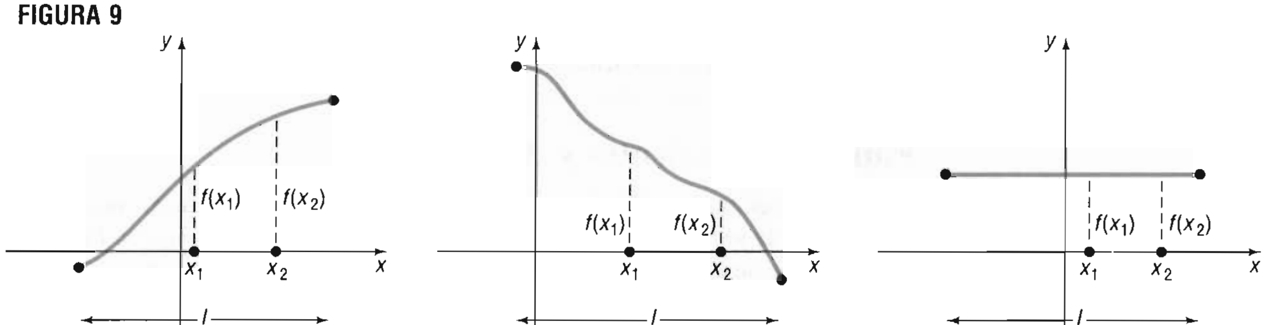
Una función f es **decreciente** en un intervalo I si, para cualquier elección de x_1 y x_2 en I, con $x_1 < x_2$, tenemos $f(x_1) > f(x_2)$.

Función constante

Una función f es **constante** en un intervalo I si, para toda elección de x en I, los valores de $f(x)$ son iguales.

Así, la gráfica de una función creciente sube de izquierda a derecha, la de una función decreciente baja de izquierda a derecha, y la gráfica de una función constante permanece a una altura fija. La figura 9 ilustra estas definiciones.

FIGURA 9



(a) Para $x_1 < x_2$ en I, $f(x_1) < f(x_2)$; f es creciente

(b) Para $x_1 < x_2$ en I, $f(x_1) > f(x_2)$; f es decreciente

(c) Los valores de f son iguales; f es constante

Funciones pares e impares

Función par

Una función es **par** si para todo número x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = f(x)$$

Función impar

Una función es **impar** si para todo número x en su dominio, el número $-x$ también está en el dominio y

$$f(-x) = -f(x)$$

Consulte la sección 1.6, donde describimos los criterios para la simetría. Los siguientes resultados se hacen entonces evidentes:

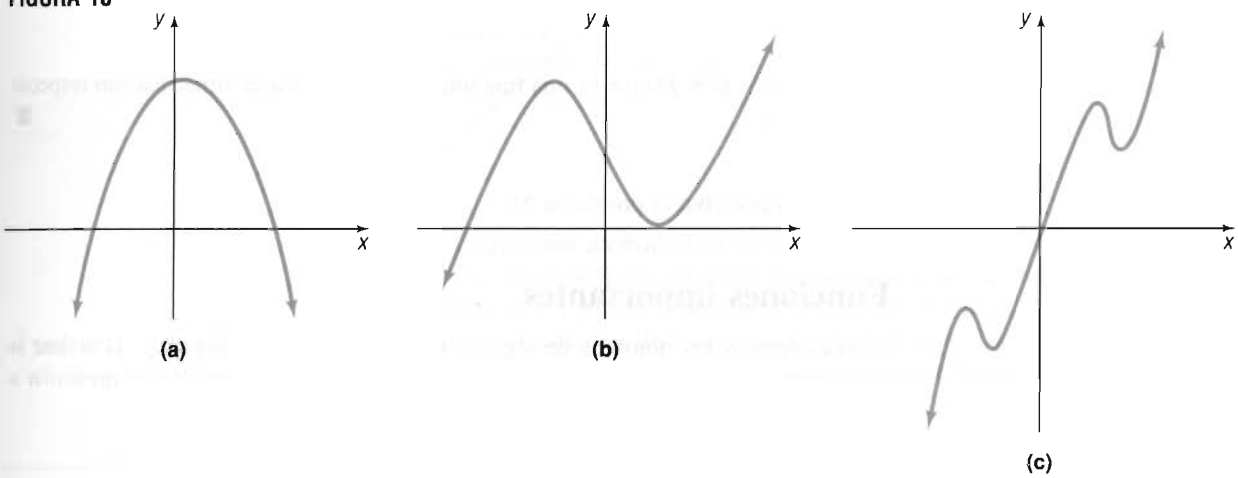
Teorema Una función es par si, y sólo si, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Una función es impar si, y sólo si, su gráfica es simétrica con respecto al origen. ■

EJEMPLO 5

Determinar funciones pares e impares a partir de la gráfica

Determine si cada gráfica de la figura 10 es la de una función par, impar o si corresponde a una función que no es par ni impar.

FIGURA 10



Solución La gráfica de la figura 10(a) es de una función par, ya que es simétrica con respecto al eje y. La función cuya gráfica está dada en la figura 10(b) no es par ni impar, ya que la gráfica no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen. La función cuya gráfica está dada en la figura 10(c) es impar puesto que su gráfica es simétrica con respecto al origen. ■

■ Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 6

Identificar las funciones pares e impares

Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o de ninguno de estos tipos. Después, sin hacer la gráfica, determine si la gráfica es simétrica con respecto al eje y o al origen.

(a) $f(x) = x^2 - 5$ (b) $g(x) = x^3 - 1$

(c) $h(x) = 5x^3 - x$ (d) $F(x) = |x|$

Solución (a) Reemplazamos x por $-x$ en $f(x) = x^2 - 5$. Entonces

$$f(-x) = (-x)^2 - 5 = x^2 - 5$$

Como $f(-x) = f(x)$, concluimos que f es una función par y la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

(b) Reemplazamos x por $-x$. Entonces

$$g(-x) = (-x)^3 - 1 = -x^3 - 1$$

Como $g(-x) \neq g(x)$ y $g(-x) \neq -g(x)$, concluimos que la función g no es par ni impar. La gráfica no es simétrica con respecto al eje y ni con respecto al origen.

(c) Reemplazamos x por $-x$ en $h(x) = 5x^3 - x$. Entonces

$$h(-x) = 5(-x)^3 - (-x) = -5x^3 + x$$

Como $h(-x), = -h(x)$, es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

(d) Reemplazamos x por $-x$ en $F(x) = |x|$. Entonces

$$F(-x) = |-x| = |x|$$

Como $F(-x) = F(x)$, F es una función par y su gráfica es simétrica con respecto del eje y. ■

■ Ahora resuelva el problema 51.

Funciones importantes

Ahora daremos los nombres de algunas de las funciones analizadas. Al revisar la lista preste especial atención a las características de cada función, en particular a la forma de cada gráfica.

Función lineal

$f(x) = mx + b$ $\quad$ m y b son números reales

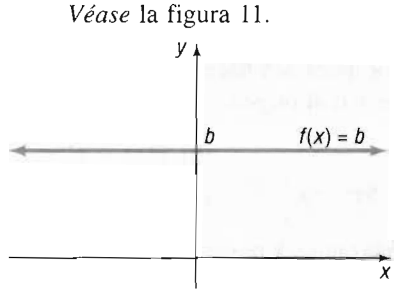
El dominio de la **función lineal** f consta de todos los números reales y su gráfica es una línea recta no vertical con pendiente m y ordenada al origen b. Una función lineal es creciente si $m > 0$, decreciente si $m < 0$, y constante si $m = 0$.

Función constante

$f(x) = b$ $\quad$ b es un número real

Véase la figura 11.

FIGURA 11



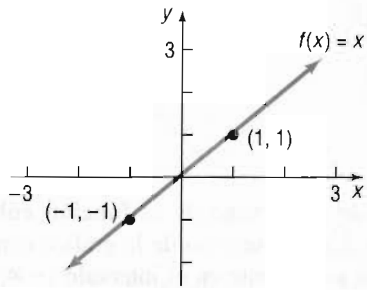
Una **función constante** es una función lineal especial ($m = 0$). Su dominio es el conjunto de todos los números reales; su rango el conjunto formado por un único número b. Su gráfica es una recta horizontal cuya ordenada al origen es b. La función constante es una función par cuya gráfica es constante sobre su dominio.

Función identidad

$$f(x) = x$$

Véase la figura 12.

FIGURA 12



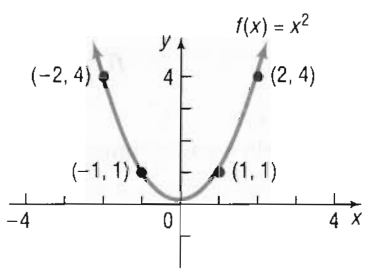
La **función identidad** es también una función lineal especial. Su dominio y su rango son el conjunto de todos los números reales. Su gráfica es una recta con pendiente $m = 1$ y cuya ordenada al origen es 0. La recta consta de todos los puntos para los cuales la abscisa es igual a la ordenada. La función identidad es una función impar; creciente sobre su dominio. Observe que la gráfica es la bisectriz de los cuadrantes I y III.

Función cuadrada

$$f(x) = x^2$$

Véase la figura 13.

FIGURA 13



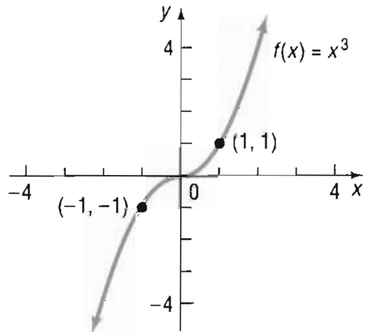
El dominio de la **función cuadrada** f es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de números reales no negativos. La gráfica de esta función es una parábola cuya intersección con los ejes es (0, 0). La función cuadrada es una función par decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente en el intervalo $[0, \infty)$.

Función cúbica

$$f(x) = x^3$$

Véase la figura 14.

FIGURA 14



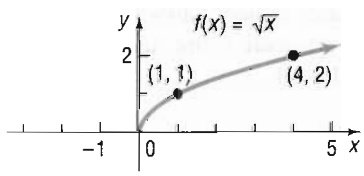
El dominio y el rango de la **función cúbica** son el conjunto de todos los números reales. La intersección de la gráfica con los ejes está en (0, 0). La función cúbica es impar y creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Función raíz cuadrada

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Véase la figura 15.

FIGURA 15



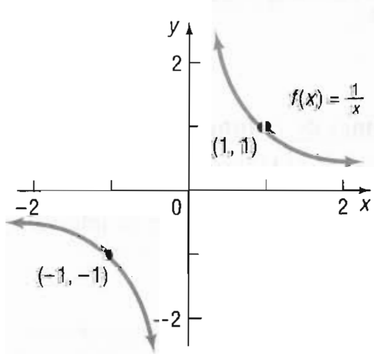
El dominio y el rango de la **función raíz cuadrada** son el conjunto de números reales no negativos. La intersección de la gráfica con los ejes está en (0, 0). La función raíz cuadrada no es par ni impar y es creciente en el intervalo $[0, \infty)$.

Función recíproca

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Consulte el ejemplo 8 en la página 62 para un análisis de la ecuación $y = 1/x$. *Véase* la figura 16.

FIGURA 16



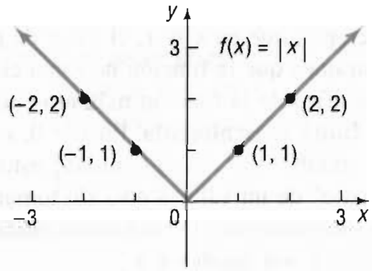
El dominio y el rango de la **función recíproca** son el conjunto de todos los números reales distintos de cero y su gráfica no tiene intersecciones con los ejes coordenados. La función recíproca es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$ y es una función impar.

Función valor absoluto

$$f(x) = |x|$$

Véase la figura 17.

FIGURA 17



El dominio de la **función valor absoluto** es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de números reales no negativos. La intersección de su gráfica con los ejes coordenados está en (0, 0). Si $x \geq 0$, entonces $f(x)=x$ y la gráfica de f es parte de la recta $y = x$; si $x < 0$ entonces $f(x) = -x$ y la gráfica de f es parte de la recta $y = -x$. La función valor absoluto es una función par; decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente en el intervalo $[0, \infty)$.

Verificación: Haga la gráfica de $y = |x|$ en una pantalla cuadrada y compare lo que vea con la figura 17. Observe que algunas calculadoras gráficas utilizan el símbolo abs(x) para el valor absoluto. Si en su calculadora no existe la función valor absoluto, podría hacer la gráfica de $y = |x|$ utilizando el hecho de que $|x| = \sqrt{x^2}$. ■

El símbolo $[[x]]$, léase **"corchete de *x*,"** se utiliza para denotar al mayor número entero menor o igual a x. Por ejemplo,

$$[[1]] = 1 \qquad [[2.5]] = 2 \qquad [[\tfrac{1}{2}]] = 0 \qquad [[-\tfrac{3}{4}]] = -1 \qquad [[\pi]] = 3$$

Este tipo de correspondencia aparece en matemáticas con la frecuencia suficiente como para recibir un nombre.

Función máxima entero

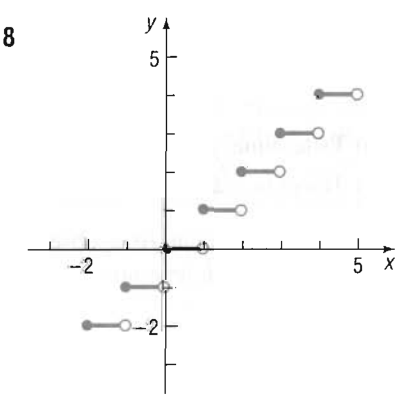
$$f(x) = [[x]] = \text{máximo número entero menor o igual a } x$$

Obtenemos la gráfica de $f(x) = [[x]]$ trazando algunos puntos sobre el plano. *Véase* la tabla 1. Para valores de x, $-1 \leq x < 0$, el valor de $f(x) = [[x]]$ es -1; para valores de x, $0 \leq x < 1$, el valor de f es 0. *Véase* la gráfica en figura 18.

TABLA 1

x	$y = f(x) = [[x]]$	(x, y)
-1	-1	$(-1, -1)$
$-\frac{1}{2}$	-1	$(-\frac{1}{2}, -1)$
$-\frac{1}{4}$	-1	$(-\frac{1}{4}, -1)$
0	0	(0, 0)
$\frac{1}{4}$	0	$(\frac{1}{4}, 0)$
$\frac{1}{2}$	0	$(\frac{1}{2}, 0)$
$\frac{3}{4}$	0	$(\frac{3}{4}, 0)$

FIGURA 18



El dominio de la **función máximo-entero** es el conjunto de todos los números reales; su rango es el conjunto de los números enteros. La intersección-y de su gráfica está en 0. Las intersecciones-x son todos los números del intervalo $[0, 1)$. La función máximo-entero no es par ni impar. Es constante en todo intervalo de la forma $[k, k + 1)$, para todo k entero. En la figura 18 utilizamos un punto para indicar, por ejemplo, que en $x = 1$, el valor de f es $f(1) = 1$; con una circunferencia pequeña ilustramos que la función no toma el valor 0 en $x = 1$.

De la gráfica de la función máximo-entero podemos ver por qué también se le llama una **función escalonada**. En $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, y así sucesivamente, esta función exhibe una *discontinuidad*; esto es, para valores enteros, la gráfica realiza un "salto" de un valor a otro sin tomar valores intermedios. Por ejemplo, a la izquierda inmediata de $x = 3$, las ordenadas son iguales a 2, y a la derecha inmediata de $x = 3$ son iguales a 3.

Las funciones analizadas líneas arriba son básicas. Cuando usted encuentre una de ellas, debe tener una imagen mental de su gráfica. Por ejemplo, si encuentra la función $f(x) = x^2$, tendrá que imaginar una gráfica como la de la figura 13.

■ Ahora resuelva el problema 67.

Funciones definidas por partes

A veces una función se define mediante una regla que consta de dos o más ecuaciones. La elección de la ecuación a utilizar depende del valor de la variable independiente x. Por ejemplo, la función valor absoluto $f(x) = |x|$ está definida mediante dos ecuaciones: $f(x) = x$ si $x \geq 0$ y $f(x) = -x$ si $x < 0$. Por conveniencia, combinamos estas ecuaciones en una expresión, como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Cuando las funciones están definidas por más de una ecuación decimos que están **definidas por partes.**

Analicemos otro ejemplo de función definida por partes.

EJEMPLO 7 *Analizar una función definida por partes*

Para la siguiente función f,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Determinar $f(0)$, $f(1)$, y $f(2)$. (b) Determinar el dominio de f.

(c) Hacer la gráfica de f. (d) Utilizar la gráfica para encontrar el rango de f.

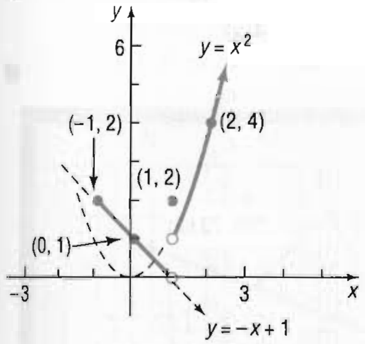
Solución (a) Para determinar $f(0)$, observamos que si $x = 0$, la ecuación para f es $f(x) = -x + 1$. Así, tenemos

$$f(0) = -0 + 1 = 1$$

Cuando $x = 1$, la ecuación para f es $f(x) = 2$. Entonces

$$f(1) = 2$$

FIGURA 19
$y = f(x)$



Cuando $x = 2$, la ecuación para f es $f(x) = x^2$. Así,

$$f(2) = 2^2 = 4$$

(b) Para determinar el dominio de f observamos su definición y concluimos que es f si $\{x|x \geq -1\}$, o $[-1, \infty)$.

(c) Para hacer la gráfica de f, trazamos la gráfica de "cada pedazo". Así, primero trazamos la recta $y = -x + 1$ y sólo utilizamos la parte donde $-1 \leq x < 1$. Después localizamos el punto $(1, 2)$, ya que cuando $x = 1$, $f(x) = 2$. Por último, trazamos la parábola $y = x^2$ y conservamos la parte donde $x > 1$. *Véase* la figura 19.

(d) De la gráfica, concluimos que el rango de f es $\{y|y > 0\}$, o $(0, \infty)$.

Verificación: Trazar la gráfica de la función f dada en el ejemplo 7 y compararla con la figura 19. ■

■ Ahora resuelva el problema 81.

EJEMPLO 8 *Costo de la electricidad*

En invierno, la compañía Edison Commonwealth suministra electricidad a residencias con un cargo mensual de \$9.06 más 10.819 centavos por kilowatt-hora (kWh) en los primeros 400 kWh consumidos en el mes, y cobra 7.093 centavos por cada kWh extra.*

(a) ¿Cuál es el cargo por el consumo de 300 kWh en un mes?

(b) ¿Cuál es el cargo por el consumo de 700 kWh en un mes?

(c) Si C es el cargo mensual por x kWh, exprese a C como función de x.

Solución (a) Para 300 kWh, el cargo es de \$9.06 más 10.819 centavos = \$0.10819 por kWh. Así,

$$\text{Cargo} = \$9.06 + \$0.10819(300) = \$41.52$$

(b) Para 700 kWh, el cargo es de \$9.06 más 10.819 centavos por los primeros 400 kWh, más 7.093 centavos por los 300 kWh arriba de los 400. Así,

$$\text{Cargo} = \$9.06 + \$0.10819(400) + \$0.07093(300) = \$73.62$$

(c) Supongamos que $0 \leq x \leq 400$, el cargo mensual C, se determina multiplicando x por \$0.10819 y sumando el cargo mensual al cliente, de \$9.06. Así, cuando $0 \leq x \leq 400$, $C(x) = 0.10819x + 9.06$. Para $x > 400$, el cargo es $0.10819(400) + 9.06 + 0.07093(x - 400)$, ya que $x - 400$ es igual al consumo por arriba de 400 kWh, el cual cuesta 0.07093 por kWh. Por lo tanto, si $x > 400$, entonces

$$\begin{aligned} C(x) &= 0.10819(400) + 9.06 + 0.07093(x - 400) \\ &= 52.336 + 0.07093(x - 400) \\ &= 0.07093x + 23.964 \end{aligned}$$

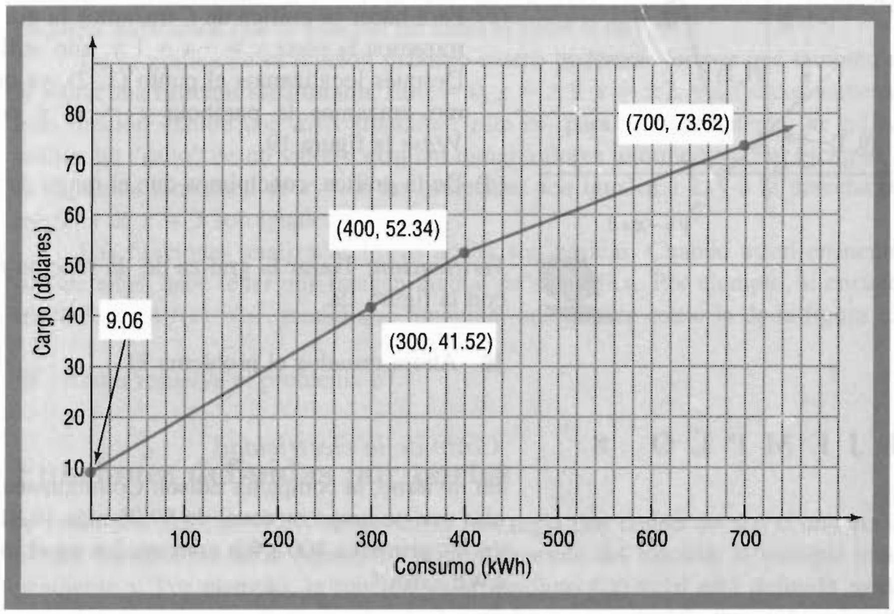
**Fuente:* Edison Commonwealth Co., Chicago, Illinois, 1991.

Para calcular C utilizamos dos reglas:

$$C(x) = \begin{cases} 0.10819x + 9.06 & \text{si } 0 \leq x \leq 400 \\ 0.07093x + 23.964 & \text{si } x > 400. \end{cases}$$

Véase la gráfica en la figura 20. ■

FIGURA 20



2.2

Ejercicio 2.2

En los problemas del 1 al 8, relacione cada gráfica con la función enumerada cuya gráfica se asemeje más a la que se proporciona.

A. Función constante | *B. Función lineal*
C. Función cuadrado | *D. Función cúbica*
E. Función raíz cuadrada | *F. Función recíproca*
G. Función valor absoluto | *H. Función máximo entero*

1.

2.

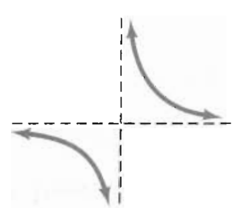
3.

4.

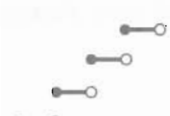
5.

6.

7.



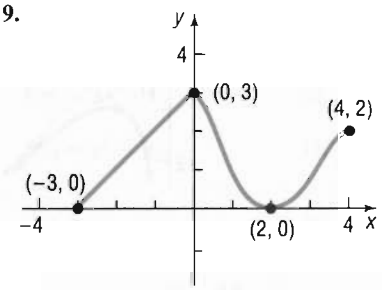
8.



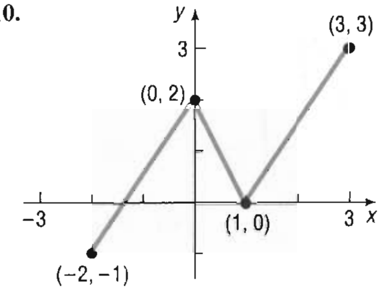
En los problemas del 9 al 22, aparece la gráfica de una función. Utilícela para determinar:

(a) Su dominio y su rango.
(b) Los intervalos donde es creciente, decreciente o constante.
(c) Si es par, impar o de ninguno de estos tipos.
(d) Las intersecciones con los ejes, si existen.

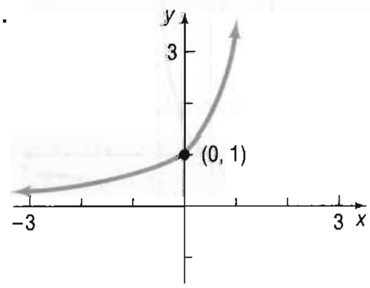
9.



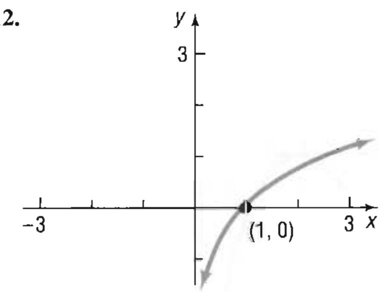
10.



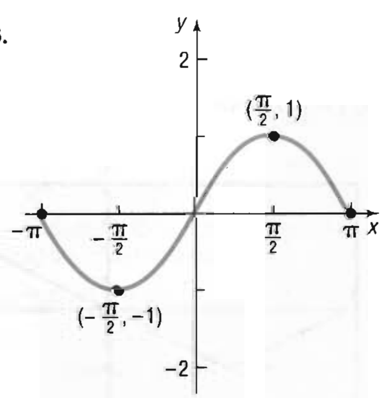
11.



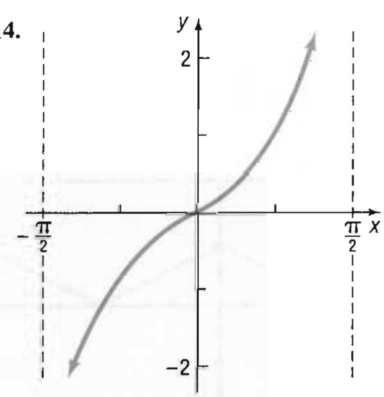
12.



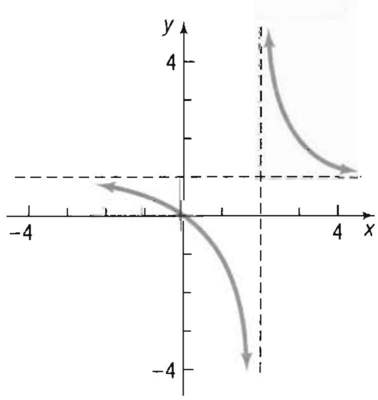
13.



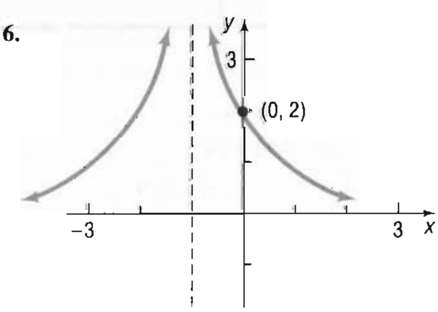
14.



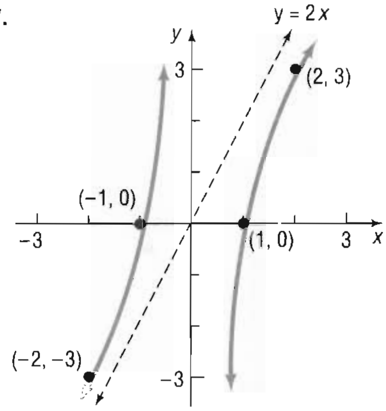
15.



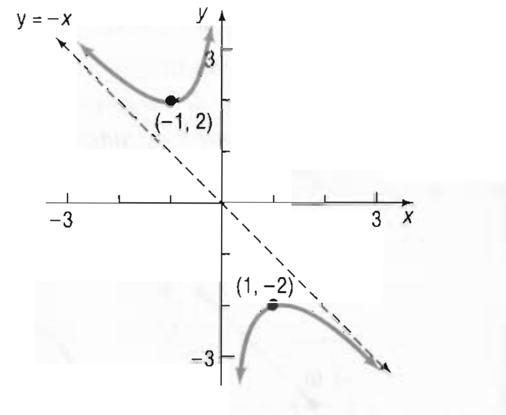
16.



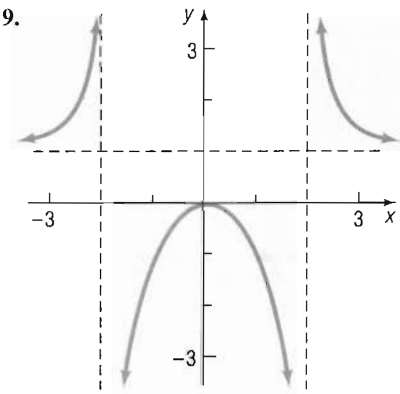
17.



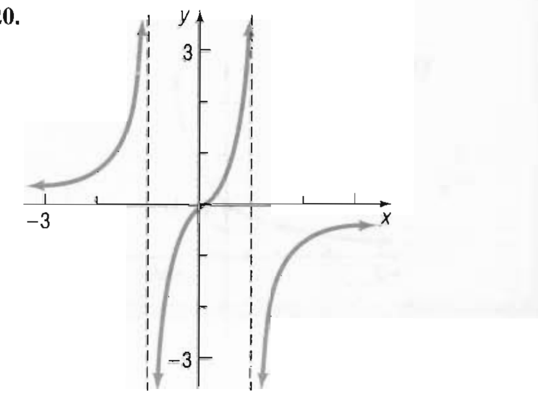
18.



19.

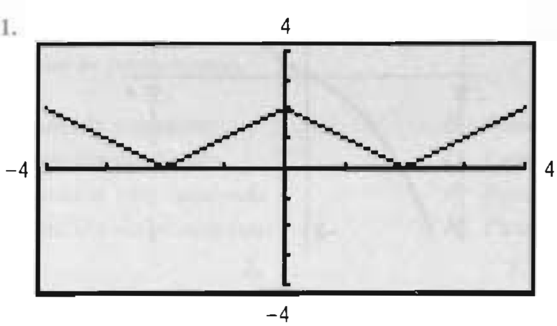


20.

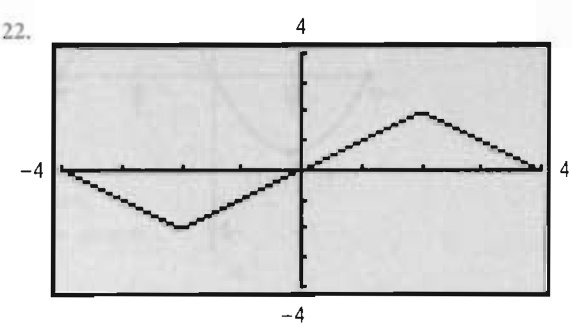


Para los problemas 21 y 22, suponga que la gráfica mostrada está completa.

21.



22.



23. Si $f(x) = [[2x]]$, determine: (a) $f(1.2)$ (b) $f(1.6)$ (c) $f(-1.8)$

24. Si $f(x) = [[x/2]]$, determine: (a) $f(1.2)$ (b) $f(1.6)$ (c) $f(-1.8)$

25. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

determine: (a) $f(-2)$ (b) $f(0)$ (c) $f(2)$

26. Si $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

determine: (a) $f(-1)$ (b) $f(0)$ (c) $f(1)$

En los problemas del 27 al 38, determine lo siguiente para cada función:

(*a*) $f(-x)$ (*b*) $-f(x)$ (*c*) $f(2x)$ (*d*) $f(x-3)$ (*e*) $f(1/x)$ (*f*) $1/f(x)$

27. $f(x) = 2x + 5$ **28.** $f(x) = 3 - x$ **29.** $f(x) = 2x^2 - 4$ **30.** $f(x) = x^3 + 1$

31. $f(x) = x^3 - 3x$ **32.** $f(x) = x^2 + x$ **33.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **34.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

35. $f(x) = |x|$ **36.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **37.** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ **38.** $f(x) = 4 + \dfrac{2}{x}$

En los problemas del 39 al 50, determine el cociente de diferencias,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \qquad x \neq 1$$

para cada función. Asegúrese de simplificar.

39. $f(x) = 3x$ **40.** $f(x) = -2x$ **41.** $f(x) = 1 - 3x$ **42.** $f(x) = x^2 + 1$

43. $f(x) = 3x^2 - 2x$ **44.** $f(x) = 4x - 2x^2$ **45.** $f(x) = x^3 - x$ **46.** $f(x) = x^3 + x$

47. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ **48.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **49.** $f(x) = \sqrt{x}$ **50.** $f(x) = \sqrt{x+3}$

En los problemas del 51 al 62, diga si cada función es par, impar o de ninguno de estos tipos, sin trazar la gráfica.

51. $f(x) = 4x^3$ **52.** $f(x) = 2x^4 - x^2$ **53.** $g(x) = 2x^2 - 5$ **54.** $h(x) = 3x^3 + 2$

55. $F(x) = \sqrt[3]{x}$ **56.** $G(x) = \sqrt{x}$ **57.** $f(x) = x + |x|$ **58.** $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + 1}$

59. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **60.** $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **61.** $h(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 9}$ **62.** $F(x) = \dfrac{x}{|x|}$

63. ¿Cuántas intersecciones-x puede tener una función definida en un intervalo si es creciente en ese intervalo? Explique su respuesta.

64. ¿Cuántas intersecciones-y puede tener una función? Explique su respuesta.

En los problemas del 65 al 90:

(*a*) *Determine el dominio de cada función.* (*b*) *Localice cualquier intersección con los ejes coordenados.*

(*c*) *Haga la gráfica de cada función.* (*d*) *Con base en la gráfica, determine el rango.*

65. $f(x) = 3x - 3$ **66.** $f(x) = 4 - 2x$ **67.** $g(x) = x^2 - 4$

68. $g(x) = x^2 + 4$ **69.** $h(x) = -x^2$ **70.** $F(x) = 2x^2$

71. $f(x) = \sqrt{x-2}$ **72.** $g(x) = \sqrt{x} + 2$ **73.** $h(x) = \sqrt{2-x}$

74. $F(x) = -\sqrt{x}$ **75.** $f(x) = |x| + 3$ **76.** $g(x) = |x + 3|$

77. $h(x) = -|x|$ **78.** $F(x) = |3 - x|$

79. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ **80.** $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

81. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ **82.** $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

83. $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

84. $f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si } -3 \le x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

85. $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número entero} \\ -1 & \text{si } x \text{ no es un número entero} \end{cases}$

86. $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 1 \\ 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

87. $h(x) = 2[[x]]$

88. $f(x) = [[2x]]$

89. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } |x| \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

90. $G(x) = |x^2 - 4|$

Los problemas del 91 al 94 necesitan la siguiente definición. Recta secante *La pendiente de la recta secante que contiene a los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ en la gráfica de una función $y = f(x)$ es*

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

En los problemas del 91 al 94, exprese la pendiente de la recta secante de cada función en términos de x y h. Asegúrese de simplificar su respuesta.

91. $f(x) = 2x + 5$

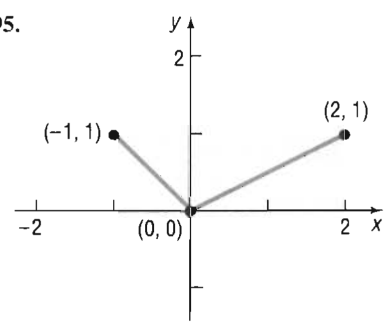
92. $f(x) = -3x + 2$

93. $f(x) = x^2 + 2x$

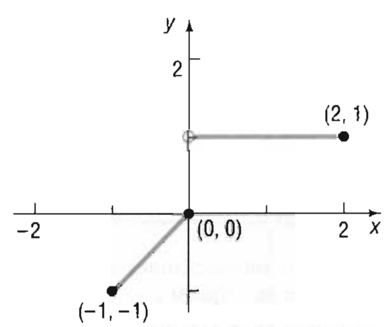
94. $f(x) = 1/x$

En los problemas del 95 al 98 se da la gráfica de una función definida por partes. Escriba una definición para cada función.

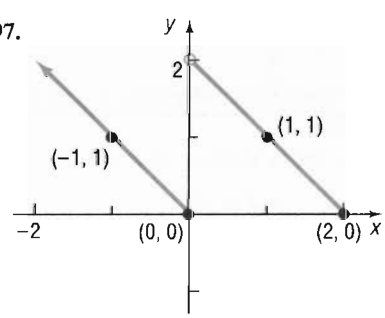
95.



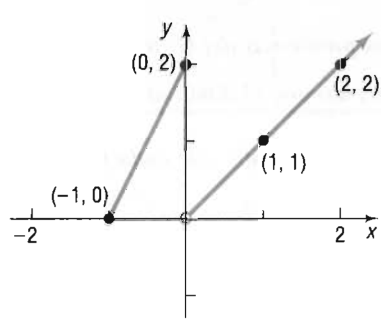
96.



97.



98.



En los problemas 99 y 100 decida si cada función es par. Justifique su respuesta.

99. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \ne 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

100. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \ne 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

101. Haga la gráfica de $y = x^2$. Después Haga la gráfica de $y = x^2 + 2$, $y = x^2 + 4$, y $y = x^2 - 2$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica de $y = x^2 - 4$? ¿De $y = x^2 + 5$?

102. Haga la gráfica de $y = x^2$. Después Haga la gráfica de $y = (x - 2)^2$, $y = (x - 4)^2$, y $y = (x + 2)^2$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica de $y = (x + 4)^2$? ¿De $y = (x - 5)^2$?

103. Haga la gráfica de $y = |x|$. Después Haga la gráfica de $y = 2|x|$, $y = 4|x|$, y $y = \frac{1}{2}|x|$. ¿Qué patrón observa? ¿Puede predecir la gráfica de $y = \frac{1}{4}|x|$? ¿De $y = 5|x|$?

104. Haga la gráfica de $y = x^2$. Después Haga la gráfica de $y = -x^2$. ¿Qué patrón observa? Ahora intente con $y = |x|$ y $y = -|x|$ ¿Qué puede concluir?

105. Haga la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Después Haga la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. ¿Qué patrón observa? Ahora intente con $y = 2x + 1$ y $y = 2(-x) + 1$. ¿Qué puede concluir?

106. Haga la gráfica de $y = x^3$. Después Haga la gráfica de $y = (x - 1)^3 + 2$. ¿Puede predecir el resultado?

107. *Costo del gas natural.* En 12 de noviembre de 1991, las compañías Peoples Gas Light y Coke tuvieron las siguientes tarifas* para el consumo de gas natural en residencias unifamiliares:

Cargo por servicio mensual	\$7.00
Cargo de distribución de los primeros 90 litros	\$0.21054/litro
Por arriba de los 90 litros	\$0.11242/litro
Cargo de gas	\$0.26341/litro

(a) ¿Cuál es el cargo por consumir 50 litros en un mes?
(b) ¿Cuál es el cargo por 500 litros en un mes?
(c) Construya una función que relacione el cargo mensual C para x litros de gas.
(d) Grafique esta función.

108. *Costo del gas natural.* El 19 de noviembre de 1991, la compañía de gas Northern Illinois tenía la siguiente tarifa† para el consumo de gas natural en residencias unifamiliares:

Cargo mensual al cliente	\$4.00
Cargo por distribución, primeros 50 litros	\$0.1402/litro
Por arriba de los 50 litros	\$0.0547/litro
Cargo por suministro de gas	\$0.2406/litro

(a) ¿Cuál es el cargo por consumir 40 litros en un mes?
(b) ¿Cuál es el cargo por 202 litros en un mes?
(c) Haga una función para el cargo mensual C por x litros de gas.
(d) Haga la gráfica de ésta.

109. Sea f cualquier función con la propiedad de que cuando x esté en su dominio también $-x$ lo esté. Defina las funciones $E(x)$ y $O(x)$ como

$$E(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \qquad O(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

(a) Muestre que $E(x)$ es una función par.
(b) Muestre que $O(x)$ es una función impar.
(c) Muestre que $f(x) = E(x) + O(x)$.
(d) Concluya que cualquier función f puede ser escrita como la suma de una función par y una función impar.

110. Sean f y g dos funciones definidas en el mismo intervalo $[a, b]$. Suponga que definimos dos funciones mín (f, g) y máx (f, g) como sigue:

$$\text{mín}(f, g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq g(x) \\ g(x) & \text{si } f(x) > g(x) \end{cases} \qquad \text{máx}(f, g)(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } f(x) \leq g(x) \\ f(x) & \text{si } f(x) > g(x) \end{cases}$$

**Fuente:* Las compañías Peoples Gas Light y Coke, Chicago, Illinois.
†*Fuente:* Compañía de gas Northern Illinois, Naperville, Illinois.

Muestre que

$$\text{mín}(f, g)(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$$

Desarrolle una fórmula similar para máx (f, g).

111. Considere la ecuación

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

¿Es esta una función? ¿Cuál es su dominio? ¿Cuál es su rango? ¿Cuál es su intersección-y, si existe? ¿Cuáles son sus intersecciones-x, si existen? ¿Es par, impar o de ninguno de estos tipos? ¿Como describiría su gráfica?

112. Defina algunas funciones que pasen por (0, 0), (1, 1) y sean crecientes para $x \geq 0$. Comience su lista con $y = \sqrt{x}$, $y = x$, y $y = x^2$. ¿Puede proponer un resultado general acerca de tales funciones?

113. ¿Puede pensar en una función que sea par e impar a la vez?

2.3 Técnicas de graficación

En esta etapa, si le pidieran hacer la gráfica de cualquiera de las funciones definidas por $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, o $y = 1/x$, su respuesta sería: "Si, reconozco estas funciones y sé cuál es la forma general de sus gráficas." (Si esta no fuese su respuesta, repase las secciones anteriores y las figuras de la 12 a la 17.)

A veces se nos pide trazar una función parecida a otra que ya sabemos trazar. En esta sección veremos algunas de esas funciones y desarrollaremos las técnicas para trazar sus gráficas.

Corrimientos verticales

EJEMPLO 1 *Corrimiento vertical hacia arriba*

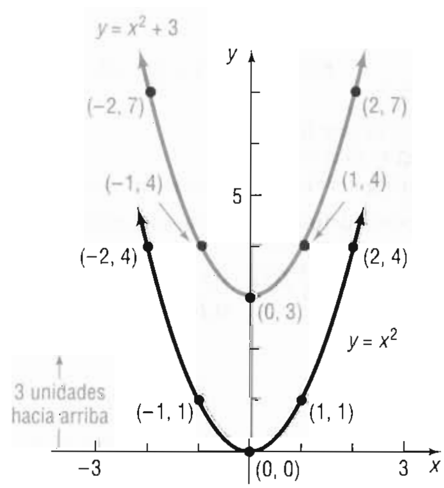
Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la de $g(x) = x^2 + 3$.

Solución Comenzamos obteniendo algunos puntos de las gráficas de f y g. Por ejemplo, cuando $x = 0$, entonces $y = f(0) = 0$ y $y = g(0) = 3$. Cuando $x = 1$, $y = f(1) = 1$ y $y = g(1) = 4$. La tabla 2 muestra estos y otros puntos más en cada gráfica. Concluimos que la gráfica de g es idéntica a la de f, excepto que está recorrida en forma vertical hacia arriba por 3 unidades. *Véase* la figura 21.

TABLA 2

x	$y = f(x) = x^2$	$y = g(x) = x^2 + 3$
−2	4	7
−1	1	4
0	0	3
1	1	4
2	4	7

FIGURA 21



Cuando se suma un número real c al lado derecho de una función $y = f(x)$, la gráfica de la nueva función $y = f(x) + c$ es la gráfica de f con un **corrimiento vertical** hacia arriba (si $c > 0$) o hacia abajo (si $c < 0$). Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 2 *Corrimiento vertical hacia abajo*

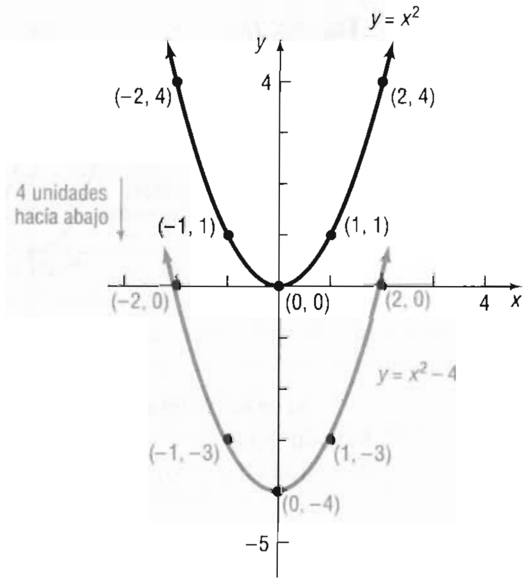
Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la de $h(x) = x^2 - 4$.

Solución La tabla 3 enumera algunos puntos de las gráficas de f y h. La gráfica de h es igual a la de f, excepto que ésta se recorre hacia abajo en 4 unidades. *Véase* la figura 22. ■

TABLA 3

x	$y = f(x) = x^2$	$y = h(x) = x^2 - 4$
−2	4	0
−1	1	−3
0	0	−4
1	1	−3
2	4	0

FIGURA 22



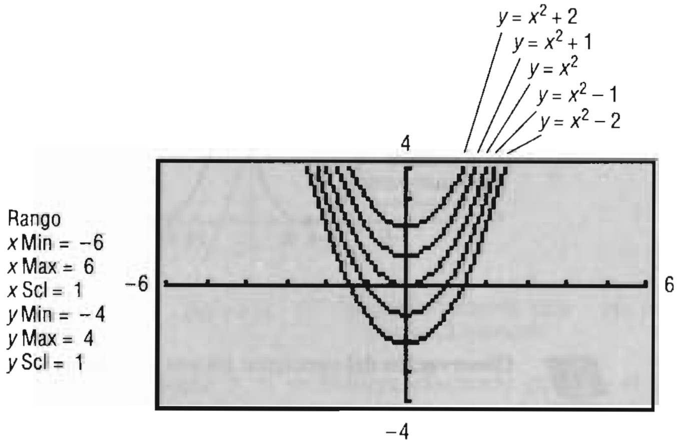
■

Observación del concepto: En una sola pantalla haga la gráfica de las siguientes funciones:

$$y = x^2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = x^2 + 2, \quad y = x^2 - 1, \quad y = x^2 - 2$$

Véase la figura 23.

FIGURA 23



■ Ahora resuelva el problema 21.

Corrimientos horizontales

EJEMPLO 3 *Corrimiento horizontal hacia la derecha*

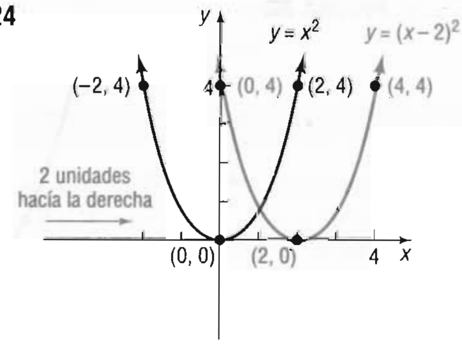
Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la de $g(x) = (x - 2)^2$.

Solución La función $g(x) = (x - 2)^2$ es, en esencia, una función cuadrada. La tabla 4 enumera algunos puntos en las gráficas de f y g. Observe que $f(x) = 0$ si $x = 0$, y que $g(x) = 0$ si $x = 2$. Además, cuando $f(x) = 4$ entonces $x = -2$ o 2, y cuando $g(x) = 4$, $x = 0$ o 4. Concluimos que la gráfica de g es igual a la de f pero recorrida 2 unidades hacia la derecha. *Véase* la figura 24. ■

TABLA 4

x	$y = f(x) = x^2$	$y = g(x) = (x-2)^2$
−2	4	16
0	0	4
2	4	0
4	16	4

FIGURA 24



■

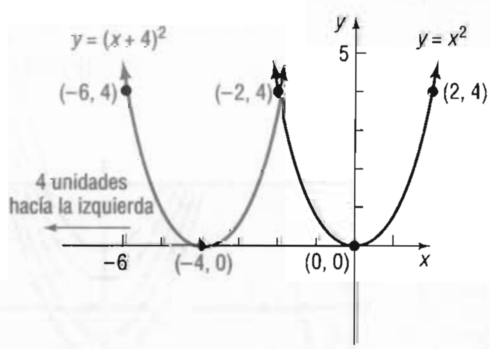
Si se suma un número c al argumento x de una función f, la gráfica de la nueva función $g(x) = f(x + c)$ es la gráfica de f con un **corrimiento horizontal** hacia la izquierda (si $c > 0$) o hacia la derecha (si $c < 0$). Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 4 *Corrimiento horizontal hacia la izquierda*

Utilice la gráfica de $f(x) = x^2$ para obtener la de $h(x) = (x + 4)^2$.

Solución De nuevo, la función $h(x) = (x + 4)^2$ es, en esencia, una función cuadrada. De ese modo, su gráfica es igual a la de f pero recorrida en 4 unidades hacia la izquierda. (¿Advierte usted por qué?) *Véase* la figura 25.

FIGURA 25



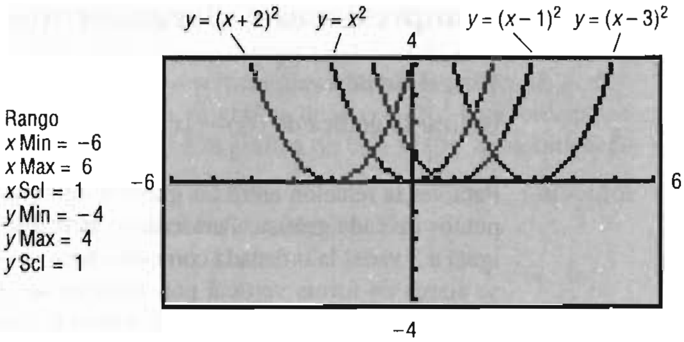
■

Observación del concepto: En una sola pantalla haga la gráfica de las siguientes funciones:

$$y = x^2, \quad y = (x - 1)^2, \quad y = (x - 3)^2, \quad y = (x + 2)^2$$

Véase la figura 26.

FIGURA 26



■ Ahora resuelva el problema 27.

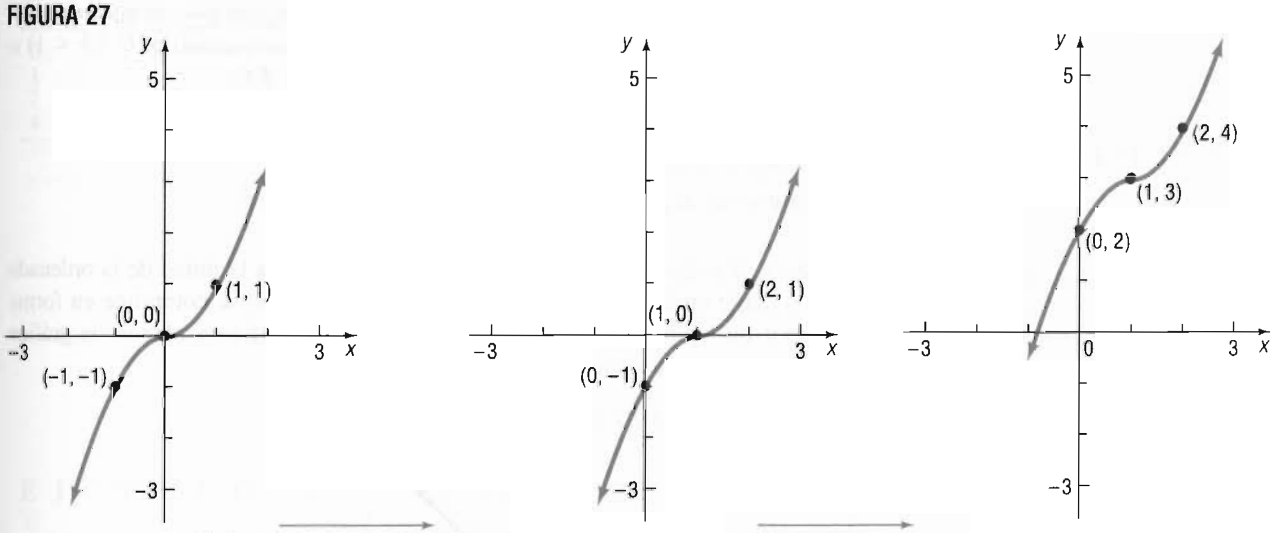
Los corrimientos vertical y horizontal se pueden combinar.

EJEMPLO 5 *Combinación de corrimientos verticales y horizontales*

Hacer la gráfica de la función $f(x) = (x - 1)^3 + 3$

Solución Trazamos la gráfica de f por pasos. Primero, observemos que la regla esencial para f es la de una función cúbica. De ese modo, comencemos con la gráfica de $y = x^3$. *Véase* la figura 27(a). Después, para obtener la gráfica de $y = (x - 1)^3$, recorremos la gráfica de $y = x^3$ en forma horizontal una unidad hacia la derecha. *Véase* la figura 27(b). Por último, para obtener la gráfica de $y = (x - 1)^3 + 3$, recorremos la gráfica de $y = (x - 1)^3$ en forma vertical 3 unidades hacia arriba. *Véase* la figura 27(c). Observe los tres puntos localizados en cada una de las gráficas. El uso de puntos clave como éstos puede ayudar a llevar un registro de lo que está sucediendo.

FIGURA 27



(a) $y = x^3$ Corrimiento horizontal hacia la derecha en 1 unidad. (b) $y = (x - 1)^3$ Corrimiento horizontal hacia arriba en 3 unidades (c) $y = (x - 1)^3 + 3$ ■

En el ejemplo 5, si se hubiera efectuado primero el corrimiento vertical y luego el horizontal el resultado habría sido el mismo. (Inténtelo usted mismo.)

■ Ahora resuelva el problema 39.

Compresiones y alargamientos

EJEMPLO 6 *Alargamiento vertical*

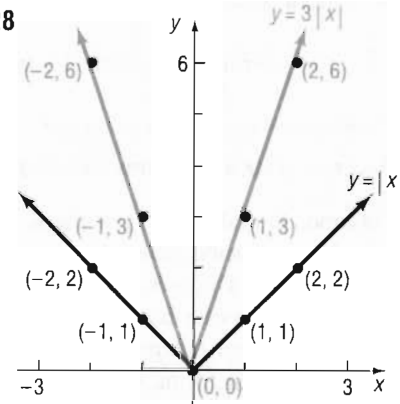
Utilizar la gráfica de $f(x) = |x|$ para obtener la de $g(x) = 3|x|$.

Solución Para ver la relación entre las gráficas de f y g formamos la tabla 5 enumerando los puntos de cada gráfica. Para cada x, la ordenada de un punto en la gráfica de g es igual a 3 veces la ordenada correspondiente en la gráfica de f. La gráfica de $f(x) = |x|$ se alarga en forma vertical por un factor de 3 [por ejemplo, de (1,1) a (1,3)] para obtener la gráfica de $g(x) = 3|x|$. *Véase* la figura 28.

TABLA 5

x	$y = f(x) = \|x\|$	$y = g(x) = 3\|x\|$
−2	2	6
−1	1	3
0	0	0
1	1	3
2	2	6

FIGURA 28



Al multiplicar el lado derecho de una función $y = f(x)$ por un número positivo k, la gráfica de la nueva función $y = kf(x)$ es una *compresión* (si $0 < k < 1$) o un *alargamiento* vertical (si $k > 1$) de la gráfica de $y = f(x)$.

EJEMPLO 7 *Compresión vertical*

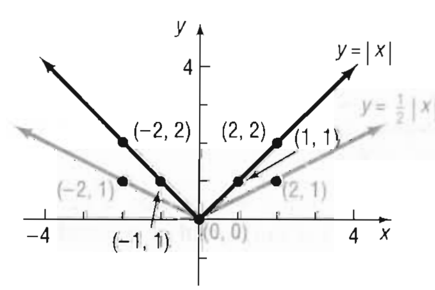
Utilice la gráfica de $f(x) = |x|$ para obtener la de $h(x) = \frac{1}{2}|x|$.

Solución Para cada x, la ordenada de un punto en la gráfica de h es la mitad de la ordenada correspondiente en la gráfica de f. La gráfica de $f(x) = |x|$ se comprime en forma vertical por un factor de $\frac{1}{2}$ [por ejemplo, de (2,2) a (2,1)] para obtener la gráfica $h(x) = \frac{1}{2}|x|$. *Véanse* la tabla 6 y la figura 29.

TABLA 6

x	$y = f(x) = \|x\|$	$y = h(x) = \frac{1}{2}\|x\|$
−2	2	1
−1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$
2	2	1

FIGURA 29



Compare las figuras 28 y 29. Observe que la gráfica de $f(x) = |x|$ se alarga en forma vertical para obtener la gráfica de $g(x) = 3|x|$, mientras que la misma se comprime en forma vertical para obtener la gráfica de $h(x) = \frac{1}{2}|x|$. Dicho de otra forma, para una x fija, la gráfica de $g(x) = 3|x|$ tiene ordenadas mayores que la de $f(x) = |x|$, mientras que la gráfica de $h(x) = \frac{1}{2}|x|$ tiene ordenadas menores que las de f.

■ Ahora resuelva el problema 29.

Al multiplicar el argumento x de una función $y = f(x)$ por un número positivo k, la gráfica de la nueva función $y = f(kx)$ también es una versión comprimida o alargada de la gráfica de $y = f(x)$, pero ahora eso ocurre en forma horizontal en vez de vertical. Para saber por qué, observemos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 *Compresión horizontal*

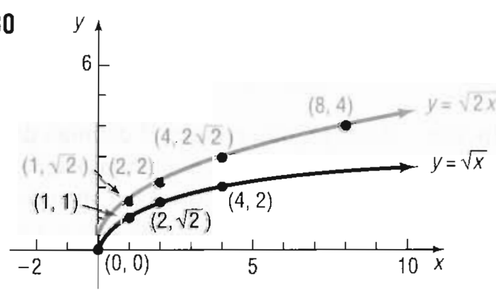
Utilizar la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ para obtener la de $g(x) = \sqrt{2x}$.

Solución La gráfica de f nos es familiar y aparece en la figura 30. La tabla 7 muestra algunos puntos en las gráficas de f y g. Vemos en la tabla 7 que la gráfica de g crece más rápido que la de f; es decir, la gráfica de g es comprimida en forma horizontal hacia el eje y. *Véase* la figura 30.

TABLA 7

x	$y = f(x) = \sqrt{x}$	$y = g(x) = \sqrt{2x}$
0	0	0
1	1	$\sqrt{2}$
2	$\sqrt{2}$	2
4	2	$2\sqrt{2}$

FIGURA 30



Observe que como $\sqrt{2x} = \sqrt{2}\sqrt{x}$, la gráfica de $g(x) = \sqrt{2x}$ también puede verse como un alargamiento vertical de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$. ■

Reflecciones con respecto a los ejes x y y

EJEMPLO 9 *Reflexión con respecto al eje x*

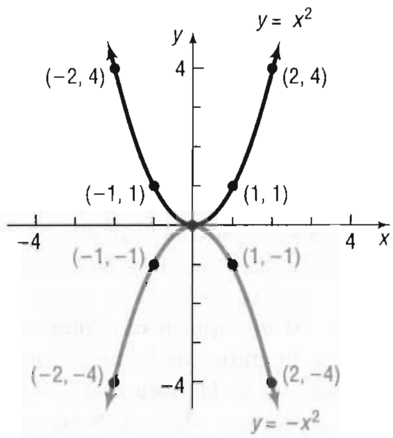
Haga la gráfica de la función: $f(x) = -x^2$

Solución Comencemos con la gráfica de $y = x^2$, como muestra la figura 31. Para todo punto (x, y) de la gráfica de $y = x^2$, el punto $(x, -y)$ está en la gráfica de $y = -x^2$, como se ve en la tabla 8. De ese modo, podemos hacer la gráfica de $y = x^2$ reflejando la gráfica de $y = x^2$ con respecto al eje x. *Véase* la figura 31.

TABLA 8

x	$y = x^2$	$y = -x^2$
−2	4	−4
−1	1	−1
0	0	0
1	1	−1
2	4	−4

FIGURA 31



Al multiplicar el lado derecho de la ecuación $y = f(x)$ por -1, la gráfica de la nueva función $y = -f(x)$ es la **reflexión con respecto al eje x** de la gráfica de la función $y = f(x)$.

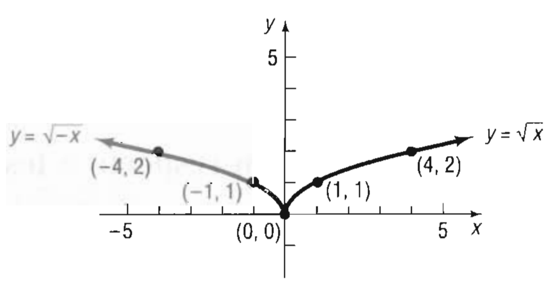
Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 10 *Reflexión con respecto al eje y*

Haga la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{-x}$

Solución Primero, observe que el dominio de f consta de todos los números reales x tales que $-x \geq 0$, o bien $x \leq 0$. Para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt{-x}$, comenzamos con la gráfica de $y = \sqrt{x}$, la cual aparece en la figura 32. Para cada punto (x, y) de la gráfica de $y = \sqrt{x}$, el punto $(-x, y)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. De ese modo, obtenemos la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. Reflejando la gráfica de $y = \sqrt{x}$, con respecto al eje y. *Véase* la figura 32.

FIGURA 32



Si se conoce la gráfica de la función $y = f(x)$, la gráfica de la nueva función $y = f(-x)$ es la **reflexión con respecto al eje y** de la gráfica de la función $y = f(x)$.

Resumen de técnicas de graficación

La tabla 9 resume los procedimientos de graficación analizados hasta aquí.

TABLA 9

Para hacer la gráfica	Trazar la gráfica de f y:
Corrimientos verticales	
$y = f(x) + c, \quad c > 0$	Subir la gráfica de f c unidades.
$y = f(x) - c, \quad c > 0$	Bajar la gráfica de f c unidades.
Corrimientos horizontales	
$y = f(x + c), \quad c > 0$	Recorrer la gráfica de f c unidades hacia la izquierda.
$y = f(x - c), \quad c > 0$	Recorrer la gráfica de f c unidades hacia la derecha.
Compresión o alargamiento	
$y = kf(x), \quad k > 0$	Comprimir o alargar la gráfica de f por un factor de k.
$y = f(kx), \quad k > 0$	
Reflexión con respecto al eje x	
$y = -f(x)$	Reflejar la gráfica de f con respecto al eje x.
Reflexión con respecto al eje y	
$y = f(-x)$	Reflejar la gráfica de f con respecto al eje y.

Los siguientes ejemplos combinan algunos de los procedimientos descritos en esta sección para obtener la gráfica requerida.

EJEMPLO 11 *Combinar los procedimientos de graficación*

Hacer la gráfica de la función: $f(x) = \dfrac{3}{x-2} + 1$

Solución Utilizamos los pasos siguientes para obtener la gráfica de f:

PASO 1: $y = \dfrac{1}{x}$ Función recíproca.

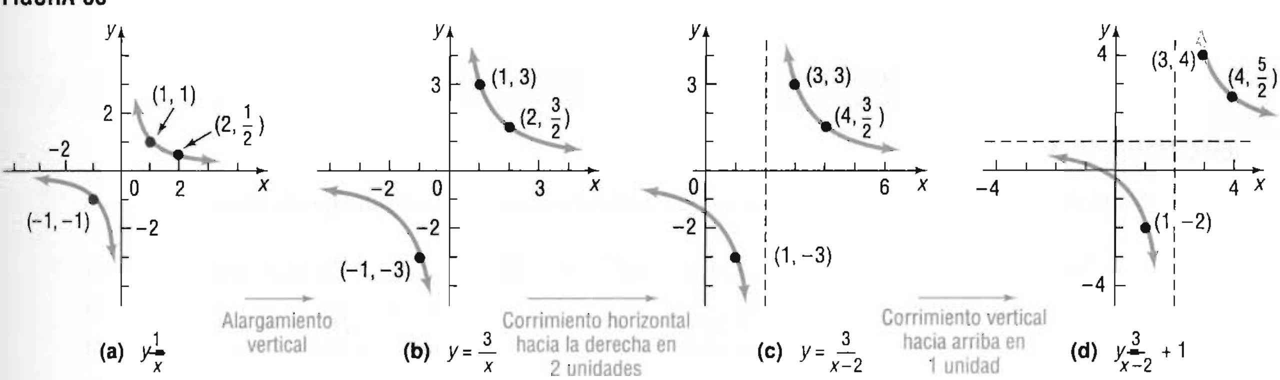
PASO 2: $y = \dfrac{3}{x}$ Alargamiento vertical de la gráfica de $y = \dfrac{1}{x}$ por un factor de 3.

PASO 3: $y = \dfrac{3}{x-2}$ Corrimiento horizontal a la derecha, 2 unidades; reemplazar x por $x - 2$.

PASO 4: $y = \dfrac{3}{x-2} + 1$ Corrimiento vertical una unidad hacia arriba en 1 unidad.

Véase la figura 33.

FIGURA 33



Podemos realizar los pasos del ejemplo 11 en otro orden para obtener la gráfica de f. Veamos cómo:

PASO 1: $y = \frac{1}{x}$ Función recíproca.

PASO 2: $y = \frac{1}{x-2}$ Corrimiento horizontal hacia la derecha en 2 unidades; reemplazar x por $x - 2$

PASO 3: $y = \frac{3}{x-2}$ Alargamiento vertical de la gráfica de $y = \frac{1}{x-2}$ por un factor de 3.

PASO 4: $y = \frac{3}{x-2} + 1$ Corrimiento vertical hacia arriba en 1 unidad: sumar 1.

■ Ahora resuelva el problema 41.

EJEMPLO 12 *Combinación de procedimientos de graficación*

Hacer la gráfica de la función: $f(x) = \sqrt{1-x} + 2$

Solución Utilizamos los pasos siguientes para obtener la gráfica de $y = \sqrt{1-x} + 2$:

PASO 1: $y = \sqrt{x}$ Función raíz cuadrada.

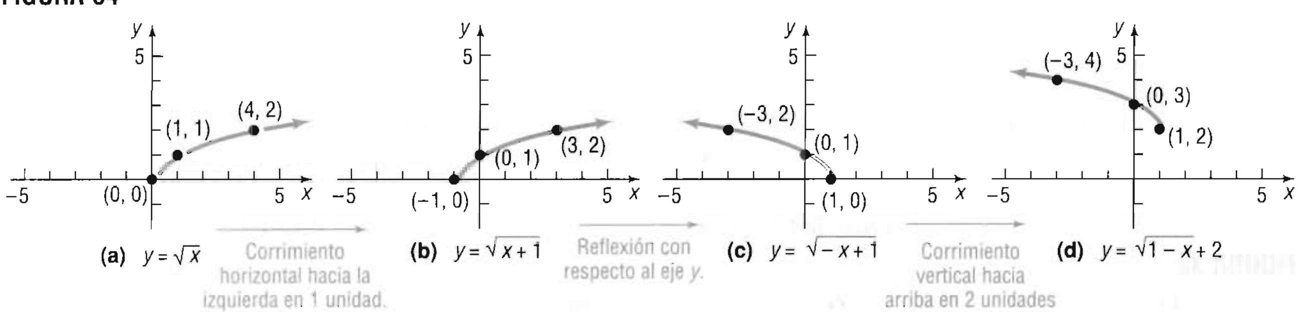
PASO 2: $y = \sqrt{x+1}$ Reemplazar x por $x + 1$; corrimiento horizontal hacia la izquierda en 1 unidad.

PASO 3: $y = \sqrt{-x+1} = \sqrt{1-x}$ Reemplazar x por $-x$; reflexión con respecto al eje y.

PASO 4: $y = \sqrt{1-x} + 2$ Corrimiento vertical hacia arriba en dos unidades.

Véase la figura 34.

FIGURA 34

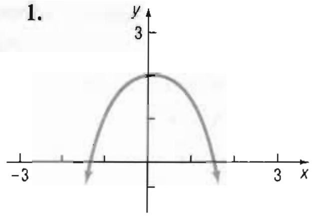


2.3 Ejercicio 2.3

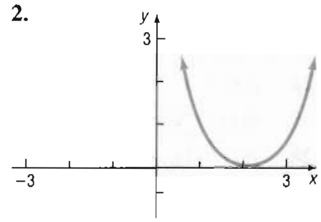
En los problemas del 1 al 12, relacione cada gráfica con una de las siguientes funciones:

A. $y = x^2 + 2$	*B.* $y = -x^2 + 2$	*C.* $y = \lvert x\rvert + 2$	*D.* $y = -\lvert x\rvert + 2$
E. $y = (x-2)^2$	*F.* $y = -(x+2)^2$	*G.* $y = \lvert x-2\rvert$	*H.* $y = -\lvert x+2\rvert$
I. $y = 2x^2$	*J.* $y = -2x^2$	*K.* $y = 2\lvert x\rvert$	*L.* $y = -2\lvert x\rvert$

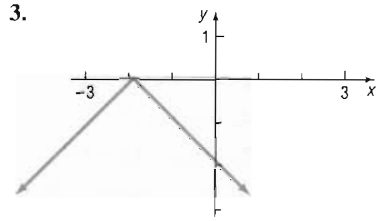
1.



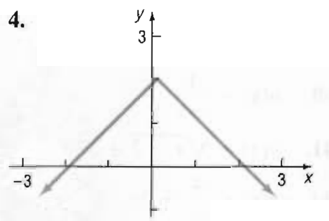
2.



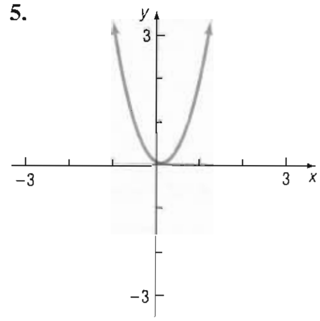
3.



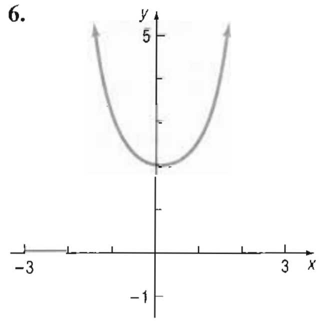
4.



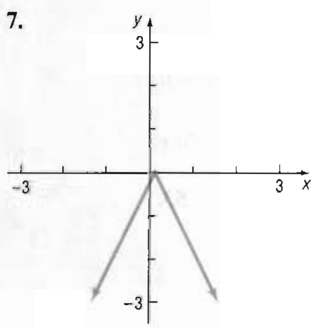
5.



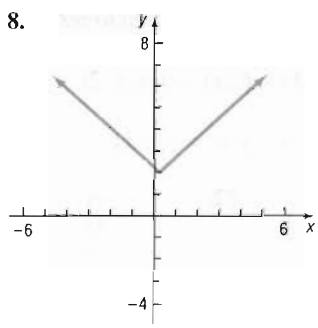
6.



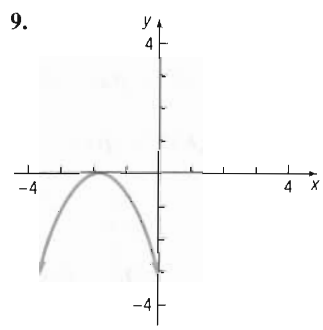
7.



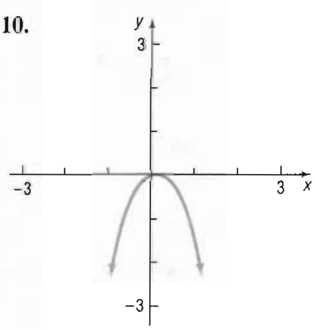
8.



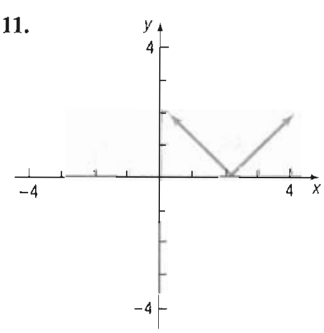
9.



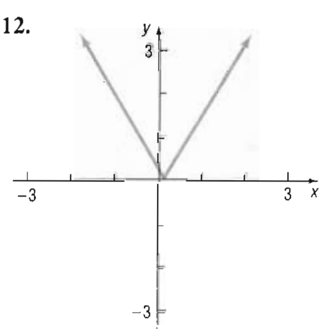
10.



11.



12.



En los problemas del 13 al 20, utilice la función $f(x) = x^3$. Escriba la función cuya gráfica sea la de $y = x^3$, pero ahora:

13. Recorrida hacia la derecha en 4 unidades.

14. Recorrida hacia la izquierda en 4 unidades.

15. Recorrida hacia arriba en 4 unidades.

16. Recorrida hacia abajo en 4 unidades.

17. Reflejada con respecto al eje y.

18. Reflejada con respecto al eje x.

19. Alargada en forma vertical por un factor de 4.

20. Alargada en forma horizontal por un factor de 4.

En los problemas del 21 al 50, Haga la gráfica de cada función con las técnicas de corrimiento, compresión, alargamiento o reflexión. Comience con la gráfica de la función básica ($y = x^2$) y muestre todos los pasos.

21. $f(x) = x^2 - 1$ **22.** $f(x) = x^2 + 4$ **23.** $g(x) = x^3 + 1$

24. $g(x) = x^3 - 1$ **25.** $h(x) = \sqrt{x - 2}$ **26.** $h(x) = \sqrt{x + 1}$

27. $f(x) = (x - 1)^3$ **28.** $f(x) = (x + 2)^3$ **29.** $g(x) = 4\sqrt{x}$

30. $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ **31.** $h(x) = \dfrac{1}{2x}$ **32.** $h(x) = \dfrac{4}{x}$

33. $f(x) = -|x|$ **34.** $f(x) = -\sqrt{x}$ **35.** $g(x) = -\dfrac{1}{x}$

36. $g(x) = -x^3$ **37.** $h(x) = [[-x]]$ **38.** $h(x) = \dfrac{1}{-x}$

39. $f(x) = (x + 1)^2 - 3$ **40.** $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ **41.** $g(x) = \sqrt{x - 2} + 1$

42. $g(x) = |x + 1| - 3$ **43.** $h(x) = \sqrt{-x} - 2$ **44.** $h(x) = \dfrac{4}{x} + 2$

45. $f(x) = (x + 1)^3 - 1$ **46.** $f(x) = 4\sqrt{x - 1}$ **47.** $g(x) = 2|1 - x|$

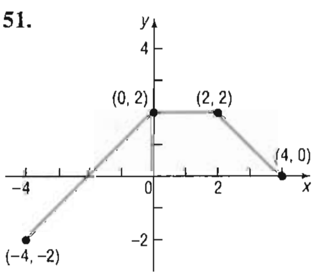
48. $g(x) = 4\sqrt{2 - x}$ **49.** $h(x) = 2[[x - 1]]$ **50.** $h(x) = -x^3 + 2$

En los problemas del 51 al 56 aparece la gráfica de una función f. Utilícela como el primer paso para hacer la gráfica de cada una de las siguientes funciones.

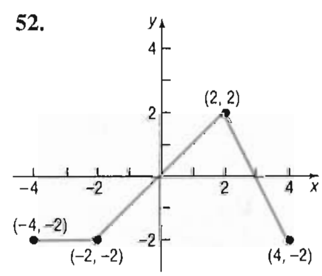
(a) $F(x) = f(x) + 3$ *(b)* $G(x) = f(x + 2)$ *(c)* $P(x) = -f(x)$

(d) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$ *(e)* $g(x) = f(-x)$ *(f)* $h(x) = 3f(x)$

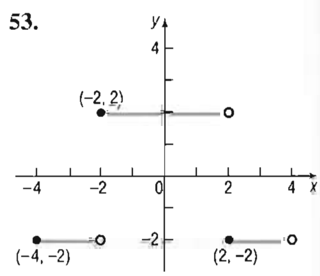
51.



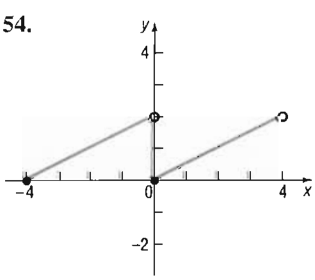
52.



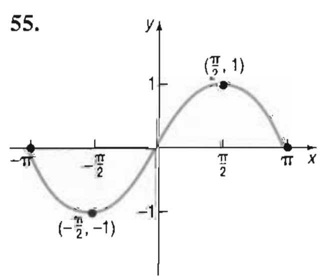
53.



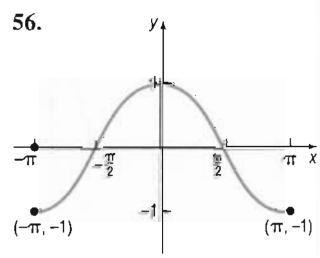
54.



55.



56.



En los problemas del 57 al 62, complete el cuadrado de cada expresión cuadrática. Después Haga la gráfica de cada función con la técnica de corrimiento.

57. $f(x) = x^2 + 2x$ **58.** $f(x) = x^2 - 6x$ **59.** $f(x) = x^2 - 8x + 1$

60. $f(x) = x^2 + 4x + 2$ **61.** $f(x) = x^2 + x + 1$ **62.** $f(x) = x^2 - x + 1$

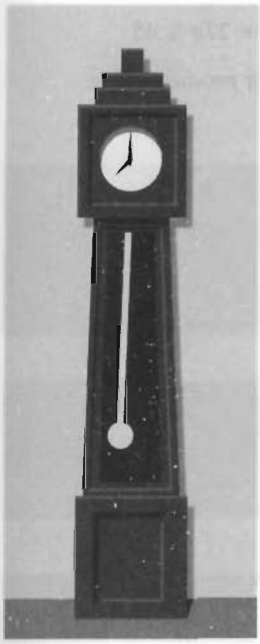
63. La ecuación $y = (x - c)^2$ define una *familia de parábolas*, una parábola para cada valor de c. En un conjunto de ejes coordenados, haga las gráficas de los elementos de la familia para $c = 0$, $c = 3$, $c = -2$.

64. Repita el problema 63 para la familia de parábolas $y = x^2 + c$.

65. *Medición de la temperatura.* La relación entre los grados Celsius (°C) y los Fahrenheit (°F) para medir la temperatura está dada por la ecuación

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

La relación entre los grados Celsius (°C) y los grados Kelvin (K) es $K = C + 273$. Haga la gráfica de la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$, utilizando grados Fahrenheit en el eje y y grados Celsius en el eje x. Aplique las técnicas de esta sección para obtener la gráfica que muestre la relación entre los grados Kelvin y Fahrenheit.



66. *Periodo de un péndulo.* El periodo T (en segundos) de un péndulo simple es una función de su longitud l (en pies) dada por la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde $g \approx 32.2$ pies por segundo es la aceleración de la gravedad. Haga la gráfica de esta función utilizando T en el eje y y l en el eje x. En los mismos ejes coordenados, grafique las siguientes funciones:

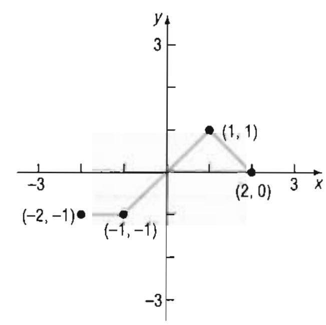
(a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l+2}{g}}$ (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{4l}{g}}$

Analice la forma en que el cambio en la longitud afecta al periodo del péndulo.

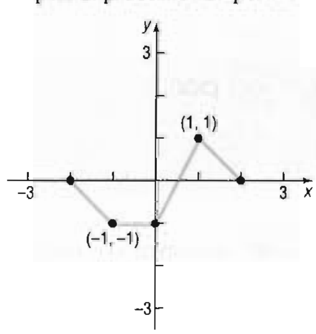
67. La figura muestra la gráfica de una función f.

(a) Haga la gráfica de (en forma completa) $y = |f(x)|$.

(b) Haga la gráfica de (en forma completa) $y = f(|x|)$.



68. Repita el problema 67 para la siguiente gráfica.



69. (a) Haga la gráfica de $y = x + 1$ y $y = |x + 1|$.

(b) Haga la gráfica de $y = 4 - x^2$ y $y = |4 - x^2|$.

(c) Haga la gráfica de $y = x^3 + x$ y $y = |x^3 + x|$.

(d) ¿Qué puede concluirse acerca de la relación entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = |f(x)|$?

70. (a) Haga la gráfica de $y = x + 1$ y $y = |x| + 1$.

(b) Haga la gráfica de $y = 4 - x^2$ y $y = 4 - |x|^2$.

(c) Haga la gráfica de $y = x^3 + x$ y $y = |x|^3 + |x|$.

(d) ¿Qué puede concluirse acerca de la relación entre las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$?

2.4 Operaciones con funciones; composición de funciones

En esta sección presentamos algunas de las operaciones que pueden realizarse al trabajar con funciones. Veremos que, al igual que los números, se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 9$ y $g(x) = 3x + 5$, entonces

$$f(x) + g(x) = (x^2 + 9) + (3x + 5) = x^2 + 3x + 14$$

La nueva función $y = x^2 + 3x + 14$ es la *función suma* $f + g$. De manera similar,

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 9)(3x + 5) = 3x^3 + 5x^2 + 27x + 45$$

La nueva función $y = 3x^3 + 5x^2 + 27x + 45$ es la *función producto* $f \cdot g$.

Ahora veamos las definiciones generales.

Función suma

Si f y g son funciones:
Su **suma** $\boldsymbol{f + g}$ es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Función diferencia

Su **diferencia** $\boldsymbol{f - g}$ es la función definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Función producto

Su **producto** $\boldsymbol{f \cdot g}$ es la función definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Función cociente

Su **cociente** $\boldsymbol{f/g}$ es la función definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

En cada caso, el dominio de la función resultante consta de los números que son comunes a ambos dominios de f y de g, pero los números x para los cuales $g(x) = 0$ deben excluirse del dominio del cociente f/g.

De ese modo, la función suma, $f + g$, está definida como la suma de los valores de las funciones f y g, y así sucesivamente.

EJEMPLO 1

Operaciones con funciones

Sean f y g dos funciones definidas como

$$f(x) = \sqrt{x + 2} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$$

Determinar las siguientes funciones y el dominio en cada caso:

(a) $(f + g)(x)$ (b) $(f - g)(x)$ (c) $(f \cdot g)(x)$ (d) $(f/g)(x)$

Solución (a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-3}$

(b) $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}$

(c) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{x+2})(\sqrt{x-3}) = \sqrt{(x+2)(x-3)}$

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

El dominio de f consta de todos los números x tales que $x \geq -2$; el dominio de g consta de todos los números x tales que $x \geq 3$. Los números x comunes a ambos dominios cumplen $x \geq 3$. Como resultado de ello, los números x tales que $x \geq 3$ forman el dominio de la función suma $f + g$, la función diferencia $f - g$ y la función producto $f \cdot g$. Para la función cociente f/g, debemos excluir de este conjunto el número 3, ya que el denominador, g, tiene el valor 0 cuando $x = 3$. Así, el dominio de f/g consta de todas las x mayores que 3, $x > 3$. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

A veces es útil ver una función complicada como la suma, diferencia, producto o cociente de funciones más sencillas. Por ejemplo,

$F(x) = x^2 + \sqrt{x}$ es la suma de $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

$H(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$ es el cociente de $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = x^2 + 1$.

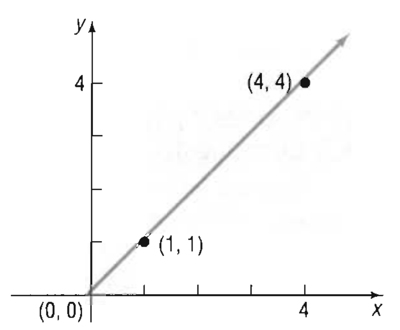
Un uso de esta forma de ver las funciones lo practicamos al obtener una gráfica. El siguiente ejemplo ilustra esta técnica de graficación cuando deseamos hacer la gráfica de una función que es la suma de dos funciones más sencillas. En este ejemplo el método utilizado se llama **suma de ordenadas.**

EJEMPLO 2 *Graficación mediante la suma de ordenadas*

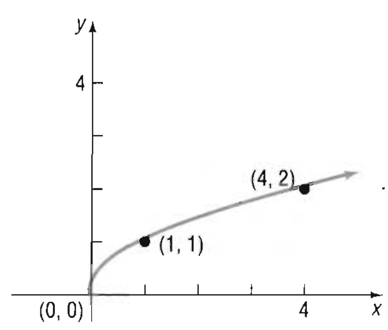
Hacer la gráfica de la función: $F(x) = x + \sqrt{x}$

Solución Primero, observemos que el dominio de F es $x \geq 0$. Después dibujamos las dos funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ para $x \geq 0$. *Véanse* las figuras 35(a) y 35(b). Para localizar un punto $(x, F(x))$ en la gráfica de F, elegimos un número no negativo x y sumamos la ordenada $f(x)$ y $g(x)$ para obtener la ordenada $F(x) = f(x) + g(x)$. Por ejemplo, cuando $x = 1$, tenemos $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, y $F(1) = f(1) + g(1) = 1 + 1 = 2$. Cuando $x = 4$, $f(4) = 4$, $g(4) = 2$, y $F(4) = f(4) + g(4) = 4 + 2 = 6$, y así sucesivamente. *Véase* la tabla 10. La figura 35(c) ilustra la gráfica de F.

FIGURA 35



(a) $f(x) = x, x \geq 0$

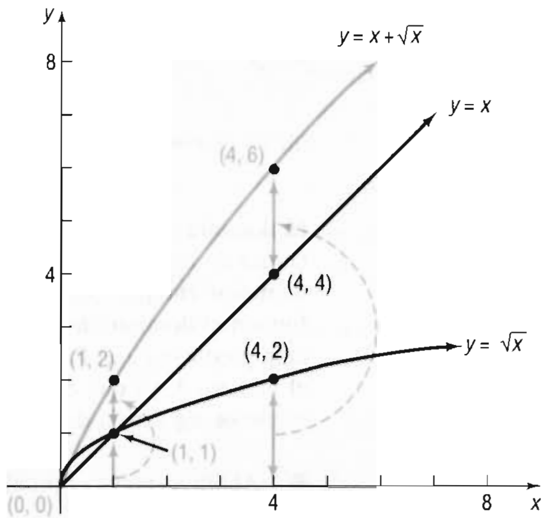


(b) $g(x) = \sqrt{x}$

TABLA 10

x	$f(x) = x$	$g(x) = \sqrt{x}$	$F(x) = x + \sqrt{x}$
0	0	0	0
1	1	1	2
4	4	2	6

FIGURA 35 (continuación)



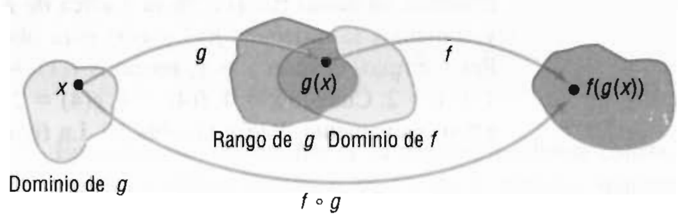
(c) $F(x) = x + \sqrt{x}$

Verificación: Haga la gráfica de las funciones $y = x$, $y = \sqrt{x}$, y $F(x) = x + \sqrt{x}$ y compárelas con la figura 35(c). ■

Composición de funciones

Considere la función $y = (2x + 3)^2$. Si escribimos $y = f(u) = u^2$ y $u = g(x) = 2x + 3$, entonces, por un proceso de sustitución, podemos obtener la función original: $y = f(u) = f(g(x)) = (2x + 3)^2$. Este proceso es una **composición.** En general, suponga que f y g son dos funciones y que x es un número del dominio de g. Al evaluar g en x, obtenemos $g(x)$. Si $g(x)$ está en el dominio de f, entonces podemos evaluar f en $g(x)$ y obtener así la expresión $f(g(x))$. Si hacemos esto para toda x tal que x esté en el dominio de g y $g(x)$ esté en el dominio de f, la correspondencia resultante de x a $f(g(x))$ será una *función compuesta*. *Véase* la figura 36.

FIGURA 36



Función compuesta

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta,** denotada por $f \circ g$ (léase "f compuesta con g"), se define como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

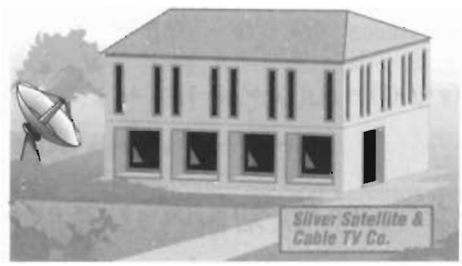
donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de números x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 2

ASESORÍA A LA COMPAÑÍA DE TELEVISIÓN POR SATÉLITE Y POR CABLE "SILVER"

Suponga que su equipo trabaja para la Compañía de Televisión por Satélite y por Cable "Silver", en el departamento de investigación y desarrollo. Hay que determinar una fórmula para calcular el costo de tender cable desde una caja de conexión hasta la casa del cliente. El primer caso implica a la familia Stevens, propietaria de una casa rural, con un camino de dos millas de largo desde cierta autopista hasta la casa. La caja de conexión más cercana se encuentra en esa autopista pero a 5 millas de distancia del camino mencionado.

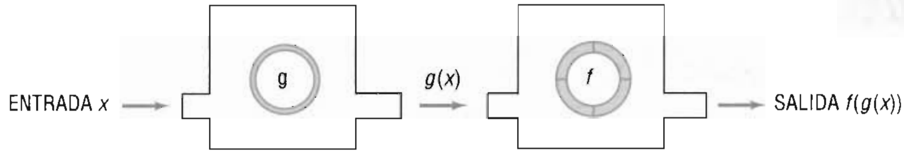


A la compañía le cuesta \$10.00 por milla instalar el cable en la autopista y \$14.00 por milla instalarlo fuera de la autopista. Como la casa de los Stevens está rodeada por una granja de su propiedad, es posible tender el cable atravesando ese terreno, ya sea directamente de la caja de conexión o desde cualquier punto entre la caja y el camino.

1. Haga un esquema de la situación dada suponiendo que la autopista es recta y que el camino es recto y perpendicular a la autopista. Incluya dos o más rutas posibles para el cable.
2. Suponga que x representa la distancia en millas que debe cubrir el cable a lo largo de la autopista, desde la caja de conexión hasta antes de dar la vuelta hacia la casa. Exprese el costo total de la instalación como una función de x. (Puede responder la pregunta 3 antes de la 2 si es que desea examinar ejemplos concretos antes de crear la ecuación.)
3. Haga una tabla con los valores enteros posibles de x y el costo correspondiente en cada caso. ¿Existe alguna alternativa cuyo costo parezca mínimo?
4. Si se cobrara \$80.00 a los Stevens por la instalación, ¿podría dejárseles elegir el camino que seguirá el cable? Explique su respuesta.
5. Si tiene una calculadora gráfica, haga la gráfica de la función de la pregunta 2 y determine si existe una alternativa no entera para x tal que el costo de instalación sea aún más barato. Utilice las funciones *zoom* y *trace* hasta obtener el costo mínimo posible.
6. Antes de realizar la instalación, usted verifica el reglamento local para las compañías de transmisión por cable y nota que existe una ley estatal aún no aprobada, la cual establece que el cable no puede salir de la autopista más allá de media milla del camino de los Stevens. Si esta legislación es aprobada, ¿cuál será el costo final de instalación del cable para los Stevens?
7. Si la compañía quiere instalar su sistema en 5000 casas del área, y suponiendo que el costo de los Stevens es típico, ¿cuánto dinero le costará si a causa de la nueva ley no puede utilizar el mínimo costo de instalación, sino que debe cumplir con el nuevo reglamento?

La figura 37 proporciona una segunda ilustración de la función compuesta. Observe que la función "interior" g en $f(g(x))$ se efectúa primero.

FIGURA 37



Observemos algunos ejemplos.

EJEMPLO 3 *Evaluación de una función compuesta*

Suponga que $f(x) = 2x^2 - 3$ y $g(x) = 4x$. Determinar:

(a) $(f \circ g)(1)$ (b) $(g \circ f)(1)$ (c) $(f \circ f)(-2)$ (d) $(g \circ g)(-1)$

Solución

(a) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) \underset{\substack{\uparrow \\ g(x) = 4x \\ g(1) = 4}}{=} f(4) \underset{\substack{\uparrow \\ f(x) = 2x^2 - 3}}{=} 2 \cdot 16 - 3 = 29$

(b) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) \underset{\substack{\uparrow \\ f(x) = 2x^2 - 3 \\ f(1) = -1}}{=} g(-1) \underset{\substack{\uparrow \\ g(x) = 4x}}{=} 4 \cdot (-1) = -4$

(c) $(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) \underset{\substack{\uparrow \\ f(-2) = 5}}{=} f(5) = 2 \cdot 25 - 3 = 47$

(d) $(g \circ g)(-1) = g(g(-1)) \underset{\substack{\uparrow \\ g(-1) = -4}}{=} g(-4) = 4 \cdot (-4) = -16$ ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

EJEMPLO 4 *Determinación de una función compuesta*

Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^3 - 1$. Determinar las siguientes funciones compuestas y, a continuación, encontrar el dominio de cada función compuesta:

(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

Solución

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3 - 1) = \sqrt{x^3 - 1}$

El dominio de $f \circ g$ es el intervalo $[1, \infty)$ que se encuentra determinando las x en el dominio de g para las que $x^3 - 1 \geq 0$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^3 - 1 = x^{3/2} - 1$

El dominio de $g \circ f$ es $[0, \infty)$.

(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x^3 - 1) = (x^3 - 1)^3 - 1$

El dominio de $g \circ g$ es el conjunto de todos los números reales. ■

■ Ahora resuelva el problema 27.

Los ejemplos 4(a) y 4(b) muestran que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Sin embargo, en algunos casos $f \circ g$ es igual a $g \circ f$, como nos muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 *Dos funciones compuestas iguales*

Si $f(x) = 3x - 4$ y $g(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$, demostrar que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ para toda x.

Solución

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f\left(\frac{x+4}{3}\right) \qquad g(x) = \frac{1}{3}(x+4) = \frac{x+4}{3}$$
$$= 3\left(\frac{x+4}{3}\right) - 4 \qquad \text{Sustituir } g(x) \text{ en la regla para } f.\ f(x) = 3x - 4.$$
$$= x + 4 - 4 = x$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$
$$= g(3x - 4) \qquad f(x) = 3x - 4$$
$$= \tfrac{1}{3}[(3x - 4) + 4)] \qquad \text{Sustituir } f(x) \text{ en la regla para } g.\ g(x) = \tfrac{1}{3}(x+4).$$
$$= \tfrac{1}{3}(3x) = x$$

Así, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$. ■

En la siguiente sección veremos que existe una relación importante entre las funciones f y g para las que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

■ Ahora resuelva el problema 41.

Aplicación del cálculo

Algunas técnicas del cálculo requieren determinar las componentes de una función compuesta. Por ejemplo, la función $H(x) = \sqrt{x + 1}$ es una composición de las funciones f y g, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, ya que $H(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \sqrt{x + 1}$.

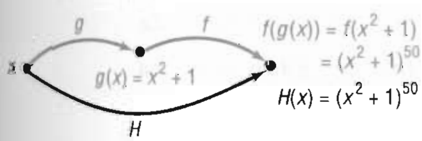
EJEMPLO 6 *Determinar los componentes de una función compuesta*

Encontrar las funciones f y g tales que $f \circ g = H$ si $H(x) = (x^2 + 1)^{50}$.

Solución

La función H considera a $x^2 + 1$ y lo eleva a la potencia 50. Una forma natural de descomponer H es elevando la función $g(x) = x^2 + 1$ a la potencia 50. De modo que si hacemos $f(x) = x^{50}$ y $g(x) = x^2 + 1$, entonces

FIGURA 38



$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f(x^2 + 1)$$
$$= (x^2 + 1)^{50} = H(x)$$

Véase la figura 38. ■

Se pueden determinar otras funciones f y g para las cuales $f \circ g = H$ en el ejemplo 6. Esto es, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x^2 + 1)^{25}$, entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x^2 + 1)^{25}) = [(x^2 + 1)^{25}]^2 = (x^2 + 1)^{50}$$

Así, aunque las funciones f y g determinadas como solución para el ejemplo 6 no son únicas, lo usual es que haya una alternativa "natural" para f y g que nos viene primero a la mente.

Esta selección natural le permitirá utilizar su calculadora de manera más eficiente. Observemos de nuevo el ejemplo 6. Para calcular el valor de H en, digamos, 2, haremos lo siguiente:

Teclas:	$\boxed{2}$	$\boxed{x^2}$	$\boxed{+}$	$\boxed{1}$	$\boxed{=}$	$\boxed{x^y}$	$\boxed{50}$	$\boxed{=}$	
Pantalla:	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$		$\boxed{1}$	$\boxed{5}$		$\boxed{50}$		$\boxed{8.8818 \quad E34}$

EJEMPLO 7 *Determinar los componentes de una función compuesta*

Encontrar las funciones f y g tales que $f \circ g = H$ si $H(x) = 1/(x + 1)$.

Solución En este caso, H es el recíproco de $g(x) = x + 1$. Entonces si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x + 1$, tenemos que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = \frac{1}{x + 1} = H(x)$$ ■

2.4

Ejercicio 2.4

En los problemas del 1 al 10, para las funciones dadas f y g, determine las siguientes funciones y el dominio de cada una:

(a) $f + g$ (b) $f - g$ (c) $f \cdot g$ (d) f/g

1. $f(x) = 3x + 4;\quad g(x) = 2x - 3$
2. $f(x) = 2x + 1;\quad g(x) = 3x - 2$
3. $f(x) = x - 1;\quad g(x) = 2x^2$
4. $f(x) = 2x^2 + 3;\quad g(x) = 4x^3 + 1$
5. $f(x) = \sqrt{x};\quad g(x) = 3x - 5$
6. $f(x) = |x|;\quad g(x) = x$
7. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$
8. $f(x) = 2x^2 - x;\quad g(x) = 2x^2 + x$
9. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{3x - 2};\quad g(x) = \dfrac{4x}{3x - 2}$
10. $f(x) = \sqrt{x + 1};\quad g(x) = \dfrac{2}{x}$
11. Dadas $f(x) = 3x + 1$ y $(f + g)(x) = 6 - \frac{1}{2}x$, determine la función g.
12. Dadas $f(x) = 1/x$ y $(f/g)(x) = (x + 1)/(x^2 - x)$, determine la función g.

En los problemas del 13 al 16, utilice el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de cada función en el intervalo [0,2].

13. $f(x) = |x| + x^2$
14. $f(x) = |x| + \sqrt{x}$
15. $f(x) = x^3 + x$
16. $f(x) = x^3 + x^2$

En los problemas del 17 al 26, para las funciones dadas f y g, determine:

(a) $(f \circ g)(4)$ (b) $(g \circ f)(2)$ (c) $(f \circ f)(1)$ (d) $(g \circ g)(0)$

17. $f(x) = 2x;\quad g(x) = 3x^2 + 1$
18. $f(x) = 3x + 2;\quad g(x) = 2x^2 - 1$
19. $f(x) = 4x^2 - 3;\quad g(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$
20. $f(x) = 2x^2;\quad g(x) = 1 - 3x^2$
21. $f(x) = \sqrt{x};\quad g(x) = 2x$
22. $f(x) = \sqrt{x + 1};\quad g(x) = 3x$
23. $f(x) = |x|;\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
24. $f(x) = |x - 2|;\quad g(x) = \dfrac{3}{x^2 + 2}$
25. $f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 1};\quad g(x) = \sqrt{x}$
26. $f(x) = x^3;\quad g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

En los problemas del 27 al 40, para las funciones dadas f y g, determine:

(a) $f \circ g$ *(b)* $g \circ f$ *(c)* $f \circ f$ *(d)* $g \circ g$

Indique el dominio de cada función compuesta.

27. $f(x) = 2x + 3;\quad g(x) = 3x$

28. $f(x) = -x;\quad g(x) = 2x - 4$

29. $f(x) = 3x + 1;\quad g(x) = x^2$

30. $f(x) = \sqrt{x+1};\quad g(x) = x + 4$

31. $f(x) = \sqrt{x};\quad g(x) = x^2 - 1$

32. $f(x) = \sqrt{x+1};\quad g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

33. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

34. $f(x) = x + \dfrac{1}{x};\quad g(x) = x^2$

35. $f(x) = x^2;\quad g(x) = \sqrt{x}$

36. $f(x) = 2x + 4;\quad g(x) = \frac{1}{2}x - 2$

37. $f(x) = \dfrac{1}{2x+3};\quad g(x) = 2x + 3$

38. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1};\quad g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

39. $f(x) = ax + b;\quad g(x) = cx + d$

40. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d};\quad g(x) = mx$

En los problemas del 41 al 48, muestre que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

41. $f(x) = 2x;\quad g(x) = \frac{1}{2}x$

42. $f(x) = 4x;\quad g(x) = \frac{1}{4}x$

43. $f(x) = x^3;\quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

44. $f(x) = x + 5;\quad g(x) = x - 5$

45. $f(x) = 2x - 6;\quad g(x) = \frac{1}{2}(x + 6)$

46. $f(x) = 4 - 3x;\quad g(x) = \frac{1}{3}(4 - x)$

47. $f(x) = ax + b;\quad g(x) = \dfrac{1}{a}(x - b),\ a \neq 0$

48. $f(x) = \dfrac{1}{x};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

49. Si $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ y $g(x) = 2$, determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

50. Si $f(x) = x/(x - 1)$, determine $(f \circ f)(x)$.

En los problemas del 51 al 54, utilice $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x} + 2$, *y* $h(x) = 1 - 3x$ *para determinar la función compuesta indicada.*

51. $f \circ (g \circ h)$

52. $(f \circ g) \circ h$

53. $(f + g) \circ h$

54. $(f \circ h) + (g \circ h)$

En los problemas del 55 al 62, sean $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$, *y* $h(x) = \sqrt{x} + 1$. *Exprese cada función como una composición de f, g y/o h.*

55. $F(x) = 9x^2$

56. $G(x) = 3x^2$

57. $H(x) = |x| + 1$

58. $p(x) = 3\sqrt{x} + 3$

59. $q(x) = x + 2\sqrt{x} + 1$

60. $R(x) = 9x$

61. $P(x) = x^4$

62. $Q(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 1} + 1$

En los problemas del 63 al 70, determine funciones f y g de modo que $f \circ g = H$.

63. $H(x) = (2x + 3)^4$

64. $H(x) = (1 + x^2)^{3/2}$

65. $H(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

66. $H(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

67. $H(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)^2$

68. $H(x) = |2x^2 + 3|$

69. $H(x) = [[x^2 + 1]]$

70. $H(x) = (4 - x^2)^{-4}$

71. Si $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = 3x + a$, de modo que la gráfica de $f \circ g$ cruce el eje y en 23.

72. Si $f(x) = 3x^2 - 7$ y $g(x) = 2x + a$, de modo que la gráfica de $f \circ g$ cruce el eje y en 68.

73. El área S (en metros cuadrados) de la superficie de un globo inflado con aire caliente está dada por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

donde r es el radio del globo (en metros). Si el radio r crece con el tiempo t (en segundos) según la fórmula $r(t) = \frac{2}{3}t^3$, siendo $t \geq 0$, determine el área S de la superficie del globo como una función del tiempo t.

74. El volumen V (en metros cúbicos) del globo descrito en el problema 73, está dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el radio r es la misma función de t que apareció ese problema, determine el volumen V como función del tiempo t.

75. *Producción automotríz.* La cantidad N de automóviles producidos en una fábrica en un día, después de t horas de trabajo, es $N(t) = 100t - 5t^2$, $0 \leq t \leq 10$. Si el costo C (en dólares) de producir x automóviles es $C(x) = 15{,}000 + 8000x$, determínelo como una función del tiempo t de trabajo en la fábrica.

76. *Ambiente.* El petróleo que se derrama de cierto tanque forma un círculo. Si el radio r (en pies) del derrame después de t horas es $r(t) = 200\sqrt{t}$, determine el área A cubierta por petróleo como una función del tiempo t.

77. *Costo de producción.* El precio p de cierto producto y la cantidad vendida x cumplen la ecuación de demanda

$$p = -\tfrac{1}{4}x + 100 \qquad 0 \leq x \leq 400$$

Suponga que el costo C de producir x unidades de dicho artículo es

$$C = \frac{\sqrt{x}}{} + 600$$

Si todos los artículos producidos son vendidos, determine el costo C como función del precio p. [*Sugerencia*: Despeje x en la ecuación de demanda, y después forme la composición.]

78. *Costo de un artículo.* El precio p de cierto artículo y la cantidad vendida x cumplen la ecuación de demanda

$$p = -\tfrac{1}{5}x + 200 \qquad 0 \leq x \leq 1000$$

Suponga que el costo C de producir x unidades es

$$C = \frac{\sqrt{x}}{} + 400$$

Si todos los artículos producidos se venden, determine el costo C como una función del precio p.

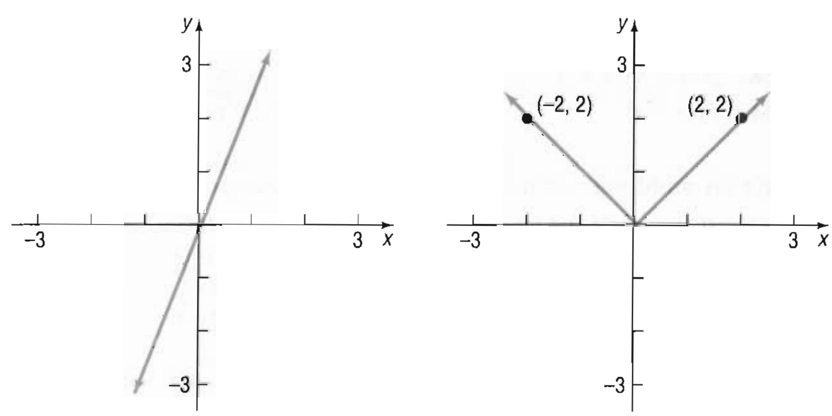
79. Si f y g son funciones impares, demuestre que la función compuesta $f \circ g$ también es impar.

80. Si f es una función impar y g una función par, demuestre que las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ también son pares.

2.5 Funciones uno a uno; funciones inversas

Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) cualesquiera dos puntos *distintos* en la gráfica de una función $y = f(x)$. De aquí se deduce que $x_1 \neq x_2$. Para algunas funciones, también ocurre que las ordenadas de puntos distintos son siempre diferentes. Tales funciones son las llamadas funciones *uno a uno*. *Véase* la figura 39.

FIGURA 39



(a) $f(x) = 2x$
Uno a uno:
Toda pareja de puntos distintos tiene la ordenada diferente.

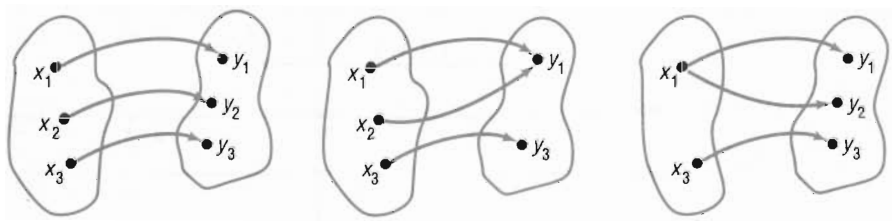
(b) $g(x) = |x|$
No es uno a uno:
Los puntos distintos (−2, 2) y (2, 2) tienen la misma ordenada

Función uno a uno

Una función f es **uno a uno** si, para cualquier elección de números x_1 y x_2, $x_1 \neq x_2$, en el dominio de f, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.

En otras palabras, si f es una función uno a uno, entonces para cada x en el dominio de f existe exactamente una y en el rango y ninguna y en el rango es imagen de más de una x en el dominio. *Véase* la figura 40.

FIGURA 40



(a) Función uno a uno: Cada x en el dominio tiene una, y sólo una, imagen en el rango

(b) No es una función uno a uno: y_1 es la imagen de x_1 y x_2

(c) No es una función: x_1 tiene dos imágenes, y_1 y y_2

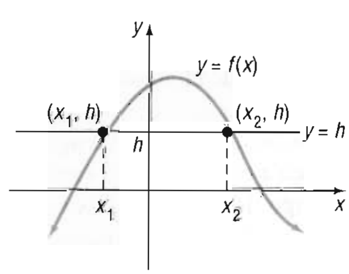
Como muestra la figura 41, si se conoce la gráfica de una función f existe un criterio sencillo, denominado **criterio de la recta horizontal,** para determinar si f es uno a uno.

Teorema
Criterio de la recta horizontal

Si todas las rectas horizontales cortan a la gráfica de una función en un punto cuando mucho, entonces f es uno a uno. ■

La razón del funcionamiento de esta prueba puede verse en la figura 41, donde la recta horizontal $y = h$ corta a la gráfica en dos puntos distintos, (x_1,h) y (x_2,h), con el mismo segundo elemento. Así, f no es uno a uno.

FIGURA 41
$f(x_1) = f(x_2) = h$, pero $x_1 \neq x_2$; f no es una función uno a uno



EJEMPLO 1

Uso del criterio de la recta horizontal

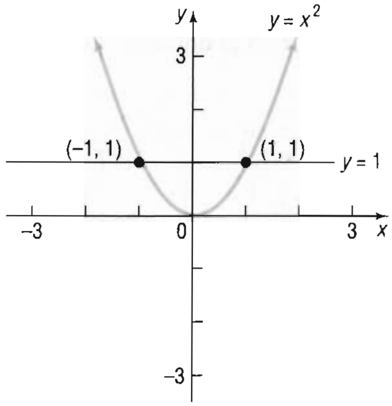
Para cada una de las funciones dadas, utilizar la gráfica para determinar si la función es uno a uno.

(a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$

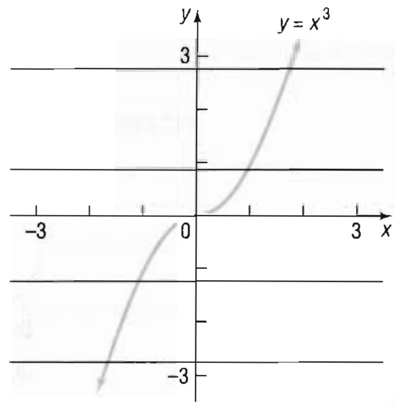
Solución (a) La figura 42(a) ilustra el criterio de la recta horizontal para $f(x) = x^2$. La recta horizontal $y = 1$ corta a la gráfica de f dos veces, en (1,1) y en (−1, 1); por lo tanto, f no es uno a uno.

(b) La figura 42(b) ilustra el criterio de la recta horizontal para $g(x) = x^3$. Como cada recta horizontal cortará a la gráfica de g exactamente una vez, g es uno a uno.

FIGURA 42



(a) Una recta horizontal corta a la gráfica dos veces; entonces f no es uno a uno



(b) Las rectas horizontales cortan la gráfica una sola vez; por lo tanto, g es uno a uno

Ahora resuelva el problema 1.

Analicemos más de cerca la función uno a uno $g(x) = x^3$. Esta es una función creciente. Como una función creciente (o decreciente) siempre tendrá valores y diferentes para valores x distintos, esto implica que una función creciente (o decreciente) en su dominio sea también una función uno a uno.

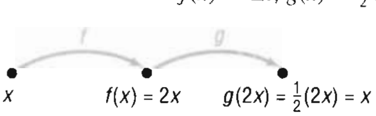
Teorema Una función creciente (o decreciente) es una función uno a uno.

Inversa de una función

Mencionamos con anterioridad que una función $y = f(x)$ es como una regla que nos indica hacer algo al argumento x. Por ejemplo, la función $f(x) = 2x$ multiplica al argumento por 2. Una *función inversa* de f deshace lo que f hace. Veamos, la función $g(x) = \frac{1}{2}x$, que divide el argumento entre 2, es una inversa de $f(x) = 2x$. *Véase* la figura 43.

FIGURA 43

$f(x) = 2x;\ g(x) = \frac{1}{2}x$



$g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x$

Para que una función $y = f(x)$ tenga una función inversa, f debe ser uno a uno. Entonces, para cada x en su dominio existe exactamente una y en su rango; además, a cada y en el rango, le corresponde exactamente una x en el dominio. La correspondencia del rango de f sobre el dominio de f también es entonces una función. Esta es la función *inversa de f*. Ahora daremos una definición.

Inversa de f

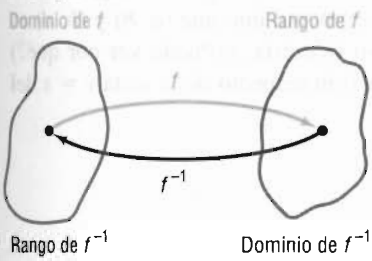
Sea f una función uno a uno $y = f(x)$. La **inversa de f**, denotada f^{-1}, es una función tal que $f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en el dominio de f, y $f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.

Advertencia: ¡Tenga cuidado! El −1 utilizado en f^{-1} no es un exponente. Así, f^{-1} *no* indica el recíproco de f sino su inversa.

La figura 44 ilustra la definición.

Tenemos entonces dos hechos evidentes con respecto a una función f y su inversa f^{-1}.

FIGURA 44



$$\boxed{\text{Dominio de } f = \text{Rango de } f^{-1} \quad \text{Rango de } f = \text{Dominio de } f^{-1}}$$

Revise de nuevo la figura 44 para visualizar la relación. Si comenzamos con x, aplicamos f y luego f^{-1}, obtendremos de nuevo x. Si comenzamos con x, aplicamos f^{-1} y luego f, llegamos de nuevo al número x. Dicho en forma simple, lo que hace f, f^{-1} lo deshace y viceversa:

$$\boxed{\text{Entrada } x} \xrightarrow{\text{Aplicar } f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{\text{Aplicar } f^{-1}} \boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$$

$$\boxed{\text{Entrada } x} \xrightarrow{\text{Aplicar } f^{-1}} \boxed{f^{-1}(x)} \xrightarrow{\text{Aplicar } f} \boxed{f(f^{-1}(x)) = x}$$

En otras palabras,

$$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x}$$

Estas condiciones permiten verificar que una función es, de hecho, la inversa de f, como lo demuestra el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 *Verificación de las funciones inversas*

(a) Verificamos que la inversa de $g(x) = x^3$ es $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ demostrando que

$$g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

y

$$g(g^{-1}(x)) = g(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

(b) Verificamos que la inversa de $h(x) = 3x$ es $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$ demostrando que

$$h^{-1}(h(x)) = h^{-1}(3x) = \tfrac{1}{3}(3x) = x$$

y

$$h(h^{-1}(x)) = h(\tfrac{1}{3}x) = 3(\tfrac{1}{3}x) = x$$

(c) Verificamos que la inversa de $f(x) = 2x + 3$ es $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$ demostrando que

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 3) = \tfrac{1}{2}[(2x + 3) - 3] + 3 = \tfrac{1}{2}(2x) = x$$

y

$$f(f^{-1}(x)) = f(\tfrac{1}{2}(x - 3)) = 2[\tfrac{1}{2}(x - 3)] + 3 = (x - 3) + 3 = x.$$

■

■ Ahora resuelva el problema 13.

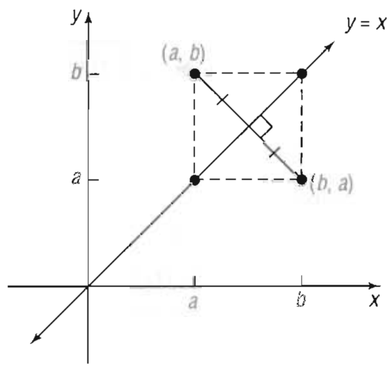
Exploración: Haga la gráfica de $y = x$ en una pantalla cuadrada con la ventana $-3 \leq x \leq 7$, $-2 \leq y \leq 2$. Después, haga la gráfica de $y = x^3$ seguida de su inversa, $y = \sqrt[3]{x}$.. ¿Qué observa respecto de las gráficas de $y = x^3$, su inversa $y = \sqrt[3]{x}$ y la recta $y = x$?

Repita el experimento para las funciones del problema 13. ¿Observa usted la simetría de la gráfica de f y su inversa respecto de la recta $y = x$?

Interpretación geométrica

Sea (a, b) un punto en la gráfica de una función uno a uno f definida por $y = f(x)$. Entonces $b = f(a)$. Esto significa que $a = f^{-1}(b)$, así (b, a) es un punto en la gráfica de la función inversa f^{-1}. La relación que existe entre el punto (a, b) en f y el punto (b, a) en f^{-1} aparece en la figura 45. El segmento que une (a, b) y (b, a) es perpendicular a la recta $y = x$ y esta recta es su bisectriz. (¿Puede ver por qué?) Esto implica que el punto (b, a) en f^{-1} es la reflexión respecto de la recta $y = x$ del punto (a, b) en f.

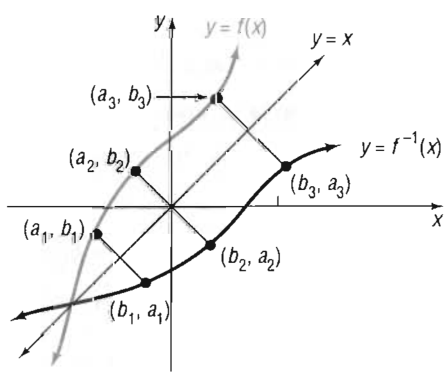
FIGURA 45



Teorema La gráfica de una función f y la de su inversa f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$. ■

La figura 46 ilustra este resultado. Observe que, una vez conocida la gráfica de f, podemos obtener la gráfica de f^{-1} doblando el papel a lo largo de la recta $y = x$.

FIGURA 46

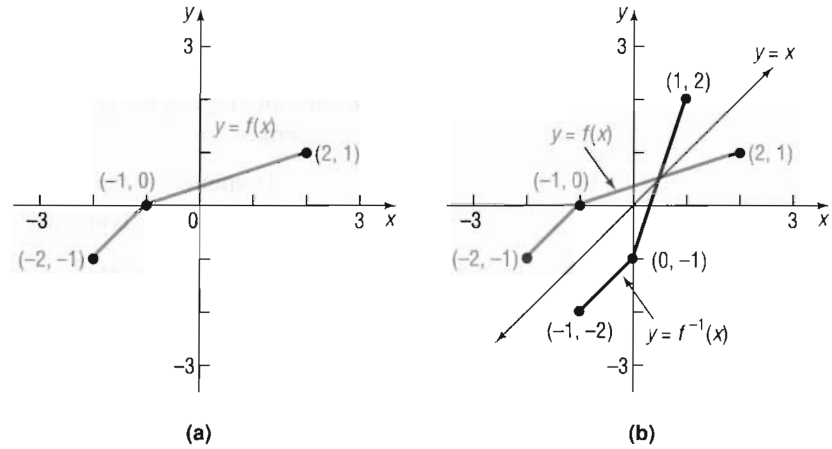


EJEMPLO 3 *Graficación de la función inversa*

La gráfica de la figura 47(a) es la de una función uno a uno $y = f(x)$. Dibuje la gráfica de su inversa.

Solución Primero agregamos la gráfica de $y = x$ a la figura 47(a). Como los puntos $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, y $(2, 1)$ se encuentran en la gráfica de f, sabemos que los puntos $(-1, -2)$, $(0, -1)$, y $(1, 2)$ deben estar en la gráfica de f^{-1}. Como la gráfica de f^{-1} es la reflexión respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de f, podemos dibujar f^{-1}. *Véase* la figura 47(b). ■

FIGURA 47



■ Ahora resuelva el problema 7.

Determinación de la función inversa

El hecho de que la gráfica de una función uno a uno f y su inversa sean simétricas respecto de la recta $y = x$ nos dice más. Observemos de nuevo la figura 46. Deducimos que es posible obtener f^{-1} intercambiando los papeles de x y y. Es decir, si f está definida por la ecuación

$$y = f(x)$$

entonces f^{-1} se define por la ecuación

$$x = f(y)$$

¡Tenga cuidado! La ecuación $x = f(y)$ define f^{-1} de manera implícita. Si podemos despejar a y en esta ecuación, tendremos la forma explícita de f^{-1}, es decir,

$$y = f^{-1}(x)$$

Utilicemos este procedimiento para determinar la inversa de $f(x) = 2x + 3$. (Como f es una función lineal creciente, sabemos que es uno a uno.)

EJEMPLO 4 *Determinación de la función inversa*

Determinar la inversa de $f(x) = 2x + 3$, así como dominio y rango de f y f^{-1}. Hacer la gráfica de f y f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

Solución En la ecuación $y = 2x + 3$, intercambiamos las variables x y y. El resultado,

$$x = 2y + 3$$

es una ecuación que define a la inversa f^{-1} de manera implícita. Al despejar y, obtenemos

$$\begin{aligned} 2y + 3 &= x \\ 2y &= x - 3 \\ y &= \tfrac{1}{2}(x - 3) \end{aligned}$$

La forma explícita de la inversa f^{-1} es entonces

$$f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(x - 3)$$

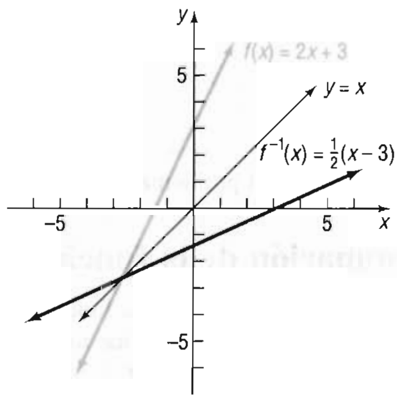
lo cual verificamos en el ejemplo 2(c).

Entonces tenemos

$$\text{Dominio } f = \text{rango } f^{-1} = (-\infty, \infty)$$
$$\text{Rango } f = \text{dominio } f^{-1} = (-\infty, \infty)$$

En la figura 48 aparecen las gráficas de $f(x) = 2x + 3$ y su inversa $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$. Observe la simetría de las gráficas respecto de la recta $y = x$. ■

FIGURA 48



A continuación enunciamos los pasos a seguir para determinar la inversa de una función uno a uno.

Procedimiento para determinar la inversa de la función uno a uno

PASO 1: En $y = f(x)$, intercambie las variables x, y para obtener

$$x = f(y)$$

Esta ecuación define la función inversa f^{-1} de manera implícita.

PASO 2: Si es posible, despeje y en la ecuación implícita en términos de x para obtener la forma explícita de f^{-1}:

$$y = f^{-1}(x)$$

PASO 3: Verifique el resultado, mostrando que

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

EJEMPLO 5 *Determinación de la función inversa*

La función

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

es uno a uno. Determinar su inversa y verificar el resultado.

Solución PASO 1: Intercambiamos las variables x y y en

$$y = \frac{2x + 1}{x - 1}$$

para obtener

$$x = \frac{2y+1}{y-1}$$

PASO: Despejamos y:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y+1}{y-1} \\ x(y-1) &= 2y+1 \\ xy - x &= 2y+1 \\ xy - 2y &= x+1 \\ (x-2)y &= x+1 \\ y &= \frac{x+1}{x-2} \end{aligned}$$

La inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

PASO 3: *Verificación*:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{\dfrac{2x+1}{x-1}+1}{\dfrac{2x+1}{x-1}-2} = \frac{2x+1+x-1}{2x+1-2(x-1)} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{2\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+1}{\dfrac{x+1}{x-2}-1} = \frac{2(x+1)+x-2}{x+1-(x-2)} = \frac{3x}{3} = x$$

Verificación: Hemos visto que si $f(x) = (2x+1)/(x-1)$, entonces $f^{-1}(x) = (x+1)/(x-2)$. Haga la gráfica de $y = f(f^{-1}(x))$ en una pantalla cuadrada. ¿Qué es lo que ve? ¿Le sorprende?

Ahora resuelva el problema 25.

Si una función no es uno a uno entonces no tendrá inversa. Sin embargo, en algunos casos, una restricción adecuada en el dominio de dicha función producirá una nueva función, que será uno a uno. Veamos un ejemplo de esta práctica común.

EJEMPLO 6 *Determinación de la función inversa*

Determine la inversa de $y = f(x) = x^2$ si $x \geq 0$.

Solución La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno. [Consulte el ejemplo 1(a).] Sin embargo, si restringimos f sólo a la parte de su dominio donde $x \geq 0$, como se indica, tendremos una nueva función que es creciente y, por lo tanto, uno a uno. Como resultado, la función definida por $y = x^2$, $x \geq 0$, tiene una inversa, f^{-1}.

Seguiremos los pasos dados anteriormente para determinar f^{-1}:

PASO 1: En la ecuación $y = x^2$, $x \geq 0$, intercambiamos las variables x y y. El resultado es

$$x = y^2 \qquad y \geq 0$$

Esta ecuación define (de forma implícita) a la función inversa.

PASO 2: Despejamos y para obtener la forma explícita de la inversa. Como $y \geq 0$, sólo se obtiene una solución:

$$y = \sqrt{x}$$

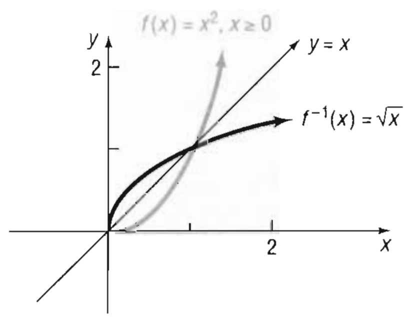
de modo que $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

PASO 3: *Verificación:* $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$, ya que $x \geq 0$

$$f(f^{-1})(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

La figura 49 ilustra las gráficas de $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, y $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. ■

FIGURA 49



Calculadoras

Observamos antes que muchas calculadoras tienen teclas que permiten determinar el valor de una función. Por lo general, estas mismas calculadoras tienen una tecla marcada con $\boxed{\text{inv}}$, $\boxed{\text{inverse}}$, $\boxed{\text{2nd}}$, o $\boxed{\text{shift}}$ que le permite calcular el valor de la función inversa correspondiente. (Si la inversa real aparece como una tecla de función, como en los casos $\boxed{\sqrt{x}}$ y $\boxed{x^2}$, tlo usual es que la tecla inversa esté desactivada de tales funciones.)

Intente los siguientes experimentos en su calculadora:

Teclas:	1.234		$\sqrt{x}$		x^2		
Pantalla:		1.234		1.1108555		1.234	
Teclas:	1.234		ln		inv	ln	
Pantalla:		1.234		0.2102609			1.234

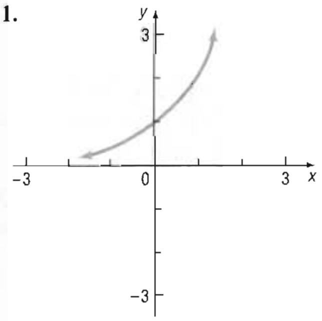
Resumen

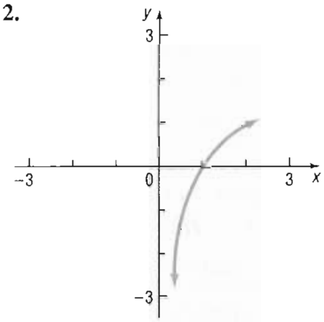
1. Si una función f es uno a uno, entonces tiene una inversa f^{-1}.
2. Dominio f = Rango f^{-1}; Rango f = Dominio f^{-1}.
3. Para verificar que f^{-1} es la inversa de f, demuestre que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$.
4. Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la recta $y = x$.

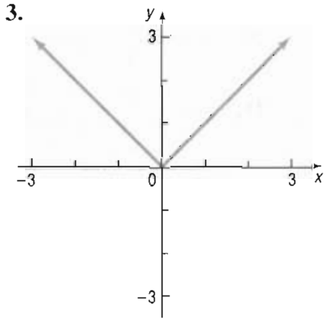
2.5

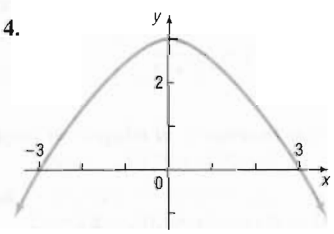
Ejercicio 2.5

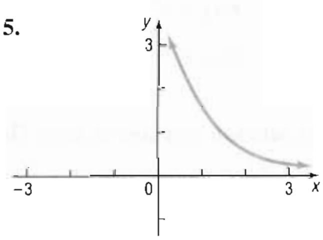
En los problemas del 1 al 6 aparece la gráfica de una función. Utilice el criterio de la recta horizontal para determinar si f es uno a uno.

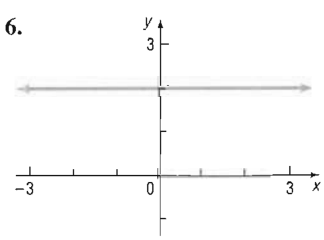
1.


2.


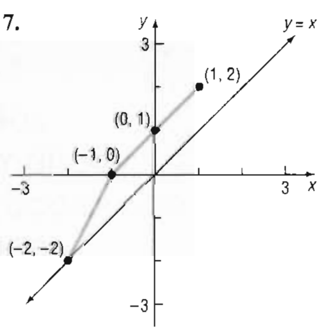
3.


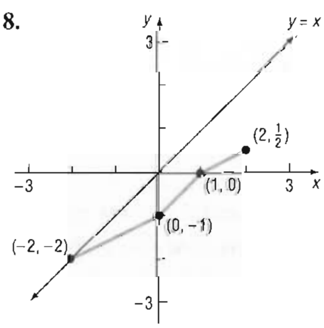
4.


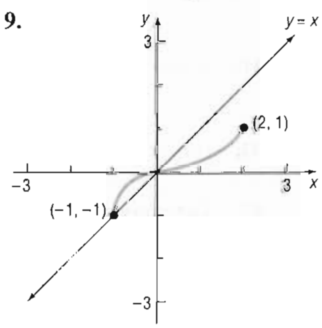
5.


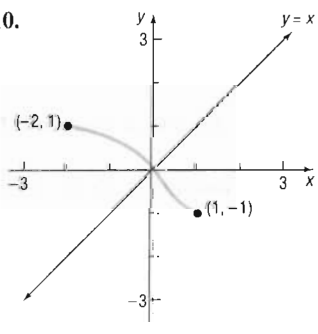
6.


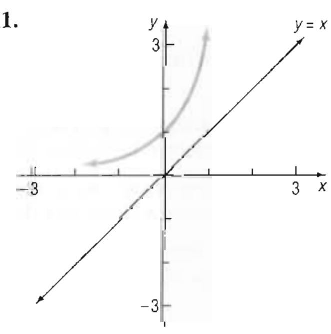
En los problemas del 7 al 12 aparece la gráfica de una función f uno a uno. Determine la gráfica de la función inversa f^{-1}. Por conveniencia (y como sugerencia), también aparece la gráfica de $y = x$.

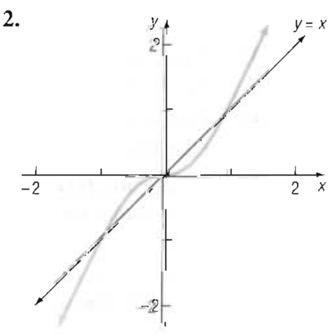
7.


8.


9.


10.


11.


12.


En los problemas del 13 al 22, verifique si las funciones f y g son inversas una de la otra, demostrando que $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$.

13. $f(x) = 3x + 4$; $g(x) = \frac{1}{3}(x - 4)$

14. $f(x) = 3 - 2x$; $g(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)$

15. $f(x) = 4x - 8$; $g(x) = \dfrac{x}{4} + 2$

16. $f(x) = 2x + 6$; $g(x) = \frac{1}{2}x - 3$

17. $f(x) = x^3 - 8$; $g(x) = \sqrt[3]{x + 8}$

18. $f(x) = (x - 2)^2$, $x \geq 2$; $g(x) = \sqrt{x} + 2$, $x \geq 0$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

20. $f(x) = x$; $g(x) = x$

21. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 4}$; $g(x) = \dfrac{4x - 3}{2 - x}$

22. $f(x) = \dfrac{x - 5}{2x + 3}$; $g(x) = \dfrac{3x + 5}{1 - 2x}$

En los problemas del 23 al 34 la función f es uno a uno. Determine su inversa y verifique su respuesta. Indique el dominio y el rango de f y f^{-1}. Haga la gráfica de f y f^{-1} en los mismos ejes coordenados.

23. $f(x) = 3x$

24. $f(x) = -4x$

25. $f(x) = 4x + 2$

26. $f(x) = 1 - 3x$

27. $f(x) = x^3 - 1$

28. $f(x) = x^3 + 1$

29. $f(x) = x^2 + 4$, $x \geq 0$

30. $f(x) = x^2 + 9$, $x \geq 0$

31. $f(x) = \dfrac{4}{x}$

32. $f(x) = -\dfrac{3}{x}$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

34. $f(x) = \dfrac{4}{x + 2}$

En los problemas del 35 al 46 la función f es uno a uno. Determine su inversa y verifique su respuesta. Indique el dominio y el rango de f y f^{-1}.

35. $f(x) = \dfrac{2}{3 + x}$

36. $f(x) = \dfrac{4}{2 - x}$

37. $f(x) = (x + 2)^2$, $x \geq -2$

38. $f(x) = (x - 1)^2$, $x \geq 1$

39. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

40. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x}$

41. $f(x) = \dfrac{3x + 4}{2x - 3}$

42. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$

43. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x + 2}$

44. $f(x) = \dfrac{-3x - 4}{x - 2}$

45. $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$

46. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$

47. Determine la inversa de la función lineal $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$.

48. Determine la inversa de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq r$.

49. ¿Puede una función par ser uno a uno? Explique su respuesta.

50. ¿Toda función impar es uno a uno? Explique su respuesta.

51. Una función f tiene una inversa. Si la gráfica de f se encuentra en el cuadrante I, ¿en qué cuadrante estará la gráfica de f^{-1}?

52. Una función f tiene una inversa. Si la gráfica de f se encuentra en el cuadrante II, ¿en qué cuadrante estará la gráfica de f^{-1}?

53. La función $f(x) = |x|$ no es uno a uno. Determine una restricción adecuada del dominio de f para que la nueva función resulte ser uno a uno. Después, encuentre la inversa de f.

54. La función $f(x) = x^4$ no es uno a uno. Determine una restricción adecuada del dominio de f para que la nueva función resulte ser uno a uno. Después, encuentre la inversa de f.

55. *Conversión de temperatura.* Para convertir de x grados Celsius a y grados Fahrenheit utilizamos la fórmula $y = f(x) = \frac{9}{5}x + 32$. Para convertir de x grados Fahrenheit a y grados Celsius usamos $y = g(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$. Muestre que f y g son funciones inversas.

56. *Demanda de maíz.* La demanda de maíz cumple la ecuación $p(x) = 300 - 50x$, donde p es el precio por *bushel* (en dólares) y x es el número de *bushels* producidos, en millones. Exprese la producción x como una función del precio p.

57. *Periodo de un péndulo.* El periodo T (en segundos) de un péndulo simple es una función de su longitud l (en pies), dada por $T(l) = 2\pi\sqrt{l/g}$, donde $g \approx 32.2$ pies por segundo (por segundo es la aceleración de la gravedad). Exprese la longitud l como una función del periodo T.

58. Dé un ejemplo de una función cuyo dominio sea el conjunto de los números reales y que no sea creciente ni decreciente en su dominio, pero que sea uno a uno. [*Sugerencia:* Utilice una función definida por partes.]

59. Dada

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

determine $f^{-1}(x)$. Si $c \neq 0$, ¿bajo qué condiciones en a, b, c y d se cumple $f = f^{-1}$?

60. Hemos dicho que no es sencillo determinar el rango de una función f. Sin embargo, si f es uno a uno, podemos encontrar su rango determinando el dominio de la función inversa f^{-1}. Utilice esta técnica para hallar el rango de cada una de las siguientes funciones uno a uno:

(a) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x - 3}$ (b) $g(x) = 4 - \dfrac{2}{x}$ (c) $F(x) = \dfrac{3}{4 - x}$

Para los problemas del 61 al 66, escriba un programa que haga la gráfica de la inversa de una función $y = f(x)$. Después, haga la gráfica de la función f y su inversa en la misma pantalla. Compare sus respuestas con las de los problemas del 23 al 28.

61. $f(x) = 3x$ 62. $f(x) = -x$ 63. $f(x) = 4x + 2$

64. $f(x) = 1 - 3x$ 65. $f(x) = x^3 - 1$ 66. $f(x) = x^3 + 1$

67. Si se corta la gráfica de una función y su inversa, ¿debe ocurrir esto en $y = x$? ¿Pueden cortarse en cualquier otro punto? ¿Deben cortarse?

68. ¿Pueden ser iguales una función uno a uno y su inversa? ¿Qué debe cumplir la gráfica de f para que esto suceda? Dé algunos ejemplos para sustentar su conclusión.

69. Haga la gráfica de una función uno a uno que contenga los puntos $(-2, -3)$, $(0, 0)$, y $(1, 5)$. Luego trace la gráfica de su inversa. Compare su gráfica con las de algunos de sus condiscípulos y analice cualquier similitud. ¿Qué diferencias observa?

2.6 Modelos matemáticos: construcción de funciones

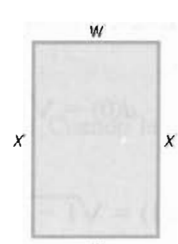
Con frecuencia, los problemas del mundo real conducen a modelos matemáticos que utilizan funciones, las cuales hay que construir con base en la información de que se disponga. Para construir funciones debemos poder traducir la descripción verbal de un problema al lenguaje de las matemáticas. Esto lo hacemos asignando símbolos para representar a las variables independientes y dependientes y determinando después la función o regla que relaciona a dichas variables.

EJEMPLO 1 *Área de un rectángulo con perímetro fijo*

El perímetro de un rectángulo es de 50 pies. Exprese su área A como una función de la longitud x de un lado.

Solución Consulte la figura 50. Si la longitud del rectángulo es x y w su anchura, entonces la suma de las longitudes de los lados es el perímetro, 50.

FIGURA 50



$$\begin{aligned} x + w + x + w &= 50 \\ 2x + 2w &= 50 \\ x + w &= 25 \\ w &= 25 - x \end{aligned}$$

El área A la constituyen la longitud por la anchura, de modo que

$$A = xw = x(25 - x)$$

El área A como una función de x es

$$A(x) = x(25 - x)$$

Observe que utilizamos el símbolo A como la variable dependiente y también como el nombre de la función que relaciona la longitud x con el área A. Como habíamos dicho, este doble uso es común en las aplicaciones y no debe causarle dificultades.

EJEMPLO 2 *Economía: Ecuaciones de demanda*

En economía, el ingreso R está definido como la cantidad de dinero obtenida de la venta de un producto, y es igual al precio de venta unitario p del producto por el número x de artículos vendidos. Es decir,

$$R = xp$$

Por lo general, existe una relación entre p y x: si uno crece el otro disminuye. Supongamos que p y x están relacionados por la siguiente **ecuación de demanda:**

$$p = -\tfrac{1}{10}x + 20 \qquad 0 \le x \le 200$$

Exprese el ingreso R como función del número x de artículos vendidos.

Solución Como $R = xp$ y $p = -\frac{1}{10}x + 20$, esto implica que

$$R(x) = xp = x\left(-\tfrac{1}{10}x + 20\right) = -\tfrac{1}{10}x^2 + 20x$$

Ahora resuelva el problema 3.

EJEMPLO 3 *Determinación de la distancia desde el origen hasta un punto en la gráfica*

Sea $P = (x, y)$ un punto en la gráfica de $y = x^2 - 1$.

(a) Exprese la distancia d de P al origen O como función de x.

(b) ¿Cuál es el valor de d si $x = 0$? (c) ¿Cuál es el valor de d si $x = 1$?

(d) ¿Cuál es el valor de d si $x = \sqrt{2}/2$?

Solución (a) La figura 51 ilustra la gráfica. La distancia d de P a O es

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como P es un punto en la gráfica de $y = x^2 - 1$, tenemos

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (x^2 - 1)^2} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Así, hemos expresado la distancia d como una función de x.

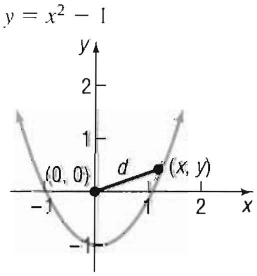
(b) Si $x = 0$, la distancia d es

$$d(0) = \sqrt{1} = 1$$

(c) Si $x = 1$, la distancia d es

$$d(1) = \sqrt{1 - 1 + 1} = 1$$

FIGURA 51
$y = x^2 - 1$



(d) Si $x = \sqrt{2}/2$, la distancia d es

$$d\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■ Ahora resuelva el problema 13.

EJEMPLO 4 *Llenado de una alberca*

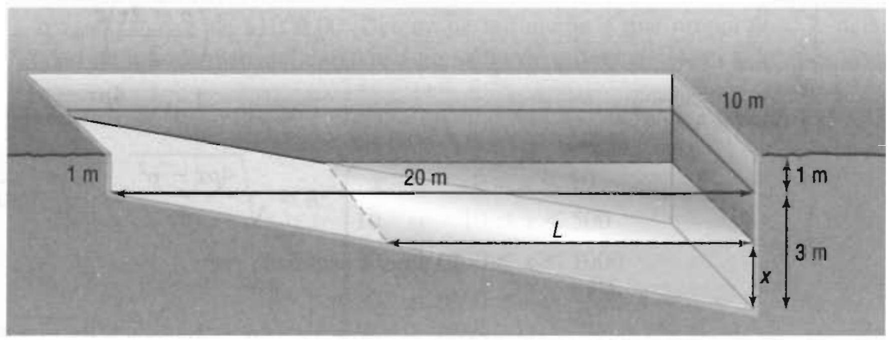
Una alberca rectangular de 20 metros de largo por 10 de ancho, tiene 4 metros de profundidad en un extremo y 1 metro en el otro. La figura 52 ilustra una vista transversal de la alberca. El agua para llenar la alberca es bombeada por el extremo profundo.

(a) Determinar una función que exprese el volumen V de agua en la alberca como función de su profundidad x en el extremo profundo.

(b) Calcular el volumen del agua cuando su profundidad es de 1 metro.

(c) Determinar ese volumen cuando la profundidad es de 2 metros.

FIGURA 52



Solución (a) Sea L la distancia (en metros) medida al nivel del agua desde el extremo profundo hasta el menos profundo. Observe que L y x forman los lados de un triángulo semejante al triángulo cuyos lados son 20 por 3 metros. De ese modo, L y x están relacionados mediante la ecuación

$$\frac{L}{x} = \frac{20}{3} \quad \text{o} \quad L = \frac{20x}{3} \qquad 0 \le x \le 3$$

El volumen V de agua en la alberca en cualquier instante es

$$V = \left(\text{Área de la selección transversal}\right)(\text{Ancho}) = \left(\tfrac{1}{2}Lx\right)(10) \text{ metros cúbicos}$$

Como $L = 20x/3$, tenemos

$$V(x) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{20x}{3} \cdot x\right)(10) = \frac{100}{3}x^2 \text{ metros cúbicos}$$

(b) Cuando la profundidad x del agua es de 1 metro, el volumen $V = V(x)$ es

$$V(1) = \frac{100}{3} \cdot 1^2 = 33.3 \text{ metros cúbicos}$$

(c) Cuando la profundidad x del agua es de 2 metros, el volumen $V = V(x)$ es

$$V(2) = \frac{100}{3} \cdot 2^2 = \frac{400}{3} = 133.3 \text{ metros cúbicos}$$

■

EJEMPLO 5 *Área de un triángulo isósceles*

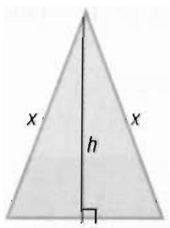
Considere un triángulo isósceles de perímetro fijo p.

(a) Si x es igual a la longitud de uno de los dos lados iguales, exprese el área A como una función de x.

(b) ¿Cuál es el dominio de A?

Solución (a) Observe la figura 53. Como los lados iguales miden x, el tercer lado debe medir $p - 2x$. (¿Advierte por qué?) Sabemos que el área A es

FIGURA 53



$$A = \tfrac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

Para determinar la altura h trazamos la recta perpendicular a la base cuya longitud es $p - 2x$, y utilizamos el hecho de que la perpendicular biseca a la base. Por el Teorema de Pitágoras, tenemos

$$\begin{aligned} h^2 &= x^2 - \left(\frac{p - 2x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4px + 4x^2) \\ &= px - \frac{1}{4}p^2 = \frac{4px - p^2}{4} \\ h &= \sqrt{\frac{4px - p^2}{4}} = \frac{\sqrt{p}}{2}\sqrt{4x - p} \end{aligned}$$

El área A está dada por

$$A = \frac{1}{2} \cdot (p - 2x)\frac{\sqrt{p}}{2}\sqrt{4x - p} = \frac{\sqrt{p}}{4}(p - 2x)\sqrt{4x - p}$$

(b) El dominio de A se determina como sigue. Debido a la expresión $\sqrt{4x - p}$, necesitamos que

$$\begin{aligned} 4x - p &> 0 \\ x &> \frac{p}{4} \end{aligned}$$

Como $p - 2x$ es un lado del triángulo, también necesitamos

$$\begin{aligned} p - 2x &> 0 \\ -2x &> -p \\ x &< \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Así, el dominio de A es $p/4 < x < p/2$, o $(p/4, p/2)$, y la función es

$$A(x) = \frac{\sqrt{p}}{4}(p - 2x)\sqrt{4x - p} \qquad \frac{p}{4} < x < \frac{p}{2}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 6 *Pagos mínimos e intereses para tarjetas de crédito*

(a) Los propietarios de tarjetas de crédito emitidas por bancos, tiendas de departamentos, compañías petroleras, etc., reciben un estado de cuenta mensual donde se les indica la cantidad mínima que deben pagar antes de cierta fecha. La cantidad mínima a pagar depende de la cantidad total en deuda. Una compañía emisora de tarjetas de crédito utiliza las siguientes reglas: para una cantidad menor de \$10.00, hay que pagar el total. Para una deuda mínima de \$10.00 pero menor que \$500.00, el pago mínimo son \$10.00. Hay un pago mínimo de \$30.00 para una deuda mínima de \$500.00 pero menor de \$1000.00, un pago mínimo de \$50.00 en una deuda de al menos \$1000.00 pero menor de \$1500.00 y un pago mínimo de \$70.00 en deudas mayores o iguales a \$1500.00. Determine la función f que describe el pago mínimo para una deuda de x dólares. Haga la gráfica de f.

(b) El propietario de la tarjeta paga cualquier cantidad entre el mínimo y la cantidad total que debe, y la empresa emisora le carga un interés del 1.5% al mes por los primeros \$1000.00 de deuda y un 1% al mes sobre cualquier saldo no pagado mayor de \$1000.00. Determine la función g que proporcione la cantidad de interés mensual cargada a un saldo de x dólares. Haga la gráfica de g.

Solución (a) La función f que describe el pago mínimo de una deuda de x dólares es

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 10 \\ 10 & \text{si } 10 \le x < 500 \\ 30 & \text{si } 500 \le x < 1000 \\ 50 & \text{si } 1000 \le x < 1500 \\ 70 & \text{si } 1500 \le x \end{cases}$$

Para hacer la gráfica de esta función procedemos como sigue: para $0 \le x < 10$ trazamos $y = x$; para $10 \le x < 500$, trazamos la función constante $y = 10$; para $500 \le x < 1000$, trazamos la función constante $y = 30$ y así sucesivamente. La figura 54 muestra la gráfica de f.

FIGURA 54

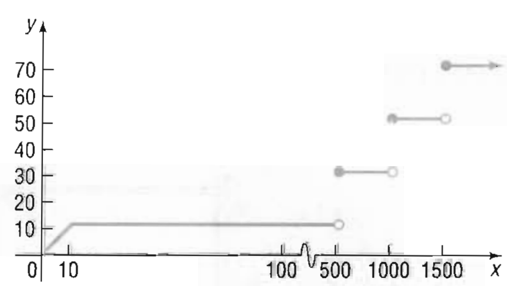
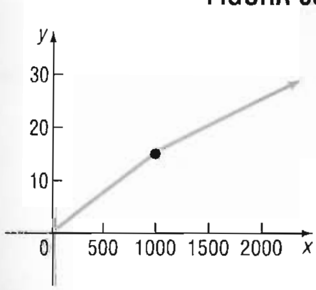


FIGURA 55



(b) Si $g(x)$ es la cantidad de interés mensual cargado a un saldo de x, entonces $g(x) = 0.015x$ para $0 \le x \le 1000$. El saldo no pagado sobre \$1000 es $x - 1000$. Si la deuda es $x > 1000$, el interés será $0.015(1000) + 0.01(x - 1000) = 15 + 0.01x - 10 = 5 + 0.01x$, de modo que

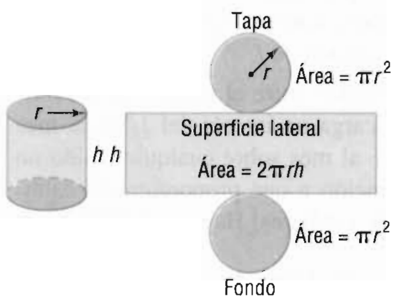
$$g(x) = \begin{cases} 0.015x & \text{si } 0 \le x \le 1000 \\ 5 + 0.01x & \text{si } x > 1000 \end{cases}$$

Véase la figura 55. ■

EJEMPLO 7 *Determinación del costo de una lata*

Una compañía fabricante de latas de aluminio requiere producir una lata cilíndrica con capacidad de 500 centímetros cúbicos $\left(\frac{1}{2}\text{ litro}\right)$. La tapa y el fondo de la lata serán fabricados con una aleación especial de aluminio que cuesta \$0.05 por centímetro cuadrado. Los lados de la lata serán de un material que cuesta \$0.02 por centímetro cuadrado. Exprese el costo del material necesario para hacer la lata como una función de su radio r.

FIGURA 56



Solución La figura 56 ilustra la situación. Observe que el material necesario para producir una lata cilíndrica, de altura h y radio r, consta de un rectángulo de área $2\pi rh$ y dos círculos, cada uno de área πr^2. El costo total C (en centavos) por la fabricación de la lata es

$$\begin{aligned} C &= \text{Costo de la tapa y el fondo} + \text{Costo de la superficie lateral} \\ &= \underbrace{2(\pi r^2)}_{\substack{\text{Área total}\\ \text{de la tapa}\\ \text{y del fondo}}} \quad \underbrace{(5)}_{\substack{\text{Área costo}\\ \text{unitario}}} \quad + \underbrace{(2\pi rh)}_{\substack{\text{Área}\\ \text{total del}\\ \text{lado}}} \quad \underbrace{(2)}_{\substack{\text{Área costo}\\ \text{unitario}}} \\ &= 10\pi r^2 + 4\pi rh \end{aligned}$$

Pero tenemos una restricción adicional: la altura h y el radio r deben ser elegidos de modo que el volumen V de la lata sea de 500 centímetros cúbicos. Como $V = \pi r^2 h,$ tenemos que

$$500 = \pi r^2 h \quad \text{o} \quad h = \frac{500}{\pi r^2}$$

Así, el costo C, en centavos, como función del radio r es

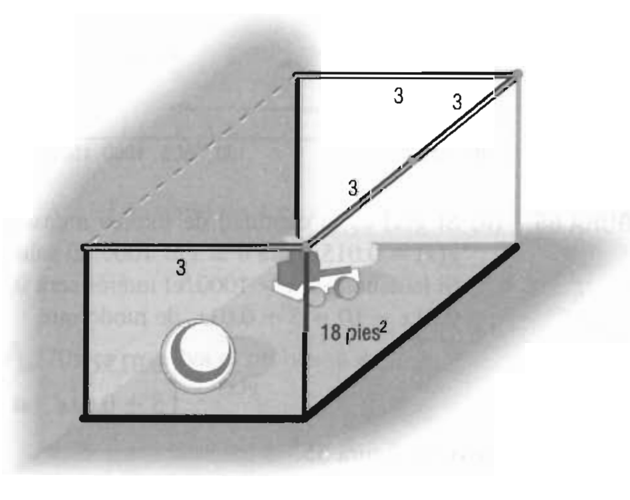
$$C(r) = 10\pi r^2 + 4\pi r\left(\frac{500}{\pi r^2}\right) = 10\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

■

EJEMPLO 8 *Fabricación de un corral para bebé*

Un fabricante de corrales para bebé crea un modelo cuadrado que se puede abrir en una esquina y quedar unido a la pared de una casa, formando ángulos rectos. Si cada lado mide 3 pies, la configuración abierta duplica el área disponible para que el bebé pueda jugar, de 9 a 18 pies cuadrados. *Véase* la figura 57.

FIGURA 57



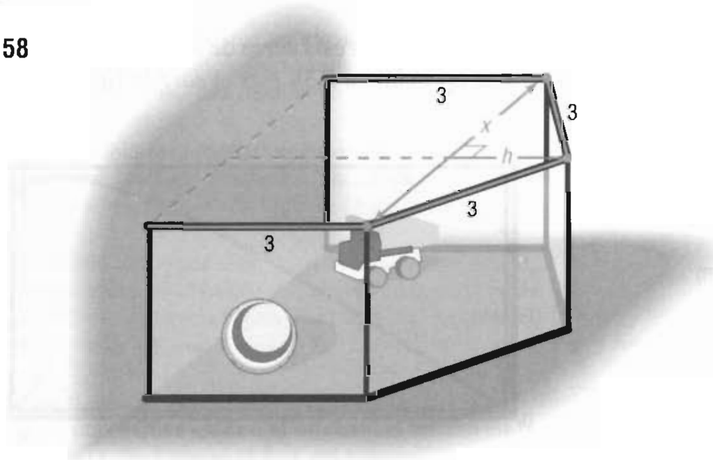
Ahora, suponga que se colocan bisagras en las esquinas exteriores para permitir una configuración como la de la figura 58.

(a) Expresar el área A de esta configuración como una función de la distancia x entre los dos lados paralelos.

(b) Determinar el dominio de A. (c) Determinar A si $x = 5$.

(d) Hacer la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es máxima el área?*

FIGURA 58



Solución (a) Consulte la figura 58. El área que buscamos está constituida por el área de un rectángulo (con anchura 3 y longitud x) y el área de un triángulo isósceles (con base x y dos lados iguales de longitud 3). Determinamos la altura h del triángulo mediante el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9 - \frac{x^2}{4} = \frac{36 - x^2}{4}$$

$$h = \tfrac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}$$

El área encerrada por el corral es

$$A = \text{área del rectángulo} + \text{área del triángulo} = 3x + \tfrac{1}{2}x\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{36 - x^2}\right)$$

$$A(x) = 3x + \frac{x\sqrt{36 - x^2}}{4}$$

Así, hemos expresado el área A como una función de x.

(b) Para determinar el dominio de A, primero observamos que $x > 0$, puesto que se trata de una longitud. Además, la expresión bajo el signo de radical debe ser positiva, de modo que

$$36 - x^2 > 0$$
$$x^2 < 36$$
$$-6 < x < 6$$

*Adaptado del *Proceedings, Summer Conference for College Teachers on Applied Mathematics* (University of Missouri, Rolla), 1971.

Al combinar estas restricciones, tenemos que el dominio de A es $0 < x < 6$, o $(0, 6)$.

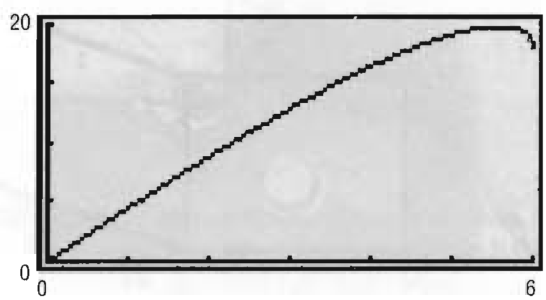
(c) Si $x = 5$, el área es

$$A(5) = 3(5) + \frac{5}{4}\sqrt{36 - (5)^2} \approx 19.15 \text{ pies cuadrados}$$

Por lo tanto, si la anchura del corral es de 5 pies, su área es de 19.15 pies cuadrados.

(d) El área máxima está cerca de los 19.81 pies cuadrados, lo cual se obtiene cuando x se aproxima a 5.58 pies. *Véase* la figura 59. ■

FIGURA 59



Ejercicio 2.6

1. *Volumen de un cilindro.* El volumen V de un cilindro circular recto de altura h y radio r es $V = \pi r^2 h$. Si la altura mide el doble del radio, exprese el volumen V como una función de r.
2. *Volumen de un Cono.* El volumen V de un cono circular recto es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Si la altura mide el doble del radio, exprese el volumen V como una función de r.
3. *Ecuación de demanda.* El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto cumplen la ecuación de demanda

$$p = -\tfrac{1}{6}x + 100 \qquad 0 \le x \le 600$$

Exprese el ingreso R como una función de x. (Recuerde, $R = xp$.)

4. *Ecuación de demanda.* El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto cumplen la ecuación de demanda

$$p = -\tfrac{1}{3}x + 100 \qquad 0 \le x \le 300$$

Exprese el ingreso R como una función de x.

5. *Ecuación de demanda.* El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto cumplen la ecuación de demanda

$$x = -5p + 100 \qquad 0 \le p \le 20$$

Exprese el ingreso R como una función de x.

6. *Ecuación de demanda.* El precio p y la cantidad vendida x de cierto producto cumplen la ecuación de demanda

$$x = -20p + 500 \qquad 0 \le p \le 25$$

Exprese el ingreso R como una función de x.

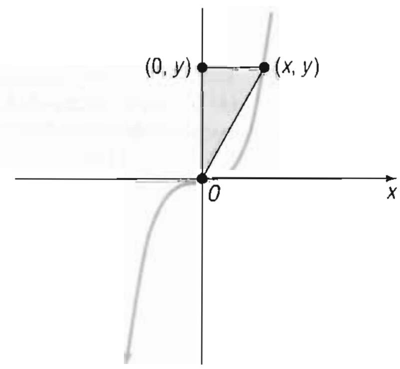
7. *Cercar un campo rectangular.* Un agricultor dispone de 400 yardas de cerca y desea rodear un área rectangular con ella.
   (a) Exprese el área A del rectángulo como una función de su anchura x.
   (b) ¿Cuál es el dominio de A?
   (c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuáles valores de x es mayor el área?

8. *Cercar un campo rectangular adyacente a un río.* Un agricultor dispone de 3000 pies de cerca para rodear un campo rectangular. Un lado del campo está a lo largo de un río, de modo que sólo hay que cercar tres lados.
   (a) Exprese el área A del rectángulo como una función de x, donde x es la longitud del lado paralelo al río.
   (b) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuáles valores de x es mayor el área?

9. Un cable de longitud x se dobla para formar un círculo.
   (a) Exprese la circunferencia del círculo como una función de x.
   (b) Exprese el área del círculo como una función de x.

10. Un cable de longitud x se dobla para formar un cuadrado.
   (a) Exprese el perímetro del cuadrado como una función de x.
   (b) Exprese el área del cuadrado como una función de x.

11. Un triángulo rectángulo tiene un vértice sobre la gráfica de $y = x^3$, $x > 0$, en el punto (x,y); otro vértice está en el origen y el tercero en la parte positiva del eje y, en $(0,y)$, como muestra la figura de la derecha. Exprese el área del triángulo como una función de x.



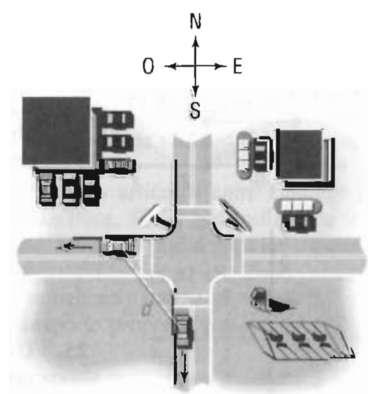
12. Un triángulo rectángulo tiene un vértice sobre la gráfica de $y = 9 - x^2$, $x > 0$, en el punto (x,y); otro vértice está en el origen y el tercero en la parte positiva del eje x, en $(x, 0)$. Exprese el área del triángulo como una función de x.

13. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la gráfica de $y = x^2 - 8$.
   (a) Exprese la distancia d que hay desde P al origen como una función de x.
   (b) ¿Cuánto vale d si $x = 0$? (c) ¿Cuánto vale d si $x = 1$?

14. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la gráfica de $y = x^2 - 8$.
   (a) Exprese la distancia d que hay desde P al punto $(0, -1)$ como una función de x.
   (b) ¿Cuánto vale d si $x = 0$? (c) ¿Cuánto vale d si $x = -1$?

15. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Exprese la distancia d que hay desde P al punto $(1, 0)$ como una función de x.

16. Sea $P = (x, y)$ un punto sobre la gráfica de $y = 1/x$. Exprese la distancia d que hay desde P al origen como una función de x.



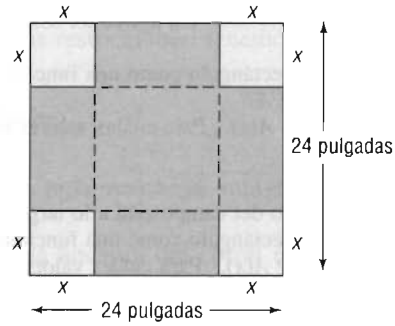
17. Dos autos parten de un crucero al mismo tiempo. Uno se dirige hacia el sur, con una velocidad constante de 30 millas por hora; el otro se dirige hacia al oeste con una velocidad constante de 40 millas por hora (*véase* la figura). Exprese la distancia d entre los autos como una función del tiempo t. [*Nota*: Los autos inician su marcha en $t = 0$.]

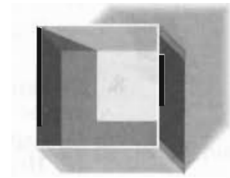
18. Dos autos se aproximan a un crucero. Uno está a 2 millas al sur del crucero y se mueve a una velocidad constante de 30 millas por hora. En el mismo instante, el otro auto está a 3 millas al este del crucero y se mueve a una velocidad constante de 40 millas por hora.
   (a) Exprese la distancia d entre los autos como una función del tiempo t. [*Nota*: En $t = 0$, los autos están 2 millas al sur y 3 millas al este del crucero, respectivamente.]
   (b) Haga la gráfica de $d = d(t)$. ¿Para cuál valor de t es mínima d?

19. *Construcción de una caja abierta.* Hay que fabricar una caja abierta de base cuadrada utilizando una pieza cuadrada de cartulina de 24 pulgadas por lado, cortando un cuadrado de cada una de las esquinas y doblando los lados (*véase* la figura).

(a) Exprese el volumen V de la caja como una función de la longitud x del lado del cuadrado recortado en cada esquina.

(b) Haga la gráfica de $V = V(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo V?





20. *Construcción de una caja abierta.* Una caja abierta, con base cuadrada, debe tener un volumen de 10 pies cúbicos.

(a) Exprese la cantidad A de material necesario para hacer dicha caja como una función de la longitud x de un lado de la base cuadrada.

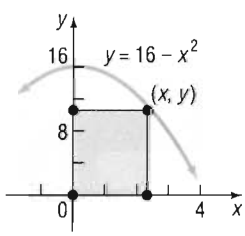
(b) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es mínimo A?

21. *Construcción de una caja cerrada.* Una caja cerrada, con base cuadrada, debe tener un volumen de 10 pies cúbicos.

(a) Exprese la cantidad A de material necesario para hacer dicha caja como una función de la longitud x de un lado de la base cuadrada.

(b) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es mínimo A?

22. *Esferas.* El volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; el área S de la superficie de la esfera es $S = 4\pi r^2$. Exprese el volumen V como una función del área S de la superficie. Si se duplica el área, ¿en qué forma cambia el volumen?

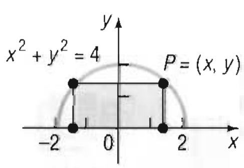


23. Un rectángulo tiene una esquina en la gráfica de $y = 16 - x^2$, otra en el origen, otra en la parte positiva del eje y y la cuarta en la parte positiva del eje x (*véase* la figura).

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de x.

(b) ¿Cuál es el dominio de A?

(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo A?



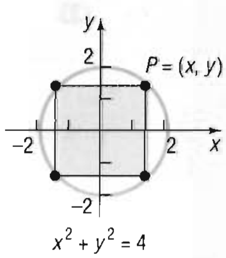
24. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 2 (*véase* la figura). Sea $P = (x, y)$ el punto del primer cuadrante que es vértice del rectángulo y está sobre el círculo.

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de x.

(b) Exprese el perímetro p del rectángulo como una función de x.

(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo A?

(d) Haga la gráfica de $p = p(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo p?



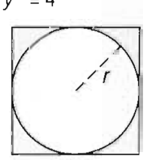
25. Un rectángulo está inscrito en un círculo de radio 2 (*véase* la figura). Sea $P = (x, y)$ el punto del primer cuadrante que es vértice del rectángulo y está sobre el círculo.

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función de x.

(b) Exprese el perímetro p del rectángulo como una función de x.

(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo A?

(d) Haga la gráfica de $p = p(x)$. ¿Para cuál valor de x es máximo p?



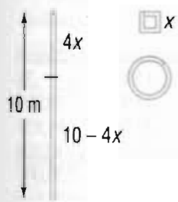
26. Un círculo de radio r está inscrito en un cuadrado (*véase* la figura).

(a) Exprese el área A del cuadrado como una función del radio r del círculo.

(b) Exprese el perímetro p del cuadrado como una función de x.

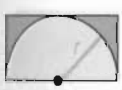
27. *Costo de una lata.* Una lata en forma de cilindro circular recto debe tener un volumen de 500 centímetros cúbicos. La tapa y el fondo utilizan un material que cuesta 6 centavos por centímetro cuadrado, mientras que la superficie lateral utiliza un material que cuesta 4 centavos el centímetro cuadrado.
(a) Exprese el costo total C del material como una función del radio r del cilindro. (Consulte la figura 56.)
(b) Haga la gráfica de $C = C(r)$. ¿Para cuál valor de r es mínimo el costo C?

28. *Material necesario para hacer un tambor.* Un tambor cilíndrico de acero debe tener un volumen de 100 pies cúbicos.
(a) Exprese la cantidad A de material necesario para fabricar el tambor como una función de su radio r.
(b) ¿Cuánto material se necesita si el tambor debe medir 3 pies de radio?
(c) ¿Si debe tener 4 pies de radio?
(d) ¿Y de 5 pies de radio?
(e) Haga la gráfica de $A = A(r)$. ¿Para cuál valor de r es mínimo A?

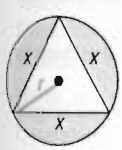


29. Un cable de 10 metros de longitud se cortará en dos partes. Una parte servirá para formar un cuadrado y la otra para formar una círculo (*véase* la figura).
(a) Exprese el área total A encerrada por el cable como una función de la longitud x de un lado del cuadrado.
(b) ¿Cuál es el dominio de A?
(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es mínimo A?

30. Un cable de 10 metros de longitud se cortará en dos partes. Una parte servirá para formar un triángulo equilátero y la otra para formar un círculo.
(a) Exprese el área total A encerrada por el cable como una función de la longitud x de un lado del triángulo equilátero.
(b) ¿Cuál es el dominio de A?
(c) Haga la gráfica de $A = A(x)$. ¿Para cuál valor de x es mínimo A?



31. Un semicírculo de radio r está inscrito en un rectángulo de modo que el diámetro del semicírculo es el largo del rectángulo (*véase* la figura).
(a) Exprese el área A del rectángulo como una función del radio r del semicírculo.
(b) Exprese el perímetro p del rectángulo como una función de r.



32. Un triángulo equilátero está inscrito en un círculo de radio r. *Véase* la figura. Exprese la circunferencia C del círculo como una función de la longitud x de un lado del triángulo. [*Sugerencia*: Muestre primero que $r^2 = x^2/3$.]

33. Un triángulo equilátero está inscrito en un círculo de radio r. *Véase* la figura. Exprese el área A dentro del círculo pero fuera del triángulo, como una función de la longitud x de un lado del triángulo.

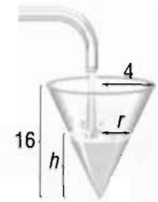
34. *Costo de transporte.* Una compañía de camiones transporta diversos artículos entre Chicago y Nueva York, que distan 960 millas. La compañía cobra, por cada libra, \$0.50 por milla para las primeras 100 millas, \$0.40 por milla para las siguientes 300 millas, \$0.25 por milla para las siguientes 400 millas, y no cobra por las restantes 160 millas.
(a) Haga la gráfica de la relación entre el costo del transporte y el millaje en toda la ruta de 960 millas.
(b) Determine el costo como una función del millaje para el transporte proporcionado entre 100 y 400 millas desde Chicago.
(c) Determine el costo como una función del millaje para el transporte proporcionado entre 400 y 800 millas desde Chicago.

35. *Costo de renta de autos.* Un auto económico rentado en forma semanal cuesta \$95.00 la semana*. Los días adicionales cuestan \$24.00 cada uno hasta que la tasa diaria excede la tasa semanal, en cuyo caso se aplica esta última. Determine el costo C de renta de un auto económico como una función definida por partes, dependiendo del número x de días utilizados, donde $7 \le x \le 14$. Haga la gráfica de esta función. [*Nota*: Toda fracción de un día cuenta como un día completo.]

36. Resuelva el problema anterior pero ahora para un auto de lujo que cuesta \$219.00 por semana, y los días adicionales cuestan \$45.00 cada uno.

**Fuente:* National Car Rental®, 1995.

37. Se vacía agua en un recipiente que tiene forma de cono circular recto con radio de 4 pies y altura de 16 pies (*véase* la figura). Exprese el volumen V del agua en el cono como una función de la altura h del agua. [*Nota*: El volumen V de un cono de radio r y altura h es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.]



38. *Impuesto federal sobre ingresos.* La siguiente tabla tiene dos tipos de tasa de impuesto para 1994. Si x es igual a la cantidad en la forma 1040, línea 37 y y es igual a la deuda por impuesto, construya una función f para cada tarifa.

TIPOS DE TASAS DE IMPUESTO PARA 1994

TIPO X: UTILICE ESTE TIPO SI ES SOLTERO				TIPO Y-1: UTILICE ESTE TIPO SI ES CASADO O VIUDO CALIFICADO			
Si la cantidad en la forma 1040, línea 37, es: Mayor que—	Pero menor que—	Escriba en la forma 1040, línea 38	de la cantidad sobre—	Si la cantidad en la forma 1040, línea 37, es: Mayor que—	Pero menor que—	Escriba en la forma 1040, línea 38	de la cantidad sobre—
$0	$22,750	- - - - 15%	$0	$0	$38,000	- - - - 15%	$0
22,750	55,100	$3,412.50 + 28%	22,750	38,000	91,850	$5,700.00 + 28%	38,000
55,100	115,000	12,470.50 + 31%	55,100	91,850	140,000	20,778.00 + 31%	91,850
115,000	250,000	31,039.50 + 36%	115,000	140,000	250,000	35,704.50 + 36%	140,000
250,000	- - - - -	79,639.50 + 39.6%	250,000	250,000	- - - - -	75,304.50 + 39.6%	250,000

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Función

Regla o correspondencia entre dos conjuntos de números reales de modo que a cada número x del primer conjunto, el dominio, le corresponde exactamente un número y en el segundo conjunto. El rango es el conjunto de valores y de la función para los valores x del dominio. x es la variable independiente y y la variable dependiente.

Una función f se puede definir de manera implícita mediante una ecuación que relacione x con y, o de manera explícita escribiendo $y = f(x)$.

Una función también se caracteriza como un conjunto de pares ordenados (x,y) o $(x,f(x))$, de modo que dos pares distintos no tengan el mismo primer elemento.

Notación de función

$y = f(x)$

f es un símbolo para la regla que define a la función.

x es el argumento, o variable independiente.

y es la variable dependiente.

$f(x)$ es el valor de la función en x, o la imagen de x

Domino

De no ser especificado, el dominio de una función f es el máximo conjunto de números reales para los que la regla define un número real.

Criterio de la recta vertical

Un conjunto de puntos en el plano es la gráfica de una función si, y sólo si, toda recta vertical corta a la gráfica en un punto, cuando mucho.

Función par f

$f(-x) = f(x)$ para toda x del dominio ($-x$ también debe estar en el dominio).

Función impar f

$f(-x) = -f(x)$ para toda x del dominio ($-x$ también debe estar en el dominio).

Función uno a uno f

Si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ para cualquier elección de x_1 y x_2 en el dominio.

Criterio de la recta horizontal

Si todas las rectas horizontales cortan la gráfica de una función f a lo más en un punto, entonces f es uno a uno.

Función inversa f^{-1} de f

Dominio de f = Rango de f^{-1}; rango de f = dominio de f^{-1}
$f^{-1}(f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$.
Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

FUNCIONES IMPORTANTES

Función lineal

$f(x) = mx + b$ La gráfica es una línea recta con pendiente m y ordenada al origen b.

Función constante

$f(x) = b$ La gráfica es una recta horizontal con ordenada al origen b (*véase* la figura 11).

Función identidad

$f(x) = x$ La gráfica es una línea recta con pendiente 1 y ordenada al origen 0 (*véase* la figura 12).

Función cuadrada

$f(x) = x^2$ La gráfica es una parábola cuya intersección con los ejes es (0,0) (*véase* la figura 13).

Función cúbica

$f(x) = x^3$ *Véase* la figura 14.

Función raíz cuadrada

$f(x) = \sqrt{x}$ *Véase* la figura 15.

Función recíproca

$f(x) = 1/x$ *Véase* la figura 16.

Función valor absoluto

$f(x) = |x|$ *Véase* la figura 17.

CÓMO HACER PARA

Determinar el dominio y el rango de una función a partir de su gráfica.

Hallar el dominio de una función dada su ecuación.

Determinar si una función es par o impar sin hacer la gráfica.

Hacer la gráfica de ciertas funciones mediante corrimientos, compresiones, alargamientos y/o reflexiones (*véase* la tabla 9).

Encontrar la composición de dos funciones.

Determinar la inversa de ciertas funciones uno a uno (*véase* el procedimiento de la página 154).

Hacer la gráfica de f^{-1} dada la gráfica de f.

Construir funciones en aplicaciones, incluyendo funciones definidas por partes.

LLENE LOS ESPACIOS EN BLANCO

1. Si f es una función definida mediante la ecuación $y = f(x)$, entonces x es la variable ________ y y la variable ________.
2. Un conjunto de puntos en el plano xy es la gráfica de una función si, y sólo si, ninguna recta ________ contiene más de un punto del conjunto.
3. Una función ________ f es aquella donde $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f; una función ________ f es aquella donde $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f.
4. La gráfica de una función f es conocida. Entonces, la gráfica de $y = f(x - 2)$ se puede obtener mediante un corrimiento ________ de la gráfica de f hacia la ________ una distancia de 2 unidades.
5. Si $f(x) = x + 1$ y $g(x) = x^3$, entonces ________ $= (x + 1)^3$.
6. Si toda recta horizontal corta a la gráfica de una función f en no más de un punto, entonces f es una función ________.
7. Si f^{-1} denota la inversa de una función f, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas con respecto a la recta ________.

CIERTO O FALSO

C F **1.** Las rectas verticales cortan a la gráfica de una función en no más de un punto.

C F **2.** La intersección del eje y con la gráfica de la función $y = f(x)$ cuyo dominio consta de todos los números reales es $f(0)$.

C F **3.** Las funciones pares tienen gráficas que son simétricas con respecto al origen.

C F **4.** La gráfica de $y = f(-x)$ es la reflexión con respecto al eje y de la gráfica de $y = f(x)$.

C F **5.** $f(g(x)) = f(x) \cdot g(x)$

C F **6.** Si f y g son funciones inversas, entonces el dominio de f es igual al dominio de g.

C F **7.** Si f y g son funciones inversas, entonces sus gráficas son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

EJERCICIOS DE REPASO

1. Dado que f es una función lineal, $f(4) = -5$, y $f(0) = 3$, escriba la ecuación que la define.

2. Dado que g es una función lineal con pendiente $= -4$ y $g(-2) = 2$, escriba la ecuación que la define.

3. La función f se define como

$$f(x) = \frac{Ax + 5}{6x - 2}$$

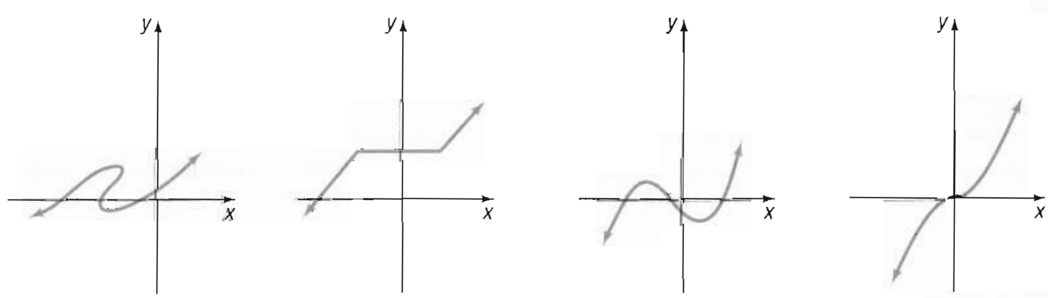
Si $f(1) = 4$, determine A.

4. La función g se define como

$$g(x) = \frac{A}{x} + \frac{8}{x^2}$$

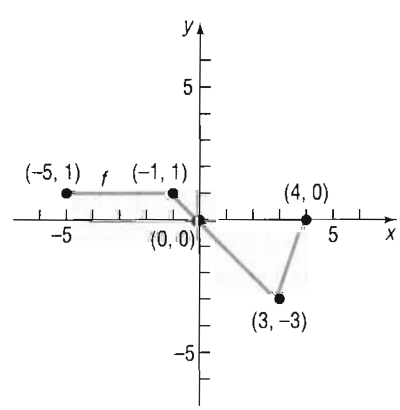
Si $g(-1) = 0$, determine A.

5. (a) Indique si las siguientes son gráficas de funciones.
(b) ¿Cuáles son gráficas de funciones uno a uno?



A B C D

6. Utilice la gráfica anexa de la función f para determinar:
(a) El dominio y el rango de f.
(b) Los intervalos donde f es creciente.
(c) Los intervalos donde f es constante.
(d) Las intersecciones de la gráfica con los ejes.



En los problemas del 7 al 12, determine lo siguiente para cada función:
(a) $f(-x)$ *(b)* $-f(x)$ *(c)* $f(x+2)$ *(d)* $f(x-2)$

7. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-4}$ **8.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$ **9.** $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ **10.** $f(x) = |x^2-4|$

11. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$ **12.** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

En los problemas del 13 al 18, determine si la función dada es par, impar o de ninguno de estos tipos, sin trazar la gráfica.

13. $f(x) = x^3 - 4x$ **14.** $g(x) = \dfrac{4+x^2}{1+x^4}$ **15.** $h(x) = \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} + 1$ **16.** $F(x) = \sqrt{1-x^3}$

17. $G(x) = 1 - x + x^3$ **18.** $H(x) = 1 + x + x^2$

En los problemas del 19 al 30, determine el dominio de cada función.

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-9}$ **20.** $f(x) = \dfrac{3x^2}{x-2}$ **21.** $f(x) = \sqrt{2-x}$ **22.** $f(x) = \sqrt{x+2}$

23. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{|x|}$ **24.** $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **25.** $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2x-3}$ **26.** $F(x) = \dfrac{1}{x^2-3x-4}$

27. $G(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1/x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **28.** $H(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } 0 < x < 4 \\ x-4 & \text{si } 4 \le x \le 8 \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} 1/(x-2) & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \\ 3x & \text{si } 0 \le x < 2 \end{cases}$ **30.** $g(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x+1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$

En los problemas del 31 al 50:
(a) Determine el dominio de cada función. *(b) Localice las intersecciones con los ejes.*
(c) Haga la gráfica de cada función. *(d) Utilizando la gráfica determine el rango.*

31. $F(x) = |x| - 4$ **32.** $f(x) = |x| + 4$ **33.** $g(x) = -|x|$ **34.** $g(x) = \frac{1}{2}|x|$

35. $h(x) = \sqrt{x-1}$ **36.** $h(x) = \sqrt{x} - 1$ **37.** $f(x) = \sqrt{1-x}$ **38.** $f(x) = -\sqrt{x}$

39. $F(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{si } x < 0 \\ 4-x^2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ **40.** $H(x) = \begin{cases} |1-x| & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ |x-1| & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **41.** $h(x) = (x-1)^2 + 2$

42. $h(x) = (x+2)^2 - 3$ **43.** $g(x) = (x-1)^3 + 1$ **44.** $g(x) = (x+2)^3 - 8$

45. $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{si } x \ge 4 \\ x & \text{si } 0 < x < 4 \end{cases}$ **46.** $f(x) = \begin{cases} 3|x| & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{1-x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$ **47.** $g(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1$

48. $g(x) = \dfrac{1}{x+2} - 2$ **49.** $h(x) = [\![-x]\!]$ **50.** $h(x) = -[\![x]\!]$

En los problemas del 51 al 56, la función f es uno a uno. Determine la inversa de cada función y verifique su respuesta. Encuentre el dominio y el rango de f *y* f^{-1}.

51. $f(x) = \dfrac{2x+3}{5x-2}$ **52.** $f(x) = \dfrac{2-x}{3+x}$ **53.** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

54. $f(x) = \sqrt{x-2}$ **55.** $f(x) = \dfrac{3}{x^{1/3}}$ **56.** $f(x) = x^{1/3} + 1$

En los problemas del 57 al 62, para las funciones f y g dadas, determine:

(*a*) $(f \circ g)(2)$ (*b*) $(g \circ f)(-2)$ (*c*) $(f \circ f)(4)$ (*d*) $(g \circ g)(-1)$

57. $f(x) = 3x - 5;\quad g(x) = 1 - 2x^2$

58. $f(x) = 4 - x;\quad g(x) = 1 + x^2$

59. $f(x) = \sqrt{x + 2};\quad g(x) = 2x^2 + 1$

60. $f(x) = 1 - 3x^2;\quad g(x) = \sqrt{4 - x}$

61. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4};\quad g(x) = 3x - 2$

62. $f(x) = \dfrac{2}{1 + 2x^2};\quad g(x) = 3x$

En los problemas del 63 al 68, determine $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, *y* $g \circ g$ *para cada par de funciones.*

63. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x};\quad g(x) = 3x + 1$

64. $f(x) = \dfrac{2x}{x + 1};\quad g(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

65. $f(x) = 3x^2 + x + 1;\quad g(x) = |3x|$

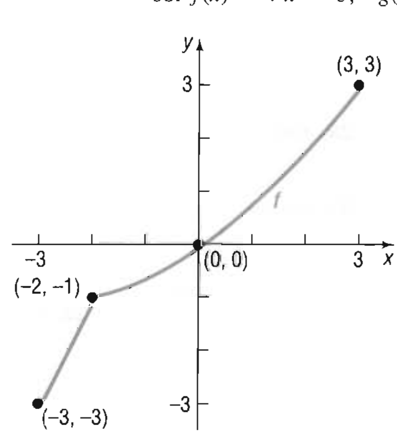
66. $f(x) = \sqrt{3x};\quad g(x) = 1 + x + x^2$

67. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1};\quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

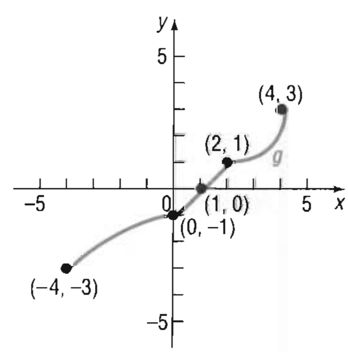
68. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3};\quad g(x) = \sqrt{3 - x^2}$

69. Para la gráfica de la función f anexa:

(a) Trace la gráfica de $y = f(-x)$
(b) Trace la gráfica de $y = -f(x)$.
(c) Trace la gráfica de $y = f(x + 2)$.
(d) Trace la gráfica de $y = f(x) + 2$.
(e) Trace la gráfica de $y = f(2 - x)$.
(f) Trace la gráfica de f^{-1}.

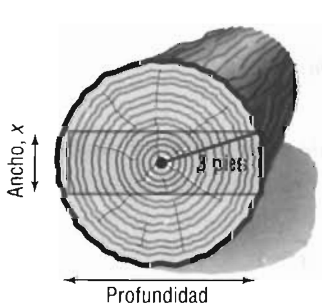


70. Repita el problema 69 para la gráfica de la función g anexa.



71. *Conversión de temperatura.* La temperatura T del aire es (en forma aproximada) una función lineal de la altitud h, para altitudes de hasta 10,000 metros sobre la superficie de la Tierra. Si la temperatura en la superficie es de 30°C y a 10,000 metros es de 5°C, determine la función $T = T(h)$.

72. *Velocidad como función del tiempo.* La velocidad v (en pies por segundo) de un auto es una función lineal del tiempo t (en segundos) para $10 \leq t \leq 30$. Si después de cada segundo, la velocidad del auto ha aumentado en 5 pies por segundo, y si después de 20 segundos es de 80 pies por segundo, ¿cuál será la velocidad del auto a los 30 segundos? Determine la función $v = v(t)$.



73. *Fortaleza de una tabla.* La fortaleza de una tabla rectangular de madera es proporcional al producto de su ancho y el cubo de su profundidad (*véase* la figura). Si hay que cortar una tabla de un tronco que tiene forma cilíndrica y radio de 3 pies, exprese la fortaleza S de la tabla como una función del ancho x. ¿Cuál es el dominio de S?

Capítulo 3

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de iniciar este capítulo revise los siguientes conceptos:

Cómo completar el cuadrado (apéndice A, p. 821)
El discriminante de una ecuación cuadrática (p. 20)
Las intersecciones con los ejes de una ecuación (p. 59)
Gráficas de ciertas funciones: (ejemplo 5, p. 58; ejemplo 6, p. 60; ejemplo 8, p. 62)
Resolución de desigualdades (sección 1.4; pp. 35–43)
División de polinomios (apéndice A, p. 805)
Números complejos (sección 1.5; pp. 45–52)

FUNCIONES RACIONALES Y POLINOMIALES

Panorama El puente Golden Gate

El Golden Gate, un puente colgante, enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos enormes cables de 3 pies de diámetro; el ancho de la calzada es de 90 pies y ésta se encuentra a 220 pies aproximadamente sobre el nivel del agua. Los cables tienen forma parabólica y tocan a la calzada en el centro del puente. Encuentre la altura del cable a una distancia de 1000 pies desde el centro del puente.

[Ejemplo 9 en la sección 3.1] ■

En los capítulos 1 y 2 hicimos las gráficas de funciones lineales $f(x) = ax + b, a \neq 0$; la función cuadrática $f(x) = x^2$; y la función cúbica $f(x) = x^3$. Cada una de estas funciones pertenece a la clase de las *funciones polinomiales*, las que estudiaremos un poco más en este capítulo. También estudiaremos las *funciones racionales*, que son cocientes de funciones polinomiales. En este capítulo ponemos especial énfasis en las gráficas de funciones polinomiales y racionales. Dicho énfasis demostrará la importancia de la evaluación de polinomios (sección 3.5 y 3.6). La sección 3.7 trata acerca de los polinomios que tienen coeficientes que son números complejos.

3.1 Funciones cuadráticas

Una **función cuadrática** es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

donde *a*, *b* y *c* son números reales y $a \neq 0$. El dominio de una función cuadrática lo constituyen todos los números reales.

Muchas aplicaciones requieren cierto conocimiento de las funciones cuadráticas. Por ejemplo, suponga que un comerciante determina que la ecuación que relaciona el número x de calculadoras vendidas al precio p por calculadora está dada por

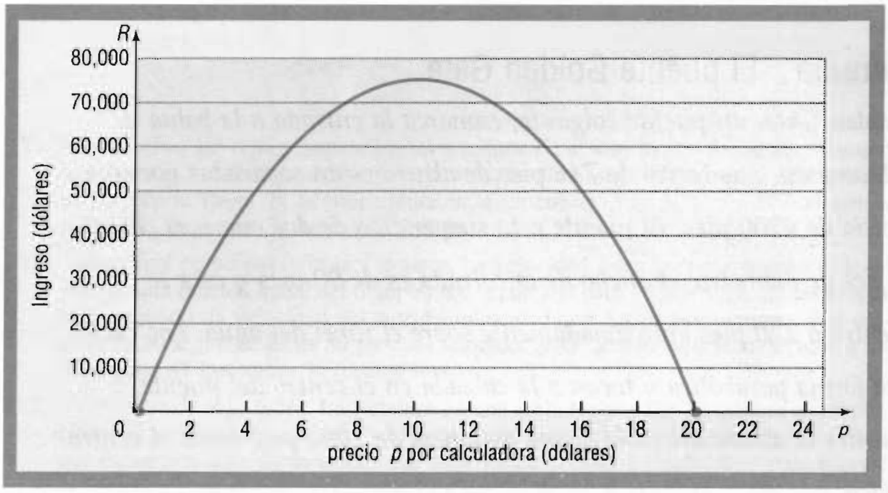
$$x = 15{,}000 - 750p$$

Entonces el ingreso R obtenido de la venta de x calculadoras al precio p por calculadora es

$$\begin{aligned} R &= xp \\ &= (15{,}000 - 750p)p \\ &= -750p^2 + 15{,}000p \end{aligned}$$

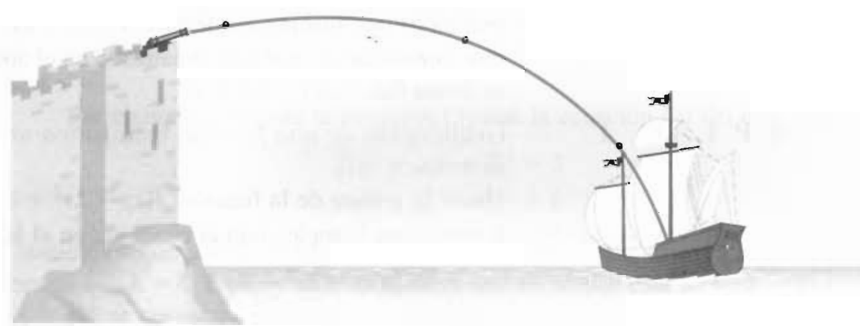
La figura 1 ilustra la gráfica de esta función de ingreso, cuyo dominio es $0 \leq p \leq 20$, ya que x y p deben ser no negativos.

FIGURA 1
Gráfica de una función de ingreso: $R = -750p^2 + 15{,}000p$



Otra situación en la que aparece una función cuadrática involucra el movimiento de un proyectil. Con base en la segunda ley de movimiento de Newton (fuerza es igual a masa por aceleración, $F = ma$), puede demostrarse que, pasando por alto la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado hacia arriba con cierta inclinación respecto de la horizontal, es la gráfica de una función cuadrática. Para una ilustración *véase* la figura 2.

FIGURA 2
Trayectoria de una bala de cañón



Graficación de funciones cuadráticas

Ya sabemos cómo hacer la gráfica de funciones cuadráticas. Por ejemplo, con base en el estudio de la sección 2.3, podemos hacer la gráfica de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. La figura 3 ilustra las gráficas de $f(x) = ax^2$ para $a = 1$, $a = 3$ y $a = \frac{1}{2}$, dibujadas en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. Observe que la elección de un valor mayor de a en $f(x) = ax^2$ tiene como resultado una gráfica "más estrecha" o "más angosta".

FIGURA 3

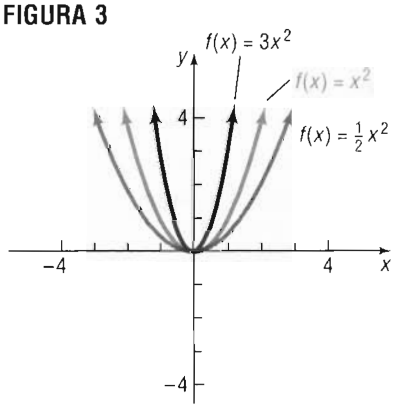
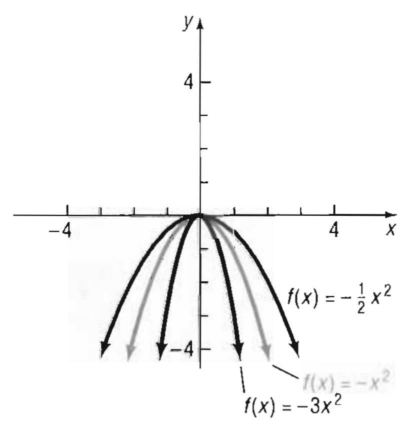


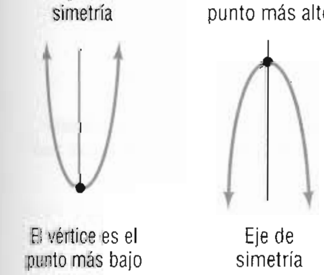
FIGURA 4



Las gráficas de $f(x) = ax^2$ para $a < 0$ son sólo reflexiones alrededor del eje x de las gráficas correspondientes de $f(x) = |a|x^2$. *Véase* la figura 4.

Las gráficas en las figuras 3 y 4 son las comunes de todas las funciones cuadráticas y las llamamos **parábolas***. Observe la figura 5 donde están dibujadas dos parábolas, la de la izquierda abre **hacia arriba** y tiene un punto más bajo; la de la derecha abre **hacia abajo** y tiene un punto más alto. Los puntos más bajo y más alto de una parábola se llaman **vértices**. La recta vertical que pasa por el vértice en cada parábola en la figura 5 se llama **eje de simetría** (por lo común abreviado a **eje**) de la parábola. Como la parábola es simétrica con respecto a su eje, éste puede ser utilizado para ayudar a la graficación de la parábola.

FIGURA 5
Gráficas de una función cuadrática, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$



(a) Abre hacia arriba (b) Abre hacia abajo

*Estudiaremos las parábolas utilizando una definición geométrica en la sección 9.2.

Las parábolas mostradas en la figura 5 son las gráficas de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Note que los ejes de coordenadas no están incluidos en la figura. Dependiendo de los valores de a, b y c, los ejes podrían ser colocados en cualquier parte. La información importante es que, salvo por compresión o alargamiento, la forma de la gráfica de una función cuadrática se verá como una de las parábolas de la figura 5.

En el ejemplo siguiente utilizamos técnicas de la sección 2.3 para hacer la gráfica de una función cuadrática de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Para hacerlo debemos completar el cuadrado (analizado en el apéndice A.3) y escribir la función f en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

EJEMPLO 1 *Graficación de una función cuadrática utilizando corrimiento, reflexión y semejanza*

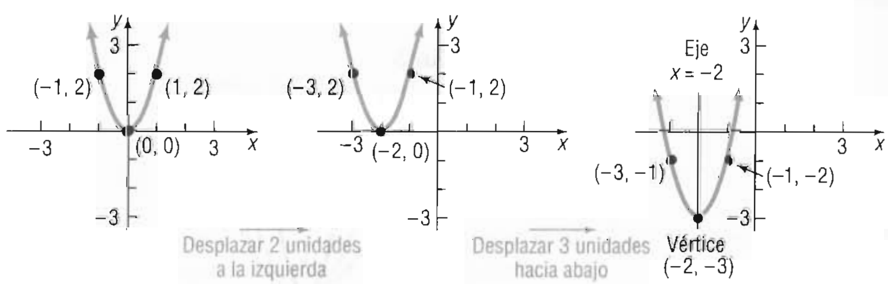
Hacer la gráfica de la función: $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$

Solución Empezamos completando el cuadrado en el lado derecho:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + 8x + 5 \\ &= 2(x^2 + 4x) + 5 && \text{Factorizar el 2 de } 2x^2 + 8x. \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) + 5 - 8 && \text{Completar el cuadrado de } 2(x^2+4x). \text{ Note que el factor de 2 requiere que se sumen y resten 8.} \\ &= 2(x + 2)^2 - 3 \end{aligned} \tag{2}$$

La gráfica de f puede ser obtenida en tres etapas, como se muestra en la figura 6. Ahora compare esta gráfica con la de la figura 5(a). La gráfica de $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ es una parábola que abre hacia arriba y tiene su vértice (punto más bajo) en $(-2, -3)$. Su eje de simetría es la recta $x = -2$.

FIGURA 6



(a) $y = 2x^2$ (b) $y = 2(x+2)^2$ (c) $y = 2(x-2)^2$

Verificación: Hacer la gráfica de $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$ y utilizar TRACE para localizar su vértice. ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

El método utilizado en el ejemplo 1 puede ser aplicado para hacer la gráfica de cualquier función $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorizar } a \text{ de } ax^2 + bx. \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{ax} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Completar el cuadrado sumando y restando } a(b^2/4a^2). \text{ ¡Observe cuidadosamente este paso!} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Si hacemos $h = -b/2a$ y $k = (4ac - b^2)/4a$, esta última ecuación puede ser reescrita en la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \tag{3}$$

La gráfica de f es la parábola $y = ax^2$ recorrida horizontalmente h unidades y en sentido vertical k unidades. Como resultado de esto, el vértice es (h, k) y la gráfica abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. El eje de simetría es la recta vertical $x = h$.

Por ejemplo, compare la ecuación (3) con la ecuación (2) del ejemplo 1.

$$f(x) = 2(x + 2)^2 - 3$$
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

Concluimos que $a = 2$, de modo que la gráfica abre hacia arriba. También, encontramos que $h = -2$ y $k = -3$, de manera que su vértice está en $(-2, -3)$.

No se necesita completar el cuadrado para obtener el vértice. En casi todos los casos, es más fácil obtener el vértice de una función cuadrática f recordando que su coordenada x es $h = -b/2a$. Luego, la coordenada y puede encontrarse evaluando f en $-b/2a$.

Estos resultados se resumen a continuación:

Características de la gráfica de una función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Vértice } = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \qquad \text{Eje: la recta } x = \frac{-b}{2a} \tag{4}$$

La parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a < 0$.

EJEMPLO 2 *Localización del vértice (sin hacer la gráfica)*

Sin hacer la gráfica, localizar el vértice y el eje de la parábola definida por $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$. ¿Abre hacia arriba o hacia abajo?

Solución Para esta función cuadrática $a = -3$, $b = 6$ y $c = 1$. La coordenada x del vértice es

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-6} = 1$$

Por lo tanto, la coordenada y del vértice es

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(1) = -3 + 6 + 1 = 4$$

El vértice está ubicado en el punto $(1, 4)$. El eje de simetría es la recta $x = 1$. Por último, ya que $a = -3 < 0$, la parábola abre hacia abajo. ■

La información acumulada en el ejemplo 2, junto con la localización de las intersecciones con los ejes, por lo común proporciona lo necesario para hacer la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. La intersección-y es el valor de f en $x = 0$, esto es, $f(0) = c$. Las intersecciones-x, si las hay, se encuentran resolviendo la ecuación

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

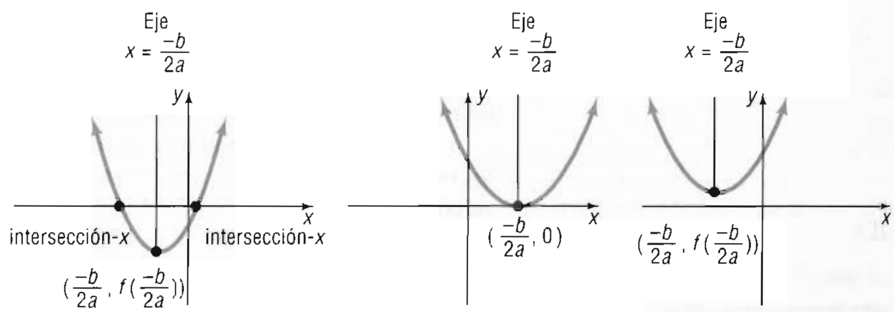
Esta ecuación tiene dos, una, o ninguna solución real, dependiendo de si el discriminante $b^2 - 4ac$ es positivo, cero o negativo. Por tanto, tiene sus correspondientes intersecciones-x, como sigue:

Intersecciones-x de una función cuadrática

1. Si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene dos intersecciones-x distintas de modo que cruzará el eje x en dos lugares.
2. Si el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene una intersección-x y toca al eje x con su vértice.
3. Si el discriminante $b^2 - 4ac < 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ no tiene intersección-x así que no corta ni toca al eje x.

La figura 7 ilustra estas posibilidades para parábolas que abren hacia arriba.

FIGURA 7
$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a > 0$



(a) $b^2 - 4ac > 0$
Dos intersecciones-x

(b) $b^2 - 4ac = 0$
Una intersección-x

(c) $b^2 - 4ac < 0$
No hay intersecciones-x

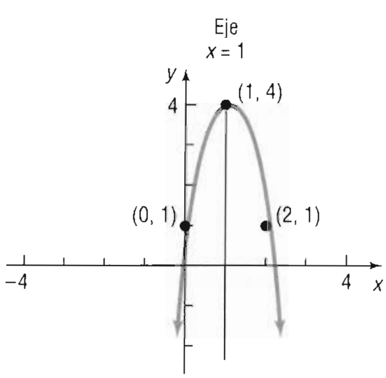
EJEMPLO 3 *Graficación de una función cuadrática usando su vértice, su eje y sus intersecciones*

Usar la información del ejemplo 2 y las ubicaciones de las intersecciones para hacer la gráfica de $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$.

Solución En el ejemplo 2 encontramos que el vértice está en $(1, 4)$ y que el eje de simetría es $x = 1$. La intersección-y se encuentra haciendo $x = 0$. Por tanto, la intersección-y es $f(0) = 1$. Las intersecciones-x se encuentran haciendo $f(x) = 0$, lo cual tiene como resultado la ecuación

$$-3x^2 + 6x + 1 = 0$$

FIGURA 8
$f(x) = -3x^2 + 6x + 1$



El discriminante $b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(-3)(1) = 36 + 12 = 48 > 0$, de modo que la ecuación tiene dos soluciones reales y la gráfica dos intersecciones-x. Utilizando la fórmula cuadrática, encontramos

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{48}}{-6} = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{-6} = -0.15$$

y

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{48}}{-6} = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{-6} = 2.15$$

Las intersecciones-x son aproximadamente -0.15 y 2.15.

La gráfica está ilustrada en la figura 8. Note cómo usamos la intersección-y, y el eje de simetría, $x = 1$, para obtener el punto adicional $(2, 1)$ de la gráfica.

Verificación: Hacer la gráfica de $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$. Utilice TRACE para localizar las dos intersecciones-x y el vértice. ■

■ Ahora resuelva el problema 25.

Si la gráfica de una función cuadrática tiene una intersección-x o ninguna, podrá ser necesario marcar algunos puntos adicionales para obtener la gráfica.

EJEMPLO 4 *Graficación de una función cuadrática usando su vértice, su eje y sus intersecciones*

Hacer la gráfica de $f(x) = x^2 - 6x + 9$ determinando si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, su eje de simetría, su intersección-y y sus intersecciones-x, si las hay.

Solución Para $f(x) = x^2 - 6x + 9$, tenemos $a = 1$, $b = -6$, y $c = 9$. Como $a = 1 > 0$, la parábola abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

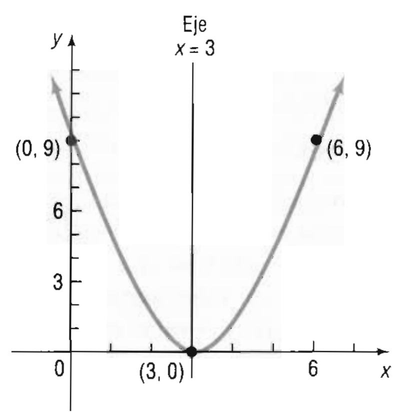
$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$$

La coordenada y del vértice es

$$f(3) = 9 - 6 \cdot 3 + 9 = 0$$

De modo que el vértice está en (3, 0). El eje de simetría es la recta $x = 3$. La intersección-y es $f(0) = 9$. Como el vértice (3, 0) está en el eje x, la gráfica toca al eje x en la intersección-x. Usando el eje de simetría y la intersección-y en (0, 9), podemos localizar el punto (6, 9) de la gráfica. *Véase* la figura 9. ■

FIGURA 9
$f(x) = x^2 - 6x + 9$



EJEMPLO 5 *Graficación de una función cuadrática usando su vértice, su eje y sus intersecciones*

Hacer la gráfica de $f(x) = 2x^2 + x + 1$ determinando si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encontrando su vértice, su eje de simetría, su intersección-y y sus intersecciones-x, si las hay.

Solución Para $f(x) = 2x^2 + x + 1$, tenemos $a = 2$, $b = 1$ y $c = 1$. Como $a = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba. La coordenada x del vértice es

$$\frac{-b}{2a} = -\frac{1}{4}$$

La coordenada y del vértice es

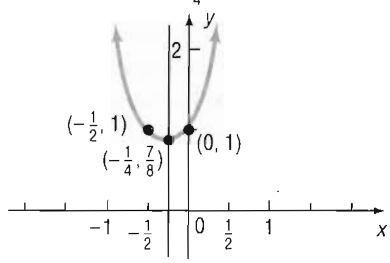
$$f(-\tfrac{1}{4}) = 2(\tfrac{1}{16}) + (-\tfrac{1}{4}) + 1 = \tfrac{7}{8}$$

Así, el vértice está en $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8})$. El eje de simetría es la recta $x = -\frac{1}{4}$. La intersección-y es $f(0) = 1$. La intersección (o intersecciones)-x, si las hay, cumplen la ecuación

$$2x^2 + x + 1 = 0$$

Ya que el discriminante $b^2 - 4ac = 1 - 8 = -7 < 0$, esta ecuación no tiene solución real, y así la gráfica no tiene intersecciones-x. Utilizamos el punto (0, 1) y el eje de simetría $x = -\frac{1}{4}$ para localizar el punto $(-\frac{1}{2}, 1)$ de la gráfica. *Véase* la figura 10. ■

FIGURA 10
$f(x) = 2x^2 + x + 1$



Resumen

Existen dos maneras de hacer la gráfica de una función cuadrática:

1. Completar el cuadrado y aplicar técnicas de desplazamiento (ejemplo 1).
2. Utilizar los resultados dados en el recuadro (4) para encontrar el vértice y el eje de simetría y para determinar si la gráfica abre hacia arriba o hacia abajo. Después localizar la intersección-y y las intersecciones-x, si las hay (ejemplos del 2 al 5).

■ Ahora resuelva el problema 31.

Aplicaciones

Ya hemos visto que la gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola con vértice en $(-b/2a, f(-b/2a))$. Este vértice es el punto más alto de la gráfica si $a < 0$ y el más bajo si $a > 0$. Si el vértice es el punto más alto ($a < 0$), entonces $f(-b/2a)$ es el **valor máximo** de f. Si el vértice es el punto más bajo ($a > 0$), entonces $f(-b/2a)$ es el **valor mínimo** de f. Estas ideas propician el desarrollo de muchas aplicaciones.

EJEMPLO 6 *Maximización del ingreso*

En una tienda donde se venden calculadoras se ha encontrado que cuando las calculadoras se venden en un precio de p dólares por unidad, el ingreso R como una función del precio p es

$$R(p) = -750p^2 + 15{,}000p$$

¿Cuál debe ser el precio unitario para poder maximizar el ingreso? Si se cobra ese precio, ¿cuál será el ingreso máximo?

Solución El ingreso R es

$$R(p) = -750p^2 + 15{,}000p = ap^2 + bp + c$$

La función R es una función cuadrática con $a = -750$, $b = 15{,}000$, y $c = 0$. Ya que $a < 0$, el vértice es el punto más alto de la parábola. Por lo tanto, el ingreso es máximo cuando el precio es

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-15{,}000}{2(-750)} = \frac{-15{,}000}{-1500} = \$10$$

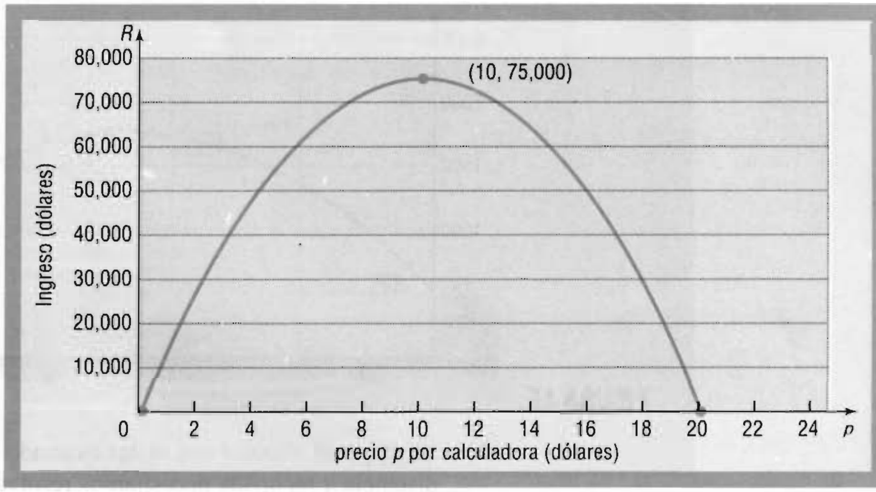


FIGURA 11
$R(p) = -750p^2 + 15{,}000p$

El ingreso máximo R es

$$R(10) = -750(10)^2 + 15{,}000(10) = \$75{,}000$$

Véase la figura 11 para una ilustración. ■

EJEMPLO 7 *Análisis del movimiento de un proyectil*

Un proyectil es disparado desde un acantilado a 500 pies por encima del agua con una inclinación de 45° respecto a la horizontal, la velocidad del disparo es de 400 pies por segundo. La altura h por encima del agua está dada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(400)^2} + x + 500$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil desde la base del acantilado.

(a) Encontrar la altura máxima del proyectil.
(b) ¿A qué distancia desde la base del acantilado chocará el proyectil con el agua?

La figura 12, de la página 184, ilustra la situación.

Solución (a) La altura del proyectil está dada por una función cuadrática:

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(400)^2} + x + 500 = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500$$

Estamos buscando el valor máximo de h y, puesto que éste es obtenido en el vértice, calculamos

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-1/5000)} = \frac{5000}{2} = 2500$$

La altura máxima del proyectil es

$$h(2500) = \frac{-1}{5000}(2500)^2 + 2500 + 500 = -1250 + 2500 + 500 = 1750 \text{ pies}$$

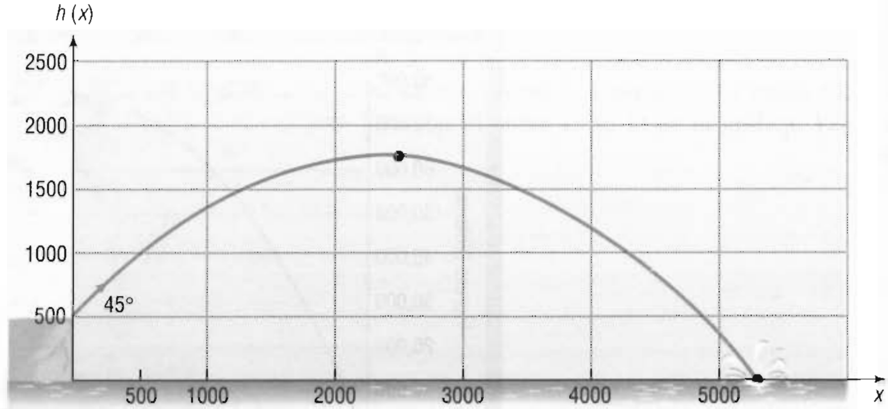


FIGURA 12

(b) El proyectil chocará con el agua cuando su altura sea cero. Para determinar la distancia x recorrida necesitamos resolver la ecuación

$$h(x) = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática con

$$b^2 - 4ac = 1 - 4\left(\frac{-1}{5000}\right)(500) = 1.4$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1.4}}{2(-1/5000)} = \begin{cases} -458 \\ 5458 \end{cases}$$

Desechamos la solución negativa y encontramos que el proyectil chocará con el agua a una distancia de 5458 pies a partir de la base del acantilado. ■

Exploración: Hacer la gráfica de:

$$h(x) = \frac{-1}{5000}x^2 + x + 500 \qquad 0 \leq x \leq 5500$$

Utilice TRACE para dibujar la trayectoria del proyectil; tomando nota de su altura máxima y de la distancia que hay desde la base del acantilado hasta el punto en que choca con el agua. Compare sus resultados con los obtenidos en el texto. ¿A qué distancia desde la base del acantilado está el proyectil cuando su altura es de: (i) 1000 pies? (ii) ¿1500 pies? (iii) ¿2000 pies? ■

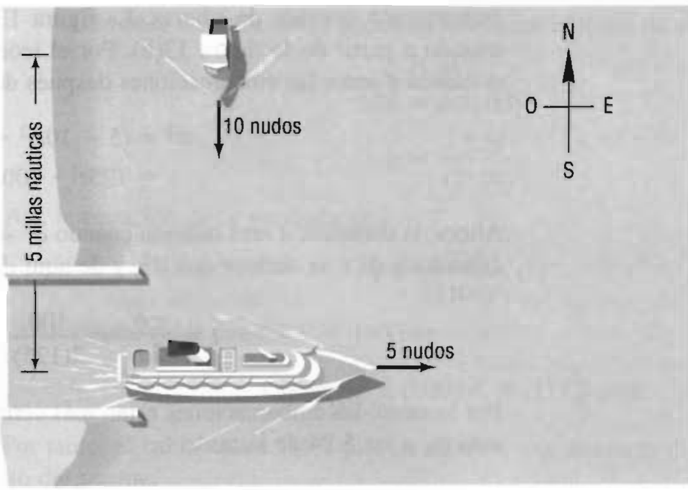
■ Ahora resuelva el problema 55.

EJEMPLO 8 *Navegación*

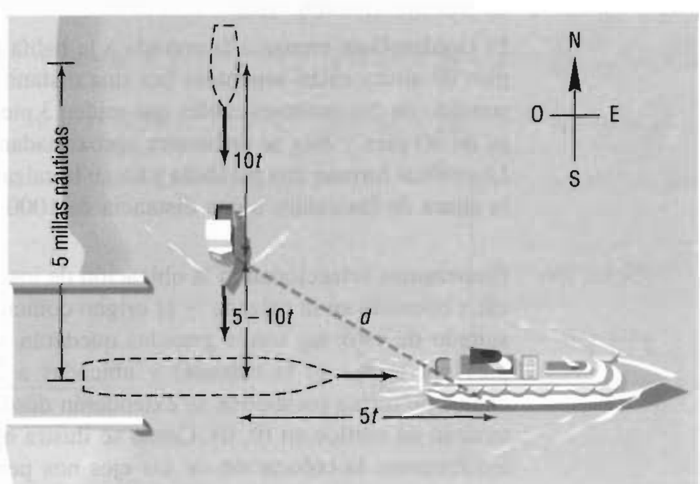
Un crucero sale del puerto de Miami rumbo al este a una velocidad constante de 5 nudos (1 nudo = 1 milla náutica por hora). A las cinco de la tarde, el crucero se encuentra a 5 millas náuticas al sur de un yate que se mueve hacia el sur a una velocidad constante de 10 nudos. ¿En qué momento están más cercanas las dos embarcaciones?

Solución Empecemos con una ilustración que describa la posición relativa de cada embarcación a las 5:00 P.M. *Véase* la figura 13(a). Luego de transcurrido el tiempo t (en horas), el crucero se ha movido $5t$ millas náuticas y el yate se ha movido hacia el sur $10t$ millas náuticas. La figura 13(b) ilustra la posición relativa de cada

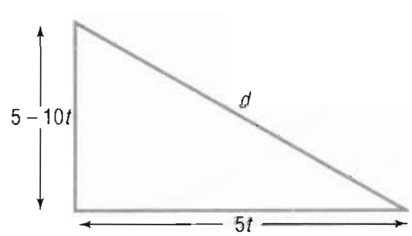
FIGURA 13



(a) Posición a las 5:00 PM



(b) Posición en el tiempo t



(c)

embarcación después de t horas. La figura 13(c) muestra un triángulo rectángulo trazado a partir de la figura 13(b). Por el teorema de Pitágoras, el cuadrado de la distancia d entre las embarcaciones después del tiempo t es

$$\begin{aligned} d^2 &= (5 - 10t)^2 + (5t)^2 \\ &= 125t^2 - 100t + 25 \end{aligned}$$

Ahora, la distancia d será mínima cuando d^2 sea mínima. Ya que d^2 es una función cuadrática de t, se deduce que d^2, y de aquí d, es un mínimo cuando

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{100}{2(125)} = \frac{2}{5} \text{ hora}$$

Por lo tanto, las embarcaciones están más cercanas después de $\frac{2}{5}(60) = 24$ minutos, esto es, a las 5:24 de la tarde. ■

En un puente colgante los cables principales forman una parábola ya que es la única manera de lograr que el peso total del puente se distribuya de modo uniforme. El Golden Gate de San Francisco es un ejemplo de un puente colgante.

EJEMPLO 9 *El puente Golden Gate*

El Golden Gate enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos enormes cables que miden 3 pies de diámetro; el ancho de la calzada es de 90 pies y ésta se encuentra aproximadamente a 220 pies del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente. Encuentre la altura de los cables a una distancia de 1000 pies del centro del puente.

Solución Empezamos seleccionando la ubicación de los ejes de coordenadas de modo que el eje x coincida en la calzada y el origen coincida en el centro del puente. Como resultado de esto, las torres gemelas quedarán verticales (altura $746 - 220 = 526$ pies por arriba de la calzada) y ubicadas a 2100 pies del centro. También, los cables de forma parabólica se extenderán desde las torres, abriendo hacia arriba, y tendrán su vértice en $(0, 0)$. Como se ilustra en la figura 14, la manera en que seleccionamos la colocación de los ejes nos permite identificar la ecuación de una parábola como $y = ax^2$, $a > 0$. También podemos ver que los puntos $(-2100, 526)$ y $(2100, 526)$ están en la gráfica.

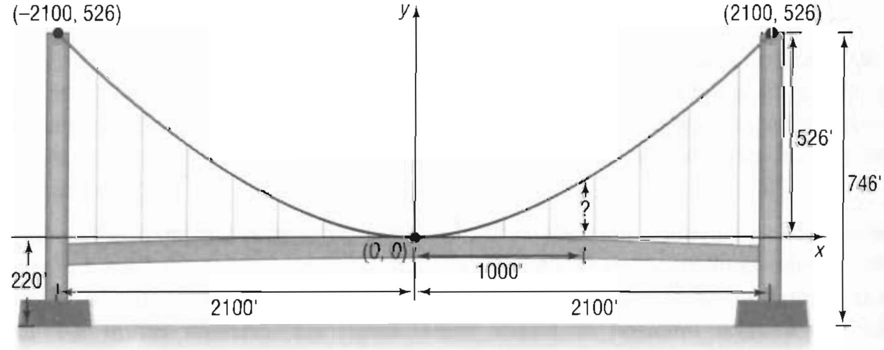


FIGURA 14

Con base en estos datos podemos encontrar el valor de a en $y = ax^2$:

$$y = ax^2$$
$$526 = a(2100)^2$$
$$a = \frac{526}{(2100)^2}$$

Así, la ecuación de la parábola es

$$y = \frac{526}{(2100)^2}x^2$$

La altura del cable cuando $x = 1000$ es

$$y = \frac{526}{(2100)^2}(1000)^2 \approx 119.3 \text{ pies}$$

Por tanto, el cable está a 119.3 pies de altura a una distancia de 1000 pies del centro del puente. ■

3.1

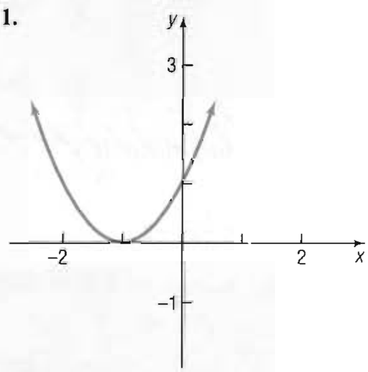
Ejercicio 3.1

En los problemas del 1 al 8 asocie cada gráfica con una de las siguientes funciones:

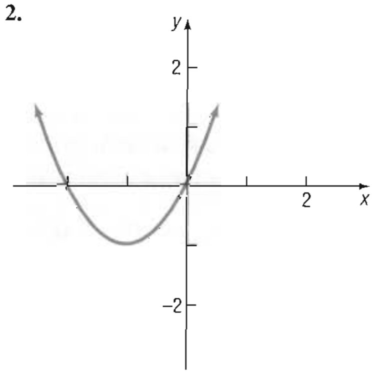
A. $y = x^2 - 1$ *B.* $y = -x^2 - 1$ *C.* $y = x^2 - 2x + 1$ *D.* $y = x^2 + 2x + 1$

E. $y = x^2 - 2x + 2$ *F.* $y = x^2 + 2x$ *G.* $y = x^2 - 2x$ *H.* $y = x^2 + 2x + 2$

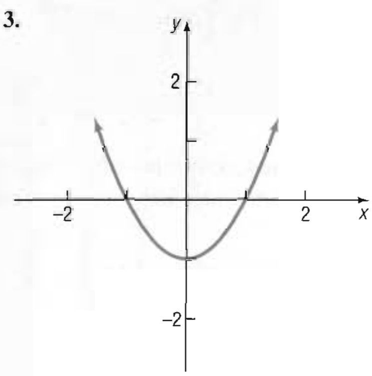
1.



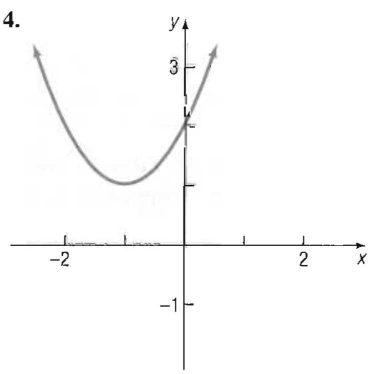
2.



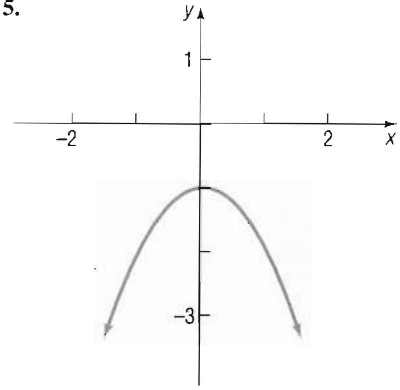
3.



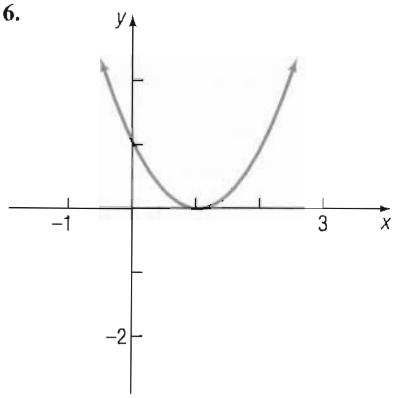
4.



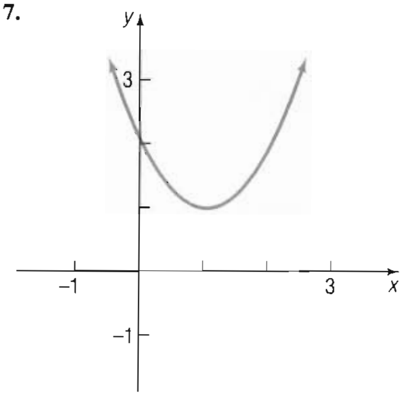
5.



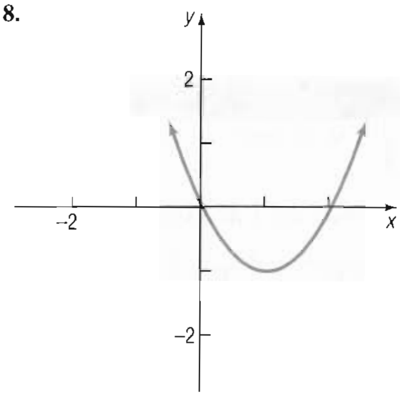
6.



7.



8.



En los problemas del 9 al 24, haga la gráfica de la función f iniciando con la gráfica de $y = x^2$ y utilizando corrimientos, compresión, alargamiento y/o reflexión.

9. $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

10. $f(x) = 2x^2$

11. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$

12. $f(x) = 2x^2 - 3$

13. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2$

14. $f(x) = 2x^2 + 4$

15. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

16. $f(x) = -2x^2 - 2$

17. $f(x) = x^2 + 4x + 2$

18. $f(x) = x^2 - 6x - 1$

19. $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

20. $f(x) = 3x^2 + 6x$

21. $f(x) = -x^2 - 2x$

22. $f(x) = -2x^2 + 6x + 2$

23. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$

24. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

En los problemas del 25 al 38, haga la gráfica de cada función cuadrática determinando si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encuentre su vértice, el eje de simetría, la intersección-y, e intersecciones-x si las hay.

25. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

26. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

27. $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

28. $f(x) = -x^2 + x + 2$

29. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

30. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$

31. $f(x) = 2x^2 - x + 2$

32. $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

33. $f(x) = -2x^2 + 2x - 3$

34. $f(x) = -3x^2 + 3x - 2$

35. $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$

36. $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$

37. $f(x) = -4x^2 - 6x + 2$

38. $f(x) = 3x^2 - 8x + 2$

En los problemas del 39 al 44, determine si la función cuadrática dada tiene un valor máximo o mínimo y luego encuentre ese valor.

39. $f(x) = 2x^2 + 12x - 3$ **40.** $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$ **41.** $f(x) = -x^2 + 10x - 4$

42. $f(x) = -2x^2 + 8x + 3$ **43.** $f(x) = -3x^2 + 12x + 1$ **44.** $f(x) = 4x^2 - 4x$

45. En un conjunto de ejes coordenados, haga la gráfica de la familia de parábolas $f(x) = x^2 + 2x + c$ para $c = -3$, $c = 0$ y $c = 1$. Describa las características de un miembro de esta familia.

46. En los mismos ejes coordenados, haga la gráfica de la familia de parábolas $f(x) = x^2 + cx + 1$ para $c = -4$, $c = 0$ y $c = 4$. Describa las características generales de esta familia.

47. Haga la gráfica de $y = x^2 + 1$. Después haga la gráfica de $y = x^2 + x + 1$, seguida por $y = x^2 + 2x + 1$, seguida por $y = x^2 + 3x + 1$. ¿Qué sucede? ¿Advierte algún patrón?

48. Haga la gráfica de $y = x^2 + x + 1$. Después haga la gráfica de $y = 2x^2 + x + 1$, seguida por $y = 3x^2 + x + 1$, seguida por $y = 4x^2 + x + 1$. ¿Qué sucede? ¿Advierte algún patrón?

49. *Maximización de ingresos.* Suponga que el fabricante de una secadora de ropa ha encontrado que cuando el precio por unidad es p dólares, el ingreso R (en dólares) es

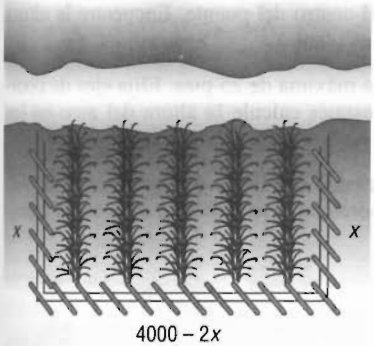
$$R = -4p^2 + 4000p$$

¿Qué precio unitario debe establecerse para maximizar el ingreso?¿Cuál es el ingreso máximo?

50. *Maximización de ingresos.* Una compañía de tractores ha encontrado que el ingreso por sus ventas de tractores para trabajo pesado es una función del precio por unidad p. Si el ingreso R es

$$R = -\frac{1}{2}p^2 + 1900p$$

¿cuál es el precio unitario p que debe cobrarse para maximizar el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?



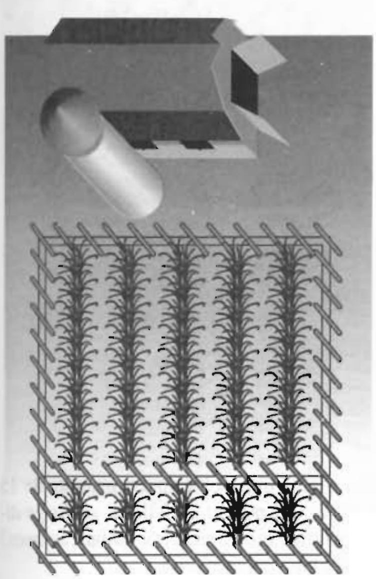
51. *Rectángulos con perímetro fijo.* ¿Cuál es la mayor área rectangular que puede rodearse con 400 pies de cerca? ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

52. *Rectángulos con perímetro fijo.* ¿Cuáles son las dimensiones de un rectángulo con perímetro fijo P que darán como resultado el área más grande?

53. *Cómo aprovechar al máximo una cerca.* Un granjero tiene 4000 metros de cerca y quiere bordear un terreno rectangular que colinda con un río. Si él no cerca el lado que está a lo largo del río, ¿cuál es la mayor área que puede cercar? (*Véase* la figura.)

54. *Cómo aprovechar al máximo una cerca.* Un granjero tiene 2000 metros de cerca y quiere cercar un terreno circular que colinda con una carretera recta. Si no cerca el lado que está a lo largo de la carretera, ¿cuál es la mayor área que puede abarcar?

55. *Cómo aprovechar al máximo una cerca.* Un granjero tiene 10,000 metros de cerca para bordear un campo rectangular y después dividirlo en dos terrenos con una cerca paralela a uno de los lados (*véase* la figura). ¿Cuál es la mayor área que puede ser cercada?



56. *Cómo aprovechar al máximo una cerca.* Un granjero tiene 10,000 metros de cerca para encerrar un campo rectangular y después dividirlo en tres terrenos con dos cercas paralelas a uno de los lados. ¿Cuál es la mayor área que puede ser encerrada?

57. *Análisis del movimiento de un proyectil.* Un proyectil es disparado desde un acantilado. El disparo se hace a 200 pies por arriba del nivel del agua con inclinación de 45° respecto de la horizontal y velocidad de 50 pies por segundo. La altura del proyectil sobre el agua está dada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(50)^2} + x + 200$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil a la base del acantilado.

(a) Encuentre la altura máxima del proyectil.

(b) ¿A qué distancia de la base del acantilado el proyectil chocará con el agua?

(c) Utilice TRACE para dibujar la trayectoria del proyectil; tome nota de su altura máxima y de la distancia que hay desde la base del acantilado hasta donde choca el proyectil contra el agua. Compare sus resultados con los obtenidos en las partes (a) y (b). ¿Cuándo es de 100 pies sobre el agua la altura del proyectil?, ¿a qué distancia está del acantilado?

58. *Análisis del movimiento de un proyectil.* Un proyectil es disparado con una inclinación de 45° respecto de la horizontal y con velocidad de 100 pies por segundo. La altura h del proyectil está dada por

$$h(x) = \frac{-32x^2}{(100)^2} + x$$

donde x es la distancia horizontal del proyectil desde el punto de disparo.

(a) Encuentre la altura máxima que alcanza el proyectil.

(b) ¿A qué distancia desde el punto de disparo chocará el proyectil contra el suelo?

(c) Utilice TRACE para dibujar la trayectoria del proyectil; tomando nota de su altura máxima y de la distancia que hay desde el punto de disparo al punto en donde choca contra el suelo. Compare sus resultados con los obtenidos en las partes (a) y (b). ¿Cuándo la altura del proyectil es de 50 pies por arriba del suelo? ¿Qué distancia ha recorrido horizontalmente?

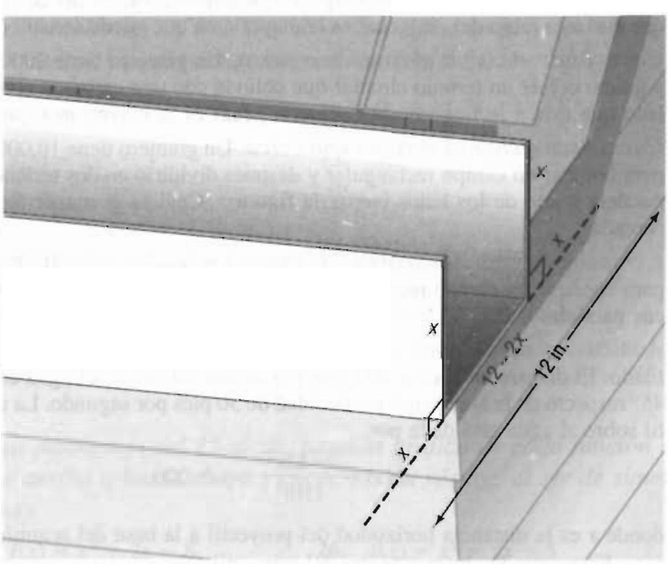
59. *Navegación.* Una aeronave mantiene una velocidad constante de 10 nudos en dirección norte. A las 4:00 PM, el radar de la nave detecta un destructor a 100 millas náuticas directamente hacia el este. Si el destructor lleva rumbo oeste a velocidad de 20 nudos, ¿cuándo estarán más cerca las dos naves? (1 nudo = 1 milla náutica por hora.)

60. *Control de tráfico aéreo.* Un controlador de tráfico aéreo ve en su pantalla dos aeronaves a la misma altitud. Una, un Piper Cub, lleva rumbo oeste a 150 millas por hora; la otra, un jet Lear, está a 15 millas directamente al norte del Piper y lleva rumbo sur a 400 millas por hora. ¿Qué tanto se acercarán las dos aeronaves?

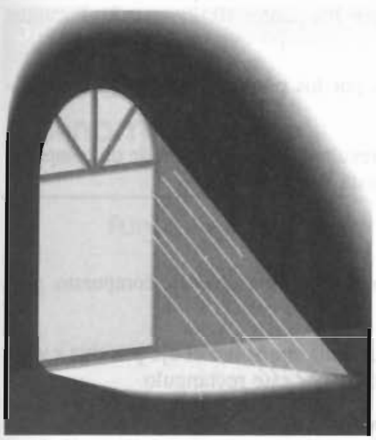
61. *Puente colgante.* Un puente colgante con peso distribuido uniformemente a lo largo de su longitud tiene dos torres gemelas que se alzan 75 metros sobre una carretera y están separadas 400 metros. Los cables de forma parabólica están suspendidos de la parte superior de cada torre y tocan la carretera en el centro del puente. Encuentre la altura de los cables en un punto a 100 metros del centro. (Suponga que el camino es plano.)

62. *Arquitectura.* Un arco parabólico tiene una amplitud de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Elija ejes de coordenadas rectangulares adecuados y encuentre la ecuación de la parábola. Después calcule la altura del arco en los puntos que están a 10, 20 y 40 pies del centro.

63. *Construcción de canalones.* Un canalón para captar agua de lluvia es fabricado con hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho, doblando los lados 90° hacia arriba. ¿Qué profundidad proporciona la mayor área de sección transversal y con ello permite el mayor flujo de agua?

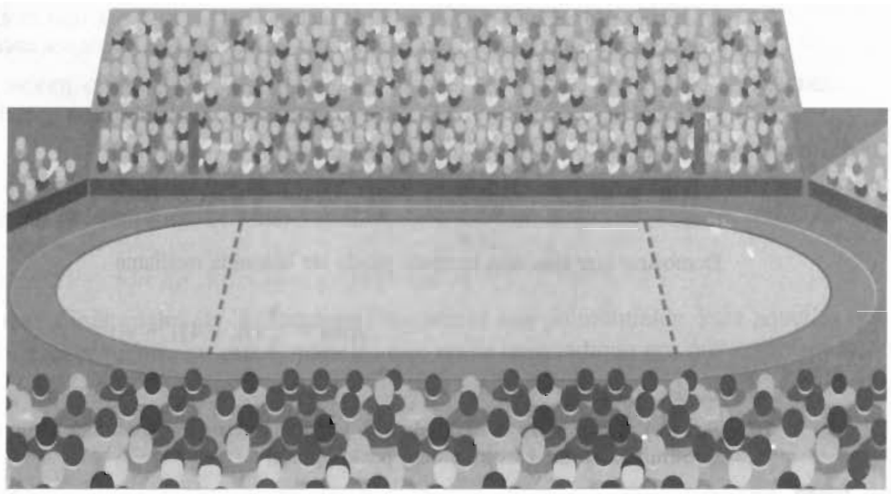


64. *Navegación.* A las 4:00 PM un crucero deja el puerto de Miami con dirección este a una velocidad constante de 15 nudos. Al mismo tiempo, un bote de recreo ubicado 100 millas náuticas al noreste del puerto de Miami se dirige directamente hacia el sur a una velocidad constante de 12 nudos. ¿A qué hora estarán más cerca las embarcaciones? ¿Qué tan próximos? (Exprese su respuesta en millas náuticas; 1 nudo = 1 milla náutica por hora.)



65. *Ventana normanda.* Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo de diámetro igual al ancho del rectángulo (*véase* la figura). Si el perímetro de la ventana es de 20 pies, ¿cuáles dimensiones permitirán la recepción de más luz (maximizar el área)? [*Nota*: La circunferencia del círculo $= 2\pi r$; área del círculo $= \pi r^2$, donde r es el radio del círculo.]

66. *Construcción de un estadio.* Una pista y el área de un campo de juego tienen la forma de un rectángulo con un semicírculo en cada extremo (*véase* la figura). El perímetro interior de la pista será de 1500 metros. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo de modo que su área sea máxima?



67. *Arquitectura.* Una ventana especial tiene la forma de un rectángulo coronado por un triángulo equilátero (*véase* la figura). Si el perímetro de la ventana mide 16 pies, ¿cuáles son las dimensiones que dejan entrar la mayor cantidad de luz? [*Nota:* el área de un triángulo equilátero $= (\sqrt{3}/4)x^2$, donde x es la longitud de un lado del triángulo.]

68. *Análisis del movimiento de un proyectil.* Un proyectil es disparado con inclinación de 45° respecto de la horizontal y velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Si el punto de disparo es el origen, el eje x la horizontal y el eje y la vertical, entonces la altura y (en pies) después de que una distancia horizontal x ha sido recorrida es aproximadamente

$$y = \frac{-32x^2}{v_0^2} + x$$

(a) Encuentre la altura máxima en términos de la velocidad inicial v_0.
(b) Si la velocidad inicial se duplica, ¿qué le pasa a la altura máxima?
(c) Suponiendo que el terreno es plano, ¿a qué distancia del punto de disparo caerá el proyectil si la velocidad inicial es de 64 pies por segundo?

69. Un club de vuelos especiales cobra a sus miembros \$400.00 anuales. Por cada miembro nuevo, arriba de 60, la tarifa para todos se reduce en \$5.00. ¿Cuál es el número de socios con el que se obtiene el máximo ingreso?

70. Una agencia de renta de automóviles tiene 24 automóviles idénticos. El propietario de la agencia determina que todos los autos pueden ser rentados a un precio de \$10.00 diarios. Sin embargo, por cada \$2.00 de aumento en la renta, uno de los autos deja de rentarse. ¿Cuál es el precio de renta que maximiza el ingreso?

71. La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene vértice en $x = 0$ y pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(1, 8)$. Encuentre a, b y c.

72. La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene vértice en $x = 1$ y pasa por los puntos $(0, 1)$ y $(-1, -8)$. Encuentre a, b y c.

73. *Reacciones químicas.* Una reacción química autocatalizadora tiene como resultado la formación de un compuesto que provoca que la razón de formación aumente. Si la razón de reacción V está dada por

$$V(x) = kx(a - x) \qquad 0 \leq x \leq a$$

donde k es una constante positiva, a la cantidad inicial del compuesto y x la cantidad variable del compuesto, ¿para qué valor de x la reacción tiene una razón máxima?

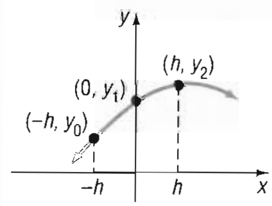
74. Un rectángulo tiene un vértice sobre la recta $y = 10 - x$, $x > 0$, otro en el origen, uno sobre el eje positivo x y uno más sobre el eje positivo y. Encuentre la mayor área A que puede ser encerrada por este rectángulo.

75. *Cálculo: Regla de Simpson.* La figura muestra la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponga que los puntos $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ y (h, y_2) están sobre la gráfica. Puede demostrarse que el área encerrada por la parábola, el eje x y las rectas $x = -h$ y $x = h$ es

$$\text{Área} = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c)$$

Demostrar que esta área también puede ser obtenida mediante

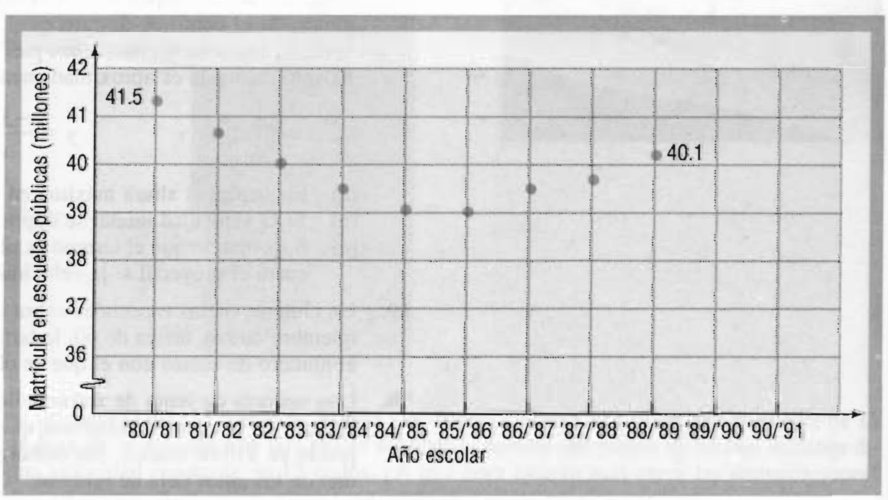
$$\text{Área} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$



76. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son enteros impares. Si x es un entero, demuestre que $f(x)$ debe ser un entero impar. [*Nota:* x es un entero par o impar.]

77. Construya una función cuadrática que abra hacia abajo y tenga una sola intersección-x. Compárela con las de sus compañeros. ¿Cuáles son sus semejanzas? ¿Cuáles sus diferencias?

78. La figura ilustra información verdadera acerca de la matrícula en todas las escuelas públicas estadounidenses (tanto de nivel elemental como de nivel medio) para los años académicos de 1980–1981 a 1988–1989. Suponga que los puntos están sobre los de una parábola y que una matrícula mínima de 39 millones ocurrió entre 1984–1985 y 1985–1986. Encuentre una ecuación para esta parábola y, suponiendo que la tendencia continúa, utilícela para predecir la matrícula de escuelas públicas estadounidenses en 1991–1992. Investigue cuál fue la matrícula real en ese periodo. Compare su proyección y escriba brevemente sus impresiones.



3.2 Funciones polinomiales

Función polinomial

Una **función polinomial** es una función de la forma

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \qquad (1)$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y n es un entero no negativo. El dominio lo constituyen todos los números reales.

Así, una función polinomial es una cuya regla está dada por un polinomio en una variable (consulte la sección 1.1). El **grado** de una función polinomial es el grado del polinomio en una variable.

EJEMPLO 1 *Identificación de funciones polinomiales*

Determinar cuáles de las funciones siguientes son polinomiales. Para aquellas que lo sean encuentre su grado; para las que no lo sean indique por qué no lo son.

(a) $f(x) = 2 - 3x^4$ (b) $g(x) = \sqrt{x}$ (c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x^3 - 1}$

(d) $F(x) = 0$ (e) $G(x) = 8$

Solución

(a) f es una función polinomial de grado 4.

(b) g no es una función polinomial. La variable x está elevada a la potencia $\frac{1}{2}$ que no es un entero no negativo.

(c) h no es una función polinomial. Es el cociente de dos polinomios y el polinomio en el denominador es de grado positivo.

(d) F es la función polinomial cero; no se le asigna grado alguno.

(e) G es una función constante diferente de cero, una función polinomial de grado cero. ■

■ Ahora resuelva los problemas 1 y 5.

Ya hemos analizado en detalle funciones polinomiales de grado 0, 1 y 2. *Véase* la tabla 1 para un resumen de las características de las gráficas de estas funciones polinomiales.

TABLA 1

GRADO	FORMA	NOMBRE	GRÁFICA
Sin grado	$f(x) = 0$	Función cero	El eje x
0	$f(x) = a_0,\quad a_0 \neq 0$	Función constante	Recta horizontal con intersección-y en a_0
1	$f(x) = a_1x + a_0,\quad a_1 \neq 0$	Función lineal	Recta no vertical, no horizontal con pendiente a_1 e intersección-y a_0
2	$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,\quad a_2 \neq 0$	Función cuadrática	Parábola: la gráfica abre hacia arriba si $a_2 > 0$; abre hacia abajo si $a_2 < 0$

Funciones potencia

Primero, consideremos una clase especial de función polinomial llamada *función potencia*.

Función potencia de grado n

Una **función potencia de grado n** es de la forma

$$f(x) = ax^n \tag{2}$$

donde a es un número real, $a \neq 0$, y $n > 0$ es un entero.

La gráfica de una función potencia de grado 1, $f(x) = ax$, es una recta, con pendiente a, que pasa por el origen. La gráfica de una función potencia de grado 2, $f(x) = ax^2$, es una parábola, con vértice en el origen, que abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.

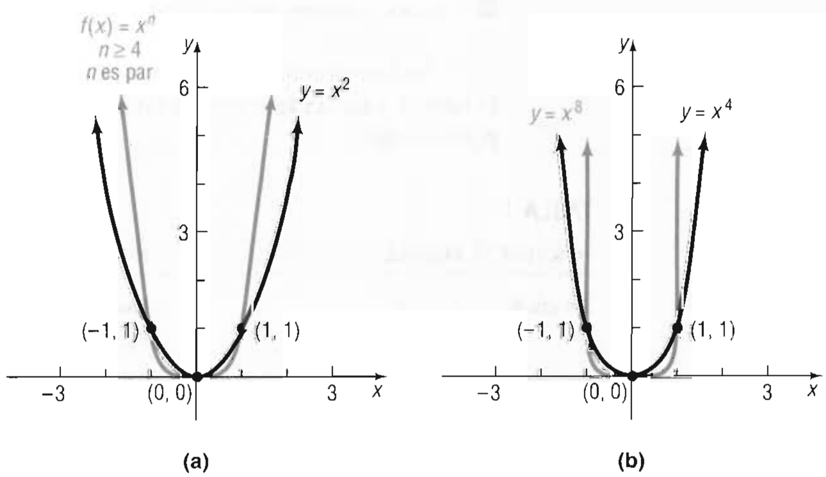
Si sabemos cómo hacer la gráfica de una función potencia de la forma $f(x) = x^n$, entonces una compresión o un alargamiento y, tal vez, una reflexión con respecto al eje x, nos permitirán obtener la gráfica de $g(x) = ax^n$. En consecuencia, nos debemos concentrar en la graficación de funciones potencia de la forma $f(x) = x^n$.

Empecemos con funciones potencia de grado par de la forma $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y n es par. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales y su rango el conjunto de los números reales no negativos. Esta función es par (¿advierte por qué?), de aquí que su gráfica sea simétrica con respecto al eje y. Su gráfica siempre contiene al origen y a los puntos $(-1, 1)$ y $(1, 1)$.

Si $n = 2$, la gráfica es la conocida parábola $y = x^2$ que abre hacia arriba, con vértice en el origen. Si $n \geq 4$, la gráfica de $f(x) = x^n$, siendo n par, estará más cercana al eje x que la parábola $y = x^2$ si $-1 < x < 1$, y más alejada del eje x que la parábola $y = x^2$ si $x < -1$ o si $x > 1$. La figura 15(a) ilustra esta conclusión. La figura 15(b) muestra una comparación de las gráficas de $y = x^4$ y $y = x^8$.

De la figura 15 podemos apreciar que cuando n se incrementa la gráfica de $f(x) = x^n$, $n \geq 2$ y par, tiende a ser plana cerca del origen y a crecer rápidamente conforme x se aleja del cero. Para n grande, puede parecer que cerca del origen la gráfica coincide con el eje x pero no es así; la gráfica en realidad sólo toca al eje x en el origen (*véase* la tabla 2). También, para n grande, puede parecer que

FIGURA 15



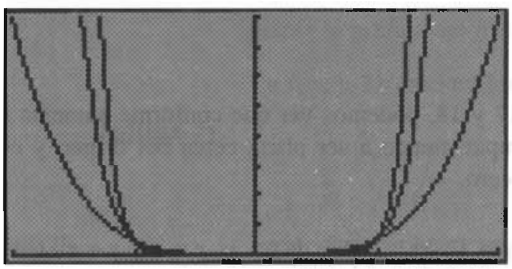
$x < -1$ o para $x > 1$ la gráfica es vertical pero tampoco es así; lo que sucede es que aumenta muy rápido en esos intervalos. Si la gráfica se amplificara muchas veces, estas distinciones serían claras.

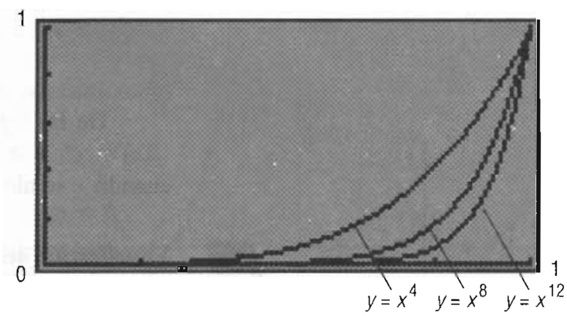
TABLA 2

	$x = 0.1$	$x = 0.3$	$x = 0.5$
$f(x) = x^8$	10^{-8}	0.0000656	0.0039063
$f(x) = x^{20}$	10^{-20}	$3.487 \cdot 10^{-11}$	0.000001
$f(x) = x^{40}$	10^{-40}	$1.216 \cdot 10^{-21}$	$9.095 \cdot 10^{-13}$

Visualizando los conceptos. Hacer la gráfica $y = x^4$, $y = x^8$ y $y = x^{12}$ utilizando una pantalla con $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 16$. Luego hacer la gráfica de cada una otra vez utilizando en la pantalla $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. *Véase* la figura 16.

FIGURA 16

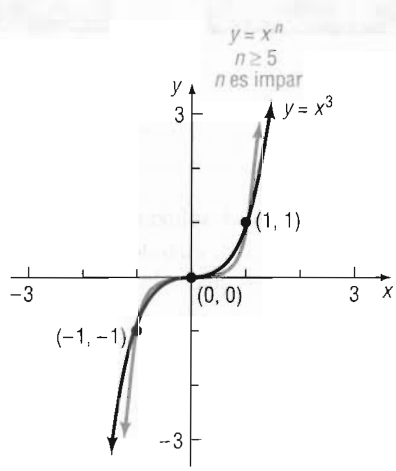




Ahora consideremos las funciones potencia de grado impar de la forma $f(x) = x^n$, $n \geq 3$ e impar. El dominio y el rango de f son el conjunto de los números reales. Esta función potencia es una función impar (¿advierte por qué?), de aquí que su gráfica sea simétrica con respecto al origen. Su gráfica siempre contiene al origen y a los puntos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

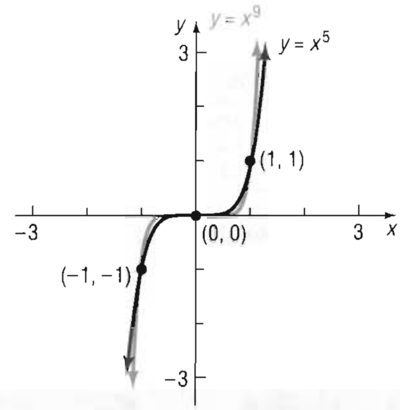
La gráfica de $f(x) = x^n$ cuando $n = 3$ se ha mostrado varias veces y se repite en la figura 17. Si $n \geq 5$, la gráfica de $f(x) = x^n$, siendo n impar, está más cercana al eje x que la de $y = x^3$ si $-1 < x < 1$ y más alejada del eje x que la de $y = x^3$ si $x < -1$ o si $x > 1$. La figura 17 también ilustra esta conclusión.

FIGURA 17



La figura 18 muestra una comparación de las gráficas de $y = x^5$ de $y = x^9$.

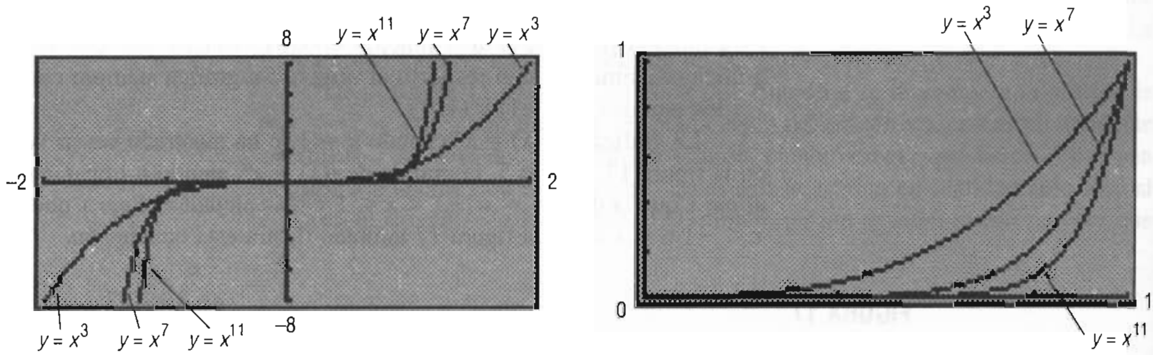
FIGURA 18



De las figuras 17 y 18, podemos ver que conforme aumenta n la gráfica de $f(x) = x^n$, $n \geq 3$ e impar, tiende a ser plana cerca del origen y es muy vertical cuando x se aleja del cero.

Visualización del concepto. Hacer la gráfica de $y = x^3$, $y = x^7$ y $y = x^{11}$ utilizando en la pantalla $-2 \leq x \leq 2$, $-8 \leq y \leq 8$. Luego hacer la gráfica de cada una otra vez usando en la pantalla $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. *Véase* la figura 19.

FIGURA 19



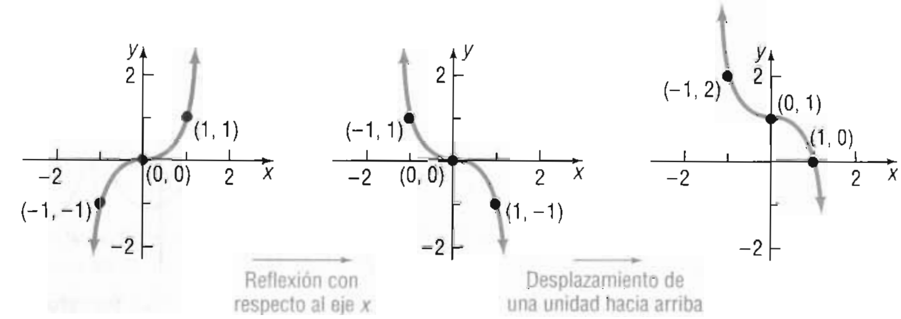
Los métodos de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión, estudiados en la sección 2.3, cuando se utilizan junto con los hechos que se acaban de presentar nos permiten hacer la gráfica de una gran variedad de polinomios.

EJEMPLO 2 *Graficación de funciones polinomiales utilizando desplazamientos, reflexiones y semejanzas*

Hacer la gráfica de: $f(x) = 1 - x^5$

Solución La figura 20 muestra los pasos necesarios. ■

FIGURA 20



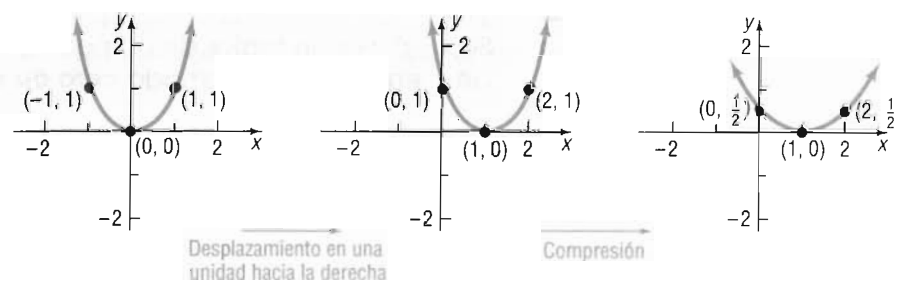
(a) $y = x^5$ (b) $y = -x^5$ (c) $y = -x^5 + 1 = 1 - x^5$

EJEMPLO 3 *Graficación de funciones polinomiales utilizando desplazamientos, reflexiones y semejanzas*

Hacer la gráfica de: $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^4$

Solución La figura 21 muestra los pasos necesarios. ■

FIGURA 21



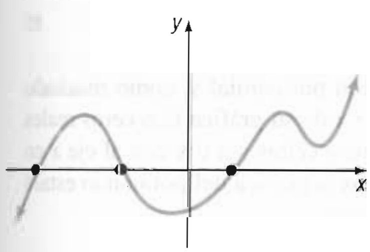
(a) $y = x^4$ (b) $y = (x-1)^4$ (c) $y = \frac{1}{2}(x-1)^4$

■ Ahora resuelva el problema 15.

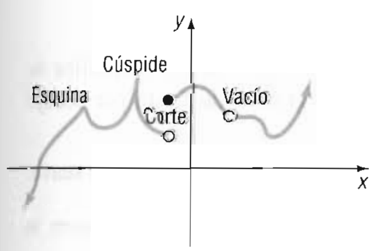
Graficación de otros polinomios

Para hacer la gráfica de la mayoría de las funciones polinomiales de grado 3 o superior se necesitan técnicas que van más allá del objetivo de este libro. Si toma un curso de cálculo aprenderá que la gráfica de toda función polinomial es suave y continua. Por **suave** queremos decir que la gráfica no tiene esquinas o cúspides; **continua** significa que la gráfica no tiene cortes ni vacíos y que puede ser dibujada sin interrupciones. *Véanse* las figuras 22(a) y 22(b).

FIGURA 22



(a) Gráfica de una función polinomial: suave y continua.



(b) No puede ser la gráfica de una función polinomial.

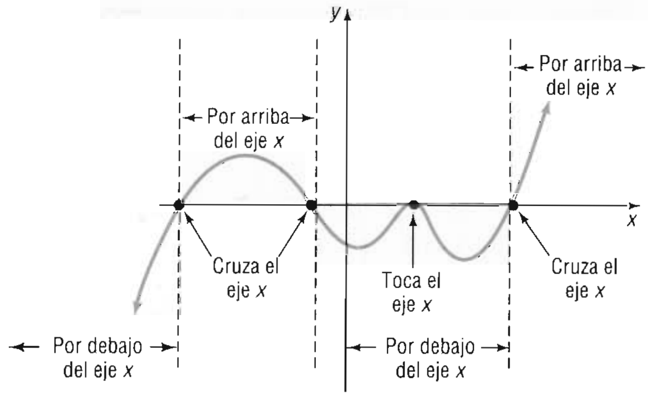
La figura 23 muestra la gráfica de una función polinomial con cuatro intersecciones-x. Observe que en las intersecciones-x la gráfica debe cruzar o tocar al eje x. En consecuencia, entre intersecciones-x consecutivas la gráfica está por arriba o por debajo del eje x. Pronto haremos uso de esta característica de la gráfica de un polinomio.

Si se factoriza completamente una función polinomial f, es fácil resolver la ecuación $f(x) = 0$ y localizar las intersecciones-x de la gráfica. Por ejemplo, si $f(x) = (x-1)^2(x+3)$, entonces las soluciones de la ecuación

$$f(x) = (x-1)^2(x+3) = 0$$

son fáciles de identificar como 1 y -3. En general, si f es una función polinomial y r es un número real para el cual $f(r) = 0$, entonces r es llamado **cero** (real) **de** f,

FIGURA 23



o raíz de f. *Por tanto, los ceros reales de una función polinomial son las intersecciones-x de su gráfica.* También, si $x - r$ es un factor de un polinomio f, entonces $f(r) = 0$ y así r es un cero de f. Si el mismo factor $x - r$ aparece más de una vez, entonces r es llamado **cero repetido,** o **múltiple, de** f. Para ser más precisos, tenemos la definición siguiente

Cero de multiplicidad m

Si $(x - r)^m$ es un factor de un polinomio f y $(x - r)^{m+1}$ no es factor de f, entonces r es llamada **cero de multiplicidad** m **de** f.

EJEMPLO 4

Identificación de ceros y de sus multiplicidades

Para el polinomio

$$f(x) = 5(x - 2)(x + 3)^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^4$$

2 es un cero de multiplicidad 1

-3 es un cero de multiplicidad 2

$\frac{1}{2}$ es un cero de multiplicidad 4 ■

Suponga que es posible factorizar una función polinomial y, como resultado de ello, localizar todas las intersecciones con el eje x de su gráfica (los ceros reales de la función). Como se mencionó antes, estas intersecciones-x dividen al eje x en intervalos abiertos, y en cada uno de tales intervalos la gráfica del polinomio estará por arriba o por debajo del eje x. *Veamos* un ejemplo.

EJEMPLO 5

Graficación de polinomios usando sus intersecciones-x

Para el polinomio: $f(x) = x^2(x - 2)$

(a) Encontrar las intersecciones-x y y de la gráfica de f.

(b) Utilizar las intersecciones-x para determinar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x y los intervalos donde la gráfica de f está por debajo del eje x.

(c) Localizar otros puntos de la gráfica y conectarlos por medio de una curva suave.

Solución (a) La intersección-y es $f(0) = 0^2(0 - 2) = 0$. Las intersecciones-x satisfacen la ecuación

$$f(x) = x^2(x - 2) = 0$$

de la cual obtenemos

$$x^2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad\qquad x = 2$$

Las intersecciones-x son 0 y 2.

(b) Las dos intersecciones-x dividen al eje x en tres intervalos:

$$-\infty < x < 0 \qquad 0 < x < 2 \qquad 2 < x < \infty$$

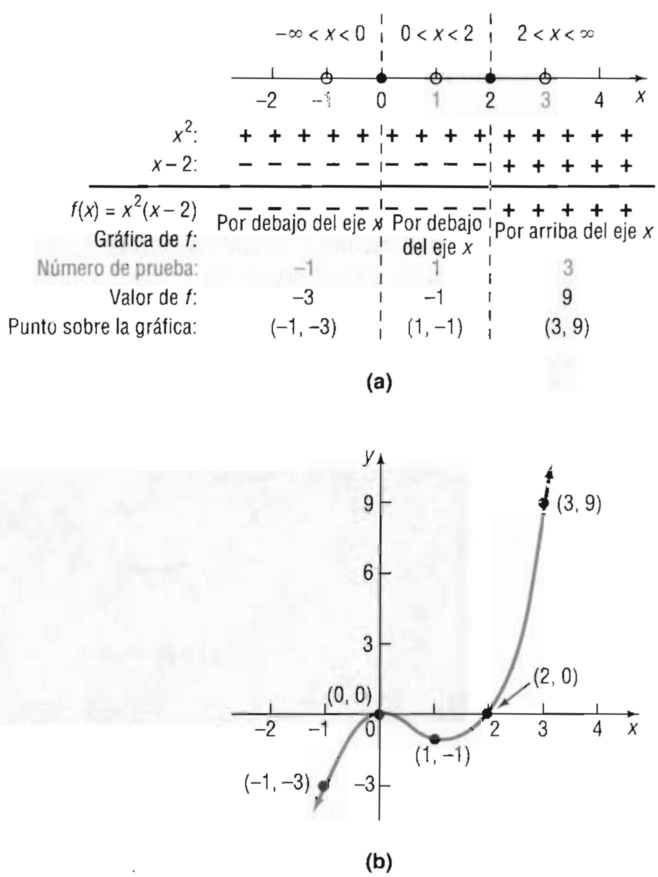
Ya que la gráfica de f cruza (o toca) al eje x sólo en $x = 0$ y $x = 2$, se deduce que la gráfica de f está por arriba del eje x [$f(x) > 0$] o por debajo del eje x [$f(x) < 0$] en cada uno de estos tres intervalos. Por tanto, necesitamos resolver las siguientes dos desigualdades:

$$f(x) = x^2(x - 2) > 0 \quad \text{y} \quad f(x) = x^2(x - 2) < 0$$

Recordando el procedimiento analizado en la sección 1.4, construimos la figura 24(a). Por tanto, la gráfica de f está por arriba del eje x para $2 < x < \infty$ y por debajo del eje x para $-\infty < x < 0$ y $0 < x < 2$.

(c) Ya que utilizamos números de prueba, conocemos tres puntos adicionales de la gráfica: $(-1, -3)$, $(1, -1)$ y $(3, 9)$. La figura 24(b) ilustra estos puntos, las intersecciones y una curva suave y continua (la gráfica de f) que los conecta.

FIGURA 24



Observe que la gráfica de f en la figura 24(b) *cruza* el eje x en $x = 2$, *un cero de multiplicidad 1*. También note que la gráfica de f *toca* al eje x en $x = 0$, un *cero de multiplicidad 2*, ya que la gráfica está por debajo del eje x a ambos lados de (0, 0).

Esto sugiere el resultado siguiente:

Si r es un cero de multiplicidad par	El signo de $f(x)$ no cambia de un lado al otro de r.	La gráfica **toca** al eje x en r.
Si r es un cero de multiplicidad impar	El signo de $f(x)$ cambia de un lado al otro de r.	La gráfica **cruza** al eje x en r.

■ Ahora resuelva el problema 19.

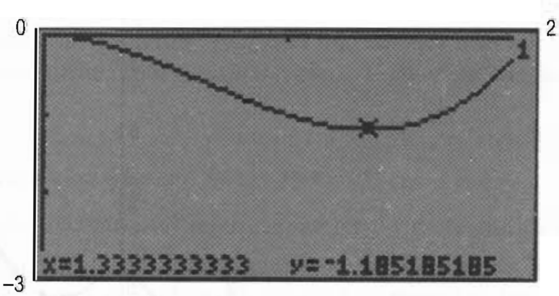
Observe otra vez la figura 24(b). No podemos estar seguros de qué tan abajo va realmente la gráfica en el intervalo $0 < x < 2$. Pero sabemos que en algún punto en el intervalo $0 < x < 2$ la gráfica de f debe cambiar de dirección (de decreciente a creciente). Los puntos en los cuales una gráfica cambia de dirección son llamados **puntos de retorno.** En cálculo, tales puntos se denominan **máximos locales** o **mínimos locales,** y se dan técnicas para localizarlos. Así que no le preguntaremos acerca de la localización de puntos de retorno en sus gráficas. En lugar de eso, usaremos el siguiente resultado de cálculo que nos dice el número máximo de puntos de retorno que la gráfica de un polinomio puede tener.

Teorema Si f es una función polinomial de grado n, entonces tiene cuando mucho $n - 1$ puntos de retorno. ■

Por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^2(x - 2)$ mostrada en la figura 24(b), es la gráfica de un polinomio de grado 3 y tiene $3 - 1 = 2$ puntos de retorno: uno en (0, 0) y el otro en algún punto del intervalo $0 < x < 2$.

Exploración: Un dispositivo de graficación puede ser utilizado para localizar los puntos de retorno de una gráfica. Hacer la gráfica de $y = x^2(x - 2)$. Utilizar TRACE para aproximar la localización del punto de retorno en el intervalo $0 < x < 2$. *Véase* la figura 25.

FIGURA 25



■

Una última observación acerca de la figura 24(b): observe que la gráfica de $f(x) = x^2(x - 2)$ se parece un poco a la de $y = x^3$. En efecto, para valores grandes de x, ya sean positivos o negativos, hay poca diferencia. Para que usted los vea, utilice su calculadora para comparar los valores de $f(x) = x^2(x - 2)$ y $y = x^3$ para $x = -100,000$ y $x = 100,000$.

Teorema

Para valores grandes de x, ya sean positivos o negativos, la gráfica del polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

se parece a la gráfica de la función potencia

$$y = a_n x^n$$ ■

El siguiente recuadro resume algunas características de la gráfica de una función polinomial.

Resumen: Gráfica de una función polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$

Grado del polinomio f: n
Número máximo de puntos de retorno: $n - 1$
En un cero de multiplicidad par: la gráfica de f toca al eje x
En un cero de multiplicidad impar: la gráfica de f cruza al eje x
Entre ceros consecutivos, la gráfica de f está por arriba o por debajo del eje x.
Para valores grandes de x, la gráfica de f se comporta como la gráfica de $y = a_n x^n$.

EJEMPLO 6 *Análisis de la gráfica de una función polinomial*

Para el polinomio: $f(x) = x^3 + x^2 - 12x$

(a) Encontrar las intersecciones-x y las intersecciones-y de la gráfica de f.

(b) Determinar si la gráfica cruza o toca al eje x en cada una de sus intersecciones.

(c) Encontrar la función potencia a la que la gráfica de f se parece para valores grandes de x.

(d) Determine el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.

(e) Utilice las intersecciones-x y números de prueba para encontrar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x y los intervalos donde la gráfica está por debajo del eje x.

(f) Poner toda la información junta y conectar los puntos por medio de una curva suave y continua para obtener la gráfica de f.

Solución

(a) La intersección-y es $f(0) = 0$. Para determinar las intersecciones-x, si las hay, factorizamos f:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 12x = x(x^2 + x - 12) = x(x + 4)(x - 3)$$

Resolviendo la ecuación $f(x) = x(x + 4)(x - 3) = 0$, encontramos que las intersecciones-x, o ceros de f, son -4, 0, y 3.

(b) Ya que cada cero de f es de multiplicidad 1, la gráfica de f cruza al eje x en cada intersección-x.

(c) La gráfica de f se parece a la de la función potencia $y = x^3$ para valores grandes de x.

(d) La gráfica de f tendrá como máximo dos puntos de retorno.

(e) Las tres intersecciones-x lo dividen en cuatro intervalos:

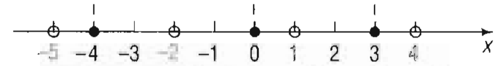
$$-\infty < x < -4 \qquad -4 < x < 0 \qquad 0 < x < 3 \qquad 3 < x < \infty$$

Para determinar el signo de $f(x)$ en cada intervalo, seleccionamos números de prueba y construimos la figura 26(a).

(f) La gráfica de f está dada en la figura 26(b).

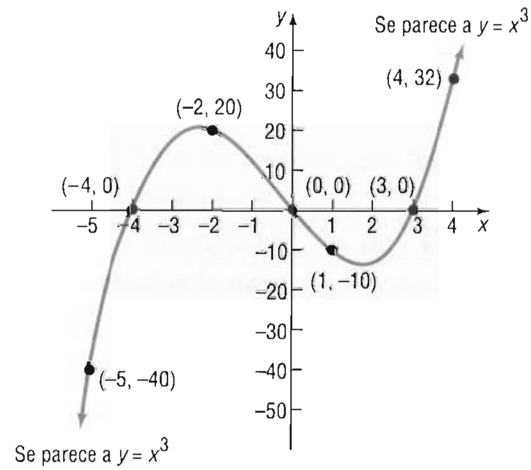
FIGURA 26
$f(x) = x^3 + x^2 - 12x$

	$-\infty < x < -4$	$-4 < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x < \infty$



Número de prueba:	−5	−2	1	4
Valor de *f*:	−40	20	−10	32
Gráfica de *f*:	Por debajo del eje *x*	Por arriba del eje *x*	Por debajo del eje *x*	Por arriba del eje *x*
Punto sobre la gráfica	(−5, −40)	(−2, 20)	(1, −10)	(4, 32)

(a)



(b)

Verificación: Hacer la gráfica de $y = x^3 + x^2 - 12x$. Compararla con la que aparece en la figura 26. Utilizar TRACE para localizar los dos puntos de retorno. ■

EJEMPLO 7 *Análisis de la gráfica de una función polinomial*

Seguir las instrucciones del ejemplo 6 para el polinomio siguiente:

$$f(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$$

Solución (a) La intersección-y es $f(0) = 0$. Las intersecciones-x satisfacen la ecuación

$$f(x) = x^2(x - 4)(x + 1) = 0$$

De modo que

$$\begin{array}{lllll} x^2 = 0 & \text{o} & x - 4 = 0 & \text{o} & x + 1 = 0 \\ x = 0 & & x = 4 & & x = -1 \end{array}$$

Las intersecciones-x son -1, 0 y 4.

(b) La intersección 0 es un cero de multiplicidad 2, de modo que la gráfica de f tocará al eje x en 0; 4 y -1 son ceros de multiplicidad 1, de modo que la gráfica de f cruzará al eje x en 4 y -1.

(c) La gráfica de f se parece a la función potencia $y = x^4$ para valores grandes de x.

(d) La gráfica de f tendrá cuando mucho tres puntos de retorno.

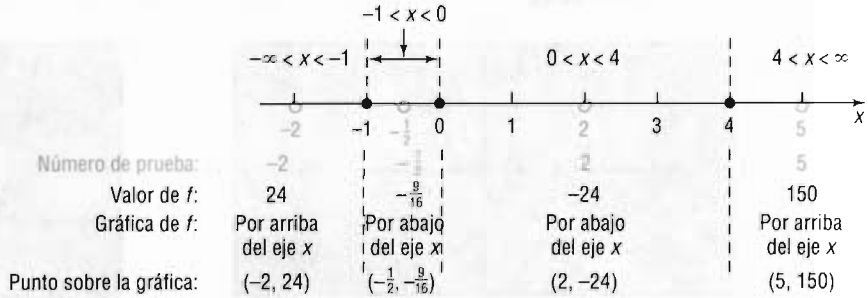
(e) Las tres intersecciones-x dividen al eje x en cuatro intervalos:

$$-\infty < x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 4 \qquad 4 < x < \infty$$

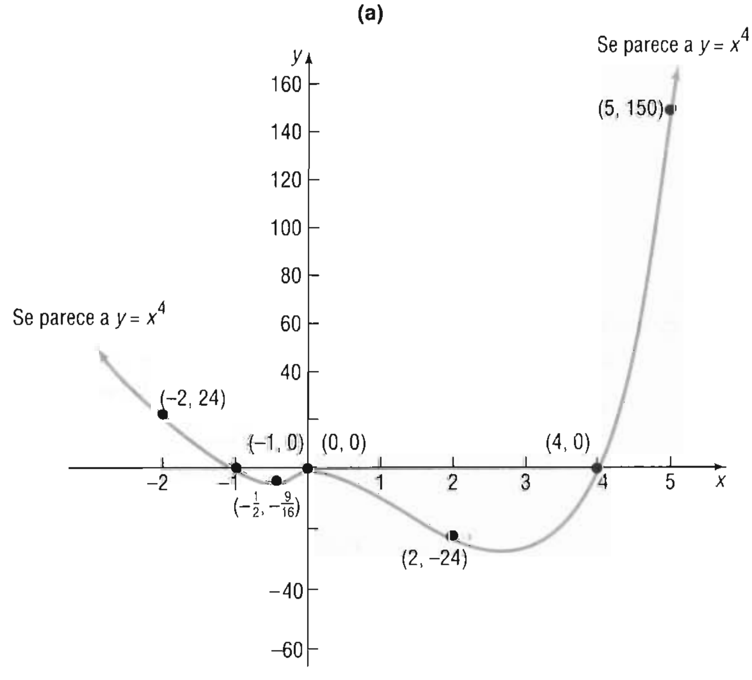
Para determinar el signo de $f(x)$ en cada intervalo, seleccionamos números de prueba y construimos la figura 27(a).

(f) La gráfica de f está dada en la figura 27(b)

FIGURA 27
$f(x) = x^2(x - 4)(x + 1)$



(a)



(b)

Verificación: Hacer la gráfica de $y = x^2\,(x - 4)(x + 1)$. Compararla con la que aparece en la figura 27. Utilizar TRACE para localizar los dos puntos de retorno además del (0, 0). ■

■ Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 8 *Uso de un dispositivo de graficación para hacer la gráfica de una función polinomial*

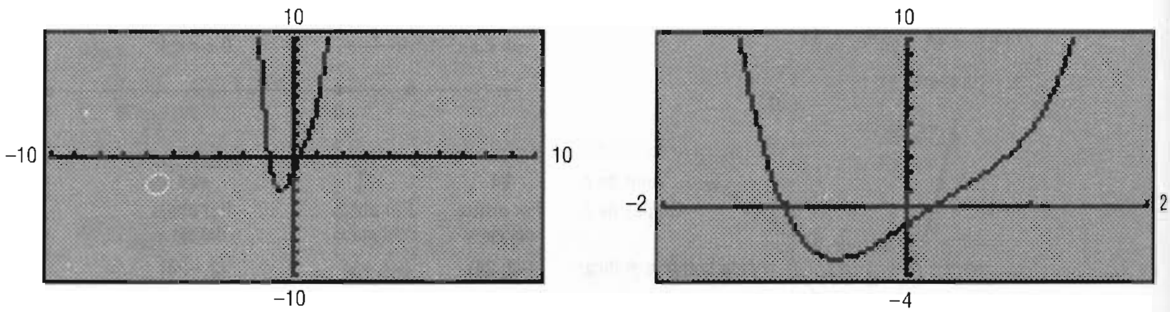
Hacer la gráfica: $f(x) = \pi x^4 - \sqrt{7}x^3 + 5x - 1$

Solución Empecemos haciendo las observaciones siguientes:

1. La intersección-y es $f(0) = -1$
2. La gráfica se comportará como $y = x^4$ para valores grandes de x.
3. La gráfica no tendrá más de cuatro intersecciones-x ni más de tres puntos de retorno.

Estas observaciones nos ayudan para establecer la pantalla en nuestro primer intento de dibujar la gráfica completa. *Véase* la figura 28(a). La figura 28(b) muestra la gráfica completa.

FIGURA 28



Utilizando TRACE, encontramos que las intersecciones-x, redondeadas a dos decimales, son -1.01 y 0.20. (Consulte el apéndice B, sección B.5, *Aproximaciones*.) El único punto de retorno se encuentra en $(-0.57, -3.02)$, redondeado a dos decimales.

Resumen

Para bosquejar la gráfica de una función polinomial $y = f(x)$, se deben seguir los siguientes:

Pasos para hacer la gráfica de un polinomio

PASO 1: (a) Encontrar las intersecciones-x, si las hay, resolviendo la ecuación $f(x) = 0$.
(b) Encontrar las intersecciones-y haciendo $x = 0$ y calculando el valor de $f(0)$.

PASO 2: Determinar si la gráfica de f cruza o toca al eje x en cada intersección-x.

PASO 3: Encontrar la función potencia a la que la gráfica de f se parece para valores grandes de x.

PASO 4: Determinar el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.

PASO 5: Utilizar las intersecciones-x y números de prueba para encontrar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x y los intervalos donde la gráfica está por debajo del eje x.

PASO 6: Trazar los puntos obtenidos en los pasos 1 y 5, y utilizar la información restante para conectarlos mediante una curva suave y continua.

3.2

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 10 determine cuáles funciones son polinomiales. Para las que lo sean indique el grado y para las que no, diga por qué no lo son.

1. $f(x) = 4x + x^3$

2. $f(x) = 5x^2 + 4x^4$

3. $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{2}$

4. $h(x) = 3 - \dfrac{1}{2}x$

5. $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = x(x - 1)$

7. $g(x) = x^{3/2} - x^2 + 2$

8. $h(x) = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

9. $F(x) = 5x^4 - \pi x^3 + \dfrac{1}{2}$

10. $F(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^3}$

En los problemas del 11 al 18 utilice la gráfica de $y = x^4$ para hacer la gráfica de cada función.

11. $f(x) = (x+1)^4$ **12.** $f(x) = x^4 + 2$ **13.** $f(x) = \frac{1}{2}x^4$

14. $f(x) = -x^4$ **15.** $f(x) = 2(x+1)^4 + 1$ **16.** $f(x) = 3 - (x+2)^4$

17. $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^4 - 1$ **18.** $f(x) = 1 - 2(x+1)^4$

En los problemas del 19 al 28, para cada función polinomial enliste cada cero real y su multiplicidad. Determine si la gráfica cruza o toca al eje x en cada intersección-x.

19. $f(x) = 3(x-7)(x+3)^2$ **20.** $f(x) = 4(x+4)(x+3)^3$

21. $f(x) = 4(x^2+1)(x-2)^3$ **22.** $f(x) = 2(x-3)(x+4)^3$

23. $f(x) = -2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2(x^2+4)^2$ **24.** $f(x) = \left(x-\frac{1}{3}\right)^2(x-1)^3$

25. $f(x) = (x-5)^3(x+4)^2$ **26.** $f(x) = (x+\sqrt{3})^2(x-2)^4$

27. $f(x) = 3(x^2+8)(x^2+9)^2$ **28.** $f(x) = -2(x^2+3)^3$

En los problemas del 29 al 50, para cada función polinomial f:

(a) Encuentre las intersecciones-x y las intersecciones-y de f.
(b) Determine si la gráfica de f cruza o toca el eje x en cada intersección-x.
(c) Encuentre la función potencia a la que la gráfica de f se parece para valores grandes de x.
(d) Determine el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.
(e) Utilice las intersecciones-x y números de prueba para encontrar los intervalos donde la gráfica de f está por arriba del eje x y donde está por debajo del eje x.
(f) Trace los puntos obtenidos en las partes (a) y (e), y utilice la información restante para conectarlos por medio de una curva suave y continua.

29. $f(x) = (x-1)^2$ **30.** $f(x) = (x-2)^3$

31. $f(x) = x^2(x-3)$ **32.** $f(x) = x(x+2)^2$

33. $f(x) = 6x^3(x+4)$ **34.** $f(x) = 5x(x-1)^3$

35. $f(x) = -4x^2(x+2)$ **36.** $f(x) = -\frac{1}{2}x^3(x+4)$

37. $f(x) = x(x-2)(x+4)$ **38.** $f(x) = x(x+4)(x-3)$

39. $f(x) = 4x - x^3$ **40.** $f(x) = x - x^3$

41. $f(x) = x^2(x-2)(x+2)$ **42.** $f(x) = x^2(x-3)(x+4)$

43. $f(x) = x^2(x-2)^2$ **44.** $f(x) = x^3(x-3)$

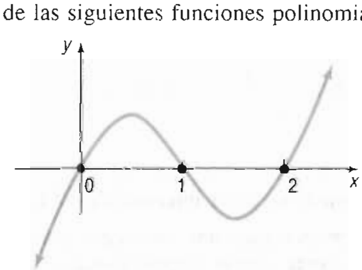
45. $f(x) = x^2(x-3)(x+1)$ **46.** $f(x) = x^2(x-3)(x-1)$

47. $f(x) = x(x+2)(x-4)(x-6)$ **48.** $f(x) = x(x-2)(x+2)(x+4)$

49. $f(x) = x^2(x-2)(x^2+3)$ **50.** $f(x) = x^2(x^2+1)(x+4)$

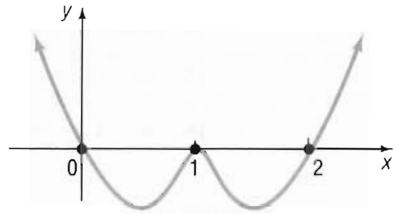
51. Consulte la ilustración. ¿Cuáles de las siguientes funciones polinomiales podría tener esta gráfica? (Puede ser posible más de una respuesta.)

(a) $y = -4x(x-1)(x-2)$
(b) $y = x^2(x-1)^2(x-2)$
(c) $y = 3x(x-1)(x-2)$
(d) $y = x(x-1)^2(x-2)^2$
(e) $y = x^3(x-1)(x-2)$
(f) $y = -x(1-x)(x-2)$



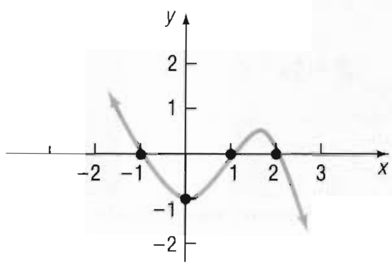
52. Consulte la ilustración. ¿Cuáles de las siguientes funciones polinomiales podría tener esta gráfica? (Puede ser posible más de una respuesta.)

(a) $y = 2x^3(x-1)(x-2)^2$
(b) $y = x^2(x-1)(x-2)$
(c) $y = x^3(x-1)^2(x-2)$
(d) $y = x^2(x-1)^2(x-2)^2$
(e) $y = 5x(x-1)^2(x-2)$
(f) $y = -2x(x-1)^2(2-x)$



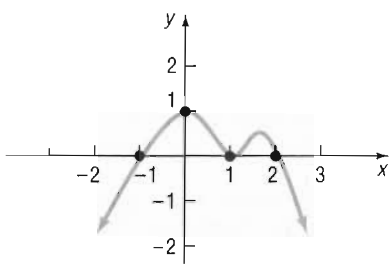
53. Consulte la ilustración. ¿Cuáles de las siguientes funciones polinomiales podría tener esta gráfica? (Puede ser posible más de una respuesta.)

(a) $y = \frac{1}{2}(x^2-1)(x-2)$
(b) $y = -\frac{1}{2}(x^2+1)(x-2)$
(c) $y = (x^2-1)\left(1-\frac{x}{2}\right)$
(d) $y = -\frac{1}{2}(x^2-1)^2(x-2)$
(e) $y = \left(x^2+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)(2-x)$
(f) $y = -(x-1)(x-2)(x+1)$



54. Consulte la ilustración. ¿Cuáles de las siguientes funciones polinomiales podría tener esta gráfica? (Puede ser posible más de una respuesta.)

(a) $y = -\frac{1}{2}(x^2-1)(x-2)(x+1)$
(b) $y = -\frac{1}{2}(x^2+1)(x-2)(x+1)$
(c) $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2(x-1)(x-2)$
(d) $y = (x-1)^2(x+1)\left(1-\frac{x}{2}\right)$
(e) $y = -(x-1)^2(x-2)(x+1)$
(f) $y = -\left(x^2+\frac{1}{2}\right)(x-1)^2(x+1)(x-2)$



En los problemas del 55 al 60 haga la gráfica de cada función polinomial. Aproxime las intersecciones-x, si las hay, y redondee los puntos de retorno a dos decimales.

55. $y = \pi x^3 + \sqrt{2}x^2 - x - 2$
56. $y = -2x^3 + \pi x^2 + \sqrt{3}x + 1$
57. $y = 2x^4 - \pi x^3 + \sqrt{5}x - 4$
58. $y = -1.2x^4 + 0.5x^2 - \sqrt{3}x + 2$
59. $y = -2x^5 - \sqrt{2}x^2 - x - \sqrt{2}$
60. $y = \pi x^5 + \pi x^4 + \sqrt{3}x + 1$

61. ¿La gráfica de un polinomio, puede no tener intersección-y? Explique su respuesta.

62. Escriba un párrafo breve que proporcione una estrategia general para hacer la gráfica de una función polinomial. Asegúrese de mencionar lo siguiente: grado, intersecciones con los ejes y puntos de retorno.

63. Construya un polinomio que tenga las características siguientes: que cruce el eje x en -1 y 4, toque al eje x en 0 y 2 y esté por arriba del eje x entre 0 y 2. Dé su polinomio a un compañero de clase y pídale que le haga una crítica.

64. Construya dos polinomios, que no sean del mismo grado, con las características siguientes: que crucen el eje x en -2, toquen al eje x en 1 y estén por arriba del eje x entre -2 y 1. Dé sus polinomios a un compañero de clase y pídale que le haga una crítica.

65. La gráfica de una función polinomial siempre es suave y continua. Mencione una función estudiada antes que sea suave pero no continua, y una función que sea continua pero no suave.

66. ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos con respecto a la gráfica del polinomial $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$? (Dé una razón para sus conclusiones.)
(a) Corta al eje y solamente en un punto.
(b) Corta al eje x en un máximo de tres puntos.
(c) Corta al eje x al menos una vez.
(d) Para valores grandes de x, se comporta como la gráfica de $y = x^3$.
(e) Es simétrica con respecto al origen.
(f) Contiene al origen.

3.3 Funciones racionales

Los cocientes de números enteros son llamados *números racionales.* De manera semejante, cocientes de funciones polinomiales son llamados *funciones racionales.*

Funciones racionales

Una **función racional** es una función de la forma

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

donde p y q son funciones polinomiales y q no es el polinomio cero. El dominio de una función racional está constituido por todos los números reales excepto aquellos donde el denominado q sea cero.

EJEMPLO 1 *Determinación del dominio de una función real*

(a) El dominio de $R(x) = \dfrac{2x^2 - 4}{x + 5}$ consiste de todos los números reales x excepto -5.

(b) El dominio de $R(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ consiste de todos los números reales x excepto -2 y 2.

(c) El dominio de $R(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ consiste de todos los números reales.

(d) El dominio de $R(x) = \dfrac{-x^2 + 2}{3}$ consiste de todos los números reales x excepto 1.

(e) El dominio de $R(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ consiste de todos los números reales x excepto 1. ■

Es importante observar que las funciones

$$R(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{y} \quad f(x) = x + 1$$

no son iguales, ya que el dominio de R es $\{x | x \neq 1\}$ y el dominio de f son todos los números reales.

■ Ahora resuelva el problema 3.

Si $R(x) = p(x)/q(x)$ es una función racional y p y q no tienen factores comunes, entonces se dice que la función racional R está en su **mínima expresión.** Se considerará a lo largo de esta sección que todas las funciones racionales están en su mínima expresión.

Para una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ que esté en su mínima expresión, los ceros, si los hay, del numerador son las intersecciones-x de la gráfica de R y así jugarán un papel importante en la graficación de R. Los ceros del denominador de R [esto es, los números x, si los hay, para los cuales $q(x) = 0$], aunque no están en el dominio de R, también juegan un papel importante en su gráfica. En breve analizaremos ese papel.

Ya hemos estudiado las características de la función racional $f(x) = 1/x$. (Revise el ejemplo 8, página 62.) La siguiente función racional que nos ocupa es $H(x) = 1/x^2$.

EJEMPLO 2 *Graficación de* $y = \dfrac{1}{x^2}$

Hacer la gráfica: $H(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Solución El dominio de $H(x) = 1/x^2$ consiste de todos los números reales x excepto el cero. Por tanto, la gráfica no tiene intersección-y, ya que x nunca puede ser igual a cero. La gráfica no tiene intersección-x, ya que la ecuación $H(x) = 0$ no tiene solución. Por lo tanto, la gráfica de H no cruzará a los ejes de coordenadas. Puesto que

$$H(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = H(x)$$

H es una función par, de modo que su gráfica es simétrica con respecto al eje y. La tabla 3 muestra el comportamiento $H(x) = 1/x^2$ para números positivos x seleccionados (usaremos la simetría para obtener la gráfica de H cuando $x < 0$). En la tabla 3, observamos que, conforme los valores de x se aproximan (se acercan) a cero, los valores de $H(x)$ se incrementan cada vez más en sentido positivo. Cuando esto pasa decimos que H **no está acotada en la dirección positiva,** lo cual simbolizamos escribiendo $H \to \infty$ (se lee "H **tiende a infinito**"). En cálculo, el término **límite** es el utilizado para transmitir estos conceptos. Allí usamos los símbolos $\lim\limits_{x \to 0} H(x) = \infty$, [se lee "el límite de $H(x)$ cuando x tiende a cero es igual a infinito"], para establecer que $H(x) \to \infty$ cuando $x \to 0$. Observe otra vez la tabla 3. Cuando $x \to \infty$, los valores de $H(x)$ se acercan a cero 0. En cálculo, esto es simbolizado $\lim\limits_{x \to \infty} H = 0$. La figura 29 ilustra la gráfica. ■

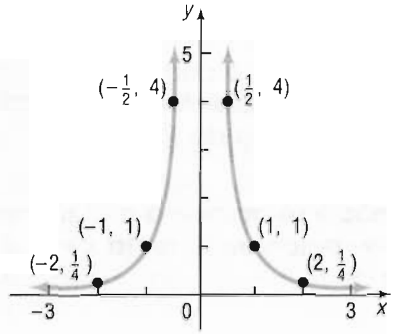
TABLA 3

x	$H(x) = 1/x^2$
$\frac{1}{100}$	10,000
$\frac{1}{10}$	100
$\frac{1}{2}$	4
1	1
2	$\frac{1}{4}$
10	$\frac{1}{100}$
100	$\frac{1}{10,000}$

Algunas veces las técnicas de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión pueden ser utilizadas para hacer la gráfica de una función racional.

FIGURA 29

$H(x) = \dfrac{1}{x^2}$

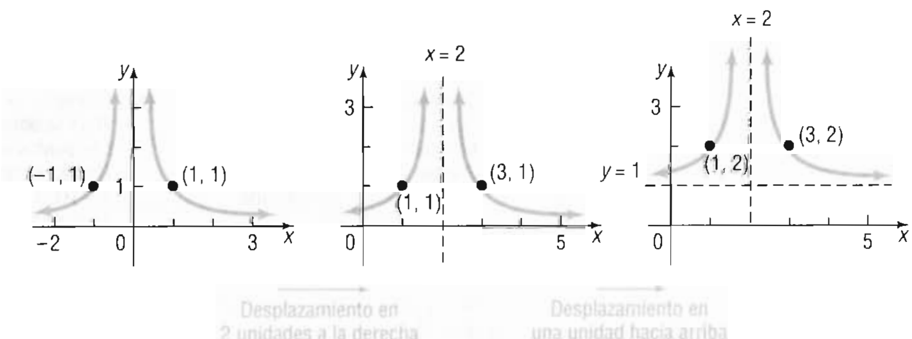


E J E M P L O 3 *Uso de desplazamientos, reflexiones y similaridad, para hacer la gráfica de una función*

Hacer la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 1$

Solución Primero, observamos que el dominio de R consiste de todos los números reales exceptuando a $x = 2$. Para hacer la gráfica de R, iniciamos con la gráfica de $y = 1/x^2$. Para conocer los pasos a seguir *véase* la figura 30.

FIGURA 30



(a) $y = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ (c) $y = \dfrac{1}{(x-2)^2} + 1$

Ahora resuelva el problema 19.

Asíntotas

En la figura 30(c), note que conforme x se vuelve "más" negativa, esto es, cuando se hace **no acotada en la dirección negativa** ($x \to -\infty$, se lee "**x tiende a menos infinito**"), los valores de $R(x)$ tienden a 1. En realidad, podemos concluir lo siguiente de la figura 30(c):

1. Cuando $x \to -\infty$, los valores de $R(x)$ tienden a 1.
2. Cuando x tiende a 2, los valores de $R(x) \to \infty$.
3. Cuando $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ tienden a 1.

Este comportamiento de la gráfica está descrito por la recta vertical $x = 2$ y la recta horizontal $y = 1$. Estas rectas son llamadas *asíntotas* de la gráfica, lo cual definimos como sigue:

Sea R una función:

Asíntota horizontal

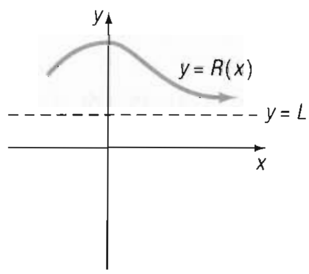
Si, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ tienden a algún número fijo L, entonces la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de R.

Asíntota vertical

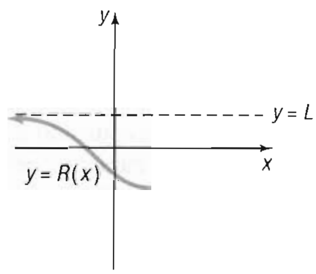
Si, cuando x se aproxima a algún número c, los valores $|R(x)| \to \infty$, entonces la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de R.

Aunque las asíntotas de una función no son parte de su gráfica, proporcionan información acerca de la manera como se ve la gráfica. La figura 31 ilustra algunas posibilidades.

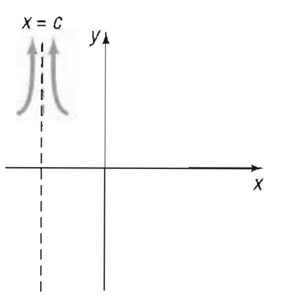
FIGURA 31



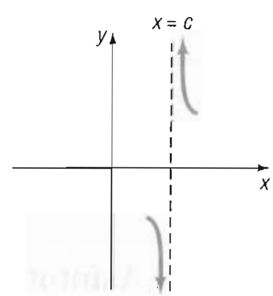
(a) Cuando $x \to \infty$,los valores de $R(x)$ se aproximan a L. Esto es, Los puntos sobre la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $y = L$; $y = L$ es una asíntota horizontal.



(b) Cuando $x \to \infty$,los valores de $R(x)$ se aproximan a L. Esto es, Los puntos sobre la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $y = L$; $y = L$ es una asíntota horizontal.



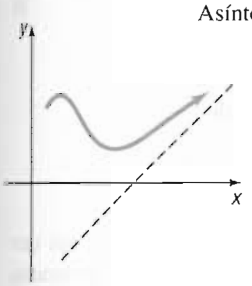
(c) Cuando x se aproxima a c, los valores de $|R(x)| \to \infty$, Esto es, los puntos sobre la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $x = c$; $x = c$ es una asíntota vertical.



(d) Cuando x se aproxima a c, los valores de $|R(x)| \to \infty$, Esto es, los puntos sobre la gráfica de R están cada vez más cercanos a la recta $x = c$; $x = c$ es una asíntota vertical.

Así, una asíntota es una recta que se acerca cada vez más a cierta parte de la gráfica de una función pero nunca la toca. Sin embargo, otras partes de la gráfica de la función pueden cortar a una asíntota no vertical. La gráfica de la función nunca cortará a una asíntota vertical. Observe que una asíntota horizontal, cuando aparece, describe cierto comportamiento de la gráfica cuando $x \to \infty$ o cuando $x \to -\infty$, mientras una asíntota vertical, cuando aparece, describe cierto comportamiento de la gráfica cuando x se aproxima a algún número c.

FIGURA 32
Asíntota oblicua



Si una asíntota no es horizontal ni vertical, es llamada **oblicua.** La figura 32 muestra una asíntota oblicua.

Cómo encontrar asíntotas

Las asíntotas verticales, si las hay, de una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ se encuentran al factorizar el denominador $q(x)$. Suponga que $x - r$ es un factor del denominador. Ahora, cuando x se aproxima a r, simbolizado como $x \to r$, los valores de $x - r$ se aproximan a cero, provocando que el cociente se vuelva no acotado, esto es, causando que $|R(x)| \to \infty$. Con base en la definición, concluimos que la recta $x = r$ es una asíntota vertical.

Teorema de localización de asíntotas verticales

Una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ que se encuentre en su mínima expresión tendrá una asíntota vertical $x = r$ si $x - r$ es un factor del denominador q. ■

Por tanto, si r es un cero del denominador de una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ que está en su mínima expresión, entonces R tendrá la asíntota vertical $x = r$.

Advertencia: Si una función racional no está en su mínima expresión, una aplicación de este teorema puede resultar en un listado incorrecto de asíntotas horizontales.

EJEMPLO 4 *Determinación de asíntotas verticales*

Encontrar las asíntotas verticales, si las hay, de la gráfica de cada función racional.

(a) $R(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ (b) $F(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$ (c) $H(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

Solución

(a) Los ceros del denominador $x^2 - 4$ son -2 y 2. En consecuencia, las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son las asíntotas verticales de la gráfica de R.
(b) El único cero del denominador es 1. Por lo tanto, la recta $x = 1$ es la única asíntota vertical de la gráfica de F.
(c) El denominador no tiene ceros. De modo que la gráfica de H no tiene asíntotas verticales. ■

Como el ejemplo 4 lo señala, las funciones racionales pueden carecer de asíntotas verticales pero también pueden tener una o más de una asíntota vertical. Sin embargo, la gráfica de una función racional nunca cortará a ninguna de sus asíntotas verticales. (¿Advierte por qué?)

Exploración: Hacer la gráfica de las siguientes funciones racionales:

$$y = \frac{1}{x - 1} \qquad y = \frac{x}{x - 1} \qquad y = \frac{x^2}{x - 1} \qquad y = \frac{x^3}{x - 1}$$

Cada una tiene una asíntota vertical $x = 1$. Utilice TRACE para ver lo que sucede cuando x se aproxima a 1. Asegúrese de ver en ambos lados de $x = 1$. ■

El procedimiento para encontrar asíntotas horizontales y oblicuas es más complicado pues necesitamos conocer cómo se comportan los valores de una función cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$.

Si una función racional $R(x)$ es **propia,** esto es, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, los valores de $R(x)$ se aproximan a cero. En consecuencia, la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica.

Teorema Si una función racional es propia, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de su gráfica. ■

EJEMPLO 5 *Determinación de asíntotas horizontales*

Encontrar las asíntotas horizontales, si las hay, de la gráfica de

$$R(x) = \frac{x - 12}{4x^2 + x + 1}$$

Solución La función racional R es propia, ya que el grado del numerador (1) es menor que el del denominador (2). Concluimos que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R. ■

Para ver por qué $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función R en el ejemplo 5, necesitamos investigar el comportamiento de R cuando x no está acotada. Cuando x no está acotada, el numerador de R, que es $x - 12$, puede ser aproximado por la función potencia $y = x$, mientras que el denominador de R, que es $4x^2 + x + 1$, puede ser aproximado por la función potencia $y = 4x^2$.

Por tanto,

$$R(x) = \frac{x - 12}{4x^2 + x + 1} \underset{\text{Para } x \text{ no acotada}}{\approx} \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x} \underset{\text{Cuando } x \to -\infty \text{ o } x \to \infty}{\to} 0$$

Esto demuestra que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.

Si una función racional $R(x)$ es **impropia,** esto es, si el grado del numerador es mayor o igual al grado del denominador, debemos utilizar la división larga para escribir la función racional como la suma de un polinomio $f(x)$ más una función racional propia $r(x)$. Esto es, escribimos

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + r(x)$$

donde $f(x)$ es un polinomio y $r(x)$ una función racional propia. Ya que $r(x)$ es propia, entonces $r(x) \to 0$ cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$. Por tanto,

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \to f(x) \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\infty \text{ o cuando } x \to \infty$$

A continuación se enlistan las posibilidades:

1. Si $f(x) = b$, una constante, entonces la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de la gráfica de R.
2. Si $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, entonces la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de R.
3. En todos los demás casos, la gráfica de R se aproxima a la gráfica de f y no hay asíntotas horizontal u oblicua.

Los ejemplos siguientes demuestran estas conclusiones.

EJEMPLO 6 *Determinación de asíntotas horizontales u oblicuas*

Encontrar las asíntotas horizontales u oblicuas, si las hay, de la gráfica de

$$H(x) = \frac{3x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 1}$$

Solución La función racional H es impropia, ya que el grado del numerador (4) es mayor que el del denominador (3). Para encontrar cualquier asíntota horizontal o vertical utilizamos la división larga:

$$
\begin{array}{r}
3x + 3 \\
x^3 - x^2 + 1 \,\big)\, \overline{3x^4 - x^2 } \\
\underline{3x^4 - 3x^3 + 3x } \\
3x^3 - x^2 - 3x \\
\underline{3x^3 - 3x^2 + 3} \\
2x^2 - 3x - 3
\end{array}
$$

Por tanto,

$$H(x) = \frac{3x^4 - x^2}{x^3 - x^2 + 1} = 3x + 3 + \frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - x^2 + 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el denominador se comporta como sigue:

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{x^3 - x^3 + 1} \approx \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x} \to 0$$

Por tanto, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, tenemos $H(x) \to 3x + 3$. Concluimos que la gráfica de la función racional H tiene una asíntota oblicua $y = 3x + 3$. ■

EJEMPLO 7 *Determinación de asíntotas horizontales u oblicuas*

Encontrar las asíntotas horizontales u oblicuas, si las hay, de la gráfica de

$$R(x) = \frac{8x^2 - x + 2}{4x^2 - 1}$$

Solución La función racional R es impropia, ya que el grado del numerador (2) es igual al del denominador (2). Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua utilizamos la división larga:

$$
\begin{array}{r}
2 \\
4x^2 - 1 \,\big)\, \overline{8x^2 - x + 2} \\
\underline{8x^2 - 2} \\
-x + 4
\end{array}
$$

Por tanto,

$$R(x) = \frac{8x^2 - x + 2}{4x^2 - 1} = 2 + \frac{-x + 4}{4x^2 - 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el residuo se comporta como sigue:

$$\frac{-x + 4}{4x^2 - 1} \approx \frac{-x}{4x^2} = \frac{-1}{4x} \to 0$$

Por tanto, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, tenemos $R(x) \to 2$. Concluimos que $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica.

En el ejemplo 7 observe que el cociente 2 obtenido mediante la división, es el cociente de los coeficientes principales del polinomio numerador y el polinomio denominador $(\frac{8}{4})$. Esto significa que podemos evitar el proceso de división larga para funciones racionales cuyos numerador y denominador *sean del mismo grado*, y concluir que el cociente de los coeficientes principales nos dará la asíntota horizontal.

■ Ahora resuelva el problema 35.

EJEMPLO 8 *Determinación de asíntotas horizontales u oblicuas*

Encontrar las asíntotas horizontales u oblicuas, si las hay, de la gráfica de

$$G(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 2}{x^3 - 1}$$

Solución La función racional G es impropia ya que el grado del numerador (5) es mayor que el del denominador (3). Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua usamos la división larga:

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 1 \\ x^3 - 1 \overline{)2x^5 - x^3 + 2} \\ \underline{2x^5 - 2x^2 } \\ -x^3 + 2x^2 + 2 \\ \underline{-x^3 + 1} \\ 2x^2 + 1 \end{array}$$

Por tanto,

$$G(x) = \frac{2x^5 - x^3 + 2}{x^3 - 1} = 2x^2 - 1 + \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1}$$

Entonces, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el residuo se comportará como sigue:

$$\frac{2x^2 + 1}{x^3 - 1} \approx \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x} \to 0$$

Por tanto, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, tenemos que $G(x) \to 2x^2 - 1$. Concluimos que, para valores grandes de x, la gráfica de G se aproxima a la gráfica de $y = 2x^2 - 1$. ■

A continuación resumimos el procedimiento para encontrar asíntotas horizontales y oblicuas.

Cómo encontrar asíntotas horizontales y oblicuas de una función racional R

Considere la función racional

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

en la que el grado del numerador es n y el del denominador es m.

1. Si R es una función racional propia ($n < m$), la gráfica tendrá la asíntota horizontal $y = 0$ (el eje x).
2. Si R es impropia ($n \geq m$), utilizar división larga.
   (a) Si $n = m$, el cociente obtenido será un número $L\ (= a_n/b_m)$ y la recta $y = L\ (= a_n/b_m)$ es una asíntota horizontal.
   (b) Si $n = m + 1$, el cociente obtenido es de la forma $ax + b$ (un polinomio de grado 1), entonces la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua.
   (c) Si $n > m + 1$, el cociente es un polinomio de grado 2 o mayor, entonces R no tiene asíntota horizontal ni oblicua. En este caso, para una x no acotada, la gráfica de R se comportará como la gráfica del cociente.

Observación: La gráfica de una función racional puede tener o no una asíntota horizontal o una oblicua.

Ahora ya estamos preparados para hacer la gráfica de funciones racionales.

Graficación de funciones racionales

Comentamos anteriormente que el cálculo proporciona las herramientas necesarias para hacer la gráfica de una función polinomial de manera precisa. Lo mismo es cierto para las funciones racionales. De cualquier modo, siempre podemos reunir información suficiente de sus gráficas como para tener una idea de la forma general y posición de la gráfica.

En los ejemplos que siguen, analizaremos la gráfica de una función racional $R(x) = p(x)/q(x)$ aplicando los siguientes:

Pasos para la graficación de una función racional

PASO 1: Localizar las intersecciones, si las hay, de la gráfica. Las intersecciones-x de $R(x) = p(x)/q(x)$ satisfacen la ecuación $p(x) = 0$. La intersección-y, si existe, es $R(0)$.

PASO 2: Verificar la simetría. Reemplazar x por $-x$ en $R(x)$. Si $R(-x) = R(x)$, hay simetría con respecto al eje; Si $R(-x) = -R(x)$, hay simetría con respecto al origen.

PASO 3: Localizar las asíntotas verticales, si las hay, factorizando el denominador $q(x)$ de $R(x)$ e identificando sus ceros.

PASO 4: Localizar las asíntotas horizontal u oblicua, si las hay, usando el procedimiento dado anteriormente. Determine puntos, si los hay, en los cuales la gráfica de R corta a estas asíntotas.

PASO 5: Determinar en dónde la gráfica está por arriba del eje x y en dónde por debajo del eje x.

PASO 6: Hacer la gráfica de las asíntotas, si las hay, encontradas en los pasos 3 y 4. Marcar los puntos encontrados en los pasos 1, 4 y 5. Utilizar toda la información para conectar los puntos por medio de una curva suave.

EJEMPLO 9 *Análisis de la gráfica de una función racional*

Analizar la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$

Solución Primero factorizamos tanto el numerador como el denominador de R:

$$R(x) = \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$$

PASO 1: Localizamos las intersecciones-x encontrando los ceros del numerador. Por inspección, 1 es la única intersección-x. La intersección-y es $R(0) = \frac{1}{4}$.

PASO 2: Ya que

$$R(-x) = \frac{-x-1}{x^2-4}$$

concluimos que R no es par ni impar. Por tanto, no hay simetría con respecto al eje y ni con respecto al origen.

PASO 3: Localizamos las asíntotas verticales factorizando el denominador: $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$. Por tanto, la gráfica de R tiene dos asíntotas verticales: las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

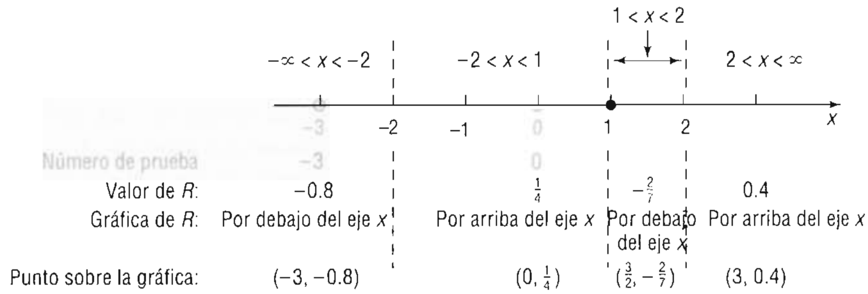
PASO 4: El grado del numerador es menor que el del denominador, de modo que R es propia y la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la gráfica. Para determinar si la gráfica de R corta a la asíntota horizontal, resolvemos la ecuación $R(x) = 0$. La única solución es $x = 1$, de modo que la gráfica de R corta a la asíntota horizontal en $(1, 0)$.

PASO 5: El cero del numerador, 1, y los ceros del denominador, -2 y 2, dividen al eje x en cuatro intervalos:

$$-\infty < x < -2 \qquad -2 < x < 1 \qquad 1 < x < 2 \qquad 2 < x < \infty$$

Ahora utilicemos la figura 33.

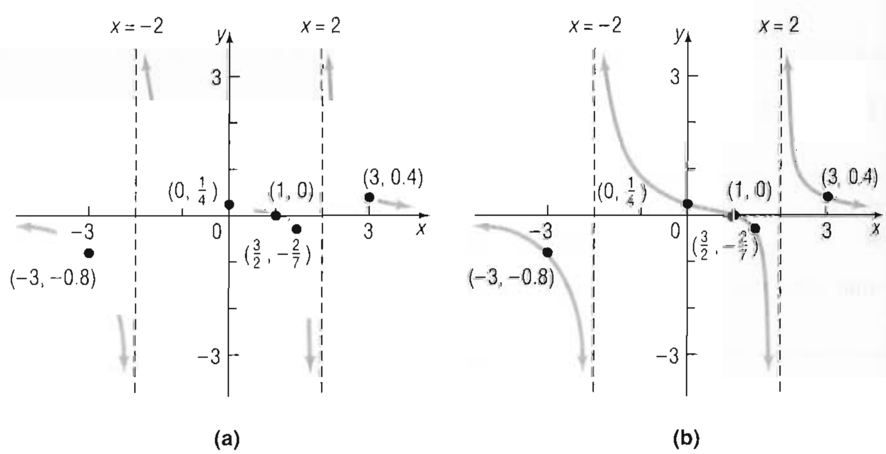
FIGURA 33



PASO 6: Empezamos trazando las asíntotas y marcando los puntos encontrados en los pasos 1, 4 y 5. *Véase* la figura 34(a). Luego, determinamos el comportamiento de la gráfica cerca de las asíntotas. Ya que el eje x es una asíntota horizontal y la gráfica está por debajo de él para $-\infty < x < -2$, podemos esbozar la parte de la gráfica colocando una flecha pequeña en la extrema izquierda y por debajo del eje x. Como la recta $x = -2$ es una asíntota vertical y la gráfica está por debajo del eje x para $-\infty < x < -2$, continuamos el bosquejo con una flecha en la parte inferior abajo del eje x y aproximándose por la izquierda a la recta $x = -2$. Explicaciones semejantes son válidas para las posiciones de otras partes de la gráfica. En particular, observe cómo utilizamos la información de que la gráfica está por arriba del eje x para $-2 < x < 1$, por debajo del eje x para $1 < x < 2$ y que $(1, 0)$ es una intersección-x para sacar en conclusión que la gráfica cruza el eje x en $(1, 0)$. La figura 34(b) muestra el bosquejo completo.

FIGURA 34

$$R(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$



Verificación: Hacer la gráfica de $R(x) = (x - 1)/(x^2 - 4)$ y compararla con la que aparece en la figura 34(b). ■

■ Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 10 *Análisis de la gráfica de una función racional*

Analizar la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución

PASO 1: La gráfica tiene dos intersecciones-x: -1 y 1. No hay intersección-y.

PASO 2: Ya que $R(-x) = -R(x)$, la función es impar y la gráfica es simétrica con respecto al origen.

PASO 3: La gráfica de $R(x)$ tiene a la recta $x = 0$ (el eje y) como una asíntota vertical.

PASO 4: La función racional R es impropia ya que el grado del numerador (2) es mayor que el del denominador (1). Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua utilizamos la división larga:

$$\begin{array}{r} x \\ x\overline{)x^2 - 1} \\ \underline{x^2} \\ -1 \end{array}$$

El cociente es x, de modo que la recta $y = x$ es una asíntota oblicua de la gráfica. Para determinar si la gráfica de R corta a la asíntota $y = x$, resolvemos la ecuación $R(x) = x$:

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{x^2 - 1}{x} &= x \\ x^2 - 1 &= x^2 \\ -1 &= 0 \quad \text{Imposible} \end{aligned}$$

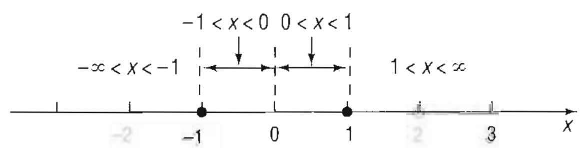
Concluimos que la ecuación $(x^2 - 1)/x = x$ no tiene solución, de modo que la gráfica de $R(x)$ no corta a la recta $y = x$.

PASO 5: Los ceros del numerador son -1 y 1; el denominador tiene como cero al número 0. Por tanto, dividimos el eje x en cuatro intervalos:

$$-\infty < x < -1 \qquad -1 < x < 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 1 < x < \infty$$

Ahora construimos la figura 35:

FIGURA 35

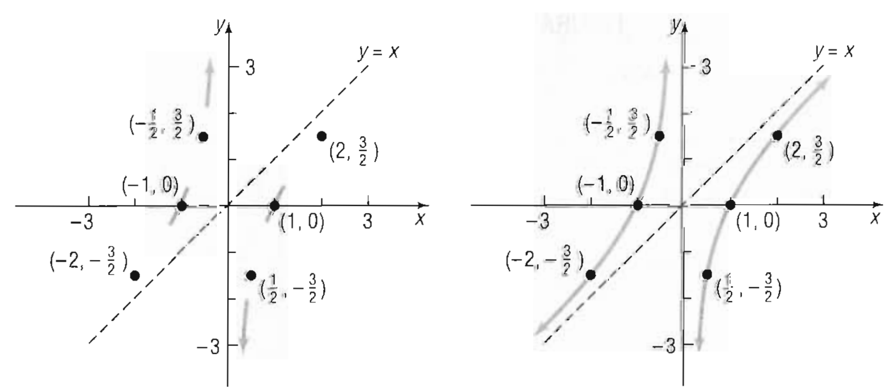


Valor de prueba:	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
Valor de R:	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
Gráfica de R:	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x	Por abajo del eje x	Por arriba del eje x
Punto sobre la gráfica:	$(-2, -\frac{3}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(2, \frac{3}{2})$

PASO 6: La figura 36(a) muestra una gráfica parcial donde se utiliza la información que hemos reunido. La gráfica completa está dada en la figura 36(b).

FIGURA 36

$R(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$



(a) (b)

Verificación: Hacer la gráfica $R(x) = (x^2 - 1)/x$ y compararla con la que aparece en la figura 36. ¿Podría predecirse que $y = x$ es una asíntota oblicua? Hacer la gráfica de $y = x$ y utilizar ZOOM-OUT. ¿Qué se observa? ■

■ Ahora resuelva el problema 45.

EJEMPLO 11 *Análisis de la gráfica de una función racional*

Analizar la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$

Solución

PASO 1: La gráfica no tiene intersección-x ni intersección-y.

PASO 2: Ya que $R(-x) = R(x)$, la función es par y la gráfica es simétrica con respecto al eje y.

PASO 3: La gráfica de $R(x)$ tiene a la recta $x = 0$ (el eje y) como una asíntota vertical.

PASO 4: La función racional R es impropia. Para encontrar cualquier asíntota horizontal u oblicua utilizamos la división larga:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x^2 \overline{)\, x^4 + 1} \\ \underline{x^4 } \\ 1 \end{array}$$

El cociente de x^2, de modo que la gráfica no tiene asíntotas horizontales ni verticales. Sin embargo, la gráfica de R se aproximará a la gráfica de $y = x^2$ cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to \infty$.

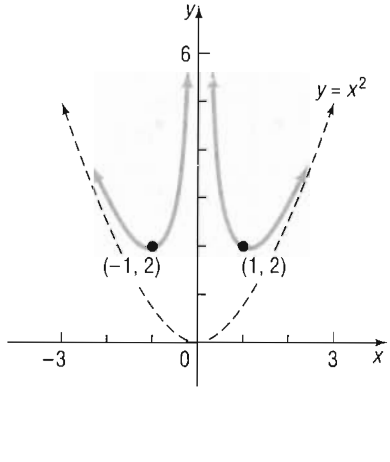
PASO 5: El numerador no tiene ceros, y el denominador tiene un solo cero en 0. Por tanto, dividimos el eje x en los siguientes dos intervalos: $-\infty < x < 0$ y $0 < x < \infty$. Luego construimos la figura 37:

FIGURA 37

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < \infty$
	0	
Número de prueba		
Valor de R:	2	2
Gráfica de R:	Por arriba del eje x	Por arriba del eje x
Punto sobre la gráfica:	(−1, 2)	(1, 2)

PASO 6: La figura 38 muestra la gráfica.

FIGURA 38
$R(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$



Verificación: Hacer la gráfica de $R(x) = (x^4 + 1)/x^2$ y compararla con la que aparece en la figura 38. Utilizar TRACE para encontrar los dos puntos de retorno. Introducir $y = x^2$ y aplicar ZOOM-OUT. ¿Qué se ve? ■

■ Ahora resuelva el problema 43.

EJEMPLO 12 *Análisis de la gráfica de una función racional*

Analizar la gráfica de la función racional: $R(x) = \dfrac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$

Solución Factorizamos R para obtener

$$R(x) = \frac{3x(x - 1)}{(x + 4)(x - 3)}$$

PASO 1: La gráfica tiene dos intersecciones-x: 0 y 1. La intersección-y es $R(0) = 0$.

PASO 2: No hay simetría con respecto al eje y ni con respecto al origen.

PASO 3: La gráfica de R tiene dos asíntotas verticales: $x = -4$ y $x = 3$.

PASO 4: Ya que el grado del numerador es igual al del denominador, la gráfica tiene una asíntota horizontal. Para encontrarla, formamos el cociente del coeficiente principal del numerador (3) y el coeficiente principal del denominador (1). Por tanto, la gráfica de R tiene la asíntota horizontal $y = 3$. Para encontrar si la gráfica de R corta a la asíntota, resolvemos la ecuación $R(x) = 3$.

$$\begin{aligned} R(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12} &= 3 \\ 3x^2 - 3x &= 3x^2 + 3x - 36 \\ -6x &= -36 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

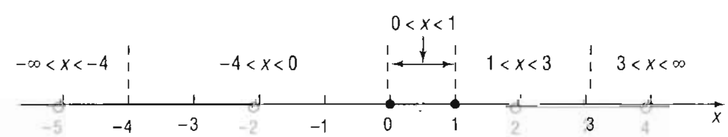
Por tanto, la gráfica corta a la recta $y = 3$ sólo en $x = 6$, y $(6, 3)$ es un punto de la gráfica de R.

PASO 5: Los ceros del numerador, 0 y 1, y los del denominador, -4 y 3, dividen al eje x en cinco intervalos:

$$-\infty < x < -4 \qquad -4 < x < 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad 1 < x < 3 \qquad 3 < x < \infty$$

Ahora podemos construir la figura 39:

FIGURA 39



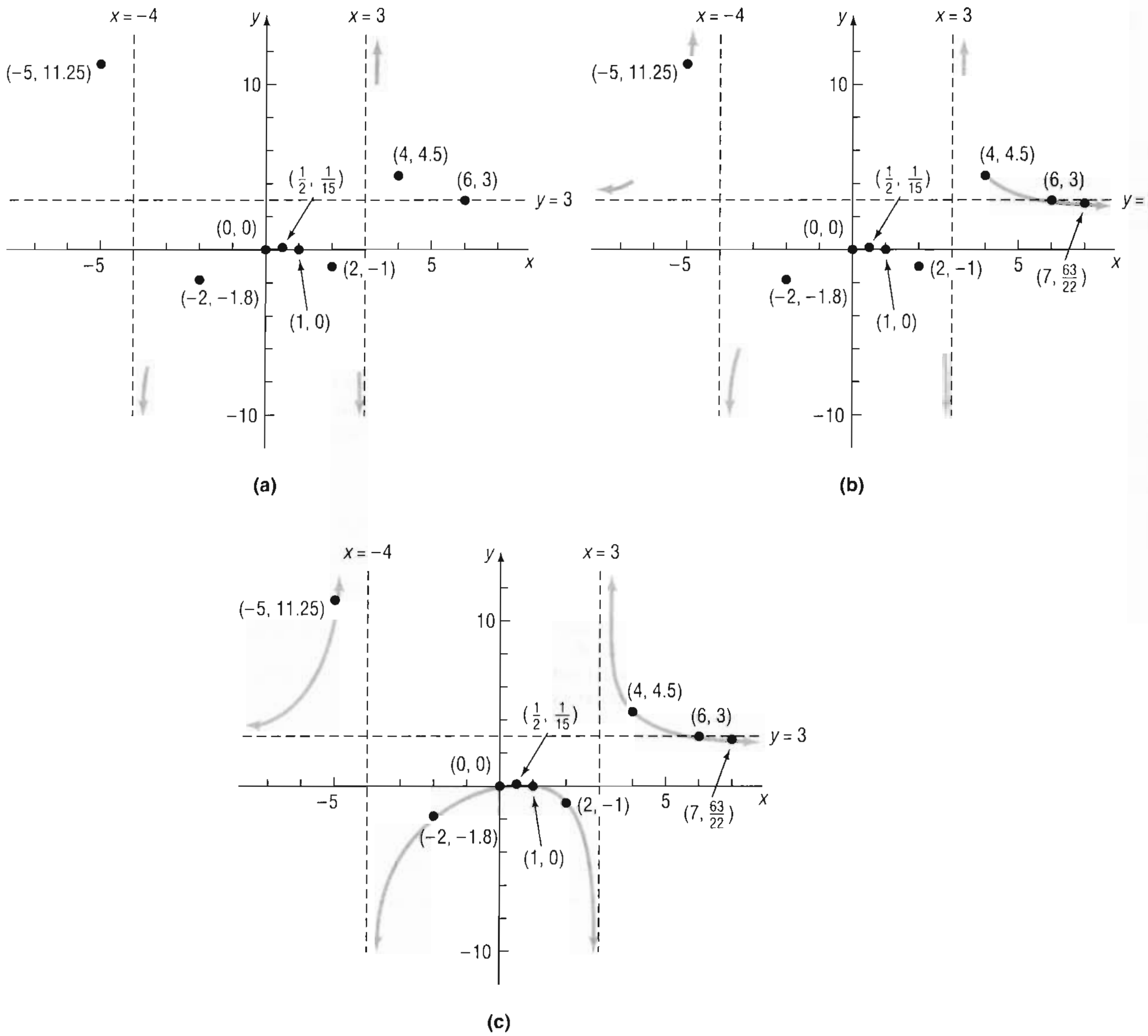
Número de prueba	-5	-2	$\frac{1}{2}$	2	4
Valor de R:	11.25	-1.8	$\frac{1}{15}$	-1	4.5
Gráfica de R:	Por arriba del eje x	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x
Punto sobre la gráfica:	$(-5, 11.25)$	$(-2, -1.8)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{15})$	$(2, -1)$	$(4, 4.5)$

PASO 6: La figura 40(a) muestra una gráfica parcial. Observe que no hemos utilizado la información de que la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal, ya que no sabemos aún si la gráfica de R cruza o toca la recta $y = 3$ en $(6, 3)$. Para saberlo, trazamos un punto adicional a la derecha de $(6, 3)$. Utilizamos $x = 7$ para determinar $R(7) = \frac{63}{22} < 3$. Por lo tanto, la gráfica cruza $y = 3$ en $x = 6$. Ya que $y = 3$ es

una asíntota de la gráfica, ésta se aproxima por arriba a la recta $y = 3$ cuando $x \to -\infty$ y se aproxima a la recta $y = 3$ por abajo cuando $x \to \infty$. *Véase* la figura 40(b). La gráfica terminada se muestra en la figura 40(c).

FIGURA 40

$$R(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$$

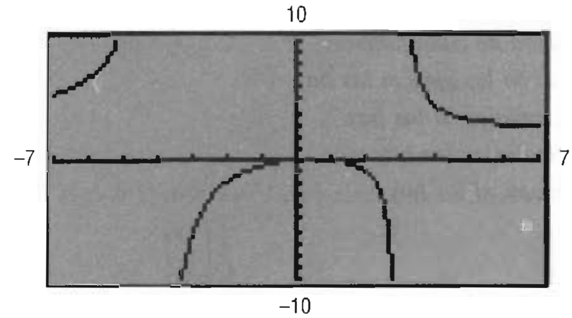


Exploración: La figura 41(a) muestra la gráfica de

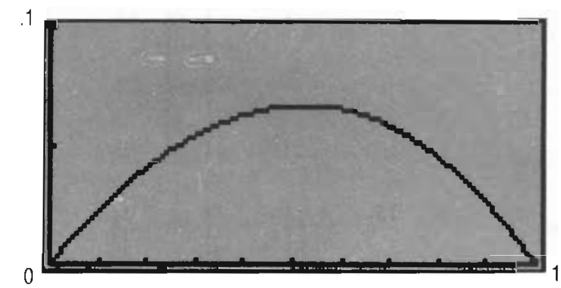
$$R(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x^2 + x - 12}$$

La figura 41(b) muestra el punto de retorno ubicado entre 0 y 1, esto es, (0.52, 0.06), redondeado a dos decimales. La figura 41(c) muestra el punto de retorno localizado a la derecha de $x = 6$, esto es, (11.47, 12.74), redondeado a dos decimales. También aquí se muestra una vista de la gráfica y de su asíntota horizontal $y = 3$.

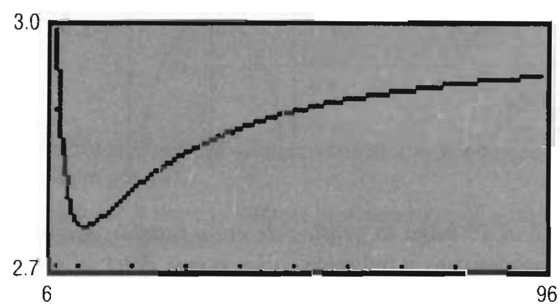
FIGURA 41



(a)



(b)



(c)

3.3

Ejercicio 3.3

En los problemas del 1 al 10 encuentre el dominio de cada función racional.

1. $R(x) = \dfrac{4x}{x - 3}$

2. $R(x) = \dfrac{5x^2}{3 + x}$

3. $H(x) = \dfrac{-4x^2}{(x - 2)(x + 4)}$

4. $G(x) = \dfrac{6}{(x + 3)(4 - x)}$

5. $F(x) = \dfrac{3x(x - 1)}{2x^2 - 5x - 3}$

6. $Q(x) = \dfrac{-x(1 - x)}{3x^2 + 5x - 2}$

7. $R(x) = \dfrac{x}{x^3 - 8}$

8. $R(x) = \dfrac{x}{x^4 - 1}$

9. $H(x) = \dfrac{3x^2 + x}{x^2 + 4}$

10. $G(x) = \dfrac{x - 3}{x^4 + 1}$

En los problemas del 11 al 16 utilice la gráfica mostrada para encontrar:

(*a*) *El dominio y el rango de cada función.*

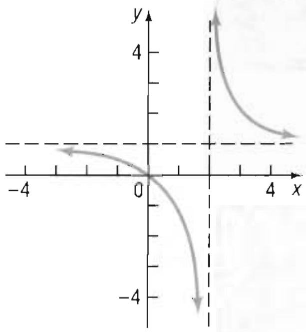
(*b*) *Las intersecciones con los ejes, si las hay.*

(*c*) *Las asíntotas horizontales, si las hay.*

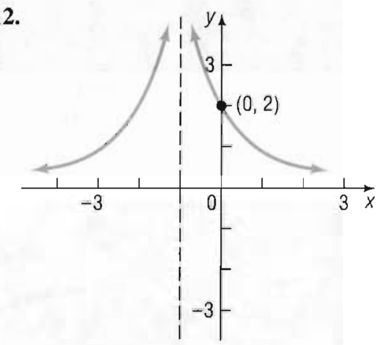
(*d*) *Las asíntotas verticales, si las hay.*

(*e*) *Las asíntotas oblicuas, si las hay*

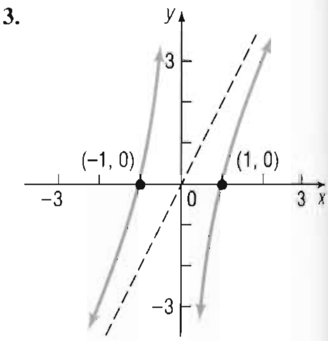
11.



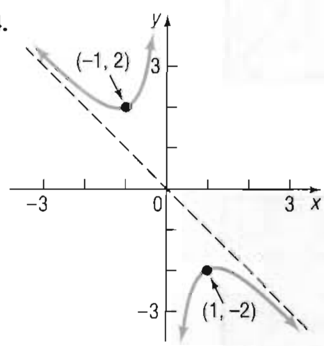
12.



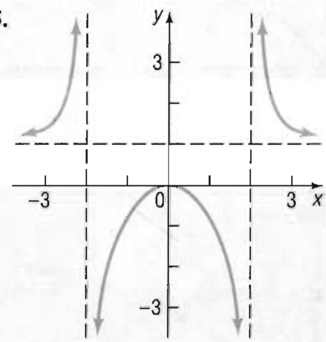
13.



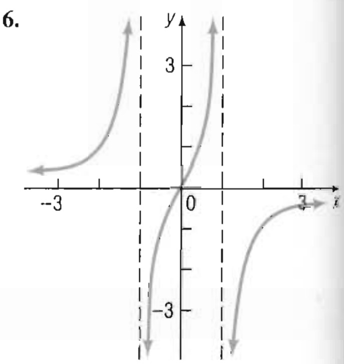
14.



15.



16.



En los problemas del 17 al 26 haga la gráfica de cada función racional utilizando los métodos de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión, o los pasos del 1 al 6 dados en la página 215.

17. $R(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

18. $R(x) = \dfrac{3}{x}$

19. $H(x) = \dfrac{-2}{x+1}$

20. $G(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

21. $R(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+4}$

22. $R(x) = \dfrac{1}{x-1} + 1$

23. $F(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

24. $Q(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

25. $R(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$

26. $R(x) = \dfrac{x-4}{x}$

En los problemas del 27 al 36 encuentre las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si las hay, de cada función racional. No grafique.

27. $R(x) = \dfrac{3x}{x+4}$

28. $R(x) = \dfrac{3x+5}{x-6}$

29. $H(x) = \dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2-x+1}$

30. $G(x) = \dfrac{-x^2+1}{x+5}$

31. $T(x) = \dfrac{x^3}{x^4-1}$

32. $P(x) = \dfrac{4x^5}{x^3-1}$

33. $Q(x) = \dfrac{5 - x^2}{3x^4}$ **34.** $F(x) = \dfrac{-2x^2 + 1}{2x^3 + 4x^2}$ **35.** $R(x) = \dfrac{3x^4 + 4}{x^3 + 3x}$

36. $R(x) = \dfrac{6x^2 + x + 12}{3x^2 - 5x - 2}$

En los problemas del 37 al 62, siga los pasos del 1 al 6 dados en la página 215 para hacer la gráfica de cada función racional.

37. $R(x) = \dfrac{x + 1}{x(x + 4)}$ **38.** $R(x) = \dfrac{x}{(x - 1)(x + 2)}$ **39.** $R(x) = \dfrac{3x + 3}{2x + 4}$

40. $R(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 1}$ **41.** $R(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4}$ **42.** $R(x) = \dfrac{6}{x^2 - x - 6}$

43. $P(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **44.** $Q(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 4}$ **45.** $H(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 9}$

46. $G(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2x}$ **47.** $R(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 6}$ **48.** $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 - 4}$

49. $G(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ **50.** $G(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 1}$ **51.** $R(x) = \dfrac{3}{(x - 1)(x^2 - 4)}$

52. $R(x) = \dfrac{-4}{(x + 1)(x^2 - 9)}$ **53.** $H(x) = 4\dfrac{x^2 - 1}{x^4 - 16}$ **54.** $H(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^4 - 1}$

55. $F(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}$ **56.** $F(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$ **57.** $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 4}$

58. $R(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 5}$ **59.** $F(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x + 2}$ **60.** $G(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 1}$

61. $R(x) = \dfrac{x(x - 1)^2}{(x + 3)^3}$ **62.** $R(x) = \dfrac{(x - 1)(x + 2)(x - 3)}{x(x - 4)^2}$

63. Si la gráfica de una función racional R tiene la asíntota vertical $x = 4$, entonces el factor $x - 4$ debe estar presente en el denominador de R. Explique por qué.

64. Si la gráfica de una función racional R tiene la asíntota horizontal $y = 2$, entonces el grado del numerador de R es igual al de su denominador. Explique por qué.

65. Haga la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \qquad y = \frac{x^3 - 1}{x - 1} \qquad y = \frac{x^4 - 1}{x - 1} \qquad y = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

¿$x = 1$ es una asíntota vertical? ¿Por qué no? ¿Qué está pasando en $x = 1$? ¿Qué puede conjeturar acerca de $y = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$, $n \geq 1$ un entero, en $x = 1$?

66. Haga la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

$$y = \frac{x^2}{x - 1} \qquad y = \frac{x^4}{x - 1} \qquad y = \frac{x^6}{x - 1} \qquad y = \frac{x^8}{x - 1}$$

¿Qué semejanzas puede ver? ¿Qué diferencias?

En los problemas del 67 al 72, haga la gráfica de cada función y utilice TRACE para aproximar el valor mínimo, redondee a dos decimales.

67. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, x > 0$ 68. $f(x) = 2x + \dfrac{9}{x}, x > 0$ 69. $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}, x > 0$

70. $f(x) = 2x^2 + \dfrac{9}{x}, x > 0$ 71. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^3}, x > 0$ 72. $f(x) = 2x + \dfrac{9}{x^3}, x > 0$

73. Consulte la ilustración. ¿Cuál de las siguientes funciones racionales tiene esta gráfica? (Puede haber más de una respuesta.)

(a) $y = \dfrac{4x^2}{x^2 - 4}$

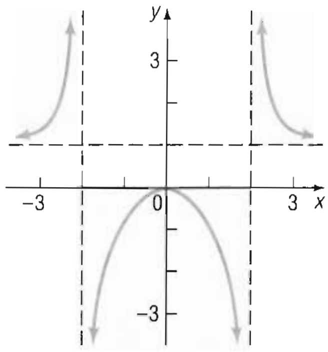
(b) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

(d) $y = \dfrac{x^2(x^2 + 1)}{(x^2 + 4)(x^2 - 4)}$

(e) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

(f) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$



74. Consulte la ilustración. ¿Cuál de las siguientes funciones racionales tiene esta gráfica? (Puede haber más de una respuesta.)

(a) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

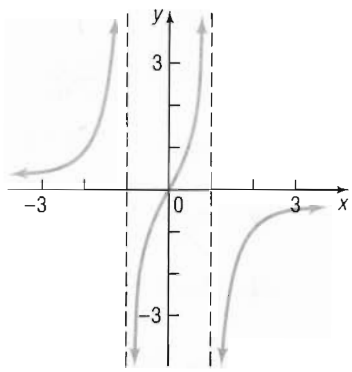
(b) $y = \dfrac{-3x}{x^2 - 1}$

(c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

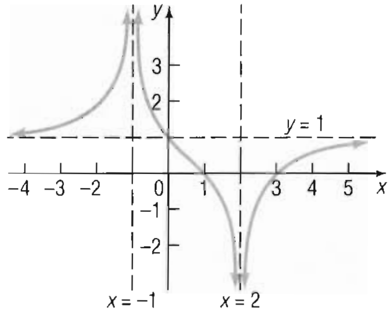
(d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{-3x}$

(e) $y = \dfrac{-x^3}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$

(f) $y = \dfrac{-x^2}{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}$



75. Consulte la ilustración. Construya una función racional que pueda tener esta gráfica. Compárela con las de sus compañeros. ¿Qué semejanzas tienen? ¿Qué diferencias?



76. ¿La gráfica de una función racional puede tener una asíntota horizontal y una vertical? Explique su respuesta.

77. Escriba unos breves párrafos que proporcionen una estrategia general para la graficación de una función racional. Asegúrese de mencionar lo siguiente: propia, impropia, intersecciones y asíntotas.

78. Construya una función racional con las características siguientes: que cruce el eje x en 3 y toque el eje x en -2; que tenga una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal, $y = 2$. Dé su función racional a un compañero de clase y pídale que escriba una crítica de ella.

79. Construya una función racional que tenga $y = 2x + 1$ como una asíntota oblicua. Explique la metodología que use.

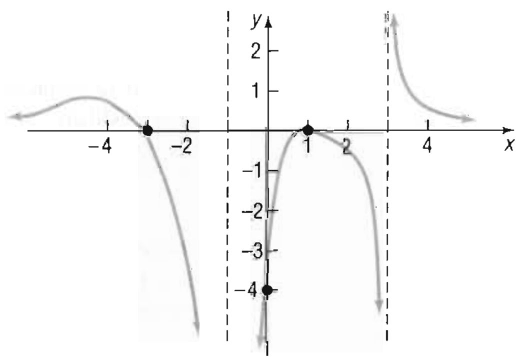
MISIÓN POSIBLE

Capítulo 3

CÓMO RESPONDER A UN RETO CARDASIANO.

Suponga que mientras jugaba con la realidad virtual en el laboratorio de su escuela, de repente se vio cara a cara con algunos muy reales y de apariencia repulsiva cardasianos quienes han aparecido recientemente en su escuela por toda la red de computadoras. Como es usual, ellos menosprecian la inteligencia de los terrícolas y cuando usted trata de protestar le lanzan un reto: "Encuentre una función racional definida por esta gráfica", dicen "y prometemos apoyar su éxito intelectual en toda la comunidad intergaláctica de este lado de la Nebulosa de Macklin. De otra forma, considérense el hazmerreír del universo." Y partieron de regreso a la pantalla de la computadora, vanagloriándose de lo que ellos supusieron es su ingenio extremo.

Cuando usted ve hacia la pantalla todo lo que puede percibir es esta gráfica:



Usted decide abordar esto como un proyecto de equipo para salvar la reputación de todos los seres humanos de este planeta. Los cardasianos mencionaron "función racional", de modo que sabe que la solución tendrá la forma

$$R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0}$$

Algunas veces es más fácil pensar en ella en forma factorizada.

1. En seguida nota algunas cosas. Hay dos asíntotas verticales. ¿Cómo se pueden ajustar a la solución? Ubíquelas.
2. Hay dos intersecciones-x. ¿Cómo surgen en la solución? Ubíquelas también.
3. Use un dispositivo de graficación para verificar lo que ha hecho. ¿Obtiene algo parecido a la gráfica original? Observe que 1 y -3 parecen ser los únicos ceros reales. ¿Qué puede decir acerca de la multiplicidad de cada uno? ¿Necesita cambiar la multiplicidad de algún cero en su solución?
4. ¿Cómo puede considerarse el hecho que la gráfica de la función tienda a $-\infty$ en ambos lados de una asíntota vertical mientras en la otra asíntota vertical tiende a $-\infty$ por un lado y a ∞ por el otro? ¿Puede cambiar el denominador de alguna manera para tomar en cuenta esto?
5. ¿La información que tiene hasta el momento es consistente con la asíntota horizontal $y = 0$? Si no es así, ¿cómo debe ajustar su función de modo que sea consistente?
6. ¿La información que tiene hasta el momento es consistente con la intersección-y? Si no es así, ¿cómo debe ajustar su función de modo que sea consistente?
7. ¿Ya terminó? ¿Verificó su solución en un dispositivo de graficación?
8. ¿Existen otras funciones cuya gráfica pueda parecerse a la especificada? Si es así, ¿qué características en común deben tener? ¿Cree usted que se impresionarían los cardasianos si se les enviara más de una respuesta correcta?
9. Compare la solución de su grupo con las de otros grupos antes de teclearla en la computadora. Luego envíe todas las soluciones correctas a cardass@slime.uni.

3.4

Teoremas del residuo y del factor; división sintética

Recuerde que cuando dividimos un polinomio (el dividendo) entre otro (el divisor) obtenemos un polinomio cociente y un residuo, el residuo es el polinomio cero o un polinomio cuyo grado es menor que el grado del polinomio del divisor. Para verificar nuestro trabajo, confirmamos que

$$(\text{Divisor})(\text{Cociente}) + \text{Residuo} = \text{Dividendo}$$

Esta rutina de verificación es la base para un famoso teorema llamado **algoritmo* de la división para polinomios**, que ahora establecemos sin prueba.

Teorema algoritmo de la división para polinomios

Si $f(x)$ y $g(x)$ denotan funciones polinomiales y si $g(x)$ no es el polinomio cero, entonces existen funciones polinomiales únicas $q(x)$ y $r(x)$ tales que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} \quad \text{o} \quad \underset{\text{dividendo}}{f(x)} = \underset{\text{divisor}}{g(x)}\,\underset{\text{cociente}}{q(x)} + \underset{\text{residuo}}{r(x)} \qquad (1)$$

donde $r(x)$ es el polinomio cero o un polinomio de grado menor que el de $g(x)$. ■

En la ecuación (1), $f(x)$ es el **dividendo,** $g(x)$ el **divisor**, $q(x)$ el **cociente** y $r(x)$ el **residuo.**

Si el divisor $g(x)$ es un polinomio de primer grado de la forma

$$g(x) = x - c \qquad \text{donde } c \text{ es un número real}$$

entonces el residuo $r(x)$ es el polinomio cero o un polinomio de grado cero. Por tanto, para tales divisores, el residuo es algún número, digamos, R, y podemos escribir

$$f(x) = (x - c)q(x) + R \qquad (2)$$

Esta ecuación es una identidad en x y es verdadera para todos los números reales x. En particular, es cierta cuando $x = c$. Por tanto, si $x = c$, entonces la ecuación (2) se transforma en

$$f(c) = (c - c)q(c) + R$$
$$f(c) = R$$

y la ecuación (2) toma la forma

$$f(x) = (x - c)q(x) + f(c) \qquad (3)$$

Hemos demostrado el resultado siguiente, llamado **teorema del residuo:**

Teorema del residuo

Sea f una función polinomial. Si $f(x)$ es dividida entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$. ■

*Un proceso sistemático en el que ciertos pasos son repetidos un número finito de veces es llamado algoritmo. Por tanto, la división larga es un algoritmo.

EJEMPLO 1

Usando el teorema del residuo. Encontrar el residuo si $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ se divide entre:

(a) $x - 3$ (b) $x + 2$

Solución

(a) Podríamos utilizar la división larga. Sin embargo, aquí es mucho más sencillo usar el teorema del residuo, el cual dice que el residuo es

$$f(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 2(3) - 5 = 27 - 36 + 6 - 5 = -8$$

(b) Para encontrar el residuo cuando $f(x)$ es dividido entre $x + 2 = x - (-2)$, evaluamos

$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2)^2 + 2(-2) - 5 = -8 - 16 - 4 - 5 = -33$$

Por tanto el residuo es -33. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Una consecuencia importante y útil del teorema del residuo es el **teorema del factor.**

Teorema del factor

Sea f una función polinomial. Entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$ si, y sólo si $f(c) = 0$. ■

En realidad, el teorema del factor consiste en dos enunciados separados:

1. Si $f(c) = 0$, entonces $x - c$ es un factor de $f(x)$.
2. Si $x - c$ es un factor de $f(x)$, entonces $f(c) = 0$.

Por tanto, la demostración necesita dos partes.

Demostración

1. Suponga que $f(c) = 0$. Entonces, por la ecuación (3), tenemos

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

para algún polinomio $q(x)$. Esto es, $x - c$ es un factor de $f(x)$.

2. Suponga que $x - c$ es un factor de $f(x)$. Entonces existe una función polinomial q tal que

$$f(x) = (x - c)q(x)$$

Reemplazando x por c, encontramos

$$f(c) = (c - c)q(c) = 0 \cdot q(c) = 0$$

Esto complementa la demostración. ■

Un uso del teorema del factor es para determinar si un polinomio tiene un factor en particular.

EJEMPLO 2

Uso del teorema del factor

Utilizar el teorema del factor para determinar si la función $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 3$ tiene el factor:

(a) $x - 1$ (b) $x + 3$

Solución

(a) Ya que $x - 1$ es de la forma $x - c$ con $c = 1$, encontramos el valor de $f(1)$:

$$f(1) = 2(1)^3 - (1)^2 + 2(1) - 3 = 2 - 1 + 2 - 3 = 0$$

Por el teorema del factor, $x - 1$ es un factor de $f(x)$.

(b) Para probar el factor $x + 3$, primero necesitamos escribirlo en la forma $x - c$. Como $x + 3 = x - (-3)$, encontramos el valor de $f(-3)$:

$$f(-3) = 2(-3)^3 - (-3)^2 + 2(-3) - 3 = -54 - 9 - 6 - 3 = -72$$

Ya que $f(-3) \neq 0$, concluimos del teorema del factor que $x - (-3) = x + 3$ no es factor de $f(x)$. ∎

División sintética

Para encontrar el cociente y el residuo cuando la función polinomial f de grado 1 o mayor es dividida entre $g(x) = x - c$, una versión abreviada de la división larga, llamada **división sintética,** hace la tarea más sencilla.

Para ver cómo funciona la división sintética, usaremos la división larga al dividir el polinomio $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ entre $g(x) = x - 3$.

$$\begin{array}{r r r r r}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & \\
\cline{2-5}
x-3 \big) & 2x^3 & -\;x^2 & & +\;3 \\
 & 2x^3 & -\,6x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & 5x^2 & & \\
 & & 5x^2 & -\,15x & \\
\cline{3-4}
 & & & 15x & +\;3 \\
 & & & 15x & -\,45 \\
\cline{4-5}
 & & & & 48
\end{array}$$

El proceso de la división sintética surge de reescribir la división larga en forma compacta, utilizando una notación más sencilla. Por ejemplo, en la división larga anterior, los términos en color azul realmente no se necesitan ya que son idénticos a los escritos directamente debajo de ellos. Con estos términos eliminados, tenemos

$$\begin{array}{r r r r r}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & \\
\cline{2-5}
x-3 \big) & 2x^3 & -\;x^2 & & +\;3 \\
 & & -\,6x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & 5x^2 & & \\
 & & & -\,15x & \\
\cline{3-4}
 & & & 15x & \\
 & & & & -\,45 \\
\cline{4-5}
 & & & & 48
\end{array}$$

La mayoría de las x que aparecen en el proceso también pueden ser eliminadas, con tal de que seamos cuidadosos acerca de la posición de cada coeficiente. Al respecto, necesitaremos utilizar 0 como el coeficiente de x en el dividendo, ya que la potencia de x no aparece. Ahora tenemos

$$\begin{array}{r r r r r}
 & 2x^2 & +\,5x & +\,15 & \\
\cline{2-5}
x-3 \big) & 2 & -1 & 0 & 3 \\
 & & -6 & & \\
\cline{2-3}
 & & & & \\
 & & & -15 & \\
\cline{3-5}
 & & & 15 & \\
 & & & & -45 \\
\cline{4-5}
 & & & & 48
\end{array}$$

Podemos hacer esto de manera más compacta moviendo las líneas hacia arriba hasta que los números en color azul queden alineados horizontalmente:

$$\begin{array}{r|rrrrl} \multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{3}{l}{2x^2 + 5x + \;\;1} & 5 & \text{Renglón} \\ \cline{2-5} x-3 & 2 & -1 & 0 & 3 & \text{Renglón} \\ & & -6 & -15 & -45 & \text{Renglón} \\ \cline{2-5} & \bigcirc & 5 & 15 & 48 & \text{Renglón} \end{array}$$

Ahora, si colocamos el coeficiente principal del cociente (2) en la posición señalada con un círculo, los primeros tres números del renglón 4 son precisamente los coeficientes del cociente, y el último número del renglón 4 es el residuo. Por tanto, el renglón 1 realmente no es necesario, así que podemos reducir el proceso a tres renglones, donde el renglón inferior contiene los coeficientes del cociente y del residuo:

$$\begin{array}{r|rrrrl} x-3 & 2 & -1 & 0 & 3 & \text{Renglón 1} \\ & & -6 & -15 & -45 & \text{Renglón 2 (restar)} \\ \cline{2-5} & 2 & 5 & 15 & 48 & \text{Renglón 3} \end{array}$$

Recuerde que la entradas del renglón 3 son obtenidas restando las entradas en el renglón 2 de las del renglón 1. En lugar de restar las entradas del renglón 2, podemos cambiar el signo de cada una y sumar. Con esta modificación nuestra disposición se verá así:

$$\begin{array}{r|rrrrl} x-3 & 2 & -1 & 0 & 3 & \text{Renglón 1} \\ & & 6 & 15 & 45 & \text{Renglón 2 (sumar)} \\ \cline{2-5} & 2 & 5 & 15 & 48 & \text{Renglón 3} \end{array}$$

Observe que las entradas en el renglón 2 son tres veces la entrada anterior en el renglón 3. Nuestro último cambio para la disposición reemplaza $x - 3$ por 3. Las entradas en el renglón 3 son el cociente y el residuo, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{r|rrrrl} 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & \text{Renglón 1} \\ & & 6 & 15 & 45 & \text{Renglón 2 (sumar)} \\ \cline{2-5} & \multicolumn{3}{l}{\underbrace{2 \quad 5 \quad 15}_{\text{Cociente}}} & \underbrace{48}_{\text{Residuo}} & \text{Renglón 3} \end{array}$$

$$2x^2 + 5x + 15 \qquad R = 48$$

Veamos otro ejemplo paso a paso. ■

EJEMPLO 3 *Uso de división sintética para encontrar el cociente y el residuo*

Utilice la división sintética para encontrar el cociente y el residuo cuando

$$f(x) = 3x^4 + 8x^2 - 7x + 4 \quad \text{es dividido entre} \quad g(x) = x - 1$$

Solución PASO 1: Escribir el dividendo en potencias descendentes de x. Después copiar los coeficientes, recordando insertar un cero para cualquier potencia de x que no aparezca:

$$3 \quad 0 \quad 8 \quad -7 \quad 4 \qquad \text{Renglón}$$

PASO 2: Insertar el símbolo usual de división. Como el divisor es $x - 1$, insertamos 1 a la izquierda del símbolo de división

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1 & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 & \text{Renglón} \end{array}$$

PASO 3: Llevar el 3 dos renglones abajo, y colocarlo en el renglón 3:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1) & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 & \text{Renglón 1} \\ & & & & & & \text{Renglón 2} \\ \hline & 3 & & & & & \text{Renglón 3} \end{array}$$

PASO 4: Multiplicar la última entrada en el renglón 3 por 1 y colocar el resultado en el renglón 2, pero en una columna a la derecha:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1) & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 & \text{Renglón 1} \\ & & 3 & & & & \text{Renglón 2} \\ \hline & 3 & & & & & \text{Renglón 3} \end{array}$$

PASO 5: Sumar la entrada en el renglón 2 a la entrada de arriba que está en el renglón 1, y colocar la suma en el renglón 3:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1) & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 & \text{Renglón 1} \\ & & 3 & & & & \text{Renglón 2} \\ \hline & 3 & 3 & & & & \text{Renglón 3} \end{array}$$

PASO 6: Repetir los pasos 4 y 5 hasta que no haya entradas disponibles en el renglón 1:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} 1) & 3 & 0 & 8 & -7 & 4 & \text{Renglón 1} \\ & & 3 & 3 & 11 & 4 & \text{Renglón 2 (sumar)} \\ \hline & 3 & 3 & 11 & 4 & 8 & \text{Renglón 3} \end{array}$$

PASO 7: La última entrada en el renglón 3, un 8, es el residuo; las otras entradas en el renglón 3 (3, 3, 11 y 4) son los coeficientes (en orden descendente) de un polinomio cuyo grado es uno menos que el del dividendo, este es el cociente. Por tanto,

$$\text{Cociente} = 3x^3 + 3x^2 + 11x + 4 \qquad \text{Residuo} = 8$$

Verificación: (Divisor)(Cociente) + Residuo

$$\begin{aligned} &= (x-1)(3x^3 + 3x^2 + 11x + 4) + 8 \\ &= 3x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 4x - 3x^3 - 3x^2 - 11x - 4 + 8 \\ &= 3x^4 + 8x^2 - 7x + 4 = \text{Dividendo} \end{aligned}$$

■

Formule usted un ejemplo en el que los siete pasos estén combinados.

EJEMPLO 4 *Uso de división sintética para verificar un factor*

Utilizar la división sintética para demostrar que $g(x) = x + 3$ es un factor de

$$f(x) = 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3$$

Solución El divisor es $x + 3 = x - (-3)$, de modo que las entradas del renglón 3 se multiplicarán por -3, serán colocadas en el renglón 2 y sumadas al renglón 1:

$$\begin{array}{r|rrrrrrl} -3) & 2 & 5 & -2 & 2 & -2 & 3 & \text{Renglón 1} \\ & & -6 & 3 & -3 & 3 & -3 & \text{Renglón 2} \\ \hline & 2 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \text{Renglón 3} \end{array}$$

Ya que el residuo es cero, se deduce que $f(-3) = 0$. De aquí que, por el teorema del factor, $x - (-3) = x + 3$ es un factor de $f(x)$. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

Un uso importante de la división sintética se aplica al encontrar el valor de un polinomio.

EJEMPLO 5 *Uso de división sintética para encontrar el valor de un polinomio*

Utilizar la división sintética para encontrar el valor de $f(x) = -3x^4 + 2x^3 - x + 1$ en $x = -2$; esto es, encontrar $f(-2)$.

Solución El teorema del residuo nos dice que el valor de una función polinomial en c es igual al residuo cuando el polinomio es dividido entre $x - c$. Este residuo es la última entrada del tercer renglón en el proceso de la división sintética. Queremos $f(-2)$, así que dividimos entre $x - (-2)$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & -3 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ & & 6 & -16 & 32 & -62 \\ \hline & -3 & 8 & -16 & 31 & -61 \end{array}$$

El cociente es $q(x) = -3x^3 + 8x^2 - 16x + 31$; el residuo es $R = -61$. Ya que el residuo fue -61, deducimos por el teorema del residuo que $f(-2) = -61$. ■

■ Ahora resuelva el problema 33.

Como ilustra el ejemplo 5, podemos usar el proceso de división sintética para encontrar el valor de una función polinomial en un número c como una alternativa a sólo sustituir c por x. Compare el trabajo que fue necesario en el ejemplo 5 con la aritmética involucrada en la sustitución:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -3(-2)^4 + 2(-2)^3 - (-2) + 1 \\ &= -3(16) + 2(-8) + 2 + 1 \\ &= -48 - 16 + 2 + 1 = -61 \end{aligned}$$

Como puede ver, la determinación de $f(-2)$ puede ser más sencilla utilizando la división sintética.

Algunas veces, ni la sustitución ni la división sintética evitan la necesidad de hacer cálculos tediosos. Considere el problema de evaluar $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 0.2x^3 - 1.5x^2 + 2x - 6$ en $x = 1.2$. En este caso, un tercer método, que utiliza la *forma anidada* de un polinomio, es más útil.

Forma anidada de un polinomio

Considere el polinomio $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7$. Podemos factorizar $f(x)$ como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7 \\ &= (3x^3 - 5x^2 + 2x) - 7 && \text{Agrupar términos que contienen a } x. \\ &= (3x^2 - 5x + 2)x - 7 && \text{Factorizar } x. \\ &= [(3x^2 - 5x) + 2]x - 7 && \text{Reagrupar.} \\ &= [(3x - 5)x + 2]x - 7 && \text{Factorizar } x \text{ dentro de los paréntesis.} \end{aligned}$$

Observe que esta forma del polinomio sólo contiene expresiones lineales. Una función polinomial escrita de esta manera se dice que está en **forma anidada.**

Veamos algunos otros ejemplos.

EJEMPLO 6 *Forma anidada de un polinomio*

Escribir cada polinomio en forma anidada:

(a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ (b) $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2$

(c) $f(x) = -5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 10x - 8$

Solución (a) Procedemos como sigue:

$$f(x) = (2x^2 - 3x) + 5 = (2x - 3)x + 5$$

La expresión $(2x - 3)x + 5$ es la forma anidada de $2x^2 - 3x + 5$.

(b) $f(x) = (5x^3 - 6x^2) + 2 = (5x^2 - 6x)\,x + 2 = [(5x - 6)x]x + 2$

La expresión $[(5x - 6)x]x + 2$ es la forma anidada del polinomio $5x^3 - 6x^2 + 2$.

(c)
$$\begin{aligned} f(x) &= (-5x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 10x) - 8 \\ &= (-5x^3 + 3x^2 - 2x + 10)x - 8 \\ &= [(-5x^2 + 3x - 2)x + 10]x - 8 \\ &= \{[(-5x + 3)x - 2]x + 10\}x - 8 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 39.

La ventaja de evaluar un polinomio que está en forma anidada es que se evita la necesidad de elevar un número a una potencia, lo que en una calculadora o en una computadora puede causar graves errores de redondeo. Además, las computadoras pueden realizar la operación de suma mucho más rápido que la de multiplicación, y la forma anidada necesita de menos multiplicaciones que la forma ordinaria de un polinomio. En el ejemplo 6(b), para evaluar $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 2$ en su forma ordinaria se necesitó de cinco multiplicaciones y dos sumas:

$$\overbrace{5 \cdot x \cdot x \cdot x \underbrace{- 6 \cdot x \cdot x +}_{\text{Suma}}}^{\text{Multiplicación}} 2$$

En la forma anidada se necesitan sólo tres multiplicaciones y dos sumas:

$$[(5 \overbrace{\cdot\, x - 6) \cdot x] \cdot}^{\text{Multiplicación}} \underbrace{x + }_{\text{Suma}} 2$$

Por tanto, para evitar errores y acelerar los cálculos, muchas computadoras evalúan los polinomios utilizando la forma anidada.

EJEMPLO 7 *Uso de la forma anidada para encontrar el valor de un polinomio*

Utilizar la forma anidada y una calculadora para evaluar el polinomio siguiente en $x = 1.3$.

$$f(x) = 0.5x^3 - 1.2x^2 + 5.1x - 6.2$$

Solución Escribimos f en la forma anidada como

$$f(x) = [(0.5x - 1.2)x + 5.1]x - 6.2$$

Empezamos dentro de los paréntesis, multiplicando 0.5 por $x = 1.3$. Luego restamos 1.2. Multiplicamos el resultado por $x = 1.3$ y sumamos 5.1. Multiplicamos este resultado por $x = 1.3$ y restamos 6.2. El valor es

$$f(1.3) = -0.4995$$

En una calculadora se procede como se indica a continuación:

Teclear: $\boxed{0.5}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1.3}$ $\boxed{-}$ $\boxed{1.2}$ $\boxed{=}$

Aparece: $\boxed{0.5}$ $\boxed{1.3}$ $\boxed{0.65}$ $\boxed{1.2}$ $\boxed{-0.55}$

Teclear: $\boxed{\times}$ $\boxed{1.3}$ $\boxed{+}$ $\boxed{5.1}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{1.3}$

Aparece: $\boxed{1.3}$ $\boxed{-0.715}$ $\boxed{5.1}$ $\boxed{4.385}$ $\boxed{1.3}$

Teclear: $\boxed{-}$ $\boxed{6.2}$ $\boxed{=}$

Aparece: $\boxed{5.7005}$ $\boxed{6.2}$ $\boxed{-0.4995}$

Observe que en este proceso no se utilizó la tecla de memoria. ■

Resumen

Tres formas para encontrar el valor de una función polinomial $f(x)$ en un número c:

1. Reemplazar x por el número c para encontrar $f(c)$.
2. Utilizar la división sintética para dividir $f(x)$ entre $x - c$. El residuo es $f(c)$.
3. Escribir $f(x)$ en la forma anidada y usar una calculadora para encontrar $f(c)$.

Ejercicio 3.4

En los problemas del 1 al 10 use el teorema del residuo para encontrar cuándo $f(x)$ es divisible entre $g(x)$.

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4;\quad g(x) = x - 2$

2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1;\quad g(x) = x + 1$

3. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 3;\quad g(x) = x - 3$

4. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 1;\quad g(x) = x + 2$

5. $f(x) = x^5 - 4x^3 + x;\quad g(x) = x + 3$

6. $f(x) = x^4 + x^2 + 2;\quad g(x) = x - 2$

7. $f(x) = 4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5;\quad g(x) = x - 1$

8. $f(x) = x^5 + 5x^3 - 10;\quad g(x) = x + 1$

9. $f(x) = 0.1x^3 + 0.2x;\quad g(x) = x + 1.1$

10. $f(x) = 0.1x^2 - 0.2;\quad g(x) = x + 2.1$

En los problemas del 11 al 22, use el teorema del residuo para encontrar el cociente $q(x)$ y el residuo R cuando $f(x)$ es dividido entre $g(x)$.

11. $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 4;\quad g(x) = x - 2$

12. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1;\quad g(x) = x + 1$

13. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 3;\quad g(x) = x - 3$

14. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 1;\quad g(x) = x + 2$

15. $f(x) = x^5 - 4x^3 + x;\quad g(x) = x + 3$

16. $f(x) = x^4 + x^2 + 2;\quad g(x) = x - 2$

17. $f(x) = 4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5;\quad g(x) = x - 1$

18. $f(x) = x^5 + 5x^3 - 10;\quad g(x) = x + 1$

19. $f(x) = 0.1x^3 + 0.2x;\quad g(x) = x + 1.1$

20. $f(x) = 0.1x^2 - 0.2;\quad g(x) = x + 2.1$

21. $f(x) = x^5 - 1;\quad g(x) = x - 1$

22. $f(x) = x^5 + 1;\quad g(x) = x + 1$

En los problemas del 23 al 32 use la división sintética para determinar si $x - c$ es un factor de $f(x)$.

23. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 8x + 4; \quad c = 2$

24. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 8; \quad c = -3$

25. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 5x + 10; \quad c = 2$

26. $f(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4; \quad c = 2$

27. $f(x) = 3x^6 + 82x^3 + 27; \quad c = -3$

28. $f(x) = 2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9; \quad c = -3$

29. $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 15; \quad c = -4$

30. $f(x) = x^6 - 16x^4 + x^2 - 16; \quad c = -4$

31. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1; \quad c = \frac{1}{2}$

32. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 3x + 1; \quad c = -\frac{1}{3}$

En los problemas del 33 al 38 utilice la división sintética para encontrar $f(c)$.

33. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1; \quad c = 2$

34. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 5; \quad c = -2$

35. $f(x) = 4x^5 - 3x^3 + 2x - 1; \quad c = -1$

36. $f(x) = -3x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5; \quad c = -1$

37. $f(x) = 9x^{17} - 8x^{10} + 9x^8 + 5; \quad c = 1$

38. $f(x) = 10x^{15} + 4x^{12} - 2x^5 + x^2; \quad c = -1$

En los problemas del 39 al 48 escriba cada polinomio en la forma anidada.

39. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 8$

40. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 6$

41. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 5x + 10$

42. $f(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4$

43. $f(x) = 3x^6 - 82x^3 + 27$

44. $f(x) = 2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9$

45. $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 15$

46. $f(x) = x^6 - 16x^4 + x^2 - 16$

47. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$

48. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 3x + 1$

En los problemas del 49 al 58, utilice la forma anidada y una calculadora para evaluar cada polinomio en $x = 1.2$. Evite el uso de cualquier tecla de memoria.

49. $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 8$

50. $f(x) = -4x^3 + 5x^2 + 6$

51. $f(x) = 3x^4 - 6x^3 - 5x + 10$

52. $f(x) = 4x^4 - 15x^2 - 4$

53. $f(x) = 3x^6 - 82x^3 + 27$

54. $f(x) = 2x^6 - 18x^4 + x^2 - 9$

55. $f(x) = 4x^6 - 64x^4 + x^2 - 15$

56. $f(x) = x^6 - 16x^4 + x^2 - 16$

57. $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$

58. $f(x) = 3x^4 + x^3 - 3x + 1$

59. Encuentre k tal que $f(x) = x^3 - kx^2 + kx + 2$ tenga el factor $x - 2$.

60. Encuentre k tal que $f(x) = x^4 - kx^3 + kx^2 + 1$ tenga el factor $x + 2$.

61. ¿Cuál es el residuo cuando $f(x) = 2x^{20} - 8x^{10} + x - 2$ se divide entre $x - 1$?

62. ¿Cuál es el residuo cuando $f(x) = -3x^{17} + x^9 - x^5 + 2x$ se divide entre $x + 1$?

63. Utilice el teorema del factor para probar que $x - c$ es un factor de $x^n - c^n$ para cualquier entero positivo n.

64. Utilice el teorema del factor para probar que $x - c$ es un factor de $x^n + c^n$ si $n \geq 1$ es un entero impar.

65. Una microcomputadora IBM−AT calcula potencias mediante multiplicación. Suponga que cada multiplicación de dos números requiere de 33,333 nanosegundos y cada suma o resta necesita 500 nanosegundos. (Tenga en cuenta que 1 nanosegundo = 10^{-9} segundos.) Sin considerar ningún otro tiempo, ¿cuánto le tomará a la computadora encontrar el valor de $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 4x - 10$ en $x = 2.013$?:

(a) ¿Reemplazando x por 2.013 en la expresión para $f(x)$?

(b) ¿Reemplazando x por 2.013 en la forma anidada de $f(x)$?

66. Usando la microcomputadora descrita en el problema 65, ¿cuánto tiempo le tomaría por los dos métodos (a) y (b) encontrar el valor de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para 5000 valores de x?

67. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa donde se aplique la división sintética para dividir un polinomio entre $x - c$. Su entrada debe consistir de los coeficientes del polinomio, en orden descendente, seguidos por el número c. Su salida debe consistir de los números que aparecerían en el tercer renglón del proceso de la división sintética.

68. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa que evalúe un polinomio utilizando la forma anidada. Su entrada debe consistir de los coeficientes del polinomio, en orden descendente, seguidos por el número c en el cual el polinomio será evaluado. Pruebe su programa con los polinomios dados en los problemas del 49 al 58.

69. Cuando usted divide un polinomio entre $x - c$, ¿prefiere utilizar división larga o la sintética? ¿El valor de c provoca una diferencia en su elección? Dé sus razones.

3.5 Los ceros de una función polinomial

Los ceros reales de una función polinomial f son las soluciones reales, si las hay, de la ecuación $f(x) = 0$. También son las intersecciones-x de f. En las funciones polinomiales y racionales, hemos visto la importancia de localizar los ceros para la graficación. Sin embargo, en la mayoría de los casos los ceros de una función polinomial son difíciles de encontrar. No hay fórmulas sencillas disponibles, como la fórmula cuadrática, para ayudarnos a resolver un polinomio de grado superior a 2. Aunque existen fórmulas para resolver cualquier ecuación polinomial de tercero o cuarto grado, son muy complicadas. (Si está interesado en aprender acerca de ellas, vea los problemas del 75 al 83 donde se resuelven ecuaciones cúbicas; para ecuaciones polinomiales de cuarto grado consulte un libro sobre teoría de ecuaciones.) Se ha comprobado que no existen fórmulas generales para ecuaciones polinomiales de grado 5 o superior. En esta sección aprenderemos algunas maneras de detectar información acerca del carácter de los ceros, que, a su vez, nos pueden ayudar a encontrarlos o al menos a aislarlos

Nuestro primer teorema concierne al número de ceros que una función polinomial puede tener. Al contar los ceros de un polinomio, contamos cada cero tantas veces como sea su multiplicidad.

Teorema número de ceros Una función polinomial no puede tener más ceros que el valor de su grado. ■

Demostración La demostración está basada en el teorema del factor. Si r es un cero de una función polinomial f, entonces $f(r) = 0$ y, $x - r$ es un factor de $f(x)$. Por tanto, cada cero corresponde a un factor de grado 1. El resultado es consecuencia de que f no puede tener más factores de primer grado que el valor de su grado.

El teorema siguiente, llamado **Regla de los signos de Descartes,** proporciona información acerca del número y localización de los ceros de una función polinomial, de modo que sepamos dónde buscar los ceros. La regla de los signos de Descartes supone que el polinomio está escrito en potencias descendentes de x, y necesita que contemos el número de variaciones de signo de los coeficientes de $f(x)$ y $f(-x)$.

Por ejemplo, la siguiente función polinomial tiene dos variaciones en el signo de los coeficientes:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^7 + 4x^4 + 3x^2 - 2x - 1 \\ &= -3x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 4x^4 + 0x^3 + 3x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

+ a −

Observe que ignoramos los coeficientes cero en $0x^6$, $0x^5$ y $0x^3$ al contar el número de variaciones en el signo de $f(x)$. Reemplazando x por $-x$, obtenemos

$$f(-x) = 3x^7 + 4x^4 + 3x^2 + 2x - 1$$

+ a −

que tiene una variación de signo.

Teorema regla de los signos de Descartes

Sea f una función polinomial.

El número de ceros positivos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$, o es igual que ese número menos un entero par.
El número de ceros negativos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(-x)$, o es igual a ese número menos un entero par. ■

No demostraremos la regla de los signos de Descartes, veamos cómo se utiliza.

EJEMPLO 1

Uso de la regla de los signos de Descartes para localizar ceros

Analizar los ceros de: $f(x) = 3x^6 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 3$

Solución Debe haber un máximo de seis ceros, ya que el polinomio es de grado 6. Como hay tres variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$, por la regla de los signos de Descartes esperamos tener tres o un cero positivos. Para continuar, veamos a $f(-x)$:

$$f(-x) = 3x^6 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 3$$

Hay tres variaciones de signo, así que esperamos tener tres o un cero negativos. De manera equivalente, sabemos que la gráfica de f tiene tres o una intersecciones-x positivas y tres o una intersecciones-x negativas. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Aunque realmente no hemos encontrado los ceros en el ejemplo 1, sabemos algo acerca de su número y cuántos podrían ser positivos o negativos. El resultado siguiente, que se le pide demostrar en el ejercicio 3.5 (problema 74), es llamado **teorema de los ceros racionales** y proporciona información acerca de los ceros racionales de un polinomio con coeficientes enteros.

Teorema de los ceros racionales

Sea f una función polinomial de grado 1 o superior de la forma

$$\boxed{f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_1x + a_0 \qquad a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0}$$

donde cada coeficiente es un entero. Si p/q, sin factores comunes, es un cero racional de f, entonces p debe ser un factor de a_0 y q un factor de a_n. ■

EJEMPLO 2

Lista de posibles ceros racionales

Enlistar los posibles ceros racionales de

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$$

Solución Ya que f tiene coeficientes enteros, podemos usar el teorema de los ceros racionales. Primero, enlistamos todos los enteros p que son factores de $a_0 = -6$ todos los enteros q que son factores de $a_3 = 2$:

$$p:\quad \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6$$
$$q:\quad \pm1,\ \pm2$$

Ahora construimos todas las razones posibles p/q:

$$\frac{p}{q}: \quad \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$$

Si f tiene un cero racional debe encontrarse en esta lista, que contiene 12 posibilidades. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

Asegúrese de entender lo que dice el teorema de los ceros racionales: Para un polinomio con coeficientes enteros, *si* hay un cero racional, es uno de los que se enlistan. Puede suceder que no haya ceros racionales. La división sintética puede ser utilizada para probar cada posible cero racional con el fin de determinar si en realidad es un cero. Para hacer el trabajo más fácil primero se prueban los enteros. Continuemos con este ejemplo.

EJEMPLO 3 *Determinación de ceros racionales de una función polinomial*

Continuar trabajando el ejemplo 2 para encontrar los ceros de

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6$$

Solución Reunimos toda la información que podamos acerca de los ceros:

PASO 1: Hay cuando mucho tres ceros.

PASO 2: Por la regla de los signos de Descartes, hay un cero positivo. También, como

$$f(-x) = -2x^3 + 11x^2 + 7x - 6$$

hay dos ceros, o ninguno, negativos.

PASO 3: Ahora usamos la lista de posibles ceros obtenida en el ejemplo 2: ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$. Elegimos probar el posible cero racional 1 utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 11 & -7 & -6 \\ & & 2 & 13 & 6 \\ \hline & 2 & 13 & 6 & 0 \end{array}$$

El residuo es cero. Por tanto, 1 es un cero y $x - 1$ es un factor de f. Las entradas en el renglón inferior de esta división sintética pueden ser usadas para factorizar:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 \\ &= (x - 1)(2x^2 + 13x + 6) \end{aligned}$$

Ahora cualquier solución de la ecuación $2x^2 + 13x + 6 = 0$ será un cero de f. A causa de esto, llamamos a la ecuación $2x^2 + 13x + 6 = 0$. **ecuación reducida** de f. Ya que el grado de la ecuación reducida de f es menor que el de la ecuación original, trabajamos con la ecuación reducida para encontrar los ceros de f.

PASO 4: La ecuación reducida $2x^2 + 13x + 6 = 0$ es una ecuación cuadrática con discriminante $b^2 - 4ac = 169 - 48 = 121 > 0$. Por lo tanto, tiene dos soluciones reales que pueden ser encontradas por factorización:

$$\begin{gathered} 2x^2 + 13x + 6 = (2x + 1)(x + 6) = 0 \\ 2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 6 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad x = -6 \end{gathered}$$

Los ceros de f son -6, $-\frac{1}{2}$, y 1. ■

Observe que los tres ceros de f encontrados en el ejemplo 3 están entre los dados en la lista de posibles ceros racionales en el ejemplo 2. También, observe que podemos escribir f en forma factorizada como

$$f(x) = 2x^3 + 11x^2 - 7x - 6 = (x - 1)(2x + 1)(x + 6) \qquad (1)$$

EJEMPLO 4 *Determinación de ceros reales de una función polinomial*

Encontrar los ceros de: $f(x) = 3x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 10x^2 + 12x - 8$

Solución Reunimos toda la información que podamos acerca de los ceros:

PASO 1: Hay cuando mucho cinco ceros.

PASO 2: Por la regla de los signos de Descartes, hay tres ceros, o uno, positivos. Tambié como

$$f(-x) = -3x^5 - 2x^4 + 15x^3 + 10x^2 - 12x - 8$$

hay dos ceros, o ninguno, negativos.

PASO 3: Obtener la lista de posibles ceros racionales, escribimos los factores de p de $a_0 = -8$ y los factores q de $a_5 = 3$:

$$p:\quad \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$$
$$q:\quad \pm 1, \pm 3$$

Los posibles ceros racionales consisten de todos los posibles cocientes p/q:

$$\frac{p}{q}:\quad \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \pm\frac{8}{3}$$

Podemos probar el posible cero racional 1 utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 3 & -2 & -15 & 10 & 12 & -8 \\ & & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 \\ \hline & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 & 0 \end{array}$$

El residuo es cero. Por tanto, 1 es un cero y $x - 1$ es un factor. Como antes, uti- lizamos las entradas en el renglón inferior de esta división sintética para facto- rizar a f:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^5 - 2x^4 - 15x^3 + 10x^2 + 12x - 8 \\ &= (x-1)(3x^4 + x^3 - 14x^2 - 4x + 8) \end{aligned}$$

Ahora trabajemos con la primera ecuación reducida de f:

$$3x^4 + x^3 - 14x^2 - 4x + 8 = 0$$

PASO 4: Sea $q_1(x) = 3x^4 + x^3 - 14x^2 - 4x + 8$. Por la regla de los signos de Descartes, q_1 tiene dos ceros, o ninguno, positivos. También como

$$q_1(-x) = 3x^4 - x^3 - 14x^2 + 4x + 8$$

q_1 tiene dos ceros, o ninguno, negativos.

PASO 5: Los posibles ceros racionales de q_1 son los mismos que se enlistaron anterior- mente para f. Seleccionamos probar con 1 otra vez ya que podría ser una raíz repetida:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 \\ & & 3 & 4 & -10 & -14 \\ \hline & 3 & 4 & -10 & -14 & -6 \end{array}$$

El residuo nos indica que 1 no es cero de q_1. Ahora probamos que -1:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 3 & 1 & -14 & -4 & 8 \\ & & -3 & 2 & 12 & -8 \\ \hline & 3 & -2 & -12 & 8 & 0 \end{array}$$

Encontramos que -1 es un cero de q_1 y por lo tanto $x - (-1) = x + 1$ es un fac- tor de q_1. En consecuencia, tenemos

$$f(x) = (x-1)(x+1)(3x^3 - 2x^2 - 12x + 8)$$

PASO 6: Ahora trabajamos con la segunda ecuación reducida de f:

$$3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

Sea $q_2(x) = 3x^3 - 2x^2 - 12x + 8$. Por la regla de los signos de Descartes, q_2 tiene dos ceros, o ninguno, positivos. También, como

$$q_2(-x) = -3x^3 - 2x^2 + 12x + 8$$

q_2 tiene un cero negativo. La lista de posibles ceros racionales de q_2 es la misma que la de f. Sin embargo, ya que 1 no era cero de q_1, tampoco puede serlo de q_2. Además, el hecho de que -1 sea cero de q_1 no significa que no pueda ser cero de q_2 (esto es, podría ser una raíz repetida de q_1). Sabemos que hay un cero negativo (que podría no ser racional), así que probamos con -1 una vez más para determinar si es una raíz de q_2:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 3 & -2 & -12 & 8 \\ & & -3 & 5 & 7 \\ \hline & 3 & -5 & -7 & 15 \end{array}$$

No lo es. A continuación, seleccionamos probar con -2:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 3 & -2 & -12 & 8 \\ & & -6 & 16 & -8 \\ \hline & 3 & -8 & 4 & 0 \end{array}$$

Encontramos que -2 es un cero, de modo que $x - (-2) = x + 2$ es un factor. Por tanto, tenemos

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(3x^2 - 8x + 4) \qquad (2)$$

PASO 7: La nueva ecuación reducida de f, $3x^2 - 8x + 4 = 0$, es cuadrática con un discriminante de $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(3)(4) = 16$. Por lo tanto, esta ecuación tiene dos raíces reales y, en este caso, las encontramos factorizando:

$$\begin{gathered} 3x^2 - 8x + 4 = 0 \\ (3x - 2)(x - 2) = 0 \\ 3x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \\ x = \frac{2}{3} \qquad\qquad x = 2 \end{gathered}$$

Los ceros de f son -2, -1, $\frac{2}{3}$, 1, y 2. ■

■ Ahora resuelva el problema 25.

El procedimiento seguido en el ejemplo 4 para encontrar los ceros de un polinomio también puede ser utilizado para resolver ecuaciones polinomiales.

EJEMPLO 5 *Resolución de una ecuación polinomial*

Resolver la ecuación: $x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = 0$

Solución Las soluciones de esta ecuación son los ceros de la función polinomial

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16$$

PASO 1: Hay cuando mucho cinco soluciones reales.

PASO 2: Por la regla de los signos de Descartes, hay cinco, tres o una soluciones positivas. Como

$$f(-x) = -x^5 - 5x^4 - 12x^3 - 24x^2 - 32x - 16$$

no hay soluciones negativas.

PASO 3: Ya que $a_5 = 1$ y no hay soluciones negativas, las potenciales soluciones racionales son los enteros positivos 1, 2, 4, 8 y 16. Primero probamos la posible raíz racional 1 utilizando la división sintética:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & -5 & 12 & -24 & 32 & -16 \\ & & 1 & -4 & 8 & -16 & 16 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & -16 & 16 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 1 es una solución y

$$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = (x - 1)(x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16)$$

Las restantes soluciones satisfacen la ecuación reducida

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16 = 0$$

PASO 4: Las posibles soluciones racionales aún son 1, 2, 4, 8 y 16. Primero probamos 1 ya que puede ser una solución repetida:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -4 & 8 & -16 & 16 \\ & & 1 & -3 & 5 & -11 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -11 & 5 \end{array}$$

Por tanto, 1 no es una solución de la ecuación reducida. Ahora intentemos con 2:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -4 & 8 & -16 & 16 \\ & & 2 & -4 & 8 & -16 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 2 es una solución de la ecuación reducida y

$$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = (x - 1)(x - 2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)$$

Las restantes soluciones satisfacen la nueva ecuación reducida

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$$

PASO 5: Ahora, las posibles soluciones racionales son 1, 2, 4 y 8. Sabemos que 1 no es una solución (¿sabe usted por qué no lo es?), de modo que empezamos con 2:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ & & 2 & 0 & 8 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 2 es una solución de la nueva ecuación reducida y es una solución repetida de la ecuación original, así

$$x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 32x - 16 = (x - 1)(x - 2)^2(x^2 + 4)$$

Las soluciones restantes satisfacen la ecuación reducida

$$x^2 + 4 = 0$$

la cual no tiene soluciones reales.

PASO 6: Por tanto, las soluciones reales son 1 y 2 (la última es una solución repetida). ■

■ Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 6 *Determinación de los ceros reales de un polinomio*

Usar la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales para encontrar los ceros reales de la función polinomial

$$g(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$$

Usar los ceros para factorizar en los números reales. Después haga la gráfica de g.

Solución PASO 1: Hay cuando mucho cinco ceros.

PASO 2: Hay cuatro, dos, o ninguno, ceros positivos. También, como

$$g(-x) = -x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$$

hay un cero negativo.

PASO 3: Los posibles ceros racionales de g son ± 1, ± 2. Probemos con 1:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1) & 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 1 es un cero, de modo que $x - 1$ es un factor y

$$g(x) = (x - 1)(x^4 - x^2 - 2)$$

PASO 4: La ecuación reducida $x^4 - x^2 - 2 = 0$ es de forma cuadrática y puede ser factorizada como sigue:

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$
$$(x^2 - 2)(x^2 + 1) = 0$$
$$x^2 - 2 = 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 + 1 = 0$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

Ya que $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real, la ecuación reducida sólo tiene dos soluciones $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Por tanto, los ceros de g son $-\sqrt{2}$, 1, y $\sqrt{2}$. La forma factorizada de g en los números reales es

$$\begin{aligned} g(x) &= x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2 \\ &= (x - 1)(x^4 - x^2 + 2) \\ &= (x - 1)(x^2 - 2)(x^2 + 1) \\ &= (x - 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 1) \end{aligned}$$

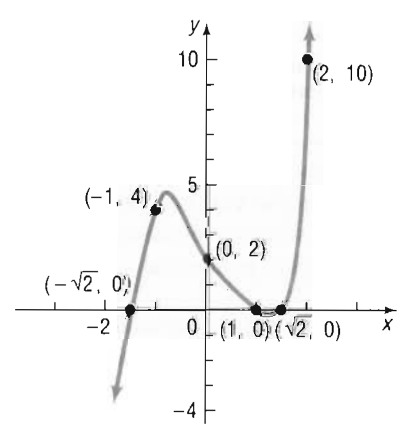
Ahora construyamos la figura 42:

FIGURA 42

	$-\infty < x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < 1$	$1 < x < \sqrt{2}$	$\sqrt{2} < x < \infty$
Número de prueba:	-2	-1	1.1	2
Valor de R:	-30	4	-0.17	10
Gráfica de R:	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x	Por debajo del eje x	Por arriba del eje x
Punto sobre la gráfica:	$(-2, -30)$	$(-1, 4)$	$(1.1, -0.17)$	$(2, 10)$

La gráfica de g tiene cuando mucho cuatro puntos de retorno. Para valores grandes de x, la gráfica se comportará como la de $y = x^5$. La figura 43 ilustra la gráfica de g.

FIGURA 43
$g(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$



Verificación: Hacer la gráfica $g(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 2$. Utilizar TRACE para localizar los puntos de retorno y verificar las intersecciones-x. ■

■ Ahora resuelva el problema 47.

Al factor cuadrático $x^2 + 1$ que aparece en forma factorizada en el ejemplo 6 se le llama *irreducible*, ya que el polinomio $x^2 + 1$ no puede ser factorizado en los números reales. En general, decimos que un factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ es **irreducible** si no puede ser factorizado en los números reales, esto es, si es primo en los números reales.

Consulte la función polinomial f del ejemplo 4. Encontramos que f tiene cinco ceros reales, de modo que, por el teorema del factor, su forma factorizada tendrá cinco factores lineales. La función polinomial g del ejemplo 6 tiene tres ceros reales, y su forma factorizada tiene tres factores lineales y un factor cuadrático irreducible. El resultado siguiente nos dice lo que debemos esperar cuando factorizamos un polinomio.

Teorema

Toda función polinomial (con coeficientes reales) puede ser factorizada de manera única en un producto de factores lineales y/o factores cuadráticos irreducibles. ■

Probaremos este enunciado en la sección 3.7 y, de hecho, sacaremos varias conclusiones adicionales acerca de los ceros de una función polinomial. Vale la pena hacer notar una conclusión ahora. Si un polinomio (con coeficientes reales) es de grado impar, entonces debe tener al menos un factor lineal. (¿Advierte por qué?) Por lo tanto, tendrá al menos un cero real.

Corolario

Una función polinomial (con coeficientes reales) de grado impar tiene al menos un cero real. ■

Resumen

Para obtener información acerca de los ceros reales de una función polinomial, siga estos pasos:

Procedimiento para encontrar los ceros reales de una función polinomial

PASO 1: Utilizar el grado del polinomio para determinar el número máximo de ceros.

PASO 2: Aplicar la regla de los signos de Descartes para determinar el número posible de ceros, positivos y negativos.

PASO 3:
(a) Si el polinomio tiene coeficientes enteros, utilizar el teorema de los ceros racionales para identificar aquellos números racionales que potencialmente puedan ser ceros.
(b) Utilizar la división sintética para comprobar cada posible cero racional.
(c) Cada vez que se encuentre un cero (y por tanto un factor), repetir los pasos 2 y 3 sobre la ecuación reducida.

PASO 4: Cuando intente encontrar los ceros, recuerde utilizar (si es posible) las técnicas de factorización que ya conoce (productos especiales, factorización por agrupación, etcétera).

Si estos procedimientos fallan en la localización de todos los ceros, puede tener que conformarse con una "estimación" o "aproximación" de éstos. El objetivo de la sección siguiente es darle a conocer cómo "estimar o aproximar" los ceros reales de una función polinomial.

DESARROLLO HISTÓRICO

■ Existen fórmulas para solucionar ecuaciones polinomiales de tercer y cuarto grados que, a pesar de no ser muy prácticas, tienen cierto interés histórico.

Durante el siglo XVI en Italia, las competencias matemáticas fueron un pasatiempo muy popular y quienes poseían métodos para resolver problemas los mantenían en secreto. (Las soluciones que se publicaban ya eran del conocimiento público.) Nicolás de Brescia (1499-1557), comúnmente conocido como Tartaglia ("el tartamudo"), mantenía en secreto el método para resolver ecuaciones cúbicas (de tercer grado), lo que le dio una ventaja decisiva en los concursos. Girolamo Cardano (1501-1576) descubrió que Tartaglia conocía el secreto, y como estaba interesado en las ecuaciones cúbicas, le solicitó la solución a Tartaglia. Éste, renuente, vaciló por algún tiempo pero finalmente, haciéndole jurar a medianoche y a la luz de una vela conservar el secreto, le comunicó a Cardano el método. Cardano publicó la solución en su libro *Ars Magna* (1545) dándole a Tartaglia el crédito, pero descubriendo el secreto. Tartaglia explotó en amargas recriminaciones, y cada uno escribió panfletos que perjudicaban el linaje, carácter moral y matemático del otro. El método de Tartaglia es analizado en los problemas del 75 al 83 en el ejercicio 3.5.

La ecuación cuártica o bicuadrática (cuarto grado) fue resuelta por Ludovico Ferrari, estudiante de Cardano, y esta solución también fue incluida, con crédito y el respectivo permiso, en *Ars Magna*.

Se hicieron intentos, en la misma época, por resolver la ecuación de quinto grado pero todos fracasaron. A principios del siglo XIX, P. Ruffini, Niels Abel y Evaristo Galois encontraron maneras de demostrar que no es posible resolver ecuaciones de quinto grado por medio de fórmulas, pero esas demostraciones requerían de métodos nuevos. Los métodos de Galois eventualmente contribuyeron al desarrollo de gran parte del álgebra moderna. ■

3.5

Ejercicio 3.5

En los problemas del 1 al 12 indique el número máximo de ceros que puede tener cada función polinomial. Luego utilice la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros, positivos y negativos, puede tener cada función polinomial. No intente encontrar los ceros

1. $f(x) = -4x^7 + x^3 - x^2 + 2$
2. $f(x) = 5x^4 + 2x^2 - 6x - 5$
3. $f(x) = 2x^6 - 3x^2 - x + 1$
4. $f(x) = -3x^5 + 4x^4 + 2$
5. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$
6. $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$
7. $f(x) = -x^4 + x^2 - 1$
8. $f(x) = x^4 + 5x^3 - 2$
9. $f(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$
10. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
11. $f(x) = x^6 - 1$
12. $f(x) = x^6 + 1$

En los problemas del 13 al 24, enliste los posibles ceros racionales de cada función polinomial pero no intente encontrarlos.

13. $f(x) = 3x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$
14. $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^2 + 3$
15. $f(x) = x^5 - 6x^2 + 9x - 3$
16. $f(x) = 2x^5 - x^4 - x^2 + 1$
17. $f(x) = -4x^3 - x^2 + x + 2$
18. $f(x) = 6x^4 - x^2 + 2$
19. $f(x) = 3x^4 - x^2 + 2$
20. $f(x) = -4x^3 + x^2 + x + 2$
21. $f(x) = 2x^5 - x^3 + 2x^2 + 4$
22. $f(x) = 3x^5 - x^2 + 2x + 3$
23. $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - x^2 + 2$
24. $f(x) = -6x^3 - x^2 + x + 3$

En los problemas del 25 al 36, utilice la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales para encontrar todos los ceros reales de cada función polinomial. Con los ceros así obtenidos, factorice f en los números reales.

25. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
26. $f(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 20$
27. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$
28. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$

29. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$
30. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
31. $f(x) = 4x^4 + 7x^2 - 2$
32. $f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$
33. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
34. $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$
35. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - x + 2$
36. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 - x - 3$

En los problemas del 37 al 46 resuelva cada ecuación en el sistema de los números reales.

37. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = 0$
38. $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$
39. $3x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$
40. $2x^3 - 3x^2 - 3x - 5 = 0$
41. $3x^3 - x^2 - 15x + 5 = 0$
42. $2x^3 - 11x^2 + 10x + 8 = 0$
43. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$
44. $x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 18x + 9 = 0$
45. $x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + 1 = 0$
46. $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2 = 0$

En los problemas del 47 al 56 encuentre las intersecciones de cada función polinomial $f(x)$. Encuentre los intervalos de x en los cuales la gráfica está por arriba del eje x y en los que está por debajo del eje x. Obtenga algunos otros puntos de la gráfica y conéctelos mediante una curva suave. [Sugerencia: Utilice la forma factorizada de f (véanse *los problemas del 27 al 36*).*]*

47. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$
48. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$
49. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$
50. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$
51. $f(x) = 4x^4 + 7x^2 - 2$
52. $f(x) = 4x^4 + 15x^2 - 4$
53. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$
54. $f(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 4x + 8$
55. $f(x) = 4x^5 - 8x^4 - x + 2$
56. $f(x) = 4x^5 + 12x^4 - x - 3$

En los problemas del 57 al 64 resuelva cada ecuación en el sistema de los números complejos

57. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$
58. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
59. $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$
60. $x^4 - x^3 + x - 1 = 0$
61. $x^4 + 3x^3 - x^2 - 12x - 12 = 0$
62. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 27x - 36 = 0$
63. $x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1 = 0$
64. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$
65. Una solución de la ecuación $x^3 - 8x^2 + 16x - 3 = 0$ es 3. Encuentre la suma de las soluciones restantes.
66. Una solución de la ecuación $x^3 + 5x^2 + 5x - 2 = 0$ es -2. Encuentre la suma de las soluciones restantes.
67. ¿ $\frac{1}{3}$ es un cero de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$? Explique su respuesta.
68. ¿ $\frac{1}{3}$ es un cero de $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3x + 1$? Explique su respuesta.
69. ¿ $\frac{3}{5}$ es un cero de $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + x^3 - x + 1$? Explique su respuesta.
70. ¿ $\frac{2}{3}$ es un cero de $f(x) = x^7 + 6x^5 - x^4 + x + 2$? Explique su respuesta.
71. ¿Cuál será la longitud de la arista de un cubo del que después de cortarle a una de sus caras una pulgada de grosor el volumen restante es de 294 pulgadas cúbicas?
72. ¿Cuál es la longitud de la arista de un cubo cuyo volumen podría duplicarse por un aumento de 6 centímetros a un lado, otro aumento de 12 centímetros a un segundo lado y una disminución de 4 centímetros al tercer lado?
73. Sea $f(x)$ una función polinomial cuyos coeficientes son enteros. Suponga que r es un cero real de f y que el coeficiente principal de f es 1. Utilice el teorema de los ceros racionales para demostrar que r es un entero o un número irracional.
74. Demostrar el teorema de los ceros racionales. [*Sugerencia:* Sea p/q, una solución del polinomio $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, cuyos coeficientes son todos enteros, y donde p y q no tienen factores comunes excepto 1 y -1. Demostrar que $a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0$. Ahora, ya que p es un factor de los primeros n términos de esta ecuación, p también debe ser un factor del término a_0q^n. Como p no es factor de q (¿sabe usted por qué?), p debe ser un factor de a_0. De manera análoga, q debe ser un factor de a_n.]

En los problemas del 75 al 83 desarrolle la solución de Tartaglia-Cardano de la ecuación cúbica y muestre por qué es completamente impráctica.

75. Demuestre que la ecuación cúbica general $y^3 + by^2 + cy + d = 0$ puede ser transformada en una ecuación de la forma $x^3 + px + q = 0$ utilizando la sustitución $y = x - b/3$.

76. En la ecuación $x^3 + px + q = 0$, reemplace x por $H + K$. Sea $3HK = -p$, y demuestre quet $H^3 + K^3 = -q$. [*Sugerencia:* $3H^2K + 3HK^2 = 3HKx$.]

77. Con base en el problema 76, tenemos las dos ecuaciones

$$3HK = -p \quad \text{y} \quad H^3 + K^3 = -q$$

Resuelva para K en $3HK = -p$ y sustituya en $H^3 + K^3 = -q$. Luego demuestre que

$$H = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

[*Sugerencia:* Busque una ecuación que esté en forma cuadrática.]

78. Utilice la solución H del problema 77 y la ecuación $H^3 + K^3 = -q$ para demostrar que

$$K = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

79. Utilice los resultados de los problemas del 76 al 78 para demostrar que la solución de $x^3 + px + q = 0$ es

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

80. Utilice el resultado del problema 79 para resolver la ecuación $x^3 - 6x - 9 = 0$.

81. Con una calculadora y el resultado del problema 79 resuelva la ecuación $x^3 + 3x - 14 = 0$.

82. Aplique los métodos de este capítulo para resolver la ecuación $x^3 + 3x - 14 = 0$.

83. *Requiere de los números complejos.* Demuestre que la fórmula deducida en el problema 79 conduce a la raíz cúbica de un número complejo cuando se aplica a la ecuación $x^3 - 6x + 4 = 0$. Utilice los métodos de este capítulo para resolver la ecuación.

84. Una función f tiene la propiedad de que $f(2 + x) = f(2 - x)$ para todo x. Si f tiene exactamente cuatro ceros reales, encuentre la suma de estos ceros.

3.6 Aproximación a los ceros reales de una función polinomial

Algunas veces los procedimientos analizados en la sección 3.5 proporcionan información limitada acerca de los ceros de un polinomio. *Veamos* un ejemplo.

EJEMPLO 1 *Determinación de los ceros reales de una función polinomial*

Analizar los ceros de: $f(x) = x^5 - x^3 - 1$

Solución

PASO 1: f tiene cuando mucho cinco ceros.

PASO 2: f tiene un cero positivo, y ya que $f(-x) = -x^5 + x^3 - 1$, f tiene dos ceros, o ninguno, negativos.

PASO 3: Los posibles ceros racionales son ± 1, ninguno de los cuales realmente es un cero. Concluimos que f tiene un cero positivo irracional y tal vez dos ceros irracionales negativos. ■

Para obtener más información acerca de los ceros del polinomio del ejemplo 1, necesitamos algunos resultados adicionales.

Cotas superior e inferior

La búsqueda de ceros en una función polinomial puede reducirse un poco si podemos encontrar sus cotas superior e inferior. Un número M es una **cota superior** para los ceros de un polinomio f si ningún cero de f es mayor que M. El número m es una **cota inferior** si ningún cero es menor que m.

Por lo tanto, si m es una cota inferior y M una cota superior para los ceros de un polinomio f, entonces

$$m \leq \text{cualquier cero de } f \leq M$$

Una ventaja inmediata de conocer los valores de una cota inferior m y una cota superior M es que, para polinomios con coeficientes enteros, puede permitirle eliminar algunos posibles ceros racionales, esto es, cualesquiera que estén fuera del intervalo $[n, M]$. El teorema siguiente nos dice cómo localizar cotas inferiores y superiores.

Teorema cotas de los ceros

Sea f una función polinomial cuyo coeficiente principal es positivo.

Si $M > 0$ es un número real y el tercer renglón en el proceso de división sintética de f entre $x - M$ sólo tiene números que son positivos o cero, entonces M es una cota superior para los ceros de f.

Si $m < 0$ es un número real y el tercer renglón en el proceso de división sintética de f entre $x - m$ tiene sólo números que son alternadamente positivos (o cero) y negativos (o cero), entonces m es una cota inferior para los ceros de f. ∎

Demostración (bosquejo)

Sólo daremos un bosquejo de la demostración de la primera parte del teorema. Suponga que M es un número real positivo, y el tercer renglón en el proceso de división sintética del polinomio f entre $x - M$ sólo tiene números que son positivos o cero. Entonces, hay un cociente q y un residuo R de modo que

$$f(x) = (x - M)q(x) + R$$

donde los coeficientes de $q(x)$ son positivos o cero y el residuo $R \geq 0$. Así, para cualquier $x > M$, debemos tener $x - M > 0$, $q(x) > 0$, y $R \geq 0$, de modo que $f(x) > 0$. Esto es, no hay ceros de f mayores que M. ∎

EJEMPLO 2

Determinación de las cotas superior e inferior para los ceros

Encontrar cotas superior e inferior para los ceros de: $f(x) = x^5 - x^3 - 1$

Solución

Al buscar una cota superior para los ceros, la práctica común es empezar con 1 y seguir con 2, 3, . . . , hasta que en el tercer renglón del proceso de división sintética se tengan sólo números positivos o cero. Por tanto, empezamos con 1:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ & & 2 & 4 & 6 & 12 & 24 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 6 & 12 & 23 \end{array}$$

Con 2, el tercer renglón sólo tiene números positivos; por lo tanto 2 es una cota superior.

Para obtener una cota inferior para los ceros, empezamos con -1 y continuamos con -2, -3, . . . , hasta que en el tercer renglón del proceso de división sintética se tengan números que alternen en signo

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ & & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

Cuenta como positivo

Cuenta como negativo

Cuenta como positivo

Puesto que las entradas alternan en signo, -1 es una cota inferior. Por lo tanto, los ceros de f están entre -1 y 2. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Nota: Al determinar las cotas inferiores, un cero en el renglón inferior seguido por una entrada diferente de cero puede ser contado como positivo o negativo, según sea necesario. Si la siguiente entrada también es un cero, debe ser contada de signo opuesto a como fue contado el cero anterior (consulte el ejemplo 2).

En el ejemplo 2 encontramos que los ceros de $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ están en el intervalo $[-1, 2]$. Sin embargo, recuerde que al buscar las cotas inferior -1 y superior 2, sólo probamos con enteros. Si probáramos con otros números positivos menores que 2 y otros negativos mayores que -1, podríamos mejorar las cotas y encontrar un intervalo más pequeño que contenga los ceros de f. Pero el esfuerzo necesario para hacer esto generalmente no se compensa ya que hay métodos más eficientes. *Veamos* uno de tales métodos.

Teorema del valor intermedio

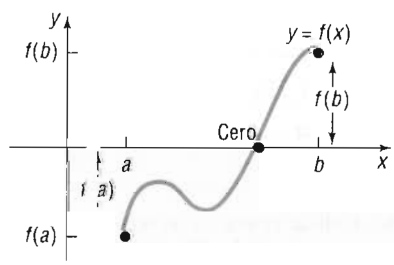
El enunciado siguiente llamado **teorema del valor intermedio,** está basado en el hecho de que la gráfica de una función polinomial es continua; esto es, no tiene "saltos" o "cortes".

Teorema del valor intermedio

Sea f una función polinomial. Si $a < b$ y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signos opuestos, entonces hay al menos un cero de f entre a y b. ■

Aunque la demostración de este enunciado demanda métodos avanzados de cálculo, es fácil "ver" por qué es verdadero. *Véase* la figura 44.

FIGURA 44
Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, hay un cero entre a y b.



EJEMPLO 3 *Uso del teorema del valor intermedio para localizar ceros*

Demostrar que $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ tiene un cero entre 1 y 2.

Solución

Sabemos del ejemplo 1 que f tiene exactamente un cero positivo. Ahora, remitámonos a la solución del ejemplo 2, donde usamos la división sintética para dividir f entre $x - 1$ y después entre $x - 2$. De allí, vemos que

$$f(1) = -1 \quad \text{y} \quad f(2) = 23$$

Ya que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, se deduce del Teorema del valor intermedio que f tiene un cero entre 1 y 2. ■

Observemos que el cero entre 1 y 2 es irracional, pues encontramos en el ejemplo 1 que los únicos ceros racionales posibles son -1 y 1.

■ Ahora resuelva el problema 7.

Podemos utilizar el teorema del valor intermedio para obtener una aproximación mejor al cero de una función f como sigue:

Aproximación de los ceros de una función polinomial

PASO 1: Encontrar dos enteros consecutivos a y $a + 1$ tales que f tenga un cero entre ellos.
PASO 2: Dividir el intervalo $[a, a + 1]$ en 10 subintervalos iguales.
PASO 3: Evaluar f en cada extremo de los subintervalos hasta que se pueda aplicar el teorema del valor intermedio; ese intervalo contiene entonces un cero.
PASO 4: Repita el proceso empezando en el paso 2 hasta que se alcance la precisión deseada.

EJEMPLO 4 *Aproximación de los ceros de una función polinomial*

Encontrar el cero positivo de $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ con dos decimales exactos.

Solución Del ejemplo 3 sabemos que el cero positivo está entre 1 y 2. Dividimos el intervalo $[1, 2]$ en 10 subintervalos iguales: $[1, 1.1]$, $[1.1, 1.2]$, $[1.2, 1.3]$, $[1.3, 1.4]$, $[1.4, 1.5]$, $[1.5, 1.6]$, $[1.6, 1.7]$, $[1.7, 1.8]$, $[1.8, 1.9]$, $[1.9, 2]$. Ahora, encontremos el valor de f en cada extremo hasta que se pueda aplicar el teorema del valor intermedio. El método más sencillo es escribir $f(x)$ en forma anidada y utilizar una calculadora. Por tanto, escribimos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - x^3 - 1 \\ &= (x^2 - 1)\cdot x\cdot x\cdot x - 1 = (x\cdot x - 1)\cdot x\cdot x\cdot x - 1 \end{aligned}$$

$$f(1.0) = -1 \qquad f(1.2) = -0.23968$$
$$f(1.1) = -0.72049 \qquad f(1.3) = 0.51593$$

Podemos detenernos aquí y concluir que el cero está entre 1.2 y 1.3. Ahora dividimos el intervalo $[1.2, 1.3]$ en 10 subintervalos y procedemos a evaluar f en cada extremo:

$$f(1.20) = -0.23968 \qquad f(1.23) = -0.0455613$$
$$f(1.21) = -0.1778185 \qquad f(1.24) = 0.025001$$
$$f(1.22) = -0.1131398$$

Concluimos que el cero está entre 1.23 y 1.24 y, así, el cero es 1.23, con dos decimales exactas. ■

Comentario: Utilizar la gráfica de $f(x) = x^5 - x^3 - 1$ para concluir que f tiene un cero positivo. Luego utilizar ZOOM y TRACE para aproximarlo con dos decimales exactos. ■

Hay muchas otras técnicas numéricas para aproximar los ceros de un polinomio. La esbozada en el ejemplo 4 (una variación del *método de bisección*) tiene las ventajas de que siempre funciona, puede ser programada muy fácilmente en una computadora, y cada vez que se aplica nos da un decimal adicional de precisión. *Véase* el problema 33 para el método de bisección, donde se ubica al cero en una sucesión de intervalos, con cada nuevo intervalo de la mitad de longitud que el precedente.

3.6

Ejercicio 3.6

En los problemas del 1 al 6 encuentre cotas superior e inferior para los ceros de cada función polinomial.

1. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$
2. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 4$
3. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 11x + 11$
4. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 11x - 6$
5. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 9$
6. $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 27x^2 - 54x + 81$

En los problemas del 7 al 12 utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que cada función polinomial tiene un cero en el intervalo dado.

7. $f(x) = 8x^4 - 2x^2 + 5x - 1$; $[0, 1]$

8. $f(x) = x^4 + 8x^3 - x^2 + 2$; $[-1, 0]$

9. $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8x + 2$; $[-5, -4]$

10. $f(x) = 3x^3 - 10x + 9$; $[-3, -2]$

11. $f(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 - 18x + 18$; $[1.4, 1.5]$

12. $f(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 6x^2 + x + 2$; $[1.7, 1.8]$

En los problemas del 13 al 16 cada función polinomial tiene exactamente un cero positivo. Utilice el método del ejemplo 4 para aproximar ese cero con dos decimales exactos.

13. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 4$

14. $f(x) = 2x^4 + x^2 - 1$

15. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 8$

16. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 20$

En los problemas del 17 al 20 cada ecuación tiene una solución r *en el intervalo indicado. Utilice el método del ejemplo 4 para aproximar esa solución con dos decimales exactos.*

17. $8x^4 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$; $0 \leq r \leq 1$

18. $x^4 + 8x^3 - x^2 + 2 = 0$; $-1 \leq r \leq 0$

19. $2x^3 + 6x^2 - 8x + 2 = 0$; $-5 \leq r \leq -4$

20. $3x^3 - 10x + 9 = 0$; $-3 \leq r \leq -2$

En los problemas del 21 al 24 aproxime el cero positivo con dos decimales exactos.

21. $f(x) = x^3 + x^2 + x - 4$

22. $f(x) = 2x^4 + x^2 - 1$

23. $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 8$

24. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 20$

En los problemas del 25 al 28 aproxime las soluciones correctas con dos decimales exactos.

25. $8x^4 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$

26. $x^4 + 8x^3 - x^2 + 2 = 0$

27. $2x^3 + 6x^2 - 8x + 2 = 0$

28. $3x^3 - 10x + 9 = 0$

29. Suponga que se le da una ecuación polinomial para resolver. Escriba un breve párrafo esbozando su estrategia.

30. Suponga que los posibles ceros racionales de una función polinomial son ± 3 y ± 7. Explique por qué se deduce del teorema de las cotas inferior y superior, que es preferible probar primero con ± 3 antes que con ± 7.

31. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa que estime el cero positivo de una función polinomial a cualquier grado deseado de precisión. La entrada debe consistir de los coeficientes del polinomio, en orden descendente, seguidos por el grado N de precisión requerida (esto es, el cero será estimado con una precisión de 10^{-N}), seguido por dos enteros consecutivos entre los cuales estará el cero buscado. La salida consistirá de dos números decimales entre los cuales estará el cero buscado. El programa debe tener una subrutina que escriba el polinomio en forma anidada.

32. *Ejercicio de programación.* Modifique el programa del problema 31 para incluir la localización de los dos enteros consecutivos entre los cuales estará el cero buscado.

33. *Método de bisección para aproximar los ceros de una función f.* Empezamos con dos enteros consecutivos, a y $a + 1$, tales que $f(a)$ y $f(a + 1)$ sean de signos opuestos. Evalúe f en el punto medio m_1 de a y $a + 1$. Si $f(m_1) = 0$, entonces m_1 es el cero de f, y habremos terminado. De otra forma, $f(m_1)$ es de signo opuesto a $f(a)$ o $f(a + 1)$. Suponga que $f(a)$ y $f(m_1)$ son de signos opuestos. Ahora evalúe f en el punto medio m_2 de a y m_1. Repita este proceso hasta que el grado deseado de precisión se haya alcanzado. Observe que cada interacción coloca al cero en un intervalo cuya longitud es la mitad del intervalo precedente. Utilice el método de bisección para resolver los problemas del 13 al 20.

3.7 Polinomios complejos; teorema fundamental del álgebra

Una variable z en el sistema de los números complejos es llamada **variable compleja.** Una **función polinomial compleja** f de grado n tiene la forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números complejos, $a_n \neq 0$, y n es un entero no negativo. Aquí, a_n es llamado **coeficiente principal** de f. Un número complejo r es llamado **cero** (complejo) de una función compleja f si $f(r) = 0$.

En el capítulo 2 descubrimos que algunas ecuaciones cuadráticas no tienen soluciones reales, pero que en el sistema de los números complejos toda ecuación cuadrática tiene una solución, real o compleja. El teorema siguiente, demostrado por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) cuando tenía 22 años de edad,* amplía el concepto a polinomios complejos. De hecho, este enunciado es tan importante y útil que se le ha reconocido como el **teorema fundamental del álgebra**.

Teorema fundamental del álgebra

Toda función polinomial compleja $f(z)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos un cero complejo. ∎

No probaremos este enunciado pues la demostración se sale del alcance de este libro. Sin embargo, usando el teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor, podemos probar lo siguiente:

Teorema

Toda función polinomial compleja $f(z)$ de grado $n \geq 1$ puede ser factorizada en n factores lineales (no necesariamente distintos) de la forma

$$\boxed{f(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n) \qquad (2)}$$

donde $a_n, r_1, r_2, \ldots, r_n$ son números complejos.

Demostración

Sea

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

Por el teorema fundamental del álgebra, f tiene al menos un cero, digamos, r_1. Entonces, por el teorema del factor, $z - r_1$ es un factor, y

$$f(z) = (z - r_1)q_1(z)$$

donde $q_1(z)$ es un polinomio complejo de grado $n - 1$ cuyo coeficiente principal es a_n. Nuevamente, por el teorema fundamental del álgebra, el polinomio complejo $q_1(z)$ tiene al menos un cero, digamos, r_2. Por el teorema del factor, $q_1(z)$ tiene el factor $z - r_2$, de modo que

$$q_1(z) = (z - r_2)q_2(z)$$

donde $q_2(z)$ es un polinomio complejo de grado $n - 2$ cuyo coeficiente principal es a_n. En consecuencia,

$$f(z) = (z - r_1)(z - r_2)q_2(z)$$

Al repetir este argumento n veces, finalmente llegamos a

$$f(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n)q_n(z)$$

*En total, Gauss dio cuatro demostraciones diferentes de este teorema, el primero, en 1799, fue tema de su disertación doctoral.

donde $q_n(z)$ es un polinomio complejo de grado $n - n = 0$ y cuyo coeficiente principal es a_n. Por lo tanto, $q_n(z) = a_n z^0 = a_n$, y así

$$f(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n)$$ ■

Polinomios complejos con coeficientes reales

Podemos utilizar el teorema fundamental del álgebra para obtener información valiosa acerca de los ceros de polinomios complejos cuyos coeficientes son números reales.

Teorema pares conjugados Sea $f(z)$ un polinomio complejo cuyos coeficientes son reales. Si $r = a + bi$ es un cero de f, entonces el complejo conjugado $\bar{r} = a - bi$ también es un cero de f. ■

En otras palabras, para polinomios complejos cuyos coeficientes son números reales, los ceros aparecen en pares conjugados.

Demostración Sea

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 z + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales y $a_n \neq 0$. Si r es un cero de f, entonces $f(r) = 0$, de modo que

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 r + a_0 = 0$$

Tomamos el conjugado de ambos lados para obtener

$$\overline{a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1 r + a_0} = \overline{0}$$

$$\overline{a_n r^n} + \overline{a_{n-1} r^{n-1}} + \cdot \cdot \cdot + \overline{a_1 r} + \overline{a_0} = \overline{0}$$ El conjugado de una suma es igual a la suma de los conjugados (véase sección 1.5).

$$\overline{a_n}(\bar{r})^n + \overline{a_{n-1}}(\bar{r})^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + \overline{a_1}\bar{r} + \overline{a_0} = \overline{0}$$ El conjugado de un producto es igual al producto de los conjugados.

$$a_n(\bar{r})^n + a_{n-1}(\bar{r})^{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_1\bar{r} + a_0 = 0$$ El conjugado de un número real es igual al número real.

Esta última ecuación establece que $f(\bar{r}) = 0$; esto es, $\bar{r}$ es un cero de f. ■

El valor de este enunciado debe quedar claro. Una vez enterados de que, digamos, $3 + 4i$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces sabemos que $3 - 4i$ también es un cero. El teorema tiene un corolario importante.

Corolario Un polinomio complejo f de grado impar con coeficientes reales tiene al menos un cero real. ■

Demostración Ya que los ceros complejos aparecen como pares conjugados en un polinomio complejo con coeficientes reales, siempre habrá un número par de ceros que no son números reales. En consecuencia, ya que f es de grado impar, uno de sus ceros tiene que ser un número real. ■

Por ejemplo, el polinomio $f(z) = z^5 - 3z^4 + 4z^3 - 5$ tiene al menos un cero que es un número real, ya que f es de grado 5 (impar) y tiene coeficientes reales.

Ahora podemos probar el teorema que enunciamos al final de la sección 3.5.

Teorema Toda función polinomial con coeficientes reales puede ser factorizada de manera única en los números reales en un producto de factores lineales y/o, factores cuadráticos irreducibles. ■

Demostración Todo polinomio complejo f de grado n tiene exactamente n ceros y puede ser factorizado en un producto de n factores lineales. Y cuando sus coeficientes son reales, los ceros que sean números complejos siempre aparecerán por pares conjugados. Como resultado de esto, si $r = a + bi$ es un cero complejo, entonces también $\bar{r} = a - bi$ lo es. En consecuencia, cuando los factores lineales $z - r$ y $z - \bar{r}$ de f son multiplicados, tenemos

$$(z - r)(z - \bar{r}) = z^2 - (r + \bar{r})z + r\bar{r} = z^2 - 2az + a^2 + b^2$$

Este polinomio de segundo grado tiene coeficientes reales y es irreducible (en los números reales). Por lo tanto, los factores de f, o son lineales o son cuadráticos irreducibles. ■

EJEMPLO 1 *Uso del teorema de pares conjugados*

Un polinomio f de grado 5 cuyos coeficientes son números reales tiene los ceros 1, $5i$ y $1 + i$. Encontrar los otros dos ceros.

Solución Ya que los ceros conjugados aparecen como pares conjugados, se deduce que $-5i$, el conjugado de $5i$ y $1 - i$, el conjugado de $1 + i$, son los dos ceros que faltan. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Polinomios con coeficientes complejos

El algoritmo de la división para polinomios (*véase* la sección 3.4) es cierto para polinomios con coeficientes complejos. Como consecuencia de esto, el teorema del residuo y el del factor también son ciertos. De hecho, el proceso de división sintética también funciona para polinomios con coeficientes complejos

EJEMPLO 2 *Verificación de un cero complejo*

Utilice la división sintética y el teorema del factor para demostrar que $1 + 2i$ es un cero de

$$f(z) = (1 + i)z^2 + (2 - i)z + (3 - 4i)$$

Solución Utilizamos división sintética y dividimos $f(z)$ entre $z - (1 + 2i)$:

$$\begin{array}{r|rrr} 1+2i & 1+i & 2-i & 3-4i \\ & & -1+3i & -3+4i \\ \hline & 1+i & 1+2i & 0 \end{array}$$

Por tanto, $z - (1 + 2i)$ es un factor, y $1 + 2i$ es un cero. ■

Por supuesto, pudimos haber demostrado que $1 + 2i$ es un cero del polinomio $f(z)$ en el ejemplo 2 utilizando sustitución como sigue:

$$\begin{aligned} f(1 + 2i) &= (1 + i)(1 + 2i)^2 + (2 - i)(1 + 2i) + (3 - 4i) \\ &= -7 + i + 4 + 3i + 3 - 4i = 0 \end{aligned}$$

■ Ahora resuelva el problema 23.

Con base en la ecuación (2) podemos afirmar que un polinomio complejo f de grado n tiene n factores lineales. Estos n factores lineales no tienen que ser distintos; algunos pueden repetirse más de una vez. Cuando un factor lineal $z - r$ aparece exactamente m veces en la forma factorizada de f, entonces r es llamada **cero de multiplicidad m** de f. Esto nos lleva a la siguiente conclusión.

Teorema Si un cero de multiplicidad m de un polinomio complejo f es contado m veces, entonces un polinomio complejo f de grado $n \geq 1$ tendrá exactamente n ceros. ■

EJEMPLO 3 *Enlistar todos los ceros de una función polinomial*

La función polinomial compleja

$$f(z) = (2 + i)(z - 5)^3(z + i)^2[z - (3 + i)]^4(z - i)$$

de grado 10 tiene a $2 + i$ como coeficiente principal. A continuación se enlistan sus ceros

5:	Multiplicidad	3
$-i$:	Multiplicidad	2
$3 + i$:	Multiplicidad	4
i:	Multiplicidad	1
Grado:		10

■

EJEMPLO 4 *Uso de los ceros para construir un polinomio*

Construir el polinomio $f(z)$ con coeficientes complejos de grado 3 y los siguientes ceros:

$1 + i$: Multiplicidad 1
$-i$: Multiplicidad 2

Solución Como $1 + i$ es un cero de multiplicidad 1 y $-i$ es un cero de multiplicidad 2, entonces $z - (1 + i)$ y $(z + i)^2$ son factores de f. Por lo tanto, $f(z)$ es de la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= [z - (1 + i)](z + i)^2 \\ &= [z - (1 + i)](z^2 + 2iz - 1) \\ &= z^3 + (-1 + i)z^2 + (1 - 2i)z + 1 + i \end{aligned}$$

Aunque otros polinomios con coeficientes complejos tienen los tres ceros requeridos, los únicos de grado 3 serán $f(z)$ o $kf(z)$, donde $k \neq 0$ es algún número complejo.

3.7

Ejercicio 3.7

En los problemas del 1 al 10 se da información acerca de un polinomio complejo $f(z)$ cuyos coeficientes son números reales. Encuentre los restantes ceros de f.

1. Grado 3; ceros: $3, 4 - i$
2. Grado 3; ceros: $4, 3 + i$
3. Grado 4; ceros: $i, 1 + i$
4. Grado 4; ceros: $1, 2, 2 + i$

5. Grado 5; ceros: 1, i, $2i$

6. Grado 5; ceros: 0, 1, 2, i

7. Grado 4; ceros: i, 2, -2

8. Grado 4; ceros: $2 - i$, $-i$

9. Grado 6; ceros: 2, $2 + i$, $-3 - i$, 0

10. Grado 6; ceros: i, $3 - 2i$, $-2 + i$

En los problemas 11 y 12 indique por qué los datos dados son contradictorios.

11. $f(z)$ es un polinomio complejo de grado 3 con coeficientes reales; sus ceros son $4 + i$, $4 - i$, y $2 + i$.

12. $f(z)$ es un polinomio complejo de grado 3 con coeficientes reales; sus ceros son 2, i, y $3 + i$.

13. $f(z)$ es un polinomio complejo de grado 4 con coeficientes reales; tres de sus ceros son 2, $1 + 2i$, y $1 - 2i$. Explique por qué el cero que falta debe ser un número real

14. $f(z)$ es un polinomio complejo de grado 4 con coeficientes reales; dos de sus ceros son -3 y $4 - i$. Explique por qué uno de los restantes ceros debe ser un número real. Anote uno de los ceros que faltan.

15. Encuentre todos los ceros de $f(z) = z^3 - 1$.

16. Encuentre todos los ceros de $f(z) = z^4 - 1$.

En los problemas del 17 al 22 evalúe cada función polinomial compleja f en $z = 1 + i$.

17. $f(z) = iz - 3$

18. $f(z) = 3z + i$

19. $f(z) = 3z^2 - z$

20. $f(z) = (4 + i)z^2 + 5 - 2i$

21. $f(z) = z^3 + iz - 1 + i$

22. $f(z) = iz^3 - 2z^2 + 1$

En los problemas del 23 al 28 utilice la división sintética para encontrar el valor de $f(r)$.

23. $f(z) = 5z^5 - iz^4 + 2$; $r = 1 + i$

24. $f(z) = iz^4 + (2 + i)z^2 - z$; $r = 1 - i$

25. $f(z) = (1 + i)z^4 - z^3 + iz$; $r = 2 - i$

26. $f(z) = 2iz^3 + 8z^2 - 4iz + 1$; $r = 2 + i$

27. $f(z) = iz^5 + iz^3 + iz$; $r = 1 + 2i$

28. $f(z) = z^4 + z^2 + 1$; $r = 1 - 2i$

En los problemas del 29 al 34 construya un polinomio $f(z)$ con coeficientes complejos que tenga el grado y ceros dados.

29. Grado 3; ceros: $3 + 2i$, multiplicidad 1; 4, multiplicidad 2

30. Grado 3; ceros: i, multiplicidad 2; $1 + 2i$, multiplicidad 1

31. Grado 3; ceros: 2, multiplicidad 1; $-i$, multiplicidad 1; $1 + i$, multiplicidad 1

32. Grado 3; ceros: i, multiplicidad 1; $4 - i$, multiplicidad 1; $2 + i$, multiplicidad 1

33. Grado 4; ceros: 3, multiplicidad 2; $-i$, multiplicidad 2

34. Grado 4; ceros: 1, multiplicidad 3; $1 + i$, multiplicidad 1

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Función cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$	Vértice: $(-b/2a, f(-b/2a))$ Eje: La recta $x = -b/2a$ La parábola abre hacia arriba si $a > 0$. La parábola abre hacia abajo si $a < 0$.
Función potencia	$f(x) = x^n$, $n \geq 2$ es par	Función par: Pasa por $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ Abre hacia arriba
	$f(x) = x^n$, $n \geq 3$ es impar	Función impar: Pasa por $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ Creciente
Función polinomial	$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$	Cuando mucho $n - 1$ puntos de retorno; para valores grandes de n se comporta como $y = a_nx^n$

Función racional	$R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, p, q son funciones polinominales en términos más simples. *Véanse* los pasos del 1 al 6 en la página 215
Ceros de un polinomio f	Números para los cuales $f(x) = 0$; estas son las intersecciones-x de la gráfica de f.
Teorema del residuo	Si un polinomio $f(x)$ es dividido entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.
Teorema del factor	$x - c$ es un factor del polinomio $f(x)$ si, y sólo si $f(c) = 0$.
Regla de los signos de Descartes	Sea f una función polinomial. El número de ceros positivos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(x)$, o es igual a ese número menos algún entero par. El número de ceros negativos de f es igual al número de variaciones en el signo de los coeficientes de $f(-x)$, o es igual a ese número menos algún entero par.
Teorema de los ceros racionales	Sea f una función polinomial de grado 1 o mayor en la forma $$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0,\ a_0 \neq 0$$ donde cada coeficiente es un entero. Si p/q, no tienen factores comunes, excepto 1 y -1, y p/q es un cero de f, entonces p debe ser un factor de a_0 y q un factor de a_n.
Teorema del valor intermedio	Si $a < b$ y si $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces hay al menos una raíz de f entre a y b.
Teorema fundamental del álgebra	Toda función polinomial compleja $f(z)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos un cero complejo.
Teorema de los pares conjugados	Sea $f(z)$ un polinomio complejo cuyos coeficientes son números reales. Si $r = a + bi$ es un cero de f, entonces el complejo conjugado $\bar{r} = a - bi$ también es un cero de f.

Cómo hacer para

Hacer la gráfica de funciones cuadráticas.

Hacer la gráfica de funciones polinomiales.

Hacer la gráfica de funciones racionales (*véanse* los pasos del 1 al 6, página 215).

Utilizar la división sintética al dividir un polinomio entre $x - c$.

Escribir un polinomio en forma anidada.

Encontrar los ceros de un polinomio utilizando la regla de los signos de Descartes, el teorema de los ceros racionales y ecuaciones reducidas.

Resolver ecuaciones polinomiales utilizando la regla de los signos de Descartes, el teorema de los ceros racionales y ecuaciones reducidas.

Aproximar los ceros de un polinomio.

Complete en los espacios

1. La gráfica de una función cuadrática es llamada __________. Su punto más bajo o más alto es llamado __________.
2. En el proceso de división larga,
$$(\text{Divisor})(\text{Cociente}) + \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$$
3. Cuando una función polinomial f se divide entre $x - c$, el residuo es __________.
4. Una función polinomial f tiene el factor $x - c$ si, y sólo si, __________.
5. Un número r para el cual $f(r) = 0$ es llamado __________ de la función f.
6. La función polinomial $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 + x - 1$ tiene __________ o __________ ceros positivos; tiene __________ o __________ ceros negativos.
7. Los posibles ceros racionales de $f(x) = 2x^5 - x^3 + x^2 - x + 1$ son __________.
8. La recta __________ es una asíntota horizontal de: $R(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$
9. La recta __________ es una asíntota vertical de: $R(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$
10. Si $3 + 4i$ es un cero de un polinomio de grado 5 con coeficientes reales, entonces también lo es __________.

CIERTO O FALSO

C F **1.** Todo polinomio de grado 3 con coeficientes reales tiene exactamente tres ceros reales.

C F **2.** Si $2 - 3i$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces también lo es $-2 + 3i$.

C F **3.** La gráfica de $R(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ tiene exactamente una asíntota vertical.

C F **4.** La gráfica de $f(x) = x^2(x-3)(x+4)$ tiene exactamente tres intersecciones-x.

C F **5.** Si f es una función polinomial de grado 4 y $f(2) = 5$, entonces

$$\frac{f(x)}{x-2} = p(x) + \frac{5}{x-2}$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado 3.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 10, haga la gráfica de cada función cuadrática para determinar si su gráfica abre hacia arriba o hacia abajo y encuentre su vértice, su eje de simetría, la intersección-y y la intersección-x, si las hay.

1. $f(x) = (x-2)^2 + 2$
2. $f(x) = (x+1)^2 - 4$
3. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 16$
4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
5. $f(x) = -4x^2 + 4x$
6. $f(x) = 9x^2 - 6x + 3$
7. $f(x) = \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1$
8. $f(x) = -x^2 + x + \frac{1}{2}$
9. $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$
10. $f(x) = -2x^2 - x + 4$

En los problemas del 11 al 16 haga la gráfica de cada función utilizando las técnicas de desplazamiento, compresión, alargamiento y reflexión.

11. $f(x) = (x+2)^3$
12. $f(x) = -x^3 + 3$
13. $f(x) = -(x-1)^4$
14. $f(x) = (x-1)^4 - 2$
15. $f(x) = (x-1)^4 + 2$
16. $f(x) = (1-x)^3$

En los problemas del 17 al 22 determine si la función cuadrática dada tiene un valor máximo o un valor mínimo y luego encuentre el valor.

17. $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$
18. $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$
19. $f(x) = -x^2 + 8x - 4$
20. $f(x) = -x^2 - 10x - 3$
21. $f(x) = -3x^2 + 12x + 4$
22. $f(x) = -2x^2 + 4$

En los problemas del 23 al 30:
(a) Encuentre las intersecciones con los ejes de cada función polinomial f.
(b) Determine si la gráfica de f toca o cruza el eje x en cada intersección-x.
(c) Encuentre la función potencia a la que se parece la gráfica para valores grandes de x.
(d) Determine el número máximo de puntos de retorno en la gráfica de f.
(e) Utilice la intersección (o intersecciones)-x y números de prueba para encontrar los intervalos en los cuales la gráfica de f está por arriba y por debajo del eje x.
(f) Trace los puntos obtenidos en las partes (a) y (e), y utilice la información restante para conectarlos por medio de una curva suave.

23. $f(x) = x(x+2)(x-4)$
24. $f(x) = x(x-2)(x-4)$
25. $f(x) = (x-2)^2(x+4)$
26. $f(x) = (x-2)(x+4)^2$
27. $f(x) = x^3 - 4x^2$
28. $f(x) = x^3 + 4x$
29. $f(x) = (x-1)^2(x+3)(x+1)$
30. $f(x) = (x-4)(x+2)^2(x-2)$

En los problemas del 31 al 40 analice cada función racional siguiendo los seis pasos establecidos en la sección 3.3.

31. $R(x) = \dfrac{2x - 6}{x}$

32. $R(x) = \dfrac{4 - x}{x}$

33. $H(x) = \dfrac{x + 2}{x(x - 2)}$

34. $H(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

35. $R(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - x - 6}$

36. $R(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2}$

37. $F(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$

38. $F(x) = \dfrac{3x^3}{(x - 1)^2}$

39. $R(x) = \dfrac{2x^4}{(x - 1)^2}$

40. $R(x) = \dfrac{x^4}{x^2 - 9}$

En los problemas del 41 al 44 utilice la división sintética para encontrar el cociente $q(x)$ y el residuo R cuando $f(x)$ es dividida entre $g(x)$.

41. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + x + 4$; $g(x) = x - 1$

42. $f(x) = 2x^3 + 8x^2 - 5x + 5$; $g(x) = x - 2$

43. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$; $g(x) = x + 2$

44. $f(x) = x^4 - x^2 + 3x$; $g(x) = x + 1$

45. Encuentre el valor de $f(x) = 12x^6 - 8x^4 + 1$ en $x = 4$.

46. Encuentre el valor de $f(x) = -16x^3 + 18x^2 - x + 2$ en $x = -2$.

En los problemas 47 y 48 utilice la regla de los signos de Descartes para demostrar cuántos ceros positivos y negativos puede tener cada función polinomial. No intente encontrar los ceros.

47. $f(x) = 12x^8 - x^7 + 8x^4 - 2x^3 + x + 3$

48. $f(x) = -6x^5 + x^4 + 5x^3 + x + 1$

49. Enliste todos los posibles ceros racionales de: $f(x) = 12x^8 - x^7 + 6x^4 - x^3 + x - 3$

50. Enliste todos los posibles ceros racionales de: $f(x) = -6x^5 + x^4 + 2x^3 - x + 1$

En los problemas del 51 al 56, utilice la regla de los signos de Descartes y el teorema de los ceros racionales para encontrar todos los ceros reales de cada función polinomial. Utilice los ceros para factorizar f en los números reales.

51. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

52. $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

53. $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

54. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$

55. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 20$

56. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18$

En los problemas del 57 al 60 resuelva cada ecuación en el sistema de los números reales.

57. $2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x - 6 = 0$

58. $3x^4 + 3x^3 - 17x^2 + x - 6 = 0$

59. $2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3 = 0$

60. $2x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 28x - 12 = 0$

En los problemas del 61 al 70 encuentre las intersecciones de cada polinomio $f(x)$. Encuentre también los números x para los cuales la gráfica de f está por arriba del eje x y aquellos para los que la gráfica está por abajo del eje x. Obtenga algunos otros puntos de la gráfica y conéctelos por medio de una curva suave.

61. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

62. $f(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

63. $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 7x + 2$

64. $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 7x - 2$

65. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 20x + 20$

66. $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 12x + 18$

67. $f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x - 6$

68. $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 17x^2 + x - 6$

69. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + x^2 - 7x - 3$

70. $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 5x^2 - 28x - 12$

En los problemas del 71 al 74 utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que cada polinomio tiene un cero en el intervalo dado.

71. $f(x) = 3x^3 - x - 1$; $[0, 1]$

72. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3$; $[1, 2]$

73. $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 2x - 1$; $[0, 1]$

74. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x - 2$; $[1, 2]$

En los problemas del 75 al 78 encuentre cotas enteras superior e inferior para los ceros de cada función polinomial.

75. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 2$

76. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 10x - 5$

77. $f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 10x + 35$

78. $f(x) = 3x^3 - 7x^2 - 6x + 14$

En los problemas del 79 al 82 cada polinomio tiene exactamente un cero positivo. Aproxime el cero redondeado a dos decimales.

79. $f(x) = x^3 - x - 2$

80. $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3$

81. $f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 2x - 1$

82. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 8x - 2$

En los problemas del 83 al 86 la información dada es acerca de un polinomio complejo $f(z)$ cuyos coeficientes son números reales. Encuentre los ceros restantes de f.

83. Grado 3; ceros: $4 + i$, 6

84. Grado 3; ceros: $3 + 4i$, 5

85. Grado 4; ceros: i, $1 + i$

86. Grado 4; ceros: 1, 2, $1 + i$

En los problemas del 87 al 90 construya un polinomio $f(z)$ con coeficientes complejos que tengan el grado y ceros dados.

87. Grado 4; ceros: 1, multiplicidad 2; i, multiplicidad 1; 3, multiplicidad 1

88. Grado 4; ceros: i, multiplicidad 2; 2, multiplicidad 2

89. Grado 3; ceros: $1 + i$, 2, 3, cada uno con multiplicidad 1

90. Grado 3; ceros: 1, $1 + i$, $1 + 2i$, cada uno con multiplicidad 1

91. Encuentre el cociente y el residuo si $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ es dividido entre $(x - 2)(x - 1)$.

92. Encuentre el cociente y el residuo si $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$ es dividido entre $(x - 2)(x + 3)$.

En los problemas del 93 al 96 resuelva cada ecuación en el sistema de los números complejos.

93. $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$

94. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

95. $3x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 1 = 0$

96. $x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 8x - 8 = 0$

En los problemas del 97 al 100 escriba cada polinomio en forma anidada. Luego utilice una calculadora para evaluar cada polinomio en $x = 1.5$. Evite el uso de teclas de memoria.

97. $f(x) = 8x^3 - 3x^2 + x - 6$

98. $f(x) = 5x^3 + 4x^2 - 6x + 8$

99. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$

100. $f(x) = x^4 - x^2 + 3x$

101. Encuentre las cotas enteras superior e inferior para los ceros de

$$f(x) = 4x^5 - 3x^4 + 8x^2 + x + 2$$

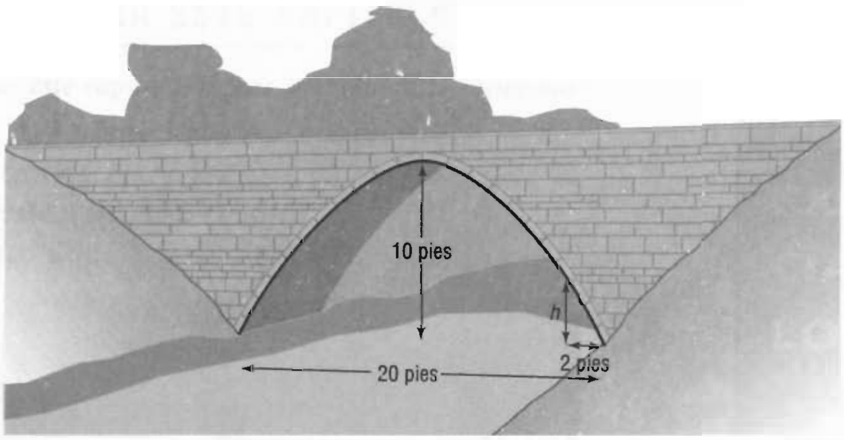
102. Encuentre las cotas enteras superior e inferior para los ceros de

$$f(x) = 8x^6 - x^4 + 6x^2 + 24x + 15$$

103. Encuentre el punto sobre la recta $y = x$ que esté más cercano al punto $(3, 1)$. [*Sugerencia:* Encuentre el valor mínimo de la función $f(x) = d^2$, donde d es la distancia desde $(3, 1)$ a un punto de la recta.]

104. Encuentre el punto en la recta $y = x + 1$ que esté más cercano al punto $(4, 1)$.

105. Un puente horizontal tiene la forma de un arco parabólico. Dada la información vista en la figura, ¿cuál es la altura h del arco a 2 pies desde la orilla?



106. Encuentre la longitud y la anchura de un rectángulo cuyo perímetro es de 20 pies y el área mide 16 pies cuadrados

107. Diseñe una función polinomial con las características siguientes: grado 6; cuatro ceros reales, uno de multiplicidad 3; intersección-y igual a 3; para valores grandes de x se comporta como $y = -5x^6$. ¿Este polinomio es único? Compare su polinomio con el de otros compañeros. ¿Qué términos serán iguales para todos? Agregue más características tales como simetría o diga cuáles son los ceros reales. ¿Esto de qué manera modifica al polinomio?

108. Diseñe una función racional con las características siguientes: tres ceros reales, uno de multiplicidad 2; intersección con el eje y en 1; asíntotas verticales $x = -2$ y $x = 3$; asíntota oblicua $y = 2x + 1$. ¿Esta función racional es única? Compare la suya con la de sus compañeros. ¿Qué términos serán iguales para todos? Agregue más características tales como simetría o diga cuáles son los ceros reales. ¿Esto de qué manera modifica a la función racional?

109. La ilustración muestra la gráfica de una función polinomial.

(a) ¿El grado del polinomio es par o impar?

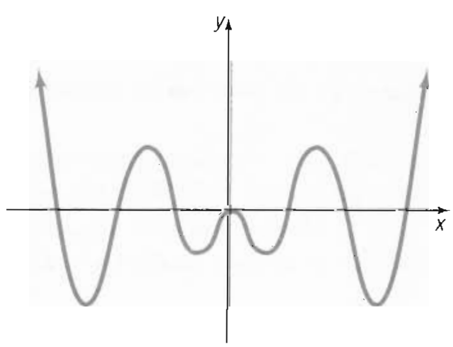
(b) ¿El coeficiente principal es positivo o negativo?

(c) ¿La función es par, impar o de ninguno de estos tipos?

(d) ¿Por qué x^2 es necesariamente un factor del polinomio?

(e) ¿Cuál es el grado mínimo del polinomio?

(f) Formule cinco polinomios diferentes cuyas gráficas puedan verse como la que se muestra. Compare su gráfica con la de otros compañeros. ¿Qué semejanzas nota? ¿Qué diferencias?



PREI

Antes

Expo

Func

Func

Intere

Pano

Es po
persor
(dado
ser m

donde
consta
(a) S
(b)
(c)
(d)

Capítulo 4

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de comenzar este capítulo, repase los siguientes conceptos:

Exponentes (p. 6-9 y apéndice A, sección A.2).
Funciones (secciones 2.1 y 2.2).
Funciones inversas (pp. 150–156).
Interés simple (p. 25).

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Panorama Alcohol y manejo

Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como un porcentaje) de tener un accidente automovilístico puede ser modelado mediante la ecuación

$$R = 6e^{kx}$$

donde x es la concentración variable de alcohol en la sangre y k una constante.

(a) *Suponga que una concentración de 0.04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% (R = 10) de sufrir un accidente. Determine la constante k de la ecuación.*
(b) *Utilice el valor de k e indique cuál es el riesgo si la concentración asciende a 0.17.*
(c) *Con el mismo valor de k indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100%.*
(d) *Si la ley establece que las personas con un riesgo del 20% o mayor de sufrir un accidente no deben manejar, ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado? [Véase el ejemplo 9 en la sección 4.2.]*

Hasta ahora, nuestro estudio de las funciones se ha concentrado en las funciones polinomiales y racionales, las cuales pertenecen a la clase de las **funciones algebraicas**, es decir, funciones que pueden expresarse en términos de sumas, restas, productos, cocientes, potencias o raíces de polinomios. Las funciones que no son algebraicas se llaman **trascendentes** (trascienden, esto es, están más allá, de las funciones algebraicas).

En este capítulo estudiaremos dos funciones trascendentes: las *funciones exponenciales y logarítmicas*. Estas funciones aparecen con frecuencia en una amplia variedad de aplicaciones.

4.1 Funciones exponenciales

En el capítulo 1 vimos una definición de lo que significa elevar un número real a a una potencia racional. Con base en ese análisis, dimos significado a expresiones de la forma

$$a^r$$

donde la base a es un número real positivo y el exponente r un número racional.

Pero, ¿cuál es el significado de a^x, donde la base a es un número real positivo y el exponente x un número irracional? Aunque una definición rigurosa utiliza métodos analizados en cálculo, el concepto básico es fácil de seguir: elija un número racional r formado al truncar (eliminar) todos los dígitos del número irracional x, excepto un número finito de ellos. Entonces es razonable esperar que

$$a^x \approx a^r$$

Por ejemplo, consideremos el número irracional $\pi = 3.14159\ldots$. Entonces, una aproximación a a^π es

$$a^\pi \approx a^{3.14}$$

donde hemos eliminado los dígitos posteriores a la posición de los centésimos del valor de π. Una aproximación aún mejor sería

$$a^\pi \approx a^{3.14159}$$

donde hemos eliminado los dígitos posteriores a la posición de los cienmilésimos. De esta forma es como podemos obtener aproximaciones a a^π con cualquier grado deseado de precisión.

La mayor parte de las calculadoras científicas tienen una tecla $\boxed{x^y}$ (o $\boxed{y^x}$) para trabajar con exponentes. Para utilizar esta tecla primero escriba la base x, luego oprima la tecla $\boxed{x^y}$, escriba y y oprima la tecla $\boxed{=}$.

EJEMPLO 1 *Uso de una calculadora para evaluar potencias de 2*

Utilice una calculadora con tecla $\boxed{x^y}$ evalúe:

(a) $2^{1.4}$ (b) $2^{1.41}$ (c) $2^{1.414}$ (d) $2^{1.4142}$ (e) $2^{\sqrt{2}}$

Solución (a) $2^{1.4} \approx 2.6390158$ (b) $2^{1.41} \approx 2.6573716$
(c) $2^{1.414} \approx 2.6647497$ (d) $2^{1.4142} \approx 2.6651191$
(e) $2^{\sqrt{2}} \approx 2.6651441$ ∎

■ Ahora resuelva el problema 1.

Es posible mostrar que las leyes usuales de los exponentes racionales son válidas para exponentes reales.

Teorema
leyes de los exponentes

Si s, t, a y b son números reales con $a > 0$ y $b > 0$, entonces

$$a^s \cdot a^t = a^{s+t} \qquad (a^s)^t = a^{st} \qquad (ab)^s = a^s \cdot b^s$$
$$1^s = 1 \qquad a^{-s} = \frac{1}{a^s} = \left(\frac{1}{a}\right)^s \qquad a^0 = 1 \tag{1}$$

■

Ahora estamos preparados para la siguiente definición.

Función exponencial

Una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es un número real positivo y distinto de 1. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales.

Excluimos la base $a = 1$, ya que esta función es tan sólo la función constante $f(x) = 1^x = 1$. También debemos excluir las bases negativas, de lo contrario tendríamos que excluir muchos valores de x del dominio, como $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$, etc. [Recuerde que $(-2)^{1/2}$, $(-3)^{3/4}$, y así sucesivamente, no están definidas en el sistema de los números reales.]

Gráficas de funciones exponenciales

En primer lugar, hagamos la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$.

EJEMPLO 2

Graficación de una función exponencial

Hacer la gráfica de la función exponencial $f(x) = 2^x$

Solución

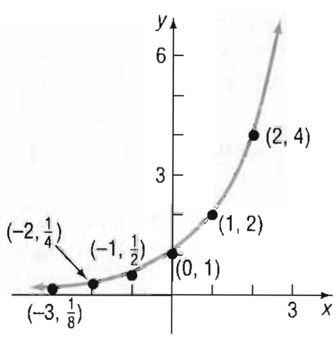
El dominio de $f(x) = 2^x$ consta de todos los números reales. Primero localizamos algunos puntos sobre la gráfica de $f(x) = 2^x$, según muestra la tabla 1.

Como $2^x > 0$ para toda x, el rango de f es $(0, \infty)$. De lo cual podemos concluir que la gráfica no tiene intersecciones con el eje x y que, de hecho, estará arriba del eje x. Como muestra la tabla 1, la intersección con el eje y es 1. La tabla también indica que cuando $x \to -\infty$ el valor de $f(x) = 2^x$ se acerca cada vez más a 0. Así, el eje x es una asíntota horizontal de la gráfica, cuando $x \to -\infty$. Observe de nuevo la tabla 1. Cuando $x \to \infty$, $f(x) = 2^x$ aumenta rápidamente, lo cual hace que la gráfica de $f(x) = 2^x$ se eleve también muy rápido. Así, vemos que f es una función creciente y, por lo tanto, uno a uno. Con toda esta información, localizamos algunos de los puntos de la tabla 1 y los conectamos mediante una curva suave, continua, según muestra la figura 1. ■

TABLA 1

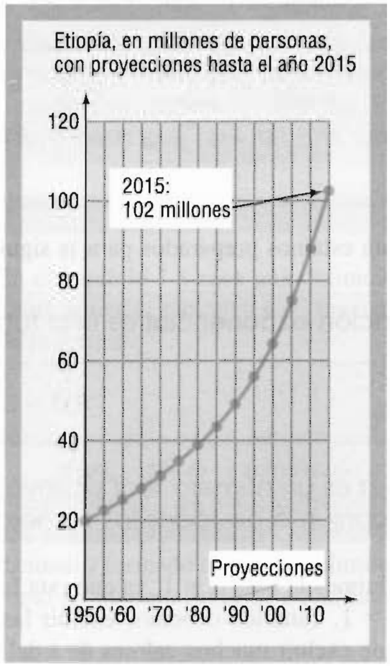
x	$f(x) = 2^x$
-10	$2^{-10} \approx 0.00098$
-3	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
10	$2^{10} = 1024$

FIGURA 1
$y = 2^x$



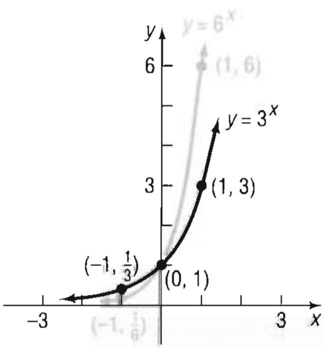
Como veremos, las gráficas similares a la de la figura 1 aparecen con mucha frecuencia en diversas situaciones. Por ejemplo, observe la gráfica de la figura 2, la cual ilustra la población exis-

FIGURA 2
La población de Etiopía crece con una de las tasas más altas del mundo, lo cual agrava los continuos problemas de suministro de alimentos para sus millones de habitantes. La nación, que comparativamente sólo mide tres cuartas partes del territorio de Alaska, tiene más de 2 millones de nacimientos por año.



Fuentes: Agencias de noticias, Banco Mundial, U. S. Agency for International Development, FAO-Naciones Unidas, *Population Reference Bureau*, UNICEF, Departamento de Agricultura de Estados Unidos, *Human Nutrition Information Service*.

FIGURA 3



tente en Etiopía. Podría concluirse de la gráfica que la población en Etiopía se "comporta de manera exponencial"; es decir, la gráfica exhibe un "crecimiento rápido, o exponencial". En este capítulo tenemos más que decir acerca de situaciones que conducen a un crecimiento exponencial. Por ahora, seguiremos en la búsqueda de propiedades de las funciones exponenciales.

La gráfica de $f(x) = 2^x$ en la figura 1 es típica de todas las funciones exponenciales con una base mayor que 1. Tales funciones son crecientes y, por ello, uno a uno. Sus gráficas están sobre el eje x, pasan por el punto (0,1) y después suben con rapidez cuando $x \to \infty$. Cuando $x \to -\infty$, el eje x es una asíntota horizontal. No existen asíntotas verticales. Por último, las gráficas son suaves y continuas, sin esquinas ni saltos. La figura 3 muestra las gráficas de otras dos funciones exponenciales con base mayor que 1. Observe que si la base es mayor, la gráfica crece más rápido cuando $x > 0$, y está más cerca del eje x cuando $x < 0$.

A continuación tenemos un resumen de la información acerca de $f(x) = a^x$, $a > 1$:

$f(x) = a^x \qquad a > 1$

Dominio: $(-\infty, \infty)$ Rango: $(0, \infty)$

Intersecciones-x: ninguna Intersecciones-y: 1

Asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to -\infty$

f es una función creciente

f es uno a uno y pasa por (0,1) y $(1, a)$

Verificación: haga la gráfica de $y = 2^x$ y compare el resultado con la figura 1. Luego borre la pantalla, haga la gráfica de $y = 3^x$ y $y = 6^x$ y compare con la figura 3. De nuevo, borre la pantalla y haga la gráfica de $y = 10^x$ y $y = 100^x$. ¿Cuál ventana parece servir mejor?

Ahora consideremos $f(x) = a^x$ cuando $0 < a < 1$.

EJEMPLO 3 *Graficación de una función exponencial*

Hacer la gráfica de la función exponencial: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Solución

El dominio de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ consta de todos los números reales. Como antes, localizamos algunos puntos sobre la gráfica, (tabla 2). Como $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0$ para toda x, el rango de f es $(0, \infty)$. Así, la gráfica está sobre el eje x y no tiene intersecciones con él. La intersección con el eje y es 1. Cuando $x \to -\infty$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ crece muy rápido. Cuando $x \to \infty$, el valor de $f(x)$ tiende a cero. De modo que el eje x ($y = 0$) es una asíntota horizontal cuando $x \to \infty$ Se ve entonces que f es una función decreciente y, por tanto, uno a uno. La figura 4 muestra la gráfica.

TABLA 2

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = 1024$
−3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
−2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
−1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1}{4}$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{1}{8}$
10	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0.00098$

FIGURA 4

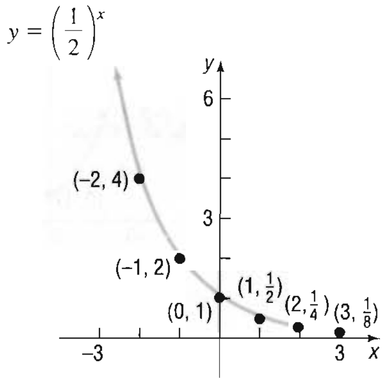
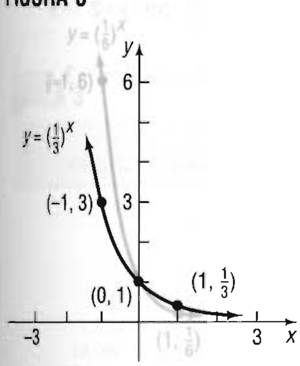


FIGURA 5



Observe que podríamos obtener la gráfica de $f(x) = \frac{1}{2^x}$ a partir de la de $y = 2^x$. Si $f(x) = 2^x$, entonces $f(-x) = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Así, la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ es una reflexión con respecto al eje y de la gráfica de $y = 2^x$. Compare las figuras 1 y 4.

La gráfica de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en la figura 4 es típica de todas las funciones exponenciales con base entre 0 y 1. Tales funciones son decrecientes, uno a uno. Sus gráficas están sobre el eje x, pasan por el punto (0,1) y crecen con rapidez cuando $x \to -\infty$. Cuando $x \to \infty$, el eje x es una asíntota horizontal. No existen asíntotas verticales. Por último, las gráficas son suaves y continuas, sin esquinas ni saltos. La figura 5 muestra las gráficas de otras dos funciones exponenciales cuyas bases están entre 0 y 1. Observe que la elección de una base más cercana a 0 produce una gráfica más inclinada cuando $x < 0$, y cercana al eje x cuando $x > 0$.

A continuación tenemos un resumen de la información acerca de $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$:

$f(x) = a^x \qquad 0 < a < 1$
Dominio: $(-\infty, \infty)$ Rango: $(0, \infty)$
Intersecciones-x: ninguna Intersecciones-y: 1
Asíntota horizontal: eje-x, cuando $x \to \infty$
f es una función decreciente
f es uno a uno y pasa por $(0, 1)$ y $(1, a)$

Verificación: haga la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y compare el resultado con la figura 4. Luego borre la pantalla, haga la gráfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ y compare con la figura 5. Borre de nuevo la pantalla y haga la gráfica de $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{100}\right)^x$. ¿Cuál ventana parece servir mejor?

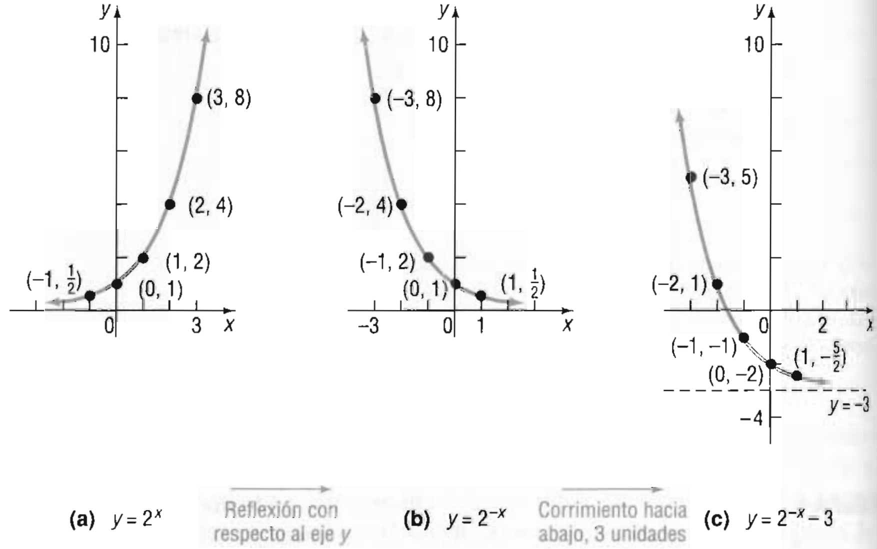
Las técnicas de corrimiento, compresión, alargamiento y reflexión sirven también para hacer la gráfica de muchas funciones que, en esencia, son funciones exponenciales.

EJEMPLO 4 *Graficación de funciones que son exponenciales en esencia mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Hacer la gráfica de: $f(x) = 2^{-x} - 3$

Solución La figura 6 muestra los diversos pasos.

FIGURA 6



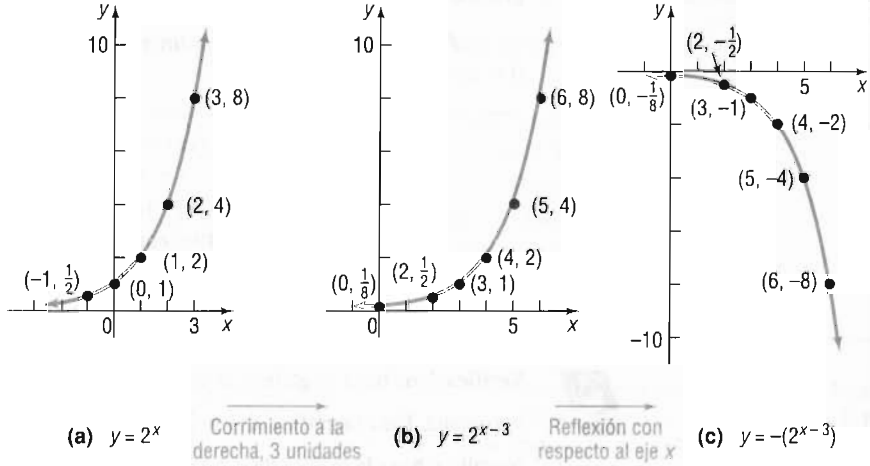
Observe que la asíntota horizontal de $f(x) = 2^{-x} - 3$ es la recta $y = -3$, como muestra la figura 6(c). ∎

EJEMPLO 5 *Graficación de funciones que son exponenciales en esencia mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Hacer la gráfica de: $f(x) = -(2^{x-3})$

Solución La figura 7 muestra los diversos pasos.

FIGURA 7



Verificación: haga la gráfica de $y = -(2^{x-3})$ y compare el resultado con la figura 7. Utilice la característica TRACE para verificar los puntos de la gráfica que se muestran en la figura 7. ■

■ Ahora resuelva los problemas 11 y 13.

La base e

Como veremos en breve, muchos problemas que surgen en la naturaleza necesitan de una función exponencial cuya base es un número irracional simbolizado por la letra e.

Ahora veremos una forma de llegar a este importante número e.

El número e

El **número e** se define como el número al que tiende la expresión

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2}$$

cuando $n \to \infty$. En cálculo, esto se expresa mediante la notación de límite como

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

TABLA 3

n	$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	2
2	0.5	1.5	2.25
5	0.2	1.2	2.48832
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1,000	0.001	1.001	2.716923932
10,000	0.0001	1.0001	2.718145926
100,000	0.00001	1.00001	2.718268237
1,000,000	0.000001	1.000001	2.718280469
1,000,000,000	10^{-9}	$1 + 10^{-9}$	2.718281827

La tabla 3 muestra lo que ocurre con la expresión (2) cuando n adquiere valores cada vez mayores. El último número de la última columna de la tabla tiene sus primeras nueve cifras decimales correctas y es igual al dato correspondiente a e que aparece en su calculadora (si tiene las primeras nueve cifras decimales correctas).

La función exponencial $f(x) = e^x$, cuya base es el número e, aparece con tal frecuencia en las aplicaciones que se conoce por lo general como *la* función exponencial. De hecho, muchas calculadoras tienen la tecla $\boxed{e^x}$ o $\boxed{exp(x),}$ la cual se utiliza al evaluar la función exponencial para un valor dado de x.* Ahora utilice su calculadora para determinar e^x

*Si su calculadora no tiene esta tecla pero tiene $\boxed{\text{SHIFT}}$ y una tecla $\boxed{\text{ln}}$ puede desplegar el número e como sigue:

Oprima: $\boxed{1}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{ln}}$

Pantalla: $\boxed{1}$ $\boxed{2.7182818}$

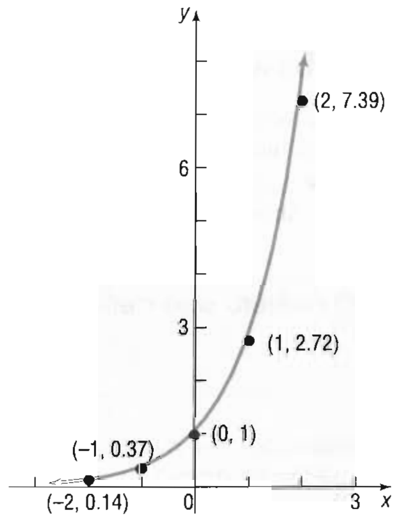
La razón de esto aparece en la sección 2.4.

para $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, y $x = 2$, de la misma forma que hicimos para crear la tabla 4 (después de redondear). La gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ aparece en la figura 8. Como $2 < e < 3$, la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Revise las figuras 1 y 3.)

TABLA 4

x	e^x
-2	0.14
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39

FIGURA 8
$y = e^x$



Verificación: haga la gráfica de $y = e^x$ y compare el resultado con la figura 8. Utilice TRACE para verificar los puntos sobre la gráfica que aparecen en la figura 8. Ahora, haga la gráfica de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. Observe que la gráfica de $y = e^x$ está entre estas dos gráficas. ■

■ Ahora resuelva el problema 21.

Existen muchas aplicaciones de la función exponencial. Veamos una.

EJEMPLO 6 *Respuesta a la publicidad*

Suponga que el porcentaje R de personas que responden a un anuncio periodístico relativo a un nuevo producto y que adquieren el artículo después de t días, se determina mediante la fórmula

$$R = 50 - 100e^{-0.3t}$$

(a) ¿Qué porcentaje ha respondido y adquirido el artículo después de 5 días?

(b) ¿Qué porcentaje ha respondido y adquirido el artículo después de 10 días?

(c) ¿Cuál es el máximo porcentaje de personas que se espera respondan y adquieran el artículo?

(d) Hacer la gráfica de $R = 50 - 100e^{-0.3t}$, $t > 0$. Utilizar TRACE y comparar los valores de R para $t = 5$ y $t = 10$ con los obtenidos en el ejemplo 6. ¿Cuántos días son necesarios para que R sea mayor al 40 por ciento?

Solución (a) Después de 5 días, tenemos que $t = 5$. El porcentaje correspondiente R de personas que responden y adquieren el artículo es

$$R = 50 - 100e^{(-0.3)(5)} = 50 - 100e^{-1.5}$$

Utilizamos una calculadora para evaluar esta expresión:

Oprima:	1.5	±	SHIFT	ln (e^x)	×	100	=
Pantalla:	1.5	−1.5		0.2231301		100	22.31301

Oprima:	±	+	50	=
Pantalla:	−22.31301		50	27.68698

Así, cerca de un 28% habrán respondido después de 5 días.

(b) Después de 10 días, tenemos que $t = 10$. El porcentaje correspondiente R de personas que responden y compran es

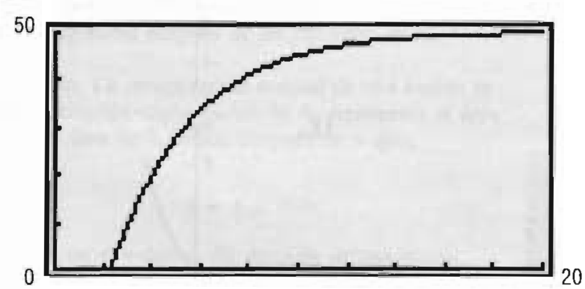
$$R = 50 - 100e^{(-0.3)(10)} = 50 - 100e^{-3} \approx 45.021$$

Cerca del 45% habrán respondido y comprado después de 10 días.

(c) Se espera que más personas respondan y compren con el paso del tiempo. El máximo porcentaje esperado se determina entonces para el valor de R cuando $t \to \infty$. Como $e^{-0.3t} = 1/e^{0.3t}$, esto implica que $e^{-0.3t} \to 0$ cuando $t \to \infty$. Así, el máximo porcentaje esperado es un 50 por ciento.

(d) *Véase* la figura 9.

FIGURA 9



Se necesitan 8 días para exceder el 40 por ciento. ■

■ Ahora resuelva el problema 33.

Resumen

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

$f(x) = a^x$, $a > 1$	Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; intersecciones-x: ninguna; intersección-y: 1; asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to -\infty$; creciente; uno a uno. *Véase* la figura 3 para observar una gráfica típica.
$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$	Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; intersecciones-x: ninguna; intersección-y: 1; asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to \infty$; decreciente; uno a uno. *Véase* la figura 5 para observar una gráfica típica.

4.1

Ejercicio 4.1

En los problemas del 1 al 10, aproxime cada número mediante una calculadora. Exprese su respuesta redondeada a tres cifras decimales.

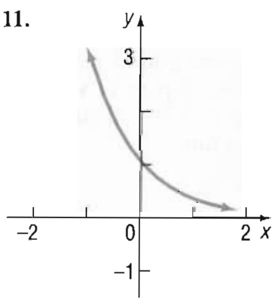
1.	(a) $3^{2.2}$	(b) $3^{2.23}$	(c) $3^{2.236}$	(d) $3^{\sqrt{5}}$
2.	(a) $5^{1.7}$	(b) $5^{1.73}$	(c) $5^{1.732}$	(d) $5^{\sqrt{3}}$
3.	(a) $2^{3.14}$	(b) $2^{3.141}$	(c) $2^{3.1415}$	(d) 2^{π}
4.	(a) $2^{2.7}$	(b) $2^{2.71}$	(c) $2^{2.718}$	(d) 2^{e}
5.	(a) $3.1^{2.7}$	(b) $3.14^{2.71}$	(c) $3.141^{2.718}$	(d) π^{e}
6.	(a) $2.7^{3.1}$	(b) $2.71^{3.14}$	(c) $2.718^{3.141}$	(d) e^{π}
7. $e^{1.2}$		**8.** $e^{-1.3}$	**9.** $e^{-0.85}$	**10.** $e^{2.1}$

En los problemas del 11 al 18 aparecen las gráficas de una función exponencial. Relacione cada gráfica con una de las siguientes funciones:

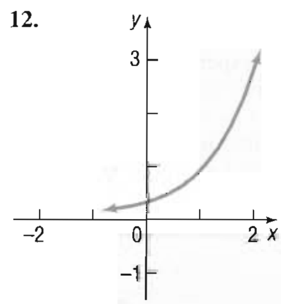
A. $y = 3^{x}$ *B.* $y = 3^{-x}$ *C.* $y = -3^{x}$ *D.* $y = -3^{-x}$

E. $y = 3^{x} - 1$ *F.* $y = 3^{x-1}$ *G.* $y = 3^{1-x}$ *H.* $y = 1 - 3^{x}$

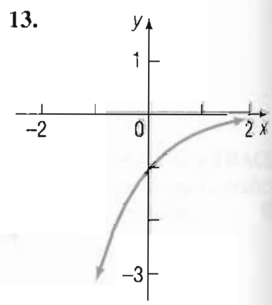
11.



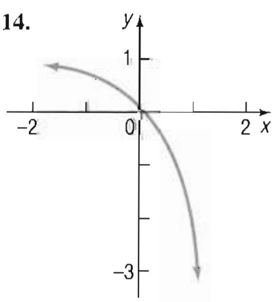
12.



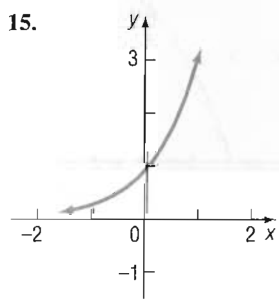
13.



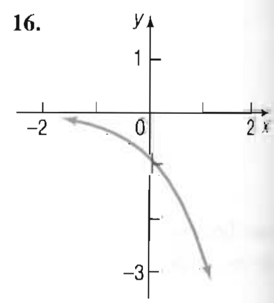
14.



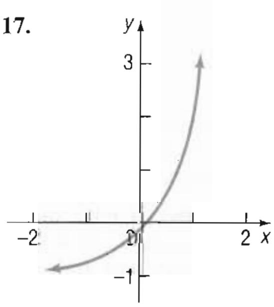
15.



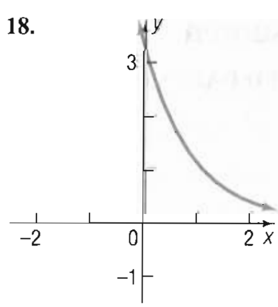
16.



17.



18.



En los problemas del 19 al 26, utilice la gráfica de $y = e^x$ (figura 8) junto con las técnicas de corrimiento, compresión, alargamiento y reflexión, para hacer la gráfica de cada función.

19. $y = e^{-x}$ **20.** $y = -e^x$ **21.** $y = e^{x+2}$ **22.** $y = e^x - 1$

23. $y = 5 - e^{-x}$ **24.** $y = 9 - 3e^{-x}$ **25.** $y = 2 - e^{-x/2}$ **26.** $y = 7 - 3e^{-2x}$

27. Si $4^x = 7$, ¿a qué es igual 4^{-2x}?

28. Si $2^x = 3$, ¿a qué es igual 4^{-x}?

29. Si $3^{-x} = 2$, ¿a qué es igual 3^{2x}?

30. Si $5^{-x} = 3$, ¿a qué es igual 5^{3x}?

31. *Óptica.* Si un cristal obstruye el 3% de la luz que pasa a través de él, el porcentaje p de luz que pasa por n cristales sucesivos está dado aproximadamente por la ecuación

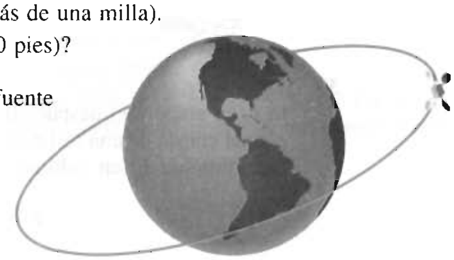
$$p = 100e^{-0.03n}$$

(a) ¿Qué porcentaje de la luz pasará a través de 10 cristales?
(b) ¿Y a través de 25?

32. *Presión atmosférica.* La presión atmosférica p sobre un globo o un avión disminuye al aumentar la altura. Esta presión, medida en milímetros de mercurio, se relaciona con el número de kilómetros h sobre el nivel del mar mediante la fórmula

$$p = 760e^{-0.145h}$$

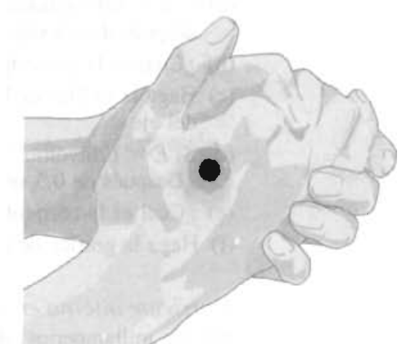
(a) Determine la presión atmosférica a una altura de 2 kilómetros (más de una milla).
(b) ¿Cuál es la presión a una altura de 10 kilómetros (más de 30,000 pies)?



33. *Satélites espaciales.* El número de vatios w proporcionados por la fuente de energía de un satélite espacial después de un periodo de d días está dado por la fórmula

$$w = 50e^{-0.004d}$$

(a) ¿Cuánta energía estará disponible después de 30 días?
(b) ¿Cuánta energía estará disponible después de un año (365 días)?



34. *Recuperación de una herida.* La recuperación normal de una herida se puede modelar mediante una función exponencial. Si A_0 representa el área original de la herida y A es el área de la herida después de n días, entonces la fórmula

$$A = A_0e^{-0.35n}$$

describa el área de una herida en el n-ésimo día después de una lesión, si no hay infecciones que retarden la recuperación. Suponga que una herida tiene un área inicial de 1 centímetro cuadrado.

(a) Si hay un proceso de recuperación, ¿cuánto medirá el área de la herida después de 3 días?
(b) ¿Cuánto medirá después de 10 días?

35. *Administración de medicamentos.* La fórmula

$$D = 5e^{-0.4h}$$

sirve para determinar el número de miligramos D de cierto medicamento en el flujo sanguíneo de un paciente, h horas después de su administración. ¿Cuántos miligramos estarán presentes después de 1 hora? ¿Y después de 6 horas?

36. *Difusión de números.* Un modelo para el número N de personas en una comunidad escolar que han escuchado cierto rumor es

$$N = P(1 - e^{-0.15d})$$

donde P es la población total de la comunidad y d el número de días transcurridos desde el inicio del rumor. En una comunidad de 1000 estudiantes, ¿cuántos de ellos habrán escuchado el rumor después de 3 días?

37. *Respuesta a la publicidad en televisión.* El porcentaje R de audiencia que responde a un comercial de televisión para un nuevo producto después de t días se determina mediante la fórmula

$$R = 70 - 100e^{-0.2t}$$

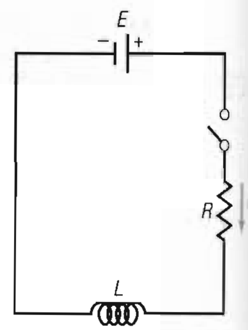
(a) ¿Qué porcentaje se espera que responda después de 10 días?
(b) ¿Qué porcentaje ha respondido a los 20 días?
(c) ¿Cuál es el máximo porcentaje de personas que se espera respondan?
(d) Haga la gráfica de $R = 70 - 100e^{-0.2t}$, $t > 0$. Utilice la característica TRACE y compare los valores de R para $t = 10$ y $t = 20$ con los obtenidos en las partes (a) y (b). ¿Cuántos días deben transcurrir para que R exceda el 40 por ciento?

38. *Ganancia.* La ganancia anual P de una compañía debida a las ventas de cierto artículo después de x años de ser lanzado al mercado es

$$P = \$100{,}000 - \$60{,}000\left(\tfrac{1}{2}\right)^x$$

(a) ¿Cuál es la ganancia después de 5 años?
(b) ¿Y después de 10 años?
(c) ¿Cuál es la máxima ganancia que la compañía espera obtener por su producto?
(d) Haga la gráfica de la función de ganancia. Utilice la característica TRACE y compare los valores de P para $x = 5$ y $x = 10$ con los obtenidos en las partes (a) y (b). ¿Cuántos años deben transcurrir antes de que se obtenga una ganancia de \$65,000.00?

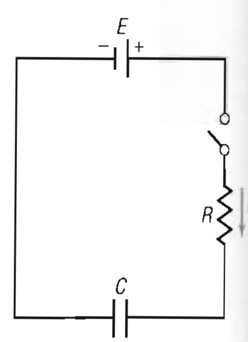
39. *Corriente alterna en un circuito RL.* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) después de un tiempo t (en segundos) en un circuito RL individual, el cual consta de una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrios) y una fuerza electromotriz E (en voltios), es



$$I = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]$$

(a) Si $E = 120$ voltios, $R = 10$ ohms, y $L = 5$ henrios, ¿cuánta corriente I_1 está disponible después de 0.3 segundos? ¿Después de 0.5 segundos? ¿Y luego de un segundo?
(b) ¿Cuál es la corriente máxima?
(c) Haga la gráfica de la función $I = I_1(t)$, midiendo I a lo largo del eje y y t a lo largo del eje x.
(d) Si $E = 120$ voltios, $R = 5$ ohms, y $L = 10$ henrios, ¿cuánta corriente I_2 está disponible después de 0.3 segundos? ¿Después de 0.5 segundos? ¿Y luego de un segundo?
(e) ¿Cuál es la corriente máxima?
(f) Haga la gráfica de la función $I = I_2(t)$ en los mismos ejes de coordenadas donde hizo la gráfica de $I_1(t)$.

40. *Corriente alterna en un circuito RC.* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en miliamperios) después de un tiempo t (en milisegundos) en un circuito RC individual, el cual consta de una resistencia R (en ohms), una capacitancia C (en microfaradios) y una fuerza electromotriz E (en voltios), es



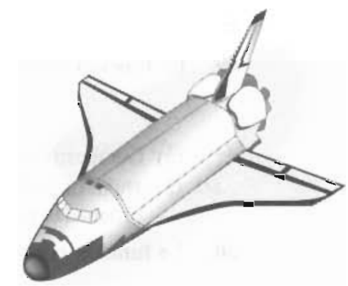
$$I = \frac{E}{R}e^{-t/(RC)}$$

(a) Si $E = 120$ voltios, $R = 2000$ ohms, y $C = 1.0$ microfaradios, ¿cuánta corriente I_1 está disponible inicialmente ($t = 0$) y después de 1000 milisegundos? ¿Cuánta después de 3000 milisegundos?
(b) ¿Cuál es la corriente máxima?
(c) Haga la gráfica de la función $I = I_1(t)$, midiendo I a lo largo del eje y y t a lo largo del eje x.
(d) Si $E = 120$ voltios, $R = 1000$ ohms, y $C = 2.0$ microfaradios, ¿cuánta corriente I_2 está disponible inicialmente, después de 1000 milisegundos y después de 3000 milisegundos?
(e) ¿Cuál es la corriente máxima?
(f) Haga la gráfica de la función $I = I_2(t)$ en los mismos ejes de coordenadas donde hizo la gráfica de $I_1(t)$.

41. *La tragedia del Challenger*[*]. Después de la tragedia del *Challenger* en 1986, se realizó un estudio de los 23 lanzamientos anteriores al vuelo fatal. Se desarrolló un modelo matemático para la relación entre la temperatura Fahrenheit x en torno de los anillos O y el número y de anillos O principales desgastados o con fugas. El modelo establecía que

$$y = 6\,[1 + e^{-(5.085-0.1156x)}]^{-1}$$

donde 6 indica los 6 anillos O principales de la nave espacial.



(a) ¿Cuál es el número pronosticado de anillos O principales desgastados o con fugas a una temperatura de 100°F?
(b) ¿Cuál es el número pronosticado de dichos anillos O a una temperatura de 60°F?
(c) ¿Y cuál para una temperatura de 30°F?
(d) Haga la gráfica de la ecuación y utilice TRACE. ¿A qué temperatura ocurre que el número pronosticado de anillos O principales desgastados o con fugas sea 1, 3 y 5?

42. *Estampillas de correo*[†]. El número acumulativo y de estampillas de correo diferentes (regulares y conmemorativas) emitidas por la oficina de correos de Estados Unidos se puede aproximar (modelar) mediante la función exponencial

$$y = 78e^{0.025x}$$

donde x es el número de años desde 1848.

(a) ¿Cuál es el número acumulativo pronosticado de estampillas emitidas hasta el año 1995?
(b) ¿Cuál es el número acumulativo pronosticado de estampillas emitidas hasta 1998?
(c) El número acumulativo de estampillas emitidas por Estados Unidos fue: 2 en 1848, 88 en 1868, 218 en 1888 y 341 en 1908. ¿Qué conclusión puede extraerse acerca del uso de la función dada como modelo durante las primeras décadas de emisión de las estampillas?

43. *Otra fórmula para e*. Utilice una calculadora para obtener el valor de

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ . \ . \ . \ + \frac{1}{n!}$$

para $n = 4, 6, 8$, y 10. Compare cada resultado con e.
[*Nota:* $1! = 1,\ 2! = 2 \cdot 1,\ 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1,\ n! = n(n-1) \cdot . . . . \cdot (3)(2)(1)$].

44. *Otra fórmula para e*. Utilice una calculadora para obtener los diversos valores de la expresión

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{\text{etc.}}}}}}$$

Compare los valores con e.

45. Si $f(x) = a^x$, demuestre que: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = a^x\left(\dfrac{a^h - 1}{h}\right)$

46. Si $f(x) = a^x$, demuestre que: $f(A + B) = f(A) \cdot f(B)$

[*]Linda Tappin, "Analyzing Data Relating to the *Challenger* Disaster", *Mathematics Teacher*, vol. 87, núm. 6, septiembre de 1994, págs. 423-426.
[†]David Kullman, "Patterns of Postage-stamp Production", *Mathematics Teacher*, vol. 85, núm. 3, marzo de 1992, págs. 188 y 189.

47. Si $f(x) = a^x$, demuestre que: $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

48. Si $f(x) = a^x$, demuestre que: $f(\alpha x) = [f(x)]^\alpha$

En los problemas 49 y 50 se definen otras dos funciones trascendentes.

49. La **función seno hiperbólico,** denotada senh x, se define como

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

(a) Demuestre que $f(x) = \operatorname{senh} x$ es una función impar.

(b) Haga la gráfica de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ en el mismo conjunto de ejes coordenados, y utilice el método de resta de ordenadas para obtener una gráfica de $f(x) = \operatorname{senh} x$.

50. La **función coseno hiperbólico,** denotada cosh x, se define como

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

(a) Demuestre que $f(x) = \cosh x$ es una función par.

(b) Haga la gráfica de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ en el mismo conjunto de ejes coordenados, y utilice el método de suma de ordenadas para obtener una gráfica de $f(x) = \cosh x$.

(c) Consulte el problema 49. Demuestre que para cada x,

$$(\cosh x)^2 - (\operatorname{senh} x)^2 = 1$$

51. *Problema histórico.* Pierre de Fermat (1601-1665) conjeturó que la función

$$f(x) = 2^{(2^x)} + 1$$

para $x = 1, 2, 3, \ldots$, siempre es un número primo. Sin embargo, Leonhard Euler (1707-1783) demostró que esta fórmula falla para $x = 5$. Utilice una calculadora para determinar los números primos producidos por f para $x = 1, 2, 3, 4$. Compruebe entonces que $f(5) = 641 \times 6{,}700{,}417$, el cual no es primo.

52. En un recipiente de 4 litros las bacterias duplican su cantidad cada minuto. Después de 60 minutos el recipiente está lleno. ¿Cuánto tiempo transcurrió para que el recipiente se llenase hasta la mitad?

53. Explique con sus propias palabras lo que es el número e y proporcione al menos dos aplicaciones donde se necesite utilizarlo.

54. ¿Cree usted que exista una función potencia que crezca más rápido que una función exponencial con base mayor que 1? Explique su respuesta.

4.2 Funciones logarítmicas

Recuerde que una función uno a uno $y = f(x)$ tiene una inversa definida (de manera implícita) por la ecuación $y = f(y)$. En particular, la función exponencial $y = f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, es uno a uno y, por lo tanto, tiene una inversa definida de manera implícita mediante la ecuación

$$x = a^y \qquad a > 0,\ a \neq 1$$

Esta inversa es tan importante que tiene su nombre propio: *función logarítmica.*

Funciones logarítmicas

La **función logarítmica base *a*,** donde $a > 0$ y $a \neq 1$, se denota $y = \log_a x$ (se lee "y es el logaritmo base a de x") y se define como

$$y = \log_a x \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = a^y$$

EJEMPLO 1 *Relación entre los logaritmos y los exponentes*

(a) Si $y = \log_3 x$, entonces $x = 3^y$. Así, cuando $x = 9$, $y = 2$, de ese modo $9 = 3^2$ es equivalente a $2 = \log_3 9$.

(b) Si $y = \log_5 x$, entonces $x = 5^y$. Así, cuando $x = \frac{1}{5} = 5^{-1}$, $y = -1$, de modo que $\frac{1}{5} = 5^{-1}$ es equivalente a $-1 = \log_5 (\frac{1}{5})$. ■

EJEMPLO 2 *Cambio de expresiones exponenciales a expresiones logarítmicas*

Cambiar cada expresión exponencial a una equivalente con logaritmos.

(a) $1.2^3 = m$ (b) $e^b = 9$ (c) $a^4 = 24$

Solución Utilizamos el hecho de que $y = \log_a x$ y $x = a^y$, $a > 0$, $a \neq 1$, son equivalentes.

(a) Si $1.2^3 = m$, entonces $3 = \log_{1.2} m$.

(b) Si $e^b = 9$, entonces $b = \log_e 9$.

(c) Si $a^4 = 24$, entonces $4 = \log_a 24$. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3 *Cambio de expresiones logarítmicas a expresiones exponenciales*

Cambiar cada expresión logarítmica a una equivalente con exponentes.

(a) $\log_a 4 = 5$ (b) $\log_e b = -3$ (c) $\log_3 5 = c$

Solución (a) Si $\log_a 4 = 5$, entonces $a^5 = 4$.

(b) Si $\log_e b = -3$, entonces $e^{-3} = b$.

(c) Si $\log_3 5 = c$, entonces $3^c = 5$. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

Para determinar con exactitud el valor de un logaritmo, escribimos el logaritmo en notación exponencial y utilizamos el siguiente hecho:

$$\text{Si } a^u = a^v, \quad \text{entonces} \quad u = v. \tag{1}$$

El resultado (1) es consecuencia de que las funciones exponenciales son uno a uno.

EJEMPLO 4 *Determinación del valor exacto de una función logarítmica*

Determine el valor exacto de:

(a) $\log_2 8$ (b) $\log_3 \frac{1}{3}$ (c) $\log_5 25$

Solución (a) Para $y = \log_2 8$, tenemos la ecuación exponencial equivalente $2^y = 8 = 2^3$, así, por (1), $y = 3$. Por lo tanto, $\log_2 8 = 3$.

(b) Para $y = \log_3 \frac{1}{3}$, tenemos $3^y = \frac{1}{3} = 3^{-1}$, así $y = -1$. Por lo tanto, $\log_3 \frac{1}{3} = -1$.

(c) Para $y = \log_5 25$, tenemos $5^y = 25 = 5^2$, así $y = 2$. Por lo tanto, $\log_5 25 = 2$. ■

■ Ahora resuelva el problema 25.

Dominio de una función logarítmica

La función logarítmica $y = \log_a x$ es la inversa de la función exponencial $y = a^x$. Es decir, si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$. Según el análisis de la sección 4.5 sobre funciones inversas, sabemos que para una función f y su inversa f^{-1}

$$\text{Dominio } f^{-1} = \text{Rango } f \quad \text{y} \quad \text{Rango } f^{-1} = \text{Dominio } f$$

En consecuencia:

Dominio de la función logarítmica = Rango de la función exponencial = $(0, \infty)$
Rango de la función logarítmica = Dominio de la función exponencial = $(-\infty, \infty)$

En el siguiente recuadro resumimos algunas propiedades de la función logarítmica:

$y = \log_a x$	(ecuación que lo define: $x = a^y$)
Dominio: $0 < x < \infty$	Rango: $-\infty < y < \infty$

Observe que el dominio de una función logarítmica consta de los números reales *positivos*.

EJEMPLO 5 *Determinación del dominio de una función logarítmica*

Determinar el dominio de cada función logarítmica:

(a) $F(x) = \log_2 (1 - x)$ (b) $g(x) = \log_5 \left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)$ (c) $h(x) = \log_{1/2} |x|$

Solución (a) El dominio de F consta de las x tales que $(1 - x) > 0$; es decir, $x < 1$, o $(-\infty, 1)$.

(b) El dominio de g está restringido a

$$\frac{1 + x}{1 - x} > 0$$

Al resolver la desigualdad, determinamos que el dominio de g consta de las x entre -1 y 1, es decir, $-1 < x < 1$, o $(-1, 1)$.

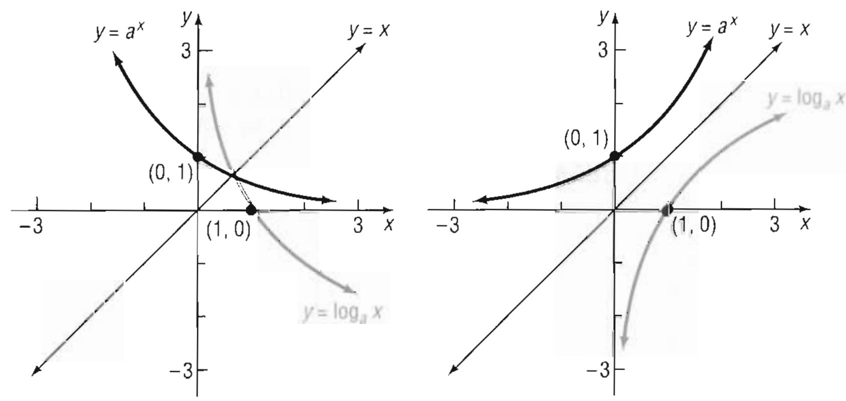
(c) Como $|x| > 0$ si $x \neq 0$, el dominio de h consta de todos los números reales distintos de cero. ■

■ Ahora resuelva el problema 39.

Gráficas de funciones logarítmicas

Dado que las funciones exponencial y logarítmica son inversas entre sí, la gráfica de una función logarítmica $y = \log_a x$ es la reflexión con respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de la función exponencial $y = a^x$, como muestra la figura 10.

FIGURA 10



(a) $0 < a < 1$ **(b)** $a > 1$

Hechos inherentes a la gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$

1. La intersección de la gráfica con el eje x es 1. No existe intersección con el eje y.
2. El eje y es una asíntota vertical de la gráfica.
3. Una función logarítmica es decreciente si $0 < a < 1$ y creciente si $a > 1$.
4. La gráfica es suave y continua, sin esquinas ni saltos.

Si la base de una función logarítmica es el número e, entonces tenemos la **función logaritmo natural.** Esta función se presenta con tal frecuencia en las aplicaciones que tiene asignado un símbolo especial, **ln** (del latín, *logarithmus naturalis*). Así,

$$y = \ln x \quad \text{si, y sólo si,} \quad x = e^y$$

Como $y = \ln x$ y la función exponencial $y = e^x$ son funciones inversas, podemos obtener la gráfica de $y = \ln x$ reflejando la gráfica de $y = e^x$ con respecto de la recta $y = x$. *Véase* la figura 11.

FIGURA 11

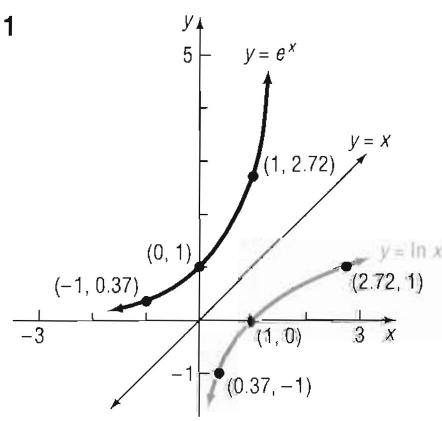


TABLA 5

x	$\ln x$
$\frac{1}{2}$	−0.69
2	0.69
3	1.10

Una calculadora con una tecla $\boxed{ln}$ permite obtener otros puntos en la gráfica de $f(x) = \ln x$. *Véase* la tabla 5.

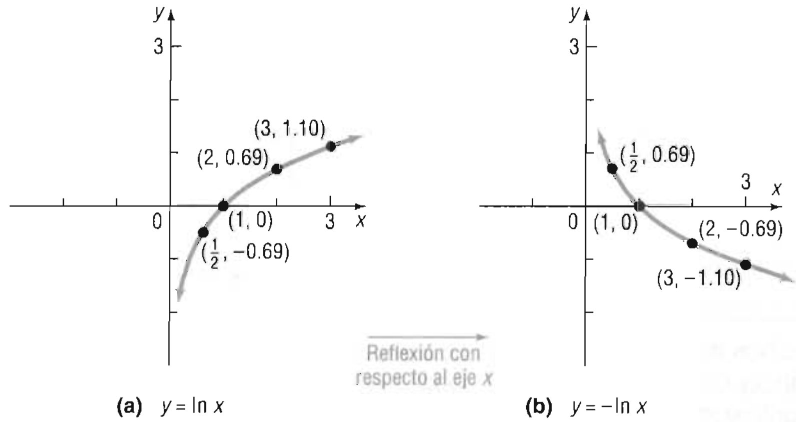
Verificación: haga la gráfica de $y = e^x$ y $y = \ln x$ en una misma pantalla cuadrada. Utilice TRACE para verificar los puntos sobre la gráfica dados en la figura 11. ¿Ve usted la simetría de las dos gráficas con respecto de la recta $y = x$? ∎

EJEMPLO 6 *Graficaciones de funciones que son, en esencia, logarítmicas mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Haga la gráfica de $y = -\ln x$ a partir de la gráfica de $y = \ln x$.

Solución Obtenemos la gráfica de $y = -\ln x$ mediante una reflexión con respecto del eje x de la gráfica de $y = \ln x$. *Véase* la figura 12.

FIGURA 12



(a) $y = \ln x$ (b) $y = -\ln x$ ∎

EJEMPLO 7 *Graficaciones de funciones que son, en esencia, logarítmicas mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

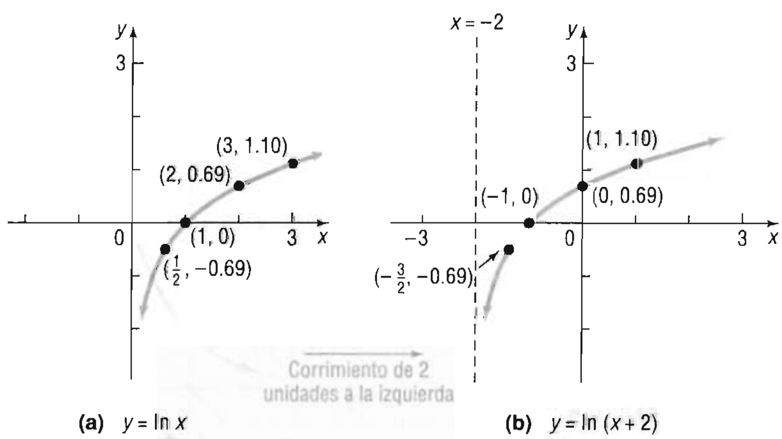
Haga la gráfica de: $y = \ln(x + 2)$

Solución El dominio consta de las x tales que

$$x + 2 > 0 \quad \text{o} \quad x > -2$$

Obtenemos la gráfica aplicando un corrimiento horizontal a la izquierda, en 2 unidades, como muestra la figura 13. Observe que la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

FIGURA 13



(a) $y = \ln x$ (b) $y = \ln(x + 2)$ ∎

EJEMPLO 8 *Graficación de funciones que son en esencia, logarítmicas mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

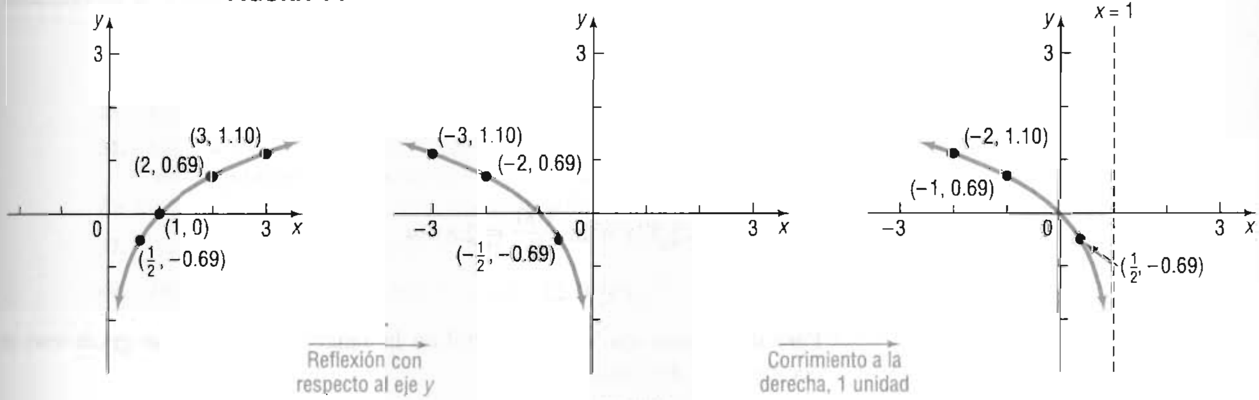
Haga la gráfica de: $y = \ln(1 - x)$

Solución El dominio consta de las x tales que

$$1 - x > 0 \quad \text{o} \quad x < 1$$

Obtenemos la gráfica de $y = \ln(1 - x)$, mediante los pasos ilustrados en la figura 14. Observe que la asíntota vertical de $y = \ln(1 - x)$ es $x = 1$.

FIGURA 14



(a) $y = \ln x$ (b) $y = \ln(-x)$ (c) $y = \ln(-x + 1) = \ln(1 - x)$

■ Ahora resuelva el problema 61.

EJEMPLO 9 *Alcohol y manejo*

Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como un porcentaje) de tener un accidente automovilístico se modela mediante la ecuación

$$R = 6e^{kx}$$

donde x es la concentración variable de alcohol en la sangre y k una constante.

(a) Suponga que una concentración de alcohol en la sangre de 0.04 produce un riesgo del 10% ($R = 10$) de sufrir un accidente. Determine la constante k de la ecuación.

(b) Utilice el valor de k e indique cuál es el riesgo si la concentración es de 0.17.

(c) Con el mismo valor de k encuentre la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100 por ciento.

(d) Si la ley establece que las personas con riesgo de sufrir un accidente del 20% o mayor no deben manejar, ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado?

Solución (a) Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.04 y un riesgo del 10%, haga $x = 0.04$ y $R = 10$ en la ecuación y resuelva para k.

$$R = 6e^{kx}$$
$$10 = 6e^{k(0.04)}$$
$$\frac{10}{6} = e^{0.04k} \qquad \text{Cambiar a una expresión logarítmica.}$$
$$0.04k = \ln\frac{10}{6} = 0.5108256$$
$$k = 12.77$$

(b) Con $k = 12.77$ y $x = 0.17$ en la ecuación, determinamos que el riesgo R es

$$R = 6e^{kx} = 6e^{(12.77)(0.17)} = 52.6$$

Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.17, el riesgo de sufrir un accidente es cercano al 52.6 por ciento.

(c) Con $k = 12.77$ y $R = 100$ en la ecuación, determinamos que la concentración x de alcohol en la sangre es

$$R = 6e^{kx}$$
$$100 = 6e^{12.77x}$$
$$\frac{100}{6} = e^{12.77x} \quad \text{Cambiar a una expresión logarítmica.}$$
$$12.77x = \ln\frac{100}{6} = 2.8134$$
$$x = 0.22$$

Para una concentración de alcohol en la sangre de 0.22, el riesgo de tener un accidente es del 100 por ciento.

(d) Con $k = 12.77$ y $R = 20$ en la ecuación, determinamos que la concentración x de alcohol en la sangre es

$$R = 6e^{kx}$$
$$20 = 6e^{12.77x}$$
$$\frac{20}{6} = e^{12.77x}$$
$$12.77x = \ln\frac{20}{6} = 1.204$$
$$x = 0.094$$

Un conductor que presente una concentración de alcohol en la sangre a un nivel de 0.094, debe ser arrestado y multado. ∎

Nota: En la mayor parte de Estados Unidos, al conductor que rebasa el 0.10 de contenido de alcohol en la sangre se le multa y se le hace llegar un citatorio. En algunos estados basta con el 0.08.

Resumen

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$f(x) = \log_a x, \quad a > 1$ ($y = \log_a x$ significa $x = a^y$)	Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; intersección-x: 1; intersección-y: ninguna; asíntota vertical: eje y; creciente; uno a uno. *Véase* en la figura 10(b) una gráfica típica.
$f(x) = \log_a x, \quad 0 < a < 1$ ($y = \log_a x$ significa $x = a^y$)	Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; intersección-x: 1; intersección-y: ninguna; asíntota vertical: eje y; decreciente; uno a uno. *Véase* en la figura 10(a) una gráfica típica.

4.2

Ejercicio 4.2

En los problemas del 1 al 12, cambie cada expresión exponencial por una expresión equivalente con un logaritmo.

1. $9 = 3^2$ **2.** $16 = 4^2$ **3.** $a^2 = 1.6$ **4.** $a^3 = 2.1$ **5.** $1.1^2 = M$ **6.** $2.2^3 = N$

7. $2^x = 7.2$ **8.** $3^x = 4.6$ **9.** $x^{\sqrt{2}} = \pi$ **10.** $x^\pi = e$ **11.** $e^x = 8$ **12.** $e^{2.2} = M$

En los problemas del 13 al 24, cambie cada expresión logarítmica por una expresión equivalente con un exponente.

13. $\log_2 8 = 3$ **14.** $\log_3(\frac{1}{9}) = -2$ **15.** $\log_a 3 = 6$ **16.** $\log_b 4 = 2$

17. $\log_3 2 = x$ **18.** $\log_2 6 = x$ **19.** $\log_2 M = 1.3$ **20.** $\log_3 N = 2.1$

21. $\log_{\sqrt{2}} \pi = x$ **22.** $\log_\pi x = \frac{1}{2}$ **23.** $\ln 4 = x$ **24.** $\ln x = 4$

En los problemas del 25 al 36, determine el valor exacto de cada logaritmo sin utilizar una calculadora o una tabla.

25. $\log_2 1$ **26.** $\log_8 8$ **27.** $\log_5 25$ **28.** $\log_3(\frac{1}{9})$ **29.** $\log_{1/2} 16$ **30.** $\log_{1/3} 9$

31. $\log_{10} \sqrt{10}$ **32.** $\log_5 \sqrt[3]{25}$ **33.** $\log_{\sqrt{2}} 4$ **34.** $\log_{\sqrt{3}} 9$ **35.** $\ln \sqrt{e}$ **36.** $\ln e^3$

En los problemas del 37 al 46, determine el dominio de cada función.

37. $f(x) = \ln(3 - x)$ **38.** $g(x) = \ln(x^2 - 1)$ **39.** $F(x) = \log_2 x^2$

40. $H(x) = \log_5 x^3$ **41.** $h(x) = \log_{1/2}(x^2 - x - 6)$ **42.** $G(x) = \log_{1/2}\left(\frac{1}{x}\right)$

43. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ **44.** $g(x) = \ln(x - 5)$ **45.** $g(x) = \log_5\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ **46.** $h(x) = \log_3\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

En los problemas del 47 al 50, utilice una calculadora para evaluar cada expresión. Redondee la respuesta a tres cifras decimales.

47. $\ln \dfrac{5}{3}$ **48.** $\dfrac{\ln 5}{3}$ **49.** $\dfrac{\ln 10/3}{0.04}$ **50.** $\dfrac{\ln 2/3}{-0.1}$

51. Determine a de modo que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ contenga al punto $(2, 2)$.

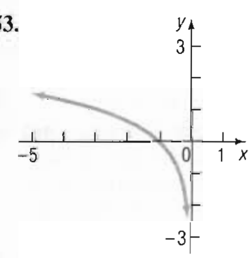
52. Determine a de modo que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ contenga al punto $(\frac{1}{2}, -4)$.

En los problemas del 53 al 60 aparecen las gráficas de una función logarítmica. Relacione cada gráfica con las siguientes funciones:

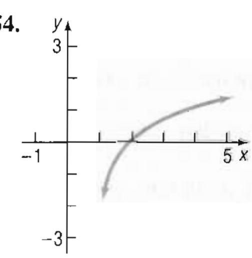
A. $y = \log_3 x$ *B.* $y = \log_3(-x)$ *C.* $y = -\log_3 x$ *D.* $y = -\log_3(-x)$

E. $y = \log_3 x - 1$ *F.* $y = \log_3(x - 1)$ *G.* $y = \log_3(1 - x)$ *H.* $y = 1 - \log_3 x$

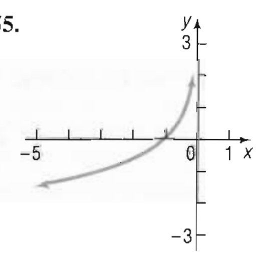
53.



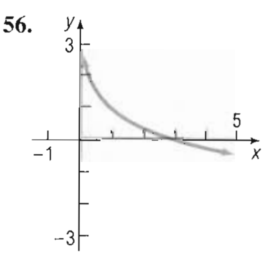
54.



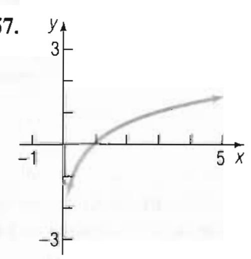
55.



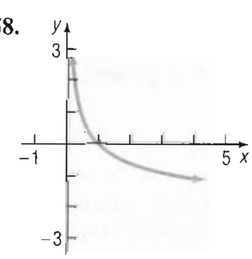
56.



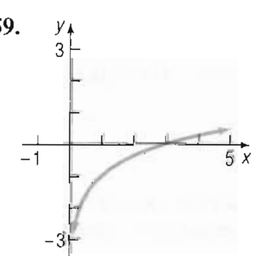
57.



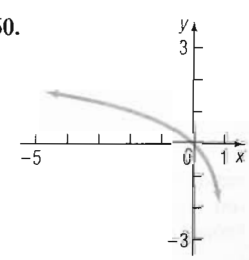
58.



59.



60.



En los problemas del 61 al 70, utilice la gráfica de $y = \ln x$, junto con las técnicas de corrimiento, compresión, alargamiento y reflexión, para hacer la gráfica de cada función.

61. $f(x) = \ln(x + 4)$ **62.** $f(x) = \ln(x - 3)$ **63.** $f(x) = \ln(-x)$ **64.** $f(x) = -\ln(-x)$

65. $g(x) = \ln 2x$ **66.** $h(x) = \ln \frac{1}{2}x$ **67.** $f(x) = 3 \ln x$ **68.** $f(x) = -2 \ln x$

69. $g(x) = \ln(3 - x)$ **70.** $h(x) = \ln(4 - x)$

71. *Óptica.* Si un solo cristal obstruye el 10% de la luz que pasa por él, entonces el porcentaje de luz que pasa a través de n cristales consecutivos está dado aproximadamente por la ecuación

$$P = 100e^{-0.1n}$$

(a) ¿Cuántos cristales son necesarios para bloquear al menos un 50% de la luz?
(b) ¿Y para bloquear al menos el 75% de la luz?

72. *Química.* El pH de una solución química está dado aproximadamente por la fórmula

$$\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}^+]$$

donde $[\text{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno en moles por litro. Los valores del pH varían de 0 (ácido) a 14 (alcalino).

(a) Determine el pH del agua en un recipiente de 1 litro, con 0.0000001 moles de iones de hidrógeno.
(b) Determine la concentración de iones de hidrógeno en una solución semiácida, con un pH de 4.2.

73. *Satélites espaciales.* El número de vatios w proporcionados por la fuente de energía de un satélite espacial después de un periodo de d días está dado por la fórmula

$$w = 50e^{-0.004d}$$

(a) ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la energía disponible llega a 30 vatios?
(b) ¿Y hasta que desciende a solamente 5 vatios?

74. *Recuperación de una herida.* La recuperación normal de una herida se puede modelar mediante una función exponencial. Si A_0 representa el área original de la herida y A es igual al área de la herida después de n días, entonces la fórmula

$$A = A_0e^{-0.35n}$$

describa el área de una herida en el n-ésimo día después de una lesión, si no hay infecciones que retarden la recuperación. Suponga que una herida tiene un área inicial de 1 centímetro cuadrado.

(a) Si hay un proceso de recuperación, ¿cuántos días deben transcurrir antes de que la herida tenga la mitad de su tamaño original?
(b) ¿Cuánto tiempo antes de que tenga el 10% de su tamaño original?

75. *Prescripción de los medicamentos.* La fórmula

$$D = 5e^{-0.4h}$$

sirve para determinar el número de miligramos D de cierto medicamento en el flujo sanguíneo de un paciente, h horas después de su administración. Cuando el número de miligramos llegue a 2 se debe administrar de nuevo el medicamento. ¿Cuánto tiempo transcurre entre las inyecciones?

76. *Difusión de rumores.* Un modelo para el número N de personas en una comunidad escolar que han escuchado cierto rumor es

$$N = P(1 - e^{-0.15d})$$

donde P es la población total de la comunidad y d el número de días transcurridos desde el inicio del rumor. En una comunidad de 1000 estudiantes, ¿cuántos días habrán transcurrido antes de que 450 estudiantes hayan escuchado el rumor?

77. *Corriente alterna en un circuito RL.* La ecuación que gobierna la cantidad de corriente I (en amperios) después de un tiempo t (en segundos) en un circuito RL individual, el cual consta de una resistencia R (en ohms), una inductancia L (en henrios) y una fuerza electromotriz E (en voltios) es

$$I = \frac{E}{R}[1 - e^{-(R/L)t}]$$

Si $E = 12$ voltios, $R = 10$ ohms, y $L = 5$ henrios, ¿cuánto tiempo transcurre antes de obtener una corriente de 0.5 amperios? ¿Y de 1.0 amperios? Haga la gráfica de la ecuación.

78. *Curva de aprendizaje.* En ocasiones los sicólogos utilizan la función

$$L(t) = A(1 - e^{-kt})$$

para medir la cantidad L aprendida en el tiempo t. El número A representa la cantidad por aprender y k mide el nivel de aprendizaje. Suponga que un estudiante debe aprender un total de $A = 200$ palabras de vocabulario. Un sicólogo determina que el estudiante aprendió 20 palabras del vocabulario cada 5 minutos.

(a) Determine la tasa de aprendizaje k.
(b) ¿Aproximadamente cuántas palabras habrá aprendido el estudiante después de 10 minutos?
(c) ¿Y después de 15 minutos?
(d) ¿Cuánto tiempo tardará el estudiante en aprender 180 palabras?

79. *Alcohol y manejo.* Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Supongamos que el riesgo R (dado como un porcentaje) de tener un accidente de automóvil se modela mediante la ecuación

$$R = 3e^{kx}$$

donde x es la concentración variable de alcohol en la sangre y k una constante.

(a) Suponga que una concentración del 0.06 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% ($R = 10$) de sufrir un accidente. Determine la constante k de la ecuación.
(b) Utilice ese valor de k e indique cuál es el riesgo si la concentración es de 0.17.
(c) Con el mismo valor de k indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100 por ciento.
(d) Si la ley establece que las personas con riesgo de sufrir un accidente de 15% o mayor no deben manejar, ¿con cuál concentración de alcohol en la sangre debe un conductor ser arrestado y multado?
(e) Compare esta situación con la del ejemplo 9. Si usted participase en la elaboración de las leyes, ¿cuál caso apoyaría? Proporcione sus razones.

80. Diga si existe una función de la forma $y = x^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, que crezca más lentamente que una función logarítmica con base mayor que 1. Explique su respuesta.

81. *Construcción de una función.* Revise la figura 2 en la página 264. Si los puntos (1950,20) y (1990,50) están sobre la gráfica, determine una ecuación exponencial $y = Ae^{bt}$ que se ajuste a los datos. [*Sugerencia*: Haciendo $t = 0$ correspondiente al año 1950, demuestre que $A = 20$. Luego determine b.] ¿La proyección de 102 millones en 2015 es confirmada por su modelo? Intente obtener datos similares acerca de las tasas de nacimiento y construya una función que se ajuste a esos datos.

82. *Pensamiento crítico.* Al comprar un automóvil nuevo existe un punto que puede considerarse como la forma en que el auto conserva su valor en el tiempo. Las diversas marcas de automóviles pueden tener diferentes tasas de depreciación. En seguida presentamos una forma de calcular la tasa de depreciación para un automóvil. Suponga que los precios actuales de un Mercedes son los siguientes:

NUEVO	1 AÑO VIEJO	2 AÑOS VIEJO	3 AÑOS VIEJO	4 AÑOS VIEJO	5 AÑOS VIEJO
\$38,000	\$36,600	\$32,400	\$28,750	\$25,400	\$21,200

Utilice la fórmula $N = A(e^{Rt})$ donde N es el precio del auto nuevo y A el precio en un año específico, para determinar R, la tasa anual de depreciación, para un tiempo específico t. ¿Cuándo será el mejor momento para vender el auto? Consulte una lista de precios de automóviles y compare dos modelos similares. ¿Cuál tiene la mejor tasa de depreciación?

4.3

Propiedades de los logaritmos

Los logaritmos tienen algunas propiedades muy útiles que se pueden deducir en forma directa de la definición y las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 1 *Establecimiento de las propiedades de los logaritmos*

(a) Muestre que $\log_a 1 = 0$. (b) Muestre que $\log_a a = 1$.

Solución

(a) Establecimos este hecho al hacer la gráfica de $y = \log_a x$ (*véase* la figura 10). En forma algebraica, si $y = \log_a 1$, tenemos $a^y = 1 = a^0$, de modo que $y = 0$.

(b) Si $y = \log_a a$, tenemos que $a^y = a = a^1$, de modo que $y = 1$.

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

■

Teorema propiedades de los logaritmos

En las propiedades dadas a continuación, M y a son números reales positivos, con $a \neq 1$, y r es cualquier número real.

El número $\log_a M$ es el exponente al que debemos elevar a para obtener M. Es decir,

$$a^{\log_a M} = M \tag{1}$$

El logaritmo base a de a elevada a una potencia es igual a esa potencia. Esto es,

$$\log_a a^r = r \tag{2}$$

■

Demostración de la propiedad (1)

Sea $x = \log_a M$. Cambiamos esta expresión logarítmica por la expresión exponencial equivalente:

$$a^x = M$$

Pero $x = \log_a M$, de modo que

$$a^{\log_a M} = M$$

■

Demostración de la propiedad (2)

Sea $x = a^r$. Cambiamos esta expresión exponencial por la expresión logarítmica equivalente:

$$\log_a x = r$$

Pero $x = a^r$, de modo que

$$\log_a a^r = r$$

■

EJEMPLO 2 *Uso de las propiedades (1) y (2)*

(a) $2^{\log_2 \pi} = \pi$ (b) $\log_{0.2} 0.2^{-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$ (c) $\ln e^{kt} = kt$ ■

Ahora veamos otras propiedades útiles de los logaritmos.

Teorema

En las siguientes propiedades M, N y a son números reales positivos, con $a \neq 1$, y r es cualquier número real.

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \qquad (3)$$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N \qquad (4)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_a N \qquad (5)$$

$$\log_a M^r = r \log_a M \qquad (6)$$

■

Realizaremos la deducción de las propiedades (3) y (6) y dejaremos la de las propiedades (4) y (5) como ejercicio (*véanse* los problemas 63 y 64).

Demostración de la propiedad (3)

Sean $A = \log_a M$ y $B = \log_a N$. Estas expresiones son equivalentes a las expresiones exponenciales

$$a^A = M \quad \text{and} \quad a^B = N$$

Ahora

$$\begin{aligned} \log_a MN = \log_a a^A a^B &= \log_a a^{A+B} && \text{Ley de los exponentes.} \\ &= A + B && \text{Propiedad (2) de los logaritmos.} \\ &= \log_a M + \log_a N \end{aligned}$$

■

Demostración de la propiedad (6)

Sea $A = \log_a M$. Esta expresión es equivalente a

$$a^A = M$$

Ahora

$$\begin{aligned} \log_a M^r = \log_a (a^A)^r &= \log_a a^{rA} && \text{Ley de los exponentes.} \\ &= rA && \text{Propiedades (2) de los logaritmos.} \\ &= r \log_a M \end{aligned}$$

■

Podemos utilizar los logaritmos para transformar productos en sumas, cocientes en diferencias, y potencias en factores. Tales transformaciones demuestran su utilidad cuando se aplican en ciertos tipos de problemas del cálculo.

EJEMPLO 3 *Una expresión logarítmica en forma de una suma de logaritmos*

Escribir $\log_a(x\sqrt{x^2+1})$ como una suma de logaritmos. Expresar todas las potencias como factores.

Solución

$$\begin{aligned} \log_a(x\sqrt{x^2+1}) &= \log_a x + \log_a \sqrt{x^2+1} && \text{Propiedad (3).} \\ &= \log_a x + \log_a (x^2+1)^{1/2} \\ &= \log_a x + \tfrac{1}{2}\log_a(x^2+1) && \text{Propiedad (6).} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 *Una expresión logarítmica en forma de diferencia de logaritmos*

Escribir

$$\log_a \frac{x^2}{(x-1)^3}$$

como una diferencia de logaritmos. Expresar todas las potencias como factores.

Solución

$$\log_a \frac{x^2}{(x-1)^3} \underset{\text{Propiedad (4)}}{=} \log_a x^2 - \log_a (x-1)^3 \underset{\text{Propiedad (6)}}{=} 2\log_a x - 3\log_a(x-1)$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

EJEMPLO 5 *Una expresión logarítmica en forma de suma y diferencia de logaritmos*

Escribir

$$\log_a \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^4}$$

como suma y diferencia de logaritmos. Expresar todas las potencias como factores.

Solución

$$\begin{aligned}\log_a \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^4} &= \log_a(x^3\sqrt{x^2+1}) - \log_a(x+1)^4\\ &= \log_a x^3 + \log_a \sqrt{x^2+1} - \log_a(x+1)^4\\ &= \log_a x^3 + \log_a(x^2+1)^{1/2} - \log_a(x+1)^4\\ &= 3\log_a x + \tfrac{1}{2}\log_a(x^2+1) - 4\log_a(x+1)\end{aligned}$$ ■

Otro uso de las propiedades de la (3) a la (6) es escribir las sumas o restas de logaritmos con la misma base como un único logaritmo.

EJEMPLO 6 *Expresiones en forma de un único logaritmo*

Escriba cada una de las siguientes expresiones como un único logaritmo:

(a) $\log_a 7 + 4\log_a 3$

(b) $\frac{2}{3}\log_a 8 - \log_a(3^4 - 8)$

(c) $\log_a x + \log_a 9 + \log_a(x^2+1) - \log_a 5$

Solución

(a)
$$\begin{aligned}\log_a 7 + 4\log_a 3 &= \log_a 7 + \log_a 3^4 && \text{Propiedad (6).}\\ &= \log_a 7 + \log_a 81\\ &= \log_a(7\cdot 81) && \text{Propiedad (3).}\\ &= \log_a 567\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\tfrac{2}{3}\log_a 8 - \log_a(3^4-8) &= \log_a 8^{2/3} - \log_a(81-8) && \text{Propiedad (6).}\\ &= \log_a 4 - \log_a 73\\ &= \log_a\left(\tfrac{4}{73}\right) && \text{Propiedad (4).}\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\log_a x + \log_a 9 + \log_a(x^2+1) - \log_a 5 &= \log_a 9x + \log_a(x^2+1) - \log_a 5\\ &= \log_a[9x(x^2+1)] - \log_a 5\\ &= \log_a\left[\frac{9x(x^2+1)}{5}\right]\end{aligned}$$ ■

Cuidado: un error común entre estudiantes es expresar el logaritmo de una suma como la suma de logaritmos:

$$\log_a(M + N) \quad \text{no es igual a} \quad \log_a M + \log_a N$$

Enunciado correcto $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ Propiedad (3).

Otro error común es expresar la diferencia de logaritmos como el cociente de logaritmos:

$$\log_a M - \log_a N \quad \text{no es igual a} \quad \frac{\log_a M}{\log_a N}$$

Enunciado correcto $\log_a M - \log_a N = \log_a\left(\frac{M}{N}\right)$ Propiedad (4).

■ Ahora resuelva el problema 23.

Existen otras dos propiedades de los logaritmos que debemos conocer; ellas son consecuencia del hecho de que la función logarítmica $y = \log_a x$ es uno a uno.

Teorema

En las siguientes propiedades M, N y a son números reales positivos, con $a \neq 1$:

$$\text{Si} \quad M = N, \quad \text{entonces} \quad \log_a M = \log_a N. \tag{7}$$

$$\text{Si} \quad \log_a M = \log_a N, \quad \text{entonces} \quad M = N. \tag{8}$$

■

Las propiedades (7) y (8) sirven para resolver *ecuaciones logarítmicas*, tema de la siguiente sección.

Uso de una calculadora para evaluar logaritmos con bases distintas de *e* o 10

Los logaritmos con base 10, llamados **logaritmos comunes,** fueron utilizados para facilitar los cálculos aritméticos antes de que las calculadoras tuvieran tan amplia difusión . (*Véase* la característica histórica al final de esta sección.) Los logaritmos naturales, es decir, aquellos cuya base es el número e, siguen siendo muy importantes debido a la frecuencia con que aparecen en el estudio de los fenómenos naturales.

Los logaritmos comunes se abrevian por lo general como **log,** donde se entiende que la base es 10, al igual que los logaritmos naturales se abrevian mediante **ln,** donde se entiende que la base es e.

Muchas calculadoras tienen teclas $\boxed{\log}$ e $\boxed{\ln}$ para calcular el logaritmo común y el logaritmo natural de un número. Veamos un ejemplo para calcular logaritmos con bases distintas de 10 o de e.

EJEMPLO 7 *Evaluación de logaritmos con base distinta de 10 o e*

Evaluar: $\log_2 7$

Solución

Sea $y = \log_2 7$. Entonces $2^y = 7$, de modo que

$$\begin{aligned} 2^y &= 7 \\ \ln 2^y &= \ln 7 && \text{Propiedad (7).} \\ y \ln 2 &= \ln 7 && \text{Propiedad (6).} \\ y &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Despejamos } y. \\ &= 2.8074 && \text{Usamos la calculadora (Tecla } \boxed{\ln}\text{).} \end{aligned}$$

■

El ejemplo 7 nos muestra la forma para cambiar la base de 2 a e. En general, para cambiar de la base b a la base a utilizamos la **fórmula para el cambio de base.**

Teorema fórmula para el cambio de base Si $a \neq 1$, $b \neq 1$, y M son números reales positivos, entonces

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \tag{9}$$

Demostración Deducimos esta fórmula como sigue: sea $y = \log_a M$. Entonces $a^y = M$, de modo que

$$\begin{aligned} \log_b a^y &= \log_b M && \text{Propiedad (7).} \\ y \log_b a &= \log_b M && \text{Propiedad (6).} \\ y &= \frac{\log_b M}{\log_b a} && \text{Despejamos } y. \\ \log_a M &= \frac{\log_b M}{\log_b a} && y = \log_a M \end{aligned}$$

Como algunas calculadoras sólo tienen teclas para $\boxed{\log}$ e $\boxed{\ln}$, en la práctica la fórmula para el cambio de base utiliza $b = 10$ o $b = e$. Así,

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} \quad \text{y} \quad \log_a M = \frac{\ln M}{\ln a} \tag{10}$$

Comentario: para hacer la gráfica de funciones logarítmicas cuando la base es distinta de e o de 10, necesitamos la fórmula para el cambio de base. Así, por ejemplo, para hacer la gráfica de $y = \log_2 x$, podemos hacer la gráfica de $y = (\ln x)/(\ln 2)$. Inténtelo.

EJEMPLO 8 *Uso de la fórmula para el cambio de base*

Calcule:

(a) $\log_5 89$ (b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5}$

Solución (a) $\log_5 89 = \dfrac{\log 89}{\log 5} \approx \dfrac{1.94939}{0.69897} = 2.7889$

o

$$\log_5 89 = \frac{\ln 89}{\ln 5} \approx \frac{4.4886}{1.6094} = 2.7889$$

(b) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5} = \dfrac{\log \sqrt{5}}{\log \sqrt{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}\log 5}{\frac{1}{2}\log 2} \approx \dfrac{0.69897}{0.30103} = 2.3219$

o

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{5} = \frac{\ln \sqrt{5}}{\ln \sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}\ln 5}{\frac{1}{2}\ln 2} \approx \frac{1.6094}{0.6931} = 2.3219$$

■ Ahora resuelva el problema 41.

Resumen de las propiedades de los logaritmos

En la siguiente lista, $a > 0$, $a \neq 1$, y $b > 0$, $b \neq 1$; también, $M > 0$ y $N > 0$.

Definición	$y = \log_a x$ significa que $x = a^y$
Propiedades de los logaritmos	$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$
	$a^{\log_a M} = M$; $\log_a a^r = r$
	$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
	$\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
	$\log_a\left(\dfrac{1}{N}\right) = -\log_a N$
	$\log_a M^r = r \log_a M$
Fórmula para el cambio de base	$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

CARACTERÍSTICA HISTÓRICA

■ Los logaritmos fueron inventados hacia 1590 por John Napier (1550-1617) y Jobst Bürgi (1552-1632) en forma independiente uno del otro. Napier, cuyo trabajo tuvo mayor influencia, era un noble escocés, un hombre reservado de quien sus vecinos pensaban que tenía tratos con el diablo. Su enfoque de los logaritmos fue un poco distinto al de nosotros; se basaba en la relación entre las sucesiones aritméticas y geométricas (*véase* el capítulo 11), y no en la relación de función inversa de los logaritmos con las funciones exponenciales (descrita en la sección 4.2). Las tablas de Napier, publicadas en 1614, contienen lo que ahora llamaríamos *logaritmos naturales* de senos y eran más bien difíciles de utilizar. Un profesor de Londres, Henry Briggs, se interesó en las tablas y visitó a Napier. En sus conversaciones desarrollaron la idea de los logaritmos comunes y, entonces, Briggs convirtió las tablas de Napier en tablas de logaritmos comunes, publicadas en 1617. Su importancia para los cálculos fue reconocida de inmediato y en 1650 ya eran impresas en lugares tan remotos como China. Se mantuvieron como una importante herramienta de cálculo hasta el surgimiento de la calculadora manual barata, alrededor de 1972, lo que hizo disminuir su importancia al desarrollar los cálculos mas no su interés teórico.

Un efecto colateral de la invención de los logaritmos fue la popularización del sistema decimal de notación para los números reales. ■

4.3

Ejercicio 4.3

En los problemas del 1 al 12, suponga que $\ln 2 = a$ *y* $\ln 3 = b$. *Utilice las propiedades de los logaritmos para escribir cada logaritmo en términos de a y b.*

1. $\ln 6$	**2.** $\ln \frac{2}{3}$	**3.** $\ln 1.5$	**4.** $\ln 0.5$
5. $\ln 2e$	**6.** $\ln\left(\dfrac{3}{e}\right)$	**7.** $\ln 12$	**8.** $\ln 24$
9. $\ln \sqrt[5]{18}$	**10.** $\ln \sqrt[4]{48}$	**11.** $\log_2 3$	**12.** $\log_3 2$

En los problemas del 13 al 22, escriba cada expresión como una suma y diferencia de logaritmos. Exprese las potencias como factores.

13. $\ln(x^2\sqrt{1-x})$ **14.** $\ln(x\sqrt{1+x^2})$ **15.** $\log_2\left(\dfrac{x^3}{x-3}\right)$ **16.** $\log_5\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x^2-1}\right)$

17. $\log\left[\dfrac{x(x+2)}{(x+3)^2}\right]$ **18.** $\log\dfrac{x^3\sqrt{x+1}}{(x-2)^2}$ **19.** $\ln\left[\dfrac{x^2-x-2}{(x+4)^2}\right]^{1/3}$ **20.** $\ln\left[\dfrac{(x-4)^2}{x^2-1}\right]^{2/3}$

21. $\ln\dfrac{5x\sqrt{1-3x}}{(x-4)^3}$ **22.** $\ln\left[\dfrac{5x^2\sqrt[3]{1-x}}{4(x+1)^2}\right]$

En los problemas del 23 al 32, escriba cada expresión como un único logaritmo.

23. $3\log_5 u + 4\log_5 v$ **24.** $\log_3 u^2 - \log_3 v$

25. $\log_{1/2}\sqrt{x} - \log_{1/2} x^3$ **26.** $\log_2\left(\dfrac{1}{x}\right) + \log_2\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

27. $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2-1)$ **28.** $\log\left(\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}\right) - \log\left(\dfrac{x^2+7x+6}{x+2}\right)$

29. $8\log_2\sqrt{3x-2} - \log_2\left(\dfrac{4}{x}\right) + \log_2 4$ **30.** $21\log_3\sqrt[3]{x} + \log_3 9x^2 - \log_5 25$

31. $2\log_a 5x^3 - \frac{1}{2}\log_a(2x+3)$ **32.** $\frac{1}{3}\log(x^3+1) + \frac{1}{2}\log(x^2+1)$

En los problemas del 33 al 40, utilice la fórmula para el cambio de base y una calculadora para evaluar cada logaritmo. Redondee la respuesta a tres cifras decimales.

33. $\log_3 21$ **34.** $\log_5 18$ **35.** $\log_{1/3} 71$ **36.** $\log_{1/2} 15$

37. $\log_{\sqrt{2}} 7$ **38.** $\log_{\sqrt{5}} 8$ **39.** $\log_\pi e$ **40.** $\log_\pi \sqrt{2}$

41. Muestre que $\log_a(x+\sqrt{x^2-1}) + \log_a(x-\sqrt{x^2-1}) = 0$

42. Muestre que $\log_a(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}) + \log_a(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}) = 0$

43. Muestre que $\ln(1+e^{2x}) = 2x + \ln(1+e^{-2x})$

44. Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \log_a\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{1/h}$, $h \neq 0$

45. Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $-f(x) = \log_{1/a} x$ **46.** Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $f(1/x) = -f(x)$

47. Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $f(AB) = f(A) + f(B)$ **48.** Si $f(x) = \log_a x$, muestre que $f(x^\alpha) = \alpha f(x)$

En los problemas del 49 al 58, exprese a y como una función de x. La constante C es un número positivo.

49. $\ln y = \ln x + \ln C$ **50.** $\ln y = \ln(x + C)$ **51.** $\ln y = \ln x + \ln(x+1) + \ln C$

52. $\ln y = 2\ln x - \ln(x+1) + \ln C$ **53.** $\ln y = 3x + \ln C$ **54.** $\ln y = -2x + \ln C$

55. $\ln(y-3) = -4x + \ln C$ **56.** $\ln(y+4) = 5x + \ln C$

57. $3\ln y = \frac{1}{2}\ln(2x+1) - \frac{1}{3}\ln(x+4) + \ln C$

58. $2\ln y = -\frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{3}\ln(x^2+1) + \ln C$

59. Determine el valor de $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

60. Determine el valor de $\log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_6 8$.

61. Determine el valor de $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \ldots \cdot \log_n(n+1) \cdot \log_{n+1} 2$.

62. Determine el valor de $\log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdot \ldots \cdot \log_2 2^n$.

63. Muestre que $\log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N$, donde a, M, y N son números reales positivos, con $a \neq 1$.

64. Muestre que $\log_a(1/N) = -\log_a N$, donde a y N son números reales positivos, con $a \neq 1$.

65. Determine el dominio de $f(x) = \log_a x^2$ y el dominio de $g(x) = 2\log_a x$. Dado que $\log_a x^2 = 2\log_a x$, ¿cómo explica usted el hecho de que los dominios no sean iguales? Escriba una breve explicación.

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 4

EL CAFÉ MCNEWTON

Suponga que su equipo de trabajo ha sido llamado para resolver un problema en un restaurante de comida rápida cuyos propietarios piensan que el café debe prepararse a 170° Fahrenheit. Pero a esa temperatura el café está demasiado caliente y si a un cliente se le derramara por accidente le provocaría quemaduras de tercer grado.

Lo que necesitan es un recipiente especial donde se caliente el agua a 170°F para preparar el café a esa temperatura, y después enfriarlo con rapidez hasta una temperatura en que se pueda beber, como 140°F, y mantenerlo ahí, o al menos sobre los 120°F durante un periodo razonable sin tener que recalentarlo. Para enfriar el café, tres compañías han formulado propuestas con las siguientes especificaciones:

(a) CentiKeeper tiene un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 100°F en 90 minutos, manteniendo una temperatura constante de 70°F.

(b) TempControl ofrece un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 200°F a 110°F en 60 minutos, manteniendo una temperatura constante de 60°F.

(c) Hot'n'Cold, Inc., propone un recipiente que reduce la temperatura de un líquido de 210°F a 90°F en 30 minutos, manteniendo una temperatura constante de 50°F.

El trabajo de usted y su equipo consiste en hacer una recomendación acerca del recipiente que debe adquirirse. Para ello necesitarán aplicar la ley del enfriamiento de Newton:

$$u = T + (u_0 - T)e^{kt}, \quad k < 0$$

En esta fórmula T representa la temperatura del ambiente, u_0 es la temperatura inicial del objeto calentado, t el intervalo de tiempo en minutos, k una constante negativa y u la temperatura en el instante t.

1. Utilice la ley del enfriamiento de Newton para determinar la constante k de la fórmula, para cada recipiente.
2. ¿Cuánto tiempo tarda cada recipiente en reducir la temperatura del café de 170°F a 140°F?
3. ¿Cuánto tiempo permanecerá la temperatura del café entre 120°F y 140°F?
4. Con base en esta información, ¿cuál compañía debe ganar el contrato con McNewton? ¿Cuáles son sus razones?
5. ¿Qué son el "costo de capital" y el "costo de operación"? ¿Cómo podrían afectar su elección?

4.4

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ecuaciones logarítmicas

Las ecuaciones que contienen términos de la forma $\log_a x$, donde a es un número real positivo distinto de 1, son **ecuaciones logarítmicas.**

Ahora veremos cómo utilizar las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones logarítmicas.

EJEMPLO 1

Resolver: $\log_3(4x - 7) = 2$

Solución

Pasamos la expresión a su forma exponencial para resolverla:

$$\begin{aligned} \log_3(4x - 7) &= 2 \\ 4x - 7 &= 3^2 \\ 4x - 7 &= 9 \\ 4x &= 16 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Resolver: $2 \log_5 x = \log_5 9$

Solución

$$\begin{aligned} 2 \log_5 x &= \log_5 9 \\ \log_5 x^2 &= \log_5 9 \qquad \text{Propiedad (6), sección 4.3.} \\ x^2 &= 9 \qquad \text{Propiedad (8), sección 4.3.} \\ x = 3 \quad \text{o} \quad &\cancel{x = -3} \end{aligned}$$

Recuerde que los logaritmos de números negativos no están definidos, de modo que en la expresión $2 \log_5 x$, x debe ser positivo. Por lo tanto, -3 es una raíz extraña y la descartamos.

La ecuación sólo tiene una solución, 3.

Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3

Resuelva $\log_4(x + 3) + \log_4(2 - x) = 1$

Solución

Debemos expresar el lado izquierdo como un único logaritmo. Después pasamos la expresión a su forma exponencial.

$$\begin{aligned} \log_4(x + 3) + \log_4(2 - x) &= 1 \\ \log_4[(x + 3)(2 - x)] &= 1 \qquad \text{Propiedad (3), sección 4.3} \\ (x + 3)(2 - x) &= 4^1 = 4 \\ -x^2 - x + 6 &= 4 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x = -2 \quad \text{o} \quad x &= 1 \end{aligned}$$

Verifique que ambas son soluciones.

Ahora resuelva el problema 11.

Hay que tener cuidado al resolver ecuaciones logarítmicas. Asegúrese de verificar cada presunta solución en la ecuación original y descartar las raíces que sean extrañas. En la expresión $\log_a M$, recuerde que a y M son positivos y $a \neq 1$.

Ecuaciones exponenciales

Las ecuaciones que contienen términos de la forma a^x, donde a es mayor que 0 y distinto de 1, se conocen como **ecuaciones exponenciales;** algunas de ellas se pueden resolver aplicando en forma adecuada las leyes de los exponentes y la ecuación (1), pág. 401, a saber,

$$\text{Si } a^u = a^v, \quad \text{entonces } u = v. \qquad (1)$$

Para utilizar la ecuación (1), hay que escribir los dos lados de la igualdad en la misma base.

EJEMPLO 4 Resolver la ecuación $3^{x+1} = 81$

Solución Como $81 = 3^4$, podemos escribir la ecuación como

$$3^{x+1} = 81 = 3^4$$

Ahora tenemos la misma base (3) de cada lado, por lo que podemos aplicar (1) para obtener

$$x + 1 = 4$$
$$x = 3$$

■ Ahora resuelva el problema 19.

EJEMPLO 5 Resolver la ecuación $e^{-x^2} = (e^x)^2 \cdot \frac{1}{e^3}$

Solución Primero utilizamos algunas leyes de los exponentes para obtener la misma base e a cada lado:

$$e^{-x^2} = (e^x)^2 \cdot \frac{1}{e^3} = e^{2x} \cdot e^{-3} = e^{2x-3}$$

Ahora aplicamos (1) para obtener

$$-x^2 = 2x - 3$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$
$$x = -3 \quad \text{o} \quad x = 1$$

EJEMPLO 6 Resolver la ecuación $4^x - 2^x - 12 = 0$

Solución Observamos que $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$, de modo que en realidad, la ecuación tiene forma cuadrática y podemos reescribirla como

$$(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$$

Podemos factorizar de la manera usual:

$$(2^x - 4)(2^x + 3) = 0$$
$$2^x - 4 = 0 \quad \text{o} \quad 2^x + 3 = 0$$
$$2^x = 4 \qquad\qquad 2^x = -3$$

La ecuación de la izquierda tiene la solución $x = 2$, ya que $2^x = 4 = 2^2$; la ecuación de la derecha no tiene solución debido a que $2^x > 0$ para toda x. ■

En cada uno de los tres ejemplos anteriores pudimos escribir cada expresión exponencial utilizando la misma base, obteniendo así las soluciones exactas de la ecuación. Cuando esto no es posible, a veces se pueden utilizar los logaritmos para obtener la solución.

EJEMPLO 7 Resolver para x: $2^x = 5$

Solución Escribimos la ecuación exponencial en la forma logarítmica equivalente:

$$2^x = 5$$
$$x = \log_2 5 = \underset{\text{Fórmula de cambio de base (10).}}{\underset{\uparrow}{\frac{\ln 5}{\ln 2}}}$$

Otra alternativa para resolver la ecuación $2^x = 5$ es tomar el logaritmo natural (o el logaritmo común) de cada lado. Si tomamos el logaritmo natural,

$$\begin{aligned} 2^x &= 5 \\ \ln 2^x &= \ln 5 \\ x \ln 2 &= \ln 5 \\ x &= \frac{\ln 5}{\ln 2} \end{aligned}$$

Utilizamos una calculadora para obtener la solución, redondeada a tres cifras decimales:

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 2} = 2.322$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 8 Resolver para x: $8 \cdot 3^x = 5$

Solución

$$\begin{aligned} 8 \cdot 3^x &= 5 && \text{Aislamos } 3^x \text{ del lado izquierdo.} \\ 3^x &= \tfrac{5}{8} && \text{Procedemos como en el ejemplo 7.} \\ x &= \log_3\left(\tfrac{5}{8}\right) = \frac{\ln \frac{5}{8}}{\ln 3} \end{aligned}$$

Utilizamos una calculadora para obtener la solución, redondeada a tres cifras decimales:

$$x = \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln 3} = -0.428$$ ■

EJEMPLO 9 Resolver para x: $5^{x-2} = 3^{3x+2}$

Solución Como las bases son diferentes, consideramos el logaritmo natural de cada lado y aplicamos las propiedades adecuadas de los logaritmos. El resultado es una ecuación en x que podemos resolver.

$$
\begin{aligned}
5^{x-2} &= 3^{3x+2} \\
\ln 5^{x-2} &= \ln 3^{3x+2} && \text{Propiedad (7).} \\
(x-2)\ln 5 &= (3x+2)\ln 3 && \text{Propiedad (6).} \\
(\ln 5)x - 2\ln 5 &= (3\ln 3)x + 2\ln 3 \\
(\ln 5 - 3\ln 3)x &= 2\ln 3 + 2\ln 5 \\
x &= \frac{2(\ln 3 + \ln 5)}{\ln 5 - 3\ln 3} = -3.212
\end{aligned}
$$

■

■ Ahora resuelva el problema 41.

Soluciones mediante dispositivos de graficación

Las técnicas presentadas en esta sección sólo se aplican a ciertos tipos de ecuaciones logarítmicas y exponenciales. Las soluciones a otros tipos se estudian por lo general en el cálculo mediante métodos numéricos. En el siguiente ejemplo mostraremos la forma de utilizar un dispositivo de graficación para obtener soluciones.

EJEMPLO 10 *Solución de ecuaciones mediante un dispositvo de graficación*

Resolver para x: $x + e^x = 2$

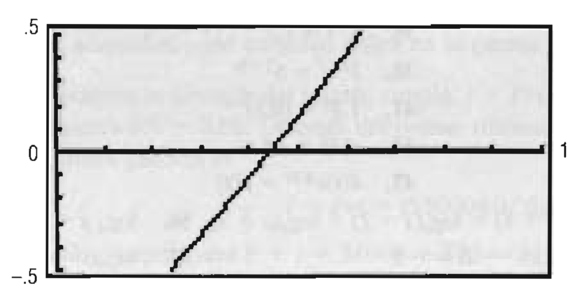
Expresar la solución (o soluciones) con dos cifras decimales.

Solución A Este tipo de ecuación exponencial no se puede resolver mediante los métodos anteriormente vistos. Sin embargo, podemos utilizar un dispositivo de graficación. Primero observamos que la ecuación por resolver es equivalente a

$$
\begin{aligned}
x + e^x &= 2 \\
x + e^x - 2 &= 0
\end{aligned}
$$

Las soluciones para esta ecuación son las intersecciones-x de la gráfica de la función $f(x) = x + e^x - 2$. Esta función f es creciente (¿puede advertir por qué?), de modo que, cuando mucho, tendrá una intersección-x. Como $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 + e - 2 > 0$, el teorema del valor intermedio (sección 3.6, pág., 247) implica que existe una intersección-x entre 0 y 1, en consecuencia, hacemos la gráfica de la función con $0 \leq x \leq 1$. *Véase* la figura 15.

FIGURA 15



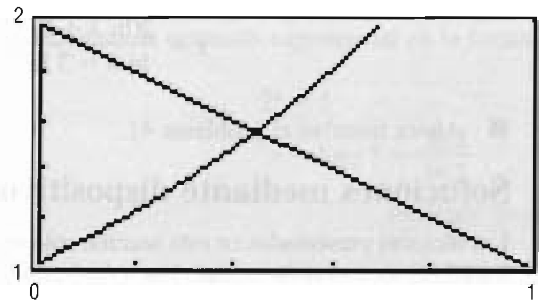
Utilizamos TRACE, ZOOM-IN y/o BOX para obtener la solución $x = 0.44$, con dos cifras decimales.

Solución B La ecuación por resolver es equivalente a

$$x + e^x = 2$$
$$e^x = 2 - x$$

Hacemos la gráfica de las dos ecuaciones $y = e^x$ y $y = 2 - x$. *Véase* la figura 16. La ordenada de su punto de intersección es la solución buscada. Utilizamos TRACE, ZOOM-IN y/o BOX para obtener la solución $x = 0.44$, con dos cifras decimales.

FIGURA 16



4.4

Ejercicio 4.4

En los problemas del 1 al 58 resuelva cada ecuación.

1. $\log_2(2x + 1) = 3$
2. $\log_3(3x - 2) = 2$
3. $\log_3(x^2 + 1) = 2$
4. $\log_5(x^2 + x + 4) = 2$
5. $\frac{1}{2}\log_3 x = 2\log_3 2$
6. $-2\log_4 x = \log_4 9$
7. $2\log_5 x = 3\log_5 4$
8. $3\log_2 x = -\log_2 27$
9. $3\log_2(x - 1) + \log_2 4 = 5$
10. $2\log_3(x + 4) - \log_3 9 = 2$
11. $\log_{10} x + \log_{10}(x + 15) = 2$
12. $\log_4 x + \log_4(x - 3) = 1$
13. $\log_x 4 = 2$
14. $\log_x\left(\frac{1}{8}\right) = 3$
15. $\log_3(x - 1)^2 = 2$
16. $\log_2(x + 4)^3 = 6$
17. $\log_{1/2}(3x + 1)^{1/3} = -2$
18. $\log_{1/3}(1 - 2x)^{1/2} = -1$
19. $2^{2x+1} = 4$
20. $5^{1-2x} = \frac{1}{5}$
21. $3^{x^3} = 9^x$
22. $4^{x^2} = 2^x$
23. $8^{x^2-2x} = \frac{1}{2}$
24. $9^{-x} = \frac{1}{3}$
25. $2^x \cdot 8^{-x} = 4^x$
26. $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} = 4$
27. $2^{2x} - 2^x - 12 = 0$
28. $3^{2x} + 3^x - 2 = 0$
29. $3^{2x} + 3^{x+1} - 4 = 0$
30. $4^x - 2^x = 0$
31. $4^x = 8$
32. $9^{2x} = 27$
33. $2^x = 10$
34. $3^x = 14$
35. $8^{-x} = 1.2$
36. $2^{-x} = 1.5$
37. $3^{1-2x} = 4^x$
38. $2^{x+1} = 5^{1-2x}$
39. $\left(\frac{3}{5}\right)^x = 7^{1-x}$
40. $\left(\frac{4}{3}\right)^{1-x} = 5^x$
41. $1.2^x = (0.5)^{-x}$
42. $(0.3)^{1+x} = 1.7^{2x-1}$
43. $\pi^{1-x} = e^x$
44. $e^{x+3} = \pi^x$
45. $5(2^{3x}) = 8$
46. $0.3(4^{0.2x}) = 0.2$
47. $400e^{0.2x} = 600$
48. $500e^{0.3x} = 600$
49. $\log_a(x - 1) - \log_a(x + 6) = \log_a(x - 2) - \log_a(x + 3)$
50. $\log_a x + \log_a(x - 2) = \log_a(x + 4)$
51. $\log_{1/3}(x^2 + x) - \log_{1/3}(x^2 - x) = -1$
52. $\log_4(x^2 - 9) - \log_4(x + 3) = 3$
53. $\log_2 8^x = -3$
54. $\log_3 3^x = -1$
55. $\log_2(x^2 + 1) - \log_4 x^2 = 1$
    [*Sugerencia*: cambie $\log_4 x^2$ a base 2.]
56. $\log_2(3x + 2) - \log_4 x = 3$
57. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$
58. $\log_9 x + 3\log_3 x = 14$

En los problemas del 59 al 70 utilice un dispositivo de graficación para resolver cada ecuación. Exprese su respuesta con dos cifras decimales.

59. $e^x = -x$
60. $e^{2x} = x + 2$
61. $e^x = x^2$
62. $e^x = x^3$
63. $\ln x = -x$
64. $\ln 2x = -x + 2$
65. $\ln x = x^3 - 1$
66. $\ln x = -x^2$
67. $e^x + \ln x = 4$
68. $e^x - \ln x = 4$
69. $e^{-x} = \ln x$
70. $e^{-x} = -\ln x$

4.5 Interés compuesto

El interés es dinero pagado por el uso de dinero. La cantidad total prestada (ya sea por un banco a una persona, bajo la forma de un préstamo, o por una persona a un banco bajo la forma de una cuenta de ahorros) es el **capital.** La **tasa de interés,** expresada como un porcentaje, es la cantidad cobrada por el uso del capital durante cierto periodo, que por lo general se expresa sobre una base anual.

Si se presta un capital de P dólares durante un periodo de t años con una tasa de interés anual r, expresada como un decimal, el interés I cobrado será

Fórmula de interés simple

$$I = Prt \tag{1}$$

El interés cobrado según la fórmula (1) es llamado **interés simple.**

Al trabajar con problemas de interés utilizamos el **periodo de pago** como sigue:

Anual	Una vez por año
Semestral	Dos veces al año
Trimestral	Cuatro veces al año
Mensual	12 veces al año
Diario	365 veces al año*

Cuando el interés generado al final de un periodo de pago se agrega al capital, de modo que el interés calculado al final del siguiente periodo de pago se base en la nueva cantidad de capital (capital anterior + interés), decimos que el interés es **compuesto.** Así, el **interés compuesto** es interés pagado sobre un interés anterior.

EJEMPLO 1 *Cálculo de interés compuesto*

Una asociación de crédito paga un interés del 8% anual, compuesto en forma trimestral, en cierto plan de ahorro. Si se depositan \$1000.00 bajo ese plan y el interés se deja acumular, ¿qué cantidad habrá en la cuenta después de 1 año?

Solución Utilizamos la fórmula del interés simple, $I = Prt$. El capital P es \$1000.00 y la tasa de interés $8\% = 0.08$. Después del primer trimestre del año, el tiempo es $t = \frac{1}{4}$ año, el interés ganado es

$$I = Prt = (\$1000)(0.08)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \$20$$

El nuevo capital será $P + I = \$1000 + \$20 = \$1020$. Al final del segundo trimestre, el interés sobre este capital es

$$I = (\$1020)(0.08)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \$20.40$$

*Algunos bancos utilizan un "año" de 360 días.

Al final del tercer trimestre, el interés sobre el nuevo capital de \$1020 + \$20.40 = \$1040.40 es

$$I = (\$1040.40)(0.08)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \$20.81$$

Por último, después del cuarto trimestre, el interés es

$$I = (\$1061.21)(0.08)\left(\tfrac{1}{4}\right) = \$21.22$$

Así, después de 1 año. la cuenta tendrá \$1082.43. ∎

El patrón de los cálculos realizados en el ejemplo 1 conduce a una fórmula general para el interés compuesto. Establezcamos el concepto: sea P el capital por invertir con una tasa de interés anual r, compuesta n veces al año. (Para fines de cálculo, r se expresa como un decimal.) El interés obtenido después de cada periodo es el capital por r/n. Así, la cantidad A después de un periodo es

$$A = P + P\left(\frac{r}{n}\right) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

Después de dos periodos, la cantidad A, basada en el nuevo capital $P(1 + r/n)$, es

$$A = \underbrace{P\left(1 + \frac{r}{n}\right)}_{\substack{\text{Nuevo}\\ \text{capital}}} + \underbrace{P\left(1 + \frac{r}{n}\right)\left(\frac{r}{n}\right)}_{\substack{\text{Interés sobre}\\ \text{nuevo capital}}} = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)\left(1 + \frac{r}{n}\right) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$$

Después de tres periodos,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2 + P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2\left(\frac{r}{n}\right) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2\left(1 + \frac{r}{n}\right) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^3$$

Continuamos de esta forma y luego de n periodos (1 año),

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Como t años tienen $n \cdot t$ periodos, después de t años tenemos

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Teorema La cantidad A generada después de t años por un capital P invertido a una tasa de interés anual r compuesta n veces por año es

Fórmula del interés compuesto

$$\boxed{A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad (2)}$$

∎

EJEMPLO 2 *Comparación de inversiones con distintos periodos de composición*

La inversión de \$1000.00 a una tasa anual del 10% compuesto en forma anual, trimestral, mensual y diaria proporciona las siguientes cantidades después de 1 año:

Composición anual: $A = P(1 + r)$
$= (\$1000)(1 + 0.10) = \$1100.00$

Composición trimestral: $A = P\left(1 + \dfrac{r}{4}\right)^4$

$= (\$1000)(1 + 0.025)^4 = \$1103.81$

Composición mensual: $A = P\left(1 + \dfrac{r}{12}\right)^{12}$

$= (\$1000)(1 + 0.00833)^{12} = \$1104.71$

Composición diaria: $A = P\left(1 + \dfrac{r}{365}\right)^{365}$

$= (\$1000)(1 + 0.000274)^{365} = \$1105.16$ ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

El ejemplo 2 permite ver que el efecto de una composición más frecuente es que la cantidad en la cuenta después de 1 año es mayor: \$1000.00 compuestos 4 veces al año al 10% producen \$1103.81; compuestos 12 veces al año al 10% producen \$1104.71; compuestos 365 veces al año al 10% producen \$1105.16. Esto hace surgir la siguiente pregunta: ¿qué ocurrirá con la cantidad inicial después de 1 año si el número de veces que el interés se compone crece sin límite?

Determinemos la respuesta. Si P es el capital, r la tasa de interés anual y n el número de veces que el interés se compone por año, la cantidad después de 1 año será

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$$

Ahora, supongamos que el número n de veces que el interés se compone por año es cada vez mayor; es decir, que $n \to \infty$. Entonces,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = P\left[1 + \frac{1}{n/r}\right]^n = P\left(\left[1 + \frac{1}{n/r}\right]^{n/r}\right)^r = P\left[\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h\right]^r \quad (3)$$

Así, en (3), cuando $n \to \infty$, $h = n/r \to \infty$, y la expresión entre corchetes tiende a e [consulte (2) en la pág., 267], entonces $A \to Pe^r$. La tabla 6 compara $(1 + r/n)^n$, con e^r para valores grandes de n y $r = 0.05$, $r = 0.10$, $r = 0.15$, y $r = 1$. Cuando n aumenta $(1 + r/n)^n$ se acerca más a e^r. De manera que no importa la frecuencia de la composición pues la cantidad después de 1 año tiene como límite superior Pe^r.

TABLA 6

	$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$			
	$n = 100$	$n = 1000$	$n = 10,000$	e^r
$r = 0.05$	1.0512579	1.05127	1.051271	1.0512711
$r = 0.10$	1.1051157	1.1051654	1.1051703	1.1051709
$r = 0.15$	1.1617037	1.1618212	1.1618329	1.1618342
$r = 1$	2.7048138	2.7169239	2.7181459	2.7182818

Cuando el interés se compone de modo que la cantidad al final de 1 año sea Pe^r, se dice que está **compuesto de manera continua.**

Teorema La cantidad A después de t años obtenida mediante un capital P invertido a una tasa de interés anual r compuesto de manera continua es

Composición continua

$$A = Pe^{rt} \tag{4}$$

EJEMPLO 3 *Uso de la composición continua*

La cantidad A que resulta de invertir un capital P de \$1000.00 a una tasa anual r del 10% compuesto de manera continua durante un tiempo t de 1 año es

$$A = \$1000e^{0.10} = (\$1000)(1.10517) = \$1105.17$$

■ Ahora resuelva el problema 9.

La **tasa efectiva de interés** es la tasa de interés anual simple equivalente que produciría la misma cantidad obtenida mediante una composición continua en 1 año. Así, en el ejemplo 3 un capital de \$1000.00 produce \$1105.17 a una tasa del 10% compuesto de manera continua. Para obtener la misma cantidad mediante una tasa de interés simple habría que invertir con un interés que produzca 1105.17 − \$1000.00 = \$105.17 sobre el capital. Como \$105.17 es el 10.517% de \$1000, se necesitaría una tasa de interés simple del 10.517% para igualar la del 10% compuesto de manera continua. En consecuencia, la tasa efectiva de interés compuesto de manera continua es del 10.517 por ciento.

Con base en los resultados de los ejemplos 2 y 3, tenemos las siguientes comparaciones:

	TASA ANUAL	TASA EFECTIVA
Compuesto en forma anual	10%	10%
Compuesto en forma trimestral	10%	10.381%
Compuesto en forma mensual	10%	10.471%
Compuesto en forma diaria	10%	10.516%
Compuesto en forma continua	10%	10.517%

■ Ahora resuelva el problema 21.

EJEMPLO 4 *Cálculo del valor de una cuenta de retiro*

El 2 de enero de 1996 se colocaron \$2000.00 en una cuenta de retiro que pagará un interés del 10% anual compuesto de manera continua. ¿A cuánto ascenderá la cuenta el primero de enero del año 2016?

Solución La cantidad A después de 20 años es

$$A = Pe^{rt} = \$2000e^{(0.10)(20)} = \$14{,}778.11$$

Verificación: haga la gráfica de $y = 2000e^{0.1x}$ y utilice TRACE para verificar que si $x = 20$ entonces $y = \$14{,}778.11$. ■

Investigación: ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta que y sea igual a \$40,000.00? ■

Cuando las personas involucradas en las finanzas hablan del "valor del dinero en el tiempo", por lo general se refieren al **valor presente** del dinero. El valor presente de A dólares a recibir en una fecha próxima es el capital que usted debe in-

FIGURA 17

El tiempo es dinero

vertir ahora para que éste llegue a A dólares en el periodo establecido. Así, el valor presente del dinero a ser recibido en una fecha próxima siempre es menor que la cantidad a recibir, pues la cantidad a recibir es igual al valor presente (el dinero invertido en este momento) *más* el interés acumulado en el periodo contratado.

Utilizamos la fórmula del interés compuesto (2) para obtener una fórmula para el valor presente. Si P es el valor presente de A dólares a ser recibidos después de t años a una tasa de interés anual r compuesta n veces por año, entonces, por la fórmula (2),

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Para despejar P, dividimos ambos lados entre $(1 + r/n)^{nt}$, y el resultado es

$$\frac{A}{(1 + r/n)^{nt}} = P \quad \text{o} \quad P = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt}$$

Teorema

El valor presente P de A dólares a ser recibidos después de t años, con una tasa de interés anual r compuesta n veces por año, es

Fórmulas para el valor presente

$$P = A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} \tag{5}$$

Si el interés es compuesto de manera continua, entonces

$$P = Ae^{-rt} \tag{6}$$

■

Para demostrar (6), despeje P en la fórmula (4).

EJEMPLO 5

Cálculo del valor de un bono del tipo "cupón cero"

Un bono "cupón cero" (sin intereses) puede ser amortizado en 10 años por \$1000.00. ¿Cuánto dinero estaría dispuesto a pagar por él ahora si quiere obtener un rendimiento de

(a) ¿8% compuesto en forma mensual?

(b) ¿7% compuesto en forma continua?

Solución (a) Estamos buscando el valor presente de \$1000.00. Así, utilizamos la fórmula (5) con $A = \$1000$, $n = 12$, $r = 0.08$, y $t = 10$:

$$\begin{aligned} P &= A\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{-nt} \\ &= \$1000\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{-12(10)} \\ &= \$450.52 \end{aligned}$$

Para una tasa del 8% compuesto mensualmente, se debe pagar \$450.52 por el bono.

(b) En este caso, utilizamos la fórmula (6) con $A = \$1000$, $r = 0.07$, y $t = 10$:

$$\begin{aligned} P &= Ae^{-rt} \\ &= \$1000e^{-(0.07)(10)} \\ &= \$496.59 \end{aligned}$$

Para una tasa del 7% compuesto en forma continua, se debe pagar \$496.59 por el bono. ∎

■ Ahora resuelva el problema 11.

EJEMPLO 6 *Tasa de interés necesaria para duplicar una inversión*

¿Cuál es la tasa de interés anual, compuesta en forma anual, necesaria para duplicar una inversión en 5 años?

Solución Si P es el capital y queremos duplicarlo, la cantidad A será $2P$. Utilizamos la fórmula del interés compuesto, con $n = 1$ y $t = 5$ para determinar r:

$$\begin{aligned} 2P &= P(1 + r)^5 \\ 2 &= (1 + r)^5 \\ 1 + r &= \sqrt[5]{2} \\ r &= \sqrt[5]{2} - 1 = 1.148698 - 1 = 0.148698 \end{aligned}$$

La tasa de interés anual necesaria para duplicar el capital en 5 años es 14.87%. ∎

■ Ahora resuelva el problema 23.

EJEMPLO 7 *Tiempo necesario para duplicar y triplicar una inversión*

(a) ¿Cuánto tiempo tarda una inversión en duplicar su valor si gana el 5% de interés compuesto en forma continua?

(b) ¿Cuánto tiempo tarda en triplicarse con esa tasa?

Solución (a) Si P es la inversión inicial y queremos que se duplique, la cantidad A será $2P$. Utilizamos la fórmula (4) para calcular el interés compuesto en forma continua, con $r = 0.05$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ 2P &= Pe^{0.05t} \\ 2 &= e^{0.05t} \\ 0.05t &= \ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{0.05} = 13.86 \end{aligned}$$

Se necesitan 14 años para duplicar la inversión.

(b) Para triplicar la inversión, hacemos $A = 3P$ en la fórmula (4).

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ 3P &= Pe^{0.05t} \\ 3 &= e^{0.05t} \\ 0.05t &= \ln 3 \\ t &= \frac{\ln 3}{0.05} = 21.97 \end{aligned}$$

Se necesitan 22 años para triplicar la inversión. ■

■ Ahora resuelva el problema 29.

4.5

Ejercicio 4.5

En los problemas del 1 al 10, determine la cantidad que resulta de cada inversión.

1. \$100.00 al 4% compuesto en forma trimestral, después de 2 años.
2. \$50.00 al 6% compuesto mensualmente, después de 3 años.
3. \$500.00 al 8% compuesto en forma trimestral, después de $2\frac{1}{2}$ años.
4. \$300.00 al 12% compuesto mensualmente, después de $1\frac{1}{2}$ años.
5. \$600.00 al 5% compuesto diariamente, después de 3 años.
6. \$700.00 al 6% compuesto diariamente, después de 2 años.
7. \$10.00 al 11% compuesto en forma continua, después de 2 años.
8. \$40.00 al 7% compuesto en forma continua, después de 3 años.
9. \$100.00 al 10% compuesto en forma continua, después de $2\frac{1}{4}$ años.
10. \$100.00 al 12% compuesto en forma continua, después de $3\frac{3}{4}$ años.

En los problemas del 11 al 20, determine el capital necesario para obtener cada cantidad; es decir, calcule el valor presente.

11. Para \$100.00 después de 2 años al 6% compuesto mensualmente.
12. Para \$75.00 después de 3 años al 8% compuesto trimestralmente.
13. Para \$1000.00 después de 2 años y medio al 6% compuesto diariamente.
14. Para \$800.00 después de 3 años y medio al 7% compuesto mensualmente.
15. Para \$600.00 después de 2 años al 4% compuesto en forma trimestral.
16. Para \$300.00 después de 4 años al 3% compuesto en forma diaria.
17. Para \$80.00 después de 3 años y $\frac{1}{4}$ al 9% compuesto en forma continua.
18. Para \$800.00 después de 2 años y medio al 8% compuesto en forma continua.
19. Para \$400.00 después de 1 año al 10% compuesto en forma continua.
20. Para \$1000.00 después de 1 año al 12% compuesto en forma continua.
21. Determine la tasa efectiva de interés para $5\frac{1}{4}$% compuesto en forma trimestral.
22. ¿Cuál tasa de interés compuesta en forma trimestral dará una tasa efectiva del 7%?
23. ¿Cuál es la tasa de interés necesaria para duplicar una inversión en 3 años?
24. ¿Cuál es la tasa de interés necesaria para duplicar una inversión en 10 años?

En los problemas del 25 al 28, ¿cuál de las dos tasas produce la mayor cantidad en 1 año? [Sugerencia: Inicie con un capital de $10,000.00 en cada caso.]

25. 6% compuesto en forma trimestral o $6\frac{1}{4}$% compuesto anualmente.

26. 9% compuesto en forma trimestral o $9\frac{1}{4}$% compuesto anualmente.

27. 9% compuesto mensualmente o 8.8% compuesto diariamente.

28. 8% compuesto en forma semestral o 7.9% compuesto diariamente.

29. ¿Cuánto tiempo tardará una inversión en duplicar su valor si se ha contratado al 8% anual compuesto mensualmente? ¿Y compuesto en forma continua?

30. ¿Cuánto tiempo tardará una inversión en duplicar su valor si se ha contratado al 10% anual compuesto mensualmente? ¿Y compuesto en forma continua?

31. Si se dispone de $100.00 para invertir al 8% anual compuesto mensualmente, ¿en cuánto tiempo llegará la cantidad a $150.00? Si la composición es continua, ¿cuánto tiempo será necesario?

32. Si se dispone de $100.00 para invertir al 10% anual compuesto mensualmente, ¿en cuánto tiempo llegará la cantidad a $175.00? Si la composición es continua, ¿cuánto tiempo será necesario?

33. ¿Cuántos años son necesarios para que una inversión inicial de $10,000.00 crezca hasta $25,000.00? Suponga una tasa de interés del 6% compuesto en forma continua.

34. ¿Cuántos años son necesarios para que una inversión inicial de $25,000.00 crezca hasta $80,000.00? Suponga una tasa de interés del 7% compuesto en forma continua.

35. ¿Cuánto costará una casa de $90,000.00 dentro de 5 años si la tasa de inflación durante el periodo promedia un 3% compuesto en forma anual?

36. Una tienda de departamentos carga el 1.25% mensual a las cuentas atrasadas de sus clientes (el interés se compone mensualmente). Un cliente tiene un adeudo de $200.00 y no paga su cuenta durante 6 meses. ¿Cuál será su saldo en ese medio año?

37. Usted quiere adquirir un auto nuevo por $15,000.00 dentro de 3 años. ¿Cuánto dinero debe pedir a sus padres ahora de modo que si lo invierte al 5% compuesto en forma continua tenga la cantidad suficiente para comprar el auto en ese tiempo?

38. Usted necesitará $3000.00 dentro de 6 meses para pagar un préstamo que no le da beneficios aunque pague por adelantado. Si ahora dispone de $3000.00, ¿cuánto debe guardar en una cuenta que paga el 3% compuesto mensualmente de modo que en 6 meses tenga exactamente $3000.00?

39. Usted está pensando en adquirir 100 acciones en la bolsa de valores, a $15.00 cada una, sin recibir dividendos. La historia de las acciones indica que deben crecer a una tasa anual del 15% por año. ¿Cuánto valdrán esas acciones dentro de 5 años?

40. Usted está pensando en adquirir 100 acciones en la bolsa de valores, a $15.00 cada una, sin recibir dividendos. Su corredor dice que las acciones valdrán $20.00 en 2 años. ¿Cuál es la tasa anual de rendimiento de esta inversión?

41. Una empresa adquirida por $650,000.00 en 1994 se vende en 1997 por $850,000.00. ¿Cuál es la tasa anual de rendimiento de esta inversión?

42. Usted acaba de heredar un anillo de diamantes valuado en $5000.00. Si los diamantes han aumentado su valor con una tasa anual del 8%, ¿cuál era el valor del anillo hace 10 años, cuando fue adquirido?

43. Usted abre con $1000.00 una cuenta bancaria que paga el 5.6% compuesto en forma continua. Después de 1 año, ¿tendrá el dinero suficiente para comprar un sistema de cómputo que cuesta $1060.00? Si otro banco le paga un 5.9% compuesto mensualmente, ¿será mejor invertir ahí el dinero?

44. El primero de enero usted compra por $1000.00 un certificado de depósito que paga el 6.8% compuesto en forma continua, y que vence en 3 meses. Después coloca los $1000.00 y el interés devengado en una cuenta que paga un 5.25% compuesto mensualmente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta el primero de mayo?

45. Usted invierte $2000.00 en un bono que paga el 9% de interés compuesto en forma semestral. Un amigo suyo invierte $2000.00 en un certificado de depósito que paga un 8.5% compuesto en forma continua. ¿Quién tendrá más dinero después de 20 años, usted o su amigo?

46. Suponga que tiene acceso a una inversión que paga el 10% de interés compuesto en forma continua. ¿Qué será mejor: recibir $1000.00 en este momento para aprovechar esta oportunidad de inversión o recibir $1325.00 dentro de 3 años?

47. Usted acaba de adquirir una casa por $150,000.00, la cual tiene una hipoteca de $50,000.00, y se compromete a pagarle al vendedor $50,000.00 más el interés acumulado en 5 años a partir de ahora. El vendedor le ofrece tres opciones de interés sobre la hipoteca:

(a) Interés simple al 12% anual. (b) 11.5 % de interés compuesto mensualmente.
(c) 11.25% de interés compuesto en forma continua.

¿Cuál opción es mejor? Es decir, ¿cuál produce el menor interés sobre el préstamo?

48. Un banco anuncia que paga intereses en cuentas de ahorro a una tasa del 4.25% compuesto en forma diaria. Determine la tasa efectiva si el banco utiliza (a) 360 días o (b) 365 días para calcular la tasa diaria.

Los problemas del 49 al 52 se relacionan con bonos cupón cero. Un bono cupón cero *es el que se adquiere ahora con descuento y pagará el valor marcado en cierta fecha futura, cuando se venza; no hay pagos por interés.*

49. Un bono cupón cero se puede hacer efectivo en 20 años por $10,000.00. ¿Cuánto dinero estaría dispuesto a pagar por él ahora si desea tener un rendimiento del:

(a) 10% compuesto mensualmente? (b) ¿10% compuesto en forma continua?

50. Los abuelos de una niña están pensando en adquirir un bono con un valor nomimal de $40,000.00 en la fecha de su nacimiento, de modo que ella tenga el dinero suficiente para su educación universitaria, 17 años después. Si la inflación anual es del 8%, ¿cuánto deben pagar por el bono?

51. ¿En cuánto dinero debe venderse ahora un bono cupón cero con un valor nominal de $10,000.00, con vencimiento en 10 años, si su tasa de rendimiento debe ser del 8% compuesto anualmente?

52. Si usted paga $12,485.52 por un bono cupón cero con valor nominal de $25,000.00 y que vence en 8 años, ¿cuál es tasa anual de rendimiento?

53. Explique con sus propias palabras lo que se entiende por *interés compuesto* y *composición continua.*

54. Explique con sus propias palabras el significado del concepto de valor presente.

55. Escriba un programa que calcule el valor de una inversión monto después de n años cuando se invierte un capital P al r % anual, compuesto en forma trimestral, y utilícelo para verificar sus respuestas a los problemas 1 y 3.

56. Escriba un programa que calcule el capital necesario ahora para obtener la cantidad A después de n años al r % anual, compuesto en forma diaria, y utilícelo para verificar su respuesta al problema 13.

57. Escriba un programa que calcule la tasa de interés anual necesaria para duplicar una inversión en n años. Utilícelo para verificar su respuesta a los problemas 23 y 24.

58. Escriba un programa que calcule el número de meses necesarios para que una inversión inicial de x dólares crezca hasta y dólares al r % anual compuesto en forma continua. Utilícelo para verificar su respuesta a los problemas 33 y 34.

59. *Tiempo para duplicar o triplicar una inversión* La fórmula

$$y = \frac{\ln m}{n \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$$

permite determinar el número de años y necesarios para multiplicar una inversión m veces, cuando r es la tasa de interés anual compuesta n veces al año.

(a) ¿Cuántos años se necesitan para duplicar el valor de una cuenta de retiro compuesta en forma anual con una tasa del 12%?

(b) ¿Cuántos años se necesitan para triplicar el valor de una cuenta de ahorro compuesta en forma trimestral con una tasa anual del 6%?

(c) Deduzca esta fórmula.

60. *Tiempo para alcanzar una meta de inversión* La fórmula

$$y = \frac{\ln A - \ln P}{r}$$

permite determinar el número de años y necesarios para que una inversión P crezca hasta un valor A compuesto en forma continua a una tasa anual r.

(a) ¿Cuánto tiempo tardará una inversión inicial de $1000.00 en crecer hasta $8000.00 a una tasa anual del 10%?

(b) ¿Cuál es la tasa anual necesaria para incrementar el valor de una cuenta de retiro de $2000.00 hasta $30,000.00 en 35 años?

(c) Deduzca esta fórmula.

61. *Pensamiento crítico.* Usted acaba de firmar un contrato para adquirir una casa y busca financiamiento por la cantidad de $100,000.00, para lo cual acude a varios bancos. El banco 1 le presta $100,000.00 a una tasa del 8.75% amortizado en 30 años con una cuota inicial sobre el préstamo del 1.75%. El banco 2 le presta $100,000.00 a una tasa del 8.375% amortizado en 15 años con una cuota inicial sobre el préstamo del 1.5%. El banco 3 le presta $100,000.00 a una tasa del 9.125% amortizado en 30 años sin cuota inicial sobre el préstamo. El banco 4 le presta $100,000.00 a una tasa del 8.625% amortizado en 15 años, también sin cuota inicial. ¿Cuál es el préstamo que contratará? ¿Por qué? Asegúrese de tener buenas razones para hacer su elección. Si el monto del pago mensual no le preocupa, ¿cuál préstamo elegirá? De nuevo, hágase de buenas razones para su elección. Utilice la información de la tabla siguiente como ayuda. Compare su decisión final con las decisiones de sus condiscípulos; analice algunas y escriba sus impresiones.

	PAGO MENSUAL	CUOTA INICIAL DEL PRÉSTAMO
Banco 1	$786.70	$1750.00
Banco 2	$977.42	$1500.00
Banco 3	$813.63	$0.00
Banco 4	$990.68	$0.00

4.6 Crecimiento y decaimiento

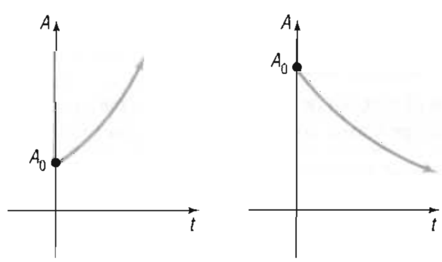
Muchos fenómenos naturales siguen la ley de que una cantidad A varía con el tiempo t según la fórmula

$$A = A_0 e^{kt} \qquad (1)$$

donde A_0 es la cantidad original ($t = 0$) y $k \neq 0$ es una constante.

Si $k > 0$, entonces la ecuación (1) establece que la cantidad A aumenta con el tiempo; si $k < 0$, la cantidad A disminuye con el tiempo. En ambos casos, cuando una cantidad A varía con el tiempo de acuerdo con la ecuación (1), obedece la **ley exponencial** o **ley del crecimiento** ($k > 0$) **o decaimiento** ($k < 0$) **no inhibido.** *Véase* la figura 18.

FIGURA 18



(a) $A = A_0 e^{kt}, k > 0$ **(b)** $A = A_0 e^{kt}, k < 0$

Por ejemplo, en la sección 4.5 vimos que el interés compuesto en forma continua sigue la ley del crecimiento no inhibido. En esta sección veremos otros tres fenómenos que obedecen a esta ley exponencial.

Biología

La **mitosis,** o división celular, es un proceso universal indispensable en el crecimiento de los organismos vivos como las amibas, plantas, células humanas y muchas otras. Con base en una situación ideal donde no mueren células ni hay efectos colaterales, el número de células presentes en un instante dado obedece la ley del crecimiento no inhibido. Sin embargo, en la realidad, después de cierto tiempo el crecimiento en forma exponencial cesa debido a la influencia de factores como la carencia de espacio, la disminución de la fuente alimenticia, etc. La ley del crecimiento no inhibido sólo refleja de manera exacta las primeras etapas del proceso de mitosis.

El proceso de mitosis comienza con un cultivo de N_0 células donde cada célula crece durante cierto periodo y después se divide en dos células idénticas. Suponemos que el tiempo necesario para que cada célula se divida en dos es constante y que no cambia al aumentar el número de células. Después, estas células crecen y se dividen en dos, y así sucesivamente.

Una fórmula que proporciona el número N de células en el cultivo después de transcurrir un tiempo t (en las primeras etapas de crecimiento) es

Crecimiento no inhibido de células

$$N(t) = N_0 e^{kt} \qquad k > 0 \tag{2}$$

donde k es una constante positiva.

Al modelar el crecimiento de las células mediante la ecuación (2) utilizamos una función que proporciona números reales positivos, aunque estemos contando el número de células el cual debe ser un entero. Esta es una práctica común en muchas aplicaciones.

EJEMPLO 1 *Crecimiento exponencial*

Una colonia de bacterias crece de acuerdo con la ley del crecimiento no inhibido. Si la cantidad de bacterias se duplica en 3 horas, ¿cuánto tiempo tardará la colonia en triplicar su número?

Solución Utilizamos la fórmula (2); el número N de células en un instante t es

$$N(t) = N_0 e^{kt}$$

donde N_0 es la cantidad inicial de bacterias presentes y k un número positivo. Primero determinaremos el número k. La cantidad de células se duplica en 3 horas; así, tenemos

$$N(3) = 2N_0$$

Pero $N(3) = N_0 e^{k(3)}$, de modo que

$$\begin{aligned} N_0 e^{k(3)} &= 2N_0 \\ e^{3k} &= 2 \\ 3k &= \ln 2 \quad \text{Escribimos la ecuación exponencial como un logaritmo.} \\ k &= \tfrac{1}{3}\ln 2 \approx \tfrac{1}{3}(0.6931) = 0.2310 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula (2) para este proceso de crecimiento es

$$N(t) = N_0 e^{0.2310t}$$

El tiempo t necesario para que el tamaño de la colonia se triplique requiere que $N = 3N_0$. Así, sustituimos $3N_0$ en vez de N para obtener

$$\begin{aligned} 3N_0 &= N_0 e^{0.2310t} \\ 3 &= e^{0.2310t} \\ 0.2310t &= \ln 3 \\ t &= \frac{1}{0.2310}\ln 3 \approx \frac{1.0986}{0.2310} = 4.756 \text{ horas} \end{aligned}$$

Se necesitan cerca de 4.756 horas para que el tamaño de la colonia se triplique. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Decaimiento radiactivo

Los materiales radiactivos obedecen la ley del decaimiento no inhibido. Así, la cantidad A de un material radiactivo presente en el instante t está dada por la fórmula

Decaimiento radiactivo no inhibido

$$A = A_0e^{kt} \qquad k < 0 \tag{3}$$

donde A_0 es la cantidad original de material radiactivo y k un número negativo.

Todas las sustancias radiactivas tienen una **vida media** específica, la cual es el tiempo necesario para que la mitad de la sustancia radiactiva desaparezca (decaiga). En el **fechado por carbono** se utiliza el hecho de que todos los organismos vivientes tienen dos tipos de carbono, el carbono–12 (un elemento estable) y el carbono 14 (un elemento radiactivo con vida media de 5600 años). Cuando un organismo está vivo la proporción entre el carbono–12 y el 14 es constante; pero al morir, la cantidad total de carbono–12 presente permanece sin alteración, mientras que la cantidad de carbono–14 comienza a disminuir. Esta variación permite calcular la edad de los restos de organismos vivientes.

EJEMPLO 2

Estimación de la edad de herramientas antiguas

Restos de madera quemada, hallados junto con antiguas herramientas de piedra en un sitio arqueológico en Chile, contienen 1.67% de la cantidad original de carbono–14. Si la vida media del carbono–14 es de 5600 años, ¿aproximadamente cuándo se cortó y quemó el árbol?

Solución Utilizamos la ecuación (3); la cantidad A de carbono–14 presente en el instante t es

$$A = A_0e^{kt}$$

donde A_0 es la cantidad original de carbono–14 presente y k un número negativo. Primero determinaremos el número k. Para ello utilizamos el hecho de que después de 5600 años, se conserva la mitad de la cantidad original del carbono–14. Así,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}A_0 &= A_0e^{k(5600)} \\ \frac{1}{2} &= e^{5600k} \\ 5600k &= \ln \frac{1}{2} \\ k &= \frac{1}{5600} \ln \frac{1}{2} \approx -0.000124 \end{aligned}$$

Entonces, la fórmula (3) queda como

$$A = A_0e^{-0.000124t}$$

Si la cantidad A de carbono–14 presente en la actualidad es 1.67% de la cantidad original, entonces

$$\begin{aligned} 0.0167A_0 &= A_0e^{-0.000124t} \\ 0.0167 &= e^{-0.000124t} \\ -0.000124t &= \ln 0.0167 \\ t &= \frac{1}{-0.000124} \ln 0.0167 \approx 33{,}000 \text{ años} \end{aligned}$$

El árbol fue cortado y quemado hace 33,000 años aproximadamente. Algunos arqueólogos utilizan esta conclusión para afirmar que un grupo humano vivió en América hace 33,000 años, mucho antes de lo generalmente aceptado. ■

■ Ahora resuelva el problema 3.

Ley del enfriamiento de Newton

La **ley del enfriamiento de Newton*** establece que la temperatura de un objeto caliente disminuye en forma exponencial con el tiempo hacia la temperatura del ambiente. Es decir, la temperatura u de un objeto caliente en un instante t satisface la ecuación

Ley del enfriamiento de Newton

$$u = T + (u_0 - T)e^{kt} \qquad k < 0 \tag{4}$$

donde T es la temperatura constante del ambiente, u_0 la temperatura inicial del objeto caliente y k un número negativo.

EJEMPLO 3 *Uso de la ley del enfriamiento de Newton*

Un objeto se calienta a 100°C y después se deja enfriar en un cuarto cuya temperatura del aire es de 30°C. Si la temperatura del objeto es de 80°C después de 5 minutos, ¿en qué momento llegará a 50°C?

Solución Utilizamos la ecuación (4) con $T = 30$ y $u_0 = 100$, la temperatura (en grados Celsius) del objeto en el instante t (en minutos) es

$$u = 30 + (100 - 30)e^{kt} = 30 + 70e^{kt} \tag{5}$$

donde k es un número negativo. Para determinar k utilizamos el hecho de que $u = 80$ cuando $t = 5$. Entonces

$$\begin{aligned} 80 &= 30 + 70e^{k(5)} \\ 50 &= 70e^{5k} \\ e^{5k} &= \frac{50}{70} \\ 5k &= \ln\frac{5}{7} \\ k &= \frac{1}{5}\ln\frac{5}{7} \approx -0.0673 \end{aligned}$$

Así, la fórmula (5) se escribe

$$u = 30 + 70e^{-0.0673t}$$

*Recibe el nombre de Isaac Newton (1642–1727), uno de los cofundadores del cálculo.

Ahora determinemos t cuando $u = 50°\text{C}$, de modo que

$$\begin{aligned} 50 &= 30 + 70e^{-0.0673t} \\ 20 &= 70e^{-0.0673t} \\ e^{-0.0673t} &= \frac{20}{70} \\ -0.0673t &= \ln \frac{2}{7} \\ t &= \frac{1}{-0.0673} \ln \frac{2}{7} \approx 18.6 \text{ minutos} \end{aligned}$$

Así, la temperatura del objeto será de 50°C a los 18.6 minutos, aproximadamente.

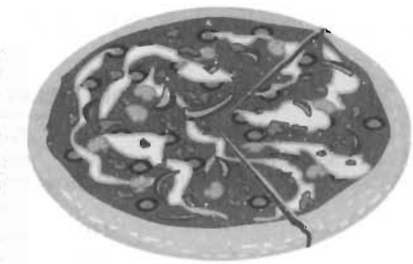
Verificación: haga la gráfica de $y = 30 + 70e^{-0.0673x}$ y utilice TRACE para verificar que $x = 18.6$ cuando $y = 50$.

Investigación: ¿cuánto vale y cuando $x = 30$ minutos? ¿Cuándo ocurre que $y = 35°\text{C}$? ¿Cuándo ocurre que $y = 30°\text{C}$?

4.6

Ejercicio 4.6

1. *Crecimiento de una población de insectos.* El tamaño P de cierta población de insectos en el instante t (en días) obedece la ecuación $P = 500e^{0.02t}$. ¿Después de cuántos días llegará la población a 1000? ¿Y a 2000?
2. *Crecimiento de bacterias.* El número N de bacterias presentes en un cultivo en el instante t (en horas) obedece la ecuación $N = 1000e^{0.01t}$. ¿Después de cuántas horas llegará ese número a 1500? ¿Y a 2000?
3. *Decaimiento radiactivo.* El estroncio–90 es un material radiactivo que disminuye de acuerdo con la ley $A = A_0e^{-0.0244t}$, donde A_0 es la cantidad inicial y A la cantidad presente en el instante t (en años). ¿Cuál es la vida media del estroncio–90?
4. *Decaimiento radiactivo.* El iodo–131 es un material radiactivo que disminuye de acuerdo con la ley $A = A_0e^{-0.087t}$, donde A_0 es la cantidad inicial y A la cantidad presente en el instante t (en días). ¿Cuál es la vida media del iodo–131?
5. Utilice la información del problema 3 para determinar el tiempo que tardan 100 gramos de estroncio–90 en disminuir hasta 10 gramos.
6. Utilice la información del problema 4 para determinar el tiempo que tardan 100 gramos de iodo–131 en disminuir hasta 10 gramos.
7. *Crecimiento de una colonia de mosquitos.* La población de una colonia de mosquitos obedece la ley del crecimiento no inhibido. Si en un principio existen 1000 mosquitos y después de 1 día hay 1800, ¿cuál será el tamaño de la colonia después de 3 días? ¿Cuánto tiempo pasará hasta que haya 10,000 mosquitos?
8. *Crecimiento bacterial.* Un cultivo de bacterias obedece la ley del crecimiento no inhibido. Si en un principio existen 500 bacterias y después de 1 hora hay 800, ¿cuántas bacterias habrá después de 5 horas? ¿Cuánto tiempo pasará hasta que haya 20,000 bacterias?
9. *Crecimiento poblacional.* La población de una ciudad obedece la ley exponencial. Si la población duplica su tamaño en un periodo de 18 meses y actualmente hay 10,000 habitantes, ¿cuánta será dentro de 2 años?
10. *Crecimiento poblacional.* La población de una ciudad obedece la ley exponencial. Si disminuye de 900,000 a 800,000 entre 1993 y 1995, ¿cuánta será la población en 1997?
11. *Decaimiento radiactivo.* La vida media del radio es de 1690 años. Si actualmente existen 10 gramos, ¿qué cantidad habrá dentro de 50 años?
12. *Decaimiento radiactivo.* La vida media del potasio radiactivo es de 1.3 miles de millones de años. Si actualmente existen 10 gramos, ¿qué cantidad habrá dentro de 100 años? ¿Y en 1000 años?
13. *Estimación de la edad de un árbol.* Se determina que un pedazo de carbón tiene el 30% del carbono–14 que tenía originalmente. ¿Cuándo murió el árbol de dónde provino ese carbón? Utilice 5600 años como la vida media del carbono–14.
14. *Estimación de la edad de un fósil.* Una hoja fosilizada contiene el 70% de la cantidad normal de carbono–14. ¿Qué antigüedad tiene este fósil?



15. *Tiempo de enfriamiento de una pizza.* Una pizza horneada a 450°F se retira del horno a las 5:00 p.m. en un cuarto que tiene una temperatura constante de 70°F. Después de 5 minutos la pizza está a 300°F. ¿En qué momento podrá comenzar a comer la pizza si desea que esté a 135°F?

16. Un termómetro con una lectura de 72°F se introduce en un refrigerador que tiene una temperatura constante de 38°F. Si el termómetro marca 60°F después de 2 minutos, ¿cuál será su lectura después de 7 minutos? ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el termómetro mida 39°F?

17. Un termómetro con una lectura de 8°C se lleva a un cuarto que tiene una temperatura constante de 35°C. Si el termómetro marca 15°C después de 3 minutos, ¿cuál será su lectura luego de estar en el cuarto 5 minutos? ¿Y después de 10 minutos? [*Sugerencia*: Construya una fórmula similar a la ecuación (4).]

18. *Tiempo de descongelamiento de una carne.* Una carne congelada a 28°F se coloca en un cuarto que tiene una temperatura constante de 70°F. Después de 10 minutos la temperatura de la carne ha subido a 35°F. ¿Cuál será su temperatura luego de 30 minutos? ¿Cuánto tiempo tardará la carne en alcanzar los 45°F? [*Véase* la sugerencia dada para el problema 17.]

19. *Descomposición de la sal en el agua.* La sal (NaCl) se descompone en el agua en iones de sodio (NA^+) y cloruro (Cl^-) según la ley del decaimiento no inhibido. Si una cantidad inicial de sal son 25 kilogramos y después de 10 horas quedan 15, ¿cuánta sal habrá después de 1 día? ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que haya solo 1/2 kilogramo de sal?

20. *Voltaje de un condensador.* El voltaje de cierto condensador disminuye con el tiempo según la ley del decaimiento no inhibido. Si el voltaje inicial es de 40 voltios y 2 segundos después hay 10 voltios, ¿cuál es el voltaje luego de 5 segundos?

21. *Radiactividad de Chernobyl.* Después del escape de material radiactivo de la planta nuclear de Chernobyl (Ucrania) en 1986, el heno de Austria fue contaminado por iodo–131 (*véase* el problema 4). Si es conveniente alimentar al ganado con ese heno sólo cuando en él reste un 10% del iodo–131, ¿cuánto tiempo deben esperar los granjeros para poder utilizarlo?

22. *Carne asada.* El hotel Bora-Bora ofrece un servicio de barbacoa. A mediodía el cocinero coloca la carne en un gran horno dentro de la tierra. La temperatura original de la carne era 75°F pero a las 2:00 p.m. que se verificó sólo había llegado a los 100°F. Si la temperatura del horno es constante e igual a 325°F, ¿en qué momento podrá servirse la carne si su temperatura ideal es a los 175°F?

4.7 Escalas logarítmicas

Los logaritmos comunes aparecen con frecuencia al medir cantidades, pues proporcionan una forma de establecer escalas de números positivos que van desde muy pequeños hasta muy grandes. Por ejemplo, si cierta cantidad puede tomar valores desde $0.0000000001 = 10^{-10}$ hasta $10{,}000{,}000{,}000 = 10^{10}$, los logaritmos comunes de tales números se encontrarán entre -10 y 10.

Volumen del sonido

Nuestra primera aplicación utiliza una escala logarítmica para medir el volumen de un sonido. Los físicos definen la **intensidad de una onda sonora** como la cantidad de energía transmitida por la onda a través de un área dada. Por ejemplo, la menor intensidad que un oído humano puede detectar a una frecuencia de 100 hertzios es cercana a los 10^{-12} vatios por metro cuadrado. El **volumen** $L(x)$, medido en **decibeles** (en honor de Alexander Graham Bell), de un sonido con intensidad x (medida en vatios por metro cuadrado) es

Volumen

$$L(x) = 10 \log \frac{x}{I_0} \qquad (1)$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado es el sonido menos intenso que puede detectar un oído humano. Si $x = I_0$ en la ecuación (1), obtenemos

$$L(I_0) = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0$$

Así, en el umbral de audibilidad humana el volumen es de cero decibeles. La figura 19 proporciona el volumen de algunos sonidos comunes.

FIGURA 19 Volumen de sonidos comunes (en decibeles)

DECIBELES		
140	Disparo de una pistola, jet a 100 pies al despegar.	Dolor
130	Cámara de pruebas de un motor.	Umbral de dolor del oído humano
120	Petardos, truenos fuertes, martillo neumático, multitud gritando en un estadio.	Volumen incómodo
110	Música de rock amplificada.	
100	Telar, tren subterráneo, tren elevado, tractor, cortadora de pasto, prensa de periódico.	Volumen alto
90	Tráfico intenso, fábrica con mucho ruido.	
80	Camión diesel a 40 millas por hora y 50 pies de distancia, restaurante con mucha gente, procesador de basura fábrica promedio, aspiradora.	Volumen moderado
70	Auto de pasajeros a 50 millas por hora y 50 pies de distancia.	
60	Máquina de escribir silenciosa, pájaros cantando, aire acondicionado, auto silencioso.	Tranquilo
50	Conversación normal, oficina promedio.	
40	Refrigerador casero, oficina tranquila.	Muy tranquilo
30	Casa promedio, llave de agua goteando, susurro a 5 pies.	
20	Lluvia ligera, sonido de las hojas de un árbol	Umbral de audibilidad de una persona promedio
10	Susurro a través del cuarto	Apenas audible
0		Umbral para el oído agudo

Observe que un decibel no es una unidad lineal como el metro. Por ejemplo, un nivel sonoro de 10 decibeles es 10 veces más sonoro que uno de cero decibeles. [Si $L(x) = 10$, entonces $x = 10I_0$.] Un nivel sonoro de 20 decibeles es 100 veces mayor que uno de 10 decibeles. [Si $L(x) = 20$, entonces $x = 100I_0$.] Un nivel de 30 decibeles es 1000 veces mayor que uno de cero decibeles, etcétera.

EJEMPLO 1 *Determinación de la intensidad de un sonido*

Utilice la figura 19 para determinar la intensidad del sonido en el caso de una llave de agua que gotea.

Solución Por la figura 19, vemos que el volumen del sonido que nos ocupa es de 30 decibeles. Así, por la ecuación (1), podemos determinar su intensidad x como sigue:

$$30 = 10\log\left(\frac{x}{I_0}\right)$$

$$3 = \log\left(\frac{x}{I_0}\right) \qquad \text{Dividir por 10.}$$

$$\frac{x}{I_0} = 10^3 \qquad \text{Escribimos en forma exponencial.}$$

$$x = 1000I_0$$

donde $I_0 = 10^{-12}$ vatios por metro cuadrado. Así, la intensidad de ese sonido es 1000 veces mayor que un nivel de cero decibeles; es decir, una llave de agua que gotea produce un sonido con intensidad de $1000 \cdot 10^{-12} = 10^{-9}$ vatios por metro cuadrado. ■

■ Ahora resuelva el problema 5.

EJEMPLO 2 *Determinación del volumen de un sonido*

Utilice la figura 19 para determinar el volumen del sonido de un tren subterráneo; se sabe que este sonido es 10 veces más intenso que el debido al tráfico citadino en horas "pico".

Solución El sonido de un tráfico intenso tiene un volumen de 90 decibeles. Por lo tanto, su intensidad es el valor x en la ecuación

$$90 = 10 \log\left(\frac{x}{I_0}\right)$$

Un sonido 10 veces más intenso que x tendrá un volumen $L(10x)$. Así, el volumen del tren subterráneo es

$$\begin{aligned}
L(10x) &= 10 \log\left(\frac{10x}{I_0}\right) && \text{Reemplazamos } x \text{ por } 10x\\
&= 10 \log\left(10 \cdot \frac{x}{I_0}\right)\\
&= 10\left[\log 10 + \log\left(\frac{x}{I_0}\right)\right] && \text{El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos.}\\
&= 10 \log 10 + 10 \log\left(\frac{x}{I_0}\right) && \log 10 = 1.\\
&= 10 + 90 = 100 \text{ decibeles}
\end{aligned}$$

Magnitud de un terremoto

Nuestra segunda aplicación utiliza una escala logarítmica para medir la magnitud de un terremoto.

La **escala de Richter*** es una forma de convertir las lecturas sismográficas en números que proporcionen una referencia sencilla para medir la magnitud M de un terremoto. Todos los terremotos se comparan con un **terremoto de nivel cero** cuya lectura sismográfica mide 0.001 de milímetro a una distancia de 100 kilómetros del epicentro. Un terremoto cuya lectura sismográfica mide x milímetros tiene una **magnitud** $M(x)$ dada por

Magnitud de un terremoto

$$M(x) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right) \tag{2}$$

donde $x_0 = 10^{-3}$ es la lectura de un terremoto de nivel cero a la misma distancia del epicentro.

EJEMPLO 3 *Determinación de la magnitud de un terremoto*

¿Cuál es la magnitud de un terremoto cuya lectura sismográfica es de 0.1 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro?

Solución Si $x = 0.1$, la magnitud $M(x)$ de este terremoto es

$$M(0.1) = \log\left(\frac{x}{x_0}\right) = \log\left(\frac{0.1}{0.001}\right) = \log\left(\frac{10^{-1}}{10^{-3}}\right) = \log 10^2 = 2$$

El terremoto mide entonces 2.0 en la escala de Richter.

Ahora resuelva el problema 7.

*Recibe el nombre del científico norteamericano, C.F. Richter, quien la diseñó en 1935.

Con base en la fórmula (2), definimos la **intensidad de un terremoto** como la proporción entre x y x_0. Por ejemplo, la intensidad del terremoto descrito en el ejemplo 3 es $\frac{0.1}{0.001} = 10^2 = 100$. Es decir, 100 veces más intenso que un terremoto de nivel cero.

EJEMPLO 4 *Comparación de la intensidad de dos terremotos*

El devastador terremoto de San Francisco en 1906 midió 8.9 en la escala de Richter. ¿Cómo se compara ese terremoto con el de Papúa, Nueva Guinea, en 1988, que midió 6.7 en la escala de Richter?

FIGURA 20

Solución Sean x_1 y x_2 las lecturas sismográficas respectivas de los terremotos de San Francisco y Papúa, Nueva Guinea. Entonces, con base en la fórmula (2),

$$8.9 = \log\left(\frac{x_1}{x_0}\right) \qquad 6.7 = \log\left(\frac{x_2}{x_0}\right)$$

En consecuencia,

$$\frac{x_1}{x_0} = 10^{8.9} \qquad \frac{x_2}{x_0} = 10^{6.7}$$

El terremoto de San Francisco fue $10^{8.9}$ veces más intenso que uno de nivel cero. El terremoto de Papúa, Nueva Guinea fue $10^{6.7}$ veces más intenso que uno de nivel cero. Así,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{10^{8.9}x_0}{10^{6.7}x_0} = 10^{2.2} \approx 158$$

$$x_1 \approx 158x_2$$

Por lo tanto, el terremoto de San Francisco fue 158 veces más intenso que el de Papúa, Nueva Guinea.

El ejemplo 4 muestra que la intensidad relativa de dos terremotos se puede determinar elevando 10 a una potencia igual a la diferencia de sus lecturas en la escala de Richter.

4.7

Ejercicio 4.7

1. *Volumen del sonido de una lavadora de loza.* Determine el volumen del sonido de una lavadora de loza que opera con una intensidad de 10^{-5} vatios por metro cuadrado. Exprese su respuesta en decibeles.
2. *Volumen del sonido de un motor diesel.* Determine el volumen del sonido de un motor diesel que opera con una intensidad de 10^{-3} vatios por metro cuadrado. Exprese su respuesta en decibeles.

3. *Volumen del sonido del motor de un jet.* Con los motores trabajando a toda su capacidad, un jet Boeing 727 produce ruido con una intensidad de 0.15 vatios por metro cuadrado. Determine el volumen del sonido de los motores en decibeles.

4. *Volumen del sonido de un susurro.* Un susurro produce un sonido con una intensidad de $10^{-9.8}$ vatios por metro cuadrado. ¿Cuál será su volumen en decibeles?

5. *Intensidad del sonido en el umbral del dolor.* Para los humanos, el umbral del dolor debido al sonido promedia 130 decibeles. ¿Cuál es la intensidad de dicho sonido en vatios por metro cuadrado?

6. Si un sonido es 50 veces más intenso que otro, ¿cuál es la diferencia en el volumen de ambos? Exprese su respuesta en decibeles.

7. *Magnitud de un terremoto.* Determine la magnitud de un terremoto cuya lectura sismográfica es de 10.0 milímetros a una distancia de 100 kilómetros del epicentro.

8. *Magnitud de un terremoto.* Determine la magnitud de un terremoto cuya lectura sismográfica es de 1210 milímetros a 100 kilómetros del epicentro.

9. *Comparación de terremotos.* El terremoto de la Ciudad de México en 1978 registró 7.85 en la escala de Richter. ¿Cuánto habrá medido un sismógrafo situado a 100 kilómetros del epicentro durante este terremoto? ¿Cómo se compara la intensidad de este terremoto con el de San Francisco en 1906, el cual registró 8.9 en la escala de Richter?

10. *Comparación de terremotos.* Dos terremotos difieren en 1.0 al ser medidos en la escala de Richter. ¿En cuánto diferirán sus lecturas sismográficas a una distancia de 100 kilómetros del epicentro? ¿Cómo se relacionan sus intensidades?

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Propiedades de la función exponencial

$f(x) = a^x$, $a > 1$ — Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; intersecciones-x: ninguna; intersección-y: 1; asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to -\infty$; creciente; uno a uno.
Véase la figura 3 para apreciar una gráfica típica.

$f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ — Dominio: $(-\infty, \infty)$; rango: $(0, \infty)$; intersecciones-x: ninguna; intersección-y: 1; asíntota horizontal: eje x, cuando $x \to \infty$; decreciente; uno a uno.
Véase la figura 5 para una gráfica típica.

Propiedades de la función logarítmica

$f(x) = \log_a x$, $a > 1$ ($y = \log_a x$ significa $x = a^y$) — Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; intersección-x: 1; intersección-y: ninguna; asíntota vertical: eje y; creciente; uno a uno.
Véase la figura 10(b) para apreciar una gráfica típica.

$f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$ ($y = \log_a x$ significa $x = a^y$) — Dominio: $(0, \infty)$; rango: $(-\infty, \infty)$; intersección-x: 1; intersección-y: ninguna; asíntota vertical: eje y; decreciente; uno a uno.
Véase la figura 10(a) para apreciar una gráfica típica.

Número e

Valor al que tiende la expresión $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando $n \to \infty$; es decir, $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Logaritmo natural

$y = \ln x$ significa que $x = e^y$

Propiedades de los logaritmos

$\log_a 1 = 0$ $\quad \log_a a = 1$ $\quad a^{\log_a M} = M$ $\quad \log_a a^r = r$

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$ $\quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$ $\quad \log_a\left(\frac{1}{N}\right) = -\log_a N$ $\quad \log_a M^r = r \log_a M$

FÓRMULAS

Fórmula para el cambio de base	$\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$
Interés compuesto	$A = P\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$
Composición continua	$A = Pe^{rt}$
Valor presente	$P = A\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{-nt}$ o $P = Ae^{-rt}$
Crecimiento y decaimiento	$A = A_0 e^{kt}$

CÓMO HACER PARA

Hacer las gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas.
Resolver ciertas ecuaciones exponenciales.
Resolver ciertas ecuaciones logarítmicas.
Solucionar problemas de interés compuesto.
Resolver problemas de crecimiento y decaimiento.
Resolver problemas de intensidad del sonido y de terremotos.

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. La gráfica de toda función exponencial $f(x) = a^x$, con a mayor que cero y distinta de 1, pasa por los dos puntos __________.
2. Si la gráfica de una función exponencial $f(x) = a^x$, con a mayor que cero y distinta de 1, es decreciente, entonces su base debe ser menor que __________.
3. Si $3^x = 3^4$, entonces $x =$ __________.
4. El logaritmo de un producto es igual a __________ de los logaritmos.
5. Para cualquier base, el logaritmo de __________ es igual a 0.
6. Si $\log_8 M = \log_5 7 / \log_5 8$, entonces $M =$ __________.
7. El dominio de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ consta de __________.
8. La gráfica de toda función logarítmica $f(x) = \log_a x$, con a mayor que cero y distinta de 1, pasa por los dos puntos __________.
9. Si la gráfica de una función logarítmica $f(x) = \log_a x$, siendo a mayor que cero y distinta de 1, es creciente, entonces su base debe ser mayor que __________.
10. Si $\log_3 x = \log_3 7$, entonces $x =$ __________.

CIERTO O FALSO

C F 1. La gráfica de toda función exponencial $f(x) = a^x$, con a mayor que cero y distinta de 1, contiene los puntos $(0,1)$ y $(1, a)$.

C F 2. Las gráficas de $y = 3^{-x}$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ son idénticas.

C F 3. El valor presente de \$1000.00 a ser recibidos después de 2 años al 10% anual compuesto en forma continua, es aproximadamente de \$1205.00.

C F 4. Si $y = \log_a x$, entonces $y = a^x$.

C F 5. La gráfica de toda función logarítmica $f(x) = \log_a x$, con a mayor que cero y distinta de 1, contiene los puntos $(1,0)$ y $(a,1)$.

C F **6.** $a^{\log_M a} = M$, donde $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$

C F **7.** $\log_a(M + N) = \log_a M + \log_a N$, donde $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$

C F **8.** $\log_a M - \log_a N = \log_a(M/N)$, donde $a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 6 evalúe cada expresión.

1. $\log_2(\frac{1}{8})$ **2.** $\log_3 81$ **3.** $\ln e^{\sqrt{2}}$ **4.** $e^{\ln 0.1}$ **5.** $2^{\log_2 0.4}$ **6.** $\log_2 2^{\sqrt{3}}$

En los problemas del 7 al 12, escriba cada expresión como un único logaritmo.

7. $3 \log_4 x^2 + \frac{1}{2} \log_4 \sqrt{x}$

8. $-2 \log_3\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3} \log_3 \sqrt{x}$

9. $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) - \ln(x^2 - 1)$

10. $\log(x^2 - 9) - \log(x^2 + 7x + 12)$

11. $2 \log 2 + 3 \log x - \frac{1}{2} [\log(x + 3) + \log(x - 2)]$

12. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 4 \ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}[\ln(x - 4) + \ln x]$

En los problemas del 13 al 20, determine a y como una función de x. La constante C es un número positivo.

13. $\ln y = 2x^2 + \ln C$

14. $\ln(y - 3) = \ln 2x^2 + \ln C$

15. $\frac{1}{2} \ln y = 3x^2 + \ln C$

16. $\ln 2y = \ln(x + 1) + \ln(x + 2) + \ln C$

17. $\ln(y - 3) + \ln(y + 3) = x + C$

18. $\ln(y - 1) + \ln(y + 1) = -x + C$

19. $e^{y+C} = x^2 + 4$

20. $e^{3y-C} = (x + 4)^2$

En los problemas del 21 al 30 haga la gráfica de cada función. Inicie cada problema con la gráfica de $y = e^x$ o con la de $y = \ln x$.

21. $f(x) = e^{-x}$ **22.** $f(x) = \ln(-x)$ **23.** $f(x) = 1 - e^x$ **24.** $f(x) = 3 + \ln x$

25. $f(x) = 3e^x$ **26.** $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$ **27.** $f(x) = e^{|x|}$ **28.** $f(x) = \ln|x|$

29. $f(x) = 3 - e^{-x}$ **30.** $f(x) = 4 - \ln(-x)$

En los problemas del 31 al 50 resuelva cada ecuación.

31. $4^{1-2x} = 2$ **32.** $8^{6+3x} = 4$ **33.** $3^{x^2+x} = \sqrt{3}$

34. $4^{x-x^2} = \frac{1}{2}$ **35.** $\log_x 64 = -3$ **36.** $\log_{\sqrt{2}} x = -6$

37. $5^x = 3^{x+2}$ **38.** $5^{x+2} = 7^{x-2}$ **39.** $9^{2x} = 27^{3x-4}$

40. $25^{2x} = 5^{x^2-12}$ **41.** $\log_3\sqrt{x - 2} = 2$ **42.** $2^{x+1} \cdot 8^{-x} = 4$

43. $8 = 4^{x^2} \cdot 2^{5x}$ **44.** $2^x \cdot 5 = 10^x$ **45.** $\log_6(x + 3) + \log_6(x + 4) = 1$

46. $\log_{10}(7x - 12) = 2 \log_{10} x$ **47.** $e^{1-x} = 5$ **48.** $e^{1-2x} = 4$

49. $2^{3x} = 3^{2x+1}$ **50.** $2^{x^3} = 3^{x^2}$

En los problemas del 51 al 54 utilice el siguiente resultado: si x es la presión atmosférica (medida en milímetros de mercurio), entonces la fórmula para la altitud h(x) (medida en metros sobre el nivel del mar) es

$$h(x) = (30T + 8000)\log\left(\frac{P_0}{x}\right)$$

donde T es la temperatura (en grados Celsius) y P_0 la presión atmosférica al nivel del mar, que es aproximadamente 760 milímetros de mercurio.

51. *Determinación de la altitud de un aeroplano.* ¿A qué altura se encuentra un avión cuyos instrumentos registran una temperatura exterior de 0°C y una presión atmosférica de 300 milímetros de mercurio?

52. *Determinación de la altitud de una montaña.* ¿Qué altura tiene una montaña si los instrumentos colocados en su cima registran una temperatura de 5°C y una presión atmosférica de 500 milímetros de mercurio?

53. *Presión atmosférica fuera de un avión.* ¿Cuál es la presión atmosférica fuera de un avión que vuela a una altitud de 10,000 metros si la temperatura del aire en el exterior es de −100°C?

54. *Presión atmosférica en grandes altitudes.* ¿Cuál es la presión atmosférica (en milímetros de mercurio) sobre el monte Everest, el cual tiene una altura aproximada de 8900 metros, si la temperatura del aire es allí de 5°C?

55. *Amplificación del sonido.* La potencia P de salida de un amplificador (en vatios) se relaciona con la ganancia de voltaje (en decibeles) d mediante la fórmula $P = 25e^{0.1d}$.

(a) Determine la potencia de salida para una ganancia de voltaje de 4 decibeles.
(b) Para una potencia de salida de 50 vatios, ¿cuál es la ganancia de voltaje?

56. *Magnitud límite de un telescopio.* Un telescopio tiene una utilidad limitada por el brillo de la estrella a la que está dirigido y por el diámetro de su lente. Una medida del brillo de una estrella es su *magnitud*: mientras más oscura sea una estrella mayor será su magnitud. Una fórmula para la magnitud límite L de un telescopio, es decir, la magnitud de la estrella más oscura que puede observarse con él, está dada por

$$L = 9 + 5.1 \log d$$

donde d es el diámetro (en pulgadas) de la lente.

(a) ¿Cuál es la magnitud límite de un telescopio de 3.5 pulgadas?
(b) ¿Cuál es el diámetro necesario para ver una estrella de magnitud 14?

57. *Demanda de un producto.* La demanda de un producto nuevo aumenta rápidamente al principio y después se nivela. El porcentaje P de compras reales del producto después de estar en el mercado durante t meses es

$$P = 90 - 80\left(\frac{3}{4}\right)^t$$

(a) ¿Cuál será el porcentaje de ventas del producto después de 5 meses?
(b) ¿Cuál será el porcentaje de ventas del producto después de 10 meses?
(c) ¿Cuál será el porcentaje máximo de ventas del producto?
(d) ¿Cuántos meses transcurrirán antes de llegar al 40% de ventas?
(e) ¿Cuántos meses transcurrirán antes de llegar al 70% de ventas?

58. *Difusión de información.* Un muestreo de cierta comunidad de 10,000 residentes deja ver que el número de residentes N que han escuchado cierta información después de m meses está dado por la fórmula

$$m = 55.3 - 6 \ln(10{,}000 - N)$$

¿Cuántos meses transcurren hasta que la mitad de la población haya escuchado acerca de cierto programa comunitario de toma de lectura gratuita de la presión sanguínea?

59. *Valor de recuperación.* El número de años n para que cierta maquinaria se deprecie hasta un valor de recuperación conocido está dado por la fórmula

$$n = \frac{\log_{10} s - \log_{10} i}{\log_{10}(1 - d)}$$

donde s es el valor de recuperación de la maquinaria, i su valor inicial y d su tasa anual de depreciación.

(a) ¿Cuántos años transcurrirán para que cierta maquinaria disminuya su valor de \$90,000.00 hasta \$10,000.00 si la tasa anual de depreciación es 0.20 (20%)?
(b) ¿Cuántos años transcurrirán para que cierta maquinaria pierda la mitad de su valor si la tasa anual de depreciación es del 15 por ciento?

60. *Fondo para educación.* Los abuelos de una niña adquieren un bono de \$10,000.00, que vence en 18 años, para su educación universitaria. Si el bono paga 4% de interés compuesto en forma semestral, ¿cuánto valdrá a su vencimiento?

61. *Fondo para educación.* Los abuelos de una niña desean adquirir un bono que vence en 18 años, para la educación universitaria de su nieta. El bono paga un 4% de interés compuesto en forma semestral. ¿Qué cantidad deben pagar por el bono para que el bono valga $85,000.00 a su vencimiento?

62. *Fondo para el retiro.* La compañía First Colonial Bankshares anuncia los siguientes planes de inversión para el retiro.

(a) Con un interés compuesto en forma continua, ¿cuál tasa anual de interés ofrecen?

(b) La compañía afirma que $4000.00 invertidos hoy tendrán un valor de $32,000.00 en 20 años. Utilice la respuesta de la parte (a) para determinar el valor real de $4000.00 en 20 años, con una composición continua.

PLANES PARA EL RETIRO

POR CADA $5000.00 DESEADOS AL VENCIMIENTO

DEPOSITE:	CON UN PLAZO DE:
$620.17	20 años
$1045.02	15 años
$1760.92	10 años
$2967.26	5 años

63. *Volumen de sonido de un procesador de basura.* Determine el volumen del sonido que produce una unidad de procesamiento de basura que opera con una intensidad de 10^{-4} vatios por metro cuadrado. Exprese su respuesta en decibeles.

64. *Comparación de terremotos.* El 9 de septiembre de 1985, los suburbios del oeste de Chicago sufrieron un leve terremoto que registró 3.0 en la escala de Richter. ¿Cómo se compara la intensidad de este terremoto con la del gran terremoto de San Francisco en 1906, que registró 8.9 en la escala de Richter?

65. *Estimación de la fecha de fallecimiento de un hombre prehistórico.* La osamenta de un hombre prehistórico encontrada en el desierto de Nuevo México tiene aproximadamente el 5% de la cantidad original de carbono–14. Si la vida media del carbono–14 es de 5600 años, ¿aproximadamente hace cuántos años murió ese hombre?

66. *Temperatura de una sartén.* Una sartén se retira del fuego a una temperatura de 450°F y se coloca en un cuarto que tiene una temperatura constante de 70°F. Después de 5 minutos, la temperatura de la sartén es de 400°F. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que su temperatura sea de 150°F?

67. En un cuarto cuya temperatura es de 70°F, ¿una pizza horneada a 450°F llegará en algún momento a los 70°F? La ley del enfriamiento de Newton parece indicar que no. ¿Qué es lo que realmente ocurre? ¿Cuáles son las hipótesis esgrimidas al utilizar la ley de Newton? Escriba un breve ensayo con sus conclusiones.

PRE

Antes

Teore
Circu
Func
Dom
Func

Pa

Este f
una c
pies s
horiz
de est
a 40
pies l
¿Cuá
barco

Capítulo 5

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de iniciar este capítulo revise los conceptos siguientes:

Teorema de Pitágoras (p. 10)
Círculo unitario (p. 65)
Funciones (p. 96)
Dominio de una función (p. 99)
Funciones pares y funciones impares (pp. 114–116)

Panorama Faro de la colina Gibb, Southampton, Bermudas

Este faro está en operación desde 1846. Mide 117 pies y se levanta sobre una colina de 245 pies de altura, de modo que el rayo de luz queda a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz puede verse en el horizonte a una distancia aproximada de 26 millas. Verifique la veracidad de esta información. El folleto afirma también que los barcos que navegan a 40 millas de este faro pueden ver su luz y que aviones volando a 10,000 pies la distinguen a 120 millas. Verifique la veracidad de estos enunciados. ¿Cuál es la suposición que se desprende del folleto acerca de la altura del barco? [Véase el ejemplo 9 y el problema 40 en la sección 5.5.]

La trigonometría fue desarrollada por astrónomos griegos que consideraban al cielo como el interior de una esfera, de modo que resultó natural estudiar primero los triángulos sobre una esfera (por Menelao de Alejandría, año 100 a de C) y que los triángulos en el plano fueran estudiados mucho después. El primer libro que contiene un tratamiento sistemático de trigonometría plana y esférica fue escrito por el astrónomo persa Nasîr ed-dîn (alrededor del 1250 a. C.).

Regiomontano (1436-1476) es el autor principal a quien se debe el traslado de la trigonometría astronómica a las matemáticas. Su trabajo fue mejorado por Copérnico (1473-1543) y por el alumno de Copérnico, Rhaeticus (1514-1576). La obra de Rhaeticus fue la primera en definir las seis funciones trigonométricas como razones entre lados de triángulos, aunque no le dio a las funciones sus nombres actuales. El crédito de esto se lo lleva Thomas Fincke (1583), pero en su época esa notación no fue aceptada universalmente. La notación quedó establecida a partir de los libros de texto de Leonardo Euler (1707-1783).

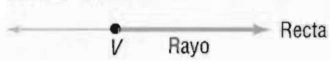
Desde entonces la trigonometría ha venido evolucionando desde su uso por agrimensores, navegantes e ingenieros, hasta las aplicaciones actuales como el movimiento de las mareas en los océanos, el alza y caída de los recursos alimenticios en determinadas condiciones ecológicas, patrones de ondas cerebrales y muchos otros fenómenos.

Hay dos enfoques aceptados ampliamente para el desarrollo de las *funciones trigonométricas*: uno utiliza círculos, en especial el *círculo unitario*; el otro se vale de los *triángulos rectángulos*. En este libro introducimos las funciones trigonométricas utilizando el círculo unitario. En la sección 5.4 mostraremos que la trigonometría del triángulo rectángulo es un caso especial del enfoque del círculo unitario.

5.1 Ángulos y sus medidas

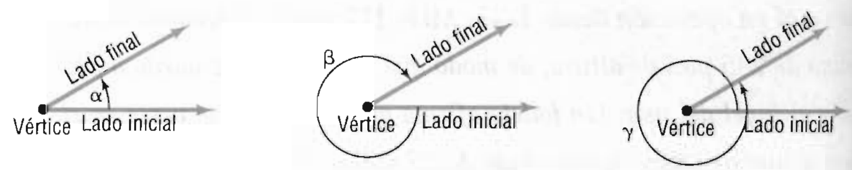
Un **rayo,** o **semirrecta,** es la parte de una recta que inicia en un punto V de la recta y se extiende indefinidamente en una dirección. El punto inicial V de un rayo es denominado **vértice.** *Véase* la figura 1.

FIGURA 1



Si se dibujan dos rayos con vértice común se formará un **ángulo.** A uno de estos rayos le llamamos **lado inicial** y al otro **lado final.** El ángulo formado se identifica señalando la dirección y cantidad de rotación desde el lado inicial hacia el lado final. Si la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el ángulo es denominado **positivo;** si la rotación va en el sentido de las manecillas del reloj el ángulo es **negativo.** *Véase* la figura 2. Letras minúsculas griegas tales como α (alfa), β (beta), γ (gamma), θ (theta), etc., se usarán para denotar ángulos. Observe en la figura 2(a) que el ángulo (α es positivo porque la dirección de rotación desde el lado inicial hasta el lado final es en sentido contrario al de las manecillas del reloj. El ángulo β en la figura 2(*b*) es negativo porque la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. El ángulo γ en la figura 2(c) es positivo. Observe que el ángulo α en la figura 2(a) y el ángulo γ tienen el mismo lado inicial y el mismo lado final. Sin embargo, α y γ son diferentes ya que la cantidad de rotación necesaria para ir desde el lado inicial hasta el lado final es mayor para el ángulo γ que para el ángulo α.

FIGURA 2



Rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj

(a) Ángulo positivo

Rotación en el sentido de las manecillas del reloj

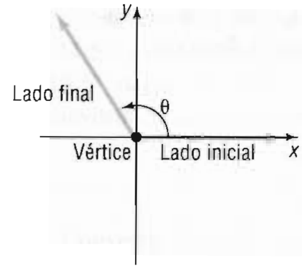
(b) Ángulo negativo

Rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj

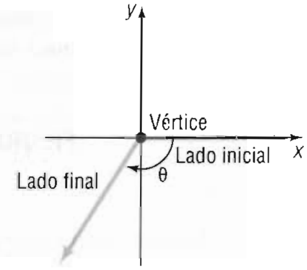
(c) Ángulo positivo

Se dice que un ángulo θ está en **posición estándar** si su vértice está en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el eje x positivo. *Véase* la figura 3.

FIGURA 3



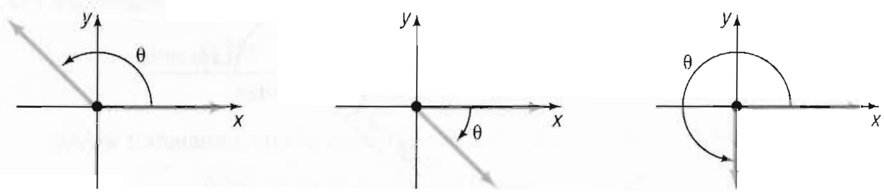
(a) θ en posición estándar; θ positivo



(b) θ en posición estándar; θ negativo

Cuando un ángulo θ está en forma estándar el lado final puede pertenecer a un cuadrante, en tal caso decimos que **θ está en ese cuadrante;** o bien el lado final puede estar en el eje x o en el eje y, en tal caso, decimos que θ es un **ángulo cuadrantal.** Por ejemplo, el ángulo θ en la figura 4(a) está en el segundo cuadrante, en la figura 4(b) está en el cuarto cuadrante y en la figura 4(c) el ángulo θ es un ángulo cuadrantal.

FIGURA 4



(a) θ está en el segundo cuadrante (b) θ está en el cuarto cuadrante (c) θ es un ángulo cuadrantal

Medimos los ángulos determinando la cantidad de rotación necesaria para que el lado inicial coincida con el lado final. Hay dos unidades de medición utilizadas comúnmente: *grados* y *radianes*.

Grados

El ángulo formado por la rotación, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, desde el lado inicial hasta que coincida con él mismo (1 vuelta o revolución), se dice que mide 360 grados, abreviado 360°. Así **un grado,** $1°$, es $\frac{1}{360}$ de vuelta. Un **ángulo recto** es un ángulo de 90°, o $\frac{1}{4}$ de vuelta; un **ángulo llano** es un ángulo de 180°, o $\frac{1}{2}$ vuelta. *Véase* la figura 5. Como lo muestra la figura 5(b), es costumbre indicar un ángulo recto utilizando el símbolo ⊾.

FIGURA 5

(a) Una vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 360° (b) $\frac{1}{4}$ de vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 90° (c) $\frac{1}{2}$ vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj, 180°

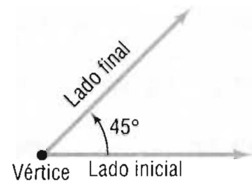
EJEMPLO 1 *Trazado de un ángulo*

Trazar cada ángulo:

(a) 45° (b) −90° (c) 225° (d) 405°

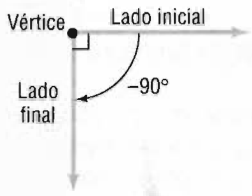
Solución (a) Un ángulo de 45° es $\frac{1}{2}$ de un ángulo recto. *Véase* la figura 6.

FIGURA 6



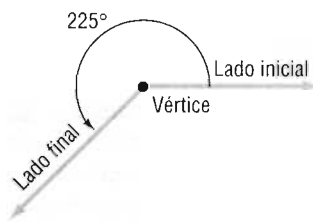
(b) Un ángulo de $-90°$ es $\frac{1}{4}$ de vuelta en el sentido de las manecillas del reloj. *Véase* la figura 7.

FIGURA 7



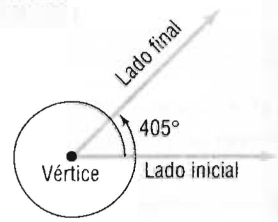
(c) Un ángulo de 225° consiste de una rotación de 180°seguida por una rotación de 45°. *Véase* figura 8.

FIGURA 8



(d) Un ángulo de 405° consiste de una vuelta (360°) seguida por una rotación de 45°. *Véase* figura 9.

FIGURA 9



■ Ahora resuelva el problema 1.

Aunque se pueden obtener subdivisiones de un grado utilizando decimales, también podemos usar la noción de *minutos* y *segundos*. **Un minuto,** denotado por **1′**, se define como $\frac{1}{60}$ de grado. **Un segundo,** denotado por **1″**, se define como $\frac{1}{60}$ de minuto o, de manera equivalente, $\frac{1}{3600}$ de grado. Un ángulo de, digamos, 30 grados, 40 minutos, 10 segundos se escribe de manera concisa como 30° 40′ 10″. Para resumir:

$$\text{1 vuelta en sentido contrario al de las manecillas del reloj} = 360° \qquad (1)$$
$$60' = 1° \qquad 60'' = 1'$$

Ya que las calculadoras utilizan decimales, es importante ser capaces de convertir de la notación grados, minutos y segundos (D°M′S″, *Degrees* (grados), *Minutes* (minutos), *Seconds* (segundos) a una forma decimal, y a la inversa. Verifique su calculadora; puede ser que tenga un tecla especial que haga la conversión por usted. Si su calculadora no tiene esa tecla, usted puede realizar la conversión como se describe en seguida.

Sin embargo, antes de empezar debe preparar la calculadora para que trabaje con grados ya que hay dos formas comunes de medir ángulos. Muchas calculadoras muestran el modo en que están trabajando $\boxed{\text{DEG}}$ para grados (*degrees*) o $\boxed{\text{RAD}}$ para radianes. (Pronto definiremos los radianes.) Por lo común, una tecla es utilizada para cambiar de un modo al otro. Verifique su manual para encontrar cómo funciona su calculadora en estos casos.

Ahora veamos cómo convertir de notación grados, minutos y segundos (D°M'S") a una forma decimal, y a la inversa, examinando algunos ejemplos: $15°30' = 15.5°$ ya que $30' = \frac{1}{2}° = 0.5°$, y $32.25° = 32°15'$, ya que $0.25° = \frac{1}{4}° = 15'$. Para la mayoría de las conversiones, una calculadora nos será útil.

EJEMPLO 2 *Conversión entre la forma grados, minutos, segundos y la forma decimal*

(a) Convertir $50°6'21''$ a un número decimal de grados.

(b) Convertir $21.256°$ a la forma D°M'S" Redondear la respuesta al segundo más cercano.

Solución (a) Ya que $1' = \frac{1}{60}°$ y $1'' = \frac{1}{60}' = (\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{60})°$, convertimos como sigue:

$$\begin{aligned} 50°6'21'' &= (50 + 6 \cdot \tfrac{1}{60} + 21 \cdot \tfrac{1}{60} \cdot \tfrac{1}{60})° \\ &\approx (50 + 0.1 + 0.005833)° \\ &= 50.105833° \end{aligned}$$

(b) Empezamos con la parte decimal de $21.256°$, esto es, $0.256°$:

$$0.256° = (0.256)(1°) \underset{\substack{\uparrow \\ 1° = 60'}}{=} (0.256)(60') = 15.36'$$

Ahora trabajamos con la parte decimal de $15.36'$, esto es, $0.36'$:

$$0.36' = (0.36)(1') = (0.36)(60'') = 21.6'' \approx 22''$$

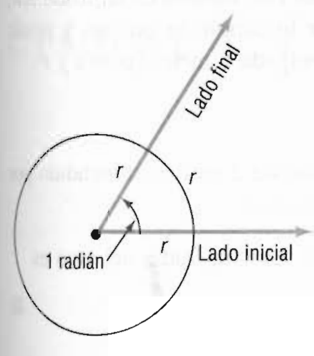
Así,

$$\begin{aligned} 21.256° &= 21° + 0.256° = 21° + 15.36' = 21° + 15' + 0.36' \\ &= 21° + 15' + 21.6'' \approx 21°15'22'' \end{aligned}$$

■ Ahora resuelva los problemas 57 y 63.

En muchas aplicaciones, tales como la localización exacta de una estrella o la posición precisa de un barco en el mar, se utilizan ángulos medidos en grados, minutos e incluso segundos. Para propósitos de cálculo, los grados son transformados a la forma decimal. En muchas otras aplicaciones, en especial en cálculo, los ángulos son medidos usando *radianes*.

FIGURA 10

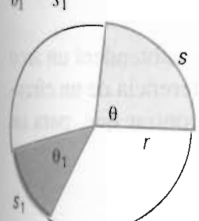


Radianes

Considere un círculo de radio r. Construya un ángulo cuyo vértice esté en el centro de ese círculo, llamado **ángulo central,** y cuyos rayos subtiendan un arco de longitud igual a r sobre el círculo. *Véase* la figura 10. La medida de tal ángulo es **1 radián.**

FIGURA 11

$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1}$



Ahora considere un círculo y dos ángulos centrales, θ y θ_1. Suponga que estos ángulos subtienden arcos de longitudes s y s_1, respectivamente, como se muestra en la figura 11. De la geometría, sabemos que la razón de las medidas de los ángulos es igual a la razón de las longitudes correspondientes de los arcos subtendidos por esos ángulos; esto es,

$$\frac{\theta}{\theta_1} = \frac{s}{s_1} \qquad (2)$$

Suponga que θ y θ_1 son medidos en radianes, y que $\theta_1 = 1$ radián. Observe de nuevo la figura 11. Entonces la longitud del arco s_1 subtendido por el ángulo central θ_1 es igual al radio r del círculo. Así, $s_1 = r$; de modo que (2) se reduce a

$$\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r} \quad \text{o} \quad s = r\theta \tag{3}$$

Teorema longitud de un arco Para un círculo de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es

$$\boxed{s = r\theta \qquad (4)}$$

■

Nota: Las fórmulas deben ser consistentes con las unidades de medición utilizadas. En la ecuación (4), escribimos

$$s = r\theta$$

Sin embargo, para ver las unidades debemos regresar a la ecuación (3) y escribir

$$\frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}} = \frac{s \text{ unidades de longitud}}{r \text{ unidades de longitud}}$$

$$s \text{ unidades de longitud} = (r \text{ unidades de longitud})\,\frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}}$$

Como se cancelan los radianes, nos quedamos con

$$s \text{ unidades de longitud} = (r \text{ unidades de longitud})\theta \qquad s = r\theta$$

donde θ parece que es "adimensional" pero, en realidad, está medida en radianes. Así, al usar la fórmula $s = r\theta$, las dimensiones para θ por lo común se omiten, y puede ser utilizada cualquier unidad de longitud (tal como pulgada o metro) para s y r.

EJEMPLO 3 *Determine la longitud del arco de un círculo*

Determinar la longitud del arco de un círculo con radio de 2 metros subtendido por un ángulo central de 0.25 radianes.

Solución Usamos la ecuación (4) con $r = 2$ metros y $\theta = 0.25$. La longitud s del arco es

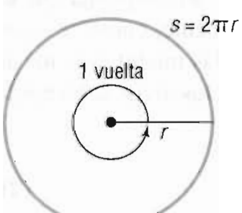
$$s = r\theta = 2(0.25) = 0.5 \text{ metros}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 33.

Relación entre grados y radianes

FIGURA 12
1 vuelta $= 2\pi$ radianes



Considere un círculo de radio r. Un ángulo central de una vuelta subtenderá un arco igual a la circunferencia del círculo (figura 12). Ya que la circunferencia de un círculo es igual a $2\pi r$, usamos $s = 2\pi r$ en la ecuación (4) para encontrar que, para un ángulo θ de una vuelta,

$$s = r\theta$$
$$2\pi r = r\theta$$
$$\theta = 2\pi \text{ radianes}$$

Así,

$$\boxed{1 \text{ vuelta} = 2\pi \text{ radianes}} \tag{5}$$

de modo que

$$360^\circ = 2\pi \text{ radianes}$$

o

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ radianes}} \tag{6}$$

Dividimos ambos miembros de (6) entre 180. Entonces

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

Dividimos ambos miembros de (6) entre π. Entonces

$$\frac{180}{\pi} \text{ grados} = 1 \text{ radián}$$

Así, tenemos las dos fórmulas de conversión siguientes:

$$\boxed{1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radián} \qquad 1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}} \tag{7}$$

EJEMPLO 4 *Conversión de grados a radianes*

Convertir cada ángulo dado en grados a radianes:

(a) 60° (b) 150° (c) -45° (d) 90°

Solución (a) $60^\circ = 60 \cdot 1 \text{ grado} = 60 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$

(b) $150^\circ = 150 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{5\pi}{6} \text{ radianes}$

(c) $-45^\circ = -45 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = -\frac{\pi}{4} \text{ radián}$

(d) $90^\circ = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radián} = \frac{\pi}{2} \text{ radianes}$ ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

El ejemplo 4 ilustra que cuando los ángulos son fracciones de una vuelta se expresan en radianes como múltiplos fraccionales de π, en lugar de hacerlo como decimales. Así, un ángulo recto, como en el ejemplo 4(d), se deja en la forma $\pi/2$ radianes, que es exacto, en lugar de usar la aproximación $\pi/2 \approx 3.1416/2 = 1.5708$ radianes.

EJEMPLO 5 *Conversión de radianes a grados*

Convertir cada ángulo dado en radianes a grados.

(a) $\frac{\pi}{6}$ radián (b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes (c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes (d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes

Solución (a) $\frac{\pi}{6}$ radián $= \frac{\pi}{6} \cdot 1$ radián $= \frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 30°$

(b) $\frac{3\pi}{2}$ radianes $= \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 270°$

(c) $-\frac{3\pi}{4}$ radianes $= -\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= -135°$

(d) $\frac{7\pi}{3}$ radianes $= \frac{7\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}$ grados $= 420°$ ■

■ Ahora resuelva el problema 23.

La tabla 1 enlista las medidas en grados y en radianes de algunos ángulos que son usados comúnmente. Usted aprenderá a sentirse igualmente seguro al usar medidas tanto en grados como en radianes para estos ángulos.

TABLA 1

GRADOS	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
RADIANES	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
GRADOS	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
RADIANES	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

EJEMPLO 6 *Determinar la longitud del arco de un círculo*

Determinar la longitud del arco de un círculo de radio $r = 3$ pies subtendido por un ángulo central de 30°

Solución Usamos la ecuación (4), pero antes debemos convertir el ángulo central de 30° a radianes. Ya que $30° = \pi/6$ radianes, usamos $\theta = \pi/6$ y $r = 3$ pies en la ecuación (4). La longitud del arco es

$$s = r\theta = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \approx \frac{3.14}{2} = 1.57 \text{ pies}$$ ■

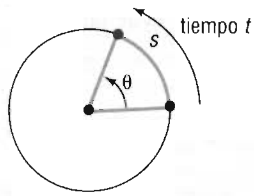
Cuando un ángulo está medido en grados el símbolo de grado siempre se debe escribir. Sin embargo, cuando un ángulo se mida en radianes seguiremos la práctica común de omitir la palabra *radianes*. Así, cuando la medida de un ángulo esté dada como $\pi/6$, se deberá entender que significa $\pi/6$, radianes.

Movimiento circular

Ya hemos definido la velocidad media de un objeto como una distancia recorrida que se divide entre un tiempo transcurrido. Suponga que un objeto se mueve a velocidad constante a lo largo de un círculo de radio r. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t en este círculo, entonces la **velocidad lineal** v del objeto se define como

FIGURA 13

$v = \frac{s}{t}$, $\omega = \frac{\theta}{t}$



$$v = \frac{s}{t} \qquad (8)$$

Conforme el objeto recorre el círculo, suponemos que θ (medido en radianes) es el ángulo central que cubre en el tiempo t (*Véase* la figura 13). Entonces la **velocidad angular** ω (letra griega omega) de este objeto es el ángulo (medido en radianes) que recorre dividido entre el tiempo transcurrido; esto es,

$$\omega = \frac{\theta}{t} \qquad (9)$$

La velocidad angular es la manera en que se describe la velocidad de un disco fonográfico. Por ejemplo, un disco de 45 rpm (revoluciones por minuto) es aquel que gira a una velocidad angular de

$$\frac{45 \text{ vueltas}}{\text{minutos}} = \frac{45 \text{ vueltas}}{\text{minutos}} \cdot \frac{2\pi \text{ radianes}}{\text{vuelta}} = \frac{90\pi \text{ radianes}}{\text{minutos}}$$

Hay una relación importante entre la velocidad lineal y la velocidad angular. En la fórmula $s = r\theta$, divida cada miembro entre t:

$$\frac{s}{t} = r\frac{\theta}{t}$$

Entonces, usando las ecuaciones (8) y (9), obtenemos

$$v = r\omega \qquad (10)$$

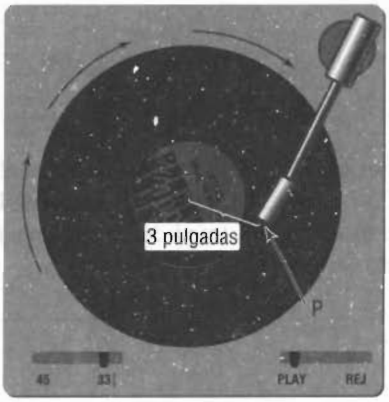
Cuando use la ecuación (10), recuerde que $v = s/t$ (la velocidad lineal) tiene dimensiones de longitud por unidad de tiempo (tal como pies por segundo o millas por hora), r (el radio del movimiento circular) tiene las mismas unidades de longitud que s, y ω (la velocidad angular) tiene dimensiones de radianes por unidad de tiempo. Como se hizo notar anteriormente, dejamos las unidades de radianes fuera del valor numérico de la velocidad angular ω de modo que ambos miembros de la ecuación serán dimensionalmente consistentes (con "longitud por unidad de tiempo"). Si la velocidad angular está dada en términos de *revoluciones* por unidad de tiempo (como es el caso con frecuencia), asegúrese de convertirla a *radianes* por unidad de tiempo antes de intentar usar la ecuación (10).

EJEMPLO 7 *Determinación de velocidad lineal*

Determinar la velocidad lineal de un disco de $33\frac{1}{3}$ rpm en el punto donde la aguja está a 3 pulgadas del eje (centro del disco).

Solución *Véase* la figura 14. El punto P se desplaza a lo largo del círculo de radio $r = 3$ pulgadas. La velocidad angular ω del disco es

FIGURA 14



$$\omega = \frac{33\frac{1}{3}\text{ vueltas}}{\text{minutos}} = \frac{100\text{ vueltas}}{3\text{ minutos}} \cdot \frac{2\pi\text{ radianes}}{\text{vueltas}} = \frac{200\pi\text{ radianes}}{3\text{ minutos}}$$

De la ecuación (10), la velocidad lineal v del punto P es

$$v = r\omega = 3\text{ pulgadas} \cdot \frac{200\pi\text{ radianes}}{3\text{ minutos}} = \frac{200\pi\text{ pulgadas}}{\text{minutos}} \approx \frac{628\text{ pulgadas}}{\text{minutos}}$$

■ Ahora resuelva el problema 71.

5.1

Ejercicio 5.1

En los problemas del 1 al 12 trazar cada ángulo.

1. $30°$ **2.** $60°$ **3.** $135°$ **4.** $-120°$ **5.** $450°$ **6.** $540°$
7. $3\pi/4$ **8.** $4\pi/3$ **9.** $-\pi/6$ **10.** $-2\pi/3$ **11.** $16\pi/3$ **12.** $21\pi/4$

En los problemas del 13 al 22 convierta cada ángulo dado en grados a radianes. Exprese su respuesta como un múltiplo de π.

13. $30°$ **14.** $120°$ **15.** $240°$ **16.** $330°$ **17.** $-60°$
18. $-30°$ **19.** $180°$ **20.** $270°$ **21.** $135°$ **22.** $-225°$

En los problemas del 23 al 32 convierta cada ángulo dado en radianes a grados.

23. $\pi/3$ **24.** $5\pi/6$ **25.** $-5\pi/4$ **26.** $-2\pi/3$ **27.** $\pi/2$
28. 4π **29.** $\pi/12$ **30.** $5\pi/12$ **31.** $2\pi/3$ **32.** $5\pi/4$

En los problemas del 33 al 40, s denota la longitud del arco de un círculo de radio r subtendido por el ángulo central θ. Encuentre la cantidad que se indica.

33. $r = 10$ metros, $\theta = \frac{1}{2}$ radián, $s = ?$ **34.** $r = 6$ pies, $\theta = 2$ radianes, $s = ?$
35. $\theta = \frac{1}{3}$ radián, $s = 2$ pies, $r = ?$ **36.** $\theta = \frac{1}{4}$ radián, $s = 6$ centímetros, $r = ?$
37. $r = 5$ millas, $s = 3$ millas, $\theta = ?$ **38.** $r = 6$ metros, $s = 8$ metros, $\theta = ?$
39. $r = 2$ pulgadas, $\theta = 30°$, $s = ?$ **40.** $r = 3$ metros, $\theta = 120°$, $s = ?$

En los problemas del 41 al 48 convierta cada ángulo dado en grados a radianes. Exprese su respuesta en forma decimal, redondeada a dos decimales.

41. $17°$ **42.** $73°$ **43.** $-40°$ **44.** $-51°$ **45.** $125°$ **46.** $200°$ **47.** $340°$ **48.** $350°$

En los problemas del 49 al 56 convierta cada ángulo dado en radianes a grados. Exprese su respuesta en forma decimal, redondeada a dos decimales.

49. 3.14 **50.** π **51.** 10.25 **52.** 0.75 **53.** 2 **54.** 3 **55.** 6.32 **56.** $\sqrt{2}$

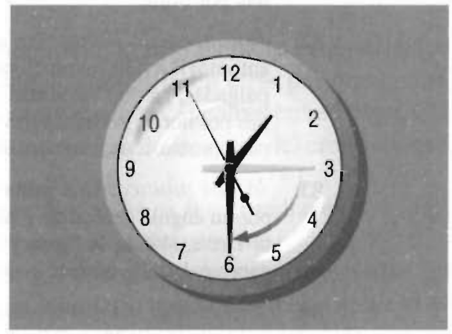
En los problemas del 57 al 62 convierta cada ángulo dado a un decimal en grados. Redondee su respuesta a dos decimales.

57. $40°10'25''$ **58.** $61°42'21''$ **59.** $1°2'3''$ **60.** $73°40'40''$ **61.** $9°9'9''$ **62.** $98°22'45''$

En los problemas del 63 al 68 convierta cada ángulo dado a la forma D°M′S″. *Redondee su respuesta al segundo más cercano.*

63. 40.32° **64.** 61.24° **65.** 18.255° **66.** 29.411° **67.** 19.99° **68.** 44.01°

69. *Minutero de un reloj.* El minutero de un reloj tiene 6 pulgadas de largo. En 15 minutos, ¿qué distancia recorre la punta del minutero? ¿Qué distancia recorre en 25 minutos?

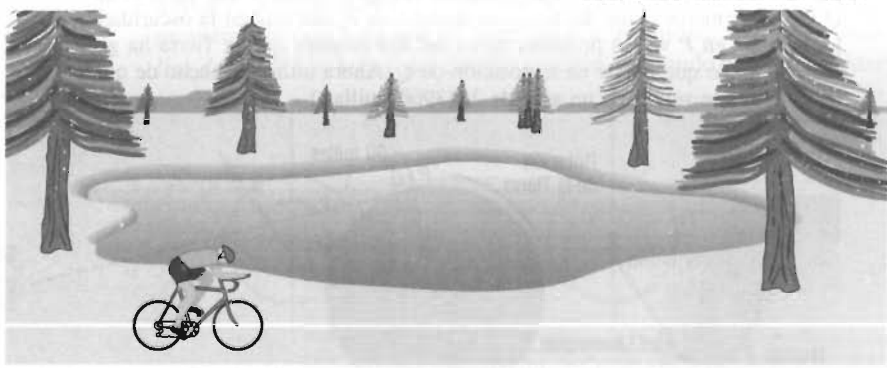


70. *Movimiento de un péndulo.* Un péndulo oscila un ángulo de 20° cada segundo. Si el péndulo tiene 40 pulgadas de largo, ¿qué distancia recorre su extremo cada segundo?

71. Un objeto viaja alrededor de un círculo con radio de 5 centímetros. Si en 20 segundos recorre un ángulo central de $\frac{1}{3}$ de radián, ¿cuál es la velocidad angular del objeto? ¿Cuál su velocidad lineal?

72. Un objeto viaja alrededor de un círculo con radio de 2 metros. Si en 20 segundos el objeto recorre 5 metros, ¿cuál es su velocidad angular? ¿Cuál su velocidad lineal?

73. *Ruedas de bicicleta* El diámetro de cada rueda de una bicicleta es de 26 pulgadas. Si usted viaja a una velocidad de 35 millas por hora en esa bicicleta, ¿a cuántas revoluciones por minuto estarán girando las ruedas?



74. *Ruedas de un automóvil.* El radio de cada rueda de un automóvil es de 15 pulgadas. Si las ruedas giran a una razón de 3 revoluciones por segundo, ¿qué tan rápido se está moviendo el automóvil? Exprese su respuesta en pulgadas por segundo y en millas por hora.

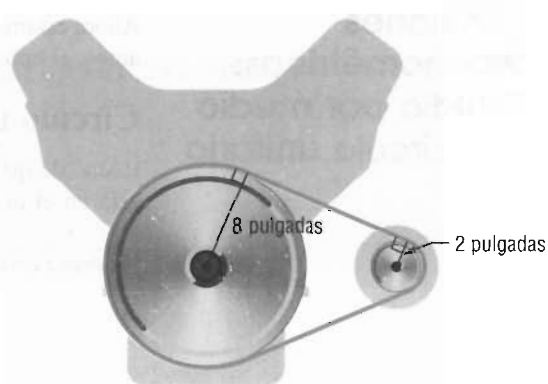
75. *Limpiadores de parabrisas.* El limpiador del parabrisas de un automóvil mide 18 pulgadas de largo. ¿Cuántas pulgadas cubre el extremo del limpiador en $\frac{1}{3}$ de revolución?

76. *Limpiadores de parabrisas.* El limpiador del parabrisas de un automóvil mide 18 pulgadas de largo. Si tarda un segundo en describir $\frac{1}{3}$ de revolución, ¿qué tan rápido se está moviendo el extremo del limpiador?

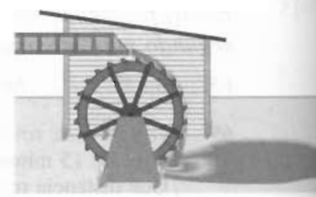
77. *Velocidad de la luna.* La distancia media de la Luna a la Tierra es 2.39×10^5millas. Suponiendo que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es circular y que una revolución tarda 27.3 días, encuentre la velocidad lineal de la Luna. Exprese su respuesta en millas por hora.

78. *Velocidad de la tierra.* La distancia media de la Tierra al Sol es 9.29×10^7 millas. Suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular y que una revolución tarda 365 días, encuentre la velocidad lineal de la Tierra. Exprese su respuesta en millas por hora.

79. *Poleas.* Dos poleas, una con radio de 2 pulgadas y la otra con radio de 8 pulgadas están conectadas por una banda. (*Véase* la figura.) Si la polea de 2 pulgadas se hace girar a 3 revoluciones por minuto, determine las revoluciones por minuto de la polea de 8 pulgadas. [*Sugerencia*: Las velocidades lineales de las poleas, esto es, la velocidad de la banda, son iguales.]



80. *Poleas.* Dos poleas, una con radio r_1 y la otra con radio r_2 están conectadas por una banda. La polea con radio r_1 gira a ω_1 revoluciones por minuto, mientras que la polea con radio r_2 rota a ω_2 revoluciones por minuto. Demuestre que $r_1/r_2 = \omega_2/\omega_1$.



81. *Cálculo de la velocidad de un río* Para medir aproximadamente la velocidad de la corriente de un río, una rueda de paletas con radio de 4 pies es introducida al agua. Si la corriente hace que la rueda gire a 10 revoluciones por minuto, ¿cuál es la velocidad de la corriente? Exprese su respuesta en millas por hora.

82. *Balanceo de llantas* Un aparato para balancear llantas gira la llanta de un automóvil a 480 revoluciones por minuto. Si el diámetro de la llanta es de 26 pulgadas, ¿a qué velocidad está siendo probada? Exprese su respuesta en millas por hora. ¿A cuántas revoluciones por minuto debe ajustarse el balanceador para probar a una velocidad de 80 millas por hora?

83. *Millas náuticas* Una **milla náutica** es igual a la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 1 minuto de un círculo máximo* sobre la superficie de la Tierra. (*Véase* la figura.) Si el radio de la Tierra se toma como 3960 millas, exprese 1 milla náutica en término de millas, o **millas terrestres**, (5280 pies).

84. *Diferencia en hora de la salida del sol* Naples, Florida, está aproximadamente a 90 millas en dirección oeste de Fuerte Lauderdale. ¿Cuánto tiempo antes una persona en Fuerte Lauderdale verá la salida del Sol que una persona en Naples? [*Sugerencia*: Consulte la figura. Cuando una persona en Q ve los primeros rayos del Sol, una persona en P aún está en la oscuridad. La persona en P ve los primeros rayos del Sol después que la Tierra ha girado de modo que P esté en la posición de Q. Ahora utilice el hecho de que en 24 horas se subtiende un arco de $2\pi(3960)$ millas.]

85. *Seguimiento del sol* ¿Qué tan rápido tendría usted que recorrer la superficie de la Tierra para seguir al Sol (esto es, de modo que el Sol parezca permanecer en la misma posición en el cielo)?

86. ¿Prefiere medir ángulos usando grados o radianes? Proporcione una justificación y un análisis razonado para su elección.

87. Analice por qué los barcos y los aeroplanos utilizan millas náuticas para medir las distancias. Explique la diferencia entre una milla náutica y una milla terrestre.

88. Investigue el funcionamiento de las bicicletas de carreras. En particular, explique las diferencias y similitudes entre las de 10 y 18 velocidades (10 y 18 cambios de velocidad). Asegúrese de incluir un análisis de velocidad lineal y velocidad angular.

5.2 Funciones trigonométricas: Estudio por medio del círculo unitario

Ahora estamos preparados para estudiar las funciones trigonométricas. Como se dijo antes, el enfoque elegido se basa en el círculo unitario.

Círculo unitario

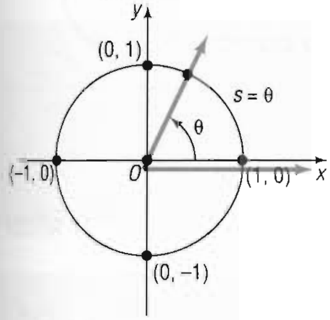
Recuerde que el **círculo unitario** es un círculo con radio igual a 1 y cuyo centro está en el origen de un sistema rectangular de coordenadas. Ya que el radio r del

*Cualquier círculo trazado sobre la superficie de la Tierra que la divide en dos hemisferios iguales.

círculo unitario es 1, vemos de la fórmula $s = r\theta$ que en el círculo unitario un ángulo central de θ radianes subtiende un arco cuya longitud s es

$$s = \theta$$

FIGURA 15
Círculo unitario: $x^2 + y^2 = 1$

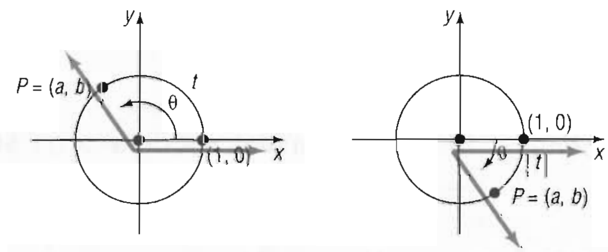


Véase la figura 15. Así, sobre el círculo unitario, la medida de la longitud del arco s es igual a la medida en radianes del ángulo central θ. En otras palabras, sobre el círculo unitario, el número real utilizado para medir un ángulo θ en radianes corresponde exactamente al número real usado para medir la longitud del arco subtendido por ese ángulo.

Por ejemplo, suponga que $r = 1$ pie. Entonces, si $\theta = 3$ radianes, $s = 3$ pies; si $\theta = 8.2$ radianes, entonces $s = 8.2$ pies; y así sucesivamente.

Ahora, sea t cualquier número real y θ el ángulo, en posición estándar, igual a t radianes. Sea P el punto sobre el círculo unitario que también está sobre el lado final de θ. Si $t \geq 0$, se llega a este punto P moviéndose una longitud de arco igual a t unidades *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* por todo el círculo unitario, iniciando en $(1, 0)$. *Véase* la figura 16(a). Si $t < 0$, se llega a este punto P moviéndose una longitud de arco igual a $|t|$ unidades en el *sentido de las manecillas del reloj* a lo largo del círculo unitario, iniciando en $(1, 0)$. *Véase* la figura 16(*b*).

FIGURA 16



(a) $\theta = t$ radianes; la longitud del arco desde (1, 0) hasta P es de t unidades, t 0

(b) $\theta = t$ radianes; la longitud del arco desde (1, 0) hasta P es de $|t|$ unidades, $t < 0$

Así, a cada número real t le corresponde un punto único $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario. Aquí esa es la idea importante. No importa cuál sea el número real t elegido, le corresponde un punto único P sobre el círculo unitario. Usamos las coordenadas del punto $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario que corresponde al número real t para definir las **seis funciones trigonométricas.**

Funciones trigonométricas

Sea t un número real y $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a t.

Función seno

La **función seno** asocia con t la coordenada y de P y es denotada por

$$\boxed{\operatorname{sen} t = b}$$

Función coseno

La **función coseno** asocia con t la coordenada x de P y es denotada por

$$\cos t = a$$

Función tangente

Si $a \neq 0$, la **función tangente** está definida como

$$\tan t = \frac{b}{a}$$

Función cosecante

Si $b \neq 0$, la **función cosecante** está definida como

$$\csc t = \frac{1}{b}$$

Función secante

Si $a \neq 0$, la **función secante** está definida como

$$\sec t = \frac{1}{a}$$

Función cotangente

Si $b \neq 0$, la **función cotangente** está definida como

$$\cot t = \frac{a}{b}$$

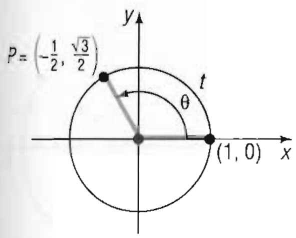
Nótese en estas definiciones que si $a = 0$, esto es, si el punto $P = (0, b)$ está sobre el eje y, entonces la función tangente y la función secante no se definen. También, si $b = 0$, esto es, si el punto $P = (a, 0)$ está sobre el eje x, entonces las funciones cosecante y cotangente no se definen.

Debido al uso del círculo unitario en estas definiciones de las funciones trigonométricas, también se les conoce como **funciones circulares.**

EJEMPLO 1 *Determinación del valor de las seis funciones trigonométricas*

Sea t un número real y $P = (-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a t. *Véase* la figura 17. Entonces

FIGURA 17
$\theta = t$ radianes



$$\text{sen } t = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos t = -\frac{1}{2} \qquad \tan t = \frac{\sqrt{3}/2}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec t = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \cot t = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

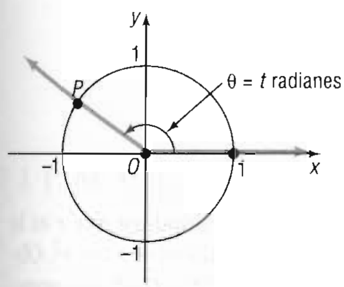
Funciones trigonométricas de ángulos

Sea P el punto sobre el círculo unitario que corresponde al número real t. Entonces el ángulo θ, en posición estándar y medido en radianes, cuyo lado final es el rayo que va del origen al punto P es

$$\theta = t \text{ radianes}$$

Véase la figura 18.

FIGURA 18



Así, sobre el círculo unitario, la medida del ángulo θ en radianes es igual al valor del número real t. Como resultado de esto, podemos decir

$$\text{sen } \underset{\text{Número real}}{t} = \text{sen } \underset{\theta = t \text{ radianes}}{\theta}$$

y así sucesivamente. Ahora podemos definir las funciones trigonométricas del ángulo θ.

Si $\theta = t$ radianes, las **seis funciones trigonométricas del ángulo** θ están definidas como

$\text{sen } \theta = \text{sen } t$	$\cos \theta = \cos t$	$\tan \theta = \tan t$
$\csc \theta = \csc t$	$\sec \theta = \sec t$	$\cot \theta = \cot t$

Aunque la distinción entre funciones trigonométricas de números reales y funciones trigonométricas de ángulos es importante, se acostumbra referirse a éstas en conjunto como *las funciones trigonométricas*. De ahora en adelante adoptaremos esa práctica.

Si un ángulo θ se mide en grados, usaremos el símbolo de grados cuando se escriba una función trigonométrica de θ, por ejemplo en sen 30° y tan 45°. Si un ángulo θ se mide en radianes, entonces no se usará símbolo alguno cuando se escriba una función trigonométrica, como en $\cos \pi$ y $\sec \pi/3$.

Por último, ya que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo θ están determinados por las coordenadas del punto $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario correspondiente a θ, las unidades usadas para medir el ángulo θ son irrelevantes. Por ejemplo, no importa si escribimos $\theta = \pi/2$ radianes o $\theta = 90°$. El punto sobre el círculo unitario correspondiente a este ángulo es $P = (0, 1)$. De modo que,

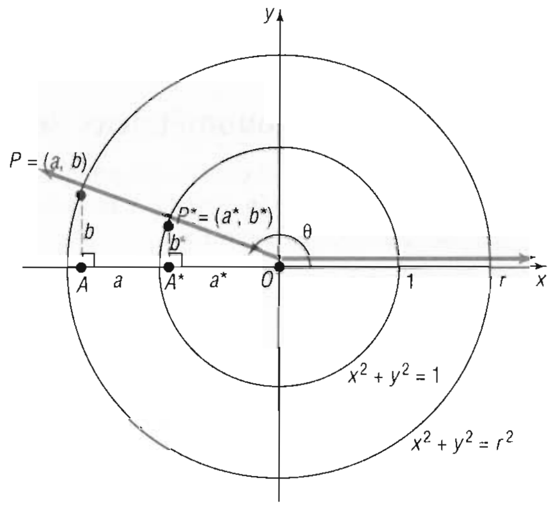
$$\text{sen } \frac{\pi}{2} = \text{sen } 90° = 1 \quad \text{y} \quad \cos \frac{\pi}{2} = \cos 90° = 0$$

Evaluación de las funciones trigonométricas

Para encontrar el valor exacto de una función trigonométrica de un ángulo θ se necesita que localicemos el punto correspondiente P sobre el círculo unitario. De hecho, cualquier círculo cuyo centro esté en el origen puede usarse.

Sea θ cualquier ángulo no cuadrantal colocado en posición estándar. Sea $P^* = (a^*, b^*)$ el punto donde el lado final de θ corta al círculo unitario. *Véase* la figura 19.

FIGURA 19



Sea $P = (a, b)$ cualquier punto sobre el lado final de θ. Suponga que r es la distancia desde el origen hasta P. Entonces P está sobre el círculo $x^2 + y^2 = r^2$. Observe la figura 19 otra vez y advierta que los triángulos OA^*P^* y OAP son semejantes; por tanto, las razones de los lados correspondientes son iguales:

$$\frac{b^*}{1} = \frac{b}{r} \qquad \frac{a^*}{1} = \frac{a}{r} \qquad \frac{b^*}{a^*} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{1}{b^*} = \frac{r}{b} \qquad \frac{1}{a^*} = \frac{r}{a} \qquad \frac{a^*}{b^*} = \frac{a}{b}$$

Estos resultados nos conducen a formular el teorema siguiente:

Teorema

Para un ángulo θ en posición estándar, sea $P = (a, b)$ cualquier punto en el lado final de θ. Si r es igual a la distancia desde el origen hasta P, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0$$

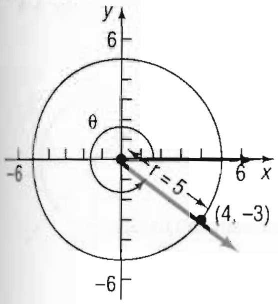
$$\csc\theta = \frac{r}{b}, \quad b \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{r}{a}, \quad a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

■

EJEMPLO 2 *Determinación del valor exacto de las seis funciones trigonométricas*

Encontrar el valor exacto de cada una las seis funciones trigonométricas de un ángulo θ si $(4, -3)$ es un punto en su lado final.

FIGURA 20



Solución La figura 20 ilustra la situación para un ángulo positivo θ. Para el punto $(a, b) = (4, -3)$, tenemos $a = 4$ y $b = -3$. Entonces $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} = -\frac{3}{5} \qquad \cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{4}{5} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{b} = -\frac{5}{3} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} = \frac{5}{4} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Para evaluar las funciones trigonométricas de un ángulo θ dado en posición estándar, necesitamos encontrar las coordenadas de cualquier punto en el lado final de ese ángulo. Esto no siempre es fácil de hacer. En los ejemplos siguientes evaluaremos las funciones trigonométricas de ciertos ángulos para los cuales este proceso es relativamente fácil. En la mayoría de los ángulos será necesaria una calculadora para evaluar las funciones trigonométricas.

EJEMPLO 3 *Determinación del valor exacto de las seis funciones trigonométricas de ángulos cuadrantes*

Encontrar el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas en

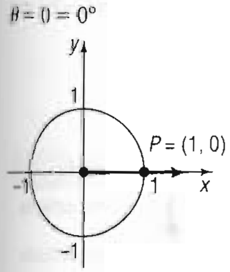
(a) $\theta = 0 = 0°$ (b) $\theta = \pi/2 = 90°$ (c) $\theta = \pi = 180°$

(d) $\theta = 3\pi/2 = 270°$

Solución (a) El punto $P = (1, 0)$ está en el lado final de $\theta = 0 = 0°$ y a una distancia de 1 unidad desde el origen. *Véase* la figura 21. Por lo tanto,

FIGURA 21

$\theta = 0 = 0°$



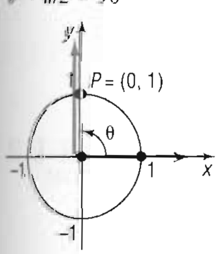
$$\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 0° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 0 = \cos 0° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0 = \tan 0° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec 0 = \sec 0° = \frac{1}{1} = 1$$

Ya que la coordenada y de P es 0, csc 0 y cot 0 no están definidas.

FIGURA 22

$\theta = \pi/2 = 90°$



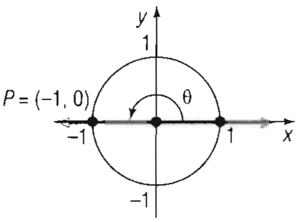
(b) El punto $P = (0, 1)$ está en el lado final de $\theta = \pi/2 = 90°$ y a una distancia de 1 unidad desde el origen. *Véase* la figura 22. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{sen} 90° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90° = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \cot 90° = \frac{0}{1} = 0$$

Ya que la coordenada x de P es 0, $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidas.

FIGURA 23
$\theta = \pi = 180°$



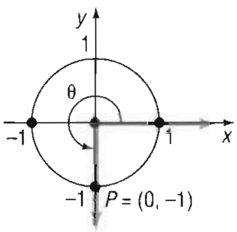
(c) El punto $P = (-1, 0)$ está en el lado final de $\theta = \pi = 180°$ y a una distancia de 1 unidad desde el origen. *Véase* la figura 23. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen} 180° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos \pi = \cos 180° = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\tan \pi = \tan 180° = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec \pi = \sec 180° = \frac{1}{-1} = -1$$

Ya que la coordenada y de P es 0, $\csc \pi$ y $\cot \pi$ no están definidas.

FIGURA 24
$\theta = 3\pi/2 = 270°$



(d) El punto $P = (0, -1)$ está en el lado final de $\theta = 3\pi/2 = 270°$ y a una distancia de 1 unidad desde el origen. *Véase* la figura 24. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen} 270° = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = \cos 270° = \frac{0}{1} = 0$$

$$\csc \frac{3\pi}{2} = \csc 270° = \frac{1}{-1} = -1 \qquad \cot \frac{3\pi}{2} = \cot 270° = \frac{0}{-1} = 0$$

Ya que la coordenada x de P es 0, $\tan 3\pi/2$ y $\sec 3\pi/2$ no están definidas. ■

Nota: Los resultados obtenidos en el ejemplo 3 serán los mismos ya sea que seleccionemos un punto en el círculo unitario o un punto en cualquier círculo cuyo centro sea el origen. Por ejemplo, $P = (0, 5)$ es un punto en el lado final de $\theta = \pi/2 = 90°$ y está a una distancia de 5 unidades desde el origen. Utilizando este punto, $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{5} = 1$, $\cos \theta = \frac{0}{5} = 0$, y así sucesivamente, como en el ejemplo 3(b).

La tabla 2 resume los valores de las funciones trigonométricas encontradas en el ejemplo 3.

TABLA 2 ÁNGULOS CUADRANTES

θ (RADIANES)	θ (GRADOS)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0	0°	0	1	0	No definida	1	No definida
$\pi/2$	90°	1	0	No definida	1	No definida	0
π	180°	0	−1	0	No definida	−1	No definida
$3\pi/2$	270°	−1	0	No definida	−1	No definida	0

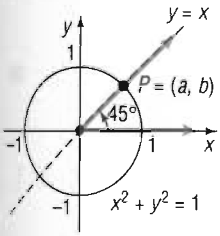
■ Ahora resuelva los problemas 19 y 39.

EJEMPLO 4 *Determinación de los valores exactos de las funciones trigonométricas ($\theta = 45°$, $\theta = -45°$)*

Encontrar el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas en:

(a) $\theta = \pi/4 = 45°$ (b) $\theta = -\pi/4 = -45°$

FIGURA 25
$\theta = \pi/4 = 45°$



Solución (a) Buscamos las coordenadas de un punto $P = (a, b)$ en el lado final de $\theta = \pi/4 = 45°$. *Véase* la figura 25. Primero, observamos que P está en la recta $y = x$. (¿Advierte por qué? Como $\theta = 45° = \frac{1}{2} \cdot 90°$, P debe estar en la recta que biseca al primer cuadrante.) Suponga que P también está en el círculo unitario de modo que P está a una distancia de 1 unidad desde el origen. Se deduce entonces que

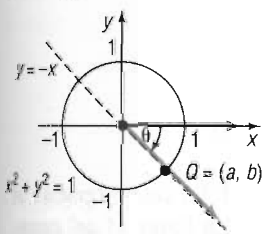
$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \quad a = b,\ a > 0,\ b > 0 \\ a^2 + a^2 &= 1 \\ 2a^2 &= 1 \\ a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, &\quad b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = \tan 45° = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

$$\csc\frac{\pi}{4} = \csc 45° = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} \qquad \sec\frac{\pi}{4} = \sec 45° = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} \qquad \cot\frac{\pi}{4} = \cot 45° = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

FIGURA 26
$\theta = -\pi/4 = -45°$



(b) Buscamos las coordenadas de un punto $Q = (a, b)$ en el lado final de $\theta = -\pi/4 = -45°$. *Véase* la figura 26. Primero, notamos que Q está en la recta $y = -x$. Si Q también está sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \quad b = -a,\ a > 0 \\ a^2 + (-a)^2 &= 1 \\ 2a^2 &= 1 \\ a = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, &\quad b = -a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}(-45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan(-45°) = \frac{-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1$$

$$\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \csc(-45°) = \frac{1}{-\sqrt{2}/2} = -\sqrt{2} \qquad \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sec(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2} \qquad \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cot(-45°) = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1$$

■

Al resolver el ejemplo 4(b), podríamos haber localizado el punto Q utilizando las coordenadas de $P = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ del ejemplo 4(a), tomando en cuenta la simetría de Q y P con respecto al eje x.

EJEMPLO 5 *Determinación del valor exacto de una expresión trigonométrica*

Encontrar el valor exacto de cada expresión:

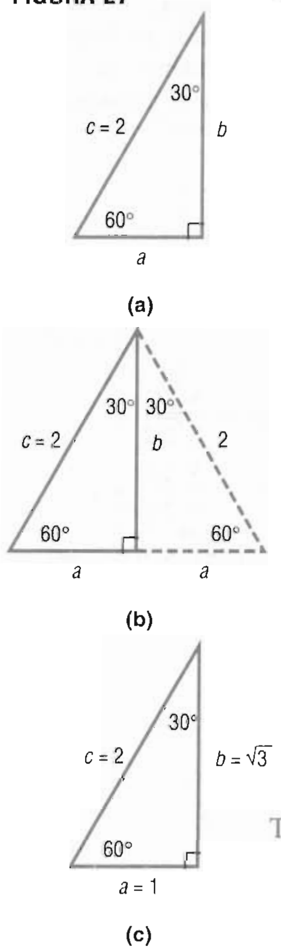
(a) $\operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 180°$ (b) $\tan\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$

Solución (a) $\operatorname{sen} 45^\circ \cos 180^\circ = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{Del ejemplo 4(a)}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{De la tabla 2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

(b) $\tan \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{} - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = \underbrace{1}_{\text{Del ejemplo 4(a)}} - \underbrace{(-1)}_{\text{De la tabla 2}} = 2$ ∎

∎ Ahora resuelva los problemas 15 y 37.

FIGURA 27



Funciones trigonométricas de 30° y 60°

Considere un triángulo rectángulo en el que uno de los ángulos es de 30°. Se deduce que el otro ángulo es de 60°. La figura 27(a) ilustra uno con hipotenusa de longitud 2. Nuestro problema es determinar a y b.

Empezamos colocando junto a este triángulo otro triángulo congruente, como se muestra en la figura 27(b). Nótese que ahora tenemos un triángulo cuyos ángulos son cada uno de 60°. Por lo tanto, este triángulo es equilátero, de modo que cada lado tiene longitud 2. En particular, la base es $2a = 2$ y así $a = 1$. Por el teorema de Pitágoras, b satisface la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$, así que tenemos

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ 1^2 + b^2 &= 2^2 \\ b^2 &= 4 - 1 = 3 \\ b &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Esto resulta en la figura 27(c) y conduce al teorema siguiente:

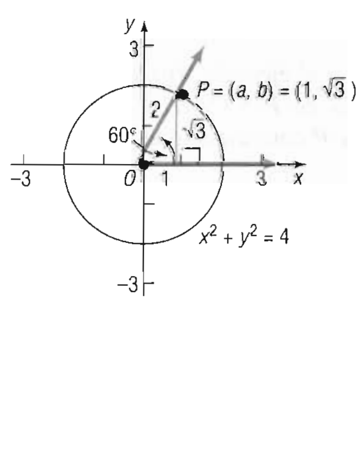
Teorema En un triángulo rectángulo de 30, 60 y 90 grados, la longitud del cateto opuesto al ángulo de 30° es un medio de la longitud de la hipotenusa. La longitud del cateto adyacente es $\sqrt{3}/2$ veces la longitud de la hipotenusa. ∎

EJEMPLO 6 *Determinación del valor exacto de las funciones trigonométricas ($\theta = 60°$)*

Encontrar el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas de $\pi/3 = 60°$.

Solución Reubicamos el triángulo de la figura 27(c) en un sistema de coordenadas rectangulares. Buscamos las coordenadas del punto $P = (a, b)$ en el lado final de $\theta = \pi/3 = 60°$, a una distancia de 2 unidades desde el origen. *Véase* la figura 28.

FIGURA 28



Con base en el teorema anterior, se deduce que $a = 1$ y $b = \sqrt{3}$. Como $r = 2$, , tenemos

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = \text{sen}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = \sec 60° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$ ■

EJEMPLO 7 *Determinación del valor exacto de las funciones trigonométricas ($\theta = 30°$)*

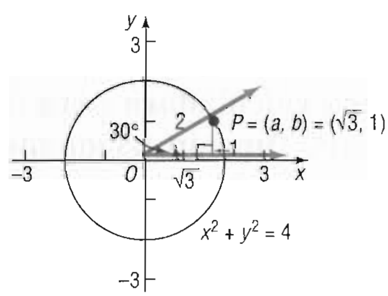
Determinar el valor exacto de las funciones trigonométricas de $\pi/6 = 30°$.

Solución Nuevamente, reubicamos el triángulo de la figura 27(c) en un sistema de coordenadas rectangulares. Buscamos las coordenadas del punto $P = (a, b)$ en el lado final de $\theta = \pi/6 = 30°$, a una distancia de 2 unidades desde el origen. *Véase* la figura 29. Con base en el teorema anterior, se deduce que $a = \sqrt{3}$ y $b = 1$. Como $r = 2$, tenemos

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \text{sen}\,30° = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{6} = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{6} = \csc 30° = \frac{2}{1} = 2 \qquad \sec\frac{\pi}{6} = \sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \cot\frac{\pi}{6} = \cot 30° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

FIGURA 29



■

La tabla 3 resume la información recién deducida para $\pi/6$ (30°), $\pi/4$ (45°), y $\pi/3$ (60°). Cuando haya memorizado las entradas en la tabla 3, deberá dibujar un diagrama apropiado para determinar los valores dados en ella.

TABLA 3

θ (RADIANES)	θ (GRADOS)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
$\pi/6$	30°	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$

■ Ahora resuelva los problemas 21 y 31.

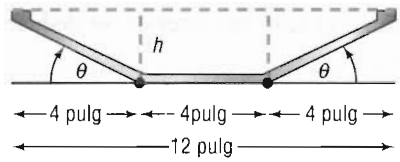
EJEMPLO 8 *Construcción de un canal de desagüe pluvial*

Se construirá un canal de desagüe pluvial con hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una longitud de 4 pulgadas a cada lado, las hojas se doblarán en un ángulo θ. *Véase* la figura 30. El área A de la abertura puede ser expresada como una función de θ:

$$A(\theta) = 16\,\text{sen}\,\theta\,(\cos\theta + 1)$$

Encontrar el área A de la abertura para $\theta = 30°$, $\theta = 45°$, y $\theta = 60°$.

FIGURA 30



Solución

Para $\theta = 30°$: $A(30°) = 16 \operatorname{sen} 30° (\cos 30° + 1)$

$$= 16\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = 4\sqrt{3} + 8$$

El área de la abertura para $\theta = 30°$ es aproximadamente 14.9 pulgadas cuadradas.

Para $\theta = 45°$: $A(45°) = 16 \operatorname{sen} 45° (\cos 45° + 1)$

$$= 16\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = 8 + 8\sqrt{2}$$

El área de la abertura para $\theta = 45°$ es aproximadamente 19.3 pulgadas cuadradas.

Para $\theta = 60°$: $A(60°) = 16 \operatorname{sen} 60° (\cos 60° + 1)$

$$= 16\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2} + 1\right) = 12\sqrt{3}$$

El área de la abertura para $\theta = 60°$ es aproximadamente 20.8 pulgadas cuadradas. ■

Uso de una calculadora para determinar el valor de una función trigonométrica

Antes de empezar a trabajar tiene que decidir si introducirá los ángulos a la calculadora usando radianes o grados, después instale la calculadora en el modo correcto. Si su calculadora no muestra el modo, usted puede determinarlo introduciendo 30 y presionando luego la tecla marcada con $\boxed{\text{sen}}$. Si está en modo de grados, la pantalla mostrará $\boxed{0.5}$ (sen 30° = 0.5). Si está en radianes la pantalla mostrará $\boxed{-0.9880316}$. La mayoría de las calculadoras tienen una tecla que le permite cambiar de un modo al otro. (Revise el manual de operación para saber cómo maneja su calculadora grados y radianes.)

Tal vez su calculadora sólo tenga teclas marcadas $\boxed{\text{sen}}$, $\boxed{\text{cos}}$, y $\boxed{\text{tan}}$. Para encontrar los valores de las otras tres funciones trigonométricas, secante, cosecante y cotangente, usamos el hecho de que

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Estos valores son una consecuencia directa del teorema establecido en la página 336.

EJEMPLO 9 *Uso de una calculadora para aproximar el valor de una función trigonométrica*

Usar una calculadora para encontrar el valor aproximado de

(a) $\cos 48°$ (b) $\csc 21°$ (c) $\tan \frac{\pi}{12}$

Redondear las respuestas a dos decimales.

Solución (a) Primero, establecemos el modo para que utilice grados.

Teclear: $\boxed{48}$ $\boxed{\cos}$

Aparece: $\boxed{48}$ $\boxed{0.6691306}$

Por tanto,

$$\cos 48° \approx 0.67$$

redondeando a dos decimales.

(b) La mayoría de las calculadoras no tiene una tecla $\boxed{\text{CSC}}$. Los fabricantes suponen que el usuario sabe algo de trigonometría. Así, para encontrar el valor de csc 21°, usamos el hecho de que csc 21° = 1/(sen 21°) y procedemos como sigue:

Teclear: $\boxed{21}$ $\boxed{\text{sen}}$ $\boxed{1/x}$

Aparece: $\boxed{21}$ $\boxed{0.3583679}$ $\boxed{2.7904281}$

Por lo tanto,

$$\csc 21° \approx 2.79$$

redondeando a dos decimales.

(c) Ponga el modo para que la calculadora reciba radianes. Después, encuentre $\tan(\pi/12)$,

Teclear: $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{12}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\tan}$

Aparece: $\boxed{3.1415927}$ $\boxed{12}$ $\boxed{0.2617993}$ $\boxed{0.2679491}$

Por lo tanto,

$$\tan \frac{\pi}{12} \approx 0.27$$

redondeando a dos decimales. ■

■ Ahora resuelva el problema 47.

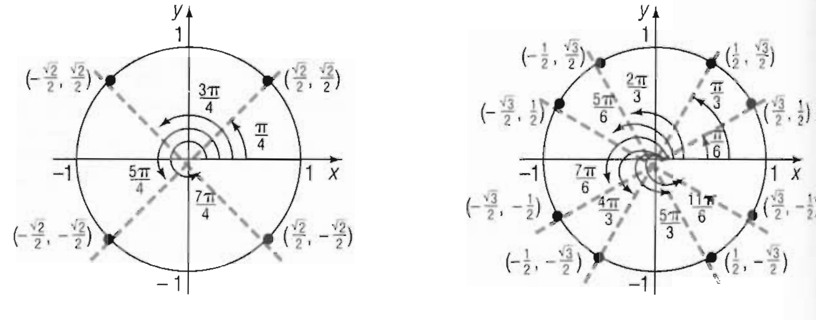
Resumen

Para los ángulos cuadrantales o los ángulos de 30°, 45°, 60° y sus múltiplos enteros, podemos encontrar el valor exacto de cada una de las funciones trigonométricas utilizando las características geométricas de estos ángulos y simetría.

La figura 31 muestra puntos en el círculo unitario que están en los lados finales de algunos ángulos que son múltiplos enteros de $\pi/6$ (30°), $\pi/4$ (45°) y $\pi/3$ (60°).

Nótese la relación entre los múltiplos enteros de un ángulo y la simetría. Por ejemplo, en la figura 31(a), el punto en el círculo unitario que corresponde a $7\pi/4$

FIGURA 31



es la reflexión con respecto al eje x del punto correspondiente a $\pi/4$. El punto sobre el círculo unitario correspondiente a $5\pi/4$, es la reflexión con respecto al origen del punto correspondiente a $\pi/4$. Así, utilizando la figura 31(a), vemos que

$$\text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{5\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1$$

Y utilizando la figura 31(b),

$$\text{sen}\,\frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} \qquad \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\frac{4\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

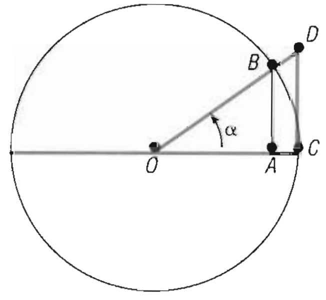
Para la mayoría de los ángulos, además de los ángulos cuadrantales y de aquellos enlistados en la figura 31, sólo podemos aproximar el valor de cada función trigonométrica usando una calculadora.

HECHOS HISTÓRICOS

■ El término *seno* para la función seno se debe a una confusión medieval. El nombre proviene de la palabra sánscrita *jīva* (que significa cuerda), usada primero en la India por Āryabhata el Mayor (510 d. de C.). Realmente quería decir media cuerda, pero la abrevió. Esto fue llevado al árabe como *jība*, lo cual no tiene significado. Puesto que la palabra apropiada en árabe *jaib* se escribía de la misma manera (las vocales cortas no se escriben en árabe), *jība* se pronunció como *jaib*, que significa pecho, seno o hueco, y hasta nuestros días *jaib* permanece como el significado en árabe para seno. Los especialistas tradujeron las trabajos árabes al latín encontrando que la palabra *sinus* también significaba pecho, seno o hueco, y de *sinus* obtuvimos la palabra *seno*.

El nombre *tangente*, debido a Thomas Fincke (1583), puede entenderse viendo la figura 32. El segmento de recta $\overline{DC}$ es tangente al círculo en C. Si $d(O, B) = d(O, C) = 1$, entonces la longitud del segmento de recta $\overline{DC}$ es

FIGURA 32



$$d(D, C) = \frac{d(D, C)}{1} = \frac{d(D, C)}{d(O, C)} = \tan\alpha$$

El nombre antiguo para la tangente es *umbra versa* (que significa sombra regresada), refiriéndose al uso de la tangente en la resolución de problemas de altura mediante sombras.

Los nombres de las funciones restantes se sucedieron como sigue. Si α y β son ángulos complementarios, entonces $\cos\alpha = \text{sen}\,\beta$. Ya que β es el complemento de α, era natural escribir coseno de α como *sen co* α. Probablemente por razones que involucran facilidad de pronunciación, la partícula *co* se pasó al frente, y entonces el coseno recibió una abreviación de tres letras como sen, sec y tan. Las otras dos cofunciones fueron tratadas de manera similar, excepto que las formas largas *cotan* y *cosec* subsisten hasta nuestros días en algunos países. ■

5.2

Ejercicio 5.2

En los problemas del 1 al 10 se da un punto en el lado final de un ángulo θ. Encuentre el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas de θ.

1. $(-3, 4)$ **2.** $(5, -12)$ **3.** $(2, -3)$ **4.** $(-1, -2)$ **5.** $(-2, -2)$

6. $(1, -1)$ **7.** $(-3, -2)$ **8.** $(2, 2)$ **9.** $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4})$ **10.** $(-0.3, -0.4)$

En los problemas del 11 al 30 encuentre el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

11. $\text{sen } 45° + \cos 60°$ **12.** $\text{sen } 30° - \cos 45°$ **13.** $\text{sen } 90° + \tan 45°$

14. $\cos 180° - \text{sen } 180°$ **15.** $\text{sen } 45° \cos 45°$ **16.** $\tan 45° \cos 30°$

17. $\csc 45° \tan 60°$ **18.** $\sec 30° \cot 45°$ **19.** $4 \text{ sen } 90° - 3 \tan 180°$

20. $5 \cos 90° - 8 \text{ sen } 270°$ **21.** $2 \text{ sen } \frac{\pi}{3} - 3 \tan \frac{\pi}{6}$ **22.** $2 \text{ sen } \frac{\pi}{4} + 3 \tan \frac{\pi}{4}$

23. $\text{sen } \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4}$ **24.** $\tan \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$ **25.** $2 \sec \frac{\pi}{4} + 4 \cot \frac{\pi}{3}$

26. $3 \csc \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}$ **27.** $\tan \pi - \cos 0$ **28.** $\text{sen } \frac{3\pi}{2} + \tan \pi$

29. $\csc \frac{\pi}{2} + \cot \frac{\pi}{2}$ **30.** $\sec \pi - \csc \frac{\pi}{2}$

En los problemas del 31 al 46 encuentre el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo dado. Si alguna no está definida, indíquelo así: "No definida". No utilice calculadora.

31. $2\pi/3$ **32.** $3\pi/4$ **33.** $150°$ **34.** $330°$

35. $-\pi/6$ **36.** $-\pi/3$ **37.** $225°$ **38.** $210°$

39. $5\pi/2$ **40.** 3π **41.** $-180°$ **42.** $-270°$

43. $3\pi/2$ **44.** $-\pi$ **45.** $450°$ **46.** $-90°$

En los problemas del 47 al 70 utilice una calculadora para encontrar el valor aproximado de cada expresión redondeado a dos decimales.

47. $\text{sen } 28°$ **48.** $\cos 14°$ **49.** $\tan 21°$ **50.** $\text{sen } 15°$

51. $\sec 41°$ **52.** $\csc 55°$ **53.** $\cot 70°$ **54.** $\tan 80°$

55. $\text{sen } \frac{\pi}{10}$ **56.** $\cos \frac{\pi}{8}$ **57.** $\tan \frac{5\pi}{12}$ **58.** $\text{sen } \frac{3\pi}{10}$

59. $\sec \frac{\pi}{12}$ **60.** $\csc \frac{5\pi}{13}$ **61.** $\cot \frac{\pi}{18}$ **62.** $\text{sen } \frac{\pi}{18}$

63. $\text{sen } 1$ **64.** $\tan 1$ **65.** $\text{sen } 1°$ **66.** $\tan 1°$

67. $\cos 21.5°$ **68.** $\cos 35.2°$ **69.** $\tan 0.3$ **70.** $\tan 0.1$

En los problemas del 71 al 82 encuentre el valor exacto de cada expresión si $\theta = 60°$. No utilice calculadora.

71. $\text{sen } \theta$ **72.** $\cos \theta$ **73.** $\text{sen } \frac{\theta}{2}$ **74.** $\cos \frac{\theta}{2}$

75. $(\text{sen } \theta)^2$ **76.** $(\cos \theta)^2$ **77.** $\text{sen } 2\theta$ **78.** $\cos 2\theta$

79. $2 \text{ sen } \theta$ **80.** $2 \cos \theta$ **81.** $\frac{\text{sen}\theta}{2}$ **82.** $\frac{\cos \theta}{2}$

83. Encuentre el valor exacto de sen 45° + sen 135° + sen 225° + sen 315°.

84. Encuentre el valor exacto de tan 60° + tan 150°.

85. Si sen $\theta = 0.1$, encuentre $\text{sen}(\theta + \pi)$.

86. Si cos $\theta = 0.3$, encuentre $\cos(\theta + \pi)$.

87. Si tan $\theta = 3$, encuentre $\tan(\theta + \pi)$.

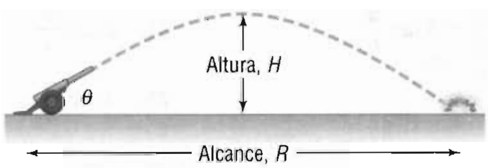
88. Si cot $\theta = -2$, encuentre $\cot(\theta + \pi)$.

89. Si sen $\theta = \frac{1}{5}$, encuentre csc θ.

90. Si cos $\theta = \frac{2}{3}$, encuentre sec θ.

La trayectoria de un proyectil disparado con inclinación θ respecto de la horizontal a una velocidad inicial v_0 es una parábola (véase *la figura). El alcance R del proyectil, esto es, la distancia horizontal que recorre, se encuentra usando la fórmula*

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$



donde $g \approx 32.2$ pies/segundo^2 ≈ 9.8 metros/segundo^2 es la aceleración debida a la gravedad. La altura máxima H del proyectil es

$$H = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

En los problemas del 91 al 94, encuentre el alcance R y la altura máxima H.

91. El proyectil es disparado en ángulo de 45° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 100 pies por segundo.

92. El proyectil es disparado en ángulo de 30° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 150 metros por segundo.

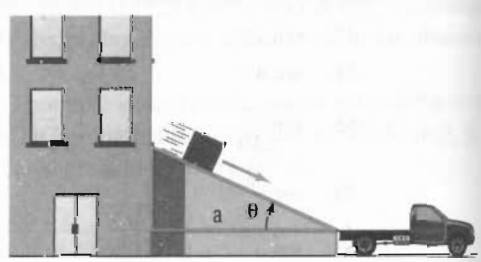
93. El proyectil es disparado en ángulo de 25° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 500 metros por segundo.

94. El proyectil es disparado en ángulo de 50° con respecto a la horizontal a una velocidad inicial de 200 pies por segundo.

95. Si se ignora la fricción, el tiempo t (en segundos) necesarios para que un bloque se deslice en un plano inclinado (*véase* la figura) está dado por la fórmula

$$t = \sqrt{\frac{2a}{g \operatorname{sen}\theta \cos\theta}}$$

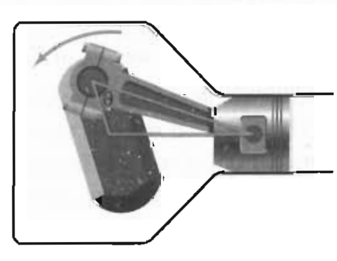
donde a es la longitud (en pies) de la base y $g \approx 32$ pies/segundo^2 la aceleración debida a la gravedad. ¿Cuánto tiempo le tomará al bloque deslizarse en un plano inclinado con base $a = 10$ pies cuando
(a) $\theta = 30°$? (b) $\theta = 45°$? (c) $\theta = 60°$?



96. En cierto motor de pistones, la distancia x (en metros) desde el centro del eje de dirección a la cabeza del pistón está dada por

$$x = \cos\theta + \sqrt{16 + 0.5\cos 2\theta}$$

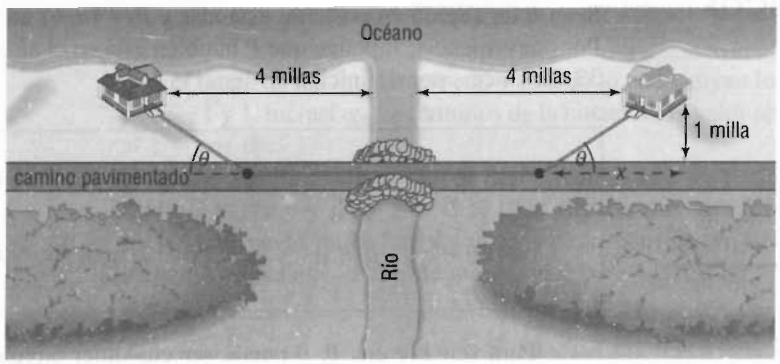
donde θ es el ángulo entre la manivela y la trayectoria de la cabeza del pistón (*véase* la figura). Encuentre x cuando $\theta = 30°$ y cuando $\theta = 45°$.



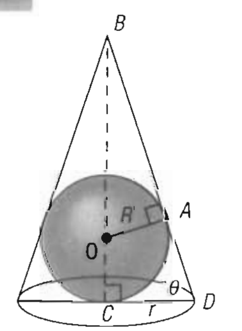
97. *Cálculo del tiempo de un viaje.* Dos casas en la playa están separadas 8 millas en línea recta y cada una queda a una milla de una carretera pavimentada paralela al océano. Sally puede caminar a 8 millas por hora en la carretera pero sólo a 3 millas por hora en la arena de la playa. A causa de un río que está entre las dos casas, para ir de una a la otra es necesario caminar por la arena hacia la carretera, seguir por la carretera y luego caminar de nuevo en la arena. *Véase* la ilustración. El tiempo T desde una casa a la otra como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración es

$$T(\theta) = 1 + \frac{2}{3 \text{ sen } \theta} - \frac{1}{4 \tan \theta}, \quad 0° < \theta < 90°$$

(a) Calcule el tiempo T para $\theta = 30°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(b) Calcule el tiempo T para $\theta = 45°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(c) Calcule el tiempo T para $\theta = 60°$. ¿Cuanto tiempo camina Sally por la carretera?
(d) Calcule el tiempo T para $\theta = 90°$. Describa la trayectoria tomada. ¿Por qué no puede utilizarse la fórmula T ?



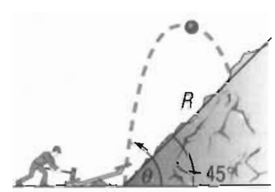
98. *Diseño de piezas decorativas.* Un diseñador de arte decorativo planea comercializar esferas de oro sólido encerradas en conos de cristal claro. Cada esfera es de radio fijo R y será encerrada en un cono de altura h y radio r. *Véase* la ilustración. Muchos conos pueden ser utilizados para encerrar la esfera, cada uno con diferente ángulo de inclinación θ. El volumen V del cono puede ser expresado como una función del ángulo de inclinación del cono:



$$V(\theta) = \frac{1}{3}\pi R^3 \frac{(1 + \sec \theta)^3}{\tan^2 \theta}, \quad 0° < \theta < 90°$$

¿Qué volumen V es necesario para encerrar una esfera con radio de 2 centímetros en un cono cuyo ángulo de inclinación θ es 30°? 45°? 60°?

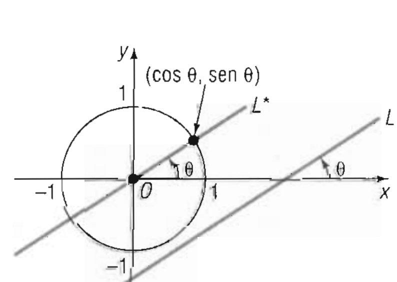
99. *Movimiento de un proyectil.* Un objeto es lanzado hacia arriba a un ángulo θ, $45° < \theta < 90°$, con respecto a la horizontal y velocidad inicial de v_0 pies por segundo desde la base de un plano que forma un ángulo de 45° con la horizontal. *Véase* la ilustración. Si se pasa por alto la resistencia del aire, la distancia R que recorre hacia arriba del plano inclinado está dada por



$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}(\text{sen } 2\theta - \cos 2\theta - 1)$$

Encuentre la distancia R que el objeto recorre a lo largo del plano inclinado si la velocidad inicial es de 32 pies por segundo y $\theta = 60°$.

100. Si θ $(0 < \theta < \pi)$ es el ángulo entre un rayo horizontal dirigido hacia la derecha (digamos, el eje x positivo) y una recta no horizontal y no vertical L, demuestre que la pendiente m de L es igual a $\tan \theta$. El ángulo θ es llamado **inclinación** de L. [*Sugerencia: Vea* la ilustración, donde hemos dibujado la recta L^* paralela a L y que pasa por el origen. Utilice el hecho de que L^* corta al círculo unitario en el punto $(\cos \theta, \text{sen } \theta)$.]



101. Escriba un párrafo breve que explique cómo calcular rápidamente las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°.

102. Escriba un párrafo breve que explique cómo calcular rápidamente las funciones trigonométricas de 0°, 90°, 180° y 270°.

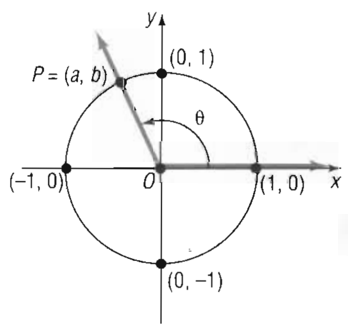
103. ¿Cómo explicaría usted el significado de la función seno a un compañero estudiante que apenas haya terminado el curso de álgebra?

5.3 Propiedades de las funciones trigonométricas

Dominio y rango de las funciones trigonométricas

Sean θ un ángulo en posición estándar y $P = (a, b)$ un punto en el lado final de θ. Por conveniencia, suponga que P también está en el círculo unitario. *Véase* la figura 33. Entonces, por definición

FIGURA 33



$\operatorname{sen}\theta = b$	$\cos\theta = a$	$\tan\theta = \dfrac{b}{a}, \quad a \neq 0$
$\csc\theta = \dfrac{1}{b}, \quad b \neq 0$	$\sec\theta = \dfrac{1}{a}, \quad a \neq 0$	$\cot\theta = \dfrac{a}{b}, \quad b \neq 0$

Para sen θ y cos θ, θ puede ser cualquier ángulo, así se deduce que el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de todos los números reales.

> El dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales.
> El dominio de la función coseno es el conjunto de todos los números reales.

Si $a = 0$, entonces la función tangente y la función secante no están definidas. Así que, para la función tangente y la función secante, la coordenada x de $P = (a, b)$ no puede ser cero. Sobre el círculo unitario hay dos de tales puntos, $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Estos dos puntos corresponden a los ángulos $\pi/2$ (90°) y $3\pi/2$ (270°) o, de manera más general, cualquier ángulo que sea un múltiplo impar de $\pi/2$ (90°), tal como $\pi/2$ (90°), $3\pi/2$ (270°), $5\pi/2$ (450°), $-\pi/2$ (−90°), $-3\pi/2$ (−270°), y así sucesivamente. Por lo tanto, dichos ángulos deben ser excluidos del dominio de las funciones tangente y secante.

> El dominio de la función tangente es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$ (90°).
>
> El dominio de la función secante es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$ (90°).

Si $b = 0$, entonces las funciones cotangente y cosecante no están definidas. Así que para éstas, la coordenada y de $P = (a, b)$ no puede ser cero. Sobre el círculo unitario, hay dos de tales puntos, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Estos dos puntos corresponden a los ángulos 0 (0°) y π (180°) o, de manera más general, a cualquier ángulo que sea un múltiplo entero de π (180°), tal como 0 (0°), π (180°), 2π (360°), 3π (540°), $-\pi$ (−180°), y así sucesivamente. Por lo tanto, dichos ángulos deben ser excluidos del dominio de las funciones cotangente y cosecante.

> El dominio de la función cotangente es el conjunto de todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°).
>
> El dominio de la función cosecante es el conjunto de todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°).

Ahora determinemos el rango de cada una de las seis funciones trigonométricas refiriéndonos otra vez a la figura 33. Sea $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde al ángulo θ. Se deduce que $-1 \leq a \leq 1$ y $-1 \leq b \leq 1$. En consecuencia, ya que sen $\theta = b$ y cos $\theta = a$, tenemos

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

Así, el rango de las funciones seno y coseno lo constituyen todos los números reales entre -1 y 1, inclusive. En términos de la notación de valor absoluto, tenemos $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$ y $|\cos\theta| \leq 1$.

De manera análoga, si θ no es un múltiplo de π (180°), entonces csc $\theta = 1/b$. Como $b = \operatorname{sen}\theta$ y $|b| = |\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, se deduce que $|\csc\theta| = 1/|b| \geq 1$. En consecuencia, el rango de la función cosecante lo constituyen todos los números reales menores o iguales a -1 o mayores o iguales a 1. Esto es,

$$\csc\theta \leq -1 \quad \text{o} \quad \csc\theta \geq 1$$

Si θ no es un múltiplo impar de $\pi/2$ (90°), entonces, por definición, sec $\theta = 1/a$. Como $a = \cos\theta$ y $|a| = |\cos\theta| \leq 1$, se deduce que $|\sec\theta| = 1/|a| \geq 1$. Por tanto, el rango de la función secante lo constituyen todos los números reales menores o iguales a -1 o mayores o iguales a 1.

$$\sec\theta \leq -1 \quad \text{o} \quad \sec\theta \geq 1$$

El rango de las funciones tangente y cotangente lo constituyen todos los números reales. Se le pedirá comprobar esto en los problemas 91 y 92.

$$-\infty < \tan\theta < \infty \qquad -\infty < \cot\theta < \infty$$

La tabla 4 resume los resultados anteriores.

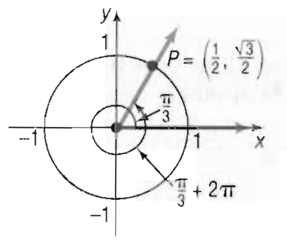
TABLA 4

FUNCIÓN	SÍMBOLO	DOMINIO	RANGO
seno	$f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$	Todos los números reales	Todos los números reales desde -1 hasta 1, inclusive
coseno	$f(\theta) = \cos\theta$	Todos los números reales	Todos los números reales desde -1 hasta 1, inclusive
tangente	$f(\theta) = \tan\theta$	Todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$ (90°)	Todos los números reales
cosecante	$f(\theta) = \csc\theta$	Todos los números reales, excepto los múltiplos enteros de π (180°)	Todos los números reales o iguales a 1 o menores o iguales a -1
secante	$f(\theta) = \sec\theta$	Todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$ (90°)	Todos los números reales mayores o iguales a 1 o menores o iguales a -1
cotangente	$f(\theta) = \cot\theta$	Todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°)	Todos los números reales

■ Ahora resuelva el problema 85.

Periodo de las funciones trigonométricas

FIGURA 34



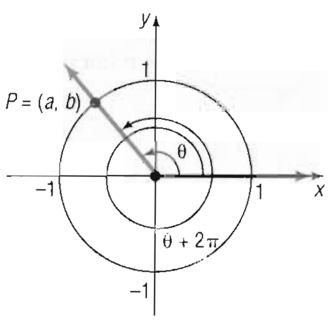
Véase la figura 34. Esta figura muestra que, para un ángulo de $\pi/3$ radianes, el punto correspondiente P sobre el círculo unitario es $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Obsérvese que, para un ángulo de $\pi/3 + 2\pi$ radianes, el punto correspondiente P sobre el círculo unitario también es $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Así,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \frac{1}{2}$$

Este ejemplo ilustra una situación más general. Para un ángulo dado θ, medido en radianes, suponga que conocemos el punto correspondiente $P = (a, b)$ sobre el círculo unitario. Luego sumamos 2π a θ. El punto sobre el círculo unitario correspondiente a $\theta + 2\pi$ es igual al punto P sobre el círculo unitario correspondiente a θ. *Véase* la figura 35. Así, los valores de las funciones trigonométricas de $\theta + 2\pi$ son iguales a los de las funciones trigonométricas correspondientes de θ.

FIGURA 35



Si sumamos (o restamos) múltiplos enteros de 2π a θ, los valores trigonométricos no cambian. Esto es, para toda θ,

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi k) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi k) = \cos\theta \tag{1}$$

donde k es cualquier entero.

Las funciones que exhiben esta clase de comportamiento son llamadas *funciones periódicas.*

Visualizando el concepto. Para ver el comportamiento periódico de la función seno haga la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$, $y = \operatorname{sen}(x - 2\pi)$, y $y = \operatorname{sen}(x + 4\pi)$ en la misma pantalla.

Función periódica

Una función f es llamada **periódica** si existe un número positivo p tal que siempre y cuando θ esté en el dominio de f, también lo esté $\theta + p$, y

$$f(\theta + p) = f(\theta)$$

Periodo

Si existe un número mínimo p con la propiedad anterior, se le llama **periodo (fundamental)** de f.

Así que, con base en la ecuación (1), las funciones seno y coseno son periódicas. De hecho, las funciones seno y coseno tienen periodo 2π. Se le pide demostrar este hecho en los problemas 93 y 94. Las funciones secante y cosecante también son periódicas con periodo 2π, las funciones tangente y cotangente son periódicas con periodo π. Se le pide demostrar estas proposiciones en los problemas del 95 al 98.

Propiedades periódicas

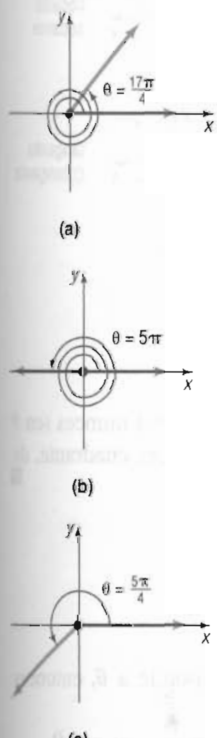
$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi k) = \operatorname{sen}\theta$	$\cos(\theta + 2\pi k) = \cos\theta$	$\tan(\theta + \pi k) = \tan\theta$
$\csc(\theta + 2\pi k) = \csc\theta$	$\sec(\theta + 2\pi k) = \sec\theta$	$\cot(\theta + \pi k) = \cot\theta$

donde k es cualquier entero.

Ya que las funciones seno, coseno, secante y cosecante tienen periodo 2π, una vez que conocemos sus valores para $0 \le \theta < 2\pi$, tenemos todos sus valores; de manera análoga, ya que las funciones tangente y cotangente tienen periodo π, una vez que conocemos sus valores para $0 \le \theta < \pi$, tenemos todos sus valores.

EJEMPLO 1 *Determinación de valores exactos usando propiedades periódicas*

FIGURA 36



Encontrar el valor exacto de

(a) $\operatorname{sen}\dfrac{17\pi}{4}$ (b) $\cos 5\pi$ (c) $\tan\dfrac{5\pi}{4}$

Solución

(a) Es mejor trazar primero el ángulo, como se muestra en la figura 36(a). Como el periodo de la función seno es 2π, cada vuelta completa puede ser ignorada. Esto deja el ángulo $\pi/4$. Por tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{17\pi}{4} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) *Véase* la figura 36(b). Como el periodo de la función coseno es 2π, cada vuelta completa puede ser ignorada. Esto deja el ángulo π. Por tanto,

$$\cos 5\pi = \cos(\pi + 4\pi) = \cos\pi = -1$$

(c) *Véase* la figura 36(c). Como el periodo de la función tangente es π, cada media vuelta puede ser ignorada. Esto deja el ángulo $\pi/4$. Por tanto,

$$\tan\frac{5\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

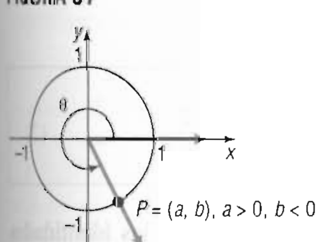
■

Las propiedades periódicas de las funciones trigonométricas nos serán muy útiles cuando estudiemos sus gráficas en el capítulo siguiente.

■ Ahora resuelva el problema 1.

Los signos de las funciones trigonométricas

FIGURA 37



Sea $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde al ángulo θ. Si sabemos en qué cuadrante está el punto P, entonces podemos determinar los signos de las funciones trigonométricas de θ. Por ejemplo, si $P = (a, b)$ está en el cuarto cuadrante, como se muestra en la figura 37, entonces sabemos que $a > 0$ y $b < 0$. En consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = b < 0 \qquad \cos\theta = a > 0 \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} < 0$$

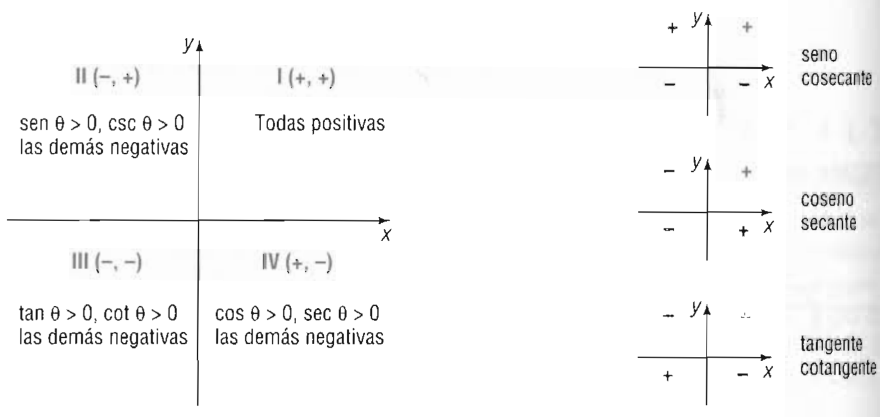
$$\csc\theta = \frac{1}{b} < 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{a} > 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} < 0$$

La tabla 5 enlista los signos de las seis funciones trigonométricas para cada cuadrante. También *véase* la figura 38.

TABLA 5

CUADRANTE DE P	sen θ, csc θ	cos θ, sec θ	tan θ, cot θ
I	Positivo	Positivo	Positivo
II	Positivo	Negativo	Negativo
III	Negativo	Negativo	Positivo
IV	Negativo	Positivo	Negativo

FIGURA 38



(a) (b)

EJEMPLO 2 *Determinación del cuadrante en que está un ángulo θ*

Si sen $\theta < 0$ y cos $\theta < 0$, diga en qué cuadrante está el ángulo θ.

Solución

Sea $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ. Entonces sen $\theta = b < 0$ y cos $\theta = a < 0$. Así que, $P = (a, b)$ debe estar en el tercer cuadrante, de modo que θ está en el tercer cuadrante. ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

Identidades fundamentales

Si $P = (a, b)$ es un punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ, entonces

$$\text{sen}\ \theta = b \qquad \cos\theta = a \qquad \tan\theta = \frac{b}{a},\quad \text{si } a \neq 0$$

$$\csc\theta = \frac{1}{b},\quad \text{si } b \neq 0 \qquad \sec\theta = \frac{1}{a},\quad \text{si } a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b},\quad \text{si } b \neq 0$$

Por tanto, tenemos las **identidades recíprocas:**

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \tag{2}$$

Otras dos identidades fundamentales que son fáciles de ver son las **identidades cocientes:**

Identidades cocientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{3}$$

Las demostraciones de las fórmulas (2) y (3) se deducen de las definiciones de las funciones trigonométricas. (*Véanse* los problemas 99 y 100.)

Visualizando el concepto. Para ver la identidad $\tan\theta = (\operatorname{sen}\theta)/(\cos\theta)$, haga la gráfica de $y = \tan x$ y $y = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ en la misma pantalla.

Si sen θ y cos θ son conocidos, las fórmulas (2) y (3) hacen fácil encontrar los valores de las demás funciones trigonométricas.

EJEMPLO 3 *Determinación de valores exactos usando identidades cuando se dan el seno y el coseno*

Dado $\operatorname{sen}\theta = 1/\sqrt{5}$ y $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$, encontrar los valores exactos de las otras funciones trigonométricas de θ.

Solución Con base en la identidad cociente de la fórmula (3), tenemos

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

Entonces usamos las identidades recíprocas de la fórmula (2) para obtener

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{1/\sqrt{5}} = \sqrt{5} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{2/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

■

■ Ahora resuelva el problema 25.

La ecuación del círculo unitario es $x^2 + y^2 = 1$. Así que, si $P = (a, b)$ es el punto en el lado final de un ángulo θ y P está sobre el círculo unitario, entonces

$$b^2 + a^2 = 1$$

Pero $b = \operatorname{sen}\theta$ y $a = \cos\theta$. Por tanto,

$$(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \tag{4}$$

Es costumbre escribir $\operatorname{sen}^2\theta$ en lugar de $(\operatorname{sen}\theta)^2$, $\cos^2\theta$ en lugar de $(\cos\theta)^2$, y así sucesivamente. Con esta notación, podemos reescribir la ecuación (4) como

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{5}$$

Si $\cos\theta \neq 0$, podemos dividir cada miembro de la ecuación (5) entre $\cos^2\theta$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

Ahora usamos las fórmulas (2) y (3) para obtener

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \tag{6}$$

De manera análoga, si sen $\theta \neq 0$, podemos dividir la ecuación (5) entre $\operatorname{sen}^2\theta$ y usar las fórmulas (2) y (3) para obtener el resultado:

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \tag{7}$$

En conjunto, las identidades en las ecuaciones (5), (6) y (7) son conocidas como **identidades pitagóricas.**

Hagamos una pausa aquí para resumir las identidades fundamentales.

Identidades fundamentales

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

La identidad pitagórica

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

puede ser resuelta para sen θ en términos de cos θ (o viceversa) como sigue:

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

donde el signo + es usado si sen $\theta > 0$ y el signo − es usado si sen $\theta < 0$.

EJEMPLO 4

Determinación de valores exactos dado un valor y el signo de otro

Dado que sen $\theta = \frac{1}{3}$ y cos $\theta < 0$, encontrar el valor exacto de cada una de las otras cinco funciones trigonométricas.

Solución

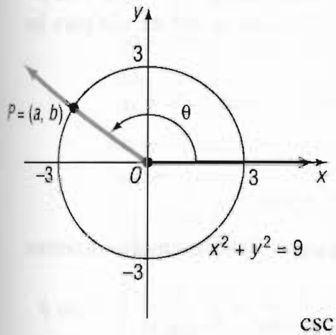
Resolvemos este problema de dos maneras: la primera usa la definición de las funciones trigonométricas; en el segundo método se aplican las identidades fundamentales.

Al usar la definición

Solución 1

Suponga que $P = (a, b)$ es un punto en el lado final de θ situado a una distancia de 3 unidades desde el origen. Como sen $\theta > 0$ y cos $\theta < 0$, el punto P está en el segundo cuadrante. *Véase* la figura 39. (¿Advierte por qué seleccionamos 3 unidades? Observe que sen $\theta = \frac{1}{3} = b/r$. La selección $r = 3$ hace que nuestros cálculos sean sencillos.) Con esta elección, $b = 1$ y $r = 3$. Como cos $\theta = a/r < 0$, se deduce que $a < 0$. Por tanto,

FIGURA 39



$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= r^2 && b = 1, r = 3, a < 0 \\ a^2 + 1^2 &= 3^2 \\ a^2 &= 8 \\ a &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Así,

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{b} = \frac{3}{1} = 3 \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} = \frac{3}{-2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{-2\sqrt{2}}{1} = -2\sqrt{2}$$

■

Solución 2 *Al usar identidades*

Primero, resolvemos la ecuación (5) para $\cos\theta$:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ \cos^2\theta &= 1 - \text{sen}^2\,\theta \\ \cos\theta &= \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\theta} \end{aligned}$$

Como $\cos\theta < 0$, elegimos el signo menos:

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\theta} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}}}{=} -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ahora conocemos los valores de $\text{sen}\,\theta$ y $\cos\theta$, de modo que usamos las fórmulas (2) y (3) para obtener

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{-2\sqrt{2}/3} = \frac{1}{-2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{4} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -2\sqrt{2}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-2\sqrt{2}/3} = \frac{-3}{2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2}}{4} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

■

■ Ahora resuelva el problema 33.

Propiedades par e impar

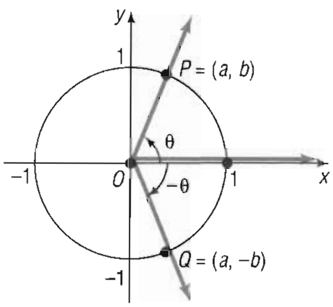
Recuerde que una función f es par si $f(-\theta) = f(\theta)$ para toda θ en el dominio de f; una función f es impar si $f(-\theta) = -f(\theta)$ para toda θ en el dominio de f. Ahora mostraremos que las funciones trigonométricas seno, tangente, cotangente y cosecante son funciones impares, mientras que coseno y secante son funciones pares.

Teorema propiedades par e impar

$$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

FIGURA 40



Demostración Sea $P = (a, b)$ el punto en el lado final del ángulo θ que está sobre el círculo unitario. (*Véase* la figura 40.) El punto Q en el lado final del ángulo $-\theta$ que está sobre el círculo unitario tendrá las coordenadas $(a, -b)$. Usando la definición para las funciones trigonométricas, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = b \qquad \cos\theta = a \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -b \qquad \cos(-\theta) = a$$

de modo que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Ahora, usando estos resultados y algunas de las identidades fundamentales, tenemos

$$\tan(-\theta) = \frac{\operatorname{sen}(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = \frac{1}{\tan(-\theta)} = \frac{1}{-\tan\theta} = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \frac{1}{\cos(-\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-\theta)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}\theta} = -\csc\theta$$

■

Visualizando el concepto. Para ver que la función coseno es par, haga la gráfica de $y = \cos x$ y luego $y = \cos(-x)$. Limpie la pantalla. Luego haga la gráfica de $y = -\operatorname{sen} x$ y $y = \operatorname{sen}(-x)$.

EJEMPLO 5 *Determinación de valores exactos usando las propiedades par e impar*

Encontrar el valor exacto de

(a) $\operatorname{sen}(-45°)$ (b) $\cos(-\pi)$ (c) $\cot(-3\pi/2)$ (d) $\tan(-37\pi/4)$

Solución (a) $\operatorname{sen}(-45°) \underset{\text{Función par}}{=} -\operatorname{sen}45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\cos(-\pi) \underset{\text{Función impar}}{=} \cos\pi = -1$

(c) $\cot\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right) \underset{\text{Función par}}{=} -\cot\dfrac{3\pi}{2} = 0$

(d) $\tan\left(-\dfrac{37\pi}{4}\right) \underset{\text{Función par}}{=} -\tan\dfrac{37\pi}{4} = -\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + 9\pi\right) \underset{\text{Periodo es }\pi}{=} -\tan\dfrac{\pi}{4} = -1$

■

■ Ahora resuelva el problema 49.

5.3 Ejercicio 5.3

En los problemas del 1 al 16 utilice el hecho de que las funciones trigonométricas son periódicas para encontrar el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

1. $\operatorname{sen} 405°$
2. $\cos 420°$
3. $\tan 405°$
4. $\operatorname{sen} 390°$
5. $\csc 450°$
6. $\sec 540°$
7. $\cot 390°$
8. $\sec 420°$
9. $\cos \dfrac{33\pi}{4}$
10. $\operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{4}$
11. $\tan 21\pi$
12. $\csc \dfrac{9\pi}{2}$
13. $\sec \dfrac{17\pi}{4}$
14. $\cot \dfrac{17\pi}{4}$
15. $\tan \dfrac{19\pi}{6}$
16. $\sec \dfrac{25\pi}{6}$

En los problemas del 17 al 24 diga en qué cuadrante está el ángulo θ.

17. $\operatorname{sen}\theta > 0,\ \cos\theta < 0$
18. $\operatorname{sen}\theta < 0,\ \cos\theta > 0$
19. $\operatorname{sen}\theta < 0,\ \tan\theta < 0$
20. $\cos\theta > 0,\ \tan\theta > 0$
21. $\cos\theta > 0,\ \tan\theta < 0$
22. $\cos\theta < 0,\ \tan\theta > 0$
23. $\sec\theta < 0,\ \operatorname{sen}\theta > 0$
24. $\csc\theta > 0,\ \cos\theta < 0$

En los problemas del 25 al 32 se dan sen θ y cos θ. Encuentre el valor exacto de cada una de las otras cuatro funciones trigonométricas.

25. $\operatorname{sen}\theta = 2/\sqrt{5},\ \cos\theta = 1/\sqrt{5}$
26. $\operatorname{sen}\theta = -1/\sqrt{5},\ \cos\theta = -2/\sqrt{5}$
27. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2},\ \cos\theta = \sqrt{3}/2$
28. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2,\ \cos\theta = \frac{1}{2}$
29. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3},\ \cos\theta = 2\sqrt{2}/3$
30. $\operatorname{sen}\theta = 2\sqrt{2}/3,\ \cos\theta = -\frac{1}{3}$
31. $\operatorname{sen}\theta = 0.2588,\ \cos\theta = 0.9659$
32. $\operatorname{sen}\theta = 0.6428,\ \cos\theta = 0.7660$

En los problemas del 33 al 48 encuentre el valor exacto de cada una de las restantes funciones trigonométricas de θ.

33. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13},\ 90° < \theta < 180°$
34. $\cos\theta = \frac{3}{5},\ 270° < \theta < 360°$
35. $\cos\theta = -\frac{4}{5},\ \pi < \theta < 3\pi/2$
36. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13},\ \pi < \theta < 3\pi/2$
37. $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13},\ \cos\theta < 0$
38. $\cos\theta = \frac{4}{5},\ \operatorname{sen}\theta < 0$
39. $\cos\theta = -\frac{1}{3},\ \csc\theta > 0$
40. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2}{3},\ \sec\theta > 0$
41. $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3},\ \tan\theta < 0$
42. $\cos\theta = -\frac{1}{4},\ \tan\theta > 0$
43. $\sec\theta = 2,\ \operatorname{sen}\theta < 0$
44. $\csc\theta = 3,\ \cot\theta < 0$
45. $\tan\theta = \frac{3}{4},\ \operatorname{sen}\theta < 0$
46. $\cot\theta = \frac{4}{3},\ \cos\theta < 0$
47. $\tan\theta = -\frac{1}{3},\ \operatorname{sen}\theta > 0$
48. $\sec\theta = -2,\ \tan\theta > 0$

En los problemas del 49 al 66 utilice las propiedades par e impar para encontrar el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

49. $\operatorname{sen}(-60°)$
50. $\cos(-30°)$
51. $\tan(-30°)$
52. $\operatorname{sen}(-135°)$
53. $\sec(-60°)$
54. $\csc(-30°)$
55. $\operatorname{sen}(-90°)$
56. $\cos(-270°)$
57. $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
58. $\operatorname{sen}(-\pi)$
59. $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
60. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
61. $\tan(-\pi)$
62. $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
63. $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
64. $\sec(-\pi)$
65. $\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
66. $\csc\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

En los problemas del 67 al 78 encuentre el valor de cada expresión. No utilice calculadora.

67. $\operatorname{sen}(-\pi) + \cos 5\pi$
68. $\tan\left(-\frac{5\pi}{4}\right) - \cot\frac{7\pi}{2}$
69. $\sec(-\pi) + \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
70. $\tan(-6\pi) + \cos\frac{9\pi}{4}$
71. $\operatorname{sen}\left(-\frac{9\pi}{4}\right) - \tan\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$
72. $\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
73. $\operatorname{sen}^2 40° + \cos^2 40°$
74. $\sec^2 18° - \tan^2 18°$
75. $\operatorname{sen} 80° \csc 80°$
76. $\tan 10° \cot 10°$
77. $\tan 40° - \frac{\operatorname{sen} 40°}{\cos 40°}$
78. $\cot 20° - \frac{\cos 20°}{\operatorname{sen} 20°}$

79. Si $\operatorname{sen}\theta = 0.3$, encuentre el valor de $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}(\theta + 2\pi) + \operatorname{sen}(\theta + 4\pi)$.

80. Si $\cos\theta = 0.2$, encuentre el valor de $\cos\theta + \cos(\theta + 2\pi) + \cos(\theta + 4\pi)$.

81. Si $\tan\theta = 3$, encuentre el valor de $\tan\theta + \tan(\theta + \pi) + \tan(\theta + 2\pi)$.

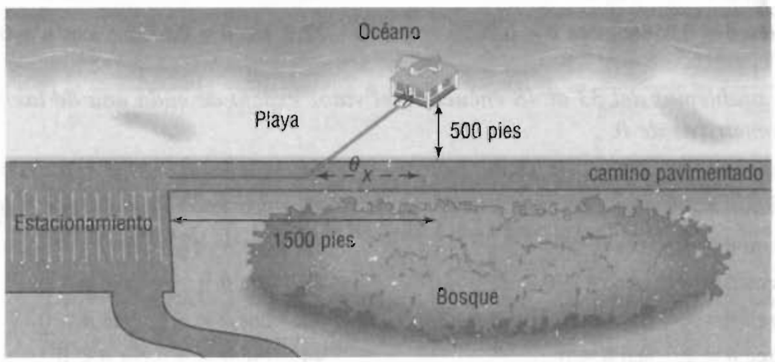
82. Si $\cot\theta = -2$, encuentre el valor de $\cot\theta + \cot(\theta - \pi) + \cot(\theta - 2\pi)$.

83. *Cálculo del tiempo de un traslado.* Usted quiere caminar desde un estacionamiento hasta una casa frente al océano. La casa está ubicada a 1500 pies desde el estacionamiento en la dirección de un camino pavimentado paralelo al océano, y a 500 pies en sentido perpendicular al camino. *Véase* la ilustración. Por el camino usted puede avanzar a 300 pies por minuto, pero en la arena sólo lo hace a 100 pies por minuto.

El tiempo T para ir desde el estacionamiento hasta la casa de la playa puede ser expresado como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración

$$T(\theta) = 5 - \frac{5}{3\tan\theta} + \frac{5}{\operatorname{sen}\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

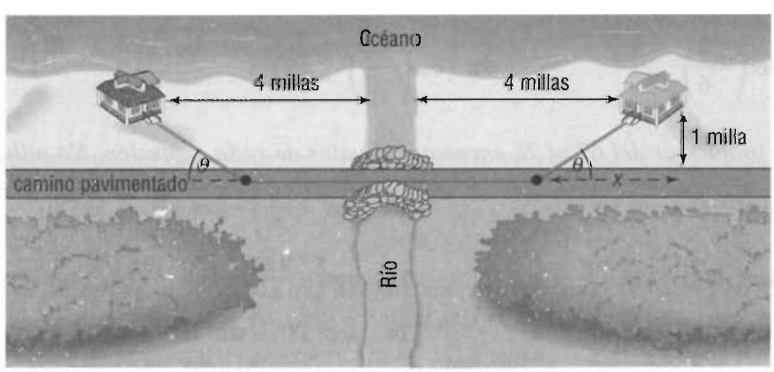
Calcule el tiempo T si camina directamente desde el estacionamiento a la casa [*Sugerencia:* $\tan\theta = 500/1500$.]



84. *Cálculo del tiempo de un traslado.* Dos casas frente al océano están separadas 8 millas en línea recta sobre la playa, cada una queda a una milla de un camino pavimentado paralelo al océano. Sally puede caminar a 8 millas por hora en la carretera pavimentada, pero sólo a 3 millas por hora en la arena. A causa de un río que está entre las dos casas, es necesario caminar por la arena hacia la carretera, continuar por ésta y luego caminar de nuevo por la arena para ir de una casa a otra. *Véase* la ilustración. El tiempo T para ir de una casa a la otra como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración es

$$T(\theta) = 1 + \frac{2}{3\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{4\tan\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

(a) Calcule el tiempo T para $\tan\theta = 1/4$.
(b) Describa el camino que se tomó.
(c) Explique por qué θ debe ser mayor de 14°.



85. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \tan\theta$?

86. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \cot\theta$?

87. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \sec\theta$?

88. ¿Para qué números θ no está definida $f(\theta) = \csc\theta$?

89. ¿Cuál es el valor de sen $k\pi$, donde k es cualquier entero?

90. ¿Cuál es el valor de cos $k\pi$, donde k es cualquier entero?

91. Demuestre que el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

92. Demuestre que el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.

93. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$ es 2π. [*Sugerencia*: Suponga que $0 < p < 2\pi$ existe de modo que $\text{sen}(\theta + p) = \text{sen}\ \theta$ para todo θ. Sea $\theta = 0$ encuentre p. Luego haga $\theta = \pi/2$ para obtener una contradicción.]

94. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \cos\theta$ es 2π.

95. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \sec\theta$ es 2π.

96. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \csc\theta$ es 2π.

97. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \tan\theta$ es π.

98. Demuestre que el periodo de $f(\theta) = \cot\theta$ es π.

99. Demuestre las identidades recíprocas dadas en la fórmula (2).

100. Demuestre las identidades cocientes dadas en la fórmula (3).

101. Establezca la identidad: $(\text{sen}\ \theta \cos\phi)^2 + (\text{sen}\ \theta\ \text{sen}\ \phi)^2 + \cos^2\theta = 1$

102. Anote cinco características de la función tangente y explique el significado de cada una.

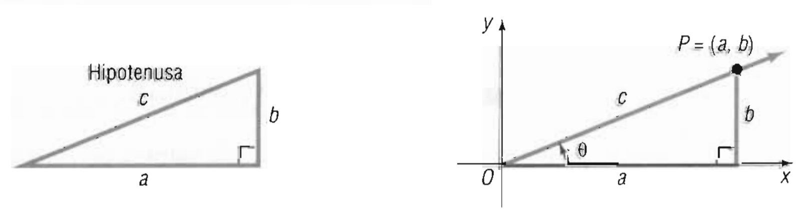
103. Describa lo que entiende por función periódica.

5.4 Trigonometría del triángulo rectángulo

Un triángulo en el que un ángulo es recto (90°) se llama **triángulo rectángulo.** Recuerde que el lado opuesto al ángulo recto es llamado **hipotenusa** y los otros dos lados son los **catetos** del triángulo. En la figura 41(a), hemos marcado la hipotenusa como c, para indicar que su longitud es c unidades y, de una manera parecida, hemos marcado los catetos como a y b. Ya que el triángulo es un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras nos dice que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

FIGURA 41

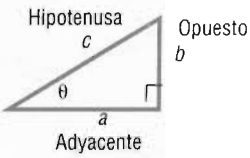


(a) (b)

Ahora, suponga que θ es un **ángulo agudo;** esto es, $0° < \theta < 90°$ (si θ es medido en radianes) o $0 < \theta < \pi/2$ (si θ es medido en radianes). Coloque θ en posición estándar, y sea $P = (a, b)$ cualquier punto excepto el origen O sobre el lado final de θ. Construya un triángulo rectángulo trazando hacia abajo la perpendicular desde P hasta el eje x, como se muestra en la figura 41(b).

Llamando a las longitudes de los lados del triángulo con los nombres hipotenusa (c), cateto opuesto (b) y cateto adyacente (a), como se indica en la figura 42, podemos expresar las funciones trigonométricas de θ como las razones de los lados de un triángulo rectángulo:

FIGURA 42



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \cos\theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \frac{b}{a} \qquad \csc\theta = \frac{\text{Hpotenusa}}{\text{Opuesto}} = \frac{c}{b} \quad (1)$$
$$\sec\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}} = \frac{c}{a} \qquad \cot\theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Observe que cada una de las funciones trigonométricas del ángulo agudo θ es positiva.

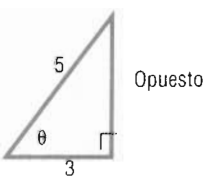
EJEMPLO 1 *Determinación del valor de las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo*

Encontrar el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en la figura 43.

Solución Advierta en la figura 43 que los dos lados del triángulo son

$$c = \text{Hipotenusa} = 5 \qquad a = \text{Adyacente} = 3$$

FIGURA 43



Para encontrar la longitud del cateto opuesto usamos el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}(\text{adyacente})^2 + (\text{opuesto})^2 &= (\text{hipotenusa})^2\\ 3^2 + (\text{opuesto})^2 &= 5^2\\ (\text{opuesto})^2 &= 25 - 9 = 16\\ \text{opuesto} &= 4\end{aligned}$$

Ahora que conocemos las longitudes de los tres lados, usamos las razones en (1) para encontrar el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{4}{5} \qquad \cos\theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{3}{5} \qquad \tan\theta = \frac{\text{Opuesto}}{\text{Adyacente}} = \frac{4}{3}$$
$$\csc\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Opuesto}} = \frac{5}{4} \qquad \sec\theta = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Adyacente}} = \frac{5}{3} \qquad \cot\theta = \frac{\text{Adyacente}}{\text{Opuesto}} = \frac{3}{4}$$

■

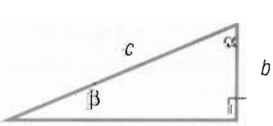
■ Ahora resuelva el problema 1.

De esta manera, los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo son razones de las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Esta manera de ver las funciones trigonométricas conduce a muchas aplicaciones y, de hecho, era el punto de vista usado por los primeros matemáticos (antes del cálculo) al estudiar trigonometría.

Ángulos complementarios: cofunciones

Dos ángulos agudos son llamados **complementarios** cuando su suma es un ángulo recto. Dado que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°, se deduce que, para formar un ángulo recto, los dos ángulos agudos son complementarios.

FIGURA 44



Observe ahora la figura 44; hemos marcado el ángulo opuesto al lado b como β y el ángulo opuesto al lado a como α. Nótese que el lado b es adyacente al ángulo α y que el lado a es adyacente al ángulo β. Como consecuencia de esto,

$$\text{sen}\ \beta = \frac{b}{c} = \cos\alpha \qquad \cos\beta = \frac{a}{c} = \text{sen}\ \alpha \qquad \tan\beta = \frac{b}{a} = \cot\alpha$$
$$\csc\beta = \frac{c}{b} = \sec\alpha \qquad \sec\beta = \frac{c}{a} = \csc\alpha \qquad \cot\beta = \frac{a}{b} = \tan\alpha \tag{2}$$

A causa de estas relaciones, las funciones seno y coseno, tangente y cotangente, y secante y cosecante, son llamadas **cofunciones** una de la otra. Las identidades (2) pueden ser expresadas en palabras como sigue:

Teorema Las cofunciones de ángulos complementarios son iguales. ■

A continuación se dan ejemplos de este teorema:

Ángulos complementarios	Ángulos complementarios	Ángulos complementarios
sen 30° = cos 60°	tan 40° = cot 50°	sec 80° = csc 10°
Cofunciones	Cofunciones	Cofunciones

Si θ es un ángulo agudo medido en grados, el ángulo $90° - \theta$ (o $\pi/2 - \theta$, si θ se mide en radianes) es el ángulo complementario a θ. La tabla 6 repite el teorema anterior acerca de cofunciones.

TABLA 6

θ (GRADOS)	θ (RADIANES)
$\text{sen}\ \theta = \cos(90° - \theta)$	$\text{sen}\ \theta = \cos(\pi/2 - \theta)$
$\cos\theta = \text{sen}(90° - \theta)$	$\cos\theta = \text{sen}(\pi/2 - \theta)$
$\tan\theta = \cot(90° - \theta)$	$\tan\theta = \cot(\pi/2 - \theta)$
$\csc\theta = \sec(90° - \theta)$	$\csc\theta = \sec(\pi/2 - \theta)$
$\sec\theta = \csc(90° - \theta)$	$\sec\theta = \csc(\pi/2 - \theta)$
$\cot\theta = \tan(90° - \theta)$	$\cot\theta = \tan(\pi/2 - \theta)$

Aunque el ángulo θ en la tabla 6 es agudo, más adelante veremos que estos resultados son válidos para cualquier ángulo θ.

Visualización del concepto. Haga la gráfica de $y = \text{sen}\ x$ y $y = \cos(90° - x)$. Asegúrese de que el modo de operación esté en grados.

EJEMPLO 2 *Uso del teorema en cofunciones*

(a) $\text{sen}\ 62° = \cos(90° - 62°) = \cos 28°$ (b) $\tan\frac{\pi}{12} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cot\frac{5\pi}{12}$

(c) $\cos\frac{\pi}{4} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen}\ \frac{\pi}{4}$ (d) $\csc\frac{\pi}{6} = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sec\frac{\pi}{3}$ ■

■ Ahora resuelva el problema 57(a).

Ángulo de referencia

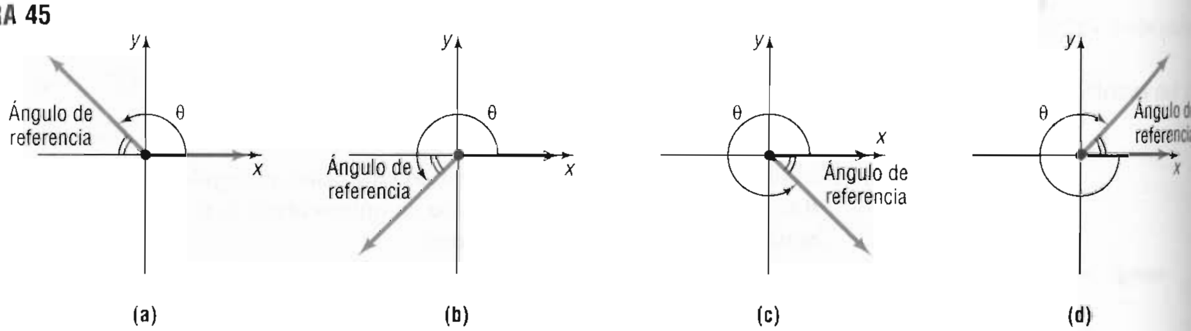
Nos concentraremos ahora en ángulos que están en un cuadrante. Una vez que sepamos en qué cuadrante está un ángulo, sabremos el signo de cada valor de sus funciones trigonométricas. El uso de cierto ángulo de referencia puede ayudarnos a evaluar sus funciones trigonométricas.

Ángulo de referencia

> Sea θ un ángulo no agudo que esté en un cuadrante. El ángulo agudo formado por el lado final de θ y la parte positiva o la negativa del eje x, es llamado **ángulo de referencia** para θ.

La figura 45 ilustra el ángulo de referencia para algunos ángulos θ. Observe que un ángulo de referencia siempre es un ángulo agudo, cuya medida está entre 0° y 90°.

FIGURA 45



Aunque pueden ser dadas fórmulas para calcular ángulos de referencia, por lo común es más fácil encontrarlos haciendo un bosquejo rápido del ángulo en cuestión.

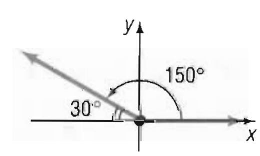
EJEMPLO 3 *Determinación de ángulos de referencia*

Encontrar el ángulo de referencia para cada uno de los ángulos siguientes:

(a) 150° (b) $-45°$ (c) $9\pi/4$ (d) $-5\pi/6$

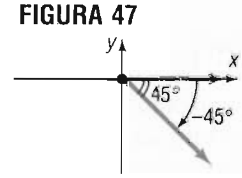
Solución (a) *Véase* la figura 46. El ángulo de referencia para 150° es 30°.

FIGURA 46



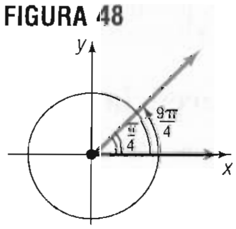
(b) *Véase* la figura 47. El ángulo de referencia para $-45°$ es 45°.

FIGURA 47



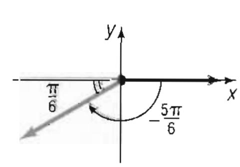
(c) *Véase* la figura 48. El ángulo de referencia para $9\pi/4$ es $\pi/4$.

FIGURA 48



(d) *Véase* la figura 49. El ángulo de referencia para $-5\pi/6$ es $\pi/6$.

FIGURA 49



■ Ahora resuelva el problema 11.

La ventaja de utilizar ángulos de referencia es que, salvo por el signo correcto, los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo general θ son iguales a los de las funciones trigonométricas de su ángulo de referencia.

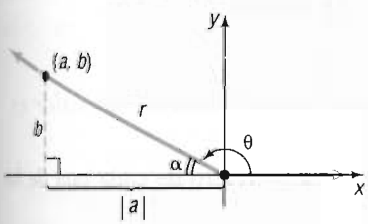
Teorema ángulos de referencia

Si θ es un ángulo que está en un cuadrante y α es su ángulo de referencia, entonces

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen}\theta = \pm\operatorname{sen}\alpha & \cos\theta = \pm\cos\alpha & \tan\theta = \pm\tan\alpha \\ \csc\theta = \pm\csc\alpha & \sec\theta = \pm\sec\alpha & \cot\theta = \pm\cot\alpha \end{array} \quad (3)$$

donde el signo + o − depende del cuadrante en el cual esté θ. ■

FIGURA 50
$\operatorname{sen}\theta = b/c$, $\operatorname{sen}\alpha = b/c$;
$\cos\theta = a/c$, $\cos\alpha = |a|/c$



Por ejemplo, suponga que θ está en el segundo cuadrante y que α es su ángulo de referencia. *Véase* la figura 50. Si (a, b) es un punto sobre el lado final de θ y si $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{-|a|}{c} = -\cos\alpha$$

y así sucesivamente.

El ejemplo siguiente ilustra cómo se utiliza el teorema sobre ángulos de referencia.

EJEMPLO 4 *Uso de ángulos de referencia para encontrar el valor de funciones trigonométricas*

Encontrar el valor exacto de cada una de las siguientes funciones trigonométricas usando ángulos de referencia:

(a) $\operatorname{sen} 135°$ (b) $\cos 240°$ (c) $\cos\dfrac{5\pi}{6}$ (d) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$

Solución (a) *Véase* la figura 51. El ángulo de 135° está en el segundo cuadrante, donde la función seno es positiva. El ángulo de referencia para 135° es 45°. Por tanto,

$$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

FIGURA 51

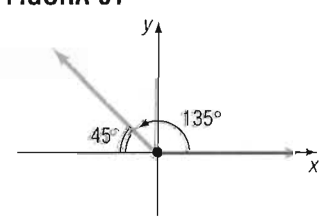
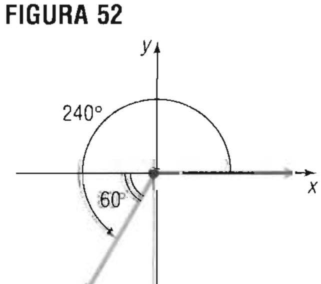


FIGURA 52



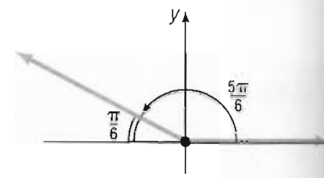
(b) *Véase* la figura 52. El ángulo de 240° está en el tercer cuadrante, donde la función coseno es negativa. El ángulo de referencia para 240° es 60°. Por tanto,

$$\cos 240° = -\cos 60° = -\tfrac{1}{2}$$

(c) *Véase* la figura 53. El ángulo de $5\pi/6$ está en el segundo cuadrante, donde la función coseno es negativa. El ángulo de referencia para $5\pi/6$ es $\pi/6$. Por tanto,

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

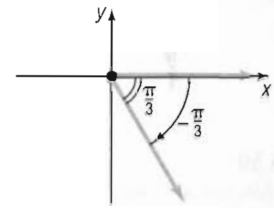
FIGURA 53



(d) *Véase* la figura 54. El ángulo de $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, donde la función tangente es negativa. El ángulo de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$. Por tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

FIGURA 54



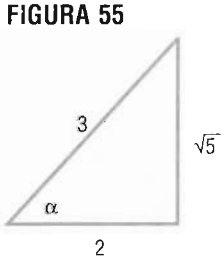
■ Ahora resuelva los problemas 27 y 45.

EJEMPLO 5 *Uso de triángulos rectángulos para encontrar valores cuando un valor es conocido*

Dado que $\cos\theta = -\frac{2}{3}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, encontrar el valor exacto de cada una de las otras funciones trigonométricas.

Solución *Uso de triángulos rectángulos.* Ya hemos analizado dos maneras de resolver este tipo de problemas: usando la definición de las funciones trigonométricas y mediante identidades. (*Véase* el ejemplo 4 en la sección 5.3.) En seguida presentamos un tercer método: el uso de triángulos rectángulos.

FIGURA 55



El ángulo θ está en el segundo cuadrante, así que sabemos que sen θ y csc θ son positivos, mientras que las otras funciones trigonométricas son negativas. Si α es el ángulo de referencia para θ, entonces $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Los demás valores de las funciones trigonométricas del ángulo α pueden ser encontrados dibujando un triángulo apropiado. Usamos la figura 55 para obtener

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{2}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{3}{2} \qquad \cot\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ahora, asignamos el signo apropiado a cada uno de estos valores para encontrar los de las funciones trigonométricas de θ:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \cos\theta = -\frac{2}{3} \qquad \tan\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\csc\theta = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \sec\theta = -\frac{3}{2} \qquad \cot\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

■

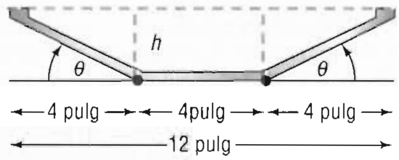
EJEMPLO 6 *Construcción de un canal de desagüe pluvial*

Se construirá un canal de desagüe pluvial con hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una longitud de 4 pulgadas a cada lado de las hojas, se doblan hacia arriba en un ángulo θ. *Véase* la figura 56.

(a) Expresar el área A de la abertura como una función de θ.

(b) Hacer la gráfica de $A = A(\theta)$. Encontrar el ángulo θ que pueda darnos la A más grande. (Esto permite que fluya más agua por el canal).

FIGURA 56

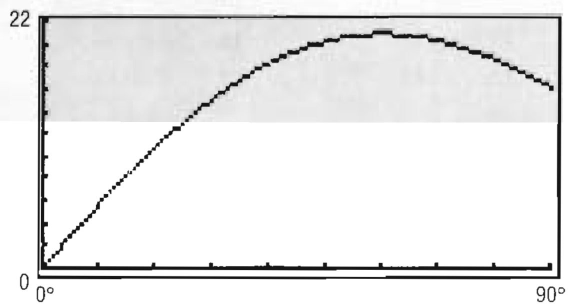


Solución (a) El área A de la abertura es la suma de las áreas de dos triángulos rectángulos y de un rectángulo:

$$A = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot h\sqrt{16 - h^2} + 4h = (4 \text{ sen } \theta)(4 \cos \theta) + 4(4 \text{ sen } \theta)$$
$$A(\theta) = 16 \text{ sen } \theta(\cos \theta + 1)$$

(b) *Véase* la figura 57. El ángulo θ que proporciona una A máxima es 60°. ■

FIGURA 57

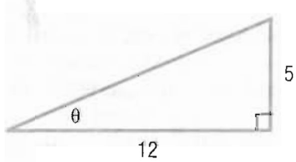


5.4

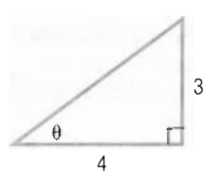
Ejercicio 5.4

En los problemas del 1 al 10, encuentre el valor exacto de cada una de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ en cada figura.

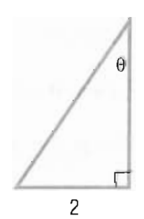
1.



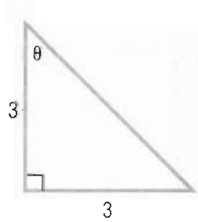
2.



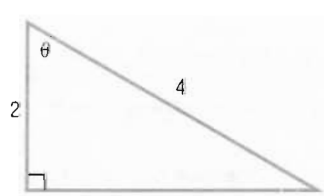
3.



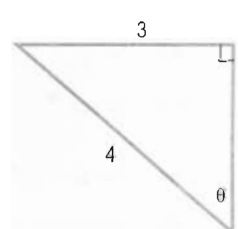
4.



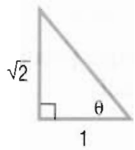
5.



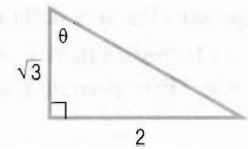
6.



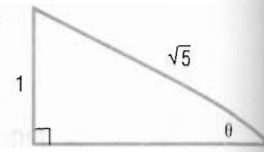
7.



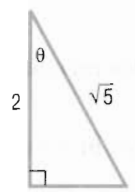
8.



9.



10.



En los problemas del 11 al 26 encuentre el ángulo de referencia de cada ángulo.

11. -30° **12.** 60° **13.** 120° **14.** 300° **15.** 210°

16. 330° **17.** $5\pi/4$ **18.** $5\pi/6$ **19.** $8\pi/3$ **20.** $7\pi/4$

21. -135° **22.** -240° **23.** $-2\pi/3$ **24.** $-7\pi/6$ **25.** 420°

26. 480°

En los problemas del 27 al 56 encuentre el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

27. $\operatorname{sen} 150^\circ$ **28.** $\cos 210^\circ$ **29.** $\cos 315^\circ$ **30.** $\operatorname{sen} 120^\circ$

31. $\sec 240^\circ$ **32.** $\csc 300^\circ$ **33.** $\cot 330^\circ$ **34.** $\tan 225^\circ$

35. $\operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}$ **36.** $\cos \dfrac{2\pi}{3}$ **37.** $\cot \dfrac{7\pi}{6}$ **38.** $\csc \dfrac{7\pi}{4}$

39. $\cos(-60^\circ)$ **40.** $\tan(-120^\circ)$ **41.** $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ **42.** $\cot\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

43. $\tan \dfrac{14\pi}{3}$ **44.** $\sec \dfrac{11\pi}{4}$ **45.** $\csc(-315^\circ)$ **46.** $\sec(-225^\circ)$

47. $\operatorname{sen} 38^\circ - \cos 52^\circ$ **48.** $\tan 12^\circ - \cot 78^\circ$ **49.** $\dfrac{\cos 10^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}$ **50.** $\dfrac{\cos 40^\circ}{\operatorname{sen} 50^\circ}$

51. $1 - \cos^2 20^\circ - \cos^2 70^\circ$ **52.** $1 + \tan^2 5^\circ - \csc^2 85^\circ$ **53.** $\tan 20^\circ - \dfrac{\cos 70^\circ}{\cos 20^\circ}$

54. $\cot 40^\circ - \dfrac{\operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 40^\circ}$ **55.** $\cos 35^\circ \operatorname{sen} 55^\circ + \operatorname{sen} 35^\circ \cos 55^\circ$ **56.** $\sec 35^\circ \csc 55^\circ - \tan 35^\circ \cot 55^\circ$

57. Si $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{3}$, encuentre el valor exacto de: (a) $\cos(90^\circ - \theta)$ (b) $\cos^2 \theta$ (c) $\csc \theta$ (d) $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$

58. Si $\operatorname{sen} \theta = 0.2$, encuentre el valor exacto de: (a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ (b) $\cos^2 \theta$ (c) $\sec(90^\circ - \theta)$ (d) $\csc \theta$

59. Si $\tan \theta = 4$, encuentre el valor exacto de: (a) $\sec^2 \theta$ (b) $\cot \theta$ (c) $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ (d) $\csc^2 \theta$

60. Si $\sec \theta = 3$, encuentre el valor exacto de: (a) $\cos \theta$ (b) $\tan^2 \theta$ (c) $\csc(90^\circ - \theta)$ (d) $\operatorname{sen}^2 \theta$

61. Si $\csc \theta = 4$, encuentre el valor exacto de: (a) $\operatorname{sen} \theta$ (b) $\cot^2 \theta$ (c) $\sec(90^\circ - \theta)$ (d) $\sec^2 \theta$

62. Si $\cot \theta = 2$, encuentre el valor exacto de: (a) $\tan \theta$ (b) $\csc^2 \theta$ (c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$ (d) $\sec^2 \theta$

63. Si $\operatorname{sen} \theta = 0.3$, encuentre el valor exacto de: $\operatorname{sen} \theta + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

64. Si $\tan \theta = 4$ encuentre el valor exacto de: $\tan \theta + \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$.

65. Encuentre el valor exacto de: $\operatorname{sen} 1^\circ + \operatorname{sen} 2^\circ + \operatorname{sen} 3^\circ + \cdots + \operatorname{sen} 358^\circ + \operatorname{sen} 359^\circ$.

66. Encuentre el valor exacto de: $\cos 1° + \cos 2° + \cos 3° + \cdots + \cos 358° + \cos 359°$.

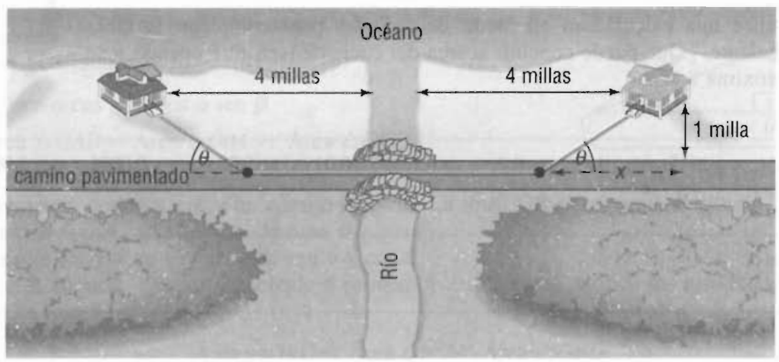
67. Encuentre el ángulo agudo θ que satisface la ecuación: $\operatorname{sen} \theta = \cos(2\theta + 30°)$

68. Encuentre el ángulo agudo θ que satisface la ecuación: $\tan \theta = \cot(\theta + 45°)$

69. *Cálculo del tiempo de un traslado.* Dos casas frente al océano están separadas 8 millas en línea recta sobre la playa, cada una queda a una milla de un camino pavimentado paralelo al océano. Sally puede caminar a 8 millas por hora en la carretera pavimentada, pero sólo a 3 millas por hora en la arena. A causa de un río que está entre las dos casas, es necesario caminar por la arena hacia la carretera, continuar por ésta y luego caminar de nuevo por la arena para ir de una casa a otra. *Véase* la ilustración.

(a) Exprese el tiempo T para ir de una casa a la otra como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración.

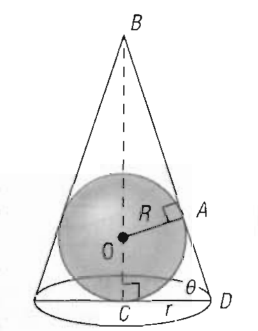
(b) Haga la gráfica de $T = T(\theta)$. ¿Qué ángulo θ hace que el tiempo sea menor? ¿Cuál es el menor tiempo? ¿Cuánto tiempo camina Sally por la carretera pavimentada?



70. *Diseño de piezas decorativas.* Un diseñador de arte decorativo planea comercializar esferas de oro sólido encerradas en conos de cristal claro. Cada esfera es de radio fijo R y será encerrada en un cono de altura h y radio r. *Véase* la ilustración. Muchos conos pueden ser utilizados para encerrar la esfera, cada uno con diferente ángulo de inclinación θ.

(a) Exprese el volumen V del cono como una función de su ángulo de inclinación θ. [*Sugerencia*: El volumen V de un cono de altura h y radio r es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.]

(b) ¿Qué ángulo de inclinación θ debe ser utilizado para que el volumen V del cono sea mínimo? (Esta elección minimiza la cantidad de cristal necesario y da mayor realce a la esfera de oro.)



71. *Cálculo del tiempo de un traslado.* Desde un estacionamiento, usted quiere caminar hasta una casa en la playa ubicada a 1500 pies en dirección de un camino pavimentado paralelo al océano. La casa está a 500 pies del camino. *Véase* la ilustración. A lo largo del camino usted puede avanzar a 300 pies por minuto, pero en la arena sólo puede hacerlo a 100 pies por minuto.

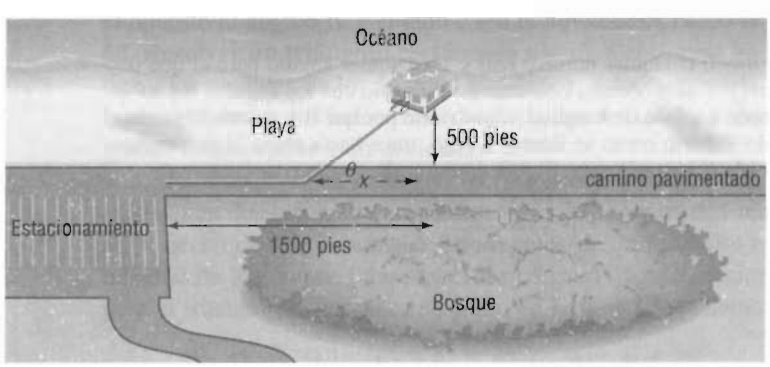
(a) Calcule el tiempo T si usted camina 1500 pies por el camino pavimentado y luego 500 pies en la arena hasta la casa.

(b) Calcule el tiempo T si se interna primero en la arena 500 pies y luego sigue 1500 pies por la playa hasta la casa.

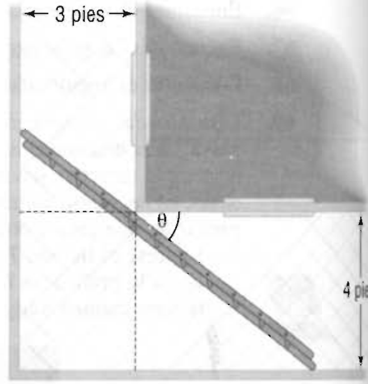
(c) Exprese el tiempo T para ir desde el estacionamiento hasta la casa de la playa como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración.

(d) Calcule el tiempo T si usted camina 100 pies a lo largo del camino pavimentado y luego va directamente hacia la casa.

(e) Haga la gráfica de $T = T(\theta)$. ¿Para qué valor de θ es T mínimo? ¿Cuál es el tiempo mínimo? ¿Cuál es x para este ángulo?



72. *Transportar una escalera por una esquina.* Una escalera de longitud L es transportada horizontalmente alrededor de una esquina de un pasillo de 3 pies de ancho hacia un pasillo de 4 pies de ancho. *Véase* la ilustración. Encuentre la longitud L de la escalera como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración.



73. Escriba tres ejemplos que muestren cómo usar el teorema sobre los ángulos de referencia; déselos a un compañero de clase y pídale una crítica acerca de ellos.

74. *Véanse* el ejemplo 4 en la sección 5.3 y el 5 en la sección 5.4. ¿Cuál de los tres métodos de solución prefiere usted? ¿Cuál es el que menos le agrada? ¿Hay situaciones en las que un método es mejor y otras donde otro método es mejor? Justifique su respuesta.

75. Utilice una calculadora en modo de radianes para completar la tabla siguiente. ¿Qué puede concluir acerca del cociente $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ cuando θ se aproxima a cero?

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\operatorname{sen}\theta$								
$\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$								

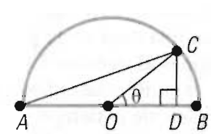
76. Utilice una calculadora en modo de radianes para completar la tabla siguiente. ¿Qué puede concluir acerca del cociente $(\cos\theta - 1)/\theta$ cuando θ se aproxima a cero?

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\cos\theta - 1$								
$\dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$								

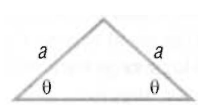
77. Suponga que el ángulo θ es un ángulo central de un círculo de radio 1 (*véase* la figura). Demuestre que

(a) El ángulo $OAC = \dfrac{\theta}{2}$ (b) $|CD| = \operatorname{sen}\theta$ y $|OD| = \cos\theta$

(c) $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$

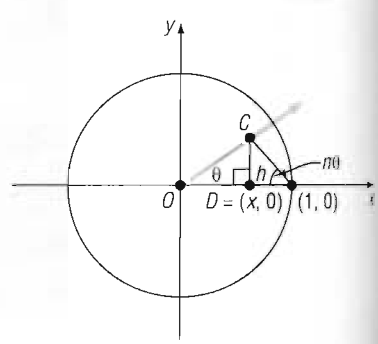


78. Demuestre que el área de un triángulo isósceles es $A = a^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, donde a es la longitud de uno de los lados iguales y θ la medida de uno de los dos ángulos iguales (*véase* la figura).



79. Sean $n > 0$ cualquier número real y θ cualquier ángulo para el que $0 < \theta < \pi/(1+n)$. Podemos construir un triángulo con los ángulos θ y $n\theta$ incluyendo un lado de longitud 1 (¿advierte por qué?) y colocarlo sobre el círculo unitario como se ilustra. Luego, trace hacia abajo la perpendicular desde C hasta $D = (x, 0)$ y demuestre que

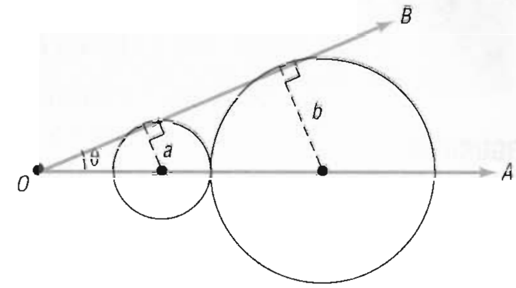
$$x = \frac{\tan n\theta}{\tan\theta + \tan n\theta}$$



80. *Véase* la figura siguiente. El círculo pequeño, cuyo radio es a, es tangente al círculo más grande, cuyo radio es b. El rayo OA contiene un diámetro de cada círculo, y el rayo OB es tangente a los dos círculos. Demuestre que

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}$$

(esto es, $\cos\theta$ es igual a la razón de la media geométrica de a y b a la media aritmética de a y b). [*Sugerencia*: Primero demuestre que $\operatorname{sen}\theta = (b-a)/(b+a)$.]



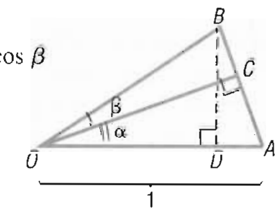
81. *Véase* la figura que aparece al margen. Si $|OA| = 1$, demuestre que

(a) Área $\triangle OAC = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ (b) área $\triangle OCB = \frac{1}{2}|OB|^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

(c) Área $\triangle OAB = \frac{1}{2}|OB|\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ (d) $|OB| = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

(e) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

[*Sugerencia:* Área $\triangle OAB$ = Área $\triangle OAC$ + Área $\triangle OCB$.]



82. *Véase* la figura siguiente, donde aparece un círculo unitario. La línea DB es tangente al círculo.

(a) Exprese el área de $\triangle OBC$ en términos de seno θ y cos θ.

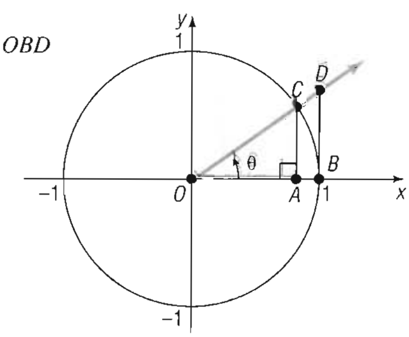
(b) Exprese el área de $\triangle OBC$ en términos de sen θ y cos θ.

(c) El área del sector circular $\overset{\frown}{OBC}$ es $\frac{1}{2}\theta$, donde θ es medido en radianes. Utilice los resultados de las partes (a) y (b) y el hecho de que

$$\text{Área } \triangle OBC < \text{Área } \overset{\frown}{OBC} < \text{Área } \triangle OBD$$

para demostrar que

$$1 < \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$



83. Si $\cos\alpha = \tan\beta$ y $\cos\beta = \tan\alpha$, donde α y β son ángulos agudos, demuestre que

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

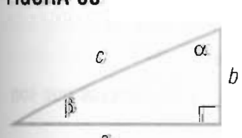
84. Si θ es un ángulo agudo, explique por qué $\sec\theta > 1$.

85. Si θ es un ángulo agudo, explique por qué $0 < \operatorname{sen}\theta < 1$.

5.5 Aplicaciones

Resolución de triángulos rectángulos

FIGURA 58



En el estudio que desarrollaremos a continuación, siempre marcaremos un triángulo rectángulo de modo que el lado a sea el opuesto al ángulo α, el lado b sea el opuesto al ángulo β, y el lado c sea la hipotenusa, como se muestra en la figura 58. **Resolver un triángulo rectángulo** significa encontrar las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos que falten. Adoptaremos la práctica de expresar las longitudes de los lados redondeadas a dos decimales y expresar los ángulos en grados redondeados a un decimal.

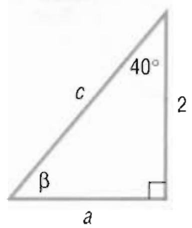
Para resolver un triángulo rectángulo necesitamos conocer un ángulo y un lado o bien dos lados. Luego hacemos uso del teorema de Pitágoras y nos basamos en el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Por lo tanto, la suma de los ángulos desconocidos de un triángulo rectángulo es 90°. Así que para el triángulo rectángulo mostrado en la figura 58 tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \alpha + \beta = 90°$$

EJEMPLO 1 *Resolución de un triángulo rectángulo*

Utilice la figura 59. Si $b = 2$ y $\alpha = 40°$, encontrar a, c, y β.

FIGURA 59



Solución Como $\alpha = 40°$ y $\alpha + \beta = 90°$, determinamos que $\beta = 50°$. Para encontrar los lados a y c usamos las relaciones siguientes:

$$\tan 40° = \frac{a}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos 40° = \frac{2}{c}$$

De modo que

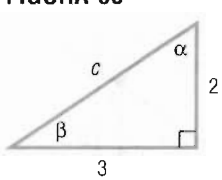
$$a = 2 \tan 40° \approx 1.68 \quad \text{y} \qquad c = \frac{2}{\cos 40°} \approx 2.61$$

■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 2 *Resolución de un triángulo rectángulo*

Utilice la figura 60. Si $a = 3$ y $b = 2$, encontrar c, α, y β.

FIGURA 60



Solución Ya que $a = 3$ y $b = 2$, por el teorema de Pitágoras tenemos

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13$$
$$c = \sqrt{13} \approx 3.61$$

Para encontrar α usamos la relación

$$\tan \alpha = \frac{3}{2}$$

Ponga el modo de su calculadora en grados. Su calculadora debe tener una tecla marcada con $\boxed{\tan^{-1}}$ o con $\boxed{\text{inv}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$*. Utilice la tecla $\boxed{\tan^{-1}}$ o las teclas $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ como sigue para encontrar α:

Teclado:	$\boxed{3}$	$\boxed{\div}$	$\boxed{2}$	$\boxed{=}$	$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$
Pantalla:	$\boxed{3}$		$\boxed{2}$	$\boxed{1.5}$	$\boxed{56.309932}$

Por tanto, $\alpha = 56.3°$ redondeado a un decimal. Ya que $\alpha + \beta = 90°$, encontramos que $\beta = 33.7°$. ■

■ Ahora resuelva el problema 11.

Un uso generalizado de la trigonometría es medir alturas y distancias que son difíciles o imposibles de medir por medios comunes.

* Si no es así, consulte su manual del usuario.

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 5

IDENTIFICACIÓN DE LAS MONTAÑAS DE LAS ISLAS HAWAIANAS DESDE OAHU

Un turista adinerado, con un gran anhelo por el álbum perfecto de fotografías, ha pedido ayuda a la compañía de consultoría de usted para identificar una fotografía que tomó en un día despejado desde la costa oeste de Oahu. Él le mostró la fotografía, la cual en su mayor parte era mar y cielo. Pero en el horizonte se apreciaban tres cimas de montaña, igualmente espaciadas y al parecer todas de la misma altura. El turista le dijo que un vendedor en la playa le informó que las cimas de las montañas son los volcanes de Lanai, Maui y de la Gran Isla (Hawaii). El vendedor agregó: "Casi nunca puede verse la Gran Isla desde aquí".

El turista piensa que su fotografía puede tener algún valor especial, aunque tiene algunas dudas. Él está intrigado pues si en realidad casi nunca es posible ver la Gran Isla desde Oahu, le gustaría identificar correctamente sus fotos y por eso le pide ayuda a usted.

Usted se da cuenta de que es necesario aplicar un poco de trigonometría y consultar buenos atlas y enciclopedias. Después de algunas investigaciones, descubre lo siguiente:

Las alturas de las cimas varían. Lanaihale, la cima más alta de Lanai, sólo mide cerca de 3370 pies sobre el nivel del mar. Haleakala de Maui mide 10,023 pies sobre el nivel del mar. Mauna Kea en la Gran Isla es la más alta de todas, 13,796 pies sobre el nivel del mar. (Si se mide desde su base en el fondo del océano, calificaría como la montaña más alta sobre la Tierra.)

Desde el extremo sudeste de Oahu, la distancia a Lanai es aproximadamente 65 millas, a Maui es aproximadamente 110 millas y a la Gran Isla de unas 190 millas. Estas distancias, medidas a lo largo de la superficie de la Tierra, representan la longitud de arco que se origina al nivel del mar en Oahu y termina en un punto imaginario directamente abajo de la cima de cada montaña, esto es, al nivel del mar.

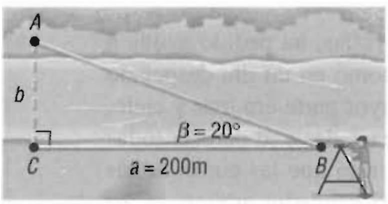
1. Estas cimas volcánicas son de alturas diferentes. Pero su cliente tomó una foto desde donde las tres parecen tener la misma altura.
2. El radio de la Tierra es aproximadamente de 3960 millas. Con base en esa fotografía, ¿cuál es la circunferencia de la Tierra? ¿Cómo está relacionada la distancia entre las islas con la circunferencia de la Tierra?
3. Para determinar cuál de estas cimas realmente es visible desde Oahu, usted necesita considerar que el turista, parado en la costa y viendo "directamente", tendría una línea de visión tangente a la superficie de la Tierra en ese punto. Haga un bosquejo del triángulo formado por la línea de visión del turista, el radio desde el centro de la Tierra al turista, y una recta desde el centro de la Tierra que pase por Mauna Kea. ¿Puede determinar el ángulo formado en el centro de la Tierra?
4. ¿Cuál es la longitud de la hipotenusa del triángulo? ¿Puede decir si el Mauna Kea es o no visible desde Oahu?
5. Repita el procedimiento con la información acerca de Maui y Lanai. ¿Son visibles desde Oahu?
6. Hay otra isla que el vendedor no mencionó: Molokai. Está aproximadamente a 40 millas de Oahu y su pico más alto, "Kamakou", es de casi 4961 pies sobre el nivel del mar. ¿Desde Oahu es visible Kamakou?
7. Ahora su equipo está listo para ponerle nombre a las tres cimas volcánicas de la fotografía. ¿Cómo se decidió cuál es cuál?

EJEMPLO 3 *Determinación del ancho de un río*

Un agrimensor puede medir el ancho de un río colocando un tránsito* en el punto C en un lado del río y tomando un punto de referencia A del otro lado. *Véase* la figura 61. Después de girar un ángulo de 90° en C, camina 200 metros alejándose hasta llegar al punto B, mide el ángulo β y encuentra que es de 20°. ¿Cuál es el ancho del río?

Solución Buscamos la longitud del lado b. Conocemos a y β, de modo que usamos la relación

FIGURA 61



$$\tan \beta = \frac{b}{a}$$

para obtener

$$\tan 20° = \frac{b}{200}$$
$$b = 200 \tan 20° \approx 72.79 \text{ metros}$$

Por tanto, el ancho del río es aproximadamente de 73 metros, redondeado a la unidad más cercana. ∎

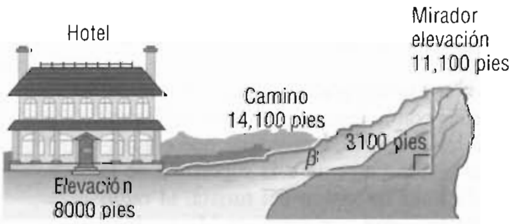
■ Ahora resuelva el problema 21.

EJEMPLO 4 *Cálculo de la inclinación de un camino montañoso*

Un camino recto con inclinación uniforme lleva desde un hotel a 8000 pies hasta un mirador situado a una altura de 11,100 pies. La longitud del camino es de 14,100 pies. ¿Cuál es la inclinación (pendiente) del camino?

Solución La figura 62 ilustra la situación. Buscamos el ángulo β. Como se muestra en la ilustración,

FIGURA 62



$$\text{sen } \beta = \frac{3100}{14{,}100}$$

Utilizando una calculadora,

$$\beta \approx 12.7°$$

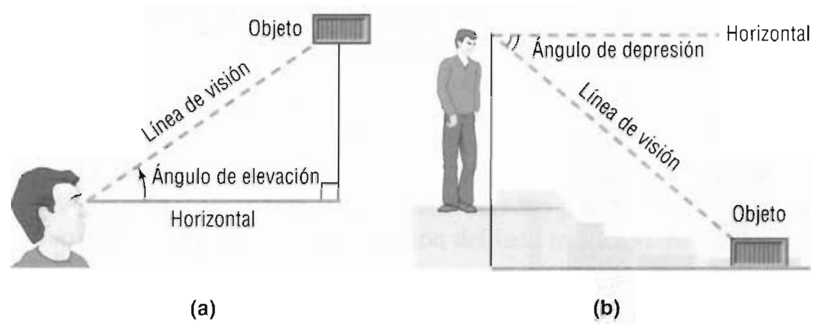
La inclinación (pendiente) del camino es aproximadamente de 12.7°. ∎

Las alturas verticales algunas veces pueden ser medidas usando el ángulo de elevación o el ángulo de depresión. Si una persona está mirando hacia arriba a un objeto, el ángulo agudo medido desde la horizontal a la línea de visión del objeto es llamado **ángulo de elevación.** *Véase* la figura 63(a).

Si una persona está mirando hacia abajo a un objeto, el ángulo agudo formado por la línea de observación del objeto y la horizontal es llamado **ángulo de depresión.** *Véase* la figura 63(a).

* Instrumento utilizado en topografía para medir ángulos.

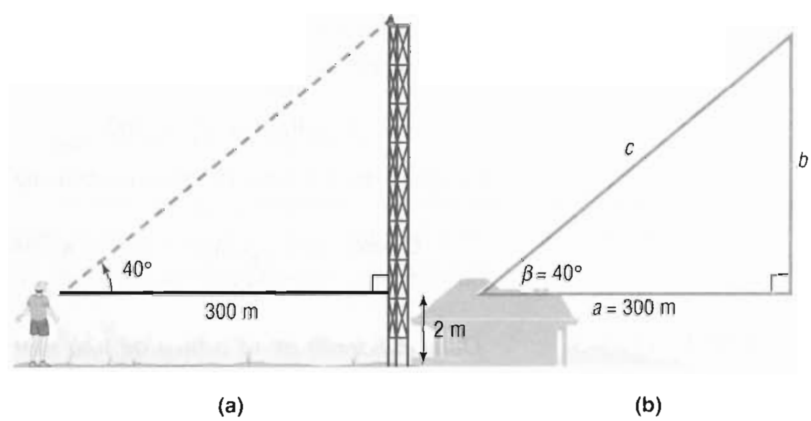
FIGURA 63



EJEMPLO 5 *Determinación de alturas utilizando el ángulo de elevación*

Para determinar la altura de una torre de transmisión de radio, un agrimensor camina alejándose 300 metros de la base de la torre. *Véase* la figura 64(a). Luego el ángulo de elevación se mide y se encuentra que es de 40°. Si el tránsito está a 2 metros del piso cuando la observación se realiza, ¿cuál es la altura de la torre?

FIGURA 64



Solución La figura 64(b) muestra un triángulo que reproduce la ilustración de la figura 64(a). Para encontrar la longitud b, usamos el hecho de que $\tan\beta = b/a$. Entonces

$$b = a \tan\beta = 300 \tan 40° = 251.73 \text{ metros}$$

Ya que el tránsito está a dos metros de altura, la altura real de la torre es aproximadamente de 254 metros, redondeada al metro más cercano. ■

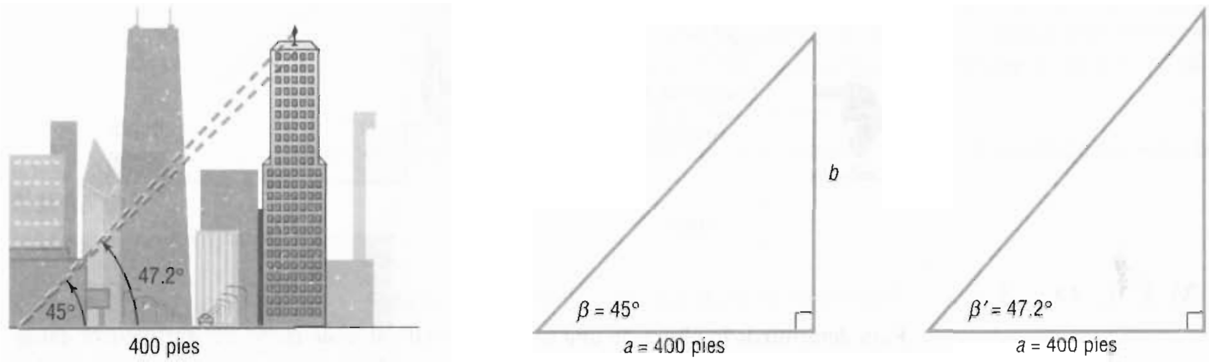
■ Ahora resuelva el problema 23.

La idea tras el ejemplo 5 también puede ser utilizada para determinar la altura de un objeto con base inaccesible.

EJEMPLO 6 *Determinación de la altura de una estatua sobre un edificio*

Como adorno de la parte superior del edificio *Board of Trade* en Chicago está una estatua de Ceres, la diosa griega del trigo. Desde el nivel de la calle se hicieron dos observaciones a una distancia de 400 pies del centro del edificio. El ángulo de elevación a la base de la estatua fue de 45.0°; el ángulo de elevación a la parte superior de la estatua fue de 47.2°. *Véase* la figura 65(a). ¿Cuál es la altura de la estatua?

FIGURA 65



(a) (b)

Solución La figura 65(b) muestra dos triángulos que reproducen la figura 65(a). La altura de la estatua de Ceres será $b' - b$. Para encontrar b y b', con respecto a la figura 65(b):

$$\tan 45° = \frac{b}{400} \qquad \tan 47.2° = \frac{b'}{400}$$

$$b = 400 \tan 45° = 400 \qquad b' = 400 \tan 47.2° = 431.96$$

La altura de la estatua es aproximadamente de 32 pies. ■

Cuando no es posible caminar alejándose de la base del objeto cuya altura buscamos, se necesita una solución más imaginativa.

EJEMPLO 7 *Determinación de la altura de una montaña*

Para medir la altura de una montaña, un topógrafo toma dos observaciones de la cima desde dos puntos separados una distancia de 900 metros en línea recta hacia la montaña.* *Véase* la figura 66(a). La primera observación tiene como resultado un ángulo de elevación de 47°, la segunda tiene un ángulo de elevación de 35°. Si el tránsito está a dos metros del piso, ¿cuál es la altura de la montaña?

FIGURA 66

(a) (b)

Solución La figura 66(b) muestra dos triángulos que reproducen la ilustración de la figura 66(a). De los dos triángulos rectángulos mostrados, encontramos

* Por simplicidad, suponemos que estas observaciones están al mismo nivel.

$$\tan \beta' = \frac{b}{a + 900} \qquad \tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\tan 35^\circ = \frac{b}{a + 900} \qquad \tan 47^\circ = \frac{b}{a}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos variables, a y b. Ya que buscamos b, decidimos resolver la ecuación del lado derecho para a y sustituir el resultado, $a = b/\tan 47^\circ = b \cot 47^\circ$, en la ecuación del lado izquierdo. El resultado es

$$\tan 35^\circ = \frac{b}{b \cot 47^\circ + 900}$$

$$b = (b \cot 47^\circ + 900) \tan 35^\circ$$

$$b = b \cot 47^\circ \tan 35^\circ + 900 \tan 35^\circ$$

$$b(1 - \cot 47^\circ \tan 35^\circ) = 900 \tan 35^\circ$$

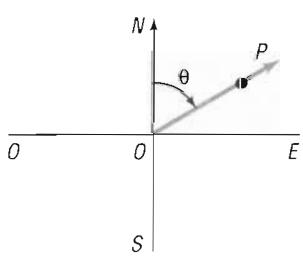
$$b = \frac{900 \tan 35^\circ}{1 - \cot 47^\circ \tan 35^\circ} = \frac{900 \tan 35^\circ}{1 - \dfrac{\tan 35^\circ}{\tan 47^\circ}} = 1816$$

Por lo tanto, la altura de la cima desde el nivel del suelo es aproximadamente de $1816 + 2 = 1818$ metros. ■

■ Ahora resuelva el problema 29.

En navegación, la **dirección** o **rumbo** desde O de un objeto en P significa el ángulo positivo medido en el sentido del giro de las manecillas del reloj* desde el norte (N) hasta el rayo OP. *Véase* la figura 67. Con base en la figura 67, diríamos que el rumbo de P desde O es θ grados.

FIGURA 67
La dirección de P desde O es θ



EJEMPLO 8 *Determinación del rumbo de un aeroplano*

Un Boeing 777 despega del aeropuerto de O'Hara en una pista que tiene una dirección de 22°. Después de volar durante 1 milla, el piloto de la aeronave solicita permiso para virar 90° e ir hacia el noroeste. La petición es concedida.

(a) ¿Cuál es el nuevo rumbo?

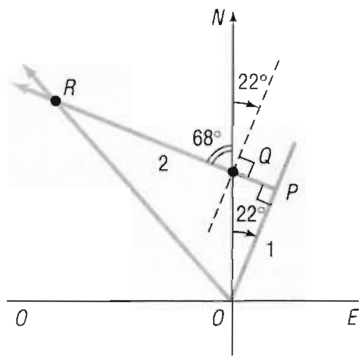
(b) Después que el avión avanza 2 millas en la nueva ruta, ¿qué dirección debe usar la torre de control para localizarlo?

* Nótese que esta convención es precisamente la contraria de la que estamos usando.

Solución (a) La figura 68 ilustra la situación. Después de volar 1 milla desde el aeropuerto O (la torre de control), la aeronave está en P. Cuando vira 90° hacia el noroeste, vemos que

$$\text{Ángulo } NOP = 22^\circ \qquad \text{Ángulo } RQN = 90^\circ - 22^\circ = 68^\circ$$

FIGURA 68



Por lo tanto, el rumbo final de esta aeronave es de

$$360^\circ - \text{Ángulo } RQN = 360^\circ - 68^\circ = 292^\circ$$

(b) Después de volar 2 millas en dirección de 292°, la aeronave está en R. Si $\theta =$ ángulo ROP, entonces

$$\tan\theta = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{así que} \quad \theta = 63.4^\circ$$

Como resultado de esto,

$$\text{Ángulo } RON = \theta - 22^\circ = 41.4^\circ$$

El rumbo del avión desde la torre de control en O es

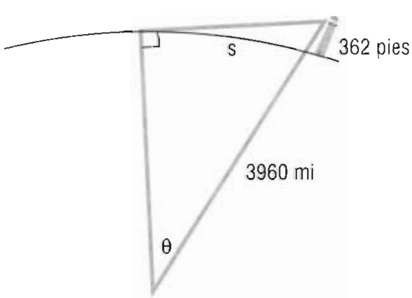
$$360^\circ - \text{Ángulo } RON = 360^\circ - 41.4^\circ = 318.6^\circ$$

EJEMPLO 9 *Faro de la colina Gibb, Southampton, Bermudas*

En operación desde 1846, este faro se levanta 117 pies sobre una colina de 245 pies de altura, de modo que el rayo de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz puede verse en el horizonte a cerca de 26 millas de distancia. Verifique la precisión de este enunciado.

Solución La figura 69 ilustra la situación. El ángulo central θ satisface la ecuación

FIGURA 69



$$\cos\theta = \frac{3960}{3960 + \frac{362}{5280}} = 0.999982687$$

de modo que

$$\theta = 0.00588 \text{ radián} = 0.33715^\circ = 20.23'$$

El folleto no indica si la distancia se mide en millas náuticas o en millas terrestres. La distancia s en millas náuticas es 20.23, la medida de θ en minutos. (*Véase* el problema 83, sección 5.1.) La distancia s en millas terrestres es

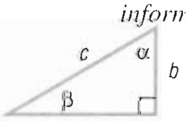
$$s = r\theta = 3960(0.00588) = 23.3 \text{ millas}$$

En cualquier caso, parece que el folleto exageró un poco la distancia.

5.5

Ejercicio 5.5

En los problemas del 1 al 14 utilice el triángulo rectángulo que se muestra al margen. Luego, usando la información dada, resuelva el triángulo.

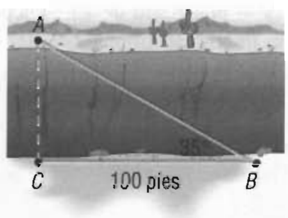


1. $b = 5$, $\beta = 20^\circ$; encuentre a, c, y α **2.** $b = 4$, $\beta = 10^\circ$; encuentre a, c, y α

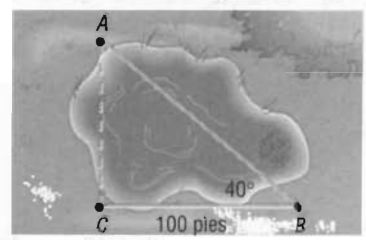
3. $a = 6$, $\beta = 40^\circ$; encuentre b, c, y α **4.** $a = 7$, $\beta = 50^\circ$; encuentre b, c, y α

5. $b = 4$, $\alpha = 10^\circ$; encuentre a, c, y β **6.** $b = 6$, $\alpha = 20^\circ$; encuentre a, c, y β

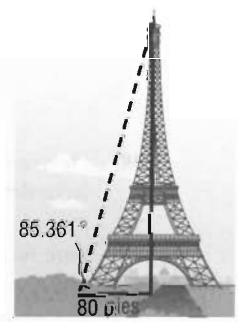
7. $a = 5$, $\alpha = 25°$; encuentre b, c, y β
8. $a = 6$, $\alpha = 40°$; encuentre b, c, y β
9. $c = 9$, $\beta = 20°$; encuentre b, a, y α
10. $c = 10$, $\alpha = 40°$; encuentre b, a, y β
11. $a = 5$, $b = 3$; encuentre c, α, y β
12. $a = 2$, $b = 8$; encuentre c, α, y β
13. $a = 2$, $c = 5$; encuentre b, α, y β
14. $b = 4$, $c = 6$; encuentre a, α, y β
15. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 3 pulgadas de longitud. Si un ángulo es de 35°, encuentre la longitud de cada cateto.
16. Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 2 centímetros de longitud. Si un ángulo es de 40°, encuentre la longitud de cada cateto.
17. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 35°. Si un cateto es de 5 pulgadas de longitud, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa? [*Sugerencia*: son posibles dos respuestas.]
18. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de $\pi/10$ radianes. Si un cateto es de 3 metros de longitud, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa? [*Sugerencia*: son posibles dos respuestas.]
19. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 5 pulgadas. Si un cateto es de 2 pulgadas, encuentre la medida en grados de cada ángulo.
20. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 3 pies. Si un cateto mide 1 pie, encuentre la medida en grados de cada ángulo.
21. *Determinación del ancho de un desfiladero.* Encuentre la distancia desde A hasta C en el desfiladero ilustrado en la figura siguiente.



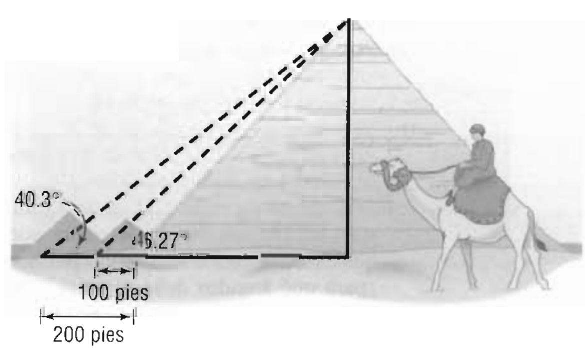
22. *Determinación de la extensión de un estanque* Encuentre la distancia desde A hasta C cruzando el estanque ilustrado en la figura siguiente.



23. *La torre Eiffel.* La torre Eiffel, la más alta construida antes de la era de las antenas de televisión, fue terminada el 31 de marzo de 1889. Encuentre la altura de la torre Eiffel (sin contar una antena de televisión instalada en la punta) usando la información dada en la ilustración.

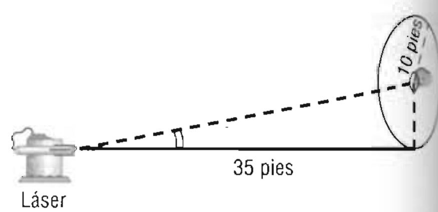


24. *Determinación de la distancia de un barco desde la costa.* Un barco se encuentra frente a un acantilado vertical de 100 pies de altura y toma una observación a la punta del acantilado. Si el ángulo de elevación es de 25°, ¿a qué distancia de la costa está el barco?
25. Suponga que usted se dirige hacia una meseta que está a 50 metros de altura. Si el ángulo de elevación a la parte superior de la meseta es de 20°, ¿qué tan alejado se encuentra usted de la base de la meseta?
26. *La estatua de la libertad.* Un barco frente a la costa de la ciudad de Nueva York toma una observación de la Estatua de la Libertad, que es de casi 305 pies de altura. Si el ángulo de elevación a la parte superior de la estatua es de 20°, ¿a qué distancia se encuentra el barco de la base de la estatua?
27. Una escalera de 22 pies de largo descansa contra un edificio haciendo un ángulo de 70° con el piso. ¿Qué tan alto toca la escalera al edificio?
28. *Determinación de la altura de un edificio.* Para calcular la altura de un edificio, se debe hacer por separado dos observaciones a una distancia de 50 pies. Si el primer ángulo de elevación es de 40° y el segundo es de 32°, ¿Cuál es la altura del edificio?
29. *Gran pirámide de Keops.* Una de las siete maravillas del mundo antiguo, la Gran Pirámide de Keops, fue construida alrededor del año 2580 a. de C. Su altura original era de 480 pies 11 pulgadas, pero debido a la pérdida de las piedras de su punta ahora es más baja*. Encuentre la altura actual de la Gran Pirámide usando la información dada en la ilustración.



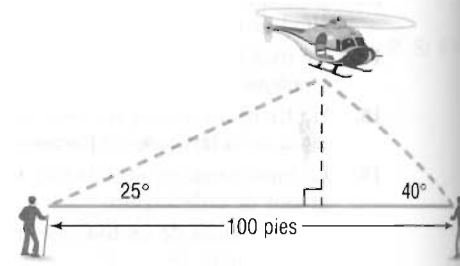
* *Fuente:* Libro Guinness de Marcas Mundiales.

30. Un rayo láser será dirigido a través de un pequeño orificio situado en el centro de un círculo cuyo radio es de 10 pies. El origen del rayo está a 35 pies del círculo (*Véase* la figura). ¿A qué ángulo de elevación debe ser apuntado el rayo para asegurarse que pasará a través del orificio?



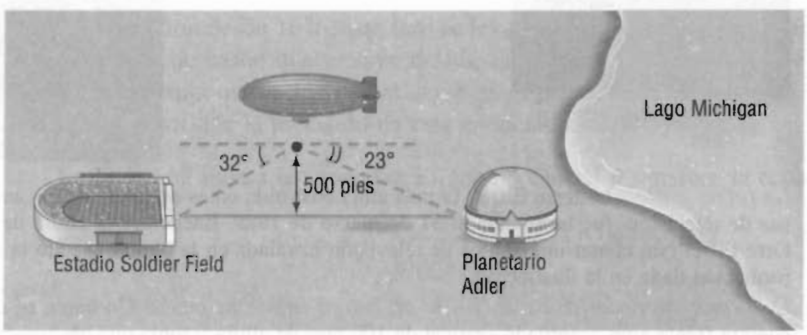
31. *Determinación del ángulo de elevación del Sol.* A las 10 de la mañana del 26 de abril de 1996, un edificio de 300 pies de altura proyectó una sombra de 50 pies de largo. ¿Cuál era el ángulo de elevación del Sol?

32. *Monte de Rushmore.* Para medir la altura de la efigie de Lincoln en el Monte Rushmore, se toman dos observaciones a 800 pies de la base del monte. Si el ángulo de elevación a la parte inferior de la cara es de 32° y el ángulo de elevación a la parte superior es de 35°, ¿cuál es la altura de la cara de Lincoln?



33. *Determinación de la altura de un helicóptero.* De manera simultánea, dos observadores miden el ángulo de elevación de un helicóptero. Un ángulo mide 25° y el otro 40° (*véase* la figura). Si los observadores están separados una distancia de 100 pies y el helicóptero está sobre la línea que los une, ¿a qué altura está el helicóptero?

34. *Determinación de la distancia entre dos objetos.* Un dirigible, suspendido a una altura de 500 pies, está directamente sobre una línea que va desde el estadio *Soldier Field* hasta el planetario Adler en el Lago Michigan (*véase* la figura). Si el ángulo de depresión del dirigible al estadio es de 32° y al planetario de 23°, encuentre la distancia entre el estadio y el planetario Adler.



35. *Determinación de la longitud de un cable.* Una torre de transmisión de radio es de 200 pies de altura. ¿Qué tan largo debe ser un cable si se sujeta a la torre a 10 pies de la punta para formar un ángulo de 21° con el piso?

36. *Determinación de la altura de una torre* Un alambre de 80 pies de longitud se sujeta a la parte superior de una torre formando un ángulo de 25° con el suelo. ¿Cuál es la altura de la torre?

37. *Monumento a Washington.* El ángulo de elevación del monumento a Washington es de 35.1° en el instante en que proyecta una sombra de 789 pies de longitud. Utilice esta información para calcular la altura del monumento.

38. *Determinación de la longitud de un camino montañoso.* Un camino recto con inclinación uniforme de 17° lleva desde un hotel situado a 9000 pies hasta un lago en la montaña, a 11,200 pies. ¿Cuál es la longitud del camino?

39. *Determinación de la velocidad de un camión.* Un patrullero está oculto a 30 pies de una autopista. Un segundo después de que pasa un camión por el punto donde se encuentra el patrullero, se mide el ángulo θ entre la autopista y la línea de observación desde la patrulla al camión. *Véase* la ilustración.

(a) Si la medida del ángulo es de 15°, ¿qué tan rápido viaja el camión? Exprese su respuesta en pies por segundo y en millas por hora.

(b) Si la medida del ángulo es de 20°, ¿qué tan rápido viaja el camión? Exprese su respuesta en pies por segundo y en millas por hora.

(c) Si el límite de velocidad es de 55 millas por hora y se expide una boleta de multa por velocidades que exceden en 5 o más millas por hora este límite, ¿para qué ángulos debe el patrullero expedir una boleta de multa?

40. *Faro de la colina de Gibb Southampton, Bermudas.* En operación desde 1846, el faro se levanta 117 pies sobre una colina de 245 pies de altura, de modo que el rayo de luz está a 362 pies sobre el nivel del mar. Un folleto afirma que la luz puede verse en el horizonte a cerca de 26 millas de distancia. Verifique la veracidad de esta información. El folleto más adelante afirma que barcos navegando a 40 millas de distancia pueden ver la luz y que aviones volando a 10,000 pies la distinguen a 120 millas. Verifique la veracidad de estos enunciados. ¿Qué suposición se hace en el folleto acerca de la altura del barco? (*Véase* la ilustración, sección 1.1, problema 115.)

41. *Determinación del rumbo de una aeronave.* Un DC-9 parte del aeropuerto Midway desde una pista de despegue cuya dirección es de 40°. Después de volar media milla, el piloto solicita permiso para virar 90° y dirigirse hacia el sudeste, El permiso es concedido.
(a) ¿Cuál es el nuevo rumbo?
(b) Después que el aeroplano recorre una milla en la nueva ruta, ¿que dirección debe usar la torre de control para localizarlo?

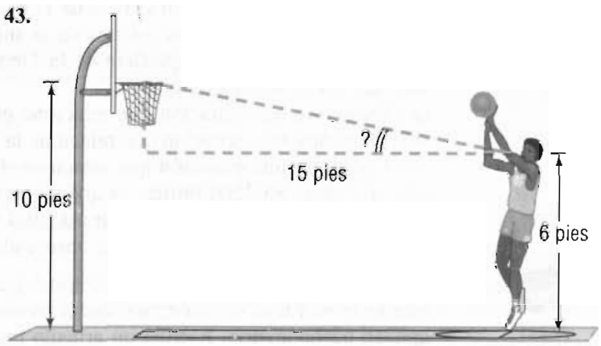
42. *Determinación del rumbo de un barco.* Un barco sale del puerto de Miami con rumbo de 100° y velocidad de 15 nudos. Después de una hora el barco vira 90° hacia el sur.
(a) ¿Cuál es el nuevo rumbo?
(b) Después de 2 horas, manteniendo la velocidad constante, ¿cuál es la dirección del barco respecto del puerto?

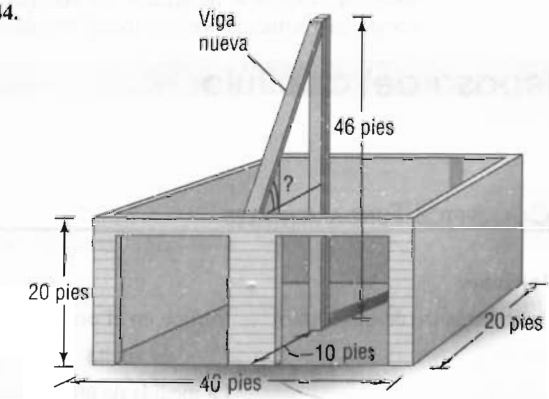
43. *Tiros libres en baloncesto.* Los ojos de un jugador de baloncesto están a 6 pies del piso. El jugador está en la línea de tiro libre, a 15 pies del centro del aro de la canasta (*véase* la figura). ¿Cuál es el ángulo de elevación de los ojos del jugador al centro del aro? [*Nota*: El aro está a 10 pies del piso.]

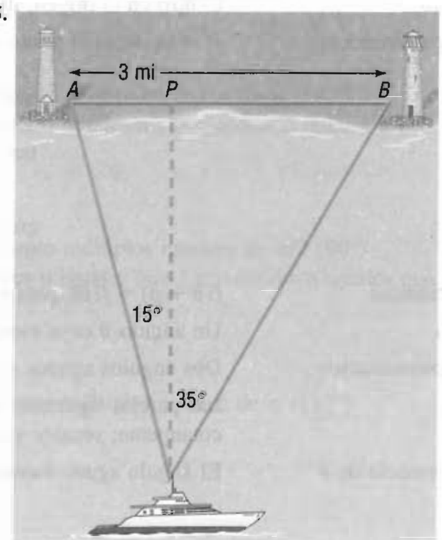
44. *Determinación del declive de un techo.* Un carpintero está preparando un techo para una cochera que mide 20 por 40 por 20 pies. Una viga de acero de 46 pies de longitud es colocada en el centro de la cochera como soporte. Para sostener el techo se sujetará otra viga a la parte superior de la viga central (*véase* la figura). ¿A qué ángulo de elevación está la segunda viga? En otras palabras, ¿cuál es el declive del techo?

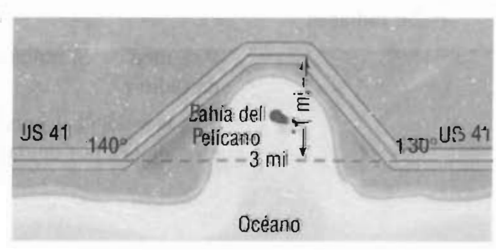
45. *Determinación de distancias en el mar.* El piloto de un barco en el mar divisa dos faros que sabe están separados 3 millas en línea recta a lo largo de la costa. Él determina que los ángulos formados entre dos líneas de observación a los faros y la línea del barco perpendicular a la costa son 15° y 35°. *Véase* la ilustración.
(a) ¿Qué tan lejos está el barco de la costa?
(b) ¿Qué tan lejos está el barco del faro A?
(c) ¿Qué tan lejos está del faro B?

46. *Construcción de una autopista.* Una autopista cuyas direcciones principales son norte-sur será construida a lo largo de la costa oeste de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye la ruta recta de la autopista. A causa de que el costo de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden rodear la bahía. La ilustración muestra la ruta a seguir y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud necesaria de la autopista para rodear la bahía?

43.


44.


45.


46.


47. *Satélites de vigilancia* Un satélite de vigilancia da vueltas alrededor de la Tierra a una altura de h millas por encima de la superficie. Suponga que d es la distancia, en millas, sobre la superficie de la Tierra que puede ser observada desde el satélite. *Véase* la ilustración.

(a) Encuentre una ecuación que relacione el ángulo central θ con la altura h.
(b) Encuentre una ecuación que relacione la distancia observable d y el ángulo θ.
(c) Encuentre una ecuación que relacione d y h.
(d) Si d abarcará 2500 millas, ¿a qué altura debe estar el satélite sobre la Tierra?
(e) Si el satélite órbita a una altura de 300 millas, ¿qué distancia d sobre la superficie de la Tierra puede ser observada?

48. Compare el problema 115 de la sección 1.1 con el ejemplo 9 y el problema 40 de esta sección. En su solución, uno usa el teorema de Pitágoras mientras que los otros aplican trigonometría. Escriba un artículo breve que contraste los dos métodos de solución. Asegúrese de señalar las ventajas y desventajas de cada método. Luego decida cuál solución prefiere usted. Asegúrese de tener razones para ello.

Repaso del capítulo

Conceptos Fundamentales

Definiciones

Posición estándar de un ángulo	Vértice en el origen; lado inicial a lo largo del eje x-positivo
Grado (1°)	$1° = \frac{1}{360}$ vuelta
Radián (1)	La medida de un ángulo central cuyos rayos subtienden un arco de longitud igual al radio del círculo
Círculo unitario	Centro en el origen; radio = 1 Ecuación: $x^2 + y^2 = 1$
Funciones trigonométricas	$P = (a, b)$ es el punto sobre el círculo unitario correspondiente $\theta = t$ radianes;

$$\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} \theta = b \qquad \cos t = \cos \theta = a$$

$$\tan t = \tan \theta = \frac{b}{a}, \quad a \neq 0 \qquad \cot t = \cot \theta = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0$$

$$\csc t = \csc \theta = \frac{1}{b}, \quad b \neq 0 \qquad \sec t = \sec \theta = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0$$

Funciones periódicas	$f(\theta + p) = f(\theta)$, para toda θ, $p > 0$, donde el más pequeño de tales p es el periodo fundamental
Ángulo agudo	Un ángulo θ cuya medida es $0° < \theta < 90°$ (or $0 < \theta < \pi/2$)
Ángulos complementarios	Dos ángulos agudos cuya suma es 90° ($\pi/2$)
Cofunción	Las parejas siguientes de funciones son cofunciones una de la otra: seno y coseno; tangente y cotangente; secante y cosecante
Ángulo de referencia de θ	El ángulo agudo formado por el lado final de θ y ya sea el eje x-positivo o el eje x negativo

Fórmulas

1 vuelta = 360° = 2π radianes	
$s = r\theta$	θ es medida en radianes; s es la longitud del arco subtendido por el ángulo central θ del círculo de radio r.
$v = r\omega$	v es la velocidad lineal a lo largo del círculo de radio r; ω es la velocidad angular (medida en radianes por unidad de tiempo).

Tabla de valor

θ (RADIANES)	θ (GRADOS)	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0	0°	0	1	0	No definida	1	No definida
$\pi/6$	30°	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45°	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2	$\sqrt{3}/3$
$\pi/2$	90°	1	0	No definida	1	No definida	0
π	180°	0	-1	0	No definida	-1	No definida
$3\pi/2$	270°	-1	0	No definida	-1	No definida	0

Propiedades de las funciones trigonométricas

$f(\theta) = \operatorname{sen}\theta$

Dominio: todos los números reales
Rango: todos los números reales desde -1 a 1, inclusive
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función impar

$f(\theta) = \cos\theta$

Dominio: todos los números reales.
Rango: todos los números reales desde -1 hasta 1, inclusive
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función par

$f(\theta) = \tan\theta$

Dominio: todos los números reales, excepto múltiplos impares de $\pi/2$ (90°)
Rango: todos los números reales.
Periódica: periodo $= \pi$ (180°)
Función impar

$f(\theta) = \csc\theta$

Dominio: todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°)
Rango: todos los números reales mayores o iguales a 1 o menores o iguales a -1
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función impar

$f(\theta) = \sec\theta$

Dominio: todos los números reales, excepto múltiplos impares de $\pi/2$ (90°)
Rango: todos los números reales mayores o iguales que 1 o menores o iguales que -1
Periódica: periodo $= 2\pi$ (360°)
Función par

$f(\theta) = \cot\theta$

Dominio: todos los números reales, excepto múltiplos enteros de π (180°)
Rango: todos los números reales
Periódica: periodo $= \pi$ (180°)
Función impar

Identidades

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta, \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Cómo hacer para

Convertir la medida de un ángulo dada en radianes a grados.

Convertir la medida de un ángulo dada en grados a radianes.

Encontrar el valor de cada una de las otras funciones trigonométricas si se da el valor de una función y el cuadrante en que está el ángulo.

Usar el teorema sobre cofunciones de ángulos complementarios.

Usar el ángulo de referencia para encontrar el valor de una función trigonométrica.

Usar una calculadora para encontrar el valor de una función trigonométrica.

Usar la trigonometría de un triángulo rectángulo para resolver triángulos rectángulos y problemas de aplicación.

Complemente en los espacios

1. Dos rayos dibujados con vértice común forman un(a) __________. Uno de los rayos es llamado __________ __________; el otro es llamado __________ __________.
2. En la fórmula $s = r\theta$ para medir la longitud s de un arco que pasa por un círculo de radio r, el ángulo θ debe ser medido en __________.
3. 180 grados __________ radianes.
4. Dos ángulos agudos cuya suma es un ángulo recto son llamados __________.
5. Las funciones seno y __________ son cofunciones.
6. Un ángulo está en __________ __________ si su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con la parte positiva del eje x.
7. El ángulo de referencia de 135° es __________.
8. Las funciones seno, coseno, cosecante y secante tienen periodo __________; las funciones tangente y cotangente tiene periodo __________.

Cierto o falso

C F 1. En la fórmula $s = r\theta$, r es el radio de un círculo y s es el arco subtendido por un ángulo central θ, donde θ es medido en grados.

C F 2. $|\text{sen }\theta| \leq 1$

C F 3. $1 + \tan^2\theta = \csc^2\theta$

C F 4. Las únicas funciones trigonométricas pares son las funciones coseno y secante.

C F 5. $\tan 62° = \cot 38°$

C F 6. $\text{sen } 182° = \cos 2°$

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 4 convierta cada ángulo dado en grados a radianes. Exprese su respuesta como un múltiplo de π.

1. 135° **2.** 210° **3.** 18° **4.** 15°

En los problemas del 5 al 8, convierta cada ángulo dado en radianes a grados.

5. $3\pi/4$ **6.** $2\pi/3$ **7.** $-5\pi/2$ **8.** $-3\pi/2$

En los problemas del 9 al 30 encuentre el valor exacto de cada expresión. No utilice calculadora.

9. $\tan \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

10. $\cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}$

11. $3 \operatorname{sen} 45° - 4 \tan \frac{\pi}{6}$

12. $4 \cos 60° + 3 \tan \frac{\pi}{3}$

13. $6 \cos \frac{3\pi}{4} + 2 \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

14. $3 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} - 4 \cos \frac{5\pi}{2}$

15. $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \cot\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

16. $4 \csc \frac{3\pi}{4} - \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

17. $\tan \pi + \operatorname{sen} \pi$

18. $\cos \frac{\pi}{2} - \csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

19. $\cos 180° - \tan(-45°)$

20. $\operatorname{sen} 270° + \cos(-180°)$

21. $\operatorname{sen}^2 20° + \frac{1}{\sec^2 20°}$

22. $\frac{1}{\cos^2 40°} - \frac{1}{\cot^2 40°}$

23. $\sec 50° \cos 50°$

24. $\tan 10° \cot 10°$

25. $\frac{\operatorname{sen} 50°}{\cos 40°}$

26. $\frac{\tan 20°}{\cot 70°}$

27. $\frac{\operatorname{sen}(-40°)}{\cos 50°}$

28. $\tan(-20°) \cot 20°$

29. $\operatorname{sen} 400° \sec(-50°)$

30. $\cot 200° \cot(-70°)$

En los problemas del 31 al 46 encuentre el valor exacto de cada una de las restantes funciones trigonométricas.

31. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{4}{5}, \quad \cos \theta > 0$

32. $\cos \theta = -\frac{3}{5}, \quad \operatorname{sen} \theta < 0$

33. $\tan \theta = \frac{12}{5}, \quad \operatorname{sen} \theta < 0$

34. $\cot \theta = \frac{12}{5}, \quad \cos \theta < 0$

35. $\sec \theta = -\frac{5}{4}, \quad \tan \theta < 0$

36. $\csc \theta = -\frac{5}{3}, \quad \cot \theta < 0$

37. $\operatorname{sen} \theta = \frac{12}{13}$, θ en el cuadrante II

38. $\cos \theta = -\frac{3}{5}$, θ en el cuadrante III

39. $\operatorname{sen} \theta = -\frac{5}{13}, \quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi$

40. $\cos \theta = \frac{12}{13}, \quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi$

41. $\tan \theta = \frac{1}{3}, \quad 180° < \theta < 270°$

42. $\tan \theta = -\frac{2}{3}, \quad 90° < \theta < 180°$

43. $\sec \theta = 3, \quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi$

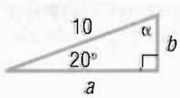
44. $\csc \theta = -4, \quad \pi < \theta < 3\pi/2$

45. $\cot \theta = -2, \quad \pi/2 < \theta < \pi$

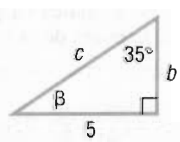
46. $\tan \theta = -2, \quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi$

En los problemas del 47 al 50 resuelva cada triángulo.

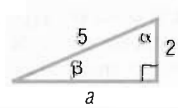
47.



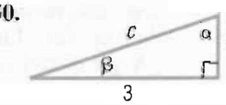
48.



49.



50.



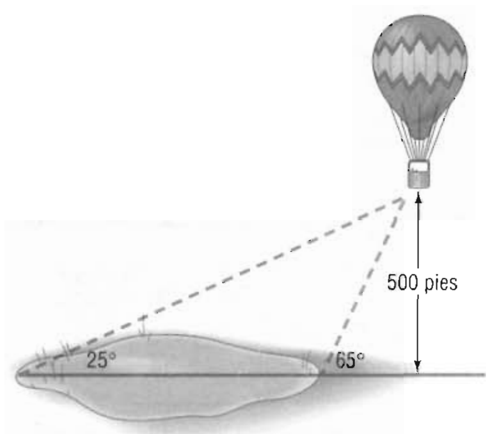
51. Encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 30° sobre un círculo con radio de 2 pies.

52. El minutero de un reloj tiene una longitud de 8 pulgadas. ¿Qué distancia avanza la punta del minutero en 30 minutos? ¿Qué distancia se mueve en 20 minutos?

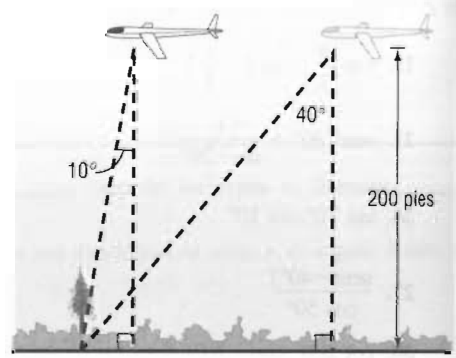
53. *Velocidad angular de un automóvil de carreras* .Un auto de carreras es conducido en una pista circular a una velocidad constante de 180 millas por hora. Si el diámetro de la pista es de media milla, ¿cuál es la velocidad angular del automóvil? Exprese su respuesta en revoluciones por hora (que es equivalente a vueltas por hora).

54. *Velocidad angular de un automóvil de carreras.* Repita el problema 53 si el automóvil sólo va a 150 millas por hora.

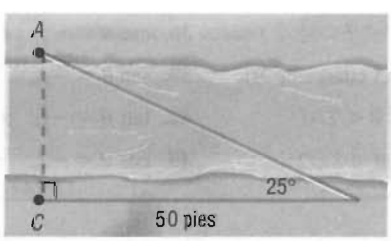
55. *Medición de la longitud de un lago.* Desde un globo estacionario de aire caliente situado a 500 pies sobre el suelo se hacen dos observaciones de un lago (*véase* la figura). ¿Cuál es la longitud del lago?



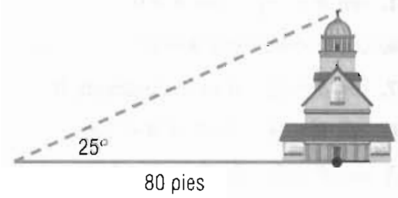
56. *Determinación de la velocidad de un planeador.* Desde un planeador que va a 200 pies del suelo, se toman dos observaciones de un objeto fijo en tierra que se encuentra directamente frente a él. Las observaciones se toman con una diferencia de un minuto (*véase* la figura). ¿Cuál es la velocidad del planeador?



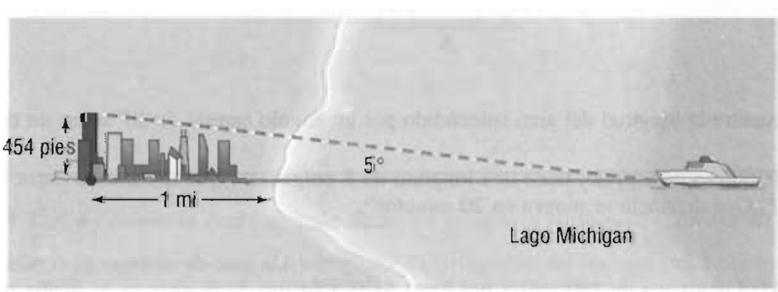
57. *Determinación del ancho de un río.* Encuentre la distancia desde A hasta C cruzando el río ilustrado en la figura.



58. *Determinación de la altura de un edificio.* Encuentre la altura del edificio mostrado en esta figura.



59. *Determinación de la distancia de la costa.* La torre Sears en Chicago mide 1454 pies de altura y está situada casi una milla tierra adentro de la costa del lago Michigan, como se indica en la figura. Un observador que está en un bote de recreo en el lago, directamente en frente de la torre, ve la punta de la torre y mide el ángulo de elevación como 5°. ¿A qué distancia de la costa se encuentra el bote?



60. *Determinación de la pendiente de un camino montañoso.* Un camino en la montaña con inclinación uniforme conduce desde un hotel, a una altura de 5000 pies, hasta el lago de un valle, a una altura de 4100 pies. La longitud del camino es de 4100 pies. ¿Cuál es su pendiente?

Capítulo 6

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de comenzar este capítulo repase los siguientes conceptos:

Gráfica de una función (p. 101).
Valores de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos (tabla 2, p. 338; tabla 3, p. 341).
Funciones periódicas (pp. 350-351).
Técnicas de graficación (sección 2.3).
Funciones inversas (pp. 150-156).

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Panorama Teléfonos por tono

En los teléfonos por tono cada botón produce un sonido único. Ese sonido es la suma de dos tonos, dada por

$$y = \text{sen } 2\pi lt \quad \text{y} \quad y = \text{sen } 2\pi ht$$

donde l y h son las frecuencias alta y baja (ciclos por segundo) de los dos tonos. Por ejemplo, si usted oprime 7, la frecuencia baja es l = 852 ciclos por segundo y la frecuencia alta es h = 1 209 ciclos por segundo. El sonido emitido al oprimir 7 es

$$y = \text{sen } 2\pi(852)t + \text{sen } 2\pi(1209)t$$

Haga la gráfica del sonido emitido al oprimir 7.

[Problema 29 en el ejercicio 6.3.]

En este capítulo haremos las gráficas de las seis funciones trigonométricas. Después de analizar las gráficas de las funciones seno y coseno veremos algunas aplicaciones relacionadas con las vibraciones amortiguadas y el movimiento armónico simple. Luego haremos las gráficas de las demás funciones trigonométricas y concluiremos el capítulo con un análisis de las funciones trigonométricas inversas.

6.1 Gráficas de las funciones seno y coseno

En el capítulo 5 definimos las funciones trigonométricas $f(\theta) = \text{sen}\ \theta$, $f(\theta) = \cos\theta$, etc. En este capítulo utilizaremos los símbolos tradicionales, x para representar la variable independiente (el argumento) y y para la variable dependiente (o valor en x) en cada función. Así, escribimos las seis funciones trigonométricas como

$$y = \text{sen}\ x \qquad y = \cos x \qquad y = \tan x$$
$$y = \csc x \qquad y = \sec x \qquad y = \cot x$$

En esta sección haremos la gráfica de cada una de estas funciones. A menos que se indique lo contrario, utilizaremos la medida en radianes en todo el capítulo para la variable independiente x.

La gráfica de $y = \text{sen}\ x$

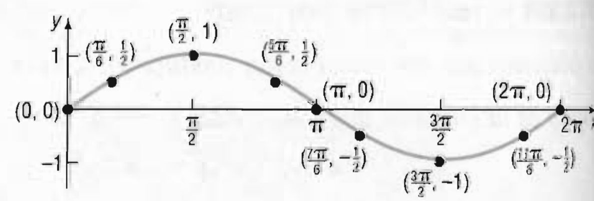
Como la función seno tiene periodo 2π (*véase* la sección 7.6), sólo necesitamos hacer la gráfica de $y = \text{sen}\ x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. El resto de la gráfica constará de repeticiones de esta parte.

Comenzamos construyendo la tabla 1, la cual enumera algunos puntos sobre la gráfica de $y = \text{sen}\ x$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Como muestra la tabla, la gráfica de $y = \text{sen}\ x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ comienza en el origen. Cuando x crece de 0 $\pi/2$, el valor de $y = \text{sen}\ x$ aumenta de 0 a 1; cuando x crece de $\pi/2$ a π a $3\pi/2$, el valor de y disminuye de 1 a 0 a -1; cuando x crece de $3\pi/2$ a 2π, el valor de y aumenta de -1 a 0. Si hacemos la gráfica de los puntos enumerados en la tabla 1 y los unimos por medio de una curva suave obtendremos la gráfica de la figura 1.

TABLA 1

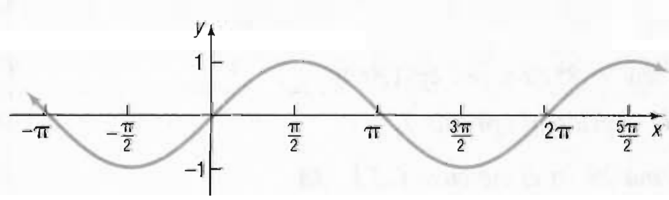
x	$y = \text{sen}\ x$	(x, y)
0	0	$(0, 0)$
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$(\pi/6, \frac{1}{2})$
$\pi/2$	1	$(\pi/2, 1)$
$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$(5\pi/6, \frac{1}{2})$
π	0	$(\pi, 0)$
$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$(7\pi/6, -\frac{1}{2})$
$3\pi/2$	-1	$(3\pi/2, -1)$
$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$(11\pi/6, -\frac{1}{2})$
2π	0	$(2\pi, 0)$

FIGURA 1
$y = \text{sen}\ x$, $0 \leq x \leq 2\pi$



La gráfica de la figura 1 es un periodo de la gráfica de $y = \text{sen}\ x$. Para obtener una gráfica más completa de $y = \text{sen}\ x$, repetimos este periodo en cada dirección, como muestra la figura 2.

FIGURA 2
$y = \text{sen}\ x$, $-\infty < x < \infty$



La gráfica de $y = \text{sen } x$ ilustra algunos de los hechos ya conocidos acerca de la función seno:

Características de la función seno

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango consta de todos los números reales entre -1 y 1, inclusive.
3. La función seno es una función impar, como muestra la simetría de la gráfica con respecto al origen.
4. La función seno es periódica, con periodo 2π.
5. Las intersecciones-x son $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; la intersección-$y$ es 0.
6. El valor máximo es 1 y ocurre en $x = \ldots, -3\pi/2, \pi/2, 5\pi/2, 9\pi/2, \ldots$; el valor mínimo es -1 y ocurre en $x = \ldots, -\pi/2, 3\pi/2, 7\pi/2, 11\pi/2, \ldots$.

■ Ahora resuelva los problemas 1, 3 y 5.

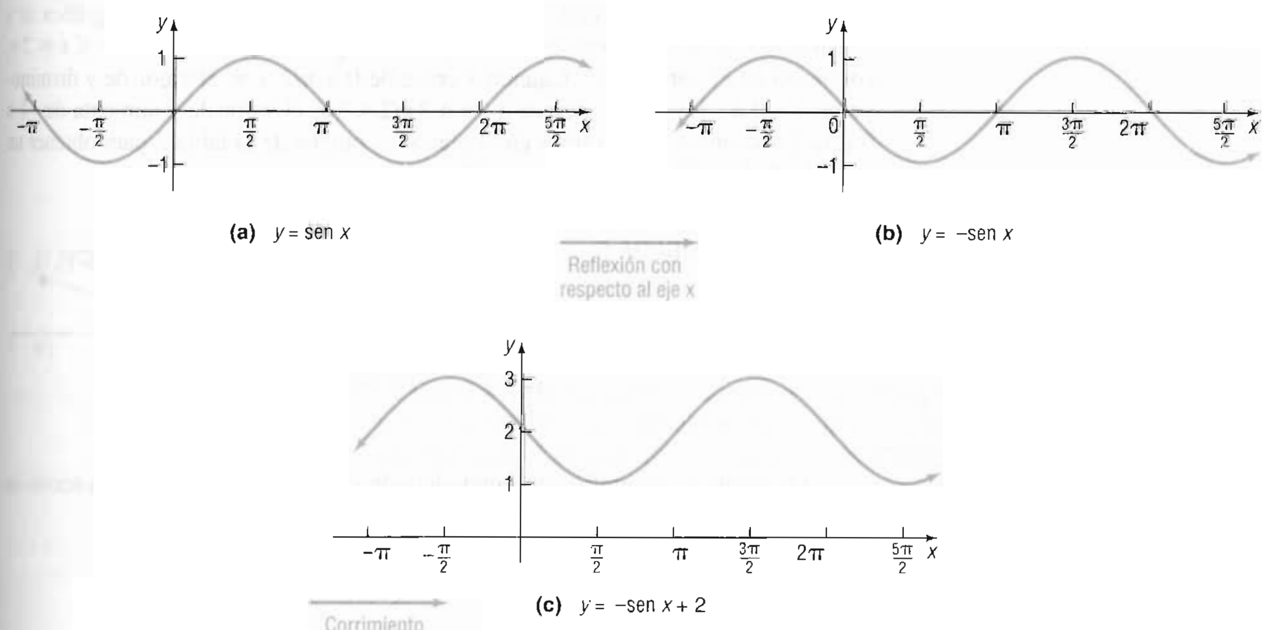
Las técnicas de graficación presentadas en el capítulo 2 permiten hacer la gráfica de funciones que son una variación de la función seno.

EJEMPLO 1 *Graficación de variaciones de $y = \text{sen } x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Utilice la gráfica de $y = \text{sen } x$ para hacer la gráfica de $y = -\text{sen } x + 2$.

Solución La figura 3 ilustra los pasos.

FIGURA 3



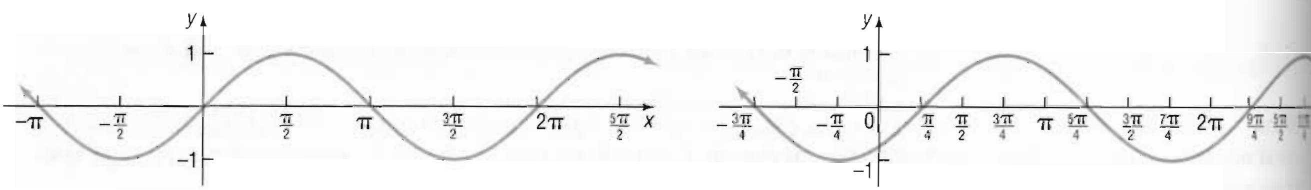
Verificación: haga la gráfica de $y = -\text{sen } x + 2$ y compare el resultado con la figura 3(c). ■

EJEMPLO 2 *Graficación de variaciones de $y = \text{sen } x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Utilice la gráfica de $y = \text{sen } x$ para hacer la gráfica de $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución La figura 4 ilustra los pasos.

FIGURA 4



(a) $y = \text{sen } x$ (b) $y = \text{sen}(x - \frac{\pi}{4})$

Corrimiento horizontal

Verificación: haga la gráfica de $y = \text{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ y compare el resultado con la figura 4(b).

■ Ahora resuelva el problema 11.

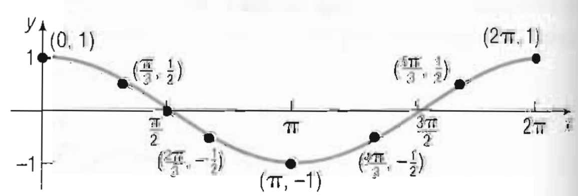
Gráfica de $y = \cos x$

La función coseno también tiene periodo 2π. Así, procedemos como con la función seno y construimos la tabla 2, la cual enumera algunos puntos sobre la gráfica de $y = \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$. Como muestra la tabla, la gráfica de $y = \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$, comienza en el punto (0,1). Cuando x crece de 0 a $\pi/2$ a π, el valor de y disminuye de 1 a 0 a -1; cuando x crece de π a $3\pi/2$ a 2π, el valor de y aumenta de -1 a 0 a 1. Como antes, localizamos en el plano los puntos de la tabla 2 para obtener un periodo de la gráfica de $y = \cos x$. *Véase* la figura 5.

TABLA 2

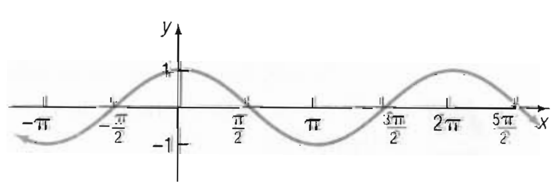
x	$y = \cos x$	(x, y)
0	1	(0, 1)
$\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$(\pi/3, \frac{1}{2})$
$\pi/2$	0	$(\pi/2, 0)$
$2\pi/3$	$-\frac{1}{2}$	$(2\pi/3, -\frac{1}{2})$
π	-1	$(\pi, -1)$
$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}$	$(4\pi/3, -\frac{1}{2})$
$3\pi/2$	0	$(3\pi/2, 0)$
$5\pi/3$	$\frac{1}{2}$	$(5\pi/3, \frac{1}{2})$
2π	1	$(2\pi, 1)$

FIGURA 5 $y = \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$



Obtenemos una gráfica más completa de $y = \cos x$ repitiendo este periodo en cada dirección, como muestra la figura 6.

FIGURA 6 $y = \cos x$, $-\infty < x < \infty$



La gráfica de $y = \cos x$ ilustra algunos de los hechos ya conocidos acerca de la función coseno:

Características de la función coseno

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales.
2. El rango consta de todos los números reales entre -1 y 1, inclusive.
3. La función coseno es una función par, como muestra la simetría de la gráfica respecto del eje y.
4. La función coseno es periódica, con periodo 2π.
5. Las intersecciones-x son $\ldots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$; la intersección-$y$ es 1.
6. El valor máximo es 1 y ocurre en $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$; el valor mínimo es -1 y ocurre en $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$.

De nuevo, las técnicas de graficación presentadas en el capítulo 2 permiten hacer la gráfica de variaciones de la función coseno.

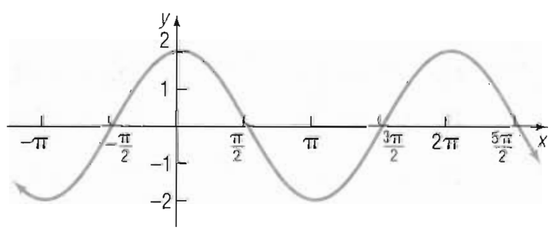
EJEMPLO 3

Graficación de variaciones de $y = \cos x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas

Utilice la gráfica de $y = \cos x$ para hacer la gráfica de $y = 2\cos x$.

Solución La figura 7 ilustra la gráfica, la cual es un alargamiento vertical de la gráfica de $y = \cos x$.

FIGURA 7
$y = 2\cos x$



Verificación: haga la gráfica de $y = 2\cos x$ y compare el resultado con la figura 7. ■

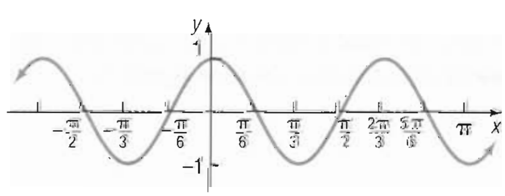
EJEMPLO 4

Graficación de variaciones de $y = \cos x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas

Utilice la gráfica de $y = \cos x$ para hacer la gráfica de $y = \cos 3x$.

Solución La figura 8 ilustra la gráfica, la cual es una compresión horizontal de la gráfica de $y = \cos x$. Observe que, debido a esta compresión, el periodo de $y = \cos 3x$ es $2\pi/3$ mientras que el periodo de $y = \cos x$ es 2π. Comentaremos más sobre esto en la siguiente sección.

FIGURA 8
$y = \cos 3x$



Verificación: haga la gráfica de $y = \cos 3x$. Utilice TRACE para verificar que el periodo es $2\pi/3$. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

6.1

Ejercicio 6.1

En los problemas del 1 al 10 consulte las gráficas de y = sen x y y = cos x para responder cada pregunta, en caso necesario.

1. ¿Cuál es la intersección-y de y = sen x?
2. ¿Cuál es la intersección-y de y = cos x?
3. ¿Para cuáles números x, $-\pi \leq x \leq \pi$ es creciente la gráfica de y = sen x?
4. ¿Para cuáles números x, $-\pi \leq x \leq \pi$ es decreciente la grafica de y = cos x?
5. ¿Cuál es el valor máximo de y = sen x?
6. ¿Cuál es el valor mínimo de y = cos x?
7. ¿Para cuáles números x, $0 \leq x \leq 2\pi$, se cumple que sen $x = 0$?
8. ¿Para cuáles números x, $0 \leq x \leq 2\pi$, se cumple que cos $x = 0$?
9. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, se cumple que sen $x = 1$? ¿Qué puede decir de sen $x = -1$?
10. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, se cumple que cos $x = 1$? ¿Qué puede decir de cos $x = -1$?

En los problemas del 11 al 26, haga la gráfica de cada función. Muestre al menos un periodo.

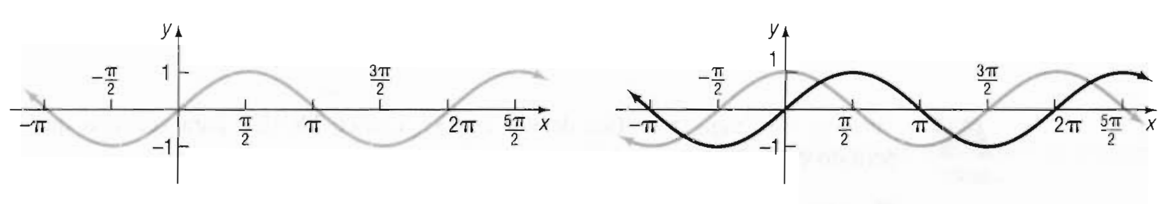
11. $y = 3 \operatorname{sen} x$
12. $y = 4 \cos x$
13. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$
14. $y = \operatorname{sen}(x - \pi)$
15. $y = \operatorname{sen} x - 1$
16. $y = \cos x + 1$
17. $y = -2 \operatorname{sen} x$
18. $y = -3 \cos x$
19. $y = \operatorname{sen} \pi x$
20. $y = \cos \dfrac{\pi}{2}x$
21. $y = 2 \operatorname{sen} x + 2$
22. $y = 3 \cos x + 3$
23. $y = -2 \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$
24. $y = -3 \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
25. $y = 3 \operatorname{sen} (\pi - x)$
26. $y = 2 \cos (\pi - x)$
27. Haga la gráfica de
$$y = \operatorname{sen} x \quad \text{y} \quad y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
¿Piensa que $\operatorname{sen} x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$?
28. Haga la gráfica de y = sen x, y = 2 sen x, $y = \frac{1}{2}$ sen x, y y = 8 sen x. ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de y = A sen x, A > 0?
29. Haga la gráfica de y = sen x, y = sen $2x$, y = sen $4x$, y y = sen $\frac{1}{2}x$. ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de y = sen ωx?
30. Haga la gráfica de y = sen x, y = sen$[x - (\pi/3)]$, y = sen$[x - (\pi/4)]$, y y = sen$[x - (\pi/6)]$. ¿Qué puede concluir acerca de la gráfica de y = sen$(x - \phi)$, $\phi > 0$?

6.2

Gráficas senoidales

La gráfica de y = cos x, comparada con la de y = sen x, sugiere que la gráfica de y = sen x es igual a la de y = cos x, después de un corrimiento horizontal de $\pi/2$ unidades a la derecha. *Véase* la figura 9.

FIGURA 9



(a) y = sen x (b) y = cos x $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Con base en la figura 9, suponemos que

$$\text{sen } x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

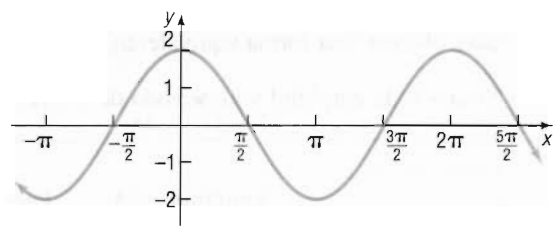
(Demostraremos esto en el capítulo 7.) Debido a este parecido las gráficas de las funciones seno y coseno se conocen como **gráficas senoidales.**

Verificación: haga la gráfica de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. ¿Cuántas gráficas ve?

Analicemos algunas características generales de las gráficas senoidales.

En el ejemplo 3 de la sección anterior obtuvimos la gráfica de $y = 2 \cos x$, la cual reproducimos en la figura 10. Observe que los valores de $y = 2 \cos x$ están entre -2 y 2, inclusive.

FIGURA 10
$y = 2 \cos x$

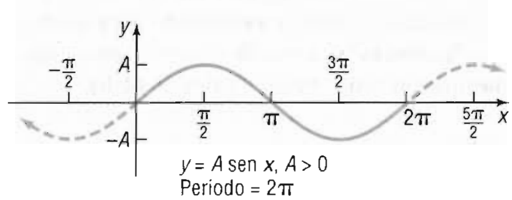


En general, los valores de las funciones $y = A \text{ sen } x$ y $y = A \cos x$, donde $A \neq 0$, siempre satisfacen las desigualdades.

$$-|A| \leq A \text{ sen } x \leq |A| \quad \text{y} \quad -|A| \leq A \cos x \leq |A|$$

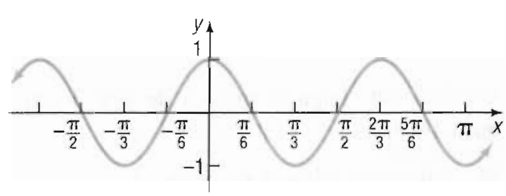
respectivamente. El número $|A|$ es la **amplitud** de $y = A \text{ sen } x$ o $y = A \cos x$. *Véase* la figura 11.

FIGURA 11



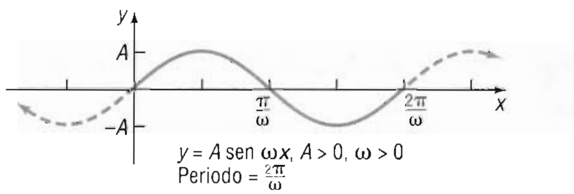
En el ejemplo 4 de la sección 6.1 obtuvimos la gráfica de $y = \cos 3x$, la cual reproducimos en la figura 12. Observe que el periodo de esta función es $2\pi/3$.

FIGURA 12
$y = \cos 3x$



En general, si $\omega > 0$, las funciones $y = \text{sen}\ \omega x$ y $y = \cos \omega x$ tendrán un periodo $T = 2\pi/\omega$. Para ver por qué ocurre esto, recordemos que la gráfica de $y = \text{sen}\ \omega x$ se obtiene de la gráfica de $y = \text{sen}\ x$ realizando una compresión o un alargamiento horizontal adecuado. Esta compresión horizontal remplaza el intervalo $[0, 2\pi]$, el cual contiene un periodo de la gráfica de $y = \text{sen}\ x$, por el intervalo $[0, 2\pi/\omega]$, el cual contiene un periodo de la gráfica de $y = \text{sen}\ \omega x$. Así, el periodo de las funciones $y = \text{sen}\ \omega x$ y $y = \cos \omega x$, $\omega > 0$ es $2\pi/\omega$. *Véase* la figura 13.

FIGURA 13



Si $\omega < 0$ en $y = \text{sen}\ \omega x$ o $y = \cos \omega x$, utilizamos los hechos de que

$$\text{sen}\ \omega x = -\text{sen}(-\omega x) \quad \text{y} \quad \cos \omega x = \cos(-\omega x)$$

para obtener una forma equivalente en donde el coeficiente de x es positivo.

Teorema Si $\omega > 0$, la amplitud y el periodo de $y = A\ \text{sen}\ \omega x$ y $y = A \cos \omega x$ están dados por

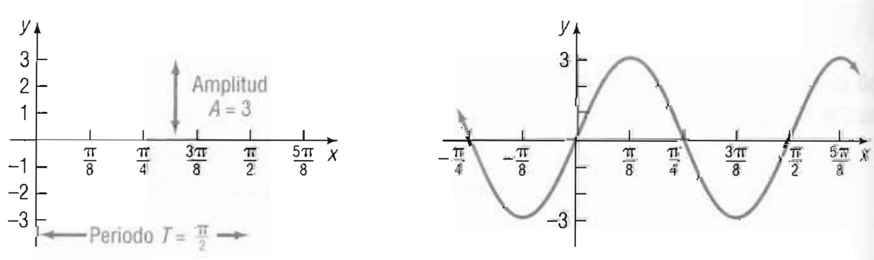
$$\text{Amplitud} = |A| \qquad \text{Periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1}$$

EJEMPLO 1 *Determinación de la amplitud y el periodo de una función senoidal*

Determinar la amplitud y el periodo de $y = 3\ \text{sen}\ 4x$ y hacer la gráfica de la función.

Solución Al comparar $y = 3\ \text{sen}\ 4x$ con $y = A\ \text{sen}\ \omega x$, vemos que $A = 3$ y $\omega = 4$. Así, por la ecuación (1), la amplitud es $|A| = 3$ y el periodo es $T = 2\pi/\omega = 2\pi/4 = \pi/2$. Podemos utilizar esta información para hacer la gráfica de $y = 3\ \text{sen}\ 4x$, comenzando como nos muestra la figura 14(a). Observe que utilizamos la amplitud para establecer la escala del eje y, y el periodo para establecer la escala del eje x. (Esto produce por lo general una escala diferente para cada eje.) Ahora completemos la gráfica de la función seno. *Véase* la figura 14(b).

FIGURA 14



(a) (b) $y = 3\ \text{sen}\ 4x$

Verificación: haga la gráfica de $y = 3\ \text{sen}\ 4x$ y compare el resultado con la figura 14(b).

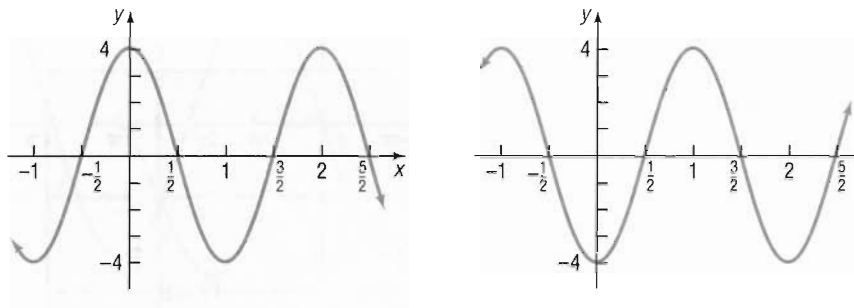
■ Ahora resuelva el problema 5.

EJEMPLO 2 *Determinación de la amplitud y el periodo de una función senoidal*

Determinar la amplitud y el periodo de $y = -4 \cos \pi x$ y hacer la gráfica de la función.

Solución Al comparar $y = -4 \cos \pi x$ con $y = A \cos \omega x$, vemos que $A = -4$ y $\omega = \pi$. Así, la amplitud es $|A| = |-4| = 4$ y el periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\pi = 2$. Utilizamos la amplitud para establecer la escala del eje y, y el periodo para establecer la escala del eje x; después completamos la gráfica de la función coseno y obtenemos la gráfica de $y = 4 \cos \pi x$ que aparece en la figura 15(a). Ahora, como queremos obtener la gráfica de $y = -4 \cos \pi x$, reflejamos la gráfica de $y = 4 \cos \pi x$ con respecto al eje x, como nos muestra la figura 15(b).

FIGURA 15



(a) $y = 4 \cos \pi x$ — Reflexión con respecto al eje x → (b) $y = -4 \cos \pi x$

Verificación: haga la gráfica de $y = -4 \cos \pi x$ y compare el resultado con la figura 15(b). ■

EJEMPLO 3 *Determinación de la amplitud y el periodo de una función senoidal*

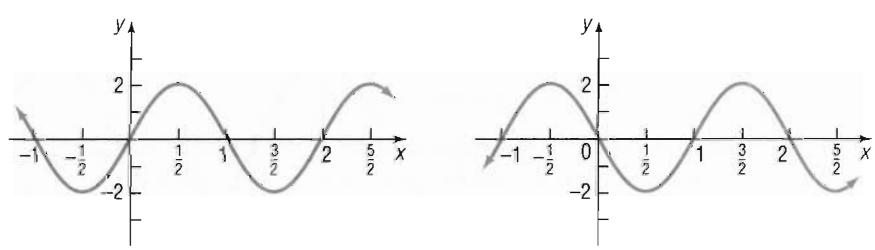
Determinar la amplitud y el periodo de $y = 2 \operatorname{sen}(-\pi x)$ y hacer la gráfica de la función.

Solución Como la función seno es impar, utilizamos la forma equivalente

$$y = -2 \operatorname{sen} \pi x$$

Al comparar $y = -2 \operatorname{sen} \pi x$ con $y = A \operatorname{sen} \omega x$, vemos que $A = -2$ y $\omega = \pi$. Así, la amplitud es $|A| = 2$ y el periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\pi = 2$. De nuevo, utilizamos la amplitud para establecer la escala del eje y, el periodo para establecer la escala del eje x, y después completamos la gráfica de la función seno. La figura 16(a) muestra la gráfica resultante de $y = 2 \operatorname{sen} \pi x$. Para obtener la gráfica de $y = -2 \operatorname{sen} \pi x$, reflejamos la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} \pi x$ respecto del eje x, como muestra la figura 16(b).

FIGURA 16



(a) $y = 2 \operatorname{sen} \pi x$ — Reflexión con respecto al eje x → (b) $y = -2 \operatorname{sen} \pi x = 2 \operatorname{sen}(-\pi x)$

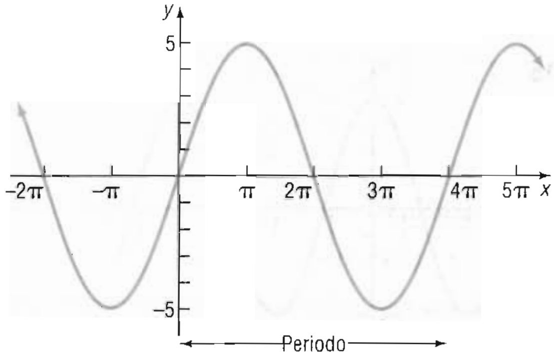
Verificación: haga la gráfica de $y = 2 \text{ sen}(-\pi x)$ y compare el resultado con la figura 16(b).

También podemos utilizar las ideas de amplitud y periodo para identificar una función senoidal cuando está especificada su gráfica.

EJEMPLO 4 *Determinación de una ecuación para una gráfica senoidal*

Determinar una ecuación para la gráfica de la figura 17.

FIGURA 17



Solución Podemos ver esta gráfica como la de una función seno, con amplitud $A = 5$.* Observamos que el periodo T es 4π. Así, por la ecuación (1),

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$4\pi = \frac{2\pi}{\omega}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

Una función seno cuya gráfica está dada por la figura 17 es

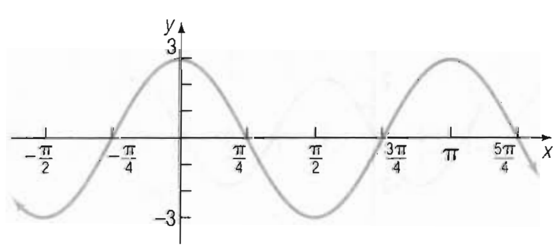
$$y = A \text{ sen } \omega x = 5 \text{ sen } \frac{x}{2}$$

Verificación: haga la gráfica de $y = 5 \text{ sen } \frac{x}{2}$ y compare el resultado con la figura 17.

EJEMPLO 5 *Determinación de una ecuación para una gráfica senoidal*

Determinar una ecuación para la gráfica de la figura 18.

FIGURA 18



*La ecuación también se puede ver como una función coseno con un corrimiento horizontal, pero es más sencillo verla como una función seno.

Solución Esta gráfica permite concluir que es más sencillo ver la ecuación como una función coseno con amplitud $A = 3$ y periodo $T = \pi$. Así, $2\pi/\omega = \pi$, de modo que $\omega = 2$. Una función coseno cuya gráfica está dada por la figura 18 es

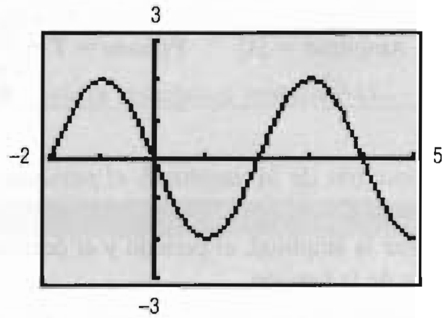
$$y = A \cos \omega x = 3 \cos 2x$$

Verificación: haga la gráfica de $y = 3 \cos 2x$ y compare el resultado con la figura 18. ■

EJEMPLO 6 *Determinación de una ecuación para una gráfica senoidal*

Determinar una ecuación para la gráfica de la figura 19.

FIGURA 19



Solución La gráfica es senoidal, con amplitud $A = 2$. El periodo es 4, de modo que $2\pi/\omega = 4$ o $\omega = \pi/2$. Como la gráfica pasa por el origen es más sencillo ver la ecuación como una función seno, pero observe que, en realidad, la gráfica es la reflexión de una función seno con respecto al eje x (ya que la gráfica es decreciente cerca del origen). Así, tenemos

$$y = -A \text{ sen } \omega x = -2 \text{ sen } \frac{\pi}{2}x, \qquad A > 0$$

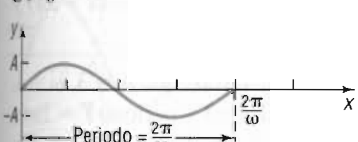
Verificación: haga la gráfica de $y = -2 \text{ sen } \frac{\pi}{2}x$ y compare el resultado con la figura 19. ■

■ Ahora resuelva el problema 31.

Desfasamiento

Hemos visto que la gráfica de $y = A \text{ sen } \omega x$, $\omega > 0$, tiene amplitud $|A|$ y periodo $T = 2\pi/\omega$. Así, un periodo se puede obtener al variar x de 0 a $2\pi/\omega$ o, en forma equivalente, cuando ωx varía de 0 a 2π. *Véase* la figura 20.

FIGURA 20
Un periodo de $y = A \text{ sen } \omega x$, $A > 0$, $\omega > 0$



Ahora analizaremos la gráfica de

$$y = A \text{ sen}(\omega x - \phi)$$

donde $\omega > 0$ y ϕ (la letra griega *phi*) son números reales. La gráfica será una curva seno de amplitud $|A|$. Como $\omega x - \phi$ varíe de 0 a 2π obtendremos un periodo. Este periodo comienza cuando

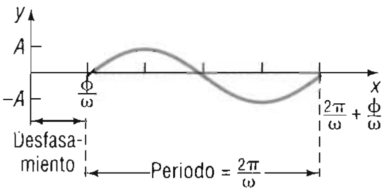
$$\omega x - \phi = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{\phi}{\omega}$$

y termina cuando

$$\omega x - \phi = 2\pi \quad \text{o} \quad x = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{\phi}{\omega}$$

Véase la figura 21.

FIGURA 21
Un periodo de $y = A\ \text{sen}(\omega x - \phi)$, $A > 0$, $\omega > 0$, $\phi > 0$



Así, vemos que la gráfica de $y = A\ \text{sen}(\omega x - \phi)$ es igual a la gráfica de $y = A\ \text{sen}\ \omega x$, excepto que ha sido recorrida ϕ/ω unidades (a la derecha si $\phi > 0$ y a la izquierda si $\phi < 0$). El número ϕ/ω es el **desfasamiento de la gráfica** de $y = A\ \text{sen}(\omega x - \phi)$.

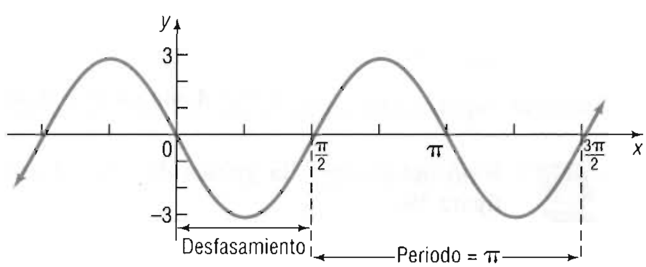
> Para las gráficas de $y = A\ \text{sen}(\omega x - \phi)$ o $y = A\cos(\omega x - \phi)$, $\omega > 0$,
>
> Amplitud $= |A|$ Periodo $= T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ Desfasamiento $= \dfrac{\phi}{\omega}$

EJEMPLO 7 *Determinación de la amplitud, el periodo y el desfasamiento de una función senoidal*

Determinar la amplitud, el periodo y el desfasamiento de $y = 3\ \text{sen}(2x - \pi)$ y hacer la gráfica de la función.

Solución Al comparar $y = 3\ \text{sen}(2x - \pi)$ con $y = A\ \text{sen}(\omega x - \phi)$, vemos que $A = 3$, $\omega = 2$, y $\phi = \pi$. La gráfica es una curva seno con amplitud $A = 3$ y periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$. Un periodo de la curva seno comienza en $2x - \pi = 0$ o $x = \pi/2$ (este es el desfasamiento) y termina en $2x - \pi = 2\pi$ o $x = 3\pi/2$. *Véase* la figura 22.

FIGURA 22
$y = 3\ \text{sen}(2x - \pi)$



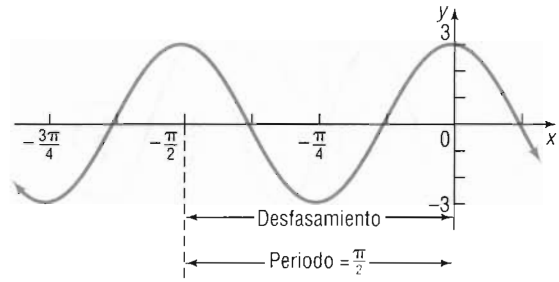
Verificación: haga la gráfica de $y = 3\ \text{sen}(2x - \pi)$ y compare el resultado con la figura 22. ∎

EJEMPLO 8 *Determinación de la amplitud, el periodo y el desfasamiento de una función senoidal*

Determinar la amplitud, el periodo y el desfasamiento de $y = 3\cos(4x + 2\pi)$ y hacer la gráfica de la función.

Solución Al comparar $y = 3\cos(4x + 2\pi)$ con $y = A\cos(\omega x - \phi)$, vemos que $A = 3$, $\omega = 4$, y $\phi = -2\pi$. La gráfica es una curva coseno con amplitud $A = 3$ y periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi/4 = \pi/2$. Un periodo de la curva coseno comienza en $4x + 2\pi = 0$ o $x = -\pi/2$ (el desfasamiento) y termina en $4x + 2\pi = 2\pi$ o $x = 0$. *Véase* la figura 23.

FIGURA 23
$y = 3\cos(4x + 2\pi)$



Verificación: haga la gráfica de $y = 3\cos(4x+2\pi)$ y compare el resultado con la figura 23. ■

■ Ahora resuelva el problema 45.

6.2

Ejercicio 6.2

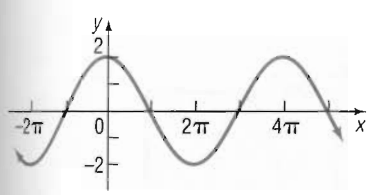
En los problemas del 1 al 10 determine la amplitud y el periodo de cada función sin hacer la gráfica.

1. $y = 2 \operatorname{sen} x$ **2.** $y = 3\cos x$ **3.** $y = -4\cos 2x$ **4.** $y = -\operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

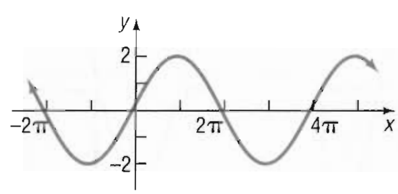
5. $y = 6 \operatorname{sen} \pi x$ **6.** $y = -3\cos 3x$ **7.** $y = \frac{1}{2}\cos \frac{3}{2}x$ **8.** $y = \frac{4}{3} \operatorname{sen} \frac{2}{3}x$

9. $y = \dfrac{5}{3}\operatorname{sen}\left(-\dfrac{2\pi}{3}x\right)$ **10.** $y = \dfrac{9}{5}\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}x\right)$

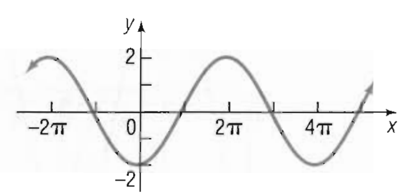
En los problemas del 11 al 20 relacione la función dada con alguna de las gráficas de la (A) a la (J).



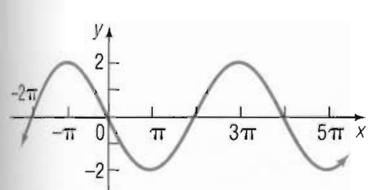
(A)



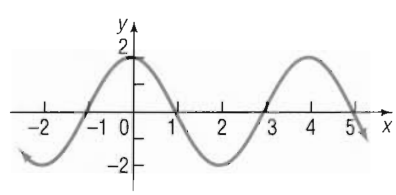
(B)



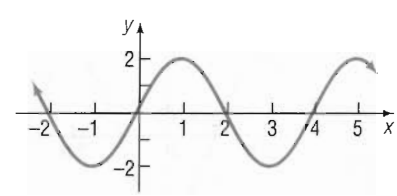
(C)



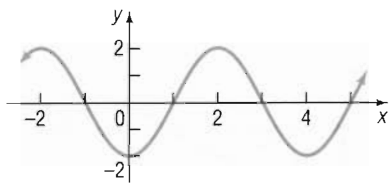
(D)



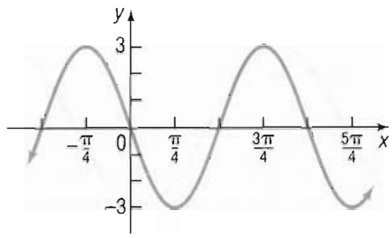
(E)



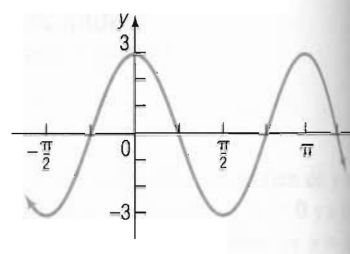
(F)



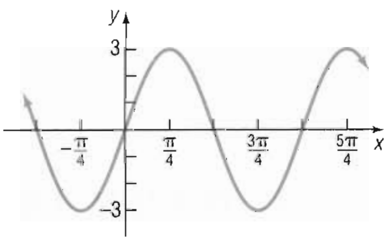
(G)



(H)



(I)



(J)

11. $y = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{2}x$

12. $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$

13. $y = 2 \cos \frac{1}{2}x$

14. $y = 3 \cos 2x$

15. $y = -3 \text{ sen } 2x$

16. $y = 2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

17. $y = -2 \cos \frac{1}{2}x$

18. $y = -2 \cos \frac{\pi}{2}x$

19. $y = 3 \text{ sen } 2x$

20. $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

En los problemas del 21 al 30 Haga la gráfica de cada función.

21. $y = 5 \text{ sen } 4x$

22. $y = 4 \cos 6x$

23. $y = 5 \cos \pi x$

24. $y = 2 \text{ sen } \pi x$

25. $y = -2 \cos 2\pi x$

26. $y = -5 \cos 2\pi x$

27. $y = -4 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

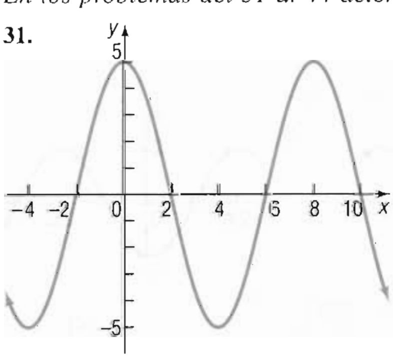
28. $y = -2 \cos \frac{1}{2}x$

29. $y = \frac{3}{2} \text{ sen}(-\frac{2}{3}x)$

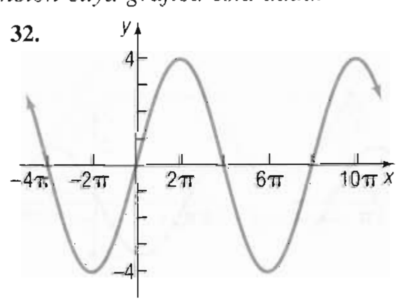
30. $y = \frac{4}{3} \cos(-\frac{1}{3}x)$

En los problemas del 31 al 44 determine la función cuya gráfica está dada.

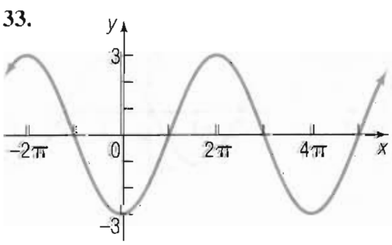
31.



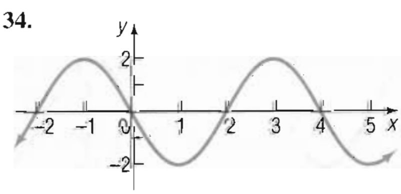
32.

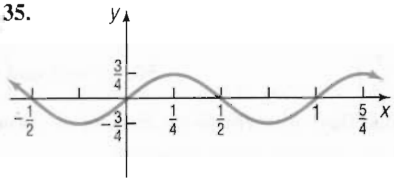


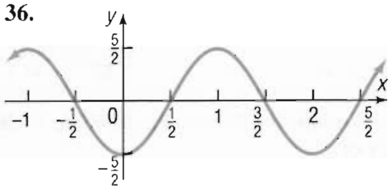
33.

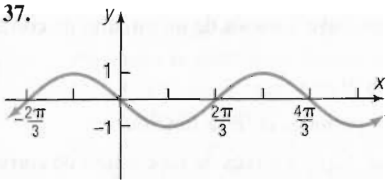


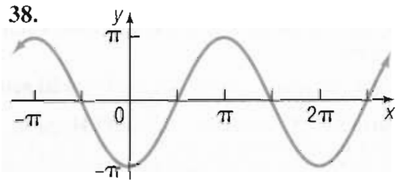
34.

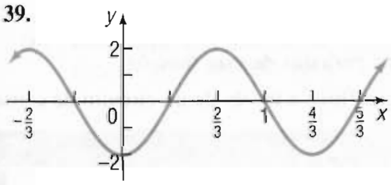


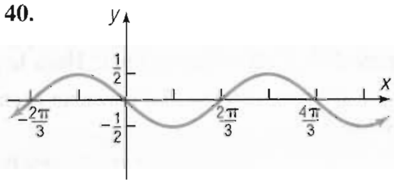
35.


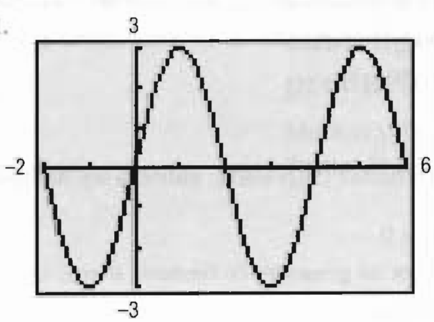
36.


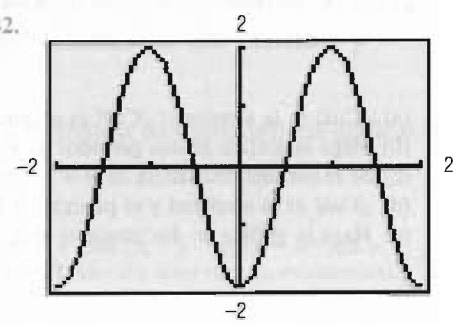
37.


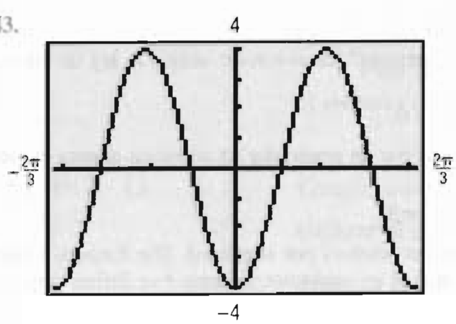
38.


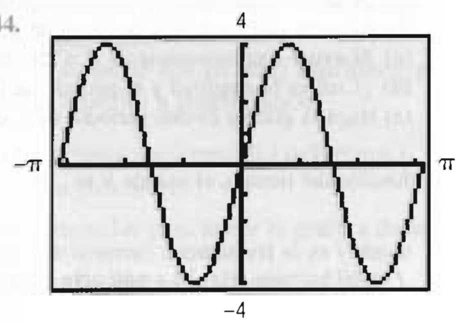
39.


40.


41.


42.


43.


44.


En los problemas del 45 al 52 determine la amplitud, el periodo y el desfasamiento de cada función. Haga la gráfica de un periodo.

45. $y = 4\ \text{sen}(2x - \pi)$

46. $y = 3\ \text{sen}(3x - \pi)$

47. $y = 2\cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

48. $y = 3\cos(2x + \pi)$

49. $y = -3\ \text{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

50. $y = -2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

51. $y = 4\ \text{sen}(\pi x + 2)$ **52.** $y = 2\cos(2\pi x + 4)$ **53.** $y = 3\cos(\pi x - 2)$

54. $y = 2\cos(2\pi x - 4)$ **55.** $y = 3\ \text{sen}\left(-2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **56.** $y = 3\cos\left(-2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

57. *Circuitos de corriente alterna.* La corriente I (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 220\ \text{sen}\ 60\pi t, \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

58. *Circuitos de corriente alterna.* La corriente I (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 120\ \text{sen}\ 30\pi t, \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

59. *Circuitos de corriente alterna.* La corriente I (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 120\ \text{sen}\left(30\pi t - \frac{\pi}{3}\right), \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

60. *Circuitos de corriente alterna.* La corriente I (en amperios) que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 220\ \text{sen}\left(60\pi t - \frac{\pi}{6}\right), \qquad t \geq 0$$

¿Cuál es el periodo? ¿Cuál es la amplitud? Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

61. *Generadores de corriente alterna.* El voltaje V producido por un generador de corriente alterna es

$$V = 220\ \text{sen}\ 120\pi t$$

(a) ¿Cuál es la amplitud? ¿Cuál es el periodo?
(b) Haga la gráfica de dos periodos de V, comenzando en $t = 0$.
(c) Si existe una resistencia de $R = 10$ ohms, ¿cuál es la corriente? [*Sugerencia:* utilice la ley de Ohm, $V = IR$.]
(d) ¿Cuál es la amplitud y el periodo de la corriente I?
(e) Haga la gráfica de dos periodos de I, comenzando en $t = 0$.

62. *Generadores de corriente alterna.* El voltaje V producido por un generador de corriente alterna es

$$V = 120\ \text{sen}\ 120\pi t$$

(a) ¿Cuál es la amplitud? ¿Cuál es el periodo?
(b) Haga la gráfica de dos periodos de V, comenzando en $t = 0$.
(c) Si existe una resistencia de $R = 20$ ohms, ¿cuál es la corriente? [*Sugerencia:* utilice la ley de Ohm, $V = IR$.]
(d) ¿Cuál es la amplitud y el periodo de la corriente I?
(e) Haga la gráfica de dos periodos de I, comenzando en $t = 0$.

63. *Generadores de corriente alterna.* El voltaje V producido por un generador de corriente alterna es senoidal. Como función del tiempo, el voltaje V es

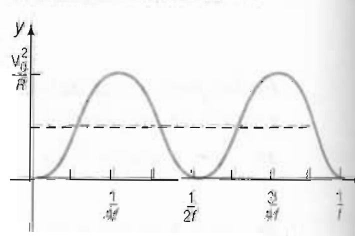
$$V = V_0\ \text{sen}\ 2\pi f t$$

donde f es la **frecuencia,** [número de oscilaciones completas (ciclos) por segundo]. [En Estados Unidos y Canadá f es 60 hertzios (Hz).] La **potencia** P dada a una resistencia R en cualquier instante t se define como

$$P = \frac{V^2}{R}$$

(a) Muestre que $P = \dfrac{V_0^2}{R}\ \text{sen}^2\ 2\pi f t$.
(b) La gráfica de P aparece en la figura anexa. Exprese P como una función senoidal.
(c) Deduzca que

$$\text{sen}^2\ 2\pi f t = \frac{1}{2}(1 - \cos 4\pi f t)$$



Potencia en un generador de corriente alterna

64. *Biorritmos.* En la teoría de biorritmos, una función seno de la forma

$$P = 100 \text{ sen } \omega t$$

sirve para medir el porcentaje P del potencial de una persona en el instante t, donde t se mide en días y $t = 0$ corresponde al nacimiento de la persona. Por lo general, se miden tres características:

Potencial físico: periodo de 23 días

Potencial emocional: periodo de 28 días

Potencial intelectual: periodo de 33 días

(a) Determine ω para cada característica.
(b) Haga la gráfica de las tres funciones.
(c) ¿Existe un instante t en el que las tres características tengan un potencial del 100%? ¿Cuándo ocurre?
(d) Suponga que usted tiene 20 años el día de hoy (t = 7 305 días). Describa su potencial físico, emocional e intelectual para los próximos 30 días.

65. Explique cómo utilizar la amplitud y el periodo de una gráfica senoidal para establecer la escala en cada eje de coordenadas.

66. Determine una aplicación, relacionada con su campo de interés, que conduzca a una gráfica senoidal. Escriba un ensayo sobre sus hallazgos.

6.3 Aplicaciones

Combinación de ondas; amplificación y amortiguamiento; graficación de sumas y productos

Muchas aplicaciones físicas y biológicas requieren utilizar gráficas de sumas y productos de funciones, tales como

$$f(x) = \text{sen } x + \cos 2x \quad \text{y} \quad g(x) = e^x \text{ sen } x$$

Por ejemplo, al emitir dos tonos, el sonido resultante es la suma de las ondas producidas por los dos tonos. Remítase al problema 29 para una explicación del funcionamiento de los teléfonos por tono.

Para hacer la gráfica de la suma de dos (o más) funciones, podemos utilizar el método de suma de ordenadas descrito a continuación.

EJEMPLO 1 *Graficación de la suma de dos funciones*

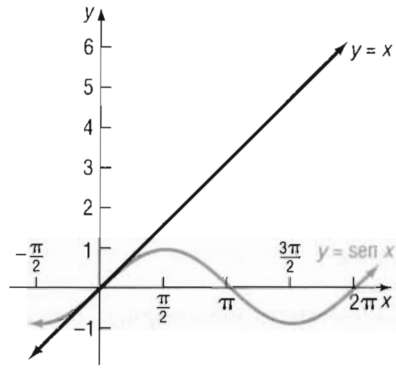
Utilizar el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de $h(x) = x + \text{sen } x$.

Solución Primero hacemos la gráfica de las funciones componentes,

$$y = h_1(x) = x \qquad y = h_2(x) = \text{sen } x$$

en el mismo sistema de coordenadas. *Véase* la figura 24(a). Luego elegimos diversos valores de x, digamos, $x = 0$, $x = \pi/2$, $x = \pi$, $x = 3\pi/2$, y $x = 2\pi$, donde calculamos $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$. La tabla 3 muestra el cálculo. Localizamos estos puntos y los unimos para obtener la gráfica, como muestra la figura 24(b).

FIGURA 24



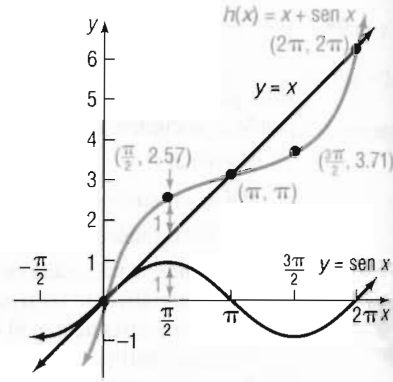


TABLA 3

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = h_1(x) = x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = h_2(x) = \text{sen } x$	0	1	0	-1	0
$h(x) = x + \text{sen } x$	0	$\pi/2 + 1 \approx 2.57$	π	$3\pi/2 - 1 \approx 3.71$	2π
PUNTO EN LA GRÁFICA DE h	$(0, 0)$	$(\pi/2, 2.57)$	(π, π)	$(3\pi/2, 3.71)$	$(2\pi, 2\pi)$

En el ejemplo 1, observamos que la gráfica de $h(x) = x+\text{sen } x$ corta a la recta $y = x$ cuando sen $x = 0$. Vemos también que la gráfica de h no es periódica.

Verificación: haga la gráfica de $y = x+\text{sen } x$ y compare el resultado con la figura 24(b). Utilice TRACE para verificar que las gráficas se cortan cuando sen $x = 0$.

El siguiente ejemplo muestra una gráfica periódica de la suma de dos funciones.

EJEMPLO 2 *Graficación de la suma de dos funciones senoidales*

Utilizar el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de

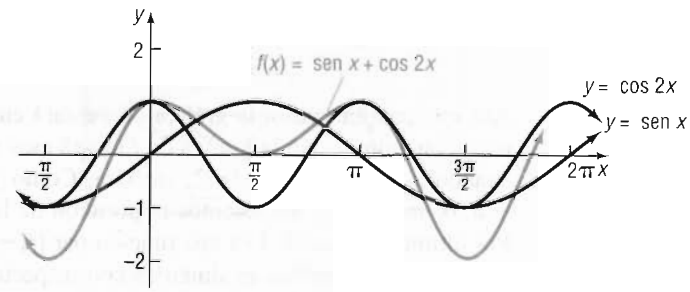
$$f(x) = \text{sen } x + \cos 2x$$

Solución La tabla 4 muestra los pasos para calcular varios puntos en la gráfica de f. La figura 25 muestra las gráficas de las funciones componentes, $y = f_1(x) = \text{sen } x$ y $y = f_2(x) = \cos 2x$ y la gráfica de $f(x) = \text{sen } x + \cos 2x$, que aparece en color.

TABLA 4

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = f_1(x) = \text{sen } x$	-1	0	1	0	-1	0
$y = f_2(x) = \cos 2x$	-1	1	-1	1	-1	1
$f(x) = \text{sen } x + \cos 2x$	-2	1	0	1	-2	1
PUNTO EN LA GRÁFICA DE f	$(-\pi/2, -2)$	$(0, 1)$	$(\pi/2, 0)$	$(\pi, 1)$	$(3\pi/2, -2)$	$(2\pi, 1)$

FIGURA 25
$f(x) = \text{sen } x + \cos 2x$



Verificación: haga la gráfica de $y = \text{sen } x + \cos 2x$ y compare el resultado con la figura 25. ■

Si debemos hacer la gráfica de una función f que sea la diferencia de dos funciones g y h, es decir,

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

podemos ver f como

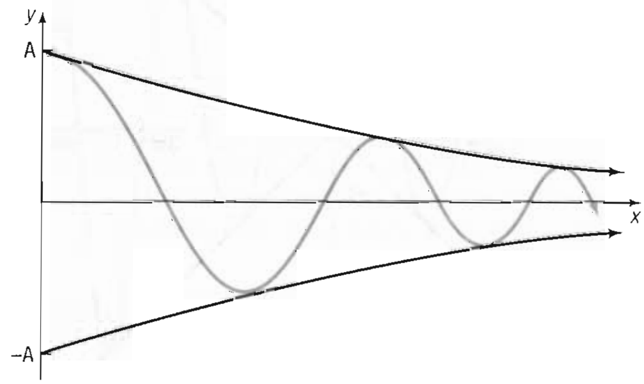
$$f(x) = g(x) + [-h(x)]$$

y utilizar el método de suma de ordenadas ya descrito.

■ Ahora resuelva el problema 1.

La amplitud de cualquier resorte o péndulo oscilante real disminuye con el tiempo debido a la resistencia del aire, la fricción, etc. *Véase* la figura 26. La gráfica de tales fenómenos está dada generalmente por el producto de dos funciones.

FIGURA 26



EJEMPLO 3 *Graficación del producto de dos funciones*

Hacer la gráfica de $f(x) = x \text{ sen } x$.

Solución En este caso, f es el producto de $y = x$ y $y = \text{sen } x$. Utilizamos las propiedades del valor absoluto y el hecho de que $|\text{sen } x| \leq 1$ para obtener

$$|f(x)| = |x \text{ sen } x| = |x|\,|\text{sen } x| \leq |x|$$

Si $x \geq 0$, esto se reduce a

$$|f(x)| \leq x \quad \text{o} \quad -x \leq f(x) \leq x, \qquad x > 0$$

Si x < 0, tenemos que

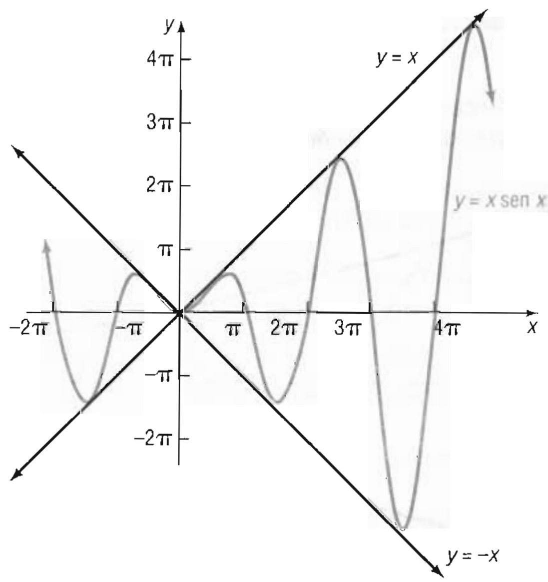
$$|f(x)| \leq -x \quad \text{o} \quad x \leq f(x) \leq -x, \qquad x < 0$$

Así, en cualquier caso, la gráfica de f estará entre las rectas $y = x$ y $y = -x$. Además, concluimos que la gráfica de f tocará esas rectas cuando sen $x = \pm 1$, es decir, cuando $x = -\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, etcétera. Como $y = f(x) = x$ sen $x = 0$ cuando $x = -\pi$, 0, π, 2π, etc., conocemos la posición de las intersecciones-x y la gráfica de f. Por último, la función f es una función par $[f(-x) = -x \text{ sen}(-x) = x \text{ sen } x = f(x)]$, de modo que la gráfica es simétrica con respecto al eje y. *Véase* la tabla 5. La figura 27 nos muestra la gráfica.

TABLA 5

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y =$ sen x	0	1	0	-1	0
$y = f(x) = x$ sen x	0	$\pi/2$	0	$-3\pi/2$	0
PUNTO EN LA GRÁFICA DE f	(0, 0)	$(\pi/2, \pi/2)$	$(\pi, 0)$	$(3\pi/2, -3\pi/2)$	$(2\pi, 0)$

FIGURA 27
$f(x) = x$ sen x

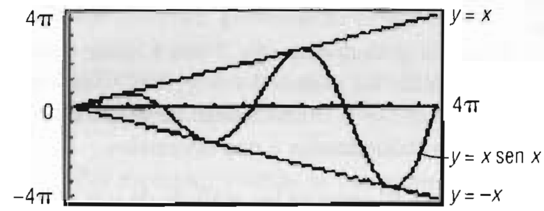


E J E M P L O 4 *Análisis de la gráfica de $y = x$ sen x*

Hacer la gráfica de $y = x$ sen x, junto con $y = x$ y $y = -x$, para $0 \leq x \leq 4\pi$. Determinar los puntos donde $y = x$ sen x toca a $y = x$. Compare esto con los puntos donde $y = x$ sen x tiene un punto de retorno (máximo local). Exprese las respuestas redondeadas a dos cifras decimales.

Solución La figura 28 muestra las gráficas de $y = x$ sen x, $y = x$, y $y = -x$. Utilizamos TRACE y BOX para ver que $y = x$ sen x toca a $y = x$ en $x = 1.57$ y $x = 7.85$. Los puntos de retorno (máximos locales) aparecen justo a la derecha de estos valores, en $x = 2.02$ y en $x = 7.97$.

FIGURA 28



Si $x \geq 0$, la gráfica de $f(x) = x$ sen x es una onda **seno amplificada** y x es el **factor de amplificación.** Podemos obtener otras ondas senoidales utilizando diversos factores. El siguiente ejemplo ilustra un **factor de amortiguamiento.**

EJEMPLO 5

Graficación del producto de dos funciones

La curva de vibración amortiguada

$$f(x) = e^{-x} \text{ sen } x, \qquad x \geq 0$$

es importante para muchas aplicaciones tales como el movimiento de las cuerdas musicales, las oscilaciones de un péndulo y la corriente en un circuito eléctrico. Haga la gráfica de esta función.

Solución La función f es el producto de $y = e^{-x}$ y $y = \sin x$. Utilizamos las propiedades del valor absoluto y el hecho de que $|\text{sen } x| \leq 1$ para ver que

$$|f(x)| = |e^{-x} \text{ sen } x| = |e^{-x}|\,|\text{sen } x| \leq |e^{-x}| = e^{-x}$$

$e^{-x} > 0$ para toda x

Así,

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

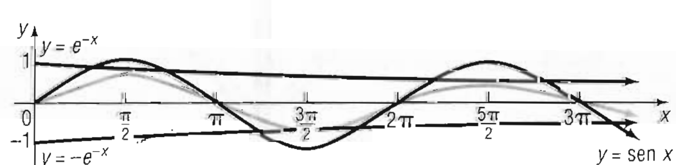
y la gráfica de f estará entre las gráficas de $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$. Además, la gráfica de f tocará estas gráficas cuando $|\text{sen } x| = 1$, es decir, cuando $x = -\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, etc. Las intersecciones del eje x y la gráfica de f aparecen en $x = -\pi$, 0, π, 2π, etc. *Véase* la tabla 6. La figura 26 muestra la gráfica.

TABLA 6

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = e^{-x}$	1	$e^{-\pi/2}$	$e^{-\pi}$	$e^{-3\pi/2}$	$e^{-2\pi}$
$y = $ sen x	0	1	0	-1	0
$f(x) = e^{-x}$ sen x	0	$e^{-\pi/2}$	0	$-e^{-3\pi/2}$	0
PUNTO EN LA GRÁFICA DE f	(0, 0)	$(\pi/2, e^{-\pi/2})$	$(\pi, 0)$	$(3\pi/2, -e^{-3\pi/2})$	$(2\pi, 0)$

FIGURA 29

$f(x) = e^{-x}$ sen x, $x \geq 0$

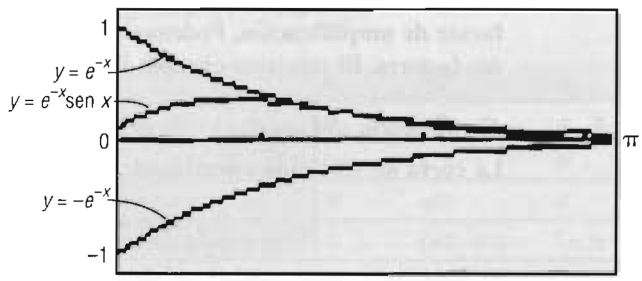


EJEMPLO 6 *Análisis de la gráfica de $y = e^{-x}$ sen x*

Hacer la gráfica de $y = e^{-x}$ sen x, junto con $y = e^{-x}$ y $y = -e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 3\pi$. Determinar los puntos donde $y = e^{-x}$ sen x toca $y = e^{-x}$. Compare esto con los puntos donde $y = e^{-x}$ sen x tiene un punto de retorno (máximo local). Exprese las respuestas redondeadas a dos decimales.

Solución La figura 30 muestra las gráficas de $y = e^{-x}$ sen x, $y = e^{-x}$, y $y = -e^{-x}$. Utilizamos TRACE y BOX para ver que $y = e^{-x}$ sen x toca a $y = e^{-x}$ en $x = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$. El punto de retorno (máximo local) aparece en $x = 0.78$.

FIGURA 30



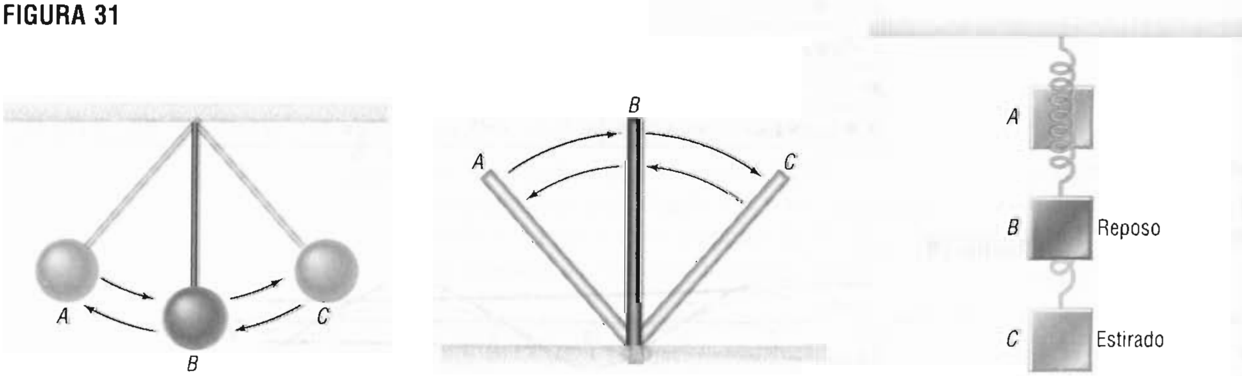
■ Ahora resuelva el problema 21.

Movimiento armónico simple

Existen muchos fenómenos físicos que pueden describirse mediante un movimiento armónico simple. Las ondas de radio, televisión, de la luz y el sonido, y las olas del mar exhiben un movimiento armónico simple. Incluso las temperaturas máxima y mínima anual en un lugar dado se modelan mediante una ecuación para el movimiento armónico simple.

La oscilación de un péndulo, las vibraciones de un diapasón y el bamboleo de un peso sujeto por un resorte en espiral, también son ejemplos de movimientos vibratorios. En este tipo de movimiento, un objeto oscila hacia uno y otro lados en un mismo trayecto. En cada una de las ilustraciones de la figura 31, el punto B es la **posición de equilibrio (reposo)** del objeto vibrante. La **amplitud** de la vibración es la distancia desde la posición de equilibrio del objeto hasta su punto de máximo desplazamiento (cualquiera de los puntos A o C de la figura 31). El **periodo** de un objeto vibrante es el tiempo que se tarda en completar una vibración; es decir, el tiempo que tarda en ir desde, digamos, el punto A a través de B hasta C y regresar a A.

FIGURA 31



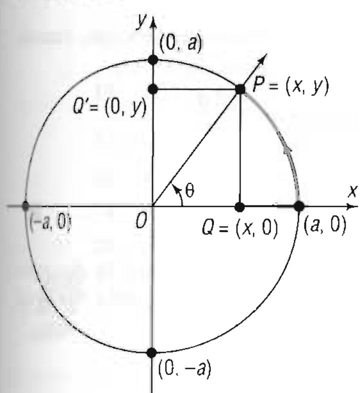
(a) Péndulo **(b)** Diapasón **(c)** Resorte

Movimiento armónico simple

El **movimiento armónico simple** es un tipo especial de movimiento de vibración en el cual la aceleración a del objeto es directamente proporcional al negativo de su desplazamiento d desde su posición de reposo. Es decir, $a = -kd$, $k > 0$.

Por ejemplo, cuando la masa que cuelga del resorte de la figura 31(c) es jalada hacia abajo desde su posición de equilibrio B hasta el punto C, la fuerza del resorte intenta regresar la masa hasta su posición de equilibrio. Si no existe fuerza de fricción* que retarde el movimiento, la amplitud será constante. La fuerza aumenta en proporción directa con la distancia hasta donde la masa es jalada desde su posición de equilibrio. Como la fuerza crece en forma directa, la aceleración de la masa ha de comportarse de la misma forma, debido a que (por la segunda ley del movimiento de Newton) la fuerza es directamente proporcional a la aceleración. Así, la aceleración del objeto varía en forma directa con su desplazamiento, y este fenómeno es un ejemplo de movimiento armónico simple.

FIGURA 32



El movimiento armónico simple se relaciona con el movimiento circular. Para apreciar esta relación consideremos un círculo de radio a con centro en (0,0). *Véase* la figura 32. Supongamos que un objeto colocado inicialmente en $(a,0)$ se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en torno al círculo, con una velocidad angular constante ω. Supongamos además que, después de transcurrir un tiempo t, el objeto se encuentra en el punto $P = (x, y)$ del círculo. El ángulo θ en radianes, abarcado por la raya $\overrightarrow{OP}$ en este tiempo t es

$$\theta = \omega t$$

Las coordenadas del punto P en el instante t son

$$x = a \cos \theta = a \cos \omega t$$
$$y = a \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen} \omega t$$

A cada posición $P = (x, y)$ del objeto que se mueve sobre el círculo, le corresponde el punto $Q = (x, 0)$, llamado **proyección de P sobre el eje x.** Cuando P se mueve en el círculo con velocidad constante, el punto Q se mueve de un lado a otro, entre los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, a lo largo del eje x, con un movimiento que es armónico simple. De manera análoga, para cada punto P existe un punto $Q' = (0, y)$, la proyección de P sobre el eje y. Cuando P se mueve en el círculo con velocidad constante, el punto Q' se mueve de un lado a otro, entre los puntos $(0, a)$ y $(0, -a)$, a lo largo del eje y, con un movimiento que es armónico simple. Así, podemos describir el movimiento armónico simple como la proyección de un movimiento circular constante en un eje de coordenadas.

Teorema movimiento armónico simple

Un objeto que se mueve en un eje de coordenadas de modo que su distancia d al origen en el instante t está dada por

$$\boxed{d = a \cos \omega t \quad \text{o} \quad d = a \operatorname{sen} \omega t}$$

donde a y ω son constantes, obedece a un movimiento armónico simple. El movimiento tiene amplitud $|a|$ y periodo $2\pi/\omega$. ■

La **frecuencia** f de un objeto en movimiento armónico simple es el número de oscilaciones por unidad de tiempo. Como el periodo es el tiempo necesario para una oscilación, esto implica que la frecuencia es el recíproco del periodo; es decir,

*Si existe fricción, la amplitud disminuye hasta cero al paso del tiempo. Este tipo de movimiento es un ejemplo de movimiento amortiguado.

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

EJEMPLO 7 *Determinación de una ecuación para un objeto en movimiento armónico simple*

Suponga que el objeto sujeto al resorte en espiral de la figura 31(c) es jalado hacia abajo hasta una distancia de 5 pulgadas desde su posición de equilibrio y después es liberado. Si el tiempo para una oscilación es de 3 segundos, escriba una ecuación que relacione la distancia d del objeto desde su posición de equilibrio con el tiempo t (en segundos). Suponga que no existe fricción.

Solución El movimiento del objeto es armónico simple. Como el objeto se libera en el instante $t = 0$ cuando su distancia d a la posición de equilibrio es de 5 pulgadas, es más sencillo utilizar la ecuación

$$d = a \cos \omega t$$

para describir el movimiento. (¿Advierte usted por qué? Para esta ecuación, cuando $t = 0$, entonces $d = a = 5$.) Ahora, la amplitud es 5 y el periodo 3. Así,

$$a = 5 \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{\omega} = \text{Periodo} = 3 \quad \text{o} \quad \omega = \frac{2\pi}{3}$$

Una ecuación para el movimiento del objeto es

$$d = 5 \cos \frac{2\pi}{3} t$$

■

Nota: En la solución del ejemplo 7 hacemos a = 5, lo cual nos indica que la dirección positiva del movimiento es hacia abajo. Si queremos que la dirección positiva sea hacia arriba, podemos hacer a = –5.

■ Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 8 *Análisis del movimiento de un objeto*

Suponga que la distancia x (en metros) que un objeto recorre en un tiempo t (en segundos) satisface la ecuación

$$x = 10 \text{ sen } 5t$$

(a) Describa el movimiento del objeto.
(b) ¿Cuál es el máximo desplazamiento desde su posición de equilibrio?
(c) ¿Cuál es el tiempo necesario para cada oscilación?
(d) ¿Cuál es la frecuencia?

Solución Observe que la ecuación dada es de la forma

$$d = a \text{ sen } \omega t \qquad d = 10 \text{ sen } 5t$$

donde $a = 10$ y $\omega = 5$.

(a) El movimiento es armónico simple.
(b) El máximo desplazamiento del objeto con respecto de su posición de equilibrio es la amplitud: a = 10 metros.
(c) El tiempo necesario para una oscilación es el periodo:

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} \text{ segundos}$$

(d) La frecuencia es el recíproco del periodo. Así,

$$\text{Frecuencia} = f = \frac{5}{2\pi} \text{ oscilaciones por segundo.}$$

■ Ahora resuelva el problema 41.

6.3

Ejercicio 6.3

En los problemas del 1 al 20 utilice el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de cada función.

1. $f(x) = x + \cos x$
2. $f(x) = x + \cos 2x$
3. $f(x) = x - \operatorname{sen} x$
4. $f(x) = x - \cos x$
5. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
6. $f(x) = \operatorname{sen} 2x + \cos x$
7. $g(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$
8. $g(x) = \cos 2x + \cos x$
9. $h(x) = \sqrt{x} + \operatorname{sen} x$
10. $h(x) = \sqrt{x} + \cos x$
11. $F(x) = 2 \operatorname{sen} x - \cos 2x$
12. $F(x) = 2 \cos 2x - \operatorname{sen} x$
13. $f(x) = 2 \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x$
14. $f(x) = 2 \cos \frac{\pi}{2}x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$
15. $f(x) = \frac{x^2}{\pi^2} + \operatorname{sen} 2x$
16. $f(x) = \frac{x^2}{\pi^2} - \cos 2x$
17. $f(x) = |x| + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$
18. $f(x) = |x| + \cos \pi x$
19. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 2x + 2 \cos 3x$
20. $f(x) = 2 \operatorname{sen} 3x + 3 \cos 2x$

En los problemas del 21 al 28 haga la gráfica de cada función.

21. $f(x) = x \cos x$
22. $f(x) = x \operatorname{sen} 2x$
23. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$
24. $f(x) = x^2 \cos x$
25. $f(x) = |x| \cos x$
26. $f(x) = |x| \operatorname{sen} x$
27. $f(x) = e^{-x} \cos 2x,\ x \geq 0$
28. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} 2x,\ x \geq 0$

29. *Teléfonos por tono.* En un teléfono por tono cada botón produce un sonido único. Ese sonido es la suma de dos tonos y está dada por

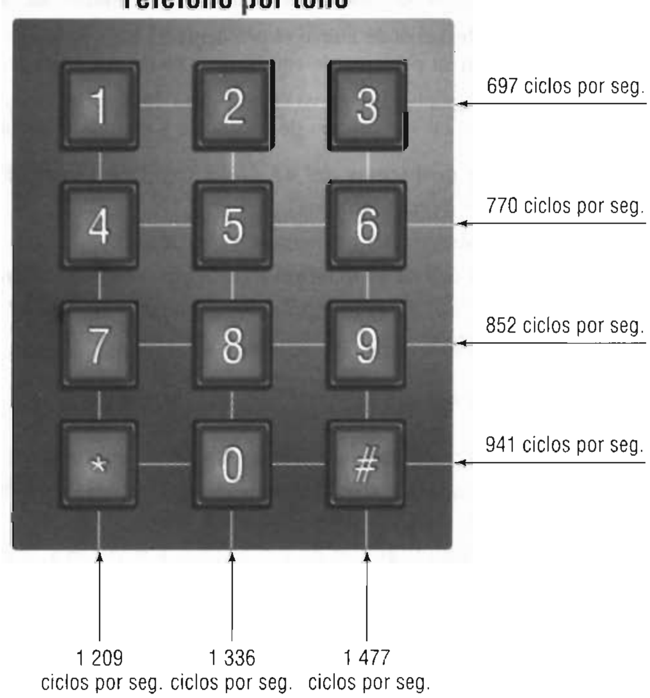
$$y = \sin 2\pi lt \quad \text{y} \quad y = \operatorname{sen} 2\pi ht$$

donde l y h son las frecuencias alta y baja (ciclos por segundo) que aparecen en la figura anexa. Por ejemplo, si usted oprime 7, la frecuencia baja es $l = 852$ ciclos por segundo y la frecuencia alta es $h = 1.209$ ciclos por segundo. El sonido emitido al oprimir 7 es

$$y = \operatorname{sen} 2\pi(852)t + \operatorname{sen} 2\pi(1209)t$$

Haga la gráfica del sonido emitido al oprimir 7.

Teléfono por tono



30. Haga la gráfica del sonido emitido al oprimir la tecla asterisco (*) de un teléfono por tono. Consulte el problema 29.

31. *La curva diente de sierra.* Con frecuencia, un osciloscopio muestra una curva diente de sierra. Esta curva se puede aproximar mediante curvas senoidales de varios periodos y amplitudes.

(a) Haga la gráfica de la siguiente función, la cual se utiliza para aproximar una curva diente de sierra:

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\pi x \qquad 0 \leq x \leq 2$$

(b) Una mejor aproximación a la curva diente de sierra está dada por

$$f(x) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x + \tfrac{1}{4} \operatorname{sen} 4\pi x + \tfrac{1}{8} \operatorname{sen} 8\pi x$$

Haga la gráfica de esta función para $0 \leq x \leq 4$ y compare el resultado con la gráfica obtenida en la parte (a).

(c) Una tercera y mejor aproximación a la curva diente de sierra es

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\text{ sen } 2\pi x + \tfrac{1}{4}\text{ sen } 4\pi x + \tfrac{1}{8}\text{ sen } 8\pi x + \tfrac{1}{16}\text{ sen } 16\pi x$$

Haga la gráfica de esta función para $0 \leq x \leq 4$ y compare el resultado con las gráficas obtenidas en las partes (a) y (b).

(d) ¿Cuál piensa usted que sería la siguiente aproximación a la curva diente de sierra?

32. *Carga de un condensador.* Si un condensador con carga se conecta cerrando un interruptor (*véase* la figura), la energía es transferida a la bobina y después regresa al condensador en un movimiento oscilatorio. El voltaje V (en voltios) que pasa por el condensador disminuye en forma gradual hasta 0 con el tiempo t.

(a) Haga la gráfica de la ecuación que relaciona V con t:

$$V(t) = e^{-1.9t}\cos \pi t \qquad 0 \leq t \leq 3$$

(b) ¿En qué instante t la gráfica de V toca la gráfica de $y = e^{-1.9t}$? ¿En qué instante V toca la gráfica de $y = -e^{-1.9t}$?

(c) Haga la gráfica de $V = V(t)$, $0 \leq t \leq 3$.
¿En qué instante el voltaje V estará entre –0.1 y 0.1 voltios?

Para los problemas del 33 al 36, suponga que un objeto sostenido por un resorte en espiral es jalado hacia abajo hasta una distancia a desde su posición de equilibrio y después es liberado. Si el movimiento es armónico simple con periodo T, escriba una ecuación que relacione la distancia d del objeto desde su posición de equilibrio después de t segundos. Suponga además que la dirección positiva del movimiento es hacia abajo.

33. $a = 5$; $T = 2$ segundos. **34.** $a = 10$; $T = 3$ segundos.

35. $a = 6$; $T = \pi$ segundos. **36.** $a = 4$; $T = \pi/2$ segundos.

37. Resuelva de nuevo el problema 33 bajo las mismas condiciones salvo que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en su posición de equilibrio y se mueve hacia abajo.

38. Resuelva de nuevo el problema 34 bajo las mismas condiciones salvo que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en su posición de equilibrio y se mueve hacia abajo.

39. Resuelva de nuevo el problema 35 bajo las mismas condiciones salvo que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en su posición de equilibrio y se mueve hacia abajo.

40. Resuelva de nuevo el problema 36 bajo las mismas condiciones salvo que en el instante $t = 0$, el objeto se encuentra en su posición de equilibrio y se mueve hacia abajo.

En los problemas del 41 al 48 se proporciona la distancia d (en metros) recorrida por un objeto en el tiempo t (en segundos).

(a) Describa el movimiento del objeto.

(b) ¿Cuál es el máximo desplazamiento desde su posición de equilibrio?

(c) ¿Cuál es el tiempo necesario para una oscilación?

(d) ¿Cuál es la frecuencia?

41. $d = 5 \text{ sen } 3t$ **42.** $d = 4 \text{ sen } 2t$ **43.** $d = 6 \cos \pi t$ **44.** $d = 5 \cos \frac{\pi}{2}t$

45. $d = -3 \text{ sen } \frac{1}{2}t$ **46.** $d = -2 \cos 2t$ **47.** $d = 6 + 2 \cos 2\pi t$ **48.** $d = 4 + 3 \text{ sen } \pi t$

49. Haga la gráfica de la función $f(x) = (\text{sen } x)/x$, $x > 0$. Con base en la gráfica, ¿qué podría suponerse respecto del valor de $(\text{sen } x)/x$ para x cercana a cero?

50. Haga la gráfica de $y = x \text{ sen } x$, $y = x^2 \text{ sen } x$, y $y = x^3 \text{ sen } x$ para $x > 0$. ¿Qué patrón observa?

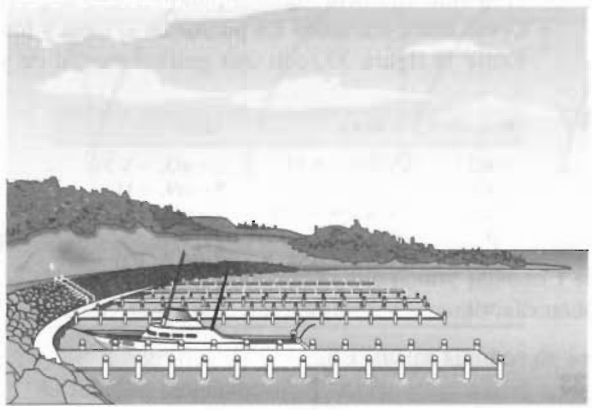
51. Gráfica $y = \dfrac{1}{x}\text{ sen } x$, $y = \dfrac{1}{x^2}\text{ sen } x$, y $y = \dfrac{1}{x^3}\text{ sen } x$ para $x > 0$. ¿Qué patrón observa?

52. ¿Cómo explicaría a un amigo lo que es el movimiento armónico simple?

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 6

DETERMINACIÓN DE LA MAREA ALTA EN ROCK HARBOR



Su empresa consultora ha organizado unas vacaciones en Cabo Cod para todos los empleados. (Incluso en una empresa consultora se toman vacaciones.) En esas vacaciones usted planea ir a pescar a la bahía de Cabo Cod. El capitán del Madame B le indica que debe estar en el embarcadero el jueves en la mañana, durante la marea alta. Después de colgar el teléfono entre sus empleados se preguntan cuándo ocurrirá la marea alta y, en vez de llamar de nuevo al capitán, usted decide utilizar toda su capacidad para determinar la respuesta.

1. Usted sabe que el intervalo entre una marea alta y la marea baja es casi de 6 1/4 horas. Sabe también que la marea alta de hoy (lunes) ocurrió a las 3 a.m. ¿En qué momento ocurrirá la marea alta el jueves por la mañana?
2. ¿Por qué el bote de pesca deberá salir del embarcadero en la marea alta?
3. Cuando usted visitó la bahía en la marea alta observó marcas en los postes que indicaban la altura del agua. La profundidad es de 13.5 pies en la marea baja y de 15 pies en la marea alta. De pronto, usted comprende que tiene la información suficiente como para hacer un bosquejo de la gráfica de las mareas y ofrecérselo al capitán. Trace una gráfica senoidal que muestre la altura del agua en el poste, comenzando con la marea alta del lunes a las 3 a.m. y llegando hasta la marea alta del jueves por la mañana. ¿Cuántas mareas altas ocurrirán entre las 3 a.m. del lunes y las 3 a.m. del jueves?
4. ¿Cuál sería la ecuación de esta gráfica considerando la amplitud, la frecuencia y cualquier tipo de corrimiento? ¿Sería más sencillo utilizar una función seno o una coseno?
5. Las mareas alta y baja no son tan regulares como podría indicar la fórmula. ¿Cuáles factores podrían afectar la altura de las mareas?
6. Cuando el capitán regresa al embarcadero deja cierta cantidad de cable sobrante antes de asegurar el bote a los postes. ¿Por qué? ¿Qué podría ocurrir si no lo hiciera?

6.4 Las gráficas de $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \sec x$, y $y = \cot x$

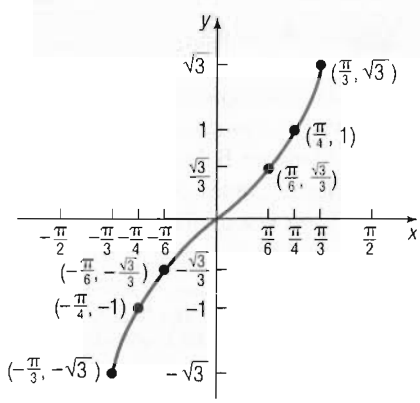
La gráfica de $y = \tan x$

Como la función tangente tiene periodo π, sólo debemos determinar la gráfica en un intervalo de longitud π. El resto de la gráfica consta de repeticiones de ese intervalo. Como la función tangente no está definida en $\ldots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \ldots$, nos concentraremos en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, de longitud π y construimos la tabla 7, la cual enumera algunos puntos sobre la gráfica de $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Como antes, trazamos los puntos de la tabla y los unimos mediante una curva suave. *Véase* la figura 33, con una gráfica parcial de $y = \tan x$, donde $-\pi/3 \le x \le \pi/3$.

TABLA 7

x	$y = \tan x$	(x, y)
$-\pi/3$	$-\sqrt{3} \approx -1.73$	$(-\pi/3, -\sqrt{3})$
$-\pi/4$	-1	$(-\pi/4, -1)$
$-\pi/6$	$-\sqrt{3}/3 \approx -0.58$	$(-\pi/6, -\sqrt{3}/3)$
0	0	$(0, 0)$
$\pi/6$	$\sqrt{3}/3 \approx 0.58$	$(\pi/6, \sqrt{3}/3)$
$\pi/4$	1	$(\pi/4, 1)$
$\pi/3$	$\sqrt{3} \approx 1.73$	$(\pi/3, \sqrt{3})$

FIGURA 33 $y = \tan x$, $-\pi/3 \le x \le \pi/3$



Para completar la gráfica de $y = \tan x$, debemos analizar el comportamiento de la función cuando x tiende a $-\pi/2$ y $\pi/2$. Sin embargo, hay que tener cuidado pues $y = \tan x$ no está definida en estos números. Para determinar dicho comportamiento utilizamos la identidad

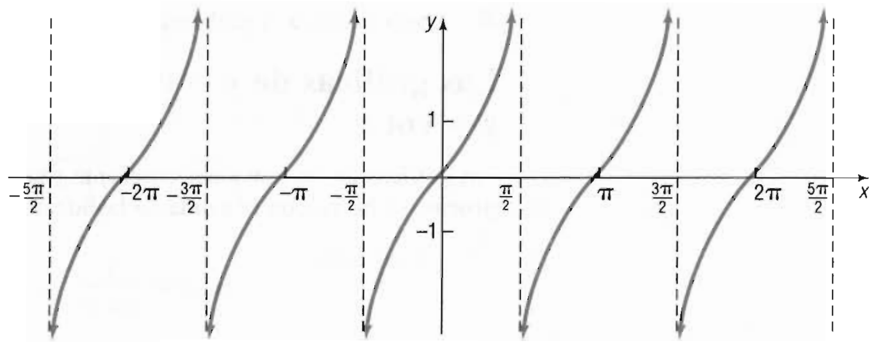
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Si x está cerca de $\pi/2$ pero sigue siendo menor, entonces sen x estará cerca de 1 y $\cos x$ será positivo y cercano a 0. (Consulte las gráficas de las funciones seno y coseno.) Por lo tanto, el cociente $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ será positivo y grande. De hecho, si x está más cercano a $\pi/2$, sen x se acerca a 1 y $\cos x$ se acerca a 0, de modo que $\tan x$ tiende a ∞. En otras palabras, la recta vertical $x = \pi/2$ es una asíntota vertical de la gráfica de $= \tan x$.

Si x es cercano a $-\pi/2$ pero sigue siendo menor, entonces sen x se acerca a -1 y $\cos x$ será positivo y cercano a 0. Por lo tanto, el cociente $(\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ tiende a $-\infty$. En otras palabras, la recta vertical $x = -\pi/2$ también es una asíntota vertical de la gráfica.

Con estas observaciones podemos completar un periodo y obtener la gráfica de $y = \tan x$ repitiendo este periodo, como nos muestra la figura 34.

FIGURA 34
$y = \tan x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \tan x$ y compare el resultado con la figura 34. Utilice TRACE para ver lo que ocurre cuando x se acerca a $\pi/2$ pero sigue siendo menor. Asegúrese de establecer un rango adecuado. ■

La gráfica de $y = \tan x$ ilustra algunos de los hechos ya conocidos acerca de la función tangente:

Características de la función tangente

1. El dominio es el conjunto de todos los números reales, excepto los múltiplos impares de $\pi/2$.
2. El rango consta de todos los números reales.
3. La función tangente es una función impar, como nos muestra la simetría de la gráfica con respecto al origen.
4. La función tangente es periódica, con periodo π.
5. Las intersecciones-x son $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$; la intersección-y es 0.
6. Las asíntotas verticales ocurren en $x = \ldots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \ldots$.

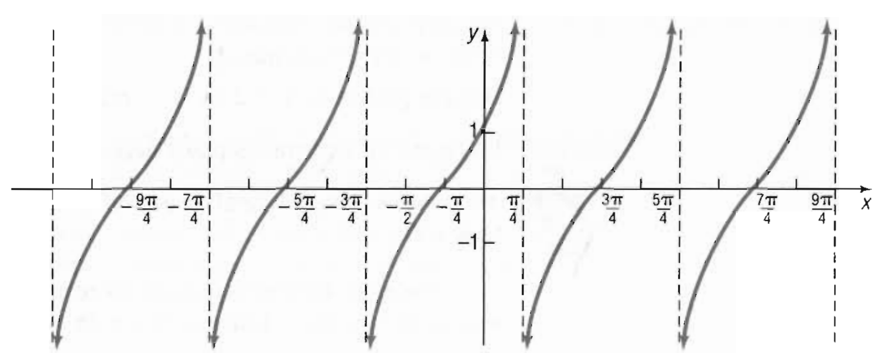
■ Ahora resuelva los problemas 1 y 9.

EJEMPLO 1 *Graficación de variaciones de $y = \tan x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Haga la gráfica de $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Solución Comenzamos con la gráfica de $y = \tan x$ y la recorremos en forma horizontal a la izquierda en $\pi/4$ unidades. *Véase* la figura 35.

FIGURA 35
$y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ y compare el resultado con la figura 35. ∎

■ Ahora resuelva el problema 11.

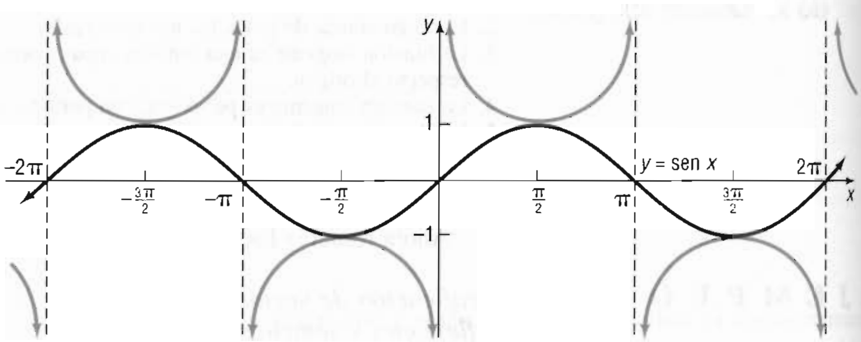
Las gráficas de $y = \csc x$, $y = \sec x$, y $y = \cot x$

Las gráficas de las funciones cosecante y secante, conocidas como **funciones recíprocas,** se hacen con la ayuda de las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \quad \text{y} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Por ejemplo, el valor de la función cosecante $y = \csc x$ en un número dado x es igual al recíproco del valor correspondiente de la función seno, siempre que este último valor no sea igual a 0. Si el valor de sen x es 0, entonces, en ese punto x, la función cosecante no está definida. De hecho, la gráfica de la función cosecante tiene asíntotas verticales en los múltiplos enteros de π. *Véase* la gráfica en la figura 36.

FIGURA 36
$y = \csc x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos enteros de π, $|y| \geq 1$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \csc x$ y compare el resultado con la figura 36. Utilice TRACE para ver lo que ocurre cuando x es cercano a cero. ∎

EJEMPLO 2 *Graficación de variaciones de $y = \csc x$ mediante corrimientos, reflexiones y semejanzas*

Haga la gráfica de $y = 2\csc(x - \pi/2)$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Solución La figura 37 muestra los pasos necesarios.

Verificación: Haga la gráfica de $y = 2\csc(x - \pi/2)$ y compare el resultado con la figura 37. ∎

Podemos utilizar la idea de los recíprocos para obtener de manera análoga la gráfica de $y = \sec x$. *Véase* la figura 38.

FIGURA 37

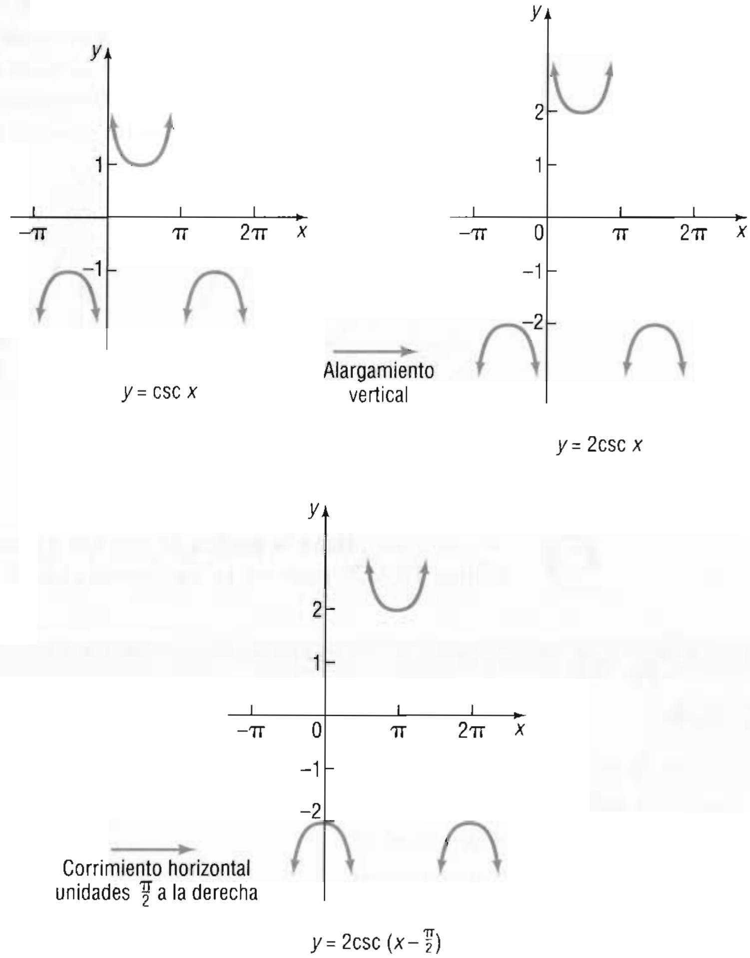


FIGURA 38

$y = \sec x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$, $|y| \geq 1$

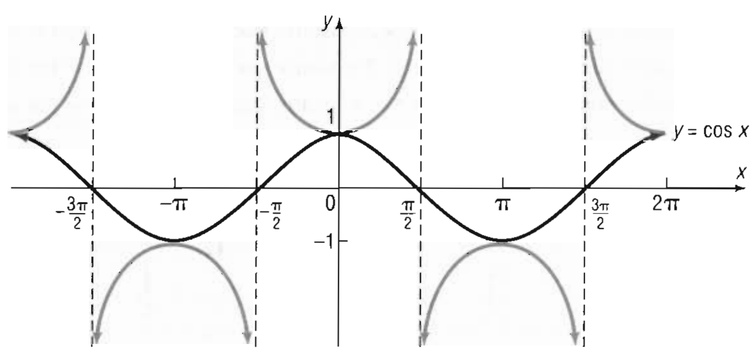
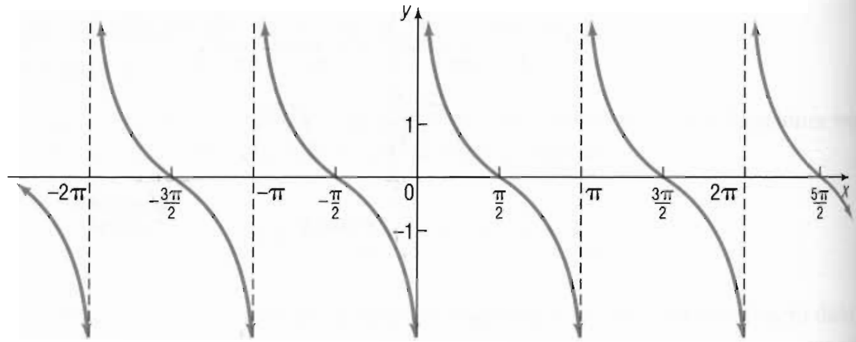


TABLA 8

x	$y = \cot x$	(x, y)
$\pi/6$	$\sqrt{3}$	$(\pi/6, \sqrt{3})$
$\pi/4$	1	$(\pi/4, 1)$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/3$	$(\pi/3, \sqrt{3}/3)$
$\pi/2$	0	$(\pi/2, 0)$
$2\pi/3$	$-\sqrt{3}/3$	$(2\pi/3, -\sqrt{3}/3)$
$3\pi/4$	-1	$(3\pi/4, -1)$
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}$	$(5\pi/6, -\sqrt{3})$

Obtenemos la gráfica de $y = \cot x$ del mismo modo en que obtuvimos la de $y = \tan x$. El periodo de $y = \cot x$ es π. Como la función cotangente no está definida para múltiplos enteros de π, nos concentraremos en el intervalo $(0, \pi)$. La tabla 8 enumera algunos puntos sobre la gráfica de $y = \cot x$, $0 < x < \pi$. Cuando x tiende a 0 pero es mayor que 0, el valor de $\cos x$ será cercano a 1 y el valor de $\operatorname{sen} x$ será positivo y cercano a 0. Por lo tanto, el cociente (cos x)/(sen x) será positivo y grande, de modo que cuando x tiende a 0, cot x tiende a ∞. De manera análoga, cuando x tiende a π con valores menores que π, el valor de cos x será cercano a -1 y el valor de sen x será positivo y cercano a 0. Por lo tanto, el cociente (cos x)/(sen x) = cot x será negativo y tenderá a $-\infty$ cuando x tiende a π. La figura 39 muestra la gráfica.

FIGURA 39
$y = \cot x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos enteros de π, $-\infty < y < \infty$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \cot x$ y compare el resultado con la figura 39. Utilice TRACE para ver lo que ocurre cuando x es cercano a cero. ∎

6.4

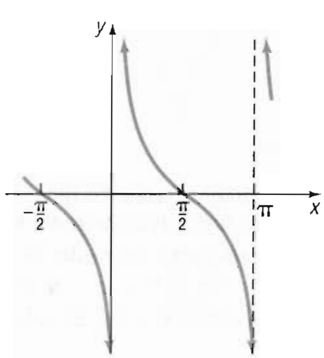
Ejercicio 6.4

1. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \tan x$?
2. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \cot x$?
3. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \sec x$?
4. ¿Cuál es la intersección-y de $y = \csc x$?
5. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que $\sec x = 1$? ¿Qué puede usted decir en el caso de que $\sec x = -1$?
6. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que $\csc x = 1$? ¿Qué puede usted decir en el caso de que $\csc x = -1$?
7. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que la gráfica de $y = \sec x$ tiene asíntotas verticales?
8. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que la gráfica de $y = \csc x$ tiene asíntotas verticales?
9. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que la gráfica de $y = \tan x$ tiene asíntotas verticales?
10. ¿Para cuáles números x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, ocurre que la gráfica de $y = \cot x$ tiene asíntotas verticales?

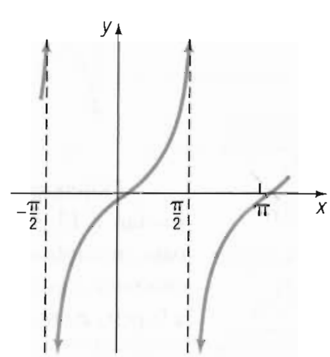
En los problemas del 11 al 14 relacione cada gráfica con una función.

A. $y = -\tan x$ B. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ C. $y = \tan(x + \pi)$ D. $y = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

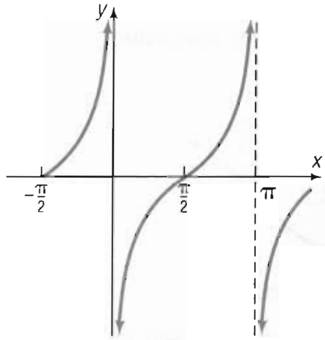
11.



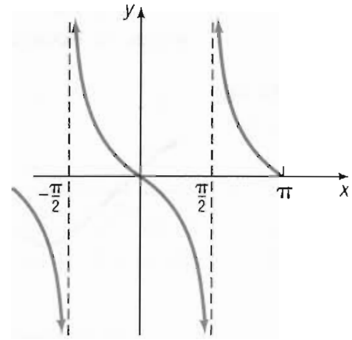
12.



13.



14.



En los problemas del 15 al 30 haga la gráfica de cada función.

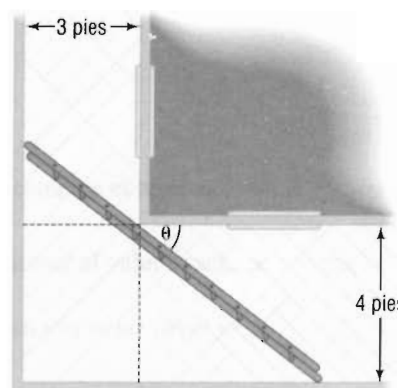
15. $y = -\sec x$ **16.** $y = -\cot x$ **17.** $y = \sec\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **18.** $y = \csc(x - \pi)$

19. $y = \tan(x - \pi)$ **20.** $y = \cot(x - \pi)$ **21.** $y = 3\tan 2x$ **22.** $y = 4\tan \frac{1}{2}x$

23. $y = \sec 2x$ **24.** $y = \csc \frac{1}{2}x$ **25.** $y = \cot \pi x$ **26.** $y = \cot 2x$

27. $y = -3\tan 4x$ **28.** $y = -3\tan 2x$ **29.** $y = 2\sec \frac{1}{2}x$ **30.** $y = 2\sec 3x$

31. *Paso de una escalera por una esquina.* Una escalera de longitud L se carga en forma horizontal y debe pasar por la esquina de un corredor de 3 pies de ancho hacia otro corredor que tiene 4 pies de ancho. *Véase* la ilustración.



(a) Muestre que la longitud L de la escalera dada como función del ángulo θ es

$$L = 3\sec\theta + 4\csc\theta$$

(b) Haga la gráfica de L, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

(c) Haga la gráfica de L, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$. ¿Dónde alcanza L un mínimo?

(d) ¿Cuál es la longitud de la escalera más grande que puede pasar por la esquina? ¿Por qué también es éste el valor mínimo de L?

32. Haga la gráfica de

$$y = \tan x \quad \text{y} \quad y = -\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

¿Cree usted que $\tan x = -\cot\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$?

6.5 Funciones trigonométricas inversas

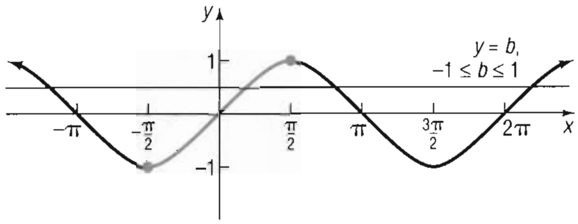
En la sección 2.5 analizamos las funciones inversas y observamos que si una función es uno a uno, entonces tiene una inversa. También observamos que si una función no es uno a uno podríamos restringir su dominio de manera adecuada, de modo que la función restringida sea uno a uno. En esta sección utilizaremos estas ideas para definir las funciones trigonométricas inversas. (Tal vez desee repasar la sección 2.4 en este momento.) Comenzaremos con la inversa de la función seno.

La función seno inverso

En la figura 40 reproducimos la gráfica de $y = \text{sen } x$. Como toda recta horizontal

$y = b$, donde b está entre -1 y 1, corta a la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ una infinidad de veces, se deduce que la función $y = \operatorname{sen} x$ no es uno a uno.

FIGURA 40
$y = \operatorname{sen} x$, $-\infty < x < \infty$, $-1 \leq y \leq 1$

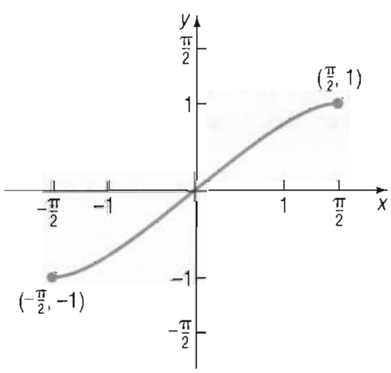


Sin embargo, si restringimos el dominio de $y = \operatorname{sen} x$ al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, la función restringida

$$y = \operatorname{sen} x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

es uno a uno, y por lo tanto, tendrá una inversa.* *Véase* la figura 41.

FIGURA 41
$y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $-1 \leq y \leq 1$



La función inversa es el **seno inverso** de x y se simboliza como $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. Así,

Función seno inverso

$$y = \operatorname{sen}^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \operatorname{sen} y$$
$$\text{donde } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{1}$$

Como $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ significa que $x = \operatorname{sen} y$, leemos $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ como "y es el ángulo cuyo seno es igual a x". O bien, "y es el seno inverso de x". Tenga cuidado con la notación utilizada. El superíndice -1 que aparece en $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ no es un exponente, sirve para recordarnos el símbolo f^{-1} utilizado para denotar la inversa de una función f. (Para evitar esta notación algunos libros utilizan $y = \operatorname{arcsen} x$ en vez de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$.)

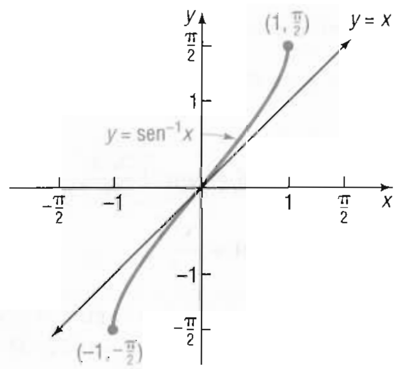
Con base en el análisis general de las funciones y sus inversas (sección 2.5), tenemos los siguientes resultados:

*Aunque existen muchas otras formas de restringir el dominio y obtener una función uno a uno, los matemáticos han acordado un uso consistente del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ para definir la inversa de $y = \operatorname{sen} x$.

$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\ u) = u$	donde	$-\dfrac{\pi}{2} \leq u \leq \dfrac{\pi}{2}$
$\text{sen}(\text{sen}^{-1}\ v) = v$	donde	$-1 \leq v \leq 1$

Examinemos la función $y = \text{sen}^{-1}\ x$. Su dominio es $-1 \leq x \leq 1$ y su rango $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Podemos obtener su gráfica mediante una reflexión de la parte adecuada de la gráfica de $y = \text{sen}\ x$ con respecto de la recta $y = x$, como nos muestra la figura 42.

FIGURA 42
$y = \text{sen}^{-1}\ x,\ -1 \leq x \leq 1,$
$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$



Verificación: Haga la gráfica de $y = \text{sen}^{-1}x$ y compare el resultado con la figura 42. ■

Para algunos números x es posible determinar el valor exacto de $y = \text{sen}^{-1}\ x$.

EJEMPLO 1 *Determinación del valor exacto de una función seno inverso*

Determinar el valor exacto de $\text{sen}^{-1}\ 1$.

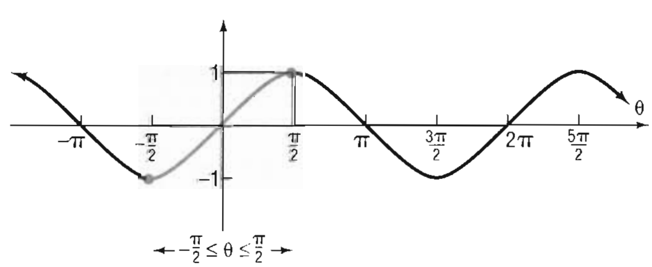
Solución Sea $\theta = \text{sen}^{-1}\ 1$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, cuyo seno es igual a 1:

$$\theta = \text{sen}^{-1}\ 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{sen}\ \theta = 1, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{Por definición.}$$

La figura 43 muestra que el único ángulo θ dentro del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es 1, es $\pi/2$. (Observe que $\text{sen}(5\pi/2)$ también es igual a 1, pero $5\pi/2$ está fuera del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y por lo tanto no es admisible.)

FIGURA 43



Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

De modo que

$$\operatorname{sen}^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 2 *Determinación del valor exacto de una función seno inverso*

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$.

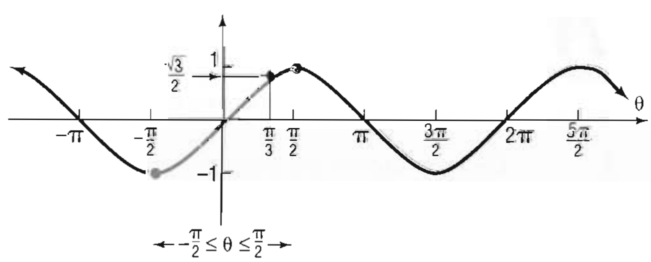
Solución Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, cuyo seno es igual a $\sqrt{3}/2$:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{Por definición.}$$

La figura 44 muestra que el único ángulo θ dentro del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/3$. (Observe que $\operatorname{sen}(2\pi/3)$ también es igual a $\sqrt{3}/2$, pero $2\pi/3$ está fuera del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y por lo tanto no es admisible.)

FIGURA 44



Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

De modo que

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$$

EJEMPLO 3 *Determinación del valor exacto de una función seno inverso*

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$.

Solución Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, cuyo seno es igual a $-\frac{1}{2}$:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

(Consulte la figura 44, en caso necesario.) El único ángulo dentro del intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $-\frac{1}{2}$ es $-\pi/6$. Así,

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

De modo que

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 3.

Para la mayor parte de los números x hay que aproximar el valor de $y = \operatorname{sen}^{-1}x$ mediante una calculadora. Algunas calculadoras utilizan una única tecla con la leyenda $\boxed{\operatorname{sen}^{-1}}$ o $\boxed{\text{arcsin}}$. En otras hay que oprimir la tecla $\boxed{\text{inv}}$ o $\boxed{\text{SHIFT}}$, y después la tecla $\boxed{\text{sen}}$, para evaluar la función seno inverso.

EJEMPLO 4 *Determinación del valor aproximado de la función seno inverso*

Determinar el valor aproximado de

(a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{4})$

Solución Como queremos medir el ángulo en radianes, primero hacemos que la calculadora utilice el modo en radianes.

(a) Teclas oprimidas:* $\boxed{1}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sen}}$

Pantalla: $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{0.3333333}$ $\boxed{0.3398369}$

Así, $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} \approx 0.34$.

(b) Teclas oprimidas: $\boxed{0.25}$ $\boxed{+/-}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{sen}}$

Pantalla: $\boxed{0.25}$ $\boxed{-0.25}$ $\boxed{-0.2526802}$

Así, $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{4}) \approx -0.25$. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

Función coseno inverso

En la figura 45 reproducimos la gráfica de $y = \cos x$. Como toda recta horizontal $y = b$, donde b está entre -1 y 1, corta a la gráfica de $y = \cos x$ una infinidad de veces, esto implica que la función $y = \cos x$ no es uno a uno.

*En algunas calculadoras, primero se oprime $\boxed{\operatorname{sen}^{-1}}$ y luego se introduce el valor $\boxed{1/3}$. Consulte la sucesión correcta en el manual del usuario.

FIGURA 45
$y = \cos x,\ -\infty < x < \infty,\ -1 \leq y \leq 1$

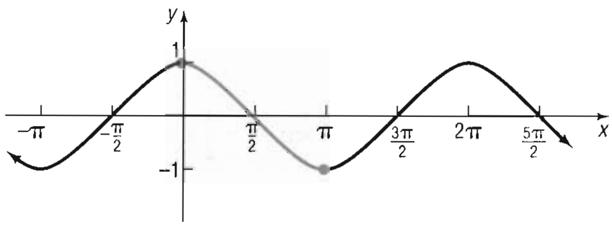
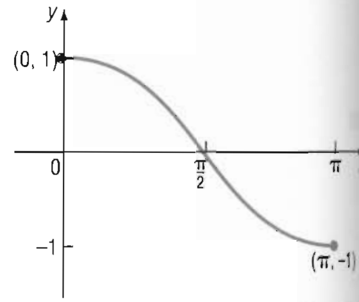


FIGURA 46
$y = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi,\ -1 \leq y \leq 1$



Sin embargo, si restringimos el dominio de $y = \cos x$ al intervalo $[0, \pi]$, la función restringida

$$y = \cos x, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

es uno a uno, y por lo tanto, tendrá una inversa.* *Véase* la figura 46.

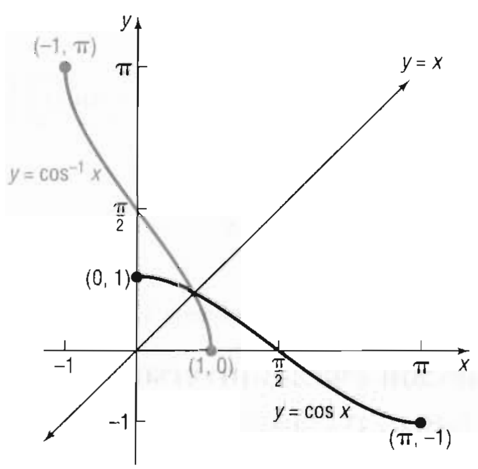
La función inversa es el **coseno inverso** de x y se simboliza como $y = \cos^{-1} x$ (o por $y = \operatorname{arccos} x$). Así,

Función coseno inverso

$$y = \cos^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \cos y$$
$$\text{donde} \quad 0 \leq y \leq \pi \quad \text{y} \quad -1 \leq x \leq 1 \tag{2}$$

En este caso, y es el ángulo cuyo coseno es x. El dominio de la función $y = \cos^{-1} x$ es $-1 \leq x \leq 1$ y el rango $0 \leq y \leq \pi$. Podemos obtener su gráfica mediante una reflexión de la parte restringida de la gráfica de $y = \cos x$ con respecto de la recta $y = x$, como nos muestra la figura 47.

FIGURA 47
$y = \cos^{-1} x,\ -1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \pi$



Verificación: haga la gráfica de $y = \cos^{-1} x$ y compare el resultado con la figura 47.

*Esta es la restricción aceptada por lo general para definir la inversa.

En general,

$$\cos^{-1}(\cos u) = u, \quad \text{donde} \quad 0 \le u \le \pi$$
$$\cos(\cos^{-1} v) = v, \quad \text{donde} \quad -1 \le v \le 1$$

EJEMPLO 5 *Determinación del valor exacto de una función coseno inverso*

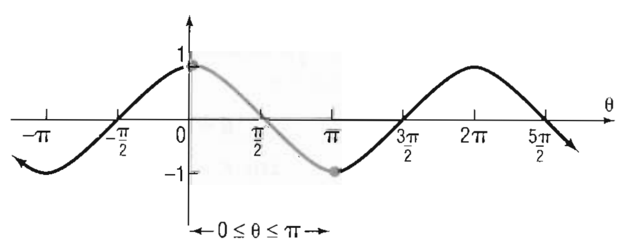
Determinar el valor exacto de cos–10.

Solución Sea $\theta = \cos^{-1} 0$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, cuyo coseno es igual a 0:

$$\theta = \cos^{-1} 0, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$\cos \theta = 0, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

La figura 48 muestra que el único ángulo θ dentro del intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es 0, es $\pi/2$. (Observe que $\cos(3\pi/2)$ también es igual a 0, pero $3\pi/2$ está fuera del intervalo $[0, \pi]$ y por lo tanto no es admisible.)

FIGURA 48



Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

De modo que

$$\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

■

EJEMPLO 6 *Determinación del valor exacto de una función coseno inverso*

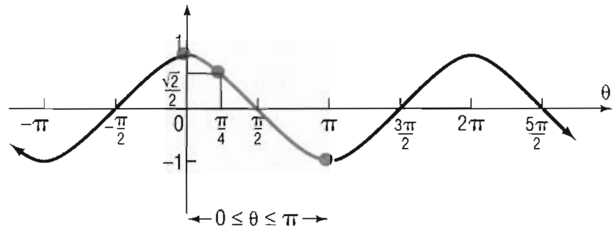
Determinar el valor exacto de $\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$.

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}(\sqrt{2}/2)$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, cuyo coseno es igual a $\sqrt{2}/2$:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

La figura 49 muestra que el único ángulo θ dentro del intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $\sqrt{2}/2$, es $\pi/4$.

FIGURA 49



Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

De modo que

$$\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

EJEMPLO 7 *Determinación del valor exacto de una función coseno inverso*

Determinar el valor exacto de $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$.

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{2})$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, cuyo coseno es igual a $-\frac{1}{2}$:

$$\theta = \cos^{-1}(-\tfrac{1}{2}), \qquad 0 \le \theta \le \pi$$
$$\cos\theta = -\tfrac{1}{2}, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

(Consulte la figura 49, en caso necesario.) El único ángulo dentro del intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$ es $2\pi/3$. Así,

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

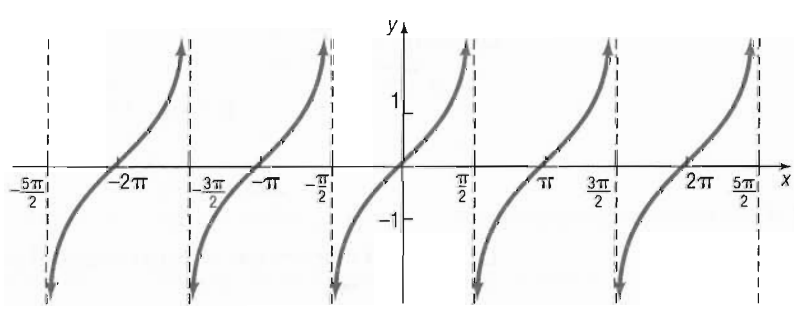
De modo que

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Función tangente inversa

En la figura 50 reproducimos la gráfica de $y = \tan x$. Como toda recta horizontal corta a la gráfica una infinidad de veces, esto implica que la función tangente no es uno a uno.

FIGURA 50
$y = \tan x$, $-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$, $-\infty < y < \infty$

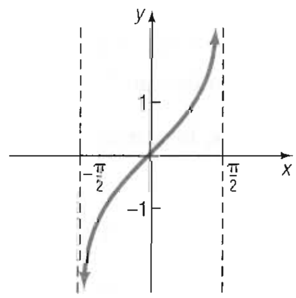


Sin embargo, si restringimos el dominio de $y = \tan x$ al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$,* la función restringida

$$y = \tan x, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

es uno a uno, y por lo tanto, tendrá una inversa. *Véase* la figura 51.

FIGURA 51
$y = \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,$
$-\infty < y < \infty$



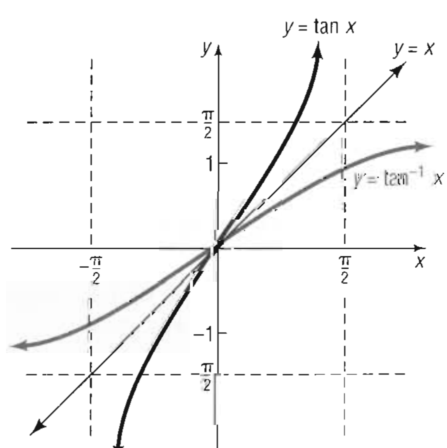
La función inversa es la **tangente inversa** de x y se simboliza como $y = \tan^{-1} x$ (o $y = \arctan x$). Así,

Función tangente inversa

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \tan y \qquad (3)$$
$$\text{donde} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad -\infty < x < \infty$$

En este caso, y es el ángulo cuya tangente es x. El dominio de la función $y = \tan^{-1} x$ es $-\infty < x < \infty$ y el rango $-\pi/2 < y < \pi/2$. Podemos obtener su gráfica mediante una reflexión de la parte restringida de la gráfica de $y = \tan x$ con respecto de la recta $y = x$, como nos muestra la figura 52.

FIGURA 52
$y = \tan^{-1} x,\ -\infty < x < \infty,$
$-\pi/2 < y < \pi/2$



Verificación: haga la gráfica de $y = \tan^{-1} x$ y compare el resultado con la figura 52. ■

*Esta es la restricción aceptada por lo general.

En general,

$$\tan^{-1}(\tan u) = u, \qquad \text{donde} \quad -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$$
$$\tan(\tan^{-1} v) = v, \qquad \text{donde} \quad -\infty < v < \infty$$

EJEMPLO 8 *Determinación del valor exacto de una función tangente inversa*

Determinar el valor exacto de $\tan^{-1} 1$.

Solución Sea $\theta = \tan^{-1} 1$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, cuya tangente es igual a 1:

$$\theta = \tan^{-1} 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$\tan \theta = 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Consulte la figura 51. El único ángulo θ dentro del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente es 1, es $\pi/4$.

Concluimos que

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

De modo que

$$\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

■

EJEMPLO 9 *Determinación del valor exacto de una función tangente inversa*

Determinar el valor exacto de $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

Solución Sea $\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$. Entonces, buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, cuya tangente es igual a $-\sqrt{3}$:

$$\theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3}), \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$\tan \theta = -\sqrt{3} \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Consulte de nuevo la figura 51. El único ángulo θ dentro del intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente es $-\sqrt{3}$ es $-\pi/3$. Así,

$$\theta = -\frac{\pi}{3}$$

De modo que

$$\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 5.

EJEMPLO 10 *Determinación del valor exacto de expresiones con funciones trigonométricas inversas*

Determinar el valor exacto de $\text{sen}[\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)]$.

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$. Buscamos el ángulo θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, cuyo coseno es igual a $\sqrt{3}/2$:

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Entonces

$$\text{sen}\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \text{sen}\ \theta = \text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$ ■

EJEMPLO 11 *Determinación del valor exacto de expresiones con funciones trigonométricas inversas*

Determinar el valor exacto de $\cos[\tan^{-1}(-1)]$.

Solución Sea $\theta = \tan^{-1}(-1)$. Buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, cuya tangente es igual a -1:

$$\tan\theta = -1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{4},$$

Entonces

$$\cos(\tan^{-1}(-1)] = \cos\theta = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ ■

EJEMPLO 12 *Determinación del valor exacto de expresiones con funciones trigonométricas inversas*

Determinar el valor exacto de $\sec(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2})$.

Solución Sea $\theta = \text{sen}^{-1}\frac{1}{2}$. Buscamos el ángulo θ, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, cuyo seno es igual a $\frac{1}{2}$.

$$\text{sen}\ \theta = \frac{1}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

Entonces

$$\sec\left(\text{sen}^{-1}\frac{1}{2}\right) = \sec\theta = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 25.

No es necesario determinar el ángulo para resolver problemas como los que aparecieron en los ejemplos 10, 11 y 12.

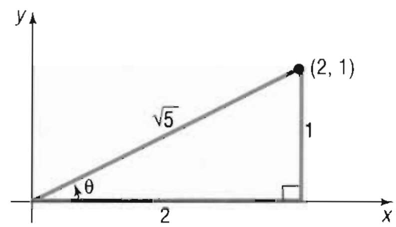
EJEMPLO 13 *Determinación del valor exacto de expresiones con funciones trigonométricas inversas*

Determinar el valor exacto de $\operatorname{sen}[\tan^{-1}\frac{1}{2}]$.

Solución Sea $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{2}$. Entonces $\tan\theta = \frac{1}{2}$, donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Como $\tan\theta > 0$, esto implica que $0 < \theta < \pi/2$. Ahora, en la figura 53, trazamos un triángulo en el cuadrante adecuado, el cual muestra que $\tan\theta = \frac{1}{2}$. Podemos determinar con facilidad la magnitud de la hipotenusa de este triángulo, que es $\sqrt{5}$. Por lo tanto, el seno de θ es $1/\sqrt{5}$, de modo que

$$\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right) = \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

FIGURA 53
$\tan\theta = \frac{1}{2}$



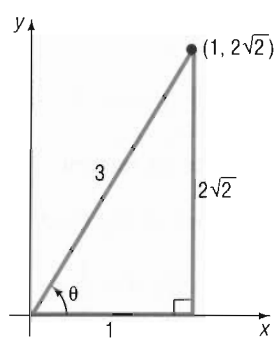
EJEMPLO 14 *Determinación del valor exacto de expresiones con funciones trigonométricas inversas*

Determinar el valor exacto de $\tan(\cos^{-1}\frac{1}{3})$.

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3}$. Entonces $\cos\theta = \frac{1}{3}$, donde $0 \le \theta \le \pi$. Como $\cos\theta > 0$, esto implica que $0 \le \theta \le \pi/2$. Observemos el triángulo en la figura 54. El lado opuesto al ángulo θ mide $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Así,

$$\tan(\cos^{-1}\tfrac{1}{3}) = \tan\theta = 2\sqrt{2}$$

FIGURA 54
$\cos\theta = \frac{1}{3}$



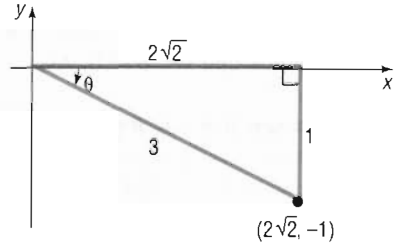
EJEMPLO 15 *Determinación del valor exacto de expresiones con funciones trigonométricas inversas*

Determinar el valor exacto de $\cos[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})]$.

Solución Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{3})$. Entonces $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{3}$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Como $\operatorname{sen}\theta < 0$, esto implica que $-\pi/2 \le \theta \le 0$. Con base en la figura 55, concluimos que

$$\cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

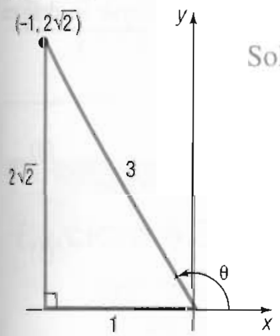
FIGURA 55
sen $\theta = -\frac{1}{3}$



■

EJEMPLO 16 *Determinación del valor exacto de expresiones con funciones trigonométricas inversas*

FIGURA 56
$\cos\theta = -\frac{1}{3}$



Determinar el valor exacto de $\tan[\cos^{-1}(-\frac{1}{3})]$.

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}(-\frac{1}{3})$. Entonces $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $0 \leq \theta \leq \pi$. Como $\cos\theta < 0$, esto implica que $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. Con base en la figura 56, concluimos que

$$\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right] = \tan\theta = \frac{2\sqrt{2}}{-1} = -2\sqrt{2}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 39.

EJEMPLO 17 *Establecimiento de una identidad con funciones trigonométricas inversas*

Muestre que $\operatorname{sen}(\tan^{-1} v) = \dfrac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$

Solución Sea $\theta = \tan^{-1} v$ de modo que $\tan\theta = v$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Existen dos posibilidades: $-\pi/2 < \theta < 0$ o $0 \leq \theta < \pi/2$. Si $0 \leq \theta < \pi/2$, entonces $\tan\theta = v \geq 0$. Con base en la figura 57, concluimos que

$$\operatorname{sen}(\tan^{-1} v) = \operatorname{sen}\theta = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$$

Si $-\pi/2 < \theta < 0$, entonces $\tan\theta = v < 0$. Con base en la figura 58, concluimos que

$$\operatorname{sen}(\tan^{-1} v) = \operatorname{sen}\theta = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}$$

FIGURA 57
$v > 0$

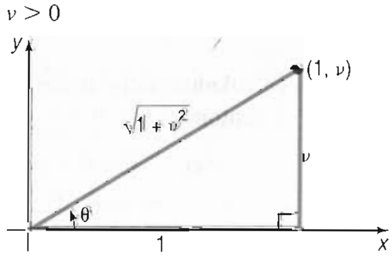
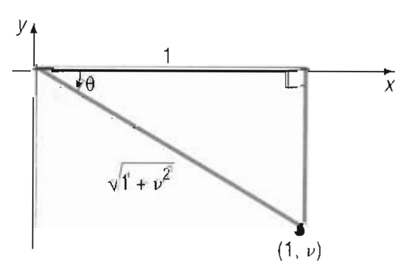


FIGURA 58
$v < 0$



■

Otra forma de resolver el ejemplo 17 utiliza las identidades fundamentales. Si $\theta = \tan^{-1} v$, entonces $\tan \theta = v$ y $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ $\theta < \pi/2$, igual que antes. Como resultado, sabemos que $\sec \theta > 0$. Así,

$$\operatorname{sen}(\tan^{-1} v) = \operatorname{sen}\theta \underset{\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{=} \cos\theta \tan\theta = \frac{\tan\theta}{\sec\theta} \underset{\substack{\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta \\ \sec\theta > 0}}{=} \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

■ Ahora resuelva el problema 57.

Las demás funciones trigonométricas inversas

Las funciones cotangente inversa, secante inversa y cosecante inversa se definen como sigue:

$$y = \cot^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \cot y \tag{4}$$
$$\text{donde} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{y} \quad 0 < y < \pi$$

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \sec y \tag{5}$$
$$\text{donde} \quad |x| \geq 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \pi,\ y \neq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \csc^{-1} x \quad \text{significa} \quad x = \csc y \tag{6}$$
$$\text{donde} \quad |x| \geq 1 \quad \text{y} \quad \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2},\ y \neq 0$$

La mayor parte de las calculadoras no tienen teclas para evaluar estas funciones trigonométricas inversas. La forma más sencilla de evaluarlas es convertirlas en una función trigonométrica inversa con un rango igual al de la original. A este respecto, observe que $y = \cot^{-1} x$ y $y = \sec^{-1} x$ (excepto cuando no están definidas) tienen el mismo rango que $y = \cos^{-1} x$, mientras que $y = \csc^{-1} x$ (excepto cuando no está definida) tiene el mismo rango que $y = \operatorname{sen}^{-1} x$.

EJEMPLO 18 *Aproximación del valor de las funciones trigonométricas inversas*

Utilizar una calculadora para aproximar con dos cifras decimales:

(a) $\sec^{-1} 3$ (b) $\csc^{-1}(-4)$ (c) $\cot^{-1} \frac{1}{2}$ (d) $\cot^{-1}(-2)$

Solución Antes que nada, la calculadora debe trabajar en modo de radianes.

(a) Sea $\theta = \sec^{-1} 3$. Entonces $\sec \theta = 3$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, $\theta \neq \pi/2$. Así, $\cos \theta = \frac{1}{3}$ y

$$\sec^{-1} 3 = \theta = \cos^{-1} \tfrac{1}{3} \underset{\text{Utilizar una calculadora}}{\approx} 1.23$$

FIGURA 59
$\cot\theta = \frac{1}{2}$, $0 < \theta < \pi$

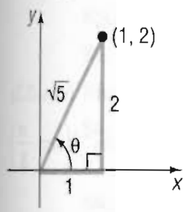
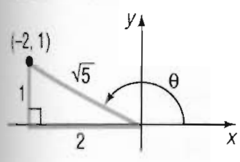


FIGURA 60
$\cot\theta = -2$, $0 < \theta < \pi$



(b) Sea $\theta = \csc^{-1}(-4)$. Entonces $\csc\theta = -4$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $\theta \ne 0$. Así, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{4}$ y

$$\csc^{-1}(-4) = \theta = \operatorname{sen}^{-1}(-\tfrac{1}{4}) \approx -0.25$$

(c) Sea $\theta = \cot^{-1}\frac{1}{2}$. Entonces $\cot\theta = \frac{1}{2}$, $0 < \theta < \pi$. Estos hechos indican que θ está en el cuadrante I. Trazamos la figura 59 como ayuda para determinar $\cos\theta$. Así, $\cos\theta = 1/\sqrt{5}$, $0 < \theta < \pi/2$ y

$$\cot^{-1}\frac{1}{2} = \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 1.11$$

(d) Sea $\theta = \cot^{-1}(-2)$. Entonces $\cot\theta = -2$, $0 < \theta < \pi$. Estos hechos indican que θ está en el cuadrante II. Trazamos la figura 60 como ayuda para determinar $\cos\theta = -2/\sqrt{5}$, $\pi/2 < \theta < \pi$ y

$$\cot^{-1}(-2) = \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 2.68$$

■ Ahora resuelva el problema 67.

6.5

Ejercicio 6.5

En los problemas del 1 al 12 determine el valor exacto de cada expresión.

1. $\operatorname{sen}^{-1} 0$ **2.** $\cos^{-1} 1$ **3.** $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ **4.** $\cos^{-1}(-1)$

5. $\tan^{-1} 0$ **6.** $\tan^{-1}(-1)$ **7.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ **8.** $\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **10.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **11.** $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **12.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

En los problemas del 13 al 24, utilice una calculadora para determinar el valor aproximado de cada expresión, redondeado a dos cifras decimales.

13. $\operatorname{sen}^{-1} 0.1$ **14.** $\cos^{-1} 0.6$ **15.** $\tan^{-1} 5$ **16.** $\tan^{-1} 0.2$

17. $\cos^{-1}\frac{7}{8}$ **18.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{8}$ **19.** $\tan^{-1}(-0.4)$ **20.** $\tan^{-1}(-3)$

21. $\operatorname{sen}^{-1}(-0.12)$ **22.** $\cos^{-1}(-0.44)$ **23.** $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{3}$ **24.** $\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{5}$

En los problemas del 25 al 46 determine el valor exacto de cada expresión.

25. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **26.** $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **27.** $\tan\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ **28.** $\tan\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

29. $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **30.** $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **31.** $\csc(\tan^{-1} 1)$ **32.** $\sec(\tan^{-1}\sqrt{3})$

33. $\operatorname{sen}[\tan^{-1}(-1)]$ **34.** $\cos\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ **35.** $\sec\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ **36.** $\csc\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

37. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}\right)$ **38.** $\tan\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ **39.** $\sec\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$ **40.** $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

41. $\cot\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$ **42.** $\csc[\tan^{-1}(-2)]$ **43.** $\operatorname{sen}[\tan^{-1}(-3)]$ **44.** $\cot\left[\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

45. $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ **46.** $\csc\left(\tan^{-1} \dfrac{1}{2}\right)$

En los problemas del 47 al 56, utilice una calculadora para aproximar el valor de cada expresión, redondeado a dos cifras decimales.

47. $\operatorname{sen}^{-1}(\tan 0.5)$ **48.** $\cos^{-1}(\tan 0.4)$ **49.** $\tan^{-1}(\operatorname{sen} 0.1)$ **50.** $\tan^{-1}(\cos 0.2)$

51. $\cos^{-1}(\operatorname{sen} 1)$ **52.** $\tan^{-1}(\cos 1)$ **53.** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\tan \dfrac{\pi}{8}\right)$ **54.** $\cos^{-1}\left(\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{8}\right)$

55. $\tan^{-1}\left(\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{8}\right)$ **56.** $\tan^{-1}\left(\cos \dfrac{\pi}{8}\right)$

57. Muestre que $\sec(\tan^{-1} v) = \sqrt{1 + v^2}$.

58. Muestre que $\tan(\operatorname{sen}^{-1} v) = v/\sqrt{1 - v^2}$.

59. Muestre que $\tan(\cos^{-1} v) = \sqrt{1 - v^2}/v$.

60. Muestre que $\operatorname{sen}(\cos^{-1} v) = \sqrt{1 - v^2}$.

61. Muestre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} v) = \sqrt{1 - v^2}$.

62. Muestre que $\cos(\tan^{-1} v) = 1/\sqrt{1 + v^2}$.

63. Muestre que $\operatorname{sen}^{-1} v + \cos^{-1} v = \pi/2$.

64. Muestre que $\tan^{-1} v + \cot^{-1} v = \pi/2$.

65. Muestre que $\tan^{-1} 1/v = \pi/2 - \tan^{-1} v$.

66. Muestre que $\cot^{-1} e^v = \tan^{-1} e^{-v}$.

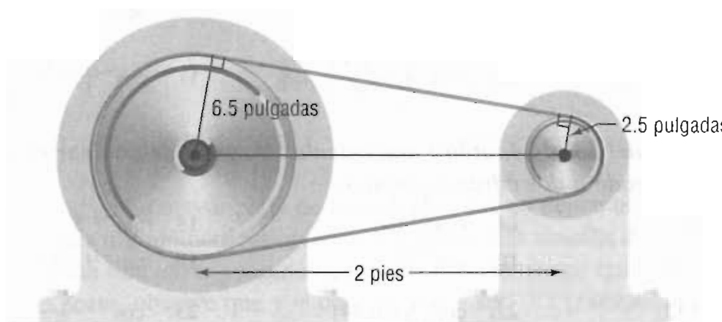
En los problemas del 67 al 78, utilice una calculadora para aproximar cada expresión, redondeada a dos cifras decimales.

67. $\sec^{-1} 4$ **68.** $\csc^{-1} 5$ **69.** $\cot^{-1} 2$ **70.** $\sec^{-1}(-3)$

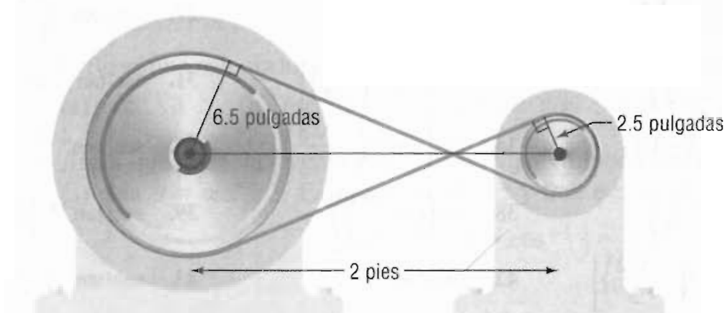
71. $\csc^{-1}(-3)$ **72.** $\cot^{-1}(-\frac{1}{2})$ **73.** $\cot^{-1}(-\sqrt{5})$ **74.** $\cot^{-1}(-8.1)$

75. $\csc^{-1}(-\frac{3}{2})$ **76.** $\sec^{-1}(-\frac{4}{3})$ **77.** $\cot^{-1}(-\frac{3}{2})$ **78.** $\cot^{-1}(-\sqrt{10})$

79. La rueda de transmisión de un motor mide 13 pulgadas de diámetro y la polea en la bomba rotatoria mide 5 pulgadas de diámetro. Si los ejes de la rueda de transmisión y de la polea están separados por una distancia de 2 pies, ¿qué longitud de banda es necesaria para unirlos como muestra la siguiente figura?



80. Vuelva a resolver el problema 79 si la banda está cruzada, como muestra la siguiente figura.



81. ¿Para cuáles números x ocurre que $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$?

82. ¿Para cuáles números x ocurre que $\cos(\cos^{-1} x) = x$?

83. ¿Para cuáles números x ocurre que $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x$?

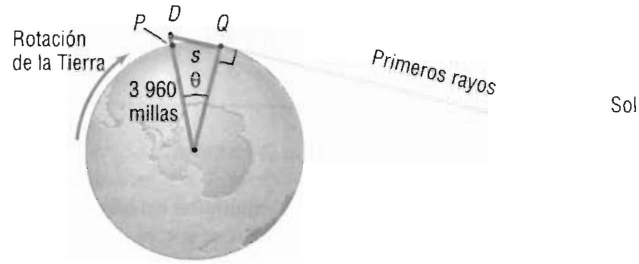
84. ¿Para cuáles números x ocurre que $\cos^{-1}(\cos x) = x$?

85. Trace la gráfica de $y = \cot^{-1} x$.

86. Trace la gráfica de $y = \sec^{-1} x$.

87. Trace la gráfica de $y = \csc^{-1} x$.

88. El Monte Cadillac, con altura de 1 530 pies, se localiza en el parque nacional de Acadia, Maine, y es el pico más alto en la costa este de Estados Unidos. Se dice que una persona parada en la cumbre sería la primera de Estados Unidos en ver los rayos del Sol al amanecer. ¿Cuánto tiempo antes verá una persona en la cima del Monte Cadillac los primeros rayos del Sol, con respecto de una persona parada en línea recta debajo de ella, pero al nivel del mar? [*Sugerencia:* Consulte la figura. Cuando la persona en D ve los primeros rayos del Sol, la persona en P no los ve. La persona en P ve los primeros rayos del Sol sólo después que la Tierra ha girado, de modo que P esté en la posición Q. Calcule la longitud de arco s subtendida por el ángulo central θ. A continuación, utilice el hecho de que en 24 horas se subtiende una longitud de $2\pi(3\ 960)$ millas y determine el tiempo necesario para subtender la longitud s.]



89. Explique con sus propias palabras la forma en que utilizaría su calculadora para determinar el valor de $\cot^{-1} 10$.

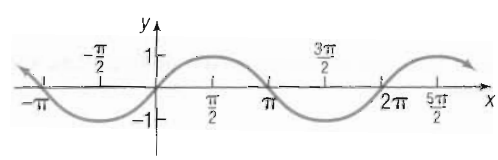
90. Consulte tres libros de cálculo y escriba la definición que proporciona cada uno de $y = \sec^{-1} x$ y $y = \csc^{-1} x$. Compare esas definiciones con las dadas en este libro.

Repaso del capítulo

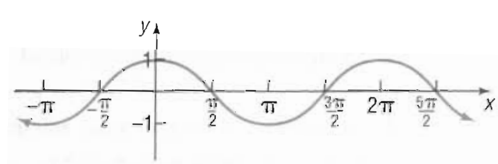
CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Las gráficas de las seis funciones trigonométricas

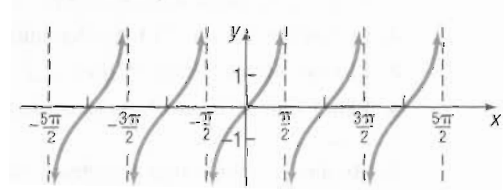
$y = \operatorname{sen} x$
$-\infty < x < \infty$
$-1 \le y \le 1$



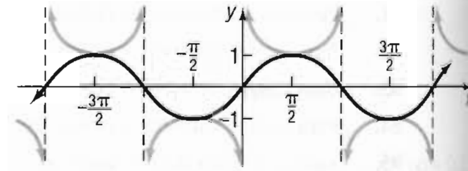
$y = \cos x$
$-\infty < x < \infty$
$-1 \le y \le 1$



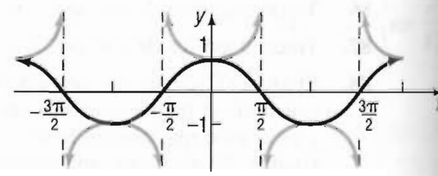
$y = \tan x$
$-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$,
$-\infty < y < \infty$



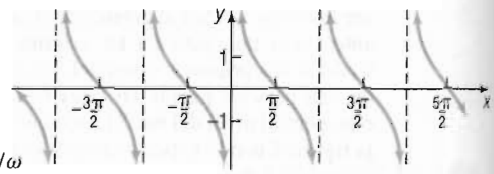
$y = \csc x$
$-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos enteros de π,
$|y| \geq 1$



$y = \sec x$
$-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos impares de $\pi/2$,
$|y| \geq 1$



$y = \cot x$
$-\infty < x < \infty$, x distinto de los múltiplos enteros de π,
$-\infty < y < \infty$



Gráficas senoidales

$y = A \text{ sen } \omega x$, $\omega > 0$ — Periodo $= 2\pi/\omega$
$y = A \cos \omega x$, $\omega > 0$ — Amplitud $= |A|$
$y = A \text{ sen}(\omega x - \phi)$ — Desfasamiento $= \phi/\omega$
$y = A \cos(\omega x - \phi)$

Definiciones de las seis funciones trigonométricas inversas

$y = \text{sen}^{-1} x$ significa $x = \text{sen } y$ donde $-1 \leq x \leq 1$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$
$y = \cos^{-1} x$ significa $x = \cos y$ donde $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \pi$
$y = \tan^{-1} x$ significa $x = \tan y$ donde $-\infty < x < \infty$, $-\pi/2 < y < \pi/2$
$y = \cot^{-1} x$ significa $x = \cot y$ donde $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \pi$
$y = \sec^{-1} x$ significa $x = \sec y$ donde $|x| \geq 1$, $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \pi/2$
$y = \csc^{-1} x$ significa $x = \csc y$ donde $|x| \geq 1$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $y \neq 0$

CÓMO HACER PARA

Hacer la gráfica de las funciones trigonométricas, incluyendo variaciones

Determinar el periodo y amplitud de una función senoidal y utilizarlos para hacer la gráfica de la función

Determinar una función con gráfica senoidal dada

Hacer la gráfica de ciertas sumas de funciones, sumando sus ordenadas

Hacer la gráfica de ciertos productos de funciones

Determinar el valor exacto de ciertas funciones trigonométricas inversas

Utilizar una calculadora para aproximar los valores de funciones trigonométricas inversas

LLENE LOS ESPACIOS EN BLANCO

1. La siguiente función tiene amplitud 3 y periodo 2:

   $y =$ __________ sen __________ x

2. La función $y = 3 \text{ sen } 6x$ tiene amplitud __________ y periodo __________.
3. El factor de amplificación de $f(x) = 5x \cos 3\pi x$ es __________.
4. La función $y = \text{sen}^{-1} x$ tiene dominio __________ y rango __________.
5. El valor de $\text{sen}^{-1}[\cos(\pi/2)]$ es __________.
6. El movimiento de un objeto satisface la ecuación $x = 4 \cos 6t$. Este movimiento se conoce como __________ __________ __________.
7. ¿Cuáles funciones trigonométricas tienen gráficas simétricas con respecto del eje y?
8. ¿Cuáles funciones trigonométricas tienen gráficas simétricas con respecto del origen?

Cierto o Falso

C F 1. Las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ son idénticas salvo un corrimiento horizontal.

C F 2. Las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$ y $y = \csc x$ tienen una infinidad de asíntotas verticales.

C F 3. Para $y = -2 \text{ sen } \pi x$, la amplitud es 2 y el periodo es $\pi/2$.

C F 4. El dominio de $y = \text{sen}-1x$ es $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.

C F 5. $\cos(\text{sen}^{-1} 0) = 1$ y $\text{sen}(\cos^{-1} 0) = 1$.

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 4, determine la amplitud y el periodo de cada función, sin hacer la gráfica.

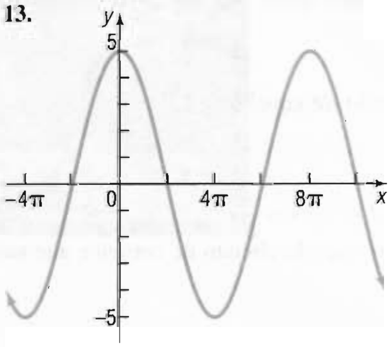
1. $y = 4 \cos x$
2. $y = \text{sen } 2x$
3. $y = -8 \text{ sen } \dfrac{\pi}{2}x$
4. $y = -2 \cos 3\pi x$

En los problemas del 5 al 12, determine la amplitud, el periodo y el desfasamiento de cada función. Haga la gráfica de un periodo.

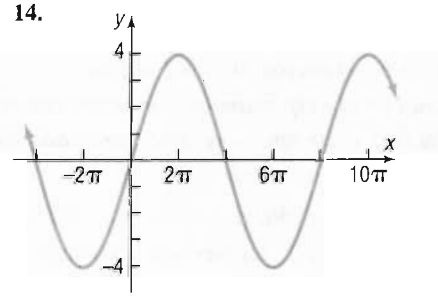
5. $y = 4 \text{ sen } 3x$
6. $y = 2 \cos \frac{1}{3}x$
7. $y = -2 \text{ sen}\left(\dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{1}{2}\right)$
8. $y = -6 \text{ sen}(2\pi x - 2)$
9. $y = \frac{1}{2} \text{ sen}(\frac{3}{2}x - \pi)$
10. $y = \frac{3}{2} \cos(6x + 3\pi)$
11. $y = -\frac{2}{3} \cos(\pi x - 6)$
12. $y = -7 \text{ sen}\left(\dfrac{\pi}{3}x + \dfrac{4}{3}\right)$

En los problemas del 13 al 16 determine una función cuya gráfica está dada.

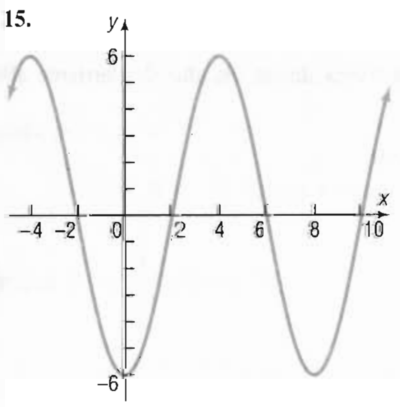
13.



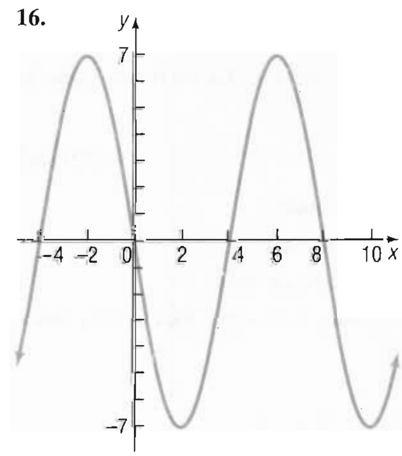
14.



15.



16.



En los problemas del 17 al 20 haga la gráfica de cada función. Cada gráfica debe contener al menos un periodo.

17. $y = \tan(x + \pi)$ **18.** $y = -\tan\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ **19.** $y = -2 \tan 3x$ **20.** $y = 4 \tan 2x$

En los problemas del 21 al 26 utilice el método de suma de ordenadas para hacer la gráfica de cada función.

21. $f(x) = 2x + \operatorname{sen} 2x$ **22.** $f(x) = 2x + \cos 2x$ **23.** $f(x) = \operatorname{sen} \pi x + \cos \dfrac{\pi}{2}x$

24. $f(x) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}x + \cos \pi x$ **25.** $f(x) = 3 \operatorname{sen} \pi x + 2 \cos \pi x$ **26.** $f(x) = 3 \cos 2\pi x + 4 \operatorname{sen} 2\pi x$

En los problemas del 27 al 32 haga la gráfica de cada función.

27. $f(x) = x \cos 2x$ **28.** $f(x) = x \operatorname{sen} \pi x$ **29.** $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} \pi x$

30. $f(x) = e^{-x} \cos \pi x$ **31.** $f(x) = e^{x} \operatorname{sen} \pi x$ **32.** $f(x) = e^{x} \cos \pi x$

En los problemas del 33 al 48 determine el valor exacto de cada expresión.

33. $\operatorname{sen}^{-1} 1$ **34.** $\cos^{-1} 0$ **35.** $\tan^{-1} 1$ **36.** $\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2})$

37. $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **38.** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **39.** $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **40.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} 0)$

41. $\tan\left[\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ **42.** $\tan[\cos^{-1}(-\frac{1}{2})]$ **43.** $\sec\left(\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **44.** $\csc\left(\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

45. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} \frac{3}{4})$ **46.** $\cos(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$ **47.** $\tan[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{4}{5})]$ **48.** $\tan[\cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$

En los problemas del 49 al 52 se proporciona la distancia d (en pies) recorrida por un objeto en un tiempo t (en segundos).

(a) Describa el movimiento del objeto.

(b) ¿Cuál es el desplazamiento máximo con respecto de su posición de equilibrio?

(c) ¿Cuál es el tiempo necesario para cada oscilación?

(d) ¿Cuál es la frecuencia?

49. $d = 6 \operatorname{sen} 2t$ **50.** $d = 2 \cos 4t$ **51.** $d = -2 \cos \pi t$ **52.** $d = -3 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} t$

53. *Voltaje alterno.* La fuerza electromotriz E, en voltios, en un determinado circuito de corriente alterna cumple la ecuación

$$E = 120 \operatorname{sen} 120\,\pi t, \quad t \geq 0$$

donde t se mide en segundos.

(a) ¿Cuál es el valor máximo de E?

(b) ¿Cuál es el periodo?

(c) Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

54. *Corriente alterna.* La corriente I, en amperios, que fluye a través de un circuito de corriente alterna en el instante t es

$$I = 220 \operatorname{sen}\left(30\,\pi t + \frac{\pi}{6}\right), \qquad t \geq 0$$

(a) ¿Cuál es el periodo?

(b) ¿Cuál es la amplitud?

(c) ¿Cuál es el desfasamiento?

(d) Haga la gráfica de dos periodos de esta función.

Capítulo 7

TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de iniciar este capítulo repase los conceptos siguientes:

Identidades fundamentales (p. 354).
Propiedades par e impar (p. 355).
Valores de las funciones trigonométricas para ciertos ángulos (tabla 2, p. 338; tabla 3, p. 341).
Resolución de ecuaciones (sección 1.2).

Panorama Movimiento de un proyectil

Un objeto es impulsado hacia arriba a un ángulo θ respecto de la horizontal con una velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Si pasamos por alto la resistencia al aire, la distancia horizontal R que recorre, el alcance, está dada por

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

(a) Demostrar que $R = \dfrac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

(b) Encontrar el ángulo θ para el cual R es máximo.

[Véase el ejemplo 4, sección 7.3] ■

En este capítulo continuaremos la deducción de identidades que involucran funciones trigonométricas. Estas identidades juegan un papel importante en cálculo, ciencias físicas, sociales y economía, donde son usadas para simplificar expresiones complicadas.

La última sección de este capítulo proporciona técnicas para la resolución de ecuaciones que contienen funciones trigonométricas.

7.1 Identidades trigonométricas

Primero revisemos una definición fundamental:

Dos funciones f y g se dice que son **idénticamente iguales** si

$$f(x) = g(x)$$

para todos los valores de x en que ambas funciones están definidas. Una ecuación de este tipo es conocida como **identidad.** Una ecuación que no es una identidad es llamada **ecuación condicional.**

Por ejemplo, las expresiones siguientes son identidades:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 \qquad \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Las siguientes expresiones son ecuaciones condicionales:

$2x + 5 = 0$ Verdadera sólo si $x = -\frac{5}{2}$

$\operatorname{sen} x = 0$ Verdadera sólo si $x = k\pi$, k un entero

$\operatorname{sen} x = \cos x$ Verdadera sólo si $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ o $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, k un entero

El siguiente recuadro resume las identidades trigonométricas que hemos establecido hasta este punto:

Identidades cocientes

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Identidades par o impar

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$
$$\csc(-\theta) = -\csc\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

A las identidades de esta lista las llamaremos **identidades trigonométricas básicas.** Estas identidades no sólo deben ser memorizadas si no que deben *conocerse* (al igual que usted conoce su nombre en lugar de tener que memorizarlo). En realidad, el uso que se hace de una identidad básica con frecuencia es una pequeña variación de la forma enlistada aquí. Por ejemplo, podríamos querer usar $\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta$ en lugar de $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$. Por esta razón, entre otras, necesita conocer estas relaciones para sentirse más confiado al trabajar con variaciones de ellas.

En los ejemplos que siguen las instrucciones que leerá son: "Demostrar la identidad. . . " Lo cual, como verá, se realiza empezando con un miembro de la ecuación dada (por lo regular la que contenga la expresión más complicada) usando identidades básicas apropiadas y operaciones algebraicas hasta llegar al otro miembro. Saber seleccionar una identidad básica apropiada para obtener el resultado deseado sólo se consigue por medio de la experiencia y mucha práctica.

EJEMPLO 1 *Demostración de una identidad*

Demostrar la identidad: $\sec\theta \cdot \text{sen}\,\theta = \tan\theta$

Solución Empezamos con el miembro izquierdo, ya que tiene la expresión más complicada, y aplicamos un identidad recíproca:

$$\sec\theta \cdot \text{sen}\,\theta = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \text{sen}\,\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Una vez que se llega al miembro derecho la identidad está demostrada. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 2 *Demostración de una identidad*

Demostrar la identidad: $\text{sen}^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) = 1$

Solución Empezamos con el miembro izquierdo y aplicamos las identidades par e impar:

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(-\theta) + \cos^2(-\theta) &= [\text{sen}(-\theta)]^2 + [\cos(-\theta)]^2 \\ &= (-\text{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 \\ &= (\text{sen}\,\theta)^2 + (\cos\theta)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 *Demostración de una identidad*

Demostrar la identidad: $\dfrac{\text{sen}^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\text{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)} = \cos\theta - \text{sen}\,\theta$

Solución Empezamos con dos observaciones: el lado izquierdo parece que tiene la expresión complicada. También, el lado izquierdo tiene expresiones con el argumento $-\theta$, mientras que el lado derecho tiene expresiones con el argumento θ. Por lo tanto, decidimos empezar con el lado izquierdo y aplicamos las identidades par e impar:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}^2(-\theta) - \cos^2(-\theta)}{\text{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)} &= \frac{[\text{sen}(-\theta)]^2 - [\cos(-\theta)]^2}{\text{sen}(-\theta) - \cos(-\theta)} \\ &= \frac{(-\text{sen}\,\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\text{sen}\,\theta - \cos\theta} && \text{Identidades par e impar.} \\ &= \frac{(\text{sen}\,\theta)^2 - (\cos\theta)^2}{-\text{sen}\,\theta - \cos\theta} && \text{Simplificar.} \\ &= \frac{(\text{sen}\,\theta - \cos\theta)\cancel{(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)}}{-\cancel{(\text{sen}\,\theta + \cos\theta)}} && \text{Factorizar.} \\ &= \cos\theta - \text{sen}\,\theta && \text{Cancelar y simplificar.} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 4 *Demostración de una identidad*

Demostrar la identidad: $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta} = \tan\theta$

Solución

$$\frac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta} = \frac{1+\tan\theta}{1+\dfrac{1}{\tan\theta}} = \frac{1+\tan\theta}{\dfrac{\tan\theta+1}{\tan\theta}} = \frac{\tan\theta\cancel{(1+\tan\theta)}}{\cancel{\tan\theta+1}} = \tan\theta$$

■ Ahora resuelva el problema 9.

Cuando aparecen sumas o diferencias de cocientes, por lo regular es mejor reescribirlos como un solo cociente, en especial si el otro miembro de la identidad contiene un solo término.

EJEMPLO 5 *Demostración de una identidad*

Demostrar la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 2\csc\theta$

Solución El lado izquierdo es más complicado, así que empezamos con él y procedemos a sumar:

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} + \frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + (1+\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta}{(1+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + 1 + 2\cos\theta}{(1+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{2 + 2\cos\theta}{(1+\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{2\cancel{(1+\cos\theta)}}{\cancel{(1+\cos\theta)}(\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} \\
&= 2\csc\theta
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 *Demostración de una identidad*

Demostrar la identidad: $\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \tan\theta$

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} &= \frac{1+\operatorname{sen}\theta - \cos^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + (1-\cos^2\theta)}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta(1+\operatorname{sen}\theta)} \qquad 1-\cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{\text{sen}\ \theta\cancel{(1 + \text{sen}\ \theta)}}{\cos\ \theta\cancel{(1 + \text{sen}\ \theta)}}$$

$$= \tan\ \theta$$

■ Ahora resuelva el problema 23.

Algunas veces, multiplicar el numerador y el denominador por un factor adecuado ayudará a una simplificación.

EJEMPLO 7 *Demostración de una identidad*

Demostrar la identidad: $\dfrac{1 - \text{sen}\ \theta}{\cos\ \theta} = \dfrac{\cos\ \theta}{1 + \text{sen}\ \theta}$

Solución Empezamos con el miembro izquierdo y multiplicamos numerador y denominador por $1 + \text{sen}\ \theta$. (De manera alterna, podríamos multiplicar el numerador y el denominador del miembro derecho por $1 - \text{sen}\ \theta$.)

$$\frac{1 - \text{sen}\ \theta}{\cos\ \theta} = \frac{1 - \text{sen}\ \theta}{\cos\ \theta} \cdot \frac{1 + \text{sen}\ \theta}{1 + \text{sen}\ \theta}$$

$$= \frac{1 - \text{sen}^2\ \theta}{\cos\ \theta(1 + \text{sen}\ \theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\ \theta}{\cos\ \theta(1 + \text{sen}\ \theta)}$$

$$= \frac{\cos\ \theta}{1 + \text{sen}\ \theta}$$

■ Ahora resuelva el problema 35.

Aunque mucha práctica es la única manera de aprender a demostrar identidades, las siguientes directrices le serán útiles:

Directrices para demostrar identidades

1. Casi siempre es preferible empezar con el miembro que tenga la expresión más complicada.
2. Reescribir sumas o diferencias de cocientes como un solo cociente.
3. Algunas veces reescribir un miembro sólo en términos de senos y cosenos ayudará.
4. Siempre tenga en mente su objetivo. Conforme trabaje en un miembro de la expresión mantenga en su mente la forma de la expresión del otro miembro.

Advertencia: Tenga cuidado de no manejar identidades que están demostradas como si fueran ecuaciones. No puede demostrar una identidad por métodos como sumar la misma expresión a cada miembro y obtener un enunciado verdadero. Esta práctica no está permitida, ya que el enunciado original es precisamente el que se está tratando de demostrar. No sabrá si es verdadero hasta que lo haya demostrado.

7.1

Ejercicio 7.1

En los problemas del 1 al 80 demuestre cada identidad.

1. $\csc\theta \cdot \cos\theta = \cot\theta$
2. $\csc\theta \cdot \tan\theta = \sec\theta$
3. $1 + \tan^2(-\theta) = \sec^2\theta$
4. $1 + \cot^2(-\theta) = \csc^2\theta$
5. $\cos\theta(\tan\theta + \cot\theta) = \csc\theta$
6. $\operatorname{sen}\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$
7. $\tan\theta\cot\theta - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$
8. $\operatorname{sen}\theta\csc\theta - \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta$
9. $(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta$
10. $(\csc\theta - 1)(\csc\theta + 1) = \cot^2\theta$
11. $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$
12. $(\csc\theta + \cot\theta)(\csc\theta - \cot\theta) = 1$
13. $\operatorname{sen}^2\theta(1 + \cot^2\theta) = 1$
14. $(1 - \operatorname{sen}^2\theta)(1 + \tan^2\theta) = 1$
15. $(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2 = 2$
16. $\tan^2\theta\cos^2\theta + \cot^2\theta\operatorname{sen}^2\theta = 1$
17. $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$
18. $\csc^4\theta - \csc^2\theta = \cot^4\theta + \cot^2\theta$
19. $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$
20. $\csc\theta - \cot\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$
21. $3\operatorname{sen}^2\theta + 4\cos^2\theta = 3 + \cos^2\theta$
22. $9\sec^2\theta - 5\tan^2\theta = 5 + 4\sec^2\theta$
23. $1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \operatorname{sen}\theta$
24. $1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 - \cos\theta} = -\cos\theta$
25. $\dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \dfrac{\cot\theta + 1}{\cot\theta - 1}$
26. $\dfrac{\csc\theta - 1}{\csc\theta + 1} = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$
27. $\dfrac{\sec\theta}{\csc\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta$
28. $\dfrac{\csc\theta - 1}{\cot\theta} = \dfrac{\cot\theta}{\csc\theta + 1}$
29. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\csc\theta + 1}{\csc\theta - 1}$
30. $\dfrac{\cos\theta + 1}{\cos\theta - 1} = \dfrac{1 + \sec\theta}{1 - \sec\theta}$
31. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = 2\sec\theta$
32. $\dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 2\sec\theta$
33. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \dfrac{1}{1 - \cot\theta}$
34. $1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 + \cos\theta} = \cos\theta$
35. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$
36. $\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$
37. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cot\theta} = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$
38. $\dfrac{\cot\theta}{1 - \tan\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1 - \cot\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$
39. $\tan\theta + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta$
40. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$
41. $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$
42. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta + 1}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta}$
43. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$
44. $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\sec\theta + \cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{1 + \cos^2\theta}$
45. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = 2\operatorname{sen}^2\theta - 1$
46. $\dfrac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = 1 - 2\cos^2\theta$
47. $\dfrac{\sec\theta + \tan\theta}{\cot\theta + \cos\theta} = \tan\theta\sec\theta$
48. $\dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta} = \dfrac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$
49. $\dfrac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta} = 2\cos^2\theta - 1$
50. $\dfrac{1 - \cot^2\theta}{1 + \cot^2\theta} = 1 - 2\cos^2\theta$

51. $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\sec\theta\csc\theta} = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

52. $\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta - \tan\theta}{\cos^2\theta - \cot\theta} = \tan^2\theta$

53. $\sec\theta - \cos\theta = \operatorname{sen}\theta\tan\theta$

54. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$

55. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 2\sec^2\theta$

56. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} - \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = 4\tan\theta\sec\theta$

57. $\dfrac{\sec\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$

58. $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

59. $\dfrac{(\sec\theta - \tan\theta)^2 + 1}{\csc\theta(\sec\theta - \tan\theta)} = 2\tan\theta$

60. $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \tan\theta}{\sec\theta} = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

61. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \sec\theta\csc\theta$

62. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \sec\theta\csc\theta$

63. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta} = 1 - \operatorname{sen}\theta\cos\theta$

64. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{1 - 2\cos^2\theta} = \dfrac{\sec\theta - \operatorname{sen}\theta}{\tan\theta - 1}$

65. $\dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{1 - \tan^2\theta} = \cos^2\theta$

66. $\dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cot\theta + \cos^2\theta$

67. $\dfrac{(2\cos^2\theta - 1)^2}{\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$

68. $\dfrac{1 - 2\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

69. $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta - \cos\theta} = \dfrac{1 + \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

70. $\dfrac{1 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

71. $(a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta)^2 + (a\cos\theta - b\operatorname{sen}\theta)^2 = a^2 + b^2$

72. $(2a\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 + a^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2 = a^2$

73. $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} = \tan\alpha\tan\beta$

74. $(\tan\alpha + \tan\beta)(1 - \cot\alpha\cot\beta) + (\cot\alpha + \cot\beta)(1 - \tan\alpha\tan\beta) = 0$

75. $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha) = 2\cos\beta(\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)$

76. $(\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta)^2 + (\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha) = -2\cos\beta(\operatorname{sen}\alpha - \cos\beta)$

77. $\ln|\sec\theta| = -\ln|\cos\theta|$

78. $\ln|\tan\theta| = \ln|\operatorname{sen}\theta| - \ln|\cos\theta|$

79. $\ln|1 + \cos\theta| + \ln|1 - \cos\theta| = 2\ln|\operatorname{sen}\theta|$

80. $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta| = 0$

81. Escriba en unos cuantos párrafos su estrategia para demostrar identidades.

7.2 Fórmulas para la suma y la diferencia

En esta sección continuaremos la deducción de identidades trigonométricas obteniendo fórmulas que involucren la suma y diferencia de dos ángulos, tales como $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, o $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$. Estas fórmulas son llamadas **fórmulas para la suma y la diferencia.** Empezamos con las fórmulas para $\cos(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha - \beta)$.

Teorema fórmulas para el coseno de una suma y una diferencia

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (1)$$

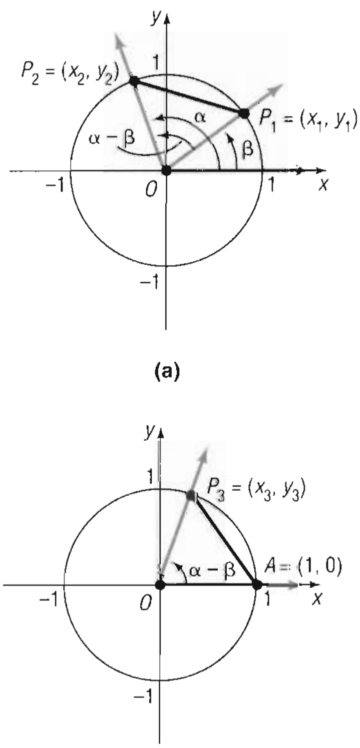
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \qquad (2)$$

En palabras, la fórmula (1) establece que el coseno de la suma de dos ángulos es igual al coseno del primero por el coseno del segundo, menos el seno del primero por el seno del segundo.

Demostración

Primero probaremos la fórmula (2). Aunque ésta es cierta para todos los números α y β, en nuestra demostración supondremos que $0 < \beta < \alpha < 2\pi$. Empezamos con un círculo cuyo centro está en el origen (0, 0) y su radio es igual a 1 (el círculo unitario), luego colocamos los ángulos α y β en posición estándar, como se muestra en la figura 1(a). El punto $P_1 = (x_1, y_1)$ está en el lado terminal de β, y el punto $P_2 = (x_2, y_2)$ está en el lado terminal de α.

FIGURA 1



(a)

(b)

Ahora, colocamos el ángulo $\alpha - \beta$ en posición estándar, como se muestra en la figura 1(b), donde el punto A tiene coordenadas (1,0) y el punto $P_3 = (x_3, y_3)$ está sobre el lado terminal del ángulo $\alpha - \beta$.

Al observar el triángulo OP_1P_2 en la figura 1(a) y el triángulo OAP_3 en la figura 1(b), vemos que estos triángulos son congruentes.(¿Advierte por qué? Porque dos lados y el ángulo entre ellos, $\alpha - \beta$, son iguales.) De modo que el lado desconocido de cada triángulo deba ser igual; esto es,

$$d(A, P_3) = d(P_1, P_2)$$

Al usar la fórmula de distancia, encontramos que

$$\sqrt{(x_3 - 1)^2 + y_3^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$(x_3 - 1)^2 + y_3^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{Elevando al cuadrado cada lado.}$$

$$x_3^2 - 2x_3 + 1 + y_3^2 = x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 \tag{3}$$

Ya que $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, y $P_3 = (x_3, y_3)$ son puntos sobre el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, se deduce que

$$x_1^2 + y_1^2 = 1 \qquad x_2^2 + y_2^2 = 1 \qquad x_3^2 + y_3^2 = 1$$

En consecuencia, la ecuación (3) se simplifica a

$$x_3^2 + y_3^2 - 2x_3 + 1 = (x_2^2 + y_2^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

$$2 - 2x_3 = 2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2$$

$$x_3 = x_1x_2 + y_1y_2 \tag{4}$$

Pero $P_1 = (x_1, y_1)$ está en el lado terminal del ángulo b y a una distancia de 1 unidad del origen. Así que,

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{y_1}{1} = y_1 \qquad \cos \beta = \frac{x_1}{1} = x_1 \tag{5}$$

De forma análoga,

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y_2}{1} = y_2 \qquad \cos \alpha = \frac{x_2}{1} = x_2 \qquad \cos(\alpha - \beta) = \frac{x_3}{1} = x_3 \tag{6}$$

Al usar las ecuaciones (5) y (6) en la ecuación (4), obtenemos

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

que es la fórmula (2).

La prueba de la fórmula (1) es consecuencia de la fórmula (2). Usamos el hecho de que $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$. Entonces

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos[\alpha - (-\beta)] \\ &= \cos \alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta) \quad \text{Usar la fórmula (2).} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \quad \text{Identidades par e impar}\end{aligned}$$ ■

Una aplicación de las fórmulas (1) y (2) es obtener el valor exacto del coseno de un ángulo que pueda ser expresado como la suma o diferencia de ángulos cuyos seno y coseno son conocidos exactamente.

EJEMPLO 1 *Uso de la fórmula de la suma para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de cos 75°.

Solución Ya que $75° = 45° + 30°$, usamos la fórmula (2) para obtener

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°) \underset{\text{Fórmula (1)}}{=} \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$ ■

EJEMPLO 2 *Uso de la fórmula de la diferencia para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de $\cos(\pi/12)$.

Solución

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \quad \text{Usar la fórmula (2).} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\end{aligned}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 3.

Otra aplicación de las fórmulas (1) y (2) es establecer otras identidades. A continuación se da un par de identidades importantes:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen} \theta \qquad (7a)$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta \qquad (7b)$$

Demostración Para demostrar la fórmula (7a), usamos la fórmula $\cos(\alpha - \beta)$ con $\alpha = \pi/2$ y $\beta = \theta$:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos \frac{\pi}{2} \cos \theta + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \theta \\ &= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \operatorname{sen} \theta \\ &= \operatorname{sen} \theta\end{aligned}$$

Para demostrar la fórmula (7b), hacemos uso de la identidad (7a) que se acaba de demostrar:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usar (7a).}}}{=} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = \cos\theta$$

■

Las fórmulas (7a) y (7b) deben parecerle familiares. Son la base para el teorema establecido en el capítulo 5: cofunciones de ángulos complementarios son iguales.

Además, ya que $\cos(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta - \pi/2)$, como consecuencia de la fórmula (7a) se tiene que $\cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen}\theta$. Así, las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos(x - \pi/2)$ son idénticas, algo que usamos antes en la sección 6.2.

■ Ahora resuelva el problema 29.

Fórmulas para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$

Hemos establecido las identidades de las fórmulas (7a) y (7b), ahora podemos deducir las fórmulas para la suma y la diferencia, $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.

Demostración

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] && \text{Fórmula (7a).}\\
&= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right]\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\beta && \text{Fórmula (2).}\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta && \text{Fórmulas (7a) y (7b).}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)]\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\,\operatorname{sen}(-\beta)\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\operatorname{sen}\beta) && \text{Identidades par e impar.}\\
&= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta
\end{aligned}$$

■

Así

Teorema fórmulas para el seno de una suma y diferencia

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta \tag{8}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\operatorname{sen}\beta \tag{9}$$

■

En palabras, la fórmula (8) establece que el seno de la suma de dos ángulos es igual al seno del primero por el coseno del segundo más el coseno del primero por el seno del segundo.

EJEMPLO 3 *Uso de la fórmula de la suma para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen}(7\pi/12)$.

Solución

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \quad \text{Fórmula (8).}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$$ ■

EJEMPLO 4 *Uso de la fórmula de la diferencia para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de sen 165°.

Solución

$$\operatorname{sen} 165° = \operatorname{sen}(225° - 60°)$$
$$= \operatorname{sen} 225° \cos 60° - \cos 225° \operatorname{sen} 60° \quad \text{Fórmula (9).}$$
$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 5 *Uso de la fórmula de la diferencia para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de cos 80° cos 20° + sen 80° sen 20°.

Solución La forma de la expresión cos 80° cos 20° + sen 80° sen 20° es la del lado derecho de la fórmula para $\cos(\alpha - \beta)$ con $\alpha = 80°$ y $\beta = 20°$. Entonces

$$\cos 80° \cos 20° + \operatorname{sen} 80° \operatorname{sen} 20° = \cos(80° - 20°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$$ ■

EJEMPLO 6 *Uso de la fórmula de la suma para encontrar valores exactos*

Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{18}$.

Solución Observamos que la forma de la expresión dada es la del lado derecho de la fórmula para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ con $\alpha = \pi/9$ y $\beta = \pi/18$. Así,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{9}\operatorname{sen}\frac{\pi}{18} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{18}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{18} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 19.

EJEMPLO 7 *Determinación de valores exactos*

Si se sabe que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, y que $\operatorname{sen}\beta = -2/\sqrt{5} = -2\sqrt{5}/5$, $\pi < \beta < 3\pi/2$, encontrar el valor exacto de:

(a) $\cos\alpha$ (b) $\cos\beta$ (c) $\cos(\alpha+\beta)$ (d) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$

Solución (a) Véase la figura 2. Como $(x, 4)$ está sobre el círculo $x^2 + y^2 = 25$ y queda en el segundo cuadrante, tenemos

$$x^2 + 4^2 = 25, \qquad x < 0$$
$$x^2 = 25 - 16 = 9$$
$$x = -3$$

Así,

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = -\frac{3}{5}$$

FIGURA 2
Pado sen $\alpha = \frac{4}{5}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$

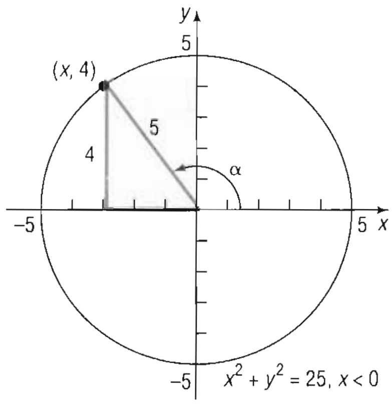
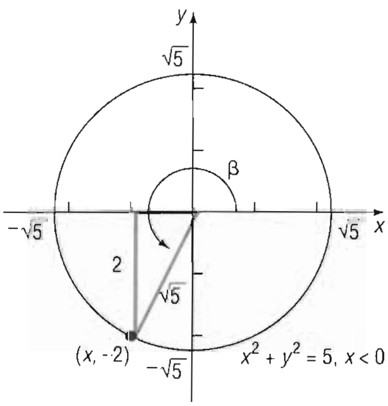


FIGURA 3
Pado sen $\beta = -2/\sqrt{5}$, $\pi < \beta < 3\pi/2$



(b) *Véase* la figura 3. Como $(x, -2)$ está sobre el círculo $x^2 + y^2 = 5$ y queda en el tercer cuadrante, tenemos

$$x^2 + (-2)^2 = 5, \qquad x < 0$$
$$x^2 = 5 - 4 = 1$$
$$x = -1$$

Así,

$$\cos\beta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(c) Al usar los resultados encontrados en las partes (a) y (b) y la fórmula (1), tenemos

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ &= -\frac{3}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{4}{5}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{11\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \\ &= \frac{4}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

■ Ahora resuelva el problema 23.

Fórmulas para $\tan(\alpha + \beta)$ y $\tan(\alpha - \beta)$

Usamos la identidad $\tan\theta = (\operatorname{sen}\theta)/(\cos\theta)$ y las fórmulas para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ al deducir una fórmula para $\tan(\alpha + \beta)$.

Demostración

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Ahora dividimos el numerador y el denominador entre $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \dfrac{\cancel{\cos\alpha}\operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\dfrac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Usamos la fórmula de la tangente de una suma, $\tan(\alpha + \beta)$ para obtener la fórmula de la tangente de una diferencia:

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$ ■

Así, hemos probado los enunciados siguientes:

Teorema
fórmulas de la tangente de una suma y una diferencia

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \qquad (10)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \qquad (11)$$

■

En palabras, la fórmula (10) establece que la tangente de la suma de dos ángulos es igual a la tangente del primero más la tangente del segundo entre uno menos su producto.

EJEMPLO 8

Demostración de una identidad

Demostrar la identidad: $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$

Solución

$$\tan(\theta + \pi) = \frac{\tan \theta + \tan \pi}{1 - \tan \theta \tan \pi} = \frac{\tan \theta + 0}{1 - \tan \theta \cdot 0} = \tan \theta$$ ■

El resultado obtenido en el ejemplo 8 verifica que la función tangente es periódica con periodo π, un hecho que fue mencionado anteriormente.

Advertencia: Tenga cuidado cuando use las fórmulas (10) y (11). Estas pueden ser usadas sólo para ángulos α y β para los cuales $\tan \alpha$ y $\tan \beta$ están definidas, esto es, todos los ángulos excepto múltiplos impares de $\pi/2$.

EJEMPLO 9

Demostración de una identidad

Demostrar la identidad: $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \theta$

Solución

No podemos usar la fórmula (10), ya que $\tan(\pi/2)$ no está definida. En lugar de eso, procedemos como sigue:

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \frac{\pi}{2} + \cos \theta \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}{\cos \theta \cos \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} \theta)(0) + (\cos \theta)(1)}{(\cos \theta)(0) - (\operatorname{sen} \theta)(1)} = \frac{\cos \theta}{-\operatorname{sen} \theta} = -\cot \theta$$ ■

EJEMPLO 10

Determinación de valores exactos

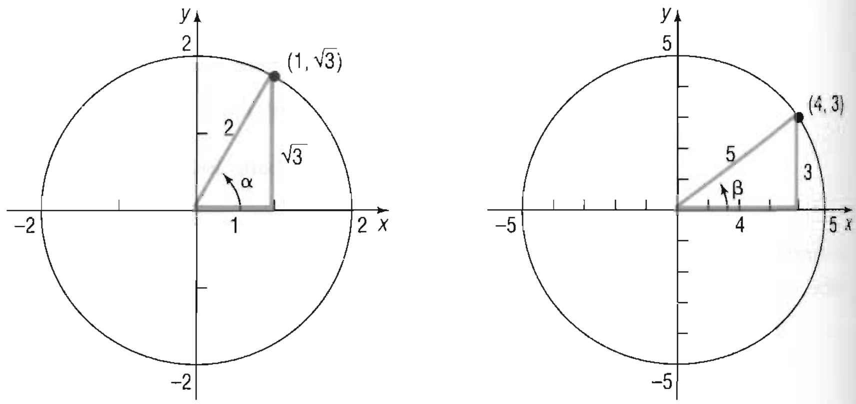
Encontrar el valor exacto de $\operatorname{sen}(\cos^{-1} \frac{1}{2} + \operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$.

Solución

Sea $\alpha = \cos^{-1} \frac{1}{2}$ y $\beta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5}$. Entonces

$$\cos \alpha = \tfrac{1}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \beta = \tfrac{3}{5}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

FIGURA 4



(a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ **(b)** $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$, $-\pi/2 \leq \beta \leq \pi/2$

Con base en la figura 4, obtenemos sen $\alpha = \sqrt{3}/2$ y $\cos\beta = \frac{4}{5}$. Así,

$$\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{3}+3}{10}$$

Ahora resuelva el problema 57.

EJEMPLO 11 *Escribir una expresión trigonométrica como una expresión algebraica*

Escribir $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} u + \cos^{-1} v)$ como una expresión algebraica que contenga a u y a v (esto es, sin funciones trigonométricas).

Solución Sea $\alpha = \operatorname{sen}^{-1} u$ y $\beta = \cos^{-1} v$. Entonces

$$\operatorname{sen}\alpha = u, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \cos\beta = v, \quad 0 \leq \beta \leq \pi$$

Ya que $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$, sabemos que $\cos\alpha \geq 0$. Como consecuencia,

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - u^2}$$

De manera análoga, ya que $0 \leq \beta \leq \pi$, sabemos que sen $\beta \geq 0$. Así,

$$\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - v^2}$$

Ahora,

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} u + \cos^{-1} v) = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$= uv + \sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2}$$

Resumen

El siguiente recuadro sintetiza las fórmulas para la suma y la diferencia:

Fórmulas para la suma y la diferencia

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

7.2

Ejercicio 7.2

En los problemas del 1 al 12 encuentre el valor exacto de cada función trigonométrica.

1. $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$ **2.** $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ **3.** $\cos\frac{7\pi}{12}$ **4.** $\tan\frac{7\pi}{12}$ **5.** $\cos 165°$ **6.** $\operatorname{sen} 105°$

7. $\tan 15°$ **8.** $\tan 195°$ **9.** $\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}$ **10.** $\tan\frac{19\pi}{12}$ **11.** $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$ **12.** $\cot\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

En los problemas del 13 al 22 encuentre el valor exacto de cada expresión.

13. $\operatorname{sen} 20° \cos 10° + \cos 20° \operatorname{sen} 10°$

14. $\operatorname{sen} 20° \cos 80° - \cos 20° \operatorname{sen} 80°$

15. $\cos 70° \cos 20° - \operatorname{sen} 70° \operatorname{sen} 20°$

16. $\cos 40° \cos 10° + \operatorname{sen} 40° \operatorname{sen} 10°$

17. $\dfrac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20° \tan 25°}$

18. $\dfrac{\tan 40° - \tan 10°}{1 + \tan 40° \tan 10°}$

19. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$

20. $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$

21. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

22. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{18}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{18}$

En los problemas del 23 al 28 encuentre el valor exacto de lo siguiente bajo las condiciones dadas:

(a) $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ *(b)* $\cos(\alpha + \beta)$ *(c)* $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ *(d)* $\tan(\alpha - \beta)$

23. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \pi/2$; $\cos\beta = 2/\sqrt{5}$, $-\pi/2 < \beta < 0$

24. $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$, $0 < \alpha < \pi/2$; $\operatorname{sen}\beta = -\frac{4}{5}$, $-\pi/2 < \beta < 0$

25. $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; $\cos\beta = \frac{1}{2}$, $0 < \beta < \pi/2$

26. $\tan\alpha = \frac{5}{12}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$; $\operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}$, $\pi < \beta < 3\pi/2$

27. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$, $-3\pi/2 < \alpha < -\pi$; $\tan\beta = -\sqrt{3}$, $\pi/2 < \beta < \pi$

28. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $-\pi/2 < \alpha < 0$; $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{3}$, $0 < \beta < \pi/2$

En los problemas del 29 al 54 demuestre cada identidad.

29. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

30. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{sen}\theta$

31. $\operatorname{sen}(\pi - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

32. $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

33. $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta$

34. $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

35. $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

36. $\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$

37. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$

38. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$

39. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

40. $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

41. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} = 1 + \cot\alpha\tan\beta$

42. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \tan\alpha + \tan\beta$

43. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tan\alpha\tan\beta$

44. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta} = \cot\alpha + \tan\beta$

45. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)} = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

46. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{1-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

47. $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$

48. $\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

49. $\sec(\alpha+\beta) = \dfrac{\csc\alpha\csc\beta}{\cot\alpha\cot\beta - 1}$

50. $\sec(\alpha-\beta) = \dfrac{\sec\alpha\sec\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

51. $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

52. $\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

53. $\operatorname{sen}(\theta + k\pi) = (-1)^k \cdot \operatorname{sen}\theta$, k cualquier entero

54. $\cos(\theta + k\pi) = (-1)^k \cdot \cos\theta$, k cualquier entero

In Problems 55–64, find the exact value for each expression.

55. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} + \cos^{-1} 0)$

56. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \cos^{-1} 1\right)$

57. $\operatorname{sen}[\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}(-\frac{4}{5})]$

58. $\operatorname{sen}[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{4}{5}) - \tan^{-1}\frac{3}{4}]$

59. $\cos(\tan^{-1}\frac{4}{3} + \cos^{-1}\frac{5}{13})$

60. $\operatorname{sen}[\tan^{-1}\frac{5}{12} - \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{3}{5})]$

61. $\sec(\operatorname{sen}^{-1}\frac{5}{13} - \tan^{-1}\frac{3}{4})$

62. $\sec(\tan^{-1}\frac{4}{3} + \cot^{-1}\frac{5}{12})$

63. $\cot\left(\sec^{-1}\dfrac{5}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

64. $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \csc^{-1}\dfrac{5}{3}\right)$

En los problemas del 65 al 70, escriba cada expresión trigonométrica como una expresión algebraica que contenga u y v.

65. $\cos(\cos^{-1} u + \operatorname{sen}^{-1} v)$

66. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} u - \cos^{-1} v)$

67. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} u - \operatorname{sen}^{-1} v)$

68. $\cos(\tan^{-1} u + \tan^{-1} v)$

69. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} u - \cos^{-1} v)$

70. $\sec(\tan^{-1} u + \cos^{-1} v)$

71. *Cálculo.* Demuestre que el cociente de diferencias para $f(x) = \operatorname{sen} x$ está dado por

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{1-\cos h}{h}$$

72. *Cálculo.* Demuestre que el cociente de diferencias para $f(x) = \cos x$ está dado por

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\operatorname{sen} x \cdot \frac{\operatorname{sen} h}{h} - \cos x \cdot \frac{1-\cos h}{h}$$

73. Demuestre que $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} u + \cos^{-1} u) = 1$.

74. Demuestre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1} u + \cos^{-1} u) = 0$.

75. Explique por qué la fórmula (11) no puede ser utilizada para demostrar que

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$$

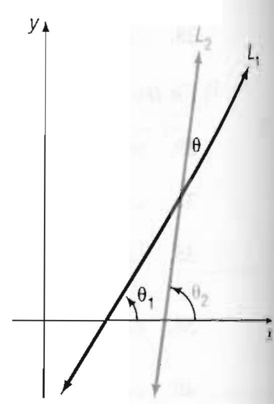
Establezca esta identidad utilizando las fórmulas (7a) y (7b).

76. Si $\tan\alpha = x + 1$ y $\tan\beta = x - 1$, demuestre que $2\cot(\alpha - \beta) = x^2$.

77. *Geometría: ángulo entre dos rectas.* Sean L_1 y L_2 dos rectas no verticales que se cortan, y sea θ el ángulo agudo entre ellas (*véase* la figura). Demuestre que

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente. [*Sugerencia:* Utilice el hecho de que $\tan\theta_1 = m_1$ y $\tan\theta_2 = m_2$.]



78. Si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ y $\cot \theta = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma$, $0 < \theta < 90°$, demuestre que

$$\operatorname{sen}^3 \theta = \operatorname{sen}(\alpha - \theta)\operatorname{sen}(\beta - \theta)\operatorname{sen}(\gamma - \theta)$$

79. Analice la siguiente deducción:

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\tan \theta + \tan(\pi/2)}{1 - \tan \theta \tan(\pi/2)} = \frac{\dfrac{\tan \theta}{\tan(\pi/2)} + 1}{\dfrac{1}{\tan(\pi/2)} - \tan \theta} = \frac{0 + 1}{0 - \tan \theta} = \frac{1}{-\tan \theta} = -\cot \theta$$

¿Puede justificar cada paso?

7.3

Fórmulas para ángulo doble y ángulo medio

En esta sección deduciremos fórmulas para $\operatorname{sen} 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$ y $\cos \frac{1}{2}\theta$ en términos de $\operatorname{sen} \theta$ y $\cos \theta$. Son fáciles de deducir utilizando las fórmulas para la suma.

Fórmulas para ángulo doble

En la suma para $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$, sea $\alpha = \beta = \theta$. Entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$
$$\operatorname{sen}(\theta + \theta) = \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos \theta \operatorname{sen} \theta$$
$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad (1)$$

y

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$
$$\cos(\theta + \theta) = \cos \theta \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (2)$$

Una aplicación de la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ conduce a otras dos formas de escribir la fórmula (2) para $\cos 2\theta$:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) - \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta$$

y

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$$

Así, hemos establecido las **fórmulas para ángulo doble** siguientes:

Teorema
fórmulas para ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \qquad (3)$$
$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (4a)$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta \qquad (4b)$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 \qquad (4c)$$

■

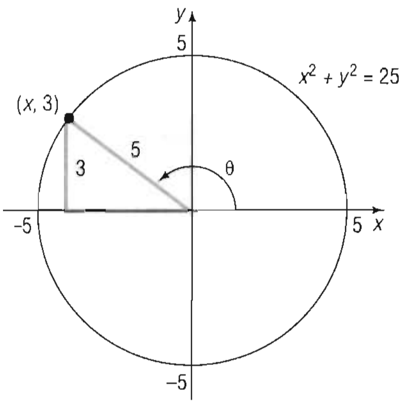
EJEMPLO 1 *Determinación de valores exactos usando la fórmula para ángulo doble*

Si $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, encontrar el valor exacto de:

(a) $\operatorname{sen} 2\theta$ (b) $\cos 2\theta$

Solución (a) Como $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ y ya sabemos que $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$, sólo necesitamos encontrar $\cos \theta$ (véase la figura 5). Como $\pi/2 < \theta < \pi$, resulta que $(x, 3)$ está sobre el círculo $x^2 + y^2 = 25$ y queda en el segundo cuadrante. Así,

FIGURA 5



$$x^2 + 3^2 = 25, \qquad x < 0$$
$$x^2 = 25 - 9 = 16$$
$$x = -4$$

Así, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. Ahora usaremos la fórmula (3) para obtener

$$\text{sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos\theta = 2(\tfrac{3}{5})(-\tfrac{4}{5}) = -\tfrac{24}{25}$$

(b) Ya que se nos dio $\text{sen } \theta = \frac{3}{5}$, es más fácil usar la fórmula (4b) para obtener 2θ:

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \text{ sen}^2 \theta = 1 - 2(\tfrac{9}{25}) = 1 - \tfrac{18}{25} = \tfrac{7}{25}$$ ∎

Advertencia: En el resultado de $\cos 2\theta$ del ejemplo 1(b), elegimos usar una versión de la fórmula para ángulo doble, la fórmula (4b). Observe que no podemos usar la identidad pitagórica $\cos 2\theta = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 2\theta}$, con $\text{sen } 2\theta = -\frac{24}{25}$, ya que no tenemos forma de saber cuál signo elegir.

Ahora resuelva los problemas 1(a) y 1(b).

EJEMPLO 2 *Demostración de identidades*

(a) Desarrollar una fórmula para $\tan 2\theta$ en términos de $\tan\theta$.

(b) Desarrollar una fórmula para $\text{sen } 3\theta$ en términos de $\text{sen } \theta$ y $\cos\theta$.

Solución (a) En la fórmula de la suma para $\tan(\alpha + \beta)$, hacemos $\alpha = \beta = \theta$. Entonces

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$
$$\tan(\theta + \theta) = \frac{\tan\theta + \tan\theta}{1 - \tan\theta \tan\theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \qquad (5)$$

(b) Para obtener una fórmula para $\text{sen } 3\theta$, usamos la fórmula para la suma y escribimos 3θ como $2\theta + \theta$.

$$\text{sen } 3\theta = \text{sen}(2\theta + \theta) = \text{sen } 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \text{ sen } \theta$$

Ahora usamos las fórmulas para el ángulo doble para obtener

$$\begin{aligned}\text{sen } 3\theta &= (2 \text{ sen } \theta \cos\theta)(\cos\theta) + (\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta)(\text{sen } \theta)\\ &= 2 \text{ sen } \theta \cos^2\theta + \text{sen } \theta \cos^2\theta - \text{sen}^3\theta\\ &= 3 \text{ sen } \theta \cos^2\theta - \text{sen}^3\theta\end{aligned}$$ ∎

La fórmula obtenida en el ejemplo 2(b) también puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\text{sen } 3\theta = 3 \text{ sen } \theta \cos^2\theta - \text{sen}^3\theta &= 3 \text{ sen } \theta(1 - \text{sen}^2\theta) - \text{sen}^3\theta\\ &= 3 \text{ sen } \theta - 4 \text{ sen}^3\theta\end{aligned}$$

Esto es, $\text{sen } 3\theta$ es un polinomio de tercer grado en la variable $\text{sen } \theta$. En realidad, $\text{sen } n\theta$, n, siendo un entero impar positivo, siempre puede ser escrito como un polinomio de grado n en la variable $\text{sen } \theta$ *.

*Debido al trabajo realizado por P. L. Chebyshëv, algunas veces estos polinomios son llamados *polinomios de Chebyshëv*.

■ Ahora resuelva el problema 47.

Otras variaciones de las fórmulas para el ángulo doble

Al reacomodar las fórmulas para el ángulo doble (4b) y (4c), obtenemos otras que usaremos un poco más adelante en esta sección.

Si resolvemos la fórmula (4b) para $\text{sen}^2\,\theta$, obtenemos

$$\cos 2\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta$$
$$2\,\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$\boxed{\text{sen}^2\,\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \qquad (6)$$

De manera análoga, podemos resolver para $\cos^2\theta$ en la fórmula (4c):

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

$$\boxed{\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}} \qquad (7)$$

Las fórmulas (6) y (7) pueden ser usadas para desarrollar una fórmula para $\tan^2\theta$:

$$\tan^2\theta = \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

$$\boxed{\tan^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}} \qquad (8)$$

Las fórmulas (6), (7) y (8) no tienen que ser memorizadas ya que su deducción es muy simple.

Las fórmulas (6) y (7) son importantes en cálculo. El ejemplo siguiente ilustra un problema que surge en cálculo y necesita el uso de la fórmula (7).

EJEMPLO 3 *Demostración de una identidad*

Escribir una expresión equivalente para $\cos^4\theta$ que no involucre ninguna potencia de seno o coseno mayor que uno.

Solución Aquí la idea es aplicar la fórmula (7) dos veces:

$$\cos^4\theta = (\cos^2\theta)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 \qquad \text{Fórmula (7).}$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\cos^2 2\theta$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{4}\left[\frac{1 + \cos 2(2\theta)}{2}\right] \quad \text{Fórmula (7).}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}(1 + \cos 4\theta)$$

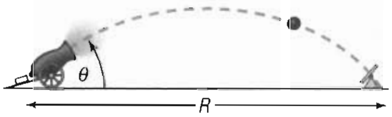
$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$$

■ Ahora resuelva el problema 23.

Identidades tales como las fórmulas para el ángulo doble, algunas veces pueden ser usadas para reescribir expresiones en forma más adecuada. *Veamos* el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 *Movimiento de un proyectil*

FIGURA 6



Un objeto es impulsado hacia arriba a un ángulo θ con respecto a la horizontal y velocidad inicial de v_0 pies por segundo. Si se pasa por alto la resistencia al aire, la distancia horizontal R que recorre el objeto, el **alcance,** está dada por

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

(a) Demostrar que $R = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$.

(b) Encontrar el ángulo θ para el cual R es máximo.

Solución (a) Reescribimos la expresión dada para el alcance usando la fórmula para el ángulo doble $\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$. Entonces

$$R = \frac{1}{16} v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{1}{16} v_0^2 \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} = \frac{1}{32} v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

(b) En esta forma, el valor más grande para el alcance R puede ser encontrado fácilmente. Para una velocidad inicial fija v_0, el ángulo de inclinación θ con respecto a la horizontal determina el valor de R. Como el valor más grande de la función seno es 1, y ocurre cuando el argumento es 90°, resulta que para que R sea máximo debemos tener

$$2\theta = 90^\circ$$
$$\theta = 45^\circ$$

Con una inclinación de 45° con respecto a la horizontal se obtiene un alcance máximo. ■

Fórmulas para medio ángulo

Otro uso importante de las fórmulas (6), (7) y (8) se da al **probar las fórmulas para medio ángulo.** En las fórmulas (6), (7) y (8), hacemos $\theta = \alpha/2$. Entonces:

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} \tag{9}$$

Si resolvemos para las funciones trigonométricas que aparecen en los miembros izquierdos de las ecuaciones (9), obtenemos las fórmulas para medio ángulo:

Teorema fórmulas para medio ángulo

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{10a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{10b}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{10c}$$

donde el signo + o − se determina por el cuadrante del ángulo $\alpha/2$.

Usamos las fórmulas de medio ángulo en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 *Determinación de valores exactos usando fórmulas para medio ángulo*

Encontrar el valor exacto de:

(a) $\cos 15°$ (b) $\operatorname{sen}(-15°)$

Solución (a) Ya que $15° = 30°/2$, podemos usar la fórmula para medio ángulo de $\cos(\alpha/2)$ con $\alpha = 30°$. También, como 15° está en el primer cuadrante, $\cos 15° > 0$, y elegimos el signo + al usar la fórmula (10b):

$$\cos 15° = \cos\frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

(b) Usamos el hecho de que $\operatorname{sen}(-15°) = -\operatorname{sen} 15°$ y entonces aplicamos la fórmula (10a):

$$\operatorname{sen}(-15°) = -\operatorname{sen}\frac{30°}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Es interesante comparar la respuesta encontrada en el ejemplo 5(a) con la del ejemplo 2 de la sección 7.2. Ahí calculamos

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

Con base en estos resultados, concluimos que

$$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

son iguales. (Como cada expresión es positiva, podemos verificar esta igualdad elevando al cuadrado cada expresión.) Así, se pueden obtener dos respuestas de apariencia muy diferente, pero correctas, dependiendo del enfoque tomado para resolver un problema.

■ Ahora resuelva el problema 13.

EJEMPLO 6 *Determinación de valores exactos usando fórmulas para medio ángulo*

Si $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$, encontrar el valor exacto de:

(a) $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}$ (b) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ (c) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$

Solución Primero, observamos que si $\pi < \alpha < 3\pi/2$ entonces $\pi/2 < \alpha/2 < 3\pi/4$. Como consecuencia, $\alpha/2$ pertenece al segundo cuadrante.

(a) Como $\alpha/2$ está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}(\alpha/2) > 0$. Así, usamos el signo + en la fórmula (10a) para obtener

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(b) Como $\alpha/2$ está en el segundo cuadrante, $\cos(\alpha/2) < 0$. Así, usamos el signo − en la fórmula (10b) para obtener

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+(-\frac{3}{5})}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(c) Como $\alpha/2$ está en el segundo cuadrante, $\tan(\alpha/2) > 0$. Así, usamos el signo − en la fórmula (10c) para obtener

$$\tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = -\sqrt{\frac{1-(-\frac{3}{5})}{1+(-\frac{3}{5})}} = -\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = -2$$ ■

Otra manera de resolver el ejemplo 6(c) es usando las soluciones encontradas en las partes (a) y (b):

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \frac{2\sqrt{5}/5}{-\sqrt{5}/5} = -2$$

■ Ahora resuelva los problemas 1(c) y 1(d).

Hay una fórmula para $\tan(\alpha/2)$ que no tiene signo + ni −, lo cual la hace más útil que la fórmula 10(c). Como

$$1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{Fórmula 9.}$$

y

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{Fórmula para ángulo doble.}$$

tenemos

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Ya que también puede demostrarse que

$$\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}$$

tenemos las siguientes dos fórmulas para medio ángulo:

Fórmulas de medio ángulo para $\tan \alpha/2$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad (11)$$

Con esta fórmula, la solución para el ejemplo 6(c) puede ser dada como

$$\cos\alpha=-\tfrac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\tfrac{9}{25}}=-\sqrt{\tfrac{16}{25}}=-\tfrac{4}{5}$$

Así por la ecuación (11),

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{-\frac{4}{5}}=\frac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}}=-2$$

El ejemplo siguiente ilustra un problema que surge en cálculo.

EJEMPLO 7 *Uso de las fórmulas para medio ángulo en cálculo*

Si $z=\tan(\alpha/2)$, demostrar que:

(a) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{2z}{1+z^2}$ (b) $\cos\alpha=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$

Solución (a)

$$\frac{2z}{1+z^2}=\frac{2\tan(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}=\frac{2\tan(\alpha/2)}{\sec^2(\alpha/2)}=\frac{2\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}}{\dfrac{1}{\cos^2(\alpha/2)}}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$=\operatorname{sen}2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{sen}\alpha$$

Fórmula (3) para ángulo doble.

(b)

$$\frac{1-z^2}{1+z^2}=\frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}=\frac{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)}}$$

$$=\frac{\cos^2(\alpha/2)-\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}{\cos^2(\alpha/2)+\operatorname{sen}^2(\alpha/2)}=\frac{\cos2(\alpha/2)}{1}=\cos\alpha$$

Fórmula (4a) para el ángulo doble y la identidad pitagórica. ■

7.3

Ejercicio 7.3

En los problemas del 1 al 10 utilice la información dada acerca del ángulo θ para encontrar el valor exacto de:

(*a*) $\operatorname{sen} 2\theta$ (*b*) $\cos 2\theta$ (*c*) $\operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2}$ (*d*) $\cos \dfrac{\theta}{2}$

1. $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \pi/2$
2. $\cos \theta = \frac{3}{5}, \quad 0 < \theta < \pi/2$
3. $\tan \theta = \frac{4}{3}, \quad \pi < \theta < 3\pi/2$
4. $\tan \theta = \frac{1}{2}, \quad \pi < \theta < 3\pi/2$
5. $\cos \theta = -\sqrt{2}/\sqrt{3}, \quad \pi/2 < \theta < \pi$
6. $\operatorname{sen} \theta = -1/\sqrt{3}, \quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi$
7. $\sec \theta = 3, \quad \operatorname{sen} \theta > 0$
8. $\csc \theta = -\sqrt{5}, \quad \cos \theta < 0$
9. $\cot \theta = -2, \quad \sec \theta < 0$
10. $\sec \theta = 2, \quad \csc \theta < 0$
11. $\tan \theta = -3, \quad \operatorname{sen} \theta < 0$
12. $\cot \theta = 3, \quad \cos \theta < 0$

En los problemas del 13 al 22 utilice las fórmulas de medio ángulo para encontrar el valor exacto de cada función trigonométrica.

13. $\operatorname{sen} 22.5°$
14. $\cos 22.5°$
15. $\tan \dfrac{7\pi}{8}$
16. $\tan \dfrac{9\pi}{8}$
17. $\cos 165°$
18. $\operatorname{sen} 195°$
19. $\sec \dfrac{15\pi}{8}$
20. $\csc \dfrac{7\pi}{8}$
21. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{8}\right)$
22. $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{8}\right)$

23. Demuestre que $\operatorname{sen}^4 \theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$.
24. Desarrolle una fórmula para $\cos 3\theta$ como un polinomio de tercer grado en la variable $\cos \theta$.
25. Demuestre que $\operatorname{sen}^4 \theta = (\cos \theta)(4 \operatorname{sen} \theta - 8 \operatorname{sen}^3 \theta)$.
26. Desarrolle una fórmula para $\cos 4\theta$ como un polinomio de cuarto grado en la variable $\cos \theta$.
27. Desarrolle una fórmula para $\operatorname{sen} 5\theta$ como un polinomio de quinto grado en la variable $\operatorname{sen} \theta$.
28. Desarrolle una fórmula para $\cos 5\theta$ como un polinomio de quinto grado en la variable $\cos \theta$.

En los problemas del 29 al 48 demuestre cada identidad.

29. $\cos^4 \theta - \operatorname{sen}^4 \theta = \cos 2\theta$
30. $\dfrac{\cot \theta - \tan \theta}{\cot \theta + \tan \theta} = \cos 2\theta$
31. $\cot 2\theta = \dfrac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta}$
32. $\cot 2\theta = \frac{1}{2}(\cot \theta - \tan \theta)$
33. $\sec 2\theta = \dfrac{\sec^2 \theta}{2 - \sec^2 \theta}$
34. $\csc 2\theta = \frac{1}{2} \sec \theta \csc \theta$
35. $\cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = \cos 4\theta$
36. $(4 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)(1 - 2 \operatorname{sen}^2 \theta) = \operatorname{sen} 4\theta$
37. $\dfrac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta} = \dfrac{\cot \theta - 1}{\cot \theta + 1}$
38. $\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta)$
39. $\sec^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2}{1 + \cos \theta}$
40. $\csc^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2}{1 - \cos \theta}$
41. $\cot^2 \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sec \theta + 1}{\sec \theta - 1}$
42. $\tan \dfrac{\theta}{2} = \csc \theta - \cot \theta$
43. $\cos \theta = \dfrac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$
44. $1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta = \dfrac{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$
45. $\dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\operatorname{sen} \theta} - \dfrac{\cos 3\theta}{\cos \theta} = 2$
46. $\dfrac{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta} - \dfrac{\cos \theta - \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta} = 2 \tan 2\theta$
47. $\tan 3\theta = \dfrac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$
48. $\tan \theta + \tan(\theta + 120°) + \tan(\theta + 240°) = 3 \tan 3\theta$

En los problemas del 49 al 62 encuentre el valor exacto de cada expresión.

49. $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2})$ **50.** $\operatorname{sen}[2 \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)]$ **51.** $\cos(2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$ **52.** $\cos(2 \cos^{-1} \frac{4}{5})$

53. $\tan[2 \cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$ **54.** $\tan(2 \tan^{-1} \frac{3}{4})$ **55.** $\operatorname{sen}(2 \cos^{-1} \frac{4}{5})$ **56.** $\cos[2 \tan^{-1}(-\frac{4}{3})]$

57. $\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{3}{5})$ **58.** $\cos^2(\frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5})$ **59.** $\sec(2 \tan^{-1} \frac{3}{4})$ **60.** $\csc[2 \operatorname{sen}^{-1} (-\frac{3}{5})]$

61. $\cot^2(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{4}{3})$ **62.** $\cot^2(\frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{5}{13})$

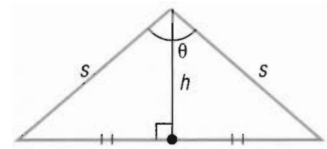
63. Encuentre el valor del número C: $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C = -\frac{1}{4} \cos 2x$

64. Encuentre el valor del número C: $\frac{1}{2} \cos^2 x + C = \frac{1}{4} \cos 2x$

65. *Área de un triángulo isósceles.* Demuestre que el área A de un triángulo isósceles cuyos lados iguales son de longitud s y el ángulo entre ellos es θ es

$$A = \frac{1}{2} s^2 \operatorname{sen} \theta$$

[*Sugerencia: Véase* la ilustración. La altura h bisecta el ángulo θ y es la mediatriz de la base.]



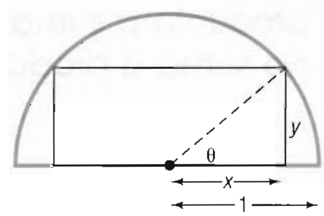
66. *Geometría.* Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 1. *Véase* la ilustración.

(a) Exprese el área A del rectángulo como una función del ángulo θ mostrado en la ilustración.

(b) Demuestre que $A = \operatorname{sen} 2\theta$.

(c) Encuentre el ángulo θ con el que se obtiene el área más grande A.

(d) Encuentre las dimensiones de este rectángulo más grande.



67. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$ para $0 \le x \le 2\pi$ usando las ideas de desplazamiento, compresión, etcétera.

68. Repita el problema 67 para $g(x) = \cos^2 x$.

69. Use el hecho de que

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

para encontrar $\operatorname{sen}(\pi/24)$ y $\cos(\pi/24)$.

70. Demuestre que

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

y úselo para encontrar $\operatorname{sen}(\pi/16)$ y $\cos(\pi/16)$.

71. Demuestre que $\operatorname{sen}^3 \theta + \operatorname{sen}^3(\theta + 120°) + \operatorname{sen}^3(\theta + 240°) = -\frac{3}{4} \operatorname{sen} 3\theta$.

72. Si $\tan \theta = a \tan(\theta/3)$, exprese $\tan(\theta/3)$ en términos de a.

En los problemas 73 y 74 demuestre cada identidad.

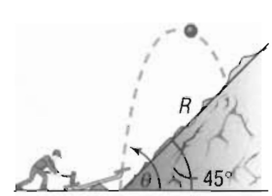
73. $\ln|\operatorname{sen} \theta| = \frac{1}{2}(\ln|1 - \cos 2\theta| - \ln 2)$ **74.** $\ln|\cos \theta| = \frac{1}{2}(\ln|1 + \cos 2\theta| - \ln 2)$

75. *Movimiento de un proyectil.* Un objeto es impulsado hacia arriba a un ángulo θ, $45° < \theta < 90$, con respecto a la horizontal y una velocidad inicial de v_0 pies por segundo desde la base de un plano que hace un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. *Véase* la ilustración. Si se pasa por alto la resistencia al aire, la distancia R que el objeto recorre hacia arriba del plano inclinado está dada por

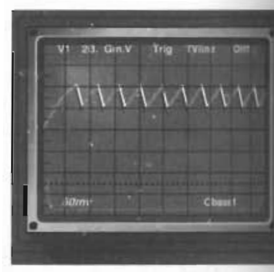
$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{16} \cos \theta(\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)$$

(a) Demuestre que

$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}(\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta - 1)$$



(b) Trace la gráfica de $R = R(\theta)$. ¿Qué valor de θ hace más grande a R?



76. *Curva dientes de sierra.* Con frecuencia un osciloscopio muestra una curva dientes de sierra. Esta curva puede ser aproximada por curvas senoidales de periodos y amplitudes variables. Una primera aproximación está dada por

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\pi x.$$

Demuestre que $y = \operatorname{sen} 2\pi x \cos^2 \pi x$.

77. Vaya a la biblioteca e investigue acerca de los polinomios de Chebyshëv. Escriba un reporte de su investigación.

7.4 Fórmulas de producto a suma y de suma a producto

Las fórmulas de suma y resta pueden ser usadas al deducir fórmulas para escribir los productos de senos y/o, cosenos como sumas o restas. Estas identidades por lo regular son llamadas **fórmulas de producto a suma.**

Teorema fórmulas de producto a suma

$$\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \quad (1)$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \quad (2)$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cos\beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)] \quad (3)$$

Estas fórmulas no tienen que ser memorizadas. En lugar de eso, debe recordar cómo fueron deducidas. Luego, cuando quiera usarlas, véalas o dedúzcalas, según sea necesario.

Para deducir las fórmulas (1) y (2) anote las de suma y resta para el coseno:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \quad (4)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \quad (5)$$

Reste la ecuación (5) de la ecuación (4) para obtener

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

de lo cual

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

Ahora, sume las ecuaciones (4) y (5) para obtener

$$\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

de lo cual

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

Para deducir la fórmula (3) de producto a suma, use las fórmulas para la suma y la resta del seno de manera análoga. (Se le pide que haga esto en el problema 41 al final de esta sección.)

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 7

¿QUÉ TAN LEJOS Y TAN ALTO DEBE IR UNA PELOTA DE BÉISBOL PARA QUE UN CUADRANGULAR SALGA DEL CAMPO DE JUEGO?

Los cronistas de los Indios de Cleveland decidieron estar mejor preparados para enfrentar cualquier eventualidad que pudiera presentarse cuando el nuevo parque de béisbol, Campo Jacob, abriera en 1994. Algo que les preocupaba era acerca de que Bell bateara un cuadrangular que resultara más alto y lejano que el lado izquierdo del parque. ¿Qué le dirían en ese caso a sus radioescuchas acerca de la altura y distancia de la pelota?

De modo que llamaron al equipo de Misión posible. Los cronistas necesitaban saber la distancia desde el home al punto más alto del estadio, y la distancia desde el nivel del suelo al punto más alto del estadio a cada cinco grados desde la línea de tercera base hasta la línea de primera base. El problema se complicó porque la distancia desde el home a la barda del jardín variaba desde 325 hasta 410 pies. Además, la altura que se tendría que librar también variaba, dependiendo de hacia dónde fuese golpeada la bola.

1. Primero, ¿cuántas distancias y alturas quieren conocer los cronistas deportivos?
2. Para apreciar una solución, use la distancia desde el home, cruzando la segunda base hasta la barda del jardín, 410 pies. Usando un tránsito, se encuentra que el ángulo de elevación desde el home hasta el punto más alto del estadio es de 10°, y que el ángulo de elevación desde la base de la barda del jardín hasta el punto más alto del estadio es de 32.5°. Use esta información para encontrar la distancia mínima desde el home hasta el punto más alto del estadio y la distancia desde el nivel del suelo hasta el punto más alto del estadio.
3. Usted dice a los cronistas deportivos que si le proporcionan los dos ángulos de elevación para cada cinco grados alrededor del estadio podrá resolver el problema. Después de conocer estos dos ángulos usted decide que sería más rápido desarrollar una fórmula general; de modo que, a partir de dichos ángulos y distancia desde el home a la barda, serían calculadas la distancia desde el home al techo y la altura del techo. Sean α y β los ángulos de elevación desde el home y la base de la barda del jardín, respectivamente, hasta el punto más alto en el techo, y sea L la distancia desde el home hasta la barda del jardín. ¿Cuáles son las fórmulas correctas?
4. Compare sus fórmulas con las de otros equipos. ¿Son iguales? ¿Son equivalentes? ¿Cuáles son más sencillas?
5. Ahora escriba cada fórmula correcta en la forma que se muestra a continuación:

$$\text{altura} = \frac{L \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)} \qquad \text{distancia} = \frac{L \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

6. ¿Cuál es la trayectoria probable de una pelota bateada en un día sin viento? ¿Cómo podrían el viento y otros factores afectar la trayectoria de la pelota?
7. Si un jugador batea un cuadrangular fuera del parque, ¿cómo se compararía la distancia recorrida por la pelota con las cifras desarrolladas por usted para los cronistas deportivos? ¿Qué otros factores agregaría a la distancia?
8. ¿Podría haber un cuadrangular más largo? ¿Cómo lo mediría?

EJEMPLO 1 *Expresar productos como sumas*

Expresar cada uno de los productos siguientes como una suma que contenga sólo senos y cosenos:

(a) $\text{sen}\, 6\theta\, \text{sen}\, 4\theta$ (b) $\cos 3\theta \cos \theta$ (c) $\text{sen}\, 3\theta \cos 5\theta$

Solución (a) Usamos la fórmula (1) para obtener

$$\begin{aligned}\text{sen}\, 6\theta\, \text{sen}\, 4\theta &= \tfrac{1}{2}[\cos(6\theta - 4\theta) - \cos(6\theta + 4\theta)]\\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 10\theta)\end{aligned}$$

(b) Usamos la fórmula (2) para obtener

$$\begin{aligned}\cos 3\theta \cos \theta &= \tfrac{1}{2}[\cos(3\theta - \theta) + \cos(3\theta + \theta)]\\ &= \tfrac{1}{2}(\cos 2\theta + \cos 4\theta)\end{aligned}$$

(c) Con la fórmula (3) obtenemos

$$\begin{aligned}\text{sen}\, 3\theta \cos 5\theta &= \tfrac{1}{2}[\text{sen}(3\theta + 5\theta) + \text{sen}(3\theta - 5\theta)]\\ &= \tfrac{1}{2}[\text{sen}\, 8\theta + \text{sen}(-2\theta)] = \tfrac{1}{2}(\text{sen}\, 8\theta - \text{sen}\, 2\theta)\end{aligned}$$

■ Ahora resuelva el problema 1.

Las **fórmulas de suma a producto** se dan a continuación.

Teorema
fórmulas de suma a producto

$$\text{sen}\, \alpha + \text{sen}\, \beta = 2\, \text{sen}\, \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (6)$$

$$\text{sen}\, \alpha - \text{sen}\, \beta = 2\, \text{sen}\, \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (7)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (8)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\, \text{sen}\, \frac{\alpha + \beta}{2}\, \text{sen}\, \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (9)$$

Deduciremos la fórmula (6) y dejaremos las deducciones de las fórmulas (7), (8) y (9) como ejercicio (*véanse* los problemas 42, 43 y 44).

Demostración

$$2\, \text{sen}\, \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Fórmula (3) producto a suma.}}}{=} 2 \cdot \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\right]$$

$$= \text{sen}\, \frac{2\alpha}{2} + \text{sen}\, \frac{2\beta}{2} = \text{sen}\, \alpha + \text{sen}\, \beta$$

EJEMPLO 2 *Expresar sumas (o restas) como un producto*

Expresar cada suma o diferencia como un producto de senos y/o, cosenos:

(a) $\text{sen}\, 5\theta - \text{sen}\, 3\theta$ (b) $\cos 3\theta + \cos 2\theta$

Solución (a) Usamos la fórmula (7) para obtener

$$\operatorname{sen} 5\theta - \operatorname{sen} 3\theta = 2 \operatorname{sen} \frac{5\theta - 3\theta}{2} \cos \frac{5\theta + 3\theta}{2}$$

$$= 2 \operatorname{sen} \theta \cos 4\theta$$

(b)

$$\cos 3\theta + \cos 2\theta = 2 \cos \frac{3\theta + 2\theta}{2} \cos \frac{3\theta - 2\theta}{2} \qquad \text{Fórmula (8).}$$

$$= 2 \cos \frac{5\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 11.

7.4

Ejercicio 7.4

En los problemas del 1 al 10 exprese cada producto como una suma que sólo contenga senos o cosenos.

1. $\operatorname{sen} 4\theta \operatorname{sen} 2\theta$ **2.** $\cos 4\theta \cos 2\theta$ **3.** $\operatorname{sen} 4\theta \cos 2\theta$ **4.** $\operatorname{sen} 3\theta \operatorname{sen} 5\theta$

5. $\cos 3\theta \cos 5\theta$ **6.** $\operatorname{sen} 4\theta \cos 6\theta$ **7.** $\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta$ **8.** $\cos 3\theta \cos 4\theta$

9. $\operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ **10.** $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{5\theta}{2}$

En los problemas del 11 al 18 exprese cada suma o diferencia como un producto de senos y/o, cosenos.

11. $\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 2\theta$ **12.** $\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 2\theta$ **13.** $\cos 2\theta + \cos 4\theta$ **14.** $\cos 5\theta - \cos 3\theta$

15. $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta$ **16.** $\cos \theta + \cos 3\theta$ **17.** $\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2}$ **18.** $\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}$

En los problemas del 19 al 36 demuestre cada identidad.

19. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta}{2 \operatorname{sen} 2\theta} = \cos \theta$ **20.** $\dfrac{\cos \theta + \cos 3\theta}{2 \cos 2\theta} = \cos \theta$ **21.** $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{\cos 4\theta + \cos 2\theta} = \tan 3\theta$

22. $\dfrac{\cos \theta - \cos 3\theta}{\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} \theta} = \tan 2\theta$ **23.** $\dfrac{\cos \theta - \cos 3\theta}{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta} = \tan \theta$ **24.** $\dfrac{\cos \theta - \cos 5\theta}{\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 5\theta} = \tan 2\theta$

25. $\operatorname{sen} \theta(\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 3\theta) = \cos \theta(\cos \theta - \cos 3\theta)$ **26.** $\operatorname{sen} \theta(\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} 5\theta) = \cos \theta(\cos 3\theta - \cos 5\theta)$

27. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 8\theta}{\cos 4\theta + \cos 8\theta} = \tan 6\theta$ **28.** $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 8\theta}{\cos 4\theta - \cos 8\theta} = -\cot 6\theta$

29. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 8\theta}{\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 8\theta} = -\dfrac{\tan 6\theta}{\tan 2\theta}$ **30.** $\dfrac{\cos 4\theta - \cos 8\theta}{\cos 4\theta + \cos 8\theta} = \tan 2\theta \tan 6\theta$

31. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta} = \tan \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cot \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ **32.** $\dfrac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\cot \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cot \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

33. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \tan \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ **34.** $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = -\cot \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

35. $1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta = 4 \cos \theta \cos 2\theta \cos 3\theta$

36. $1 - \cos 2\theta + \cos 4\theta - \cos 6\theta = 4 \operatorname{sen} \theta \cos 2\theta \operatorname{sen} 3\theta$

37. *Teléfonos por tono.* En un teléfono por tono, cada botón produce un sonido único. El sonido producido es la suma de dos tonos, dados por

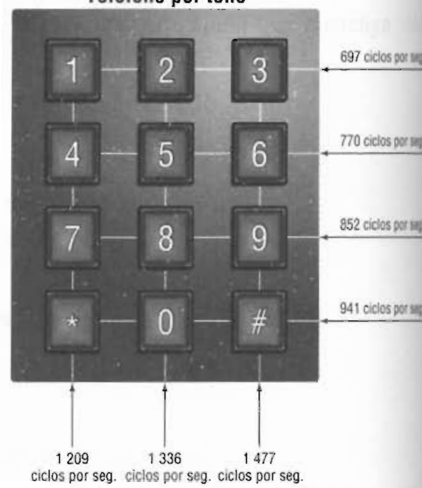
$$y = \text{sen } 2\pi lt \quad \text{y} \quad y = \text{sen } 2\pi ht$$

donde l y h son las frecuencias baja y alta (ciclos por segundo) mostradas en la ilustración. Por ejemplo, si oprime el 7, la frecuencia baja es $l = 852$ ciclos por segundo y la frecuencia alta es $h = 1209$ ciclos por segundo. El sonido producido al oprimir el 7 es

$$y = \text{sen } 2\pi(852)t + \text{sen } 2\pi(1\,209)t$$

Escriba este sonido como un producto de senos y/o, cosenos.

Teléfono por tono



38. Escriba el sonido producido al oprimir la tecla # como un producto de senos y/o, cosenos.

39. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, demuestre que
$\text{sen } 2\alpha + \text{sen } 2\beta + \text{sen } 2\gamma = 4 \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$.

40. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, demuestre que
$\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma$.

41. Deduzca la fórmula (3). **42.** Deduzca la fórmula (7).

43. Deduzca la fórmula (8). **44.** Deduzca la fórmula (9).

7.5 Ecuaciones trigonométricas

Las secciones anteriores de este capítulo trataron acerca de identidades trigonométricas —esto es, **ecuaciones que involucran funciones trigonométricas** que se satisfacen para todo valor en el dominio de la variable. En esta sección analizaremos ecuaciones trigonométricas —esto es, ecuaciones que involucran funciones trigonométricas que se satisfacen sólo para algunos valores de la variable (o, tal vez, no se satisfagan para ningún valor de la variable). Los valores que satisfacen la ecuación son llamados **soluciones** de la ecuación.

EJEMPLO 1 *Verificar si un número dado es una solución de una ecuación trigonométrica*

Determinar si $\theta = \pi/4$ es una solución de la ecuación $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$. ¿$\theta = \pi/6$ es una solución?

Solución Reemplace θ por $\pi/4$ en la ecuación dada. El resultado es

$$\text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq \frac{1}{2}$$

Concluimos que $\pi/4$ no es una solución.

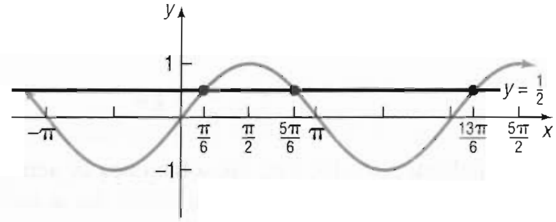
Ahora, reemplazamos θ por $\pi/6$ en la ecuación. El resultado es

$$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Así, $\pi/6$ es una solución de la ecuación dada. ∎

La ecuación del ejemplo 1 tiene otras soluciones además de $\theta = \pi/6$. Por ejemplo, $\theta = 5\pi/6$ también es solución, así como $\theta = 13\pi/6$. (Usted tiene que

FIGURA 7
$y = \text{sen } x$



verificar esto.) En realidad, la ecuación tiene un número infinito de soluciones debido a la periodicidad de la función seno, como puede verse en la figura 7.

A menos que se indique otra cosa, al resolver ecuaciones trigonométricas necesitamos encontrar *todas* las soluciones. Como lo ilustra el ejemplo siguiente, la determinación de todas las soluciones puede ser realizada encontrando las soluciones en un intervalo cuya longitud sea igual al periodo de la función, sumando luego múltiplos de ese periodo a las soluciones encontradas. Veamos algunos ejemplos.

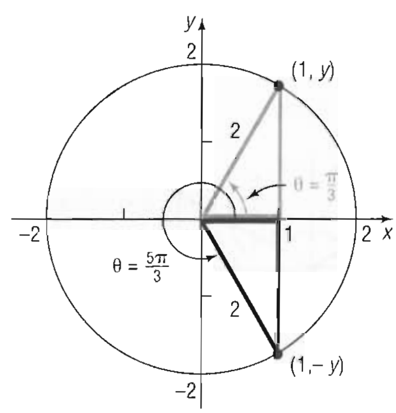
EJEMPLO 2 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

Resolver la ecuación: $\cos \theta = \frac{1}{2}$

Solución El periodo de la función coseno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, hay dos ángulos θ para los cuales $\cos \theta = \frac{1}{2}$: $\theta = \pi/3$ y $\theta = 5\pi/3$. *Véase* la figura 8. Ya que la función coseno tiene periodo 2π, todas las soluciones de $\cos \theta = \frac{1}{2}$ pueden ser dadas por

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{o} \quad \theta = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

FIGURA 8
$\cos \theta = \frac{1}{2}$



■

En la mayor parte de nuestro trabajo, sólo nos interesa encontrar las soluciones de ecuaciones trigonométricas para $0 \leq \theta < 2\pi$.

■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

Resuelva la ecuación: $\text{sen } 2\theta = 1, 0 \leq \theta < 2\pi$

Solución El periodo de la función seno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, la función seno tiene el valor 1 sólo en $\pi/2$. Ya que en la ecuación dada el argumento es 2θ, tenemos

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$, las soluciones de sen $2\theta = 1$ son $\pi/4$ $(k = 0)$ y $\pi/4 + \pi = 5\pi/4$ $(k = 1)$. Observe que $k = -1$ da $\theta = -3\pi/4$ y $k = 2$ da $\theta = 9\pi/4$, ambas quedan fuera de $[0, 2\pi)$.

Advertencia: Al resolver una ecuación trigonométrica para θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, en la que el argumento no es θ (como en el ejemplo 3), primero debe anotar todas las soluciones y luego enlistar aquellas que están en el intervalo $[0, 2\pi)$. De lo contrario, las soluciones pueden perderse. Por ejemplo, al resolver sen $2\theta = 1$, si usted sólo escribe la solución $2\theta = \pi/2$ encontrará únicamente $\theta = \pi/4$ y perderá la solución $\theta = 5\pi/4$.

■ Ahora resuelva el problema 7.

EJEMPLO 4 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

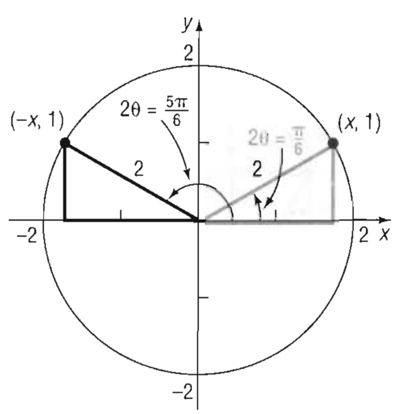
Resuelva la ecuación: sen $2\theta = \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Solución El periodo de la función seno es 2π. En el intervalo $[0, 2\pi)$, la función seno tiene el valor $\frac{1}{2}$ en $\pi/6$ y en $5\pi/6$. *Véase* la figura 9. En consecuencia, ya que el argumento es 2θ en la ecuación sen $2\theta = \frac{1}{2}$ tenemos

$$2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

$$\theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \qquad\qquad \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

FIGURA 9
sen $2\theta = \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$



En el intervalo $[0, 2\pi)$, las soluciones de sen $2\theta = \frac{1}{2}$ son $\pi/12$, $\pi/12 + \pi = 13\pi/12$, $5\pi/12$, y $5\pi/12 + \pi = 17\pi/12$. ■

EJEMPLO 5 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

Resolver la ecuación: $\tan\dfrac{\theta}{4} = 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$

Solución El periodo de la función tangente es π. En el intervalo $[0, \pi)$, la función tangente tiene el valor 1 sólo en $\pi/4$. Ya que en la ecuación dada el argumento es $\theta/4$, tenemos

$$\frac{\theta}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

$$\theta = \pi + 4k\pi$$

En el intervalo $[0, 2\pi)$, $\theta = \pi$ es la única solución.

EJEMPLO 6 *Resolución de una ecuación trigonométrica*

Usar una calculadora para resolver la ecuación: $\operatorname{sen}\theta = 0.3$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución Para resolver $\operatorname{sen}\theta = 0.3$ en una calculadora, primero seleccionamos el modo. Si lo ponemos en radianes, encontramos

Expresión: $\boxed{0.3}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\overset{\text{sen}^{-1}}{\boxed{\text{sen}}}$

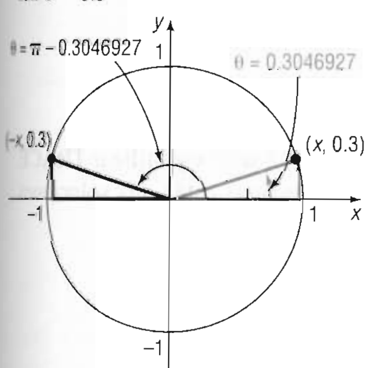
Display: $\boxed{0.3}$ $\boxed{0.3046927}$

El ángulo 0.3046927 radianes es el ángulo $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$ para el cual $\operatorname{sen}\theta = 0.3$. Otro ángulo para el que $\operatorname{sen}\theta = 0.3$ es $\pi - 0.3046927$. *Véase* la figura 10. El ángulo $\pi - 0.3046927$ es el ángulo en el segundo cuadrante donde $\operatorname{sen}\theta = 0.3$. Así, las soluciones para $\operatorname{sen}\theta = 0.3$, $0 \le \theta < 2\pi$, son

$$\theta = 0.3046927 \quad \text{o} \quad \pi - 0.3046927 \approx 2.8369$$

■

FIGURA 10
$\operatorname{sen}\theta = 0.3$



Advertencia: El ejemplo 6 ilustra el cuidado que debe tenerse cuando se resuelven ecuaciones trigonométricas con una calculadora. Recuerde que la calculadora proporciona un ángulo sólo dentro de las restricciones de la definición de la función trigonométrica inversa. Para encontrar las demás soluciones debe identificar otros cuadrantes, si los hay, en los que el ángulo pueda estar ubicado.

■ Ahora resuelva el problema 13.

Muchas ecuaciones trigonométricas pueden resolverse aplicando técnicas que ya conocemos, tales como la fórmula cuadrática (si la ecuación es un polinomio de segundo grado) o factorización.

EJEMPLO 7 *Resolución de una ecuación trigonométrica que tiene forma cuadrática*

Resolver la ecuación: $2\operatorname{sen}^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta + 1 = 0$, $0 \le \theta < 2\pi$

Solución Esta es una ecuación cuadrática (en $\operatorname{sen}\theta$) que puede ser factorizada:

$$2\operatorname{sen}^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta + 1 = 0 \qquad 2x^2 - 3x + 1 = 0,\quad x = \operatorname{sen}\theta$$

$$(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta - 1) = 0 \qquad (2x - 1)(x - 1) = 0$$

$$2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen}\theta - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2} \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta = 1$$

Así,

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \theta = \frac{5\pi}{6} \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 23.

Cuando una ecuación trigonométrica contiene más de una función trigonométrica, algunas veces se pueden usar identidades para obtener una ecuación equivalente que sólo contenga una función trigonométrica.

EJEMPLO 8 *Resolución de una ecuación trigonométrica usando identidades*

Resolver la ecuación: $3\cos\theta + 3 = 2\,\text{sen}^2\,\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$

Solución La ecuación en su forma actual contiene senos y cosenos. Sin embargo, se puede usar una forma de la identidad pitagórica para transformarla en una expresión equivalente que sólo contenga cosenos:

$$\begin{aligned}
3\cos\theta + 3 &= 2\,\text{sen}^2\,\theta \\
3\cos\theta + 3 &= 2(1 - \cos^2\theta) && \text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta \\
3\cos\theta + 3 &= 2 - 2\cos^2\theta \\
2\cos^2\theta + 3\cos\theta + 1 &= 0 && \text{Cuadrática en } \cos\theta \\
(2\cos\theta + 1)(\cos\theta + 1) &= 0 && \text{Factorizar.} \\
2\cos\theta + 1 = 0 \quad &\text{o} \quad \cos\theta + 1 = 0 \\
\cos\theta = -\tfrac{1}{2} \quad & \quad \cos\theta = -1
\end{aligned}$$

Así,

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \qquad \theta = \frac{4\pi}{3} \qquad \theta = \pi$$

Verificación: Trazar la gráfica de $y = 3\cos x + 3$ y $y = 2\,\text{sen}^2\,x$ y utilizar TRACE para encontrar sus puntos de intersección. ¿Qué tan cercanas están sus soluciones aproximadas a las exactas encontradas en este ejemplo?

EJEMPLO 9 *Resolución de una ecuación trigonométrica usando identidades*

Resolver la ecuación: $\cos 2\theta + 3 = 5\cos\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi$

Solución Primero, observamos que la ecuación dada contiene dos funciones coseno, pero con argumentos diferentes, θ y 2θ. Usamos la fórmula de ángulo doble $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ para obtener una ecuación equivalente que sólo contenga a $\cos\theta$:

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta + 3 &= 5\cos\theta \\
(2\cos^2\theta - 1) + 3 &= 5\cos\theta \\
2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 &= 0 \\
(\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) &= 0 \\
\cos\theta = 2 \quad \text{o} \quad \cos\theta &= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

Para cualquier ángulo θ, $-1 \le \cos\theta \le 1$; así, la ecuación $\cos\theta = 2$ no tiene solución. Las soluciones de $\cos\theta = \frac{1}{2}$ son

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

■ Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 10 *Resolución de una ecuación trigonométrica usando identidades*

Resolver la ecuación: $\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta = 2,\ 0 \le \theta < 2\pi$

Solución Usamos una forma de la identidad pitagórica:

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 2$$
$$(1 - \operatorname{sen}^2\theta) + \operatorname{sen}\theta = 2$$
$$\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta + 1 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática en sen θ. El discriminante es $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real.

Verificación: Trazar la gráfica de $y = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$ y $y = 2$ para ver que las dos gráficas no se cortan.

EJEMPLO 11 *Resolución de una ecuación trigonométrica usando identidades*

Resolver la ecuación: $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\frac{1}{2},\ 0 \leq \theta < 2\pi$

Solución El miembro izquierdo de la ecuación está en la forma de la fórmula de ángulo doble $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$, salvo por un factor de 2. Así, multiplicamos cada miembro por 2:

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\tfrac{1}{2}$$
$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -1$$
$$\operatorname{sen} 2\theta = -1$$

Aquí el argumento es 2θ. Así, necesitamos escribir todas las soluciones de esta ecuación y luego enlistar aquellas que estén en el intervalo $[0, 2\pi)$.

$$2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \qquad k \text{ es cualquier entero}$$
$$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

Las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \qquad \theta = \frac{7\pi}{4}$$

■

Algunas veces es necesario elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación con el fin de obtener expresiones que permitan el uso de identidades. Sin embargo, recuerde que cuando se eleva al cuadrado a ambos miembros pueden introducirse soluciones extrañas. En consecuencia, las aparentes soluciones deben ser verificadas.

EJEMPLO 12 *Otros métodos para resolver una ecuación trigonométrica*

Resolver la ecuación: $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1,\ 0 \leq \theta < 2\pi$

Solución A Intentos de aprovechar identidades conocidas no conducen a ecuaciones que sean fáciles de resolver. (Pruebe usted.) Así, dada la forma de esta ecuación, decidimos elevar al cuadrado cada miembro:

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$$
$$(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0 \qquad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

Así,

$$\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{o} \quad \cos\theta = 0$$

y las aparentes soluciones son

$$\theta = 0 \qquad \theta = \pi \qquad \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Ya que elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación original, debemos verificar estas aparentes soluciones por si alguna es extraña:

$\theta = 0$: $\operatorname{sen} 0 + \cos 0 = 0 + 1 = 1$ Una solución.

$\theta = \pi$: $\operatorname{sen}\pi + \cos\pi = 0 + (-1) = -1$ No es solución.

$\theta = \frac{\pi}{2}$: $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$ Una solución.

$\theta = \frac{3\pi}{2}$: $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2} = -1 + 0 = -1$ No es solución.

Así, $\theta = 3\pi/2$ y $\theta = \pi$ son soluciones extrañas. Las verdaderas son $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. ∎

Podemos resolver la ecuación dada en el ejemplo 12 de otra manera.

Solución B Empezamos con la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$$

y dividimos cada lado entre $\sqrt{2}$. (La razón para esto será evidente en breve.) Entonces

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

El miembro izquierdo ahora se parece a la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos, uno de los cuales es θ. El otro ángulo es desconocido (llamémosle ϕ). Entonces

$$\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen}\theta\cos\phi + \cos\theta\operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

donde

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad 0 \le \phi < 2\pi$$

Por lo tanto, el ángulo ϕ es $\pi/4$. Como resultado de esto, la ecuación (1) se convierte en

$$\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Resolvemos esta ecuación para obtener

$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = 0 \qquad\qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Estas soluciones coinciden con las encontradas anteriormente. ∎

Este segundo método de solución puede ser usado para resolver cualquier ecuación lineal en las variables sen θ y cos θ.

EJEMPLO 13 *Resolución de una ecuación trigonométrica lineal en sen θ y cos θ*

Resolver

$$a \text{ sen } \theta + b \cos \theta = c, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \tag{2}$$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

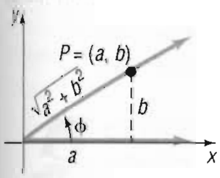
Solución Dividimos cada miembro de la ecuación (2) entre $\sqrt{a^2 + b^2}$. Entonces

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ sen } \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{3}$$

Hay un único ángulo ϕ, $0 \leq \phi < 2\pi$, para el cual

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{y} \quad \text{sen } \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{4}$$

FIGURA 11



(*véase* la figura 11). Así, la ecuación (3) puede ser escrita como

$$\text{sen } \theta \cos \phi + \cos \theta \text{ sen } \phi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

o, de manera equivalente,

$$\text{sen}(\theta + \phi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{5}$$

donde ϕ satisface las ecuaciones (4).

Si $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces $\text{sen}(\theta + \phi) > 1$ o $\text{sen}(\theta + \phi) < -1$, y la ecuación (5) no tienen solución.

Si $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces las soluciones de la ecuación (5) son

$$\theta + \phi = \text{sen}^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{o} \quad \theta + \phi = \pi - \text{sen}^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Ya que el ángulo θ está determinado por las ecuaciones (4), estas son las soluciones de la ecuación (2). ■

Soluciones mediante un dispositivo de graficación

Las técnicas introducidas en esta sección sólo se aplican a ciertos tipos de ecuaciones trigonométricas. Por lo común en cálculo se estudian soluciones de otros tipos, usando métodos numéricos. En el ejemplo siguiente mostramos cómo un dispositivo de graficación puede ser usado para obtener soluciones.

EJEMPLO 14 *Resolución de ecuaciones trigonométricas usando un dispositivo de graficación*

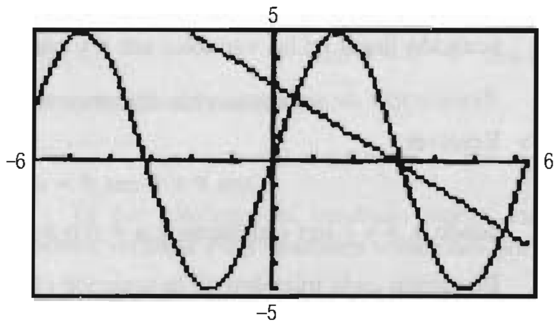
Resolver: $5 \text{ sen } x + x = 3$

Expresar la solución (o soluciones) redondeada(s) a dos decimales.

Solución Este tipo de ecuación trigonométrica no puede ser resuelta por los métodos ya vistos. Pero un dispositivo de graficación sí puede ser usado. Empezamos notando que la ecuación dada es equivalente a

$$5 \text{ sen } x = 3 - x$$

FIGURA 12



La solución (o soluciones) de esta ecuación es la misma que aparece en los puntos de intersección de las gráficas de $y = 5$ sen x y $y = 3 - x$. *Véase* la figura 12. Hay tres puntos de intersección, cuyas coordenadas x son las soluciones buscadas. Usando TRACE, ZOOM-IN y/o, BOX, encontramos

$$x = 0.51 \qquad x = 3.17 \qquad x = 5.71$$

redondeadas a dos decimales.

Observación: Las soluciones de la ecuación

$$5 \text{ sen } x + x = 3$$

pueden ser encontradas de otras formas.

1. Trazar la gráfica de $y = 5$ sen $x + x$ y $y = 3$. Luego encontrar las coordenadas x de los puntos de intersección.
2. Trazar la gráfica de la función $f(x) = 5$ sen $x + x - 3$. Luego encontrar las intersecciones-x.

Intente estas dos formas. Decida cuál de las tres prefiere.

7.5

Ejercicio 7.5

En los problemas del 1 al 12 resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

1. $\text{sen } \theta = \frac{1}{2}$ **2.** $\tan \theta = 1$ **3.** $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **4.** $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{}$

5. $\cos \theta = 0$ **6.** $\text{sen } \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **7.** $\text{sen } 3\theta = -1$ **8.** $\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{3}$

9. $\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ **10.** $\text{sen}\left(3\theta + \frac{\pi}{18}\right) = 1$ **11.** $\sec \frac{3\theta}{2} = -2$ **12.** $\cot \frac{2\theta}{3} = -\sqrt{3}$

En los problemas del 13 al 20 resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$. Redondee su respuesta a dos decimales.

13. $\text{sen } \theta = 0.4$ **14.** $\cos \theta = 0.6$ **15.** $\tan \theta = 5$ **16.** $\cot \theta = 2$

17. $\cos \theta = -0.9$ **18.** $\text{sen } \theta = -0.2$ **19.** $\sec \theta = -4$ **20.** $\csc \theta = -3$

En los problemas del 21 al 50 resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

21. $2\cos^2\theta + \cos\theta = 0$ **22.** $\text{sen}^2\theta - 1 = 0$ **23.** $2\,\text{sen}^2\theta - \text{sen}\,\theta - 1 = 0$

24. $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ **25.** $(\tan\theta - 1)(\sec\theta - 1) = 0$ **26.** $(\cot\theta + 1)(\csc\theta - \frac{1}{2}) = 0$

27. $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$

28. $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0$

29. $\tan\theta = 2\operatorname{sen}\theta$

30. $\operatorname{sen} 2\theta = \cos\theta$

31. $\operatorname{sen}\theta = \csc\theta$

32. $\tan\theta = \cot\theta$

33. $\cos 2\theta = \cos\theta$

34. $\operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

35. $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} 4\theta = 0$

36. $\cos 2\theta + \cos 4\theta = 0$

37. $\cos 4\theta - \cos 6\theta = 0$

38. $\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 6\theta = 0$

39. $1 + \operatorname{sen}\theta = 2\cos^2\theta$

40. $\operatorname{sen}^2\theta = 2\cos\theta + 2$

41. $\tan^2\theta = \frac{3}{2}\sec\theta$

42. $\csc^2\theta = \cot\theta + 1$

43. $3 - \operatorname{sen}\theta = \cos 2\theta$

44. $\cos 2\theta + 5\cos\theta + 3 = 0$

45. $\sec^2\theta + \tan\theta = 0$

46. $\sec\theta = \tan\theta + \cot\theta$

47. $\operatorname{sen}\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 1$

48. $\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$

49. $\tan 2\theta + 2\operatorname{sen}\theta = 0$

50. $\tan 2\theta + 2\cos\theta = 0$

En los problemas del 51 al 56 resuelva cada ecuación para $-\pi \leq x \leq \pi$. Exprese la solución (o soluciones) redondeada(s) a dos decimales.

51. Resuelva la ecuación $\cos x = e^x$ trazando la gráfica $y = \cos x$ y $y = e^x$ y determine su(s) puntos de intersección.

52. Resuelva la ecuación $\cos x = e^x$ trazando la gráfica $y = \cos x - e^x$ y determine la(s) intersecciones-x.

53. Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen} x = 0.7x$ trazando la gráfica $y = 2\operatorname{sen} x$ y $y = 0.7x$ y determine su(s) puntos de intersección.

54. Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen} x = 0.7x$ trazando la gráfica $y = 2\operatorname{sen} x - 0.7x$ y determine la(s) intersecciones-x.

55. Resuelva la ecuación $\cos x = x^2$ trazando la gráfica $y = \cos x$ y $y = x^2$ y determine su(s) puntos de intersección.

56. Resuelva la ecuación $\cos x = x^2$ trazando la gráfica $y = \cos x - x^2$ y determine la(s) intersecciones-x.

En los problemas del 57 al 68 utilice un dispositivo de graficación para resolver cada ecuación. Exprese la solución (o soluciones) redondeada(s) a dos decimales.

57. $x + 5\cos x = 0$

58. $x - 4\operatorname{sen} x = 0$

59. $22x - 17\operatorname{sen} x = 3$

60. $19x + 8\cos x = 2$

61. $\operatorname{sen} x + \cos x = x$

62. $\operatorname{sen} x - \cos x = x$

63. $x^2 - 2\cos x = 0$

64. $x^2 + 3\operatorname{sen} x = 0$

65. $x^2 - 2\operatorname{sen} 2x = 3x$

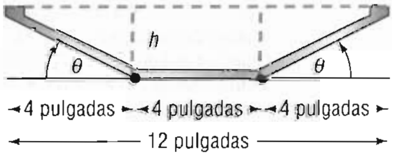
66. $x^2 = x + 3\cos 2x$

67. $6\operatorname{sen} x - e^x = 2,\ x > 0$

68. $4\cos 3x - e^x = 1,\ x > 0$

69. *Construcción de un canal de desagüe pluvial.* Un canal de desagüe pluvial será construido con hojas de aluminio de 12 pulgadas de ancho. Después de marcar una longitud de 4 pulgadas a lo largo de las hojas, se doblan hacia arriba en un ángulo θ. *Véase* la ilustración. El área A de la abertura como función de θ está dada por

$$A = 16\operatorname{sen}\theta(\cos\theta + 1),\ 0° \leq \theta \leq 90°$$



(a) En cálculo, se le pedirá encontrar el ángulo θ que maximiza A resolviendo la ecuación

$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0,\ 0° \leq \theta \leq 90°$$

Resuelva esta ecuación para θ usando la fórmula del ángulo doble.

(b) Resuelva la ecuación para θ escribiendo la suma de los dos ángulos como un producto.

(c) ¿Cuál es el área máxima A de la abertura?

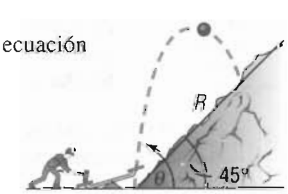
70. *Movimiento de un proyectil.* Un objeto es impulsado hacia arriba a un ángulo θ, $45° < \theta < 90°$, con respecto a la horizontal y una velocidad inicial de v_0 pies por segundo, desde la base de un plano que forma un ángulo de 45° con la horizontal. *Véase* la ilustración. Si se pasa por alto la resistencia al aire, la distancia R que recorre el objeto hacia arriba del plano inclinado está dada por

$$R = \frac{v_0^2\sqrt{2}}{32}(\operatorname{sen} 2\theta - \cos 2\theta - 1)$$

(a) En cálculo, se le pedirá que encuentre el ángulo θ que maximice R resolviendo la ecuación

$$\operatorname{sen} 2\theta + \cos 2\theta = 0$$

Resuelva la ecuación para θ usando el método del ejemplo 13.



(b) Resuelva esta ecuación para θ dividiendo cada miembro entre $\cos 2\theta$.

(c) ¿Cuál es la distancia máxima R si $v_0 = 32$ pies por segundo?

71. *Transferencia de calor.* En el estudio del fenómeno de transferencia de calor, aparece la ecuación $x + \tan x = 0$. Trace la gráfica de $y = -x$ y $y = \tan x$ para $x \geq 0$. Concluya que hay un número infinito de puntos de intersección de estas dos gráficas. Luego determine las primeras dos soluciones positivas de $x + \tan x = 0$ redondeadas a dos decimales.

72. *Transporte de una escalera al doblar una esquina.* Una escalera de longitud L es transportada horizontalmente doblando una esquina desde un pasillo de 3 pies de ancho a uno de 4 pies de ancho. *Véase* la ilustración.

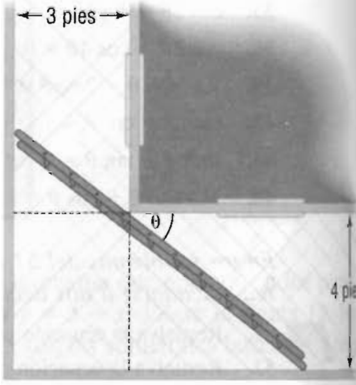
(a) Exprese L como función de θ.

(b) En cálculo, se le pedirá encontrar la escalera de longitud máxima que pueda dar vuelta por la esquina resolviendo la ecuación

$$3 \sec \theta \tan \theta - 4 \csc \theta \cot \theta = 0, \; 0° < \theta < 90°$$

Resuelva esta ecuación para θ.

(c) ¿Cuál es la escalera de mayor longitud que puede ser transportada por dicha esquina?



El estudio siguiente de la ***ley de refracción de Snell*** *(Llamada así en honor de Willebrod Snell, 1591-1626.) es necesario para poder resolver los problemas del 73 al 79: la luz, el sonido y otras ondas viajan a velocidades diferentes, dependiendo de los medios (aire, agua, madera, etc.) a través de los cuales se desplazan. Suponga que la luz viaja desde un punto A en un medio, donde su velocidad es v_1, a un punto B en otro medio, donde su velocidad es v_2. Véase la figura, donde el ángulo θ_1 es llamado* ***ángulo de incidencia*** *y el ángulo θ_2 es el* ***ángulo de refracción.*** *La ley de Snell,* que puede ser probada utilizando cálculo, establece que*

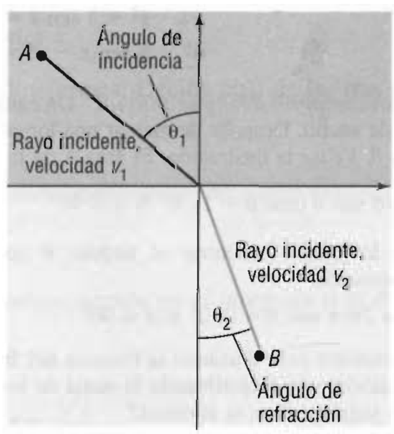
$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

La razón v_1/v_2 es llamada ***índice de refracción.*** *En la tabla siguiente se dan algunos valores.*

ALGUNOS INDICES DE REFRACCIÓN

MEDIO	INDICE DE REFRACCIÓN
Agua	1.33
Alcohol etílico	1.36
Bisulfuro de carbono	1.63
Aire (1 atm y 20°C)	1.0003
Yoduro de metileno	1.74
Quarzo fundido	1.46
Vidrio corona	1.52
Vidrio de roca	1.66
Cloruro de sodio	1.53

Para luz de longitud de onda de 589 nanómetros medida con respecto al vacío. En la mayoría de los casos el índice con respecto al aire difiere de una manera insignificante.



θ_1	θ_2
10°	7°45′
20°	15°30′
30°	22°30′
40°	29°0′
50°	35°0′
60°	40°30′
70°	45°30′
80°	50°0′

73. El índice de refracción de la luz que pasa del vacío al agua es de 1.33. Si el ángulo de incidencia mide 40°, determine el ángulo de refracción.

74. El índice de refracción de la luz que pasa del vacío a un vidrio opaco es de 1.66. Si el ángulo de incidencia mide 50°, determine el ángulo de refracción.

75. Ptolomeo, quien vivió en la ciudad de Alejandría en Egipto durante el segundo siglo d. de C., estableció los valores de la tabla que aparece al margen para el ángulo de incidencia θ_1 y el ángulo de refracción θ_2 de un rayo de luz que pasa del aire al agua. ¿Coinciden estos valores con la ley de Snell? Si es así, ¿cuál es el índice de refracción? (Estos datos son interesantes como las medidas físicas más antiguas registradas.)†

*Ya que esta ley también fue deducida por René Descartes, en Francia es conocida como la ley de Descartes.

†Adaptado de Halliday y Resnick, *Physics*, Partes 1 y 2, tercera edición, Nueva York: Wiley, 1978, p. 953.

76. La velocidad de la luz amarilla de sodio (longitud de onda de 589 nanómetros) en cierto líquido se mide y resulta ser de 1.92 (108 metros por segundo. ¿Cuál es el índice de refracción de este líquido, con respecto al aire, para la luz del sodio?*

77. Un rayo de luz con longitud de onda de 589 nanómetros viajando en el aire forma un ángulo de incidencia de 40° con una lámina de material transparente y el rayo refractado, forma un ángulo de refracción de 26°. Encuentre el índice de refracción del material.†

78. Un rayo de luz con longitud de onda de 589 nanómetros (producido por una lámpara de sodio) viaja a través del aire y forma un ángulo de incidencia de 30° con una lámina delgada de vidrio corona. Determine el ángulo de refracción.†

79. Un rayo de luz pasa de un medio a otro a través de una lámina gruesa de material cuyo índice de refracción es n_2. Demuestre que el rayo que sale es paralelo al rayo incidente.‡

80. Explique con sus propias palabras cómo usaría su calculadora para resolver la ecuación sen $x = 0.3$, $0 \leq x < 2\pi$. ¿Cómo modificaría su enfoque para resolver la ecuación cot $x = 5$, $0 < x < 2\pi$?

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Fórmulas

Fórmulas de suma y diferencia

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

Fórmulas para ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

Fórmulas para medio ángulo

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \\ \cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \\ \tan\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \end{aligned}\right\}$$

donde los signos + o − se determinan por el cuadrante del ángulo $\alpha/2$

$$= \frac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}$$

*Adaptado de Serway, *Physics*, tercera edición, Filadelfia: W. B. Saunders, p. 805.

†Adaptado de Serway, *Physics*, tercera edición, Filadelfia: W. B. Saunders, p. 805.

‡*Ibid.*

Fórmulas de producto a suma	$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
	$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
	$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]$
Fórmulas de suma a producto	$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
	$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$

CÓMO HACER PARA

Demostrar identidades
Resolver una ecuación trigonométrica

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. Suponga que f y g son dos funciones con el mismo dominio. Si $f(x) = g(x)$ para toda x en el dominio, la ecuación es llamada __________. En caso contrario, es llamada ecuación __________.
2. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta$ __________ $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
3. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ __________ $\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$.
4. $\cos 2\theta = \cos^2\theta -$ __________ $=$ __________ $- 1 = 1 -$ __________.
5. $\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\rule{2cm}{0.4pt}}{2}$.

CIERTO O FALSO

C F 1. $\operatorname{sen}(-\theta) + \operatorname{sen}\theta = 0$ para toda θ.
C F 2. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
C F 3. $\cos 2\theta$ tiene tres formas equivalentes: $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$, y $2\cos^2\theta - 1$.
C F 4. $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{2}$, donde los + o − depende del ángulo $\alpha/2$.
C F 5. La mayoría de las ecuaciones trigonométricas tienen solución única.
C F 6. La ecuación $\tan\theta = \pi/2$ no tiene solución.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 32 demuestre cada identidad.

1. $\tan\theta\cot\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
2. $\operatorname{sen}\theta\csc\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
3. $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$
4. $(1 - \cos^2\theta)(1 + \cot^2\theta) = 1$

5. $4\cos^2\theta + 3\,\text{sen}^2\theta = 3 + \cos^2\theta$

6. $4\,\text{sen}^2\theta + 2\cos^2\theta = 4 - 2\cos^2\theta$

7. $\dfrac{1-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} + \dfrac{\text{sen}\,\theta}{1-\cos\theta} = 2\csc\theta$

8. $\dfrac{\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = 2\csc\theta$

9. $\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta - \text{sen}\,\theta} = \dfrac{1}{1-\tan\theta}$

10. $1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1+\text{sen}\,\theta} = \text{sen}\,\theta$

11. $\dfrac{\csc\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{1-\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$

12. $\dfrac{1+\sec\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\text{sen}^2\theta}{1-\cos\theta}$

13. $\csc\theta - \text{sen}\,\theta = \cos\theta\cot\theta$

14. $\dfrac{\csc\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{1+\cos\theta}{\text{sen}^3\theta}$

15. $\dfrac{1-\text{sen}\,\theta}{\sec\theta} = \dfrac{\cos^3\theta}{1+\text{sen}\,\theta}$

16. $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

17. $\dfrac{1-2\,\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \cot\theta - \tan\theta$

18. $\dfrac{(2\,\text{sen}^2\theta - 1)^2}{\text{sen}^4\theta - \cos^4\theta} = 1 - 2\cos^2\theta$

19. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta} = \cot\beta - \tan\alpha$

20. $\dfrac{\text{sen}(\alpha-\beta)}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta} = 1 - \cot\alpha\tan\beta$

21. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 + \tan\alpha\tan\beta$

22. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\text{sen}\,\alpha\cos\beta} = \cot\alpha - \tan\beta$

23. $(1+\cos\theta)\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) = \text{sen}\,\theta$

24. $\text{sen}\,\theta\tan\dfrac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$

25. $2\cot\theta\cot 2\theta = \cot^2\theta - 1$

26. $2\,\text{sen}\,2\theta(1 - 2\,\text{sen}^2\theta) = \text{sen}\,4\theta$

27. $1 - 8\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta = \cos 4\theta$

28. $\dfrac{\text{sen}\,3\theta\cos\theta - \text{sen}\,\theta\cos 3\theta}{\text{sen}\,2\theta} = 1$

29. $\dfrac{\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\,4\theta}{\cos 2\theta + \cos 4\theta} = \tan 3\theta$

30. $\dfrac{\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\,4\theta}{\text{sen}\,2\theta - \text{sen}\,4\theta} + \dfrac{\tan 3\theta}{\tan\theta} = 0$

31. $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{\cos 2\theta + \cos 4\theta} - \tan\theta\tan 3\theta = 0$

32. $\cos 2\theta - \cos 10\theta = (\tan 4\theta)(\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\,10\theta)$

En los problemas del 33 al 40 encuentre el valor exacto de cada expresión.

33. sen 165°

34. tan 105°

35. $\cos\dfrac{5\pi}{12}$

36. $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

37. cos 80° cos 20° + sen 80° sen 20°

38. sen 70° cos 40° − cos 70° sen 40°

39. $\tan\dfrac{\pi}{8}$

40. $\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{8}$

En los problemas del 41 al 50 utilice la información proporcionada acerca de los ángulos a y b para encontrar el valor exacto de:

(*a*) $\text{sen}(\alpha+\beta)$ (*b*) $\cos(\alpha+\beta)$ (*c*) $\text{sen}(\alpha-\beta)$ (*d*) $\tan(\alpha+\beta)$

(*e*) $\text{sen}\,2\alpha$ (*f*) $\cos 2\beta$ (*g*) $\text{sen}\,\dfrac{\beta}{2}$ (*h*) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$

41. $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5},\ 0 < \alpha < \pi/2;\quad \text{sen}\,\beta = \frac{5}{13},\ \pi/2 < \beta < \pi$

42. $\cos\alpha = \frac{4}{5},\ 0 < \alpha < \pi/2;\quad \cos\beta = \frac{5}{13},\ -\pi/2 < \beta < 0$

43. $\text{sen}\,\alpha = -\frac{3}{5},\ \pi < \alpha < 3\pi/2;\quad \cos\beta = \frac{12}{13},\ 3\pi/2 < \beta < 2\pi$

44. $\text{sen}\,\alpha = -\frac{4}{5},\ -\pi/2 < \alpha < 0;\quad \cos\beta = -\frac{5}{13},\ \pi/2 < \beta < \pi$

45. $\tan\alpha = \frac{3}{4},\ \pi < \alpha < 3\pi/2;\quad \tan\beta = \frac{12}{5},\ 0 < \beta < \pi/2$

46. $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; $\cot \beta = \frac{12}{5}$, $\pi < \beta < 3\pi/2$

47. $\sec \alpha = 2$, $-\pi/2 < \alpha < 0$; $\sec \beta = 3$, $3\pi/2 < \beta < 2\pi$

48. $\csc \alpha = 2$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; $\sec \beta = -3$, $\pi/2 < \beta < \pi$

49. $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2}{3}$, $\pi < \alpha < 3\pi/2$; $\cos \beta = -\frac{2}{3}$, $\pi < \beta < 3\pi/2$

50. $\tan \alpha = -2$, $\pi/2 < \alpha < \pi$; $\cot \beta = -2$, $\pi/2 < \beta < \pi$

En los problemas del 51 al 70 resuelva cada ecuación en el intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

51. $\cos \theta = \frac{1}{2}$

52. $\operatorname{sen} \theta = -\sqrt{3}/2$

53. $\cos \theta = -\sqrt{2}/2$

54. $\tan \theta = -\sqrt{3}$

55. $\operatorname{sen} 2\theta = -1$

56. $\cos 2\theta = 0$

57. $\tan 2\theta = 0$

58. $\operatorname{sen} 3\theta = 1$

59. $\operatorname{sen} \theta = 0.9$

60. $\tan \theta = 25$

61. $\operatorname{sen} \theta = \tan \theta$

62. $\cos \theta = \sec \theta$

63. $\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta = 0$

64. $\cos 2\theta = \operatorname{sen} \theta$

65. $\operatorname{sen} 2\theta - \cos \theta - 2 \operatorname{sen} \theta + 1 = 0$

66. $\operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta + 1 = 0$

67. $2 \operatorname{sen}^2 \theta - 3 \operatorname{sen} \theta + 1 = 0$

68. $2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$

69. $\operatorname{sen} \theta - \cos \theta = 1$

70. $\operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta = 1$

Capítulo 8

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de iniciar este capítulo repase los siguientes conceptos:

Solución de triángulos rectángulos (p. 369).

Coordenadas rectangulares; graficación de ecuaciones (sección 1.6).

Números complejos (sección 1.5).

APLICACIONES ADICIONALES DE LA TRIGONOMETRÍA

Panorama Corrección de un error de navegación

Un bote de motor sale de Naples, Florida, hacia Key West, a 150 millas de distancia. Aunque lleva una velocidad constante de 15 millas por hora, navega entre fuertes corrientes y vientos cruzados; la tripulación descubre, después de 4 horas, que el bote está fuera de curso por 20°.

(a) ¿A qué distancia de Key West está el bote en ese momento?

(b) ¿Con qué ángulo debe girar para corregir su curso?

(c) ¿Cuánto tiempo de más duró el viaje debido a la desviación del curso? (Suponga que la velocidad permanece en 15 millas por hora.)

[Ejemplo 3 de la sección 8.2.] ■

En el capítulo 5 utilizamos las funciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos, es decir, triángulos con un ángulo de 90°. En este capítulo utilizaremos las funciones trigonométricas para resolver triángulos oblicuos, es decir, triángulos que no tienen un ángulo de 90°. Para ello desarrollaremos la ley de los senos (sección 8.1) y la ley de los cosenos (sección 8.2). Además de calcular los lados y ángulos de tales triángulos, deduciremos fórmulas para determinar su área (sección 8.3).

Las secciones finales del capítulo tratan acerca de las coordenadas polares (una alternativa a las coordenadas rectangulares para localizar puntos en el plano), la graficación en coordenadas polares y la determinación de raíces de números complejos (teorema de De Moivre).

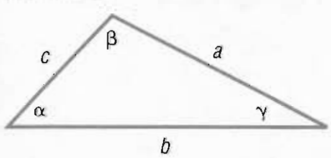
8.1 Ley de los senos

Si ninguno de los ángulos de un triángulo es recto, el triángulo es **oblicuo**. Así, un triángulo oblicuo tendrá tres ángulos agudos, o bien dos ángulos agudos y un ángulo obtuso (un ángulo entre 90° y 180°). *Véase* la figura 1.

FIGURA 1
Triángulos oblicuos

(a) Todos los ángulos son agudos **(b)** Dos ángulos agudos y uno obtuso

FIGURA 2



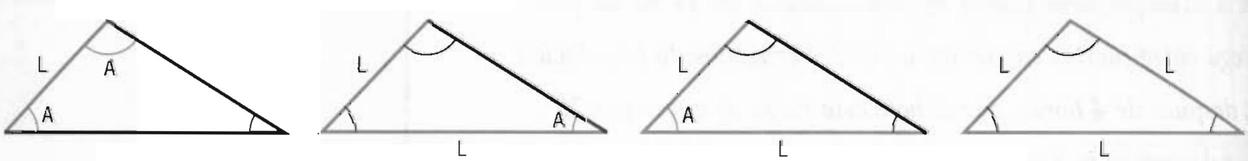
En el análisis siguiente, siempre señalaremos un triángulo oblicuo de modo que el lado a sea opuesto al ángulo α, el lado b opuesto al ángulo β y el lado c opuesto al ángulo γ, como se muestra en la figura 2.

Resolver un triángulo oblicuo significa determinar las longitudes de sus lados y la medida de sus ángulos. Para hacer esto, necesitamos conocer la longitud de un lado junto con otros dos datos: dos ángulos, o los otros dos lados, o un ángulo y el otro lado.* De ese modo, existen cuatro posibilidades:

CASO 1:	Se conocen un lado y dos ángulos (LAA o ALA).
CASO 2:	Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).
CASO 3:	Se conocen dos lados y el ángulo entre ellos (LAL).
CASO 4:	Se conocen tres lados (LLL).

La figura 3 ilustra los cuatro casos.

FIGURA 3



Caso 1: LAA o ALA Caso 2: LLA Caso 3: LAL Caso 4: LLL

La **ley de los senos** se utiliza para resolver triángulos de los casos 1 y 2.

*Recuerde de la geometría plana que si se conocen los tres ángulos de un triángulo eso determina una familia de *triángulos semejantes*, es decir, triángulos de la misma forma pero con diferentes tamaños.

Teorema ley de los senos

Para un triángulo con lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ, respectivamente,

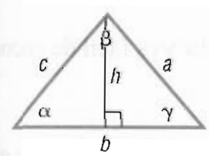
$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{1}$$

Demostración

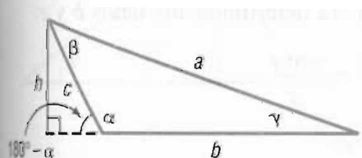
Para demostrar la ley de los senos trazamos una altura de longitud h desde uno de los vértices del triángulo en cuestión. La figura 4(a) muestra h para un triángulo con tres ángulos agudos y la figura 4(b) muestra h para un triángulo con un ángulo obtuso. En cada caso, trazamos la altura desde el vértice β. Con cualquiera de las figuras, tenemos

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{h}{a}$$

FIGURA 4



(a)



(b)

de donde

$$h = a \operatorname{sen}\gamma \tag{2}$$

De la figura 4(a), también tenemos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{c}$$

de donde

$$h = c \operatorname{sen}\alpha \tag{3}$$

La figura 4(b) implica que

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180° - \alpha) = \frac{h}{c}$$

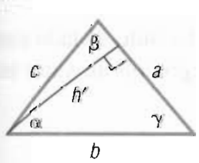
y de nuevo

$$h = c \operatorname{sen}\alpha$$

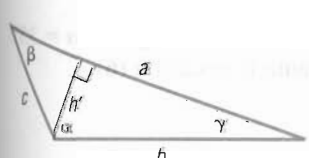
Así, ya sea que el triángulo tenga tres ángulos agudos o dos ángulos agudos y uno obtuso, las ecuaciones (2) y (3) son válidas. Como resultado, podemos igualar las expresiones para h en las ecuaciones (2) y (3) y obtener

$$a \operatorname{sen}\gamma = c \operatorname{sen}\alpha$$

FIGURA 5



(a)



(b)

de donde

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{4}$$

De manera análoga, al trazar la altura h' desde el vértice del ángulo β como en la figura 5, podemos mostrar que

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{h'}{c} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{h'}{b}$$

Así,

$$h' = c \operatorname{sen}\beta = b \operatorname{sen}\gamma$$

y

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \tag{5}$$

Al combinar las ecuaciones (4) y (5) obtenemos la ecuación (1), la ley de los senos. ∎

Al aplicar la ley de los senos para resolver triángulos utilizamos el hecho de que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°; es decir,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \tag{6}$$

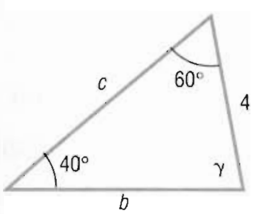
Nuestros dos primeros ejemplos muestran la forma de resolver un triángulo cuando se conocen un lado y dos ángulos (Caso 1: LAA o ALA).

EJEMPLO 1 *Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LAA*

Resuelva el triángulo: $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $a = 4$

Solución La figura 6 muestra el triángulo por resolver. El tercer ángulo γ es fácil de encontrar con la ecuación (6):

FIGURA 6



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$40° + 60° + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 80°$$

Ahora utilizamos la ley de los senos (dos veces) para determinar los lados b y c:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

Como $a = 4$, $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, y $\gamma = 80°$, tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}40°}{4} = \frac{\operatorname{sen}60°}{b} \qquad \frac{\operatorname{sen}40°}{4} = \frac{\operatorname{sen}80°}{c}$$

De ese modo,

$$b = \frac{4\operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}40°} \underset{\text{Con una calculadora}}{\approx} 5.39 \qquad c = \frac{4\operatorname{sen}80°}{\operatorname{sen}40°} \underset{\text{Con una calculadora}}{\approx} 6.13$$

∎

Observe que en el ejemplo 1 determinamos b y c utilizando el lado conocido a. Esto es mejor que determinar primero b y trabajar luego con un valor redondeado de b para calcular c.

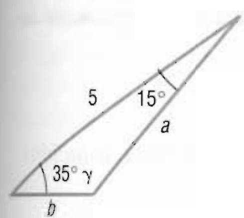
EJEMPLO 2 *Uso de la ley de los senos para determinar un triángulo ALA*

Resuelva el triángulo: $\alpha = 35°$, $\beta = 15°$, $c = 5$

Solución La figura 7 ilustra el triángulo por resolver. Como conocemos dos ángulos ($\alpha = 35°$ y $\beta = 15°$), es fácil determinar el tercer ángulo mediante la ecuación (6):

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$35° + 15° + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 130°$$

FIGURA 7



Ahora conocemos los tres ángulos y un lado ($c = 5$) del triángulo. Para determinar los otros dos lados, a y b, utilizamos dos veces la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 35^\circ}{a} = \frac{\operatorname{sen} 130^\circ}{5} \qquad \frac{\operatorname{sen} 15^\circ}{b} = \frac{\operatorname{sen} 130^\circ}{5}$$

$$a = \frac{5 \operatorname{sen} 35}{\operatorname{sen} 130} \approx 3.74 \qquad b = \frac{5 \operatorname{sen} 15^\circ}{\operatorname{sen} 130^\circ} \approx 1.69$$

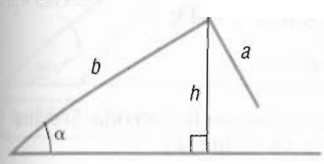
■

Nota: En los siguientes ejemplos y ejercicios, a menos que se indique lo contrario, mediremos los ángulos en grados y los redondearemos hasta una cifra decimal; y redondearemos todos los lados hasta dos cifras decimales. Para evitar errores de redondeo al utilizar una calculadora, guardaremos los valores no redondeados en la memoria para utilizarlos en cálculos posteriores.

■ Ahora resuelva el problema 1.

El caso ambiguo

FIGURA 8



El caso 2 (LLA), que se aplica a triángulos donde se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se conoce como **el caso ambiguo** pues la información resultante puede producir un triángulo, dos triángulos o ninguno. Supongamos que conocemos los lados a y b y el ángulo α, como nos muestra la figura 8. La clave para determinar los triángulos posibles (si existen) que pueden formarse a partir de la información dada, recae principalmente en la altura h y el hecho de que $h = b \operatorname{sen} \alpha$.

Ningún triángulo: Si $a < b \operatorname{sen} \alpha = h$, está claro que el lado a no es lo bastante grande para formar un triángulo. *Véase* la figura 9.

Un triángulo rectángulo: Si $a = b \operatorname{sen} \alpha = h$, entonces el lado a tiene la medida justa para formar un triángulo rectángulo. *Véase* la figura 10.

FIGURA 9
$a < b \operatorname{sen} \alpha$

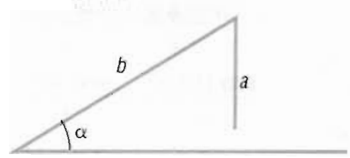
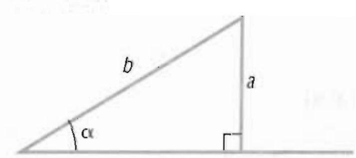


FIGURA 10
$a = b \operatorname{sen} \alpha$



Dos triángulos: Si $a < b$ y $h = b \operatorname{sen} \alpha < a$, entonces podemos formar dos triángulos distintos a partir de la información dada. *Véase* la figura 11.

Un triángulo: Si $a \geq b$, entonces sólo se puede formar un trángulo. *Véase* la figura 12.

FIGURA 11
$b \operatorname{sen} \alpha < a$ y $a < b$

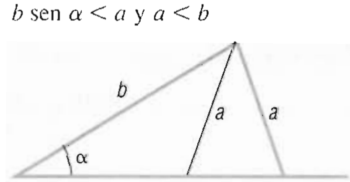
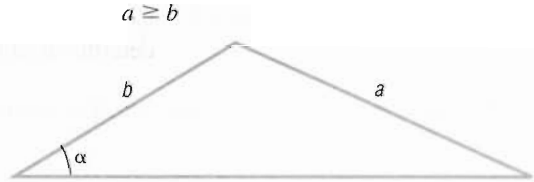


FIGURA 12
$a \geq b$



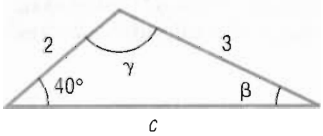
Por fortuna, no tenemos que confiar en una figura para obtener la conclusión correcta en el caso ambiguo. La ley de los senos nos conduce a la determinación correcta. Veamos cómo.

EJEMPLO 3 *Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LLA (una solución)*

Resolver el triángulo: $a = 3$, $b = 2$, $\alpha = 40°$

Solución *Véase* la figura 13(a). Como conocemos $a = 3$, $b = 2$, y $\alpha = 40°$, utilizamos la ley de los senos para determinar β:

FIGURA 13(a)



$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

Entonces

$$\frac{\operatorname{sen} 40°}{3} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{2 \operatorname{sen} 40°}{3} \approx 0.43$$

Existen dos ángulos β, $0° < \beta < 180°$, para los que $\operatorname{sen}\beta \approx 0.43$:

$$\beta \approx 25.4° \quad \text{y} \quad \beta \approx 154.6°$$

[**Nota:** aquí hemos calculado β mediante el valor de sen β guardado en la memoria. Si utiliza el valor redondeado, sen $\beta \approx 0.43$, obtendrá resultados un poco distintos.]

Descartamos la segunda posibilidad, pues $\alpha = 40°$, lo que hace que $\alpha + \beta \approx 194.6° > 180°$. Ahora, con $\beta \approx 25.4°$, tenemos

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 40° - 25.4° = 114.6°$$

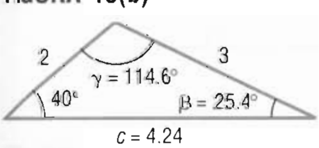
Ahora podemos determinar el lado c mediante la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 114.6°}{c} = \frac{\operatorname{sen} 40°}{3}$$

$$c = \frac{3 \operatorname{sen} 114.6°}{\operatorname{sen} 40°} \approx 4.24$$

FIGURA 13(b)



La figura 13(b) muestra el triángulo resuelto. ∎

EJEMPLO 4 *Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LLA (dos soluciones)*

Resolver el triángulo: $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 35°$

Solución Como conocemos $a = 6$, $b = 8$, y $\alpha = 35°$, utilizamos la ley de los senos para determinar el ángulo β:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

Entonces

$$\frac{\text{sen } 35°}{6} = \frac{\text{sen } \beta}{8}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{8 \text{ sen } 35°}{6} \approx 0.76$$

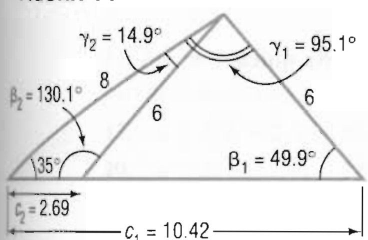
$$\beta_1 \approx 49.9° \quad \text{o} \quad \beta_2 \approx 130.1°$$

Para ambas posibilidades tenemos que $\alpha + \beta < 180°$. Por lo tanto, hay dos triángulos, uno con el ángulo $\beta = \beta_1 \approx 49.9°$ y el otro con el ángulo $\beta = \beta_2 \approx 130.1°$. El tercer ángulo γ es

$$\gamma_1 = 180° - \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha = 35° \\ \beta_1 = 49.9°}}{\alpha - \beta_1} \approx 95.1° \quad \text{o} \quad \gamma_2 = 180° - \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha = 35° \\ \beta_2 = 130.1°}}{\alpha - \beta_2} \approx 14.9°$$

El tercer lado c satisface la ley de los senos, de modo que

FIGURA 14



$$\frac{\text{sen } \gamma}{c} = \frac{\text{sen } \alpha}{a}$$

$$\frac{\text{sen } 95.1°}{c_1} = \frac{\text{sen } 35°}{6} \qquad \text{o} \qquad \frac{\text{sen } 14.9°}{c_2} = \frac{\text{sen } 35°}{6}$$

$$c_1 = \frac{6 \text{ sen } 95.1°}{\text{sen } 35°} \approx 10.42 \qquad c_2 = \frac{6 \text{ sen } 14.9°}{\text{sen } 35°} \approx 2.69$$

La figura 14 muestra los dos triángulos obtenidos. ■

EJEMPLO 5 *Uso de la ley de los senos para resolver un triángulo LLA (Sin solución)*

Resolver el triángulo: $a = 2$, $c = 1$, $\gamma = 50°$

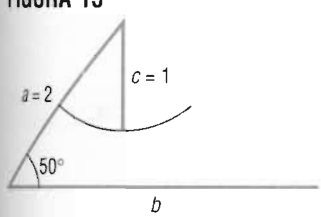
Solución Como conocemos $a = 2$, $c = 1$, y $\gamma = 50°$, utilizamos la ley de los senos para determinar el ángulo α:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

$$\frac{\text{sen } \alpha}{2} = \frac{\text{sen } 50°}{1}$$

$$\text{sen } \alpha = 2 \text{ sen } 50° \approx 1.53$$

FIGURA 15



No existe un ángulo α para el cual sen $\alpha > 1$. Por lo tanto, no existe un triángulo con las medidas dadas. La figura 15 muestra los datos proporcionados. Observe que no importa la posición en que pretendamos colocar el lado c, éste nunca cortará al lado b para formar un triángulo. ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

Problemas de aplicación

La ley de los senos sirve de manera especial para resolver ciertos problemas de aplicación.

EJEMPLO 6 *Rescate en el mar*

La estación Zulú de los guardacostas se encuentra a 120 millas al oeste de la estación Rayos X. Un barco en el mar envía una llamada de auxilio la cual es recibida por ambas estaciones. La llamada a la estación Zulú indica que la posición del barco es 40° al este del norte; la llamada a la estación Rayos X indica que la posición del barco es 30° al oeste del norte.

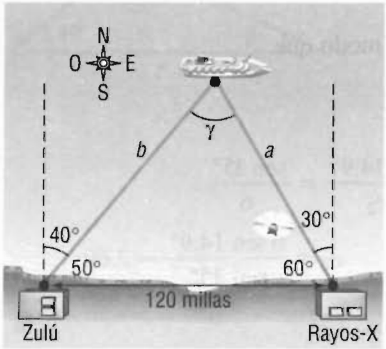
(a) ¿A qué distancia del barco se encuentra cada estación?

(b) Si un helicóptero que puede volar a 200 millas por hora sale desde la estación más cercana al barco, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a éste?

Solución (a) La figura 16 muestra la situación. Vemos que el ángulo γ es

$$\gamma = 180° - 50° - 60° = 70°$$

FIGURA 16



Ahora podemos utilizar la ley de los senos para determinar las dos distancias a y b:

$$\frac{\operatorname{sen} 50°}{a} = \frac{\operatorname{sen} 70°}{120}$$

$$a = \frac{120 \operatorname{sen} 50°}{\operatorname{sen} 70°} \approx 97.82 \text{ millas}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 70°}{120}$$

$$b = \frac{120 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 70°} \approx 110.59 \text{ millas}$$

Así, la estación Zulú está a casi 111 millas del barco mientras que la Rayos X está a casi 98 millas.

(b) Calculamos el tiempo t necesario para llegar al barco desde la estación Rayos X mediante la fórmula

$$(\text{Velocidad}, v)(\text{Tiempo}, t) = \text{Distancia}, a$$

Entonces

$$t = \frac{a}{v} = \frac{97.82}{200} \approx 0.49 \text{ horas} \approx 29 \text{ minutos}$$

El helicóptero tardará casi 29 minutos en llegar hasta el barco. ■

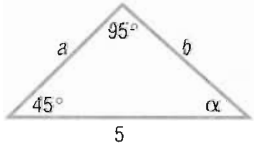
■ Ahora resuelva el problema 29.

8.1

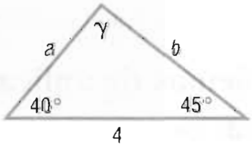
Ejercicio 8.1

En los problemas del 1 al 8 resuelva cada triángulo.

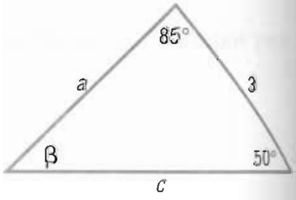
1.



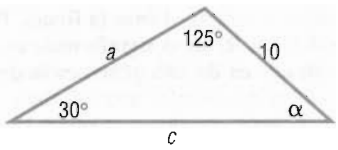
2.



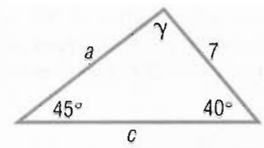
3.



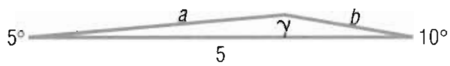
4.



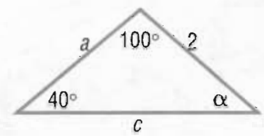
5.



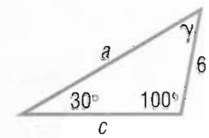
6.



7.



8.



En los problemas del 9 al 16 resuelva cada triángulo.

9. $\alpha = 40°, \beta = 20°, a = 2$

10. $\alpha = 50°, \gamma = 20°, a = 3$

11. $\beta = 70°, \gamma = 10°, b = 5$

12. $\alpha = 70°, \beta = 60°, c = 4$

13. $\alpha = 110°, \gamma = 30°, c = 3$

14. $\beta = 10°, \gamma = 100°, b = 2$

15. $\alpha = 40°, \beta = 40°, c = 2$

16. $\beta = 20°, \gamma = 70°, a = 1$

En los problemas del 17 al 28 se proporcionan dos lados y un ángulo. Determine si esta información produce un triángulo, dos triángulos o ninguno. Resuelva los triángulos obtenidos.

17. $a = 3, b = 2, \alpha = 50°$

18. $b = 4, c = 3, \beta = 40°$

19. $b = 5, c = 3, \beta = 100°$

20. $a = 2, c = 1, \alpha = 120°$

21. $a = 4, b = 5, \alpha = 60°$

22. $b = 2, c = 3, \beta = 40°$

23. $b = 4, c = 6, \beta = 20°$

24. $a = 3, b = 7, \alpha = 70°$

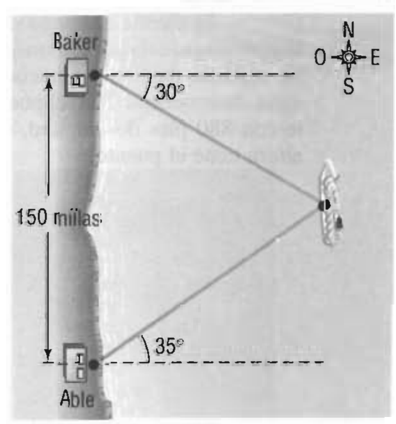
25. $a = 2, c = 1, \gamma = 100°$

26. $b = 4, c = 5, \beta = 95°$

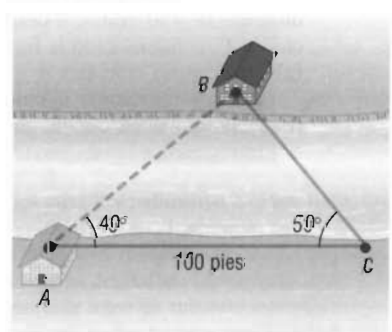
27. $a = 2, c = 1, \gamma = 25°$

28. $b = 4, c = 5, \beta = 40°$

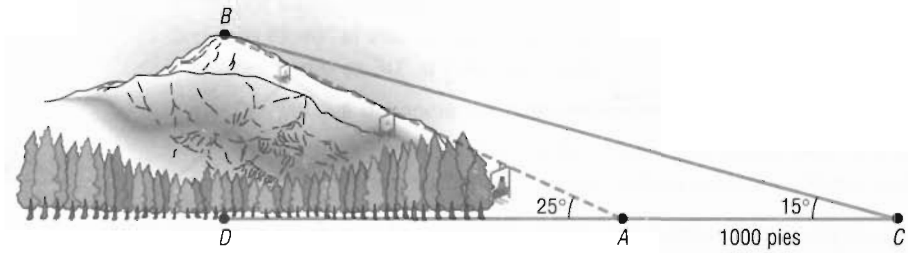
29. *Rescate en el mar.* La estación Able de los guardacostas se encuentra a 150 millas al sur de la estación Baker. Un barco en el mar envía una llamada de auxilio la cual es recibida por ambas estaciones. La llamada a la estación Able indica que la posición del barco es 35° al norte del este; la llamada a la estación Baker indica que la posición del barco es 30° al sur del este.
(a) ¿A qué distancia del barco se encuentra cada estación?
(b) Si un helicóptero que puede volar a 200 millas por hora sale desde la estación más cercana al barco, ¿cuánto tiempo tardará en llegar a éste?



30. *Topografía.* *Véase* la figura. Para determinar la distancia de la casa en el punto A a la casa en B, un topógrafo mide un ángulo BAC de 40°, después camina 100 pies hasta C y mide el ángulo ACB, que es de 50°. ¿Cuál es la distancia de A a B?

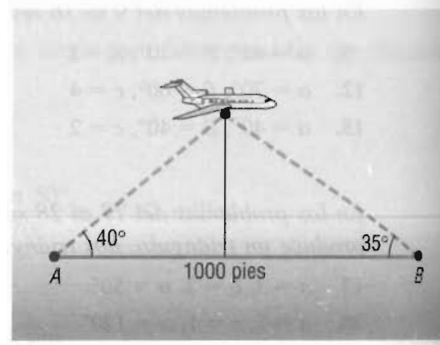


31. *Determinación de la longitud de un ascensor para una pista de esquí.* *Véase* la figura. Para determinar la longitud de un ascensor propuesto para una pista de esquí desde A hasta B, un topógrafo mide el ángulo DAB, que es de 25°, luego camina 1000 pies hasta C y mide el ángulo ACB, que es de 15°. ¿Cuál es la distancia de A a B?

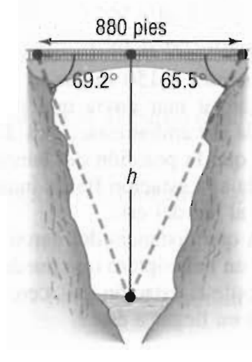


32. *Determinación de la altura de una montaña.* Utilice la ilustración del problema 31 para determinar la altura BD de la montaña en el punto B.

33. *Determinación de la altitud de un avión.* Un avión es observado por dos personas que se encuentran a 1000 pies de distancia una de otra. Cuando el avión pasa por la recta que los une, cada observador mide el ángulo de elevación al avión, como indica la figura. ¿A qué altura se encuentra el avión?



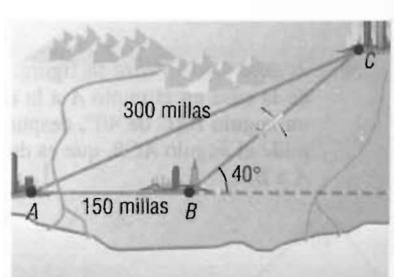
34. *Determinación de la altura del puente sobre Royal Gorge.* El puente más alto del mundo es el tendido sobre Royal Gorge, del río Arkansas en Colorado, Estados Unidos.* Se realizan mediciones hacia el mismo punto al nivel del agua, directamente bajo el puente, desde cada lado del puente con 880 pies de longitud, como muestra la figura. ¿Qué altura tiene el puente?



35. *Navegación.* Un avión vuela de la ciudad A a la ciudad B, una distancia de 150 millas, y después gira 40° para dirigirse a la ciudad C, como muestra la figura.

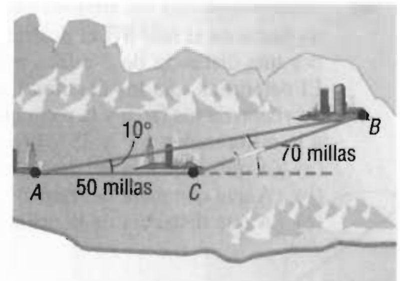
(a) Si entre las ciudades A y C hay 300 millas, ¿a qué distancia se encuentra la ciudad B de la ciudad C?

(b) ¿Con qué ángulo debe girar el piloto en la ciudad C para regresar a la ciudad A?

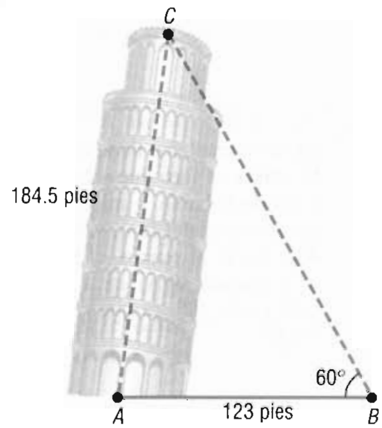


**Fuente:* Libro Guiness de récords mundiales.

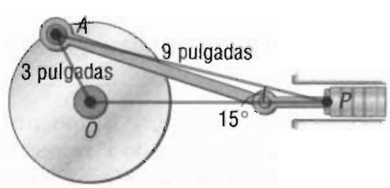
36. *Tiempo perdido debido a un error de navegación.* En un intento por ir de la ciudad A a la ciudad B un avión siguió un curso con 10° de error, como muestra la figura. Después de volar 50 millas el piloto corrigió el curso girando en el punto C y volando otras 70 millas. Si la velocidad constante del avión era de 250 millas por hora, ¿cuánto tiempo se perdió debido al error?



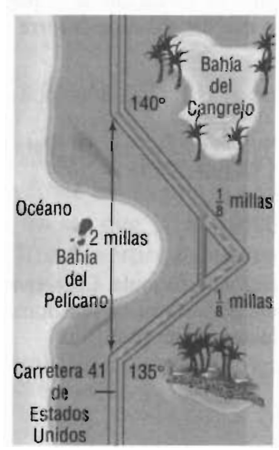
37. *Cálculo de la inclinación de la torre inclinada de Pisa.* La famosa torre inclinada de Pisa tenía originalmente una altura de 184.5 pies.* Después de caminar 123 pies desde la base de la torre, el ángulo de elevación hasta la cima resulta ser de 60°. Determine el ángulo CAB indicado en la figura. Determine además la distancia perpendicular de C a AB.



38. *Ejes de bielas en automóviles.* En cierto automóvil el eje de las bielas mide 3 pulgadas y la varilla de unión 9 pulgadas (*véase* la figura). Cuando el ángulo OPA mide 15°, ¿a qué distancia se encuentra el pistón (P) del centro (O) del eje de la biela?



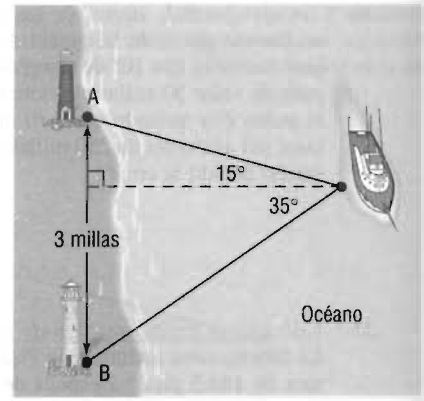
39. *Construcción de una carretera.* La carretera 41 de Estados Unidos, cuyas direcciones principales son norte-sur, está en construcción a lo largo de la costa de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye el trazo recto de la carretera. Como el costo de un puente es demasiado alto, los ingenieros deciden rodear la bahía. La ilustración muestra la trayectoria decidida y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de la carretera necesaria para rodear la bahía?



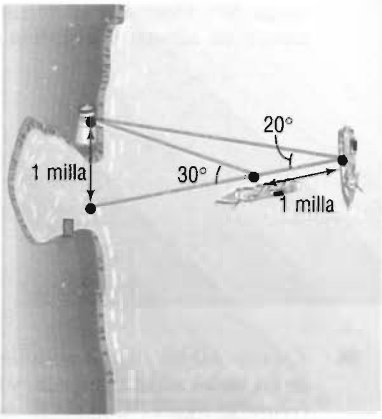
*En su informe de 1986 acerca del frágil campanario de 7 siglos de antigüedad, los científicos afirmaron en Pisa, Italia, que la torre inclinada de Pisa había incrementado su famosa inclinación en 1 milímetro, o 0.04 pulgadas (casi el promedio anual), aunque en los dos años anteriores la inclinación se había reducido a casi la mitad de esa cantidad.

Últimas noticias, Pisa, Italia, septiembre de 1995. La torre inclinada de Pisa se ha desplazado súbitamente, a pesar de los esfuerzos por estabilizarla, afirmaron los periódicos italianos el domingo. La torre, construida sobre un subsuelo inestable entre 1174 y 1350 como campanario para la catedral cercana, se movió recientemente 0.07 pulgadas en una noche. La torre quedó cerrada al turismo desde 1990, pero se espera abrirla parcialmente el próximo año.

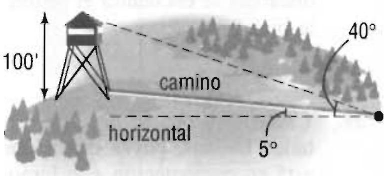
40. *Determinación de distancias en el mar* El timonel de un barco en el mar avista dos faros que sabe están separados por una distancia de 3 millas a lo largo de una costa recta. Él determina que los ángulos formados entre las dos líneas de visión de los faros y la recta que va directamente del barco a la orilla miden 15° y 35°. *Véase* la ilustración.
(a) ¿A qué distancia del faro A se encuentra el barco?
(b) ¿A qué distancia del faro B se encuentra el barco?
(c) ¿A qué distancia de la orilla se encuentra el barco?



41. *Determinación de distancias en el mar* El timonel de un barco en el mar tiene a la vista el puerto donde debe atracar. Él avista un faro que sabe se encuentra a una milla de la entrada de la bahía, y mide el ángulo entre las líneas de visión del puerto y del faro, siendo dicho ángulo de 20°. Dirigiéndose hacia el puerto, el timonel repite la medición después de 5 minutos de viajar a 12 millas por hora. Si el nuevo ángulo es de 30°, ¿a qué distancia se encuentra el barco de la bahía?



42. *Determinación de distancias* Un guardia forestal va por un camino inclinado 5° respecto a la horizontal, directamente hacia una torre de observación de 100 pies de altura. Cuando el ángulo de elevación de la parte superior de la torre es de 40° ¿a qué distancia de la torre se encuentra el guardia?



43. *Fórmula de Mollweide* Para cualquier triángulo, la **fórmula de Mollweide** (en honor de Karl Mollweide, 1774-1825) establece que

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma}$$

Deduzca esta fórmula. [*Sugerencia:* utilice la ley de los senos y luego una fórmula suma-producto.] Observe que la fórmula de Mollweide relaciona los seis datos de un triángulo. Debido a ello en ocasiones se le utiliza para verificar la solución de un triángulo.

44. *Fórmula de Mollweide* Otra presentación de la fórmula de Mollweide es

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

Dedúzcala.

45. Para cualquier triángulo, deduzca la fórmula

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$

[*Sugerencia:* utilice el hecho de que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \beta - \gamma)$.]

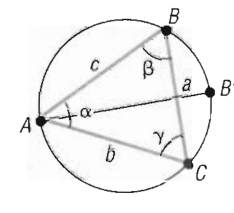
46. *Ley de las tangentes.* Para cualquier triángulo, deduzca la **ley de las tangentes:**

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\tan\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

[*Sugerencia:* utilice la fórmula de Mollweide.]

47. *Circunscribir un triángulo.* Muestre que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}=\frac{1}{2r}$$



donde r es el radio del círculo que circunscribe al triángulo ABC cuyos lados son a, b, c, como muestra la figura anexa. [*Sugerencia:* trace el diámetro AB'. Entonces β = ángulo ABC = ángulo $AB'C$ y ángulo $ACB' = 90°$.]

48. Plantee tres problemas con triángulos oblicuos. Uno debe tener como respuesta un triángulo, el segundo dos triángulos y el tercero ninguno.

8.2 Ley de los cosenos

En la sección 8.1 utilizamos la ley de los senos para resolver el caso 1 (LAA o ALA) y el caso 2 (LLA) de un triángulo oblicuo. En esta sección deduciremos la ley de los cosenos y la utilizaremos para resolver los otros casos, 3 y 4.

CASO 3: Se conocen dos lados y el ángulo entre ellos (LAL).
CASO 4: Se conocen tres lados (LLL).

Teorema ley de los cosenos

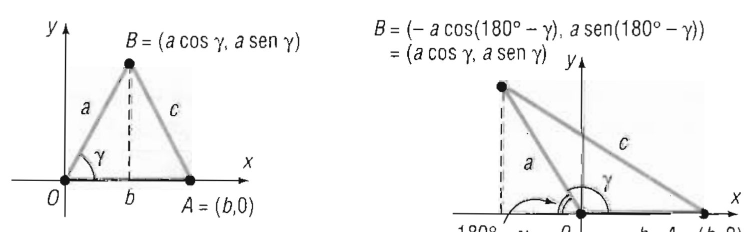
Para un triángulo de lados a, b, c y ángulos opuestos α, β, γ, respectivamente,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad (1)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \qquad (2)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \qquad (3)$$

Demostración Sólo demostraremos la fórmula (1). Las fórmulas (2) y (3) se pueden demostrar con el mismo argumento.

Primero colocaremos un triángulo en un sistema de coordenadas rectangulares, de manera estratégica, de modo que el vértice del ángulo γ quede en el origen y el lado b esté a lo largo del eje x positivo. Ya sea que γ sea agudo, como en la figura 17(a), o bien obtuso, como en la figura 17(b), el vértice B tiene coordenadas ($a\cos\gamma$, $a\operatorname{sen}\gamma$). El vértice A tiene coordenadas $(b,0)$.

FIGURA 17



(a) El ángulo γ es agudo

(b) El ángulo γ es obtuso

Ahora podemos utilizar la fórmula de la distancia para calcular c^2:

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a\cos\gamma)^2 + (0 - a \operatorname{sen}\gamma)^2 \\ &= b^2 - 2ab\cos\gamma + a^2\cos^2\gamma + a^2\operatorname{sen}^2\gamma \\ &= a^2(\cos^2\gamma + \operatorname{sen}^2\gamma) + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

■

Podemos enunciar cada una de las fórmulas (1), (2) y (3) de la manera siguiente:

Teorema ley de los cosenos El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble de su producto por el coseno del ángulo entre esos lados. ■

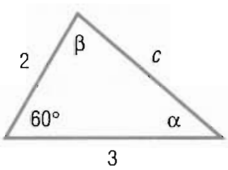
Observe que si el triángulo es rectángulo (por ejemplo, si $\gamma = 90°$), entonces la fórmula (1) se convierte en el familiar teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$. Así, el teorema de Pitágoras es un caso particular de la ley de los cosenos.

Ahora veremos cómo utilizar la ley de los cosenos para resolver el caso 3 (LAL), el cual se aplica a los triángulos en que conocemos dos lados y el ángulo entre ellos.

EJEMPLO 1 *Uso de la ley de los cosenos para resolver un triángulo LAL*

Resolver el triángulo: $a = 2$, $b = 3$, $\gamma = 60°$

FIGURA 18



Solución *Véase* la figura 18. La ley de los cosenos permite determinar con facilidad el tercer lado, c:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ &= 4 + 9 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos 60° \\ &= 13 - (12\cdot\tfrac{1}{2}) = 7 \\ c &= \sqrt{7} \end{aligned}$$

El lado c tiene como longitud $\sqrt{7}$. Para determinar los ángulos α y β podemos utilizar la ley de los senos o la de los cosenos. Es mejor utilizar la ley de los cosenos puesto que con ella obtenemos una ecuación con una solución. El uso de la ley de los senos conduce a una ecuación con dos soluciones, y tendríamos que verificar cuál de ellas se ajusta a los datos proporcionados. Así, optamos por utilizar las fórmulas (2) y (3) de la ley de los cosenos.

Para α:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ 2bc\cos\alpha &= b^2 + c^2 - a^2 \\ \cos\alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 7 - 4}{2\cdot 3\sqrt{7}} = \frac{12}{6\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \\ \alpha &\approx 40.9° \end{aligned}$$

Para β:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ \cos\beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4 + 7 - 9}{4\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \\ \beta &\approx 79.1° \end{aligned}$$

Observe que $\alpha + \beta + \gamma = 40.9° + 79.1° + 60° = 180°$, como se requiere. ■

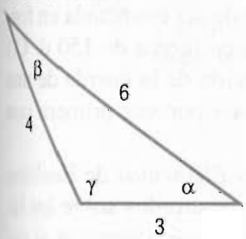
■ Ahora resuelva el problema 1.

El siguiente ejemplo muestra la forma de utilizar la ley de los cosenos cuando se conocen los tres lados de un triángulo, el caso 4 (LLL).

EJEMPLO 2 *Uso de la ley de los cosenos para resolver un triángulo LLL*

Resolver el triángulo: $a = 4$, $b = 3$, $c = 6$

FIGURA 19



Solución *Véase* la figura 19. Para determinar los ángulos α, β, y γ procedemos como en la última parte de la solución del ejemplo 1.

Para α:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9 + 36 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{29}{36}$$

$$\alpha \approx 36.3°$$

Para β:

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16 + 36 - 9}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{43}{48}$$

$$\beta \approx 26.4°$$

como conocemos α y β,

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta \approx 180° - 36.3° - 26.4° = 117.3°$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

EJEMPLO 3 *Corrección de un error de navegación*

Un bote de motor sale de Naples, Florida, hacia Key West, a 150 millas de distancia. Lleva una velocidad constante de 15 millas por hora pero navega con fuertes corrientes y vientos cruzados, la tripulación descubre, después de 4 horas, que el bote está fuera de curso por 20°.

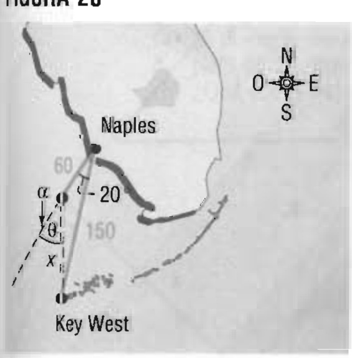
(a) ¿A qué distancia de Key West está el bote en ese momento?

(b) ¿Con qué ángulo debe girar para corregir su curso?

(c) ¿Cuánto tiempo se agregó al viaje debido a la desviación del curso? (Suponga que la velocidad se mantiene en 15 millas por hora.)

Solución *Véase* la figura 20. Con una velocidad de 15 millas por hora, el bote ha recorrido 60 millas después de 4 horas. Buscamos la distancia x del bote a Key West y el ángulo θ con el cual debe girar para corregir su curso.

FIGURA 20



(a) Para determinar x utilizamos la ley de los cosenos, puesto que conocemos dos lados y el ángulo entre ellos.

$$x^2 = 150^2 + 60^2 - 2(150)(60)\cos 20° = 9186$$

$$x = 95.8$$

El bote está a casi 96 millas de Key West.

(b) Ahora conocemos los tres lados de un triángulo, de modo que podemos utilizar la ley de los cosenos de nuevo para determinar el ángulo α opuesto al lado que mide 150 millas.

$$150^2 = 96^2 + 60^2 - 2(96)(60)\cos\alpha$$

$$9684 = -11{,}520\cos\alpha$$

$$\cos\alpha \approx -0.8406$$

$$\alpha \approx 147.2°$$

El bote debe virar con un ángulo de

$$\theta = 180° - \alpha \approx 180° - 147.2° = 32.8°$$

El bote debe virar con un ángulo aproximado de 33° para corregir su curso.

(c) La longitud total del viaje es entonces de 60 + 96 = 156 millas. Las 6 millas adicionales sólo requieren de unas 0.4 horas, o 24 minutos más, si se mantiene la velocidad de 15 millas por hora. ∎

■ Ahora resuelva el problema 25.

DATO HISTÓRICO

■ La ley de los senos era conocida vagamente mucho antes de ser enunciada en forma explícita por Nasîr ed-dîn (cerca de 1250 d. C.). Ptolomeo (cerca de 150 d. C.) tenía conocimiento de ella en una forma que utiliza una función de la cuerda de una circunferencia en vez de la función seno. Pero fue enunciada por vez primera con claridad en Europa por Regiomontano, en 1464.

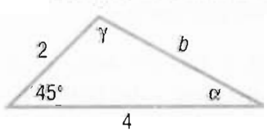
La ley de los cosenos aparece por primera vez en los *Elementos* de Euclides (Libro II), pero en forma disfrazada, donde los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos se suman y luego se resta un rectángulo que representa el coseno. Era conocida de esta forma por todos los matemáticos debido a su familiaridad con el trabajo de Euclides. Una de las presentaciones modernas de la ley de los cosenos (determinar el ángulo cuando se conocen los lados) fue enunciada por François Vièta (en 1593).

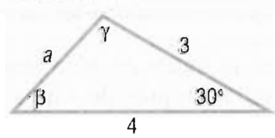
La ley de las tangentes (remítase al problema 46 del ejercicio 8.1) ya es obsoleta. Fue utilizada en vez de la ley de los cosenos debido a que esta última era inconveniente para el cálculo con tablas de logaritmos o reglas de cálculo. Sin embargo, la combinación de sumas y multiplicaciones se ha simplificado mucho en la actualidad con el uso de las calculadoras; de modo que la ley de las tangentes ha sido guardada en el armario junto con la regla de cálculo. ∎

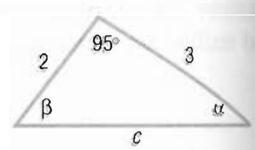
8.2

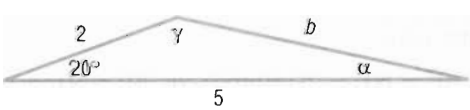
Ejercicio 8.2

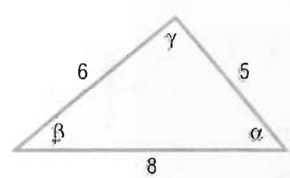
En los problemas del 1 al 8 resuelva cada triángulo.

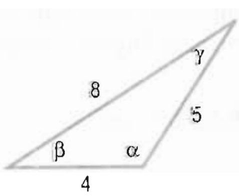
1.


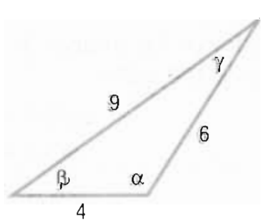
2.


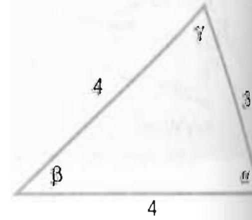
3.


4.


5.


6.


7.


8.


En los problemas del 9 al 24 resuelva cada triángulo.

9. $a = 3, b = 4, \gamma = 40°$ **10.** $a = 2, c = 1, \beta = 10°$ **11.** $b = 1, c = 3, \alpha = 80°$

12. $a = 6, b = 4, \gamma = 60°$ **13.** $a = 3, c = 2, \beta = 110°$ **14.** $b = 4, c = 1, \alpha = 120°$

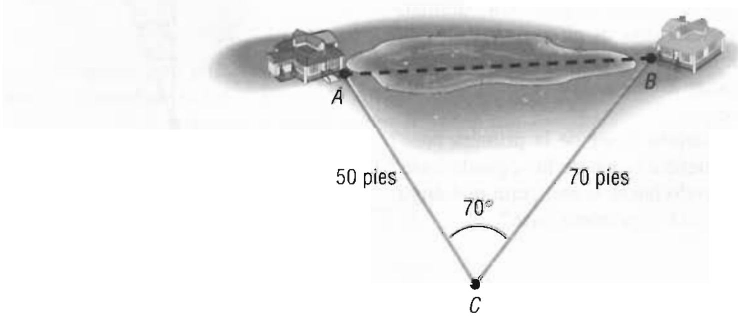
15. $a = 2, b = 2, \gamma = 50°$ **16.** $a = 3, c = 2, \beta = 90°$ **17.** $a = 12, b = 13, c = 5$

18. $a = 4, b = 5, c = 3$ **19.** $a = 2, b = 2, c = 2$ **20.** $a = 3, b = 3, c = 2$

21. $a = 5, b = 8, c = 9$ **22.** $a = 4, b = 3, c = 6$ **23.** $a = 10, b = 8, c = 5$

24. $a = 9, b = 7, c = 10$

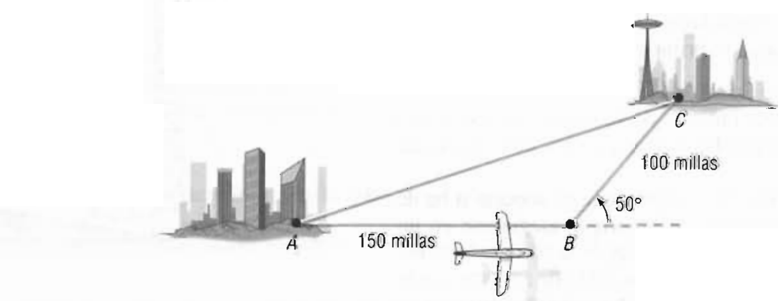
25. *Topografía.* Consulte la figura. Para determinar la distancia entre las casas A y B, un topógrafo mide el ángulo ACB y determina que mide 70°; después camina las distancias hacia cada casa, 50 y 70 pies, respectivamente. ¿A qué distancia se encuentran las casas entre sí?



26. *Navegación.* Un avión vuela de la ciudad A a la ciudad B, a una distancia de 150 millas, y después vira con un ángulo de 50° y se dirige hacia la ciudad C, a una distancia de 100 millas (*véase* la figura).

(a) ¿A qué distancia se encuentra la ciudad A de la ciudad C?

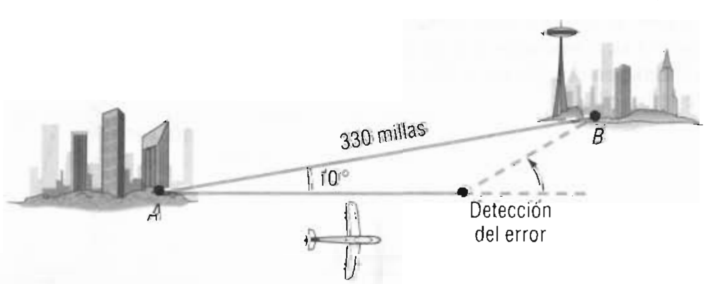
(b) ¿Con qué ángulo debe virar el piloto en la ciudad C para regresar a la ciudad A?



27. *Revisión de un plan de vuelo.* Al intentar volar de la ciudad A a la ciudad B, a una distancia de 330 millas, un piloto elige un rumbo con 10° de error, como indica la figura.

(a) Si el avión mantiene una velocidad promedio de 220 millas por hora y el error en la dirección se descubre después de 15 minutos, ¿con qué ángulo se debe girar la nave para dirigirse hacia la ciudad B?

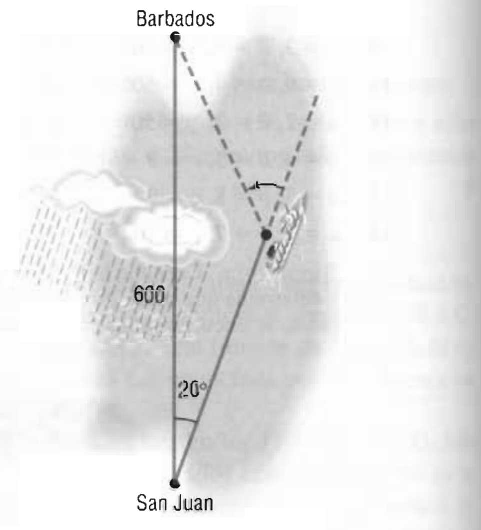
(b) ¿Qué nueva velocidad promedio debe mantener el piloto de modo que el tiempo total de vuelo sea de 90 minutos?



28. *Evitar una tormenta tropical.* Un crucero mantiene una velocidad promedio de 15 nudos al ir de San Juan, Puerto Rico, a Barbados, en las Antillas, a una distancia de 600 millas náuticas. Para evitar una tormenta tropical, el capitán sale de San Juan en una dirección de 20° respecto a la línea recta hacia Barbados. El capitán mantiene la velocidad de 15 nudos durante 10 horas, después de lo cual la ruta hacia Barbados está libre de tormentas.

(a) ¿Con qué ángulo debe girar entonces para dirigirse directamente a Barbados?

(b) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a Barbados, si mantiene la velocidad de 15 nudos?



29. *Campo de beisbol de las Grandes Ligas.* Un "diamante" de beisbol de las Grandes Ligas es en realidad un cuadrado de 90 pies por lado. El montículo de lanzamiento queda a 60.5 pies de la placa de *home*, sobre la recta que une *home* con la segunda base.

(a) ¿A qué distancia se encuentra *home* de la primera base?

(b) ¿A qué distancia se encuentra *home* de la segunda base?

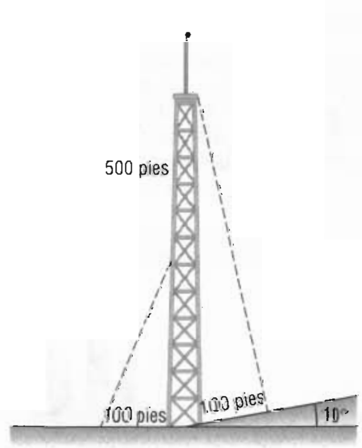
(c) Si un lanzador está mirando hacia *home*, ¿con qué ángulo debe girar para ver hacia la primera base?

30. *Campo de beisbol de Ligas Pequeñas.* De acuerdo con el reglamento oficial del beisbol de Ligas Pequeñas, un diamante es un cuadrado con 60 pies por lado. El montículo de lanzamiento queda a 46 pies de la placa de *home*, sobre la recta que une *home* con la segunda base.

(a) ¿A qué distancia se encuentra *home* de la primera base?

(b) ¿A qué distancia se encuentra *home* de la segunda base?

(c) Si un lanzador ve hacia *home*, ¿con qué ángulo debe girar para voltear hacia la primera base?

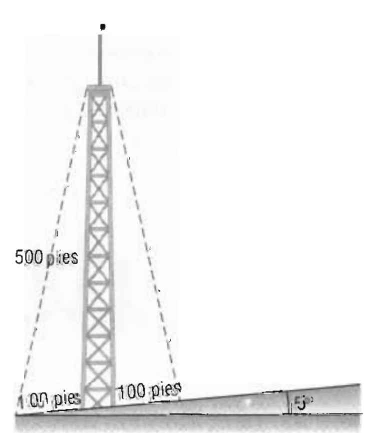


31. *Determinación de la longitud de un cable de soporte.* La altura de una torre de radio es de 500 pies y el piso a uno de sus lados tiene una pendiente hacia arriba, con ángulo de 10° (*véase* la figura).

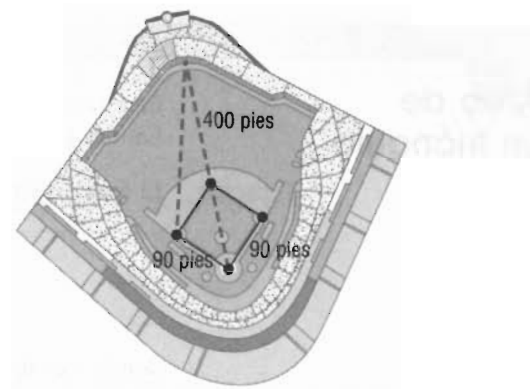
(a) ¿Cuál debe ser la longitud de un cable de soporte si ha de unirse a la parte superior de la torre y asegurarse en un punto sobre la pendiente a 100 pies de la base de la torre?

(b) ¿Cuál debe ser la longitud de otro cable de soporte si éste ha de conectarse a la mitad de la torre y asegurarse en un punto a 100 pies de la base?

32. *Determinación de la longitud de un cable de soporte.* Una torre de radio de 500 pies de altura está localizada en un lado de una colina que tiene una inclinación de 5° respecto a la horizontal (*véase* la figura). ¿Qué longitud deben tener dos cables de soporte si, conectados a la parte superior de la torre, deben asegurarse en dos puntos a 100 pies hacia arriba y hacia abajo de la base?



33. *Wrigley Field, casa de los Cachorros de Chicago.* La distancia de la placa de *home* a la parte más alejada del jardín central en el Wrigley Field es de 400 pies (*véase* la figura). ¿A qué distancia se encuentra dicha parte del jardín central de la tercera base?

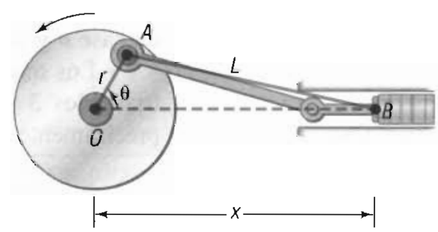


34. *Beisbol de Ligas Pequeñas.* La distancia de la placa de *home* a la parte más alejada del jardín central en el campo de liga pequeña de Oak Lawn es de 280 pies. ¿A qué distancia se encuentra esa parte del jardín central de la tercera base? [*Nota:* La distancia entre las bases en las Ligas Pequeñas es de 60 pies.]

35. *Varillas y pistones.* La varilla OA (*véase* la figura) gira en torno a un punto fijo O, de modo que A recorre un círculo de radio r. El punto A tiene unida otra varilla AB de longitud $L > r$ y el punto B queda unido a un pistón. Muestre que la distancia x entre el punto O y el punto B está dada por

$$x = r\cos\theta + \sqrt{r^2\cos^2\theta + L^2 - r^2}$$

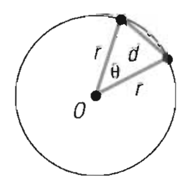
donde θ es el ángulo de rotación de la varilla OA.



36. *Geometría.* Muestre que la longitud d de una cuerda en un círculo de radio r está dada por la fórmula

$$d = 2r\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

donde θ es el ángulo central formado por los radios a los extremos de la cuerda (*véase* la figura). Utilice este resultado para deducir el hecho de que sen $\theta < \theta$, donde $\theta > 0$ se mide en radianes.



37. Para cualquier triángulo, muestre que

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. [*Sugerencia:* Utilice una fórmula para la mitad de un ángulo y la ley de los cosenos.]

38. Para cualquier triángulo, muestre que

$$\text{sen}\,\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

39. Utilice la ley de los cosenos para demostrar la identidad

$$\frac{\cos\alpha}{a} + \frac{\cos\beta}{b} + \frac{\cos\gamma}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$$

40. Escriba su estrategia para resolver un triángulo oblicuo.

8.3

Área de un triángulo

En esta sección deduciremos varias fórmulas para calcular el área A de un triángulo. La más familiar de ellas es la siguiente:

Teorema El área A de un triángulo es

$$A = \tfrac{1}{2}bh \qquad (1)$$

donde b es la base y h la altura trazada a esa base. ∎

Demostración La deducción de esta fórmula resulta sencilla una vez que construimos un rectángulo de base b y altura h en torno del triángulo. *Véanse* las figuras 21 y 22.

Los triángulos 1 y 2 de la figura 22 tienen la misma área, al igual que los triángulos 3 y 4. Por lo tanto, el área de un triángulo con base b y altura h es precisamente la mitad del área del rectángulo, que es bh. ∎

FIGURA 21
$A = \tfrac{1}{2}bh$

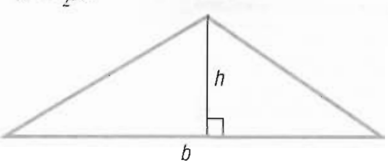


FIGURA 22

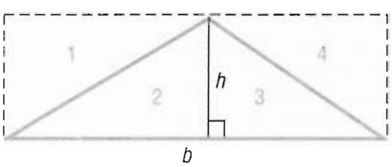
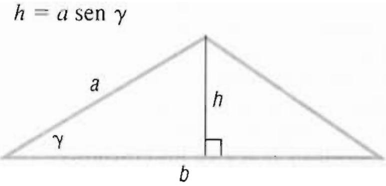


FIGURA 23
$h = a \text{ sen } \gamma$



Si conocemos la base b y la altura h a esa base, entonces podemos determinar con facilidad el área de un triángulo mediante la fórmula (1). Sin embargo, lo usual es que no se disponga de la información necesaria para poderla utilizar. Por ejemplo, supongamos que conocemos dos lados a y b y el ángulo entre ellos γ (*véase* la figura 23). Entonces, podemos determinar la altura h observando que

$$\frac{h}{a} = \text{sen } \gamma$$

de modo que

$$h = a \text{ sen } \gamma$$

Utilizamos este hecho en la fórmula (1) para obtener

$$A = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}b(a \text{ sen } \gamma) = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \gamma$$

Así, tenemos la fórmula

$$A = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } \gamma \qquad (2)$$

Al trazar las alturas desde los otros dos vértices del triángulo obtenemos las fórmulas correspondientes:

$$A = \tfrac{1}{2}bc \text{ sen } \alpha \qquad (3)$$
$$A = \tfrac{1}{2}ac \text{ sen } \beta \qquad (4)$$

Es más fácil recordar estas fórmulas mediante la siguiente expresión:

Teorema El área A de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo entre ellos. ∎

EJEMPLO 1 *Determinación del área de un triángulo LAL*

Determinar el área A de un triángulo tal que $a = 8$, $b = 6$, y $\gamma = 30°$.

Solución Utilizamos la fórmula (2) para obtener

$$A = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma = \tfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \operatorname{sen} 30° = 12$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Si conocemos los tres lados de un triángulo podemos utilizar la llamada **fórmula de Herón** (en honor de Herón de Alejandría), para determinar su área.

Teorema fórmula de Herón El área A de un triángulo con lados a, b y c es

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{5}$$

donde $s = \tfrac{1}{2}(a + b + c)$. ■

Demostración La demostración que daremos utiliza la ley de los cosenos y es un poco distinta de la establecida por Herón.

Por la ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

y las dos fórmulas para la mitad de un ángulo,

$$\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos \gamma}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 - \cos \gamma}{2}$$

implican que

$$\begin{aligned}
\cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{1 + \cos \gamma}{2} &= \frac{1 + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{2} \\
&= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab} \\
&= \frac{(a + b - c)(a + b + c)}{4ab} \underset{\substack{\uparrow \\ = a+b+c-2c \\ = 2s-2c}}{=} \frac{2(s-c) \cdot 2s}{4ab} = \frac{s(s-c)}{ab}
\end{aligned} \tag{6}$$

De manera análoga,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab} \tag{7}$$

Ahora utilicemos la fórmula (2) para el área:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \gamma \\ &= \frac{1}{2}ab \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} && \operatorname{sen} \gamma = \operatorname{sen} 2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ &= ab \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} && \text{Aplicamos las ecuaciones (6) y (7).} \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 *Determinación del área de un triángulo LLL*

Determinar el área de un triángulo con lados 4, 5 y 7.

Solución Sean $a = 4$, $b = 5$, y $c = 7$. Entonces

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c) = \tfrac{1}{2}(4 + 5 + 7) = 8$$

La fórmula de Herón implica entonces que el área A es

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{8 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 17.

DATO HISTÓRICO

■ La fórmula de Herón (también conocida como *fórmula de Hero*) es debida a Herón de Alejandría (cerca de 75 d. C.), quien, además de sus talentos matemáticos, tenía mucha habilidad para la ingeniería. En varios templos, sus dispositivos mecánicos producían efectos que parecían sobrenaturales y, supuestamente, los visitantes eran influidos hacia la generosidad. El libro *Métrica*, de Herón, acerca de la construcción de tales dispositivos, ha sobrevivido y fue descubierto en 1896 en la ciudad de Constantinopla.

La fórmula de Herón para el área de un triángulo causó cierto malestar en los matemáticos griegos, pues un producto con dos factores era un área y con tres factores era un volumen, pero el uso de cuatro factores parecía contradictorio en la época de Herón.

Karl Mollweide (1774-1875), matemático y astrónomo, descubrió las fórmulas que llevan su nombre (*véanse* los problemas 43 y 44 del ejercicio 8.1). Estas fórmulas no son importantes por sí mismas, sino que con frecuencia *simplifican* la deducción de otras fórmulas, como lo demuestran los problemas históricos 1 y 2 siguientes. ■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. Esta deducción de la fórmula de Herón utiliza la fórmula de Mollweide.

(a) Muestre que

$$\frac{s}{c} = \frac{\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)}{\operatorname{sen}(\gamma/2)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$. *Sugerencia:* Utilice la fórmula de Mollweide (*véase* el problema 43 en el ejercicio 8.1) y sume 1 a ambos lados. Después aplique el hecho de que

$$\operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{sen} \frac{180° - (\alpha + \beta)}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

(b) De manera análoga, muestre que

$$\frac{s}{a} = \frac{\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)}{\operatorname{sen}(o/2)} \quad \text{y} \quad \frac{s}{b} = \frac{\cos(\alpha/2)\cos(\gamma/2)}{\operatorname{sen}(\beta/2)}$$

(c) Utilice los resultados de las partes (a) y (b) para demostrar lo siguiente:

$$\frac{s-a}{a}=\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)\operatorname{sen}(\gamma/2)}{\operatorname{sen}(o/2)}\qquad \frac{s-b}{b}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)\operatorname{sen}(\gamma/2)}{\operatorname{sen}(\beta/2)}$$

$$\frac{s-c}{c}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)\operatorname{sen}(\beta/2)}{\operatorname{sen}(\gamma/2)}$$

(d) Ahora, forme el producto

$$\frac{s}{c}\cdot\frac{s-a}{a}\cdot\frac{s-b}{b}\cdot\frac{s-c}{c}$$

Después de cancelar, multiplique cada lado por $cabc$, utilice las fórmulas para el doble de un ángulo y use el hecho de que $A=\frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha=\frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\beta$. Obtendrá entonces la fórmula de Herón.

2. Utilizaremos de nuevo la fórmula de Mollweide para deducir otras fórmulas interesantes. (Ya las hemos obtenido de otra forma en los problemas 37 y 38 del ejercicio 8.2.)

(a) Sume 1 a ambos lados de la segunda forma de la fórmula de Mollweide (*véase* el problema 44 del ejercicio 8.1) y simplifique para obtener

$$\frac{s-b}{c}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\beta/2)}{\cos(\gamma/2)}$$

(b) De manera análoga, muestre que

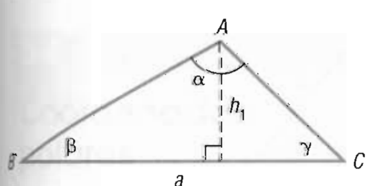
$$\frac{s-c}{b}=\frac{\operatorname{sen}(\alpha/2)\cos(\gamma/2)}{\cos(\beta/2)}$$

(c) Utilice los resultados de la parte (b) y del problema 1(b) y (c) para probar si

$$\cos^2\frac{\gamma}{2}=\frac{s(s-c)}{ab}\quad\text{y}\quad\operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{ab}$$

(d) Muestre que

$$\tan^2\frac{\gamma}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}$$



3. (a) Si h_1, h_2, y h_3 son las alturas de un triángulo trazadas desde A, B, y C, respectivamente (*véase* la figura), pruebe si

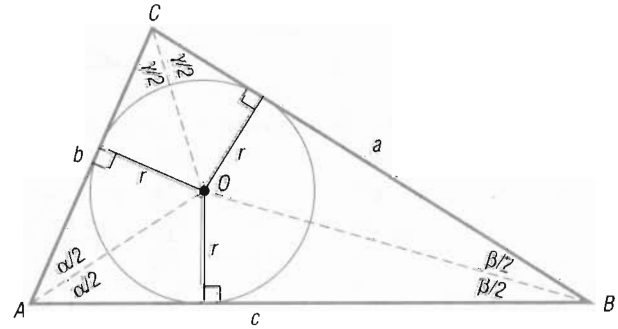
$$\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{s}{K}$$

donde K es el área del triángulo y $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. [*Sugerencia:* $h_1=2K/a$.]

(b) Muestre que una fórmula para la altura h desde un vértice hasta el lado opuesto a de un triángulo es

$$h=\frac{a\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}$$

4. *Círculo inscrito.* Las rectas que bisectan cada ángulo de un triángulo se cortan en un único punto O, y la distancia perpendicular r desde O a cada lado del triángulo es la misma. El círculo con centro en O y radio r es el *círculo inscrito* del triángulo (*véase* la figura).



(a) Aplique el problema 3(b) al triángulo OAB para mostrar que

$$r = \frac{c\,\text{sen}(\alpha/2)\,\text{sen}(\beta/2)}{\cos(\gamma/2)}$$

(b) Utilice los resultados de la parte (a) y el problema 1(c) para probar si

$$r = (s - c)\tan\frac{\gamma}{2}$$

(c) Muestre que

$$\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\gamma}{2} = \frac{s}{r}$$

(d) Verifique si el área K de un triángulo ABC es $K = rs$. Muestre entonces que

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

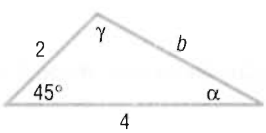
5. Determine las coordenadas del centro O del círculo inscrito en términos de a, b, c, α, β, y γ. Después, escriba la ecuación general del círculo inscrito. [*Sugerencia:* Utilice un sistema de coordenadas rectangulares, donde el vértice A está en el origen y el lado c a lo largo del eje x positivo.] ∎

8.3

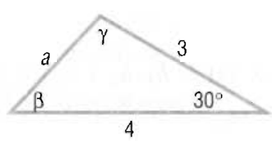
Ejercicio 8.3

En los problemas del 1 al 8 determine el área de cada triángulo. Redondee las respuestas a dos cifras decimales.

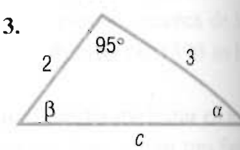
1.



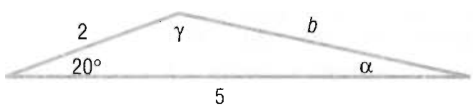
2.



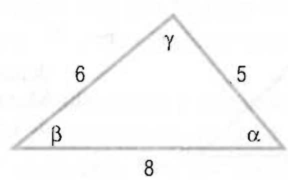
3.



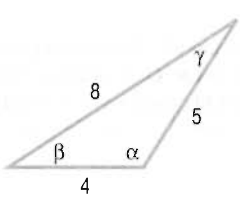
4.



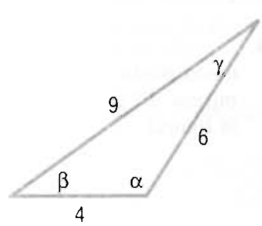
5.



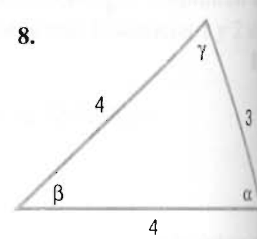
6.



7.



8.

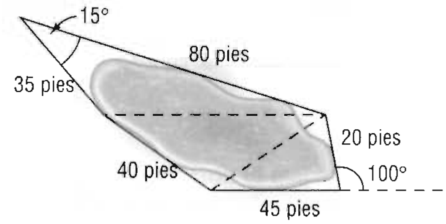


En los problemas del 9 al 24 determine el área de cada triángulo. Redondee las respuestas a dos cifras decimales.

9. $a = 3, b = 4, \gamma = 40°$
10. $a = 2, c = 1, \beta = 10°$
11. $b = 1, c = 3, \alpha = 80°$
12. $a = 6, b = 4, \gamma = 60°$
13. $a = 3, c = 2, \beta = 110°$
14. $b = 4, c = 1, \alpha = 120°$
15. $a = 2, b = 2, \gamma = 50°$
16. $a = 3, c = 2, \beta = 90°$
17. $a = 12, b = 13, c = 5$
18. $a = 4, b = 5, c = 3$
19. $a = 2, b = 2, c = 2$
20. $a = 3, b = 3, c = 2$
21. $a = 5, b = 8, c = 9$
22. $a = 4, b = 3, c = 6$
23. $a = 10, b = 8, c = 5$
24. $a = 9, b = 7, c = 10$

25. *Costo de un lote triangular.* Las dimensiones de un lote triangular son 100 por 50 por 75 pies. Si el precio del terreno es de \$3.00 por pie cuadrado, ¿cuánto cuesta el lote?

26. *Aproximación del área de un lago.* Para calcular aproximadamente el área de un lago, un topógrafo camina por todo el perímetro del lago y toma las medidas que aparecen en la ilustración anexa. Con esta técnica, ¿cuál es el área aproximada del lago? [*Sugerencia:* utilice la ley de los cosenos en los tres triángulos mostrados y después determine la suma de sus áreas.]



27. *Área de un triángulo.* Demuestre que el área A de un triángulo está dada por la fórmula

$$A = \frac{a^2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$

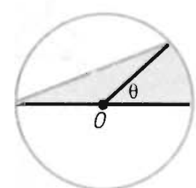
28. *Área de un triángulo.* Demuestre las otras dos formas de la fórmula dada en el problema 27,

$$A = \frac{b^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma}{2 \operatorname{sen} \beta} \quad \text{y} \quad A = \frac{c^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{2 \operatorname{sen} \gamma}$$

En los problemas del 29 al 36 utilice los resultados del problema 27 o 28 para determinar el área de cada triángulo. Redondee las respuestas a dos cifras decimales.

29. $\alpha = 40°, \beta = 20°, a = 2$
30. $\alpha = 50°, \gamma = 20°, a = 3$
31. $\beta = 70°, \gamma = 10°, b = 5$
32. $\alpha = 70°, \beta = 60°, c = 4$
33. $\alpha = 110°, \gamma = 30°, c = 3$
34. $\beta = 10°, \gamma = 100°, b = 2$
35. $\alpha = 40°, \beta = 40°, c = 2$
36. $\beta = 20°, \gamma = 70°, a = 1$

37. *Geometría.* Consulte la figura anexa, la cual muestra un círculo de radio r con centro en O. Determine el área A de la región sombreada en función del ángulo central θ.



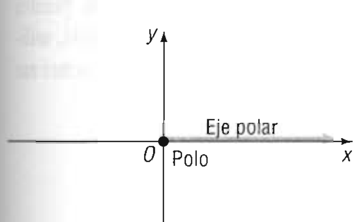
8.4

Coordenadas polares

Hasta ahora, siempre hemos utilizado un sistema de coordenadas rectangulares para localizar los puntos del plano. Pero ya estamos listos para desarrollar otro sistema, las *coordenadas polares*. Como veremos en breve, en muchos casos, las coordenadas polares ofrecen ciertas ventajas sobre las coordenadas rectangulares.

En un sistema de coordenadas rectangulares, como recordará, un punto del plano se representa mediante un par ordenado de números (x,y), donde x y y indican las distancias con signo desde el eje y y el eje x, respectivamente. En un sistema de coordenadas polares elegimos un punto, el **polo,** y después un rayo con vértice en el polo, llamado **eje polar.** Al comparar los sistemas de coordenadas rectangulares y polares, vemos (figura 24) que el origen de las coordenadas rectangulares coincide con el polo de las coordenadas polares, y el eje x positivo de las coordenadas rectangulares coincide con el eje polar de las coordenadas polares.

FIGURA 24



Un punto P en un sistema de coordenadas polares se representa mediante un par ordenado de números (r, θ). El número r es la distancia del punto al polo, y θ es el ángulo (en grados o radianes) formado por el eje polar y un rayo que sale del polo y pasa por el punto. Llamamos al par ordenado (r, θ) las **coordenadas polares** del punto. *Véase* la figura 25.

FIGURA 25

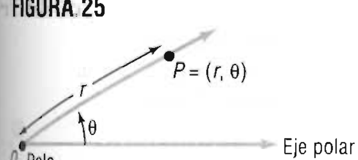
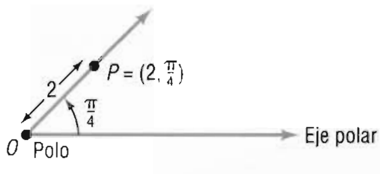


FIGURA 26



Por ejemplo, supongamos que las coordenadas polares de un punto P son $(2, \pi/4)$. Localizamos P trazando primero un ángulo de $\pi/4$ radianes, colocamos su vértice en el polo y su lado inicial a lo largo del eje polar. Después recorremos una distancia de 2 unidades a lo largo del lado final del ángulo para llegar al punto P. *Véase* la figura 26.

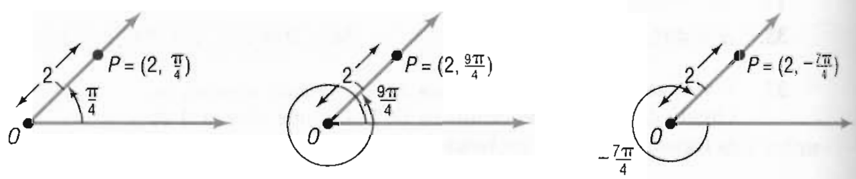
■ Ahora resuelva el problema 1.

Recuerde que un ángulo medido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj es positivo, mientras que uno medido en el sentido de las manecillas del reloj es negativo. Esta convención tiene algunas consecuencias interesantes respecto a las coordenadas polares. Veamos cuáles son esas consecuencias.

EJEMPLO 1 *Determinación de varias coordenadas polares de un único punto*

Consideremos de nuevo un punto P con coordenadas polares $(2, \pi/4)$, como nos muestra la figura 27(a). Dado que $\pi/4$, $9\pi/4$, y $-7\pi/4$ tienen todos el mismo lado final, también habríamos podido localizar este punto P utilizando las coordenadas polares $(2, 9\pi/4)$ o $(2, -7\pi/4)$, como se ve en las figuras 27(b) y (c).

FIGURA 27



(a) (b) (c) ■

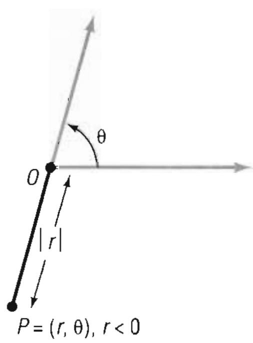


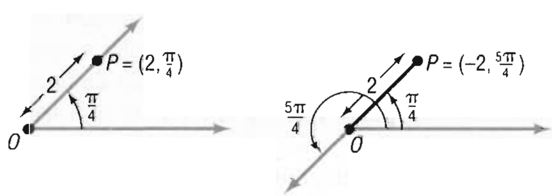
FIGURA 28

Al utilizar las coordenadas polares (r, θ) es posible que la primera entrada r sea negativa. Cuando esto ocurre convenimos en que la posición del punto, en vez de estar sobre el lado final de θ, esté sobre el rayo del polo que se extiende en la dirección opuesta al lado final de θ, a una distancia $|r|$ del polo. *Véase* la figura 28.

EJEMPLO 2 *Coordenadas polares (r, θ), $r < 0$*

Consideremos de nuevo el punto P con coordenadas polares $(2, \pi/4)$, según muestra la figura 29(a). Este mismo punto P puede tener las coordenadas polares $(-2, 5\pi/4)$, como indica la figura 29(b). Para localizar el punto $(-2, 5\pi/4)$, utilizamos el rayo en la dirección opuesta de $5\pi/4$ y recorremos dos unidades sobre ese rayo hasta encontrar el punto P.

FIGURA 29



(a) (b) ■

MISIÓN POSIBLE

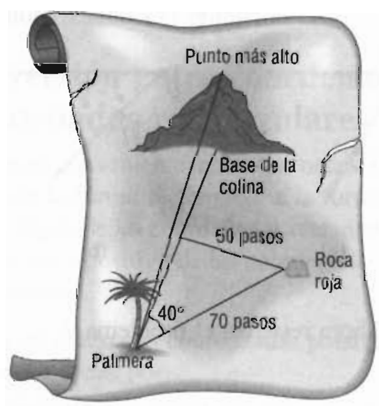
Capítulo 8

LOCALIZACIÓN DE UN TESORO

Al bucear cerca de Wreck Hill en las Bermudas, un grupo de 5 jóvenes descubrieron el mapa de un tesoro en el casco de un barco pirata hundido en 1747. El mapa los guió hasta un área de las Bermudas ahora conocida como Flatts, pero cuando llegaron ahí se dieron cuenta de que el objeto más importante del mapa había desaparecido. Llamaron al equipo de Misión Posible para que los ayudara a reconstruir el mapa, prometiendo como pago el 25% del tesoro que se encontrara.

Las instrucciones del mapa son las siguientes:

1. Desde la palmera más alta, observa la colina más alta. Baja la vista verticalmente, hasta ver la base de la colina.
2. Gira 40° en el sentido de las manecillas del reloj a partir de esa línea, y camina 70 pasos hasta la gran roca roja.
3. Desde la roca roja, camina 50 pasos de regreso hasta la línea de visión entre la palmera y la colina. Cava ahí.



Los 5 jóvenes piensan que han encontrado la roca roja y la colina más alta cerca de ahí, pero la "palmera más alta" ha desaparecido. Se les ha ocurrido que el tesoro debe estar enterrado en un punto de un círculo con radio de 50 "pasos" y centro en la roca roja, pero no van a cavar un agujero de 470 pies de circunferencia, en particular porque no tienen la certeza de que el tesoro siga ahí. (Han establecido que un "paso" es casi una yarda.)

1. Determine un plan para localizar la posición de la palmera perdida y escriba una explicación de su procedimiento dirigida a los jóvenes.
2. Por desgracia, los jóvenes tenían más en común con los piratas del siglo XVIII de lo que pensaban. Una vez que supieron la posición de la palmera perdida, ataron al equipo de Misión Posible a la roca roja, diciendo que ellos se harían cargo del resto del trabajo. A partir de la posición de la palmera, se orientaron a 40° en dirección contraria a las manecillas del reloj desde la roca hasta la colina, luego corrieron como 30 yardas hasta el círculo que habían trazado en torno de la roca y comenzaron a cavar de manera frenética. Pero nada. Después de una hora se fueron gritando: "¡25% de nada es nada!"
3. Por fortuna dejaron sus palas. Después de desatarse por sí mismos, ustedes fueron al lugar correcto y encontraron el tesoro. ¿Dónde estaba? ¿A qué distancia se encontraba del punto en que ustedes ubicaron la palmera? Explique su respuesta.
4. Las personas que bucean en busca de tesoros tienen ciertas obligaciones legales. ¿Cuáles son éstas? ¿Debe usted compartir el tesoro con un abogado sólo para que pueda quedarse con el resto?

Estos ejemplos muestran una diferencia fundamental entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares. En las primeras, cada punto tiene exactamente un par de coordenadas rectangulares; en las segundas, un punto puede tener una infinidad de pares de coordenadas polares.

Resumen Un punto con coordenadas polares (r, θ) también se puede representar con cualquiera de las siguientes formas:

$$(r, \theta + 2k\pi) \quad \text{o} \quad (-r, \theta + \pi + 2k\pi), \qquad k \text{ es un entero arbitrario}$$

Las coordenadas polares del polo son $(0, \theta)$, donde θ puede ser cualquier ángulo.

EJEMPLO 3

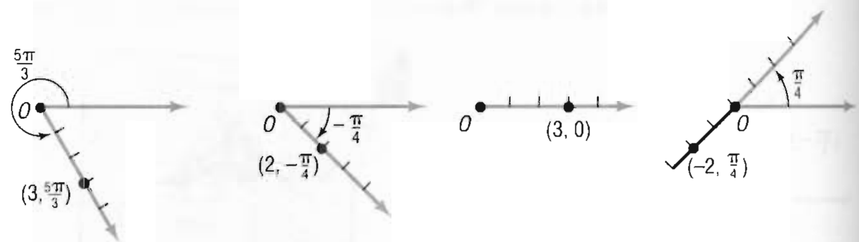
Localización de puntos mediante coordenadas polares

Localice los puntos con las siguientes coordenadas polares:

(a) $(3, 5\pi/3)$ (b) $(2, -\pi/4)$ (c) $(3, 0)$ (d) $(-2, \pi/4)$

Solución La figura 30 muestra los puntos.

FIGURA 30



(a) (b) (c) (d)

■ Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 4

Determinación de otras coordenadas polares de un punto dado

Localice el punto P con coordenadas polares $(3, \pi/6)$ y determine otras coordenadas polares (r, θ) de este mismo punto, para las cuales:

(a) $r > 0, \quad 2\pi \leq \theta \leq 4\pi$ (b) $r < 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$

(c) $r > 0, \quad -2\pi \leq \theta \leq 0$

Solución La figura 31 muestra el punto $(3, \pi/6)$.

(a) Sumamos una vuelta (2π radianes) al ángulo $\pi/6$ para obtener $P = (3, \pi/6 + 2\pi) = (3, 13\pi/6)$. *Véase* la figura 32.

FIGURA 31

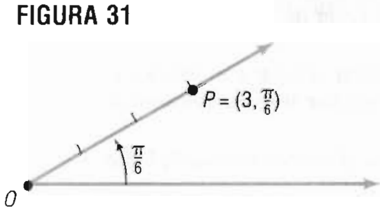
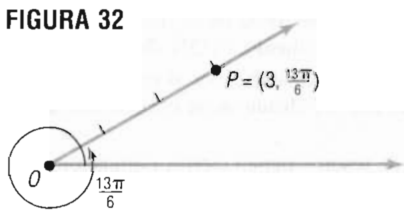
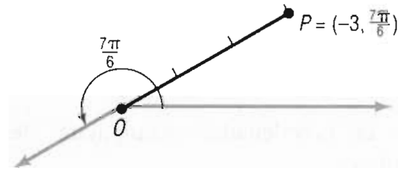


FIGURA 32



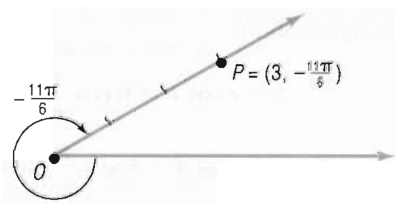
(b) Sumamos media vuelta (π radianes) al ángulo y reemplazamos r por $-r$ para obtener $P = (-3, \pi/6 + \pi) = (-3, 7\pi/6)$. *Véase* la figura 33.

FIGURA 33



(c) Restamos 2π del ángulo $\pi/6$ para obtener $P = (3, \pi/6 - 2\pi) = (3, -11\pi/6)$. *Véase* la figura 34.

FIGURA 34



Ahora resuelva el problema 13.

Conversión entre coordenadas polares y coordenadas rectangulares

A veces es conveniente, e incluso necesario, poder convertir las coordenadas o ecuaciones de la forma rectangular a la forma polar, y viceversa. Para esto, recordemos que el origen de las coordenadas rectangulares es el polo de las coordenadas polares, y que el eje x positivo de las coordenadas rectangulares es el eje polar de las coordenadas polares.

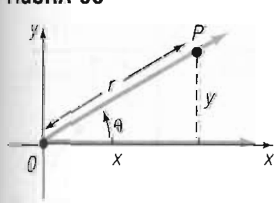
Teorema conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Si P es un punto con coordenadas polares (r, θ), las coordenadas rectangulares (x,y) de P están dadas por

$$x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta \tag{1}$$

Demostración

FIGURA 35



Suponga que P tiene coordenadas polares (r, θ). Buscamos las coordenadas rectangulares (x,y) de P. Consulte la figura 35.

Si $r = 0$, entonces, independientemente de θ, el punto P es el polo para el cual las coordenadas rectangulares son $(0,0)$. Así, la fórmula (1) es válida para $r = 0$.

Si $r > 0$, el punto P está en el lado final de θ y $r = d(O, P)$.

Así,

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

y

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Si $r < 0$, entonces el punto $P = (r, \theta)$ se puede representar como $(-r, \pi + \theta)$, donde $-r > 0$. Así,

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta = \frac{x}{-r} \qquad \operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{-r}$$

de modo que

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

EJEMPLO 5 *Conversión de coordenadas polares a coordenadas rectangulares*

Determinar las coordenadas rectangulares de los puntos con las siguientes coordenadas polares:

(a) $(6, \pi/6)$ (b) $(-2, 5\pi/4)$ (c) $(-4, -\pi/4)$

Solución Utilizamos la fórmula (1): $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$.

(a) *Véase* la figura 36(a).

$$x = r\cos\theta = 6\cos\frac{\pi}{6} = 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 6\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 6\cdot\frac{1}{2} = 3$$

Las coordenadas rectangulares del punto $(6, \pi/6)$ son $(3\sqrt{3}, 3)$.

(b) *Véase* la figura 36(b).

$$x = r\cos\theta = -2\cos\frac{5\pi}{4} = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = -2\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} = -2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$$

Las coordenadas rectangulares del punto $(-2, 5\pi/4)$ son $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

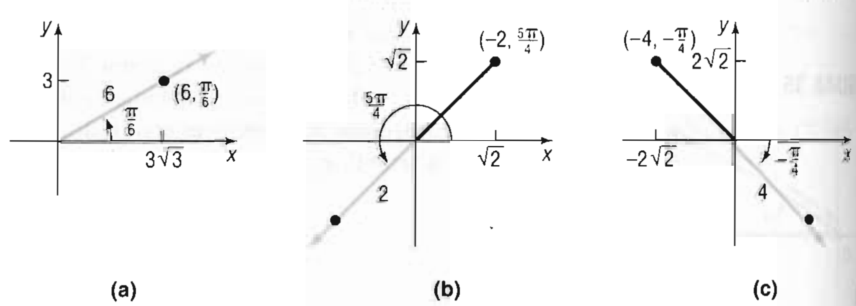
(c) *Véase* la figura 36(c).

$$x = r\cos\theta = -4\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = -4\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Las coordenadas rectangulares del punto dado $(-4, -\pi/4)$ son $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

FIGURA 36



Nota: La mayor parte de las calculadoras pueden convertir de coordenadas polares a rectangulares. Consulte en el manual del usuario cómo hacerlo. Como el procedimiento es tedioso en muchos casos, verá que es más sencillo utilizar la fórmula (1).

■ Ahora resuelva los problemas 21 y 33.

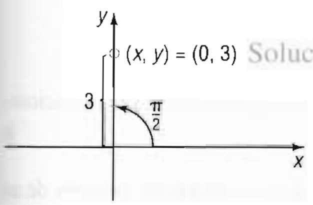
Convertir de coordenadas rectangulares (x, y) a coordenadas polares (r, θ) es un poco más complicado. *Veamos* algunos ejemplos.

EJEMPLO 6

Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Determinar las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son (0,3).

FIGURA 37

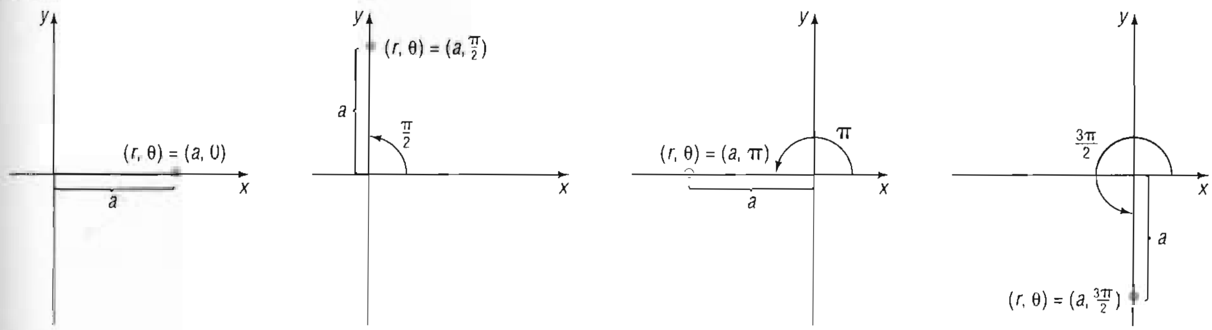


Solución

Véase la figura 37. El punto (0,3) está sobre el eje y, a una distancia de 3 unidades del origen (polo). Las coordenadas polares de este punto pueden ser $(3, \pi/2)$. ■

La figura 38 muestra las coordenadas polares de puntos que están sobre el eje x o sobre el eje y.

FIGURA 38



(a) $(x, y) = (a, 0),\ a > 0$ **(b)** $(x, y) = (0, a),\ a > 0$ **(c)** $(x, y) = (-a, 0),\ a > 0$ **(d)** $(x, y) = (0, -a),\ a > 0$

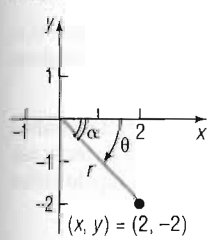
■ Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 7

Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Determinar las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son $(2, -2)$.

FIGURA 39



Solución

Véase la figura 39. La distancia r del origen al punto $(2, -2)$ es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para determinar θ, utilizamos el ángulo de referencia α. Entonces,

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-2}{2}\right| = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Así, $\theta = -\pi/4$, y un conjunto de coordenadas polares para este punto es $(2\sqrt{2}, -\pi/4)$. Otras posibles representaciones son $(2\sqrt{2}, 7\pi/4)$ y $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$. ■

EJEMPLO 8

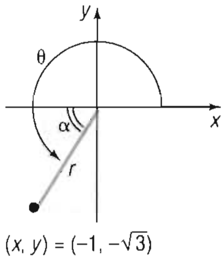
Conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Determinar las coordenadas polares de un punto cuyas coordenadas rectangulares son $(-1, -\sqrt{3})$.

Solución *Véase* la figura 40. La distancia r del origen al punto $(-1, -\sqrt{3})$ es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

FIGURA 40



Para determinar θ, utilizamos el ángulo de referencia α. Entonces,

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\left|\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

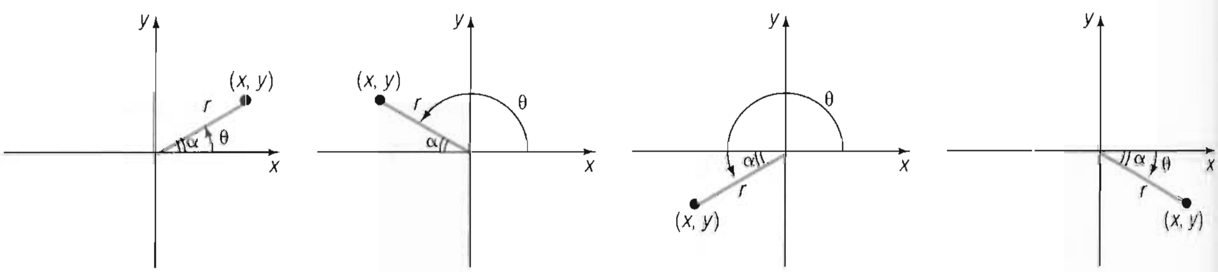
Así,

$$\theta = \pi + \alpha = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

y un conjunto de coordenadas polares es $(2, 4\pi/3)$. Otras posibles representaciones son $(-2, \pi/3)$ y $(2, -2\pi/3)$. ∎

La figura 41 muestra la forma de determinar las coordenadas polares de un punto que se encuentra en un cuadrante dado cuando se proporcionan sus coordenadas rectangulares.

FIGURA 41



(a) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (b) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \pi - \alpha = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (c) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \pi + \alpha = \pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ (d) $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = -\alpha = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

■ Ahora resuelva el problema 41.

Con base en el análisis anterior, tenemos las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \tag{2}$$

Advertencia: Tenga cuidado al utilizar la fórmula (2). Siempre trace primero el punto (x, y), como lo hicimos en los ejemplos 7 y 8, para elegir r y θ de modo que reflejen el cuadrante correcto. Revise de nuevo la figura 41.

Nota: La mayor parte de las calculadoras pueden convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares. Consulte el manual del usuario para aprender la secuencia de teclas adecuada. Como en muchos casos, el procedimiento es tedioso, verá que es más rápido utilizar la fórmula (2).

Las fórmulas (1) y (2) sirven también para transformar ecuaciones.

EJEMPLO 9 *Transformación de ecuaciones de forma polar a forma rectangular*

Transformar la ecuación $r = 4 \operatorname{sen}\theta$ de coordenadas polares a coordenadas rectangulares, e identificar la gráfica.

Solución Si multiplicamos cada lado por r, será más fácil utilizar las fórmulas (1) y (2):

$$r = 4 \operatorname{sen} \theta$$
$$r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta \quad \text{Multiplicamos cada lado por } r.$$
$$x^2 + y^2 = 4y \quad \text{Aplicamos las fórmulas (1) y (2).}$$

Esta es la ecuación de un círculo:

$$x^2 + (y^2 - 4y) = 0$$
$$x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Su centro está en (0,2) y su radio es 2. ■

■ Ahora resuelva el problema 57.

EJEMPLO 10 *Transformación de una ecuación de forma rectangular a forma polar*

Transformar la ecuación $4xy = 9$ de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

Solución Utilizamos la fórmula (1):

$$4xy = 9$$
$$4(r \cos \theta)(r \operatorname{sen} \theta) = 9 \quad \text{Fórmula (1).}$$
$$4r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 9$$
$$2r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 9 \quad \text{Fórmula para el doble de un ángulo.}$$

■

8.4

Ejercicio 8.4

En los problemas del 1 al 12 trace cada punto dado en coordenadas polares.

1. $(3, 90°)$ **2.** $(4, 270°)$ **3.** $(-2, 0)$ **4.** $(-3, \pi)$
5. $(6, \pi/6)$ **6.** $(5, 5\pi/3)$ **7.** $(-2, 135°)$ **8.** $(-3, 120°)$
9. $(-1, -\pi/3)$ **10.** $(-3, -3\pi/4)$ **11.** $(-2, -\pi)$ **12.** $(-3, -\pi/2)$

En los problemas del 13 al 20, trace cada punto dado en coordenadas polares y determine otras coordenadas polares (r, θ) del punto, para las cuales:

(a) $r > 0,\quad -2\pi \le \theta < 0$ *(b)* $r < 0,\quad 0 \le \theta < 2\pi$ *(c)* $r > 0,\quad 2\pi \le \theta < 4\pi$

13. $(5, 2\pi/3)$ **14.** $(4, 3\pi/4)$ **15.** $(-2, 3\pi)$ **16.** $(-3, 4\pi)$
17. $(1, \pi/2)$ **18.** $(2, \pi)$ **19.** $(-3, -\pi/4)$ **20.** $(-2, -2\pi/3)$

En los problemas del 21 al 36 se proporcionan las coordenadas polares de un punto. Determine las coordenadas rectangulares de cada punto.

21. $(3, \pi/2)$ **22.** $(4, 3\pi/2)$ **23.** $(-2, 0)$ **24.** $(-3, \pi)$
25. $(6, 150°)$ **26.** $(5, 300°)$ **27.** $(-2, 3\pi/4)$ **28.** $(-3, 2\pi/3)$
29. $(-1, -\pi/3)$ **30.** $(-3, -3\pi/4)$ **31.** $(-2, -180°)$ **32.** $(-3, -90°)$
33. $(7.5, 110°)$ **34.** $(-3.1, 182°)$ **35.** $(6.3, 3.8)$ **36.** $(8.1, 5.2)$

En los problemas del 37 al 48 se proporcionan las coordenadas rectangulares de un punto. Determine las coordenadas polares de cada punto.

37. $(3, 0)$ 38. $(0, 2)$ 39. $(-1, 0)$ 40. $(0, -2)$

41. $(1, -1)$ 42. $(-3, 3)$ 43. $(\sqrt{3}, 1)$ 44. $(-2, -2\sqrt{3})$

45. $(1.3, -2.1)$ 46. $(-0.8, -2.1)$ 47. $(8.3, 4.2)$ 48. $(-2.3, 0.2)$

En los problemas del 49 al 56 las letras x y y representan coordenadas rectangulares. Escriba cada ecuación con coordenadas polares (r, θ).

49. $2x^2 + 2y^2 = 3$ 50. $x^2 + y^2 = x$ 51. $x^2 = 4y$ 52. $y^2 = 2x$

53. $2xy = 1$ 54. $4x^2y = 1$ 55. $x = 4$ 56. $y = -3$

En los problemas del 57 al 64, las letras r y θ representan coordenadas polares. Escriba cada ecuación con coordenadas rectangulares (x, y).

57. $r = \cos\theta$ 58. $r = \operatorname{sen}\theta + 1$ 59. $r^2 = \cos\theta$ 60. $r = \operatorname{sen}\theta - \cos\theta$

61. $r = 2$ 62. $r = 4$ 63. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$ 64. $r = \dfrac{3}{3 - \cos\theta}$

65. Muestre que la fórmula para la distancia d entre dos puntos $P_1 = (r_1, \theta_1)$ y $P_2 = (r_2, \theta_2)$ es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

8.5

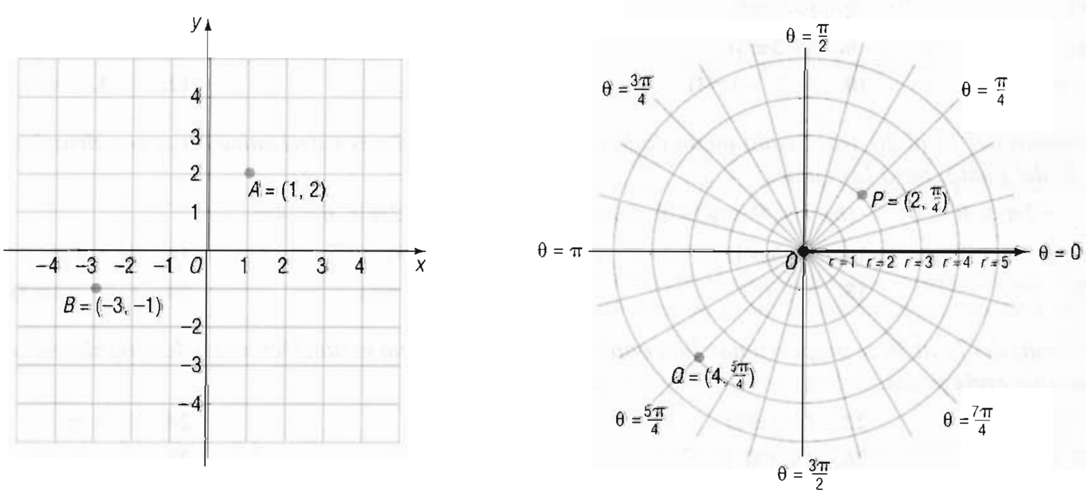
Ecuaciones y gráficas polares

Ecuación polar

Una ecuación cuyas variables son coordenadas polares es una **ecuación polar.** La **gráfica de una ecuación polar** es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas polares satisfacen la ecuación.

De la misma forma en que podemos utilizar una retícula rectangular para trazar puntos dados por coordenadas rectangulares, como en la figura 42(a), podemos

FIGURA 42



(a) Retícula rectangular (b) Retícula polar utilizar una retícula formada por círculos concéntricos (con centro en el polo) y rayos (con vértice en el polo) para localizar puntos dados por coordenadas polares, como en la figura 42(b). Utilizaremos estas **retículas polares** para hacer las gráficas de ecuaciones polares.

Un método para hacer la gráfica de una ecuación polar es convertirla a coordenadas rectangulares. En el análisis siguiente, (x, y) representan las coordenadas rectangulares de un punto P y (r, θ) son las coordenadas polares del punto P.

EJEMPLO 1 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Círculo)*

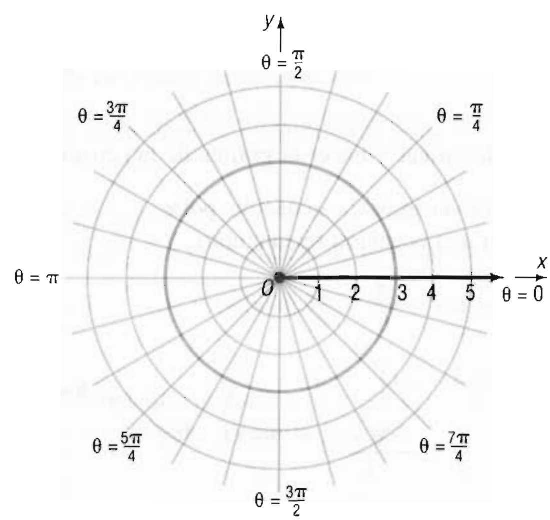
Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r = 3$

Solución Convertimos la ecuación polar en una ecuación rectangular:

$$r = 3$$
$$r^2 = 9$$
$$x^2 + y^2 = 9$$

Así, la gráfica de $r = 3$ es un círculo, con centro en el polo y radio 3. *Véase* la figura 43.

FIGURA 43
$r = 3$ o $x^2 + y^2 = 9$



■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 2 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Recta)*

Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $\theta = \pi/4$

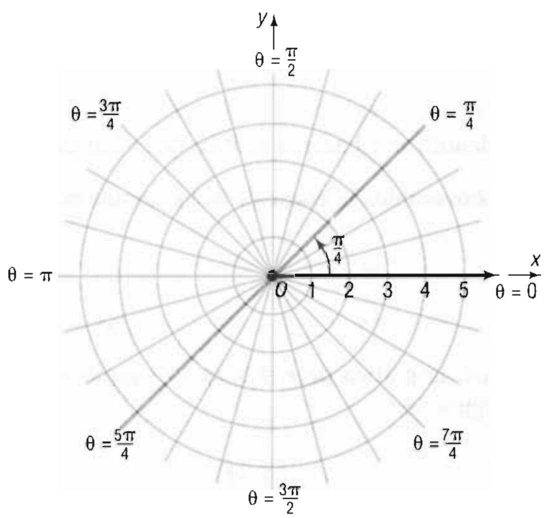
Solución Convertimos la ecuación polar en una ecuación rectangular:

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$
$$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$
$$\frac{y}{x} = 1$$
$$y = x$$

La gráfica de $\theta = \pi/4$ es una recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje polar. *Véase* la figura 44. ■

FIGURA 44

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ o $y = x$



EJEMPLO 3 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Recta)*

Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $\theta = -\pi/6$.

FIGURA 45

$\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ o $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

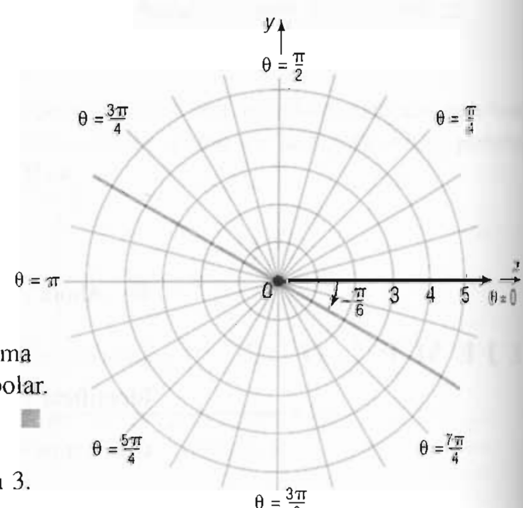
Solución Convertimos la ecuación polar en una ecuación rectangular:

$$\theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$$



La gráfica de $\theta = -\pi/6$ es una recta que pasa por el polo y forma un ángulo de $-\pi/6$ con el eje polar. *Véase* la figura 45. ■

■ Ahora resuelva el problema 3.

EJEMPLO 4 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Recta horizontal)*

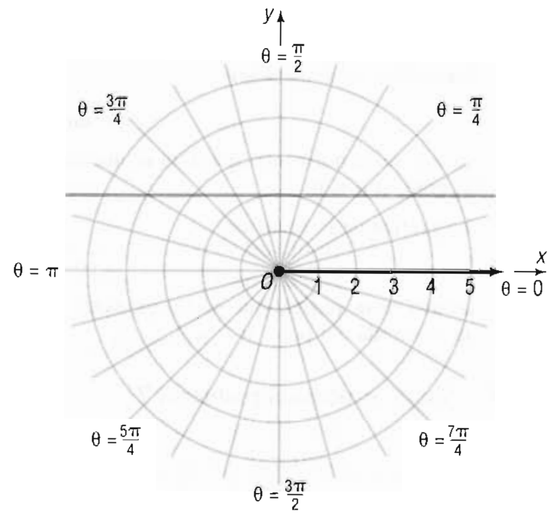
Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r \operatorname{sen}\theta = 2$

Solución Como $y = r \operatorname{sen}\theta$, podemos escribir la ecuación como

$$y = 2$$

Concluimos que la gráfica de r sen $\theta = 2$ es una recta horizontal a 2 unidades sobre el polo. *Véase* la figura 46.

FIGURA 46
r sen $\theta = 2$ o $y = 2$



Comentario: Para hacer la gráfica de una ecuación en coordenadas polares hay que utilizar el esquema $r = f(\theta)$. Además, hay que establecer los valores del *rango*. Es mejor utilizar una pantalla cuadrada y medir en radianes.

Verificación: Verificar la gráfica de r sen $\theta = 2$ haciendo la gráfica de $r = 2/(\text{sen }\theta)$.

EJEMPLO 5 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Recta vertical)*

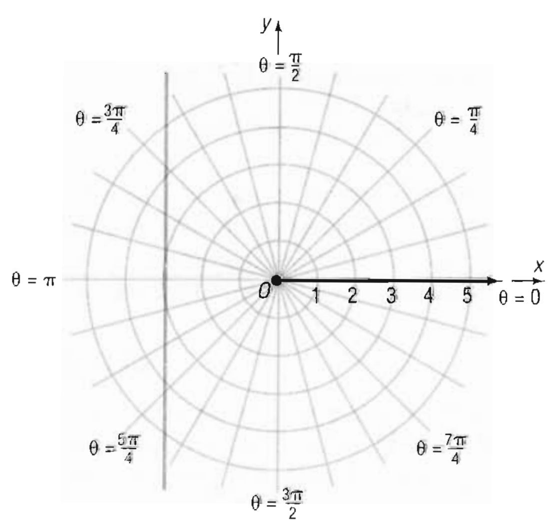
Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r \cos \theta = -3$

Solución Como $x = r \cos \theta$, podemos escribir la ecuación como

$$x = -3$$

Concluimos que la gráfica de $r \cos \theta = -3$ es una recta vertical a 3 unidades a la izquierda del polo. *Véase* la figura 47.

FIGURA 47
$r \cos \theta = -3$ o $x = -3$



Con base en los ejemplos 4 y 5, tenemos los siguientes enunciados. (Las demostraciones quedan como ejercicio.)

Teorema Si a es un número real distinto de cero:

La gráfica de la ecuación

$$r \operatorname{sen} \theta = a$$

es una recta horizontal que está a unidades arriba del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades bajo el polo, si $a < 0$.

La gráfica de la ecuación

$$r \cos \theta = a$$

es una recta vertical que está a unidades a la derecha del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades a la izquierda del polo, si $a < 0$. ∎

■ Ahora resuelva el problema 7.

EJEMPLO 6 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Círculo)*

Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

Solución Para transformar la ecuación a coordenadas rectangulares multiplicamos cada lado por r:

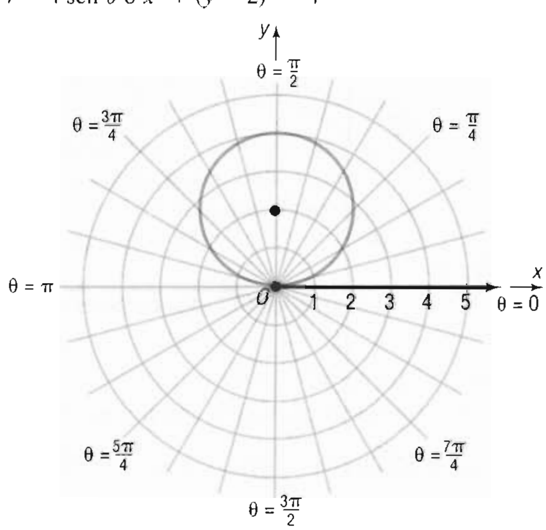
$$r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$$

Ahora utilizamos los hechos de que $r^2 = x^2 + y^2$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$. Entonces

$$x^2 + y^2 = 4y$$
$$x^2 + (y^2 - 4y) = 0$$
$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro (0,2) en coordenadas rectangulares y radio 2. *Véase* la figura 48. ∎

FIGURA 48
$r = 4 \operatorname{sen} \theta$ o $x^2 + (y - 2)^2 = 4$



EJEMPLO 7 *Identificación y graficación de una ecuación polar (Círculo)*

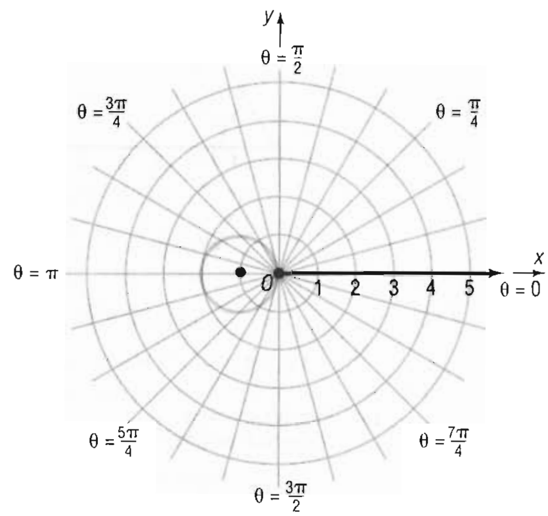
Identificar y hacer la gráfica de la ecuación: $r = -2\cos\theta$

Solución Procedemos como en el ejemplo 6:

$$r^2 = -2r\cos\theta$$
$$x^2 + y^2 = -2x$$
$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$
$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro $(-1, 0)$ en coordenadas rectangulares y radio 1. *Véase* la figura 49.

FIGURA 49
$r = -2\cos\theta$ o $(x+1)^2 + y^2 = 1$



Verificación: Haga la gráfica de $r = 4$ sen θ y compare el resultado con la figura 48. Limpie la pantalla y haga lo mismo para $r = -2\cos\theta$ y compare con la figura 49.

Exploración: Haga la gráfica de $r =$ sen θ, $r = 2$ sen θ, y $r = 3$ sen θ. ¿Puede ver el patrón? Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = -$sen θ, $r = -2$ sen θ, y $r = -3$ sen θ. ¿Advierte el patrón? Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = \cos\theta$, $r = 2\cos\theta$, y $r = 3\cos\theta$. ¿Puede ver el patrón? Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = -\cos\theta$, $r = -2\cos\theta$, y $r = -3\cos\theta$. ¿Puede ver el patrón?

Con base en los ejemplos 6 y 7, tenemos los siguientes enunciados. (Las demostraciones quedan como ejercicio.)

Teorema Sea a un número real positivo. Entonces:

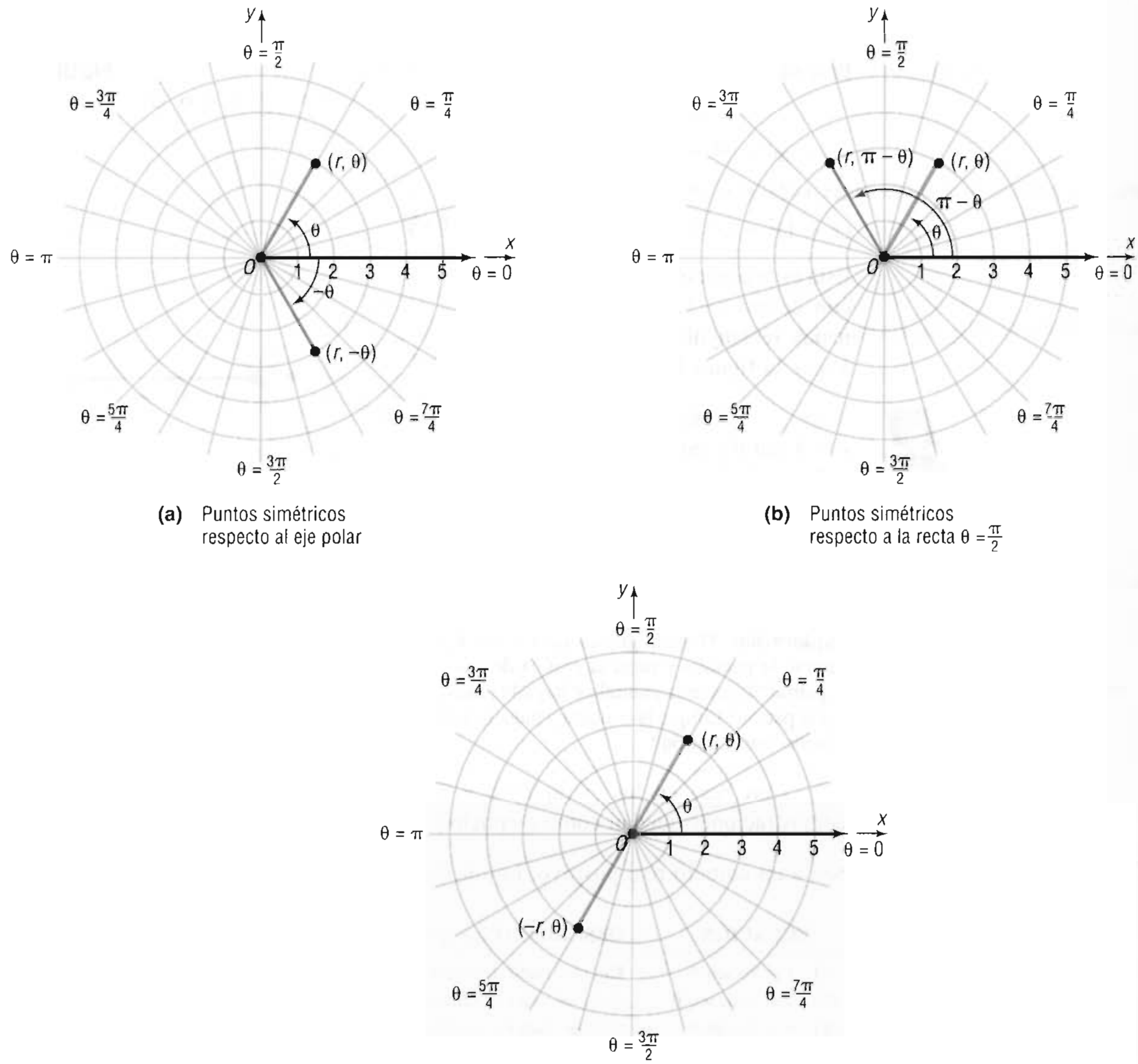
ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(a) $r = 2a$ sen θ	Círculo: radio a; centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares
(b) $r = -2a$ sen θ	Círculo: radio a; centro en $(0, -a)$ en coordenadas rectangulares
(c) $r = 2a\cos\theta$	Círculo: radio a; centro en $(a, 0)$ en coordenadas rectangulares
(d) $r = -2a\cos\theta$	Círculo: radio a; centro en $(-a, 0)$ en coordenadas rectangulares

El método de conversión de una ecuación polar a una ecuación rectangular identificable para poder hacer su gráfica no siempre es muy útil, tampoco necesario. Por lo general, construimos una tabla con varios puntos de la gráfica. Al verificar la simetría podríamos reducir el número de puntos necesarios para trazar la gráfica.

Simetría

En coordenadas polares, los puntos (r, θ) y $(r, -\theta)$ son simétricos respecto al eje polar (y respecto al eje x). *Véase* la figura 50(a). Los puntos (r, θ) y $(r, \pi - \theta)$ son simétricos respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y). *Véase* la figura 50(b). Los puntos (r, θ) y $(-r, \theta)$ son simétricos respecto al polo (origen). *Véase* la figura 50(c).

FIGURA 50



(a) Puntos simétricos respecto al eje polar

(b) Puntos simétricos respecto a la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

(c) Puntos simétricos respecto al polo

Los siguientes criterios son consecuencia de estas observaciones.

Teorema criterios de simetría

Simetría respecto al eje polar (eje x)
En una ecuación polar reemplace θ por $-\theta$. Si obtiene una ecuación equivalente la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

Simetría respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y)
En una ecuación polar reemplace θ por $\pi - \theta$. Si obtiene una ecuación equivalente la gráfica es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

Simetría respecto al polo (origen)
En una ecuación polar reemplace r por $-r$. Si obtiene una ecuación equivalente la gráfica es simétrica respecto al polo. ∎

Estos tres criterios son condiciones suficientes para la simetría, pero no son condiciones *necesarias*. Es decir, una ecuación puede no cumplir estos criterios y aún así ser simétrica respecto al eje polar, a la recta $\theta = \pi/2$ o al polo. Por ejemplo, la gráfica de $r = \text{sen } 2\theta$ es simétrica respecto al eje polar, a la recta $\theta = \pi/2$ y al polo, pero los tres criterios mencionados aquí fallan.

EJEMPLO 8 *Graficación de una ecuación polar (Cardioide)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = 1 - \text{sen } \theta$

Solución Primero verificamos la simetría:

Eje polar: Reemplazamos θ por $-\theta$. El resultado es

$$r = 1 - \text{sen}(-\theta) = 1 + \text{sen } \theta$$

El criterio falla, así que la gráfica podría ser o no simétrica respecto al eje polar.

La recta $\theta = \pi/2$: Reemplazamos θ por $\pi - \theta$. El resultado es

$$\begin{aligned} r = 1 - \text{sen}(\pi - \theta) &= 1 - (\text{sen } \pi \cos \theta - \cos \pi \text{ sen } \theta) \\ &= 1 - [0 \cdot \cos \theta - (-1) \text{ sen } \theta] = 1 - \text{sen } \theta \end{aligned}$$

Así, la gráfica es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

El polo: Reemplazamos r por $-r$. Entonces el resultado es $-r = 1 - \text{sen } \theta$, de modo que $r = -1 + \text{sen } \theta$. El criterio falla, de esta manera la gráfica podría ser o no simétrica respecto al polo.

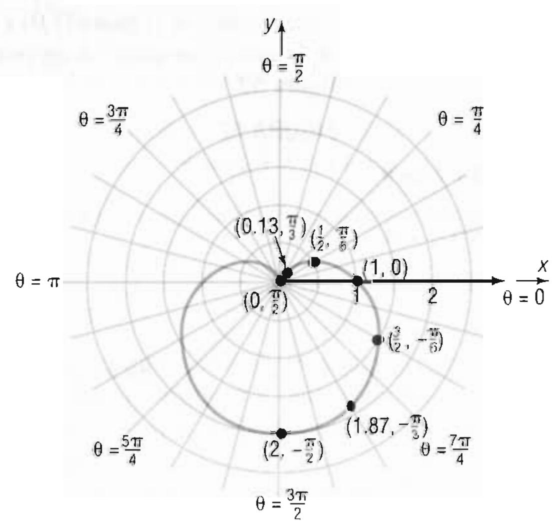
A continuación, identificamos algunos puntos sobre la gráfica asignando valores al ángulo θ calculando los valores correspondientes de r. Debido a la simetría respecto a la recta $\theta = \pi/2$, sólo hay que asignar valores a θ de $-\pi/2$ a $\pi/2$, como en la tabla 1.

Ahora trazamos los puntos (r, θ) de la tabla 1 y bosquejamos la gráfica, comenzando en el punto $(2, -\pi/2)$ y terminando en $(0, \pi/2)$. Después, reflejamos esta parte de la gráfica respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y) para obtener la gráfica completa. *Véase* la figura 51.

TABLA 1

θ	$r = 1 - \text{sen } \theta$
$-\pi/2$	$1 + 1 = 2$
$-\pi/3$	$1 + \sqrt{3}/2 \approx 1.87$
$-\pi/6$	$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
0	1
$\pi/6$	$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$\pi/3$	$1 - \sqrt{3}/2 \approx 0.13$
$\pi/2$	0

FIGURA 51
$r = 1 - \text{sen } \theta$



Verificación: Haga la gráfica de $r = 1 - \text{sen } \theta$ y compare el resultado con la figura 51. ■

Exploración: Haga la gráfica de $r = 1 + \text{sen}\ \theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 1 - \cos\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 1 + \cos\theta$. ¿Puede ver algún patrón?

La figura 51 es un ejemplo de una cardioide (en forma de corazón).

Cardioides

> Las **cardioides** se caracterizan por tener ecuaciones de la forma
>
> $$r = a(1 + \cos\theta) \qquad r = a(1 + \text{sen}\ \theta)$$
> $$r = a(1 - \cos\theta) \qquad r = a(1 - \text{sen}\ \theta)$$
>
> donde $a > 0$. La gráfica de una cardioide contiene al polo.

Ahora resuelva el problema.

EJEMPLO 9 *Graficación de una ecuación polar (Caracol)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = 3 + 2\cos\theta$

Solución Primero verificamos la simetría:

Eje polar: Reemplazamos θ por $-\theta$. El resultado es

$$r = 3 + 2\cos(-\theta) = 3 + 2\cos\theta$$

Así, la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

La recta $\theta = \pi/2$: Reemplazamos θ por $\pi - \theta$. El resultado es

$$\begin{aligned} r = 3 + 2\cos(\pi - \theta) &= 3 + 2(\cos\pi\cos\theta + \text{sen}\ \pi\ \text{sen}\ \theta) \\ &= 3 - 2\cos\theta \end{aligned}$$

El criterio falla, de modo que la gráfica podría ser o no simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

El polo: Reemplazamos r por $-r$. El criterio falla, de modo que la gráfica podría ser o no simétrica respecto al polo.

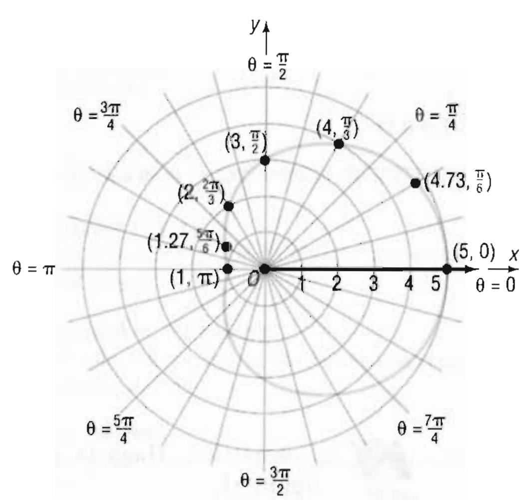
A continuación, identificamos algunos puntos sobre la gráfica asignando valores al ángulo θ y calculando los valores correspondientes de r. Debido a la simetría respecto al eje polar, sólo hay que asignar valores a θ de 0 a θ, como en la tabla 2.

Ahora trazamos los puntos (r, θ) de la tabla 2 y bosquejamos la gráfica, comenzando en el punto (5,0) y terminando en $(\pi, 1)$. Después, reflejamos esta parte de la gráfica respecto al eje polar (eje x) para obtener la gráfica completa. *Véase* la figura 52.

TABLA 2

θ	$r = 3 + 2\cos\theta$
0	5
$\pi/6$	$3 + \sqrt{3} \approx 4.73$
$\pi/3$	4
$\pi/2$	3
$2\pi/3$	2
$5\pi/6$	$3 - \sqrt{3} \approx 1.27$
π	1

FIGURA 52
$r = 3 + 2\cos\theta$



Verificación: Haga la gráfica de $r = 3 + 2\cos\theta$ y compare el resultado con la figura 52. ■

Exploración: Haga la gráfica de $r = 3 - 2\cos\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 3 - 2\,\text{sen}\,\theta$. ¿Puede ver algún patrón?

La figura 52 es un ejemplo de un caracol *sin lazo interior*.

Caracol sin lazo interior

Los caracoles sin lazo interior se caracterizan por tener ecuaciones de la forma

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\,\text{sen}\,\theta$$
$$r = a - b\cos\theta \qquad r = a - b\,\text{sen}\,\theta$$

donde $a > 0$, $b > 0$, y $a > b$. La gráfica de un caracol *sin lazo interior* no contiene al polo.

■ Ahora resuelva el problema 31.

EJEMPLO 10 *Graficación de una ecuación polar (Caracol con lazo interior)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = 1 + 2\cos\theta$

Solución Primero verificamos la simetría:

Eje polar: Reemplazamos θ por $-\theta$. El resultado es

$$r = 1 + 2\cos(-\theta) = 1 + 2\cos\theta$$

Así, la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

La recta $\theta = \pi/2$: Reemplazamos θ por $\pi - \theta$. El resultado es

$$\begin{aligned} r = 1 + 2\cos(\pi - \theta) &= 1 + 2(\cos\pi\cos\theta + \text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,\theta) \\ &= 1 - 2\cos\theta \end{aligned}$$

El criterio falla, de modo que la gráfica podría ser o no simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

El polo: Reemplazamos r por $-r$. El criterio falla, de modo que la gráfica podría ser o no simétrica respecto al polo.

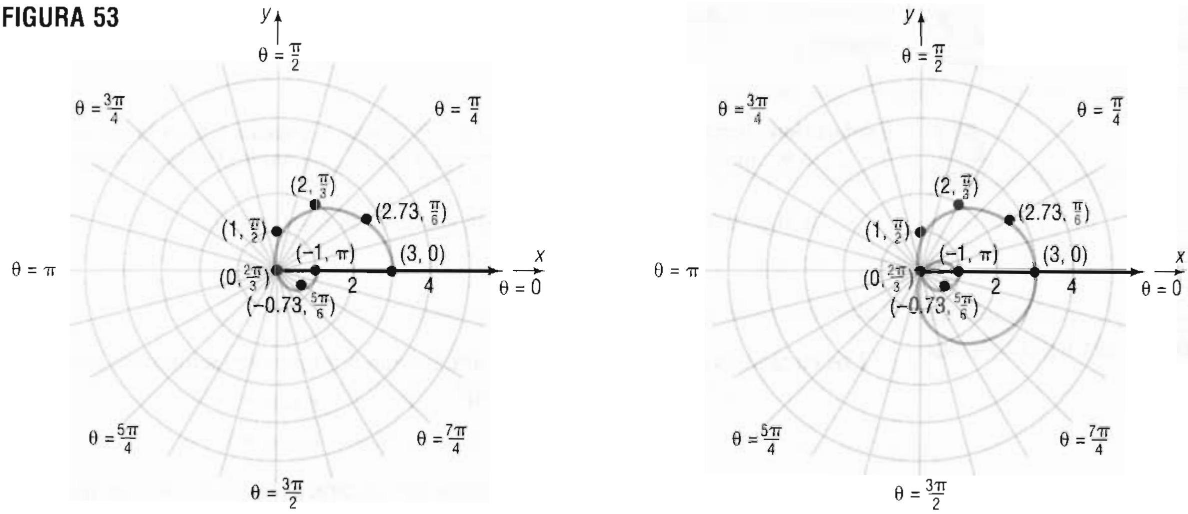
TABLA 3

θ	$r = 1 + 2\cos\theta$
0	3
$\pi/6$	$1 + \sqrt{3} \approx 2.73$
$\pi/3$	2
$\pi/2$	1
$2\pi/3$	0
$5\pi/6$	$1 - \sqrt{3} \approx -0.73$
π	-1

A continuación, identificamos algunos puntos sobre la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$, asignando valores al ángulo θ y calculando los valores correspondientes de r. Debido a la simetría respecto al eje polar, sólo hay que asignar valores a θ de 0 a π, como en la tabla 3.

Ahora trazamos los puntos (r, θ) de la tabla 3 y bosquejamos la gráfica, comenzando en el punto $(3, 0)$ y terminando en $(-1, \pi)$. *Véase* la figura 53(a). Por último, reflejamos esta parte de la gráfica respecto al eje polar (eje x) para obtener la gráfica completa. *Véase* la figura 53(b).

FIGURA 53



(a) **(b)** $r = 1 + 2\cos\theta$

Verificación: Haga la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ y compare el resultado con la figura 53(b).

Exploración: Haga la gráfica de $r = 1 - 2\cos\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$. Limpie la pantalla y haga la gráfica de $r = 1 - 2\operatorname{sen}\theta$. ¿Puede ver algún patrón?

La figura 53(b) es un ejemplo de un caracol con lazo interior.

Caracol de ciclo interior

Los caracoles con lazo interior se caracterizan por tener ecuaciones de la forma

$$r = a + b\cos\theta \qquad r = a + b\operatorname{sen}\theta$$
$$r = a - b\cos\theta \qquad r = a - b\operatorname{sen}\theta$$

donde $a > 0$, $b > 0$, y $a < b$. La gráfica de un caracol con lazo interior pasa por el polo dos veces.

Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 11 *Graficación de una ecuación polar (Rosa)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = 2\cos 2\theta$

Solución Primero verificamos la simetría:

Eje polar: Si reemplazamos θ por $-\theta$, el resultado es

$$r = 2\cos 2(-\theta) = 2\cos 2\theta$$

Así, la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

La recta $\theta = \pi/2$: Si reemplazamos θ por $\pi - \theta$, obtenemos

$$r = 2\cos 2(\pi - \theta) = 2\cos(2\pi - 2\theta) = 2\cos(-2\theta) = 2\cos 2\theta$$

Así, la gráfica es simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

El polo: Como la gráfica es simétrica respecto al eje polar y a la recta $\theta = \pi/2$, también debe serlo respecto al polo.

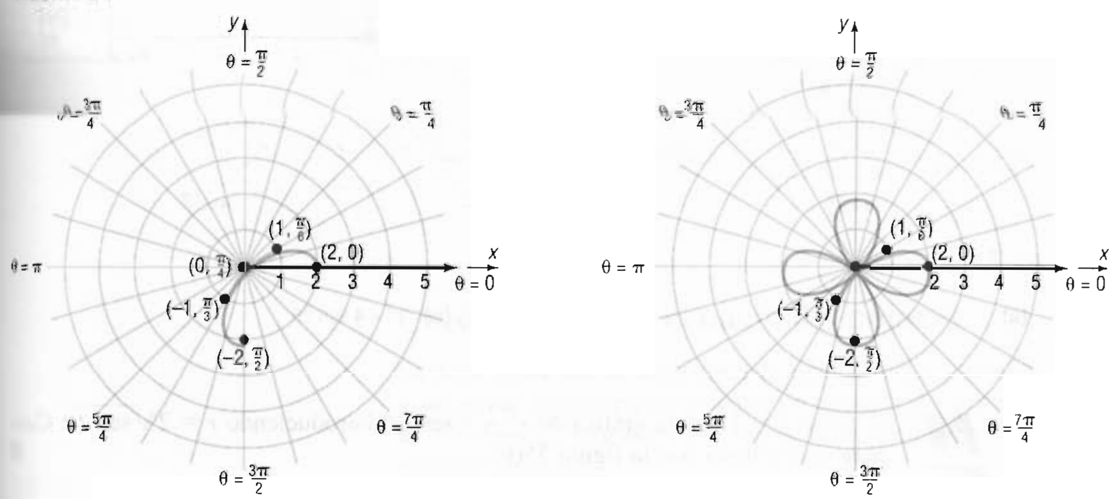
TABLA 4

θ	$r = 2\cos 2\theta$
0	2
$\pi/6$	1
$\pi/4$	0
$\pi/3$	-1
$\pi/2$	-2

A continuación, construimos la tabla 4. Debido a la simetría respecto al eje polar, la recta $\theta = \pi/2$ y el polo, sólo hay que considerar valores de θ de 0 a $\pi/2$.

Trazamos y unimos estos puntos en la figura 54(a). Por último, debido a la simetría, reflejamos esta parte de la gráfica, primero respecto al eje polar (eje x) y luego respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y) para obtener la gráfica completa. *Véase* la figura 54(b).

FIGURA 54



(a) **(b)** $r = 2\cos 2\theta$

Verificación: Haga la gráfica de $r = 2\cos 2\theta$ y compare los resultados con la figura 54(b). Observe que la gráfica comienza de la misma forma que la figura 54(a). ■

La curva de la figura 54(b) es una rosa de cuatro pétalos.

Rosa

> Las curvas con forma de **rosa** se caracterizan por tener ecuaciones como
>
> $$r = a\cos n\theta \qquad r = a \operatorname{sen} n\theta, \qquad a > 0$$
>
> y sus gráficas presentan forma de rosa. Si n es par, la rosa tendrá $2n$ pétalos; si n es impar, la rosa tendrá n pétalos.

■ Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 12 *Graficación de una ecuación polar (Lemniscata)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$

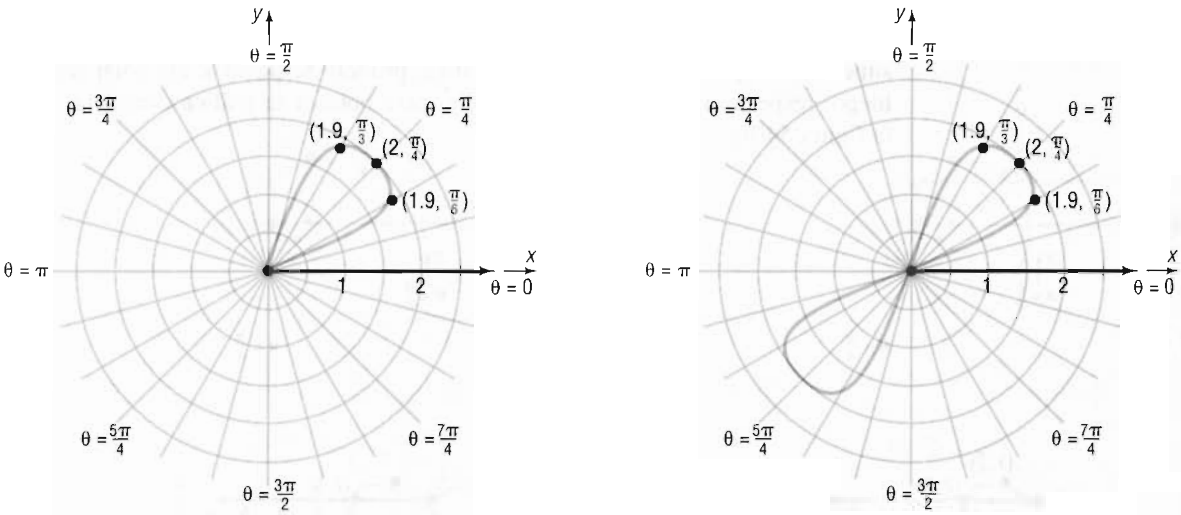
Solución Dejamos que usted verifique la simetría de la gráfica respecto al polo.

TABLA 5

θ	$r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$	r
0	0	0
$\pi/6$	$2\sqrt{3}$	± 1.9
$\pi/4$	4	± 2
$\pi/3$	$2\sqrt{3}$	± 1.9
$\pi/2$	0	0

La tabla 5 enumera algunos puntos sobre la gráfica para valores de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$. Observe que no existen puntos sobre la gráfica para $\pi/2 < \theta < \pi$ (segundo cuadrante), pues sen $2\theta < 0$ para tales valores. Trazamos los puntos de la tabla 5 $r \geq 0$ en la figura 55(a) y obtenemos los demás por simetría. La figura 55(b) muestra la gráfica final

FIGURA 55



(a) (b) $r^2 = 4$ sen 2θ

Verificación: Haga la gráfica de $r^2 = 4$ sen 2θ introduciendo $r = 2\sqrt{\text{sen } 2\theta}$. Compare el resultado con la figura 55(b). ∎

La figura 55(b) es un ejemplo de una curva *lemniscata.*

Lemniscata

Las curvas **lemniscatas** se caracterizan por tener ecuaciones de la forma

$$r^2 = a^2 \text{ sen } 2\theta \qquad r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

donde $a \neq 0$, y presentan gráficas con forma de hélice.

∎ Ahora resuelva el problema 41.

EJEMPLO 13 *Graficación de una ecuación polar (Espiral)*

Hacer la gráfica de la ecuación: $r = e^{\theta/5}$

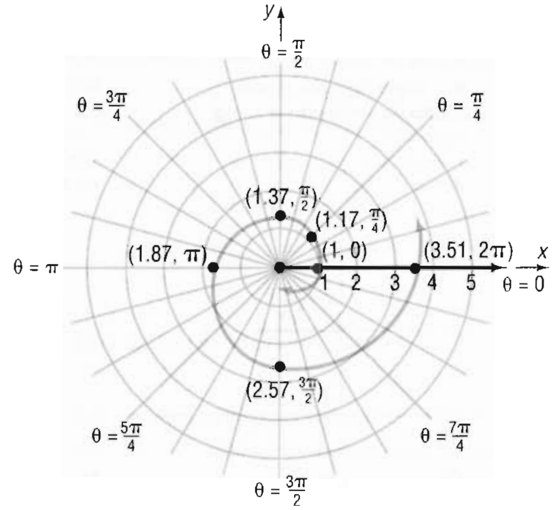
Solución Los criterios de simetría respecto al polo, al eje polar y a la recta $\theta = \pi/2$ fallan. Por otro lado, no existe un número θ tal que $r = 0$. Por lo tanto, la gráfica no pasa por el origen. Observemos que r es positivo para toda θ, que r crece cuando θ crece $r \to 0$ cuando $\theta \to -\infty$, y $r \to \infty$ cuando $\theta \to \infty$. Con ayuda de una calculadora obtenemos los valores de la tabla 6. *Véase* la gráfica en la figura 56. ∎

La curva de la figura 56 es una **espiral logarítmica** pues podemos escribir su ecuación como $\theta = 5 \ln r$; la gráfica gira infinidad de veces en torno al polo pero alejándose de él.

TABLA 6

θ	$r = e^{\theta/5}$
$-3\pi/2$	0.39
$-\pi$	0.53
$-\pi/2$	0.73
$-\pi/4$	0.85
0	1
$\pi/4$	1.17
$\pi/2$	1.37
π	1.87
$3\pi/2$	2.57
2π	3.51

FIGURA 56
$r = e^{\theta/5}$



Clasificación de ecuaciones polares

La tabla 7 muestra las ecuaciones de algunas rectas y círculos en coordenadas polares y sus ecuaciones correspondientes en coordenadas rectangulares. También incluye los nombres y gráficas de algunas de las ecuaciones polares que se encuentran con mayor frecuencia.

Comentario acerca del cálculo

Para los lectores que estén pensando en cursar cálculo, es conveniente hacer un comentario acerca del importante papel de las ecuaciones polares.

En las coordenadas rectangulares, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, cuya gráfica es el círculo unitario, no define una función. De hecho, en el intervalo $[-1, 1]$, define dos funciones,

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{Semicírculo superior} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2} \quad \text{Semicírculo inferior}$$

En coordenadas polares, la ecuación $r = 1$, cuya gráfica también es el círculo unitario, sí define una función. Es decir, para cada elección de θ, sólo existe un valor correspondiente de r, a saber, $r = 1$. Como en muchas aplicaciones del cálculo hay que utilizar funciones, la posibilidad de expresar ecuaciones que no son funciones en coordenadas rectangulares como funciones en coordenadas polares es muy útil.

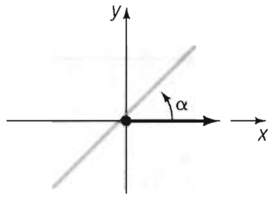
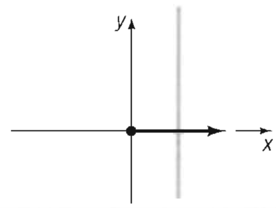
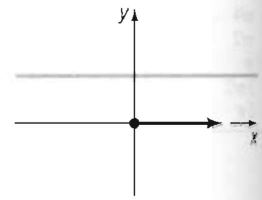
Observe también que el criterio de la recta vertical para funciones sólo es válido para ecuaciones especificadas en coordenadas rectangulares.

DATO HISTÓRICO

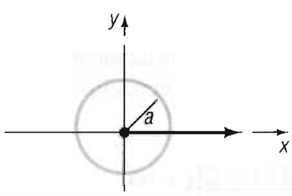
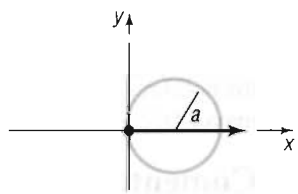
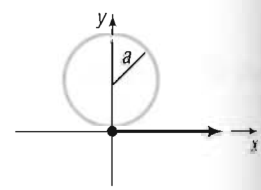
■ Al parecer las coordenadas polares fueron inventadas por Jacob Bernoulli (1654-1705) cerca de 1691, aunque, como en la mayor parte de ideas similares a estas, existen indicios anteriores de este concepto. Los primeros usuarios del cálculo permanecieron fieles a las coordenadas rectangulares, y las coordenadas polares se popularizaron sólo hasta principios del siglo XIX. Incluso entonces, eran utilizadas principalmente por los geómetras para describir ciertas curvas especiales. Por último, hacia la mitad del siglo XIX, los matemáticos aplicados observaron la tremenda simplificación en la descripción de objetos con simetría circular o cilíndrica, hecha posible por las coordenadas polares. A partir de entonces su uso ha sido más amplio. ■

TABLA 7

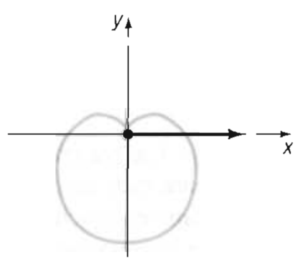
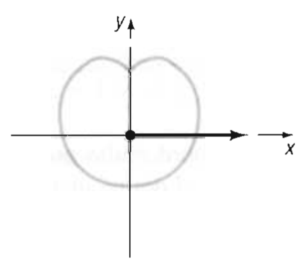
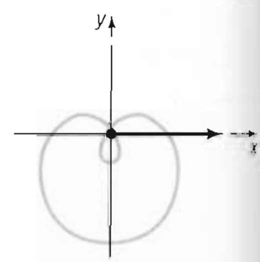
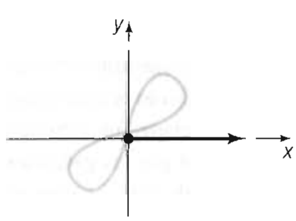
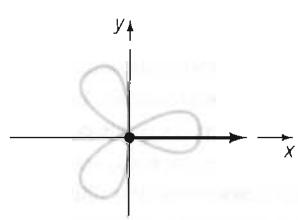
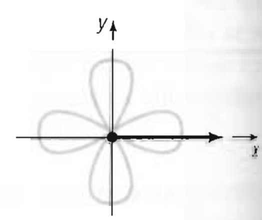
RECTAS

Descripción	Recta que pasa por el polo formando un ángulo α con el eje polar	Recta vertical	Recta horizontal
Ecuación rectangular	$y = (\tan \alpha)x$	$x = a$	$y = b$
Ecuación polar	$\theta = \alpha$	$r \cos \theta = a$	$r \operatorname{sen} \theta = b$
Gráfica típica			

CÍRCULOS

Descripción	Centro en el polo, radio a	Pasa por el polo, tangente a la recta $\theta = \pi/2$, centro en el eje polar, radio a	Pasa por el polo, tangente al eje polar, centro en la recta $\theta = \pi/2$, radio a
Ecuación rectangular	$x^2 + y^2 = a^2, a > 0$	$x^2 + y^2 = \pm 2ax, a > 0$	$x^2 + y^2 = \pm 2ay, a > 0$
Ecuación polar	$r = a, a > 0$	$r = \pm 2a \cos \theta, a > 0$	$r = \pm 2a \operatorname{sen} \theta, a > 0$
Gráfica típica			

OTRAS ECUACIONES

Nombre	Cardioide	Caracol sin lazo interior	Caracol con lazo interior
Ecuaciones polares	$r = a \pm a \cos \theta, a > 0$ $r = a \pm a \operatorname{sen} \theta, a > 0$	$r = a \pm b \cos \theta, 0 < b < a$ $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta, 0 < b < a$	$r = a \pm b \cos \theta, 0 < a < b$ $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta, 0 < a < b$
Gráfica típica			
Nombre	Lemniscata	Rosa con tres pétalos	Rosa con cuatro pétalos
Ecuaciones polares	$r^2 = a^2 \cos 2\theta, a > 0$ $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta, a > 0$	$r = a \operatorname{sen} 3\theta, a > 0$ $r = a \cos 3\theta, a > 0$	$r = a \operatorname{sen} 2\theta, a > 0$ $r = a \cos 2\theta, a > 0$
Gráfica típica			

8.5

Ejercicio 8.5

En los problemas del 1 al 16 identifique y haga la gráfica de cada ecuación polar.

1. $r = 4$ **2.** $r = 2$ **3.** $\theta = \pi/3$ **4.** $\theta = -\pi/4$

5. $r \operatorname{sen} \theta = 4$ **6.** $r \cos \theta = 4$ **7.** $r \cos \theta = -2$ **8.** $r \operatorname{sen} \theta = -2$

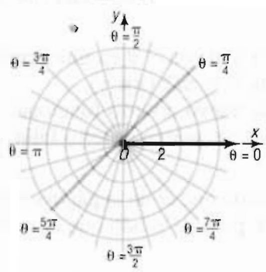
9. $r = 2 \cos \theta$ **10.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **11.** $r = -4 \operatorname{sen} \theta$ **12.** $r = -4 \cos \theta$

13. $r \sec \theta = 4$ **14.** $r \csc \theta = 8$ **15.** $r \csc \theta = -2$ **16.** $r \sec \theta = -4$

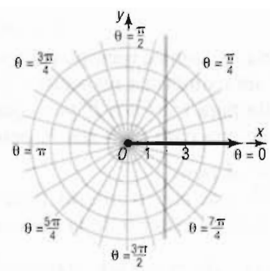
En los problemas del 17 al 24, relacione cada una de las gráficas de la (A) a la (H) con una de las siguientes ecuaciones polares:

17. $r = 2$ **18.** $\theta = \pi/4$ **19.** $r = 2 \cos \theta$ **20.** $r \cos \theta = 2$

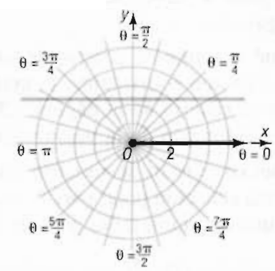
21. $r = 1 + \cos \theta$ **22.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **23.** $\theta = 3\pi/4$ **24.** $r \operatorname{sen} \theta = 2$



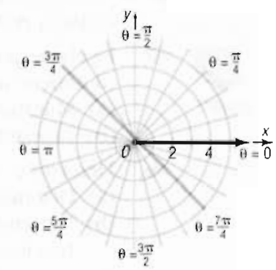
(A)



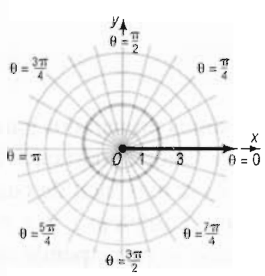
(B)



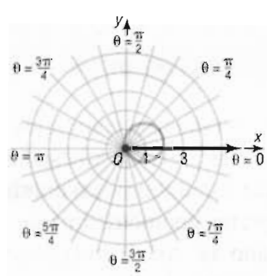
(C)



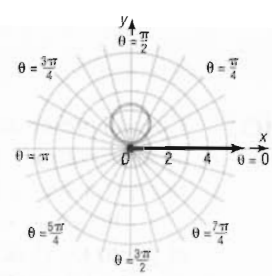
(D)



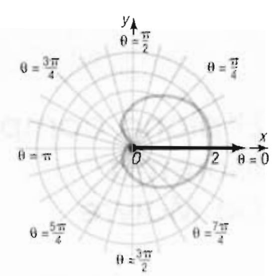
(E)



(F)



(G)



(H)

En los problemas del 25 al 48 identifique y haga la gráfica de cada ecuación polar. Verifique la simetría.

25. $r = 2 + 2 \cos \theta$ **26.** $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ **27.** $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$ **28.** $r = 2 - 2 \cos \theta$

29. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$ **30.** $r = 2 - \cos \theta$ **31.** $r = 4 - 2 \cos \theta$ **32.** $r = 4 + 2 \operatorname{sen} \theta$

33. $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$ **34.** $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$ **35.** $r = 2 - 3 \cos \theta$ **36.** $r = 2 + 4 \cos \theta$

37. $r = 3 \cos 2\theta$ **38.** $r = 2 \operatorname{sen} 2\theta$ **39.** $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ **40.** $r = 3 \cos 4\theta$

41. $r^2 = 9 \cos 2\theta$ **42.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$ **43.** $r = 2^\theta$ **44.** $r = 3^\theta$

45. $r = 1 - \cos \theta$ **46.** $r = 3 + \cos \theta$ **47.** $r = 1 - 3 \cos \theta$ **48.** $r = 4 \cos 3\theta$

En los problemas del 49 al 58 haga la gráfica de cada ecuación polar.

49. $r = \dfrac{2}{1 - \cos \theta}$ (parábola) **50.** $r = \dfrac{2}{1 - 2 \cos \theta}$ (hipérbola)

51. $r = \dfrac{1}{3 - 2 \cos \theta}$ (elipse) **52.** $r = \dfrac{1}{1 - \cos \theta}$ (parábola)

53. $r = \theta, \quad \theta \geq 0$ (espiral de Arquímides)

54. $r = \dfrac{3}{\theta}$ (espiral recíproca)

55. $r = \csc\theta - 2, \quad 0 < \theta < \pi$ (concoide)

56. $r = \operatorname{sen}\theta \tan\theta$ (cisoide)

57. $r = \tan\theta$ (curva kappa)

58. $r = \cos\dfrac{\theta}{2}$

59. Muestre que la gráfica de la ecuación $r \operatorname{sen}\theta = a$ es una recta horizontal, de a unidades sobre el polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades bajo el polo cuando $a < 0$.

60. Muestre que la gráfica de la ecuación $r\cos\theta = a$ es una recta vertical, que está a unidades a la derecha del polo si $a > 0$ y $|a|$ unidades a la izquierda del polo cuando $a < 0$.

61. Muestre que la gráfica de la ecuación $r = 2a \operatorname{sen}\theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares.

62. Muestre que la gráfica de la ecuación $r = -2a \operatorname{sen}\theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(0, -a)$ en coordenadas rectangulares.

63. Muestre que la gráfica de la ecuación $r = 2a\cos\theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(a, 0)$ en coordenadas rectangulares.

64. Muestre que la gráfica de la ecuación $r = -2a\cos\theta$, $a > 0$, es un círculo de radio a con centro en $(-a, 0)$ en coordenadas rectangulares.

65. Explique por qué el siguiente criterio de simetría es válido: reemplace r por $-r$ y θ con $-\theta$ en una ecuación polar. Si obtiene una ecuación equivalente, la gráfica será simétrica respecto a la recta $\theta = \pi/2$ (eje y).
(a) Muestre que el criterio de la página 520 falla para $r^2 = \cos\theta$, pero que este nuevo criterio funciona.
(b) Muestre que el criterio de la página 520 funciona para $r^2 = \operatorname{sen}\theta$, pero que este nuevo criterio falla.

66. Desarrolle un nuevo criterio de simetría respecto al polo.
(a) Determine una ecuación polar para la cual falle este nuevo criterio, pero de modo que el de la página 520 funcione.
(b) Determine una ecuación polar para la cual falle el criterio de la página 520, pero de modo que el nuevo criterio funcione.

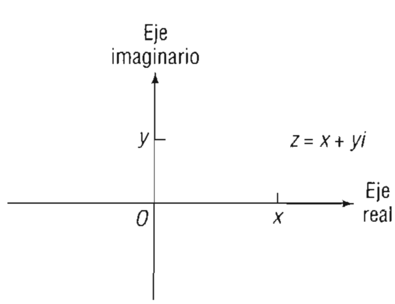
67. Desarrolle dos criterios distintos para verificar la simetría respecto al eje polar. Determine ejemplos en los que uno de los criterios funcione y el otro falle. ¿Cuál criterio prefiere utilizar? Justifique su posición.

8.6 El plano complejo; teorema De Moivre

Cuando presentamos los números complejos no estábamos preparados para analizar su interpretación geométrica. Ahora ya estamos listos y aunque podríamos dar varias interpretaciones, la que estudiaremos a continuación es la más fácil de comprender.

Podemos interpretar geométricamente un número complejo $z = x + yi$ como el punto (x, y) del plano xy. Así, a cada punto del plano le corresponde un número complejo y, recíprocamente, a cada número complejo le corresponde un punto en el plano. Para referirnos a la colección de tales puntos hablamos del **plano complejo**. El eje x se conoce como eje real pues cualquier punto sobre él tiene la forma $z = x + 0i = x$, un número real. El eje y es el **eje imaginario** pues cualquier punto sobre él tiene la forma $z = 0 + yi = yi$, un número imaginario puro. *Véase* la figura 57.

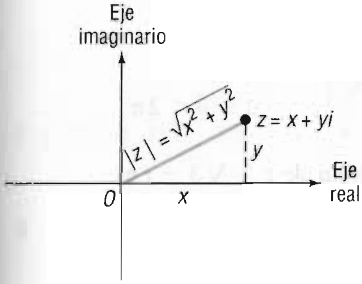
FIGURA 57
Plano complejo



Magnitud

Sea z = x + yi un número complejo. La **magnitud** o **módulo** de z, que se denota |z|, se define como la distancia del origen al punto (x, y). Así,

FIGURA 58



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

Véase la ilustración en la figura 58.

Esta definición de $|z|$ es consistente con la de valor absoluto de un número real: Si $z = x + yi$ es real, entonces $z = x + 0i$ y

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

Recuerde (sección 1.5) que si $z = x + yi$, entonces su **conjugado**, que se denota , z, es $\bar{z} = x - yi$. Como $z\bar{z} = x^2 + y^2$, la ecuación (1) implica que podemos escribir la magnitud de z como

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} \qquad (2)$$

Forma polar de un número complejo

Al escribir un número complejo como $z = x + yi$, decimos que está en **forma rectangular,** o **cartesiana,** pues (x, y) son las coordenadas rectangulares del punto correspondiente en el plano complejo. Supongamos que (r, θ) son las coordenadas polares de este punto. Entonces

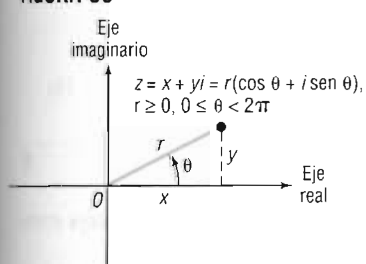
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad (3)$$

Si $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, el número complejo $z = x + yi$ se puede escribir en **forma polar** como

Forma polar de z

$$z = x + yi = (r\cos\theta) + (r\,\text{sen}\,\theta)i = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \qquad (4)$$

FIGURA 59



Véase figura 59.

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es la forma polar de un número complejo, el ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, es el **argumento de z.** Además, como $r \geq 0$, la ecuación (3) implica que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Así, la ecuación (1) implica a su vez que la magnitud de $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ es

$$|z| = r$$

EJEMPLO 1

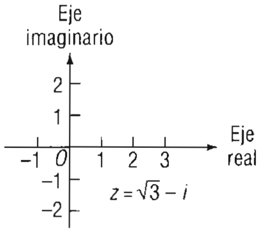
Localización de un punto en el plano complejo y escritura de un número complejo en forma polar

Trazar el punto correspondiente a $z = \sqrt{3} - i$ en el plano complejo, y escribir una expresión para z en forma polar.

Solución

El punto correspondiente a $z = \sqrt{3} - i$ tiene las coordenadas rectangulares $(\sqrt{3}, -1)$. El punto, localizado en el cuarto cuadrante, aparece en la figura 60. Como $x = \sqrt{3}$ y $y = -1$, esto implica que

FIGURA 60



$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

y

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

Así, $\theta = 11\pi/6$ y $r = 2$, de modo que la forma polar de $z = \sqrt{3} - i$ es

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$$

Ahora resuelva el problema 1.

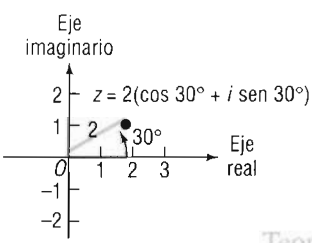
EJEMPLO 2 *Localización de un punto en el plano complejo y conversión de forma polar a forma rectangular*

Localizar el punto correspondiente a $z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$ en el plano complejo, y escribir una expresión para z en forma rectangular.

Solución

Para localizar el número complejo $z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$, trazamos el punto cuyas coordenadas polares son $(r, \theta) = (2, 30°)$, como nos muestra la figura 61. En forma rectangular,

FIGURA 61



$$z = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$$

Ahora resuelva el problema 13.

La forma polar de un número complejo proporciona una alternativa para determinar productos y cocientes de números complejos.

Teorema

Sean $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$ dos números complejos. Entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{5}$$

Si $z_2 \neq 0$, entonces

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \tag{6}$$

Demostración

Demostraremos la fórmula (5). La demostración de la fórmula (6) se deja como ejercicio (*véase* el problema 56).

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

Como la magnitud de un número complejo z es r y su argumento es θ, cuando $z = r\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, podemos enunciar el teorema como sigue:

Teorema La magnitud del producto (cociente) de dos números complejos es igual al producto (cociente) de sus magnitudes; el argumento del producto (cociente) de dos números complejos es igual a la suma (resta) de sus argumentos. ■

Veamos un ejemplo del uso de este teorema.

EJEMPLO 3 *Determinación de productos y cocientes de números complejos en forma polar*

Si $z = 3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ y $w = 5(\cos 100° + \operatorname{sen} 100°)$, determinar lo siguiente (dejar las respuestas en forma polar):

(a) zw (b) z/w

Solución (a)

$$\begin{aligned} zw &= [3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)][5(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)] \\ &= (3 \cdot 5)[\cos(20° + 100°) + i \operatorname{sen}(20° + 100°)] \\ &= 15(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)}{5(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)} \\ &= \tfrac{3}{5}[\cos(20° - 100°) + i \operatorname{sen}(20° - 100°)] \\ &= \tfrac{3}{5}[\cos(-80°) + i \operatorname{sen}(-80°)] \\ &= \tfrac{3}{5}(\cos 280° + i \operatorname{sen} 280°) \end{aligned}$$

El argumento debe estar entre 0° y 360°. ■

■ Ahora resuelva el problema 23.

Teorema de De Moivre

El teorema de De Moivre, enunciado por Abraham De Moivre (1667-1754) en 1730, aunque ya era conocido por muchas personas hacia 1710, es importante por la siguiente razón: Los procesos fundamentales del álgebra son las cuatro operaciones de suma, resta, multiplicación y división, junto con las potencias y la extracción de raíces. El teorema de De Moivre permite aplicar estas dos últimas operaciones a los números complejos.

En su forma básica, el teorema es una fórmula para elevar un número complejo z a la potencia n, donde $n \geq 1$ es un entero positivo. Veamos si podemos intuir la forma del resultado.

Sea $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ un número complejo. Entonces, con base en la ecuación (5), tenemos

$$\begin{aligned} n = 2\text{:} \quad z^2 &= r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) \\ n = 3\text{:} \quad z^3 &= z^2 \cdot z \\ &= [r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)][r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) \\ n = 4\text{:} \quad z^4 &= z^3 \cdot z \\ &= [r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)][r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)] \\ &= r^4(\cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta) \end{aligned}$$

Ahora queda claro el patrón.

Teorema de De Moivre Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ es un número complejo, entonces

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \tag{7}$$

donde $n \geq 1$ es un entero positivo. ∎

No demostraremos el teorema de De Moivre pues requiere inducción matemática (la que analizaremos hasta la sección 11.4).

Veamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 4 *Uso del teorema de De Moivre*

$$\begin{aligned}[2(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3 &= 2^3[\cos(3\cdot 20°) + i \operatorname{sen}(3\cdot 20°)]\\ &= 8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)\\ &= 8\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 + 4\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$ ∎

■ Ahora resuelva el problema 31.

EJEMPLO 5 *Uso del teorema de De Moivre*

Escribir $(1 + i)^5$ en forma canónica $a + bi$.

Solución Para aplicar el teorema de De Moivre, primero debemos escribir el número complejo en forma polar. Así, como la magnitud de $1 + i$ es $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, escribimos

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Ahora,

$$\begin{aligned}(1 + i)^5 &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right]^5\\ &= (\sqrt{2})^5\left[\cos\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(5\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]\\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)\\ &= 4\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)i\right] = -4 - 4i\end{aligned}$$ ∎

EJEMPLO 6 *Uso de una calculadora con el teorema de De Moivre*

Escribir $(3 + 4i)^3$ en forma canónica $a + bi$.

Solución De nuevo, primero escribimos $3 + 4i$ en forma polar. Esta vez utilizaremos grados para el argumento. La magnitud de $3 + 4i$ es $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$, de modo que escribimos

$$3 + 4i = 5\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) \approx 5(\cos 53.1° + i \operatorname{sen} 53.1°)$$

Aunque hemos escrito el ángulo redondeado a una cifra decimal (53.1°), conservamos el valor real del ángulo en la memoria de la calculadora. Ahora,

$$\begin{aligned}(3+4i)^3 &\approx [5(\cos 53.1° + i \operatorname{sen} 53.1°)]^3 \\ &= 5^3[\cos(3 \cdot 53.1°) + i \operatorname{sen}(3 \cdot 53.1°)] \\ &= 125(\cos 159.3° + i \operatorname{sen} 159.3°) \\ &\approx 125[-0.935 + i(0.353)] = -117 + 44i\end{aligned}$$

En este cálculo utilizamos los valores reales guardados en la memoria, no los valores redondeados que mostramos. La respuesta final, $-117 + 44i$, es exacta, como usted podrá verificar al elevar al cubo $3 + 4i$. ■

Raíces complejas

Sean w un número complejo dado y $n \geq 2$ un entero positivo. Cualquier número complejo z que satisfaga la ecuación

$$z^n = w$$

será **una raíz enésima compleja** de w. De acuerdo con nuestro uso anterior, si $n = 2$, las soluciones de la ecuación $z^2 = w$ son las **raíces cuadradas complejas** de w, y si $n = 3$, las soluciones de la ecuación $z^3 = w$ son las **raíces cúbicas complejas** de w.

Teorema determinación de raíces complejas

Sea $w = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ un número complejo. Si $w \neq 0$, existen n raíces enésimas complejas distintas de w dadas por la fórmula

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (8)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Demostración (bosquejo)

No demostraremos el resultado en su totalidad. Sólo veremos que cada zk de la ecuación (8) cumple la ecuación $z_k^n = w$ y, por lo tanto, cada zk es una raíz enésima compleja de w.

$$\begin{aligned}z_k^n &= \left\{\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]\right\}^n \\ &= (\sqrt[n]{r})^n\left[\cos n\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen} n\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{Teorema de De Moivre.} \\ &= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)] \\ &= r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = w\end{aligned}$$

Así, cada z_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, es una raíz enésima compleja de w. Para terminar, habría que mostrar que cada z_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, es, de hecho, distinta de las demás, y que no existen raíces enésimas complejas de w distintas de las dadas por la ecuación (8). ■

EJEMPLO 7 *Determinación de raíces cúbicas complejas*

Determinar las raíces cúbicas complejas de $-1 + \sqrt{3}\,i$. Deje las respuestas en forma polar, con θ en grados.

Solución Primero expresamos $-1 + \sqrt{3}\,i$ en forma polar con grados:

$$-1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$$

Las tres raíces cúbicas complejas de $-1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)$ son

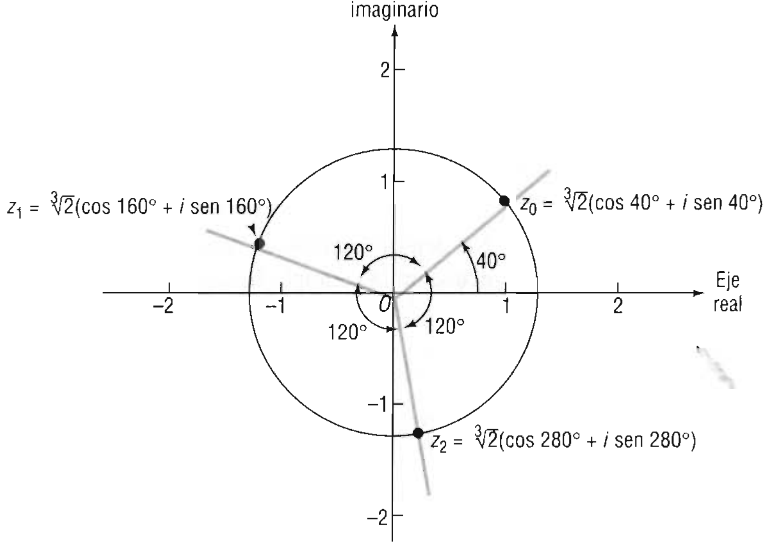
$$z_k = \sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{120^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{120^\circ}{3} + \frac{360^\circ k}{3}\right)\right], \qquad k = 0, 1, 2$$

Así,

$$z_0 = \sqrt[3]{2}(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)$$
$$z_1 = \sqrt[3]{2}(\cos 160^\circ + i \operatorname{sen} 160^\circ)$$
$$z_2 = \sqrt[3]{2}(\cos 280^\circ + i \operatorname{sen} 280^\circ)$$

Observe que cada una de las tres raíces cúbicas complejas de $1 + \sqrt{3}\,i$ tiene la misma magnitud que las demás, $\sqrt[3]{2}$. Esto significa que los puntos correspondientes a cada raíz cúbica están a la misma distancia del origen; por lo tanto, los tres puntos están en un círculo con centro en el origen y radio $\sqrt[3]{2}$. Además, los argumentos de estas raíces cúbicas son 40°, 160° y 280°, de modo que la diferencia entre las parejas consecutivas es 120°. Esto significa que los tres puntos son equidistantes sobre el círculo, como nos muestra la figura 62. Estos resultados no son una coincidencia. De hecho, en los problemas 53, 54 y 55 se le pedirá demostrar que estos resultados son válidos para las raíces enésimas complejas.

FIGURA 62



■ Ahora resuelva el problema 43.

DATO HISTÓRICO

■ Babilonios, griegos y árabes consideraron a las raíces cuadradas de cantidades negativas como imposibles y a las ecuaciones con soluciones complejas como irresolubles. El primer indicio de que existía alguna conexión entre las soluciones reales de las ecuaciones y los números complejos, surgió cuando Girolamo Cardano (1501-1576) y Tartaglia (1499-1557) determinaron raíces reales de ecuaciones cúbicas considerando raíces cúbicas de cantidades complejas. A partir de entonces y durante varios siglos, los matemáticos trabajaron con números complejos sin confiar mucho en su existencia real. Al parecer fue John Wallis el primero en sugerir (en 1673) la representación gráfica de los números complejos, una idea realmente significativa que no fue aprovechada sino hasta 1800. Varias personas, entre ellas Karl Friedrich Gauss (1777-1855), redescubrieron la idea y así la representación gráfica ayudó a establecer los números complejos como miembros legítimos de la familia de los números. En las aplicaciones prácticas, los números complejos encontraron uso amplio en el área de la corriente eléctrica alterna, donde son una herramienta de uso común, y la física subatómica.■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. En el problema 83, ejercicio 3.5, vimos que $x = 2$ era una solución de la ecuación cúbica $x^3 - 6x + 4 = 0$. Recuerde que no podíamos aplicar el método de Cardano y Tartaglia pues nos conducía a la raíz cúbica de un número complejo. Utilice el teorema de De Moivre para determinar la raíz cúbica y concluir el problema.

2. La fórmula cuadrática funciona perfectamente si los coeficientes son números complejos. Resuelva lo siguiente, con ayuda del teorema de De Moivre en caso necesario. [*Nota:* Las respuestas son "simples."]
(a) $z^2 - (2 + 5i)z - 3 + 5i = 0$ (b) $z^2 - (1 + i)z - 2 - i = 0$ ■

8.6

Ejercicio 8.6

En los problemas del 1 al 12, haga la gráfica de cada número complejo en el plano complejo y escríbalo en forma polar. Exprese el argumento en grados.

1. $1 + i$ **2.** $-1 + i$ **3.** $\sqrt{3} - i$ **4.** $1 - \sqrt{3}i$
5. $-3i$ **6.** -2 **7.** $4 - 4i$ **8.** $9\sqrt{3} + 9i$
9. $3 - 4i$ **10.** $2 + \sqrt{3}i$ **11.** $-2 + 3i$ **12.** $\sqrt{5} - i$

En los problemas del 13 al 22 escriba cada número complejo en forma rectangular.

13. $2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$ **14.** $3(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°)$ **15.** $4\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right)$

16. $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right)$ **17.** $3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}\right)$ **18.** $4\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$

19. $0.2(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$ **20.** $0.4(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$ **21.** $2\left(\cos \frac{\pi}{18} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{18}\right)$

22. $3\left(\cos \frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}\right)$

En los problemas del 23 al 30 determine zw y z/w. Deje la respuesta en forma polar

23. $z = 2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$
$w = 4(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

24. $z = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$
$w = \cos 100° + i \operatorname{sen} 100°$

25. $z = 3(\cos 130° + i \operatorname{sen} 130°)$
$w = 4(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

26. $z = 2(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)$
$w = 6(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$

27. $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}\right)$
$w = 2\left(\cos \frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}\right)$

28. $z = 4\left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8}\right)$
$w = 2\left(\cos \frac{9\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{16}\right)$

29. $z = 2 + 2i$
$w = \sqrt{3} - i$

30. $z = 1 - i$
$w = 1 - \sqrt{3}i$

En los problemas del 31 al 42 escriba cada expresión en la forma canónica a + bi.

31. $[4(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)]^3$ **32.** $[3(\cos 80° + i \operatorname{sen} 80°)]^3$ **33.** $\left[2\left(\cos \frac{\pi}{10} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{10}\right)\right]^5$

34. $\left[\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{16}\right)\right]^4$ **35.** $[\sqrt{3}(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)]^6$ **36.** $[\frac{1}{2}(\cos 72° + i \operatorname{sen} 72°)]^5$

37. $\left[\sqrt{5}\left(\cos \frac{3\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{16}\right)\right]^4$ **38.** $\left[\sqrt{3}\left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{18}\right)\right]^6$ **39.** $(1 - i)^5$

40. $(\sqrt{3} - i)^6$ **41.** $(\sqrt{2} - i)^6$ **42.** $(1 - \sqrt{5}i)^8$

En los problemas del 43 al 50 determine todas las raíces complejas. Deje su respuesta en forma polar, con θ en grados.

43. Las raíces cúbicas complejas de $1 + i$

44. Las raíces cuartas complejas de $\sqrt{3} - i$.

45. Las raíces cuartas complejas de $4 - 4\sqrt{3}\, i$

46. Las raíces cúbicas complejas de $-8 - 8i$.

47. Las raíces cuartas complejas de $-16i$

48. Las raíces cúbicas complejas de -8.

49. Las raíces quintas complejas de i

50. Las raíces quintas complejas de $-i$.

51. Determine las cuatro raíces complejas de la unidad (del número 1). Haga la gráfica de cada una.

52. Determine las seis raíces complejas de la unidad (del número 1). Haga la gráfica de cada una.

53. Muestre que cada raíz enésima compleja de un número complejo w distinto de cero tiene la misma magnitud que las demás.

54. Utilice el resultado del problema 53 para concluir que cada raíz enésima compleja está en un círculo con centro en el origen. ¿Cuál es el radio de ese círculo?

55. Consulte el problema 54. Muestre que las raíces enésimas complejas de un número complejo w distinto de cero son equidistantes en el círculo mencionado.

56. Demuestre la fórmula (6).

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Fórmulas

Ley de los senos	$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$
Ley de los cosenos	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
Área de un triángulo	$A = \frac{1}{2}bh$ $A = \frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma$ $A = \frac{1}{2}bc\operatorname{sen}\alpha$ $A = \frac{1}{2}ac\operatorname{sen}\beta$ $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$
Relación entre las coordenadas polares (r, θ) y las coordenadas rectangulares (x, y)	$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta$ $x^2 + y^2 = r^2\cdot \tan\theta = \dfrac{y}{x},\ x \neq 0$
Forma polar de un número complejo	Si $z = x + iy$, entonces $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, donde $r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{r}$ $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ $0 \leq \theta < 2\pi$
Teorema De Moivre	Si $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, entonces $z^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta)$, donde $n \geq 1$ es un entero positivo
Raíz enésima de un número	$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}\right)\right],\ k = 0, \ldots, n-1$

CÓMO HACER PARA

Utilizar la ley de los senos al resolver un triángulo LAA, ALA, o LLL.

Determinar el área de un triángulo.

Hacer gráficas de coordenadas polares.

Convertir de coordenadas polares a coordenadas rectangulares.

Convertir de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

Hacer gráficas de ecuaciones polares (*véase* la tabla 7).

Escribir un número complejo en forma polar, $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, $0° \leq \theta < 360°$

Utilizar el teorema de De Moivre para determinar potencias de números complejos.

Utilizar el teorema de las raíces complejas para encontrar raíces complejas

Complete en los espacios

1. Si se conocen los dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, se utiliza la ley de los __________ para determinar si la información dada no produce triángulo alguno, un triángulo o dos triángulos.
2. Si se proporcionan los tres lados de un triángulo, se utiliza la ley de los __________ para resolverlo.
3. Si se proporcionan los tres lados de un triángulo, se utiliza la fórmula de, __________ para determinar su área.
4. En coordenadas polares, el origen se llama __________, y el eje x positivo se conoce como __________ __________.
5. Otra representación en coordenadas polares para el punto $(2, \pi/3)$ es (__________, $4\pi/3$).
6. Al utilizar coordenadas polares (r, θ), el círculo $x^2 + y^2 = 2x$ adquiere la forma __________.
7. En una ecuación polar se reemplaza θ con $-\theta$. Si se obtiene una ecuación equivalente, se dice que la gráfica es simétrica respecto al __________ __________.
8. Al escribir un número complejo z en la forma polar $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, el número no negativo r es el __________ o __________ de z, y el ángulo θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, is es el __________ de z.

Cierto o falso

C F 1. Un triángulo oblicuo donde se conocen dos lados y un ángulo siempre produce al menos un triángulo.

C F 2. Dados tres lados de un triángulo, existe una fórmula para determinar su área.

C F 3. Las coordenadas polares de un punto son únicas.

C F 4. Las coordenadas rectangulares de un punto son únicas.

C F 5. Los criterios de simetría en coordenadas polares son concluyentes.

C F 6. El teorema de De Moivre es útil para elevar un número complejo a una potencia entera positiva.

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 20 determine los demás ángulos y lados de cada triángulo, si éste existe. Si no existe triángulo, indíquelo.

1. $\alpha = 50°, \beta = 30°, a = 1$
2. $\alpha = 10°, \gamma = 40°, c = 2$
3. $\alpha = 100°, a = 5, c = 2$
4. $a = 2, c = 5, \alpha = 60°$
5. $a = 3, c = 1, \gamma = 110°$
6. $a = 3, c = 1, \gamma = 20°$
7. $a = 3, c = 1, \beta = 100°$
8. $a = 3, b = 5, \beta = 80°$
9. $a = 2, b = 3, c = 1$
10. $a = 10, b = 7, c = 8$
11. $a = 1, b = 3, \gamma = 40°$
12. $a = 4, b = 1, \gamma = 100°$
13. $a = 5, b = 3, \alpha = 80°$
14. $a = 2, b = 3, \alpha = 20°$
15. $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = \frac{4}{3}$
16. $a = 3, b = 2, c = 2$
17. $a = 3, \alpha = 10°, b = 4$
18. $a = 4, \alpha = 20°, \beta = 100°$
19. $c = 5, b = 4, \alpha = 70°$
20. $a = 1, b = 2, \gamma = 60°$

En los problemas del 21 al 30 determine el área de cada triángulo.

21. $a = 2, b = 3, \gamma = 40°$
22. $b = 5, c = 4, \alpha = 20°$
23. $b = 4, c = 10, \alpha = 70°$
24. $a = 2, b = 1, \gamma = 100°$
25. $a = 4, b = 3, c = 5$
26. $a = 10, b = 7, c = 8$
27. $a = 4, b = 2, c = 5$
28. $a = 3, b = 2, c = 2$
29. $\alpha = 50°, \beta = 30°, a = 1$
30. $\alpha = 10°, \gamma = 40°, c = 3$

En los problemas del 31 al 36, trace los puntos dados en coordenadas polares y determine sus coordenadas rectangulares.

31. $(3, \pi/6)$
32. $(4, 2\pi/3)$
33. $(-2, 4\pi/3)$
34. $(-1, 5\pi/4)$
35. $(-3, -\pi/2)$
36. $(-4, -\pi/4)$

En los problemas del 37 al 42 se proporcionan las coordenadas rectangulares de un punto. Determine dos pares de coordenadas polares (r, θ) para cada punto, una con $r > 0$ y la otra con $r < 0$. Exprese θ en radianes.

37. $(-3, 3)$ **38.** $(1, -1)$ **39.** $(0, -2)$

40. $(2, 0)$ **41.** $(3, 4)$ **42.** $(-5, 12)$

En los problemas del 43 al 48 las letras x y y representan coordenadas rectangulares. Escriba cada ecuación con coordenadas polares (r, θ).

43. $3x^2 + 3y^2 = 6y$ **44.** $2x^2 - 2y^2 = 5y$ **45.** $2x^2 - y^2 = \dfrac{y}{x}$

46. $x^2 + 2y^2 = \dfrac{y}{x}$ **47.** $x(x^2 + y^2) = 4$ **48.** $y(x^2 - y^2) = 3$

En los problemas del 49 al 54 escriba cada ecuación polar como una ecuación en coordenadas rectangulares (x, y).

49. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ **50.** $3r = \operatorname{sen} \theta$ **51.** $r = 5$

52. $\theta = \pi/4$ **53.** $r \cos \theta + 3r \operatorname{sen} \theta = 6$ **54.** $r^2 \tan \theta = 1$

En los problemas del 55 al 60 haga la gráfica de cada ecuación. Asegúrese de verificar la simetría.

55. $r = 4 \cos \theta$ **56.** $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ **57.** $r = 3 - 3 \operatorname{sen} \theta$

58. $r = 2 + \cos \theta$ **59.** $r = 4 - \cos \theta$ **60.** $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$

En los problemas del 61 al 64 escriba cada número complejo en forma polar. Exprese cada argumento en grados.

61. $-1 - i$ **62.** $-\sqrt{3} + i$ **63.** $4 - 3i$ **64.** $3 - 2i$

En los problemas del 65 al 70 escriba cada número complejo en la forma $a + bi$.

65. $2(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$ **66.** $3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ **67.** $3\left(\cos \dfrac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}\right)$

68. $4\left(\cos \dfrac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}\right)$ **69.** $0.1(\cos 350° + i \operatorname{sen} 350°)$ **70.** $0.5(\cos 160° + i \operatorname{sen} 160°)$

En los problemas del 71 al 76 determine zw y z/w. Deje sus respuestas en forma polar.

71. $z = \cos 80° + i \operatorname{sen} 80°$
$w = \cos 50° + i \operatorname{sen} 50°$

72. $z = \cos 205° + i \operatorname{sen} 205°$
$w = \cos 85° + i \operatorname{sen} 85°$

73. $z = 3\left(\cos \dfrac{9\pi}{5} + i \operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{5}\right)$
$w = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{5}\right)$

74. $z = 2\left(\cos \dfrac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{3}\right)$
$w = \cos 340° + i \operatorname{sen} 340°$

75. $z = 5(\cos 10° + i \operatorname{sen} 10°)$
$w = 3\left(\cos \dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)$

76. $z = 4(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)$
$w = \cos 355° + i \operatorname{sen} 355°$

En los problemas del 77 al 84 escriba cada expresión en la forma canónica $a + bi$.

77. $[3(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)]^3$ **78.** $[2(\cos 50° + i \operatorname{sen} 50°)]^3$ **79.** $\left[\sqrt{2}\left(\cos \dfrac{5\pi}{8} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{8}\right)\right]^4$

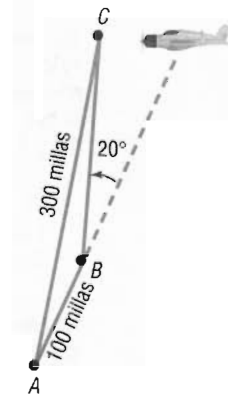
80. $\left[2\left(\cos \dfrac{5\pi}{16} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{16}\right)\right]^4$ **81.** $(1 - \sqrt{3}\, i)^6$ **82.** $(2 - 2i)^8$

83. $(3 + 4i)^4$ **84.** $(1 - 2i)^4$

85. Determine todas las raíces cúbicas complejas de 27.

86. Determine todas las raíces cuartas complejas de -16.

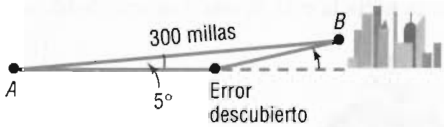
87. *Navegación aérea.* Mientras un avión viaja de la ciudad A a la ciudad B, a una distancia de 100 millas, gira en ángulo de 20° y se dirige hacia la ciudad C, como indica la figura. Si la distancia de A a C es de 300 millas, ¿a qué distancia está la ciudad B de la ciudad C?



88. *Corrección de un error de navegación.* Dos ciudades, A y B, se encuentran a 300 millas de distancia entre sí. Al volar de la ciudad A a la ciudad B, un piloto lleva un curso con 5° de error.

(a) Si el error se descubre después de volar 10 minutos a una velocidad constante de 420 millas por hora, ¿con qué ángulo debe girar el piloto para corregir el curso? (Consulte la figura.)

(b) ¿Qué nueva velocidad constante debe mantenerse de modo que no se pierda tiempo por el error? (Suponga que la velocidad hubiera sido constante e igual a 420 millas por hora de no haber equivocado el curso.)

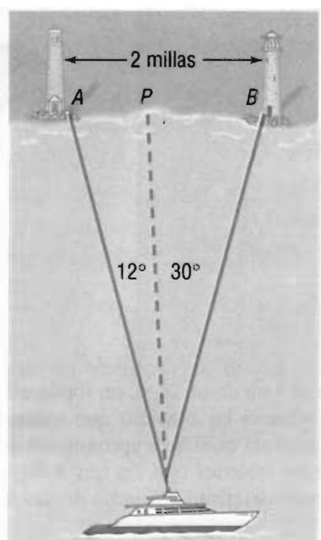


89. *Determinación de distancias en el mar.* El timonel de un barco en el mar observa dos faros que sabe están separados por una distancia de 2 millas a lo largo de una costa recta. Él determina que los ángulos formados entre dos líneas de visión desde los faros y la línea del barco que va directamente hacia la costa son 12° y 30°. *Véase* la ilustración.

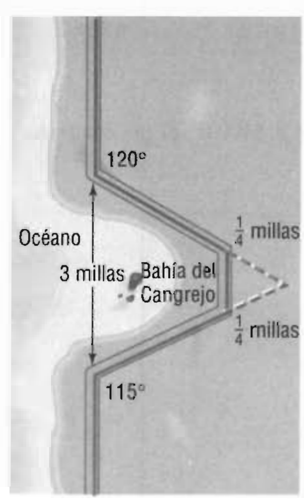
(a) ¿A qué distancia se encuentra el barco del faro A?

(b) ¿A qué distancia del faro B?

(c) ¿A qué distancia de la costa?



90. *Construcción de una carretera.* Se construye una carretera cuyas direcciones principales son norte-sur a lo largo de la costa de Florida. Cerca de Naples, una bahía obstruye el trayecto recto de la carretera. Como el costo de un puente es prohibitivo, los ingenieros deciden rodear la bahía. La ilustración muestra el trayecto decidido y las medidas tomadas. ¿Cuál es la longitud de carretera necesaria para rodear la bahía?

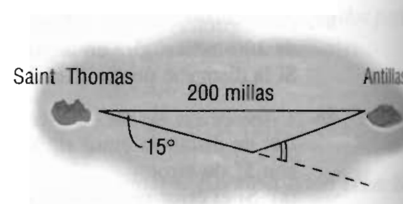


91. *Corrección de un error de navegación.* Un yate sale de Saint Thomas hacia una isla de las Antillas, a 200 millas de distancia. Con velocidad constante de 18 millas por hora, navega entre fuertes corrientes y vientos cruzados, la tripulación ve que después de 4 horas el bote está fuera de curso por 15°.

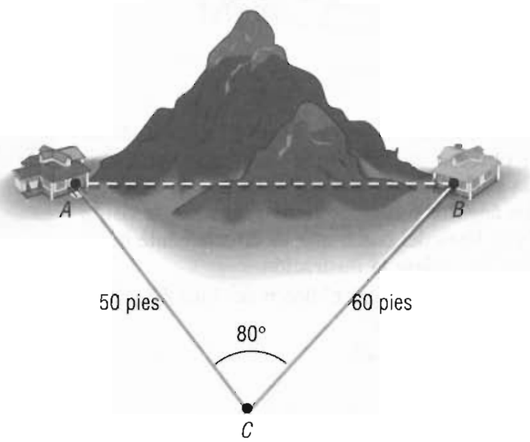
(a) ¿A qué distancia está el bote de la isla en ese momento?

(b) ¿Qué ángulo debe girar para corregir su curso?

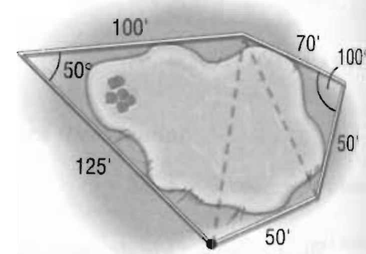
(c) ¿Cuánto tiempo se agrega al viaje debido a la desviación? (Suponga que la velocidad permanece constante e igual a 18 millas por hora.)



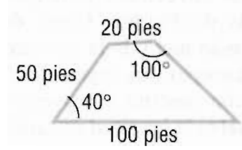
92. *Topografía.* Dos casas están localizadas en lados opuestos de una pequeña colina. Véase la ilustración. Para medir la distancia entre ellas, un topógrafo camina 50 pies desde la casa A hasta el punto C, utiliza un tránsito para medir el ángulo ACB, que resulta ser de 80°, y después camina hacia la casa B, una distancia de 60 pies. ¿Cuál es la distancia entre las casas?



93. *Aproximación del área de un lago.* Para calcular aproximadamente el área de un lago, un topógrafo camina alrededor de su perímetro y toma las medidas que aparecen en la ilustración. Con esta técnica, ¿cuál es el área aproximada del lago? [*Sugerencia:* utilice la ley de los cosenos con los tres triángulos que aparecen en la figura y después determine la suma de sus áreas.]



94. *Cálculo del costo de la tierra.* El terreno irregular de la figura se vende a $100.00 el pie cuadrado. ¿Cuál es el costo del terreno?



Capítulo 9

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de iniciar este capítulo, revise los conceptos siguientes:

Fórmula de distancia (p. 54).
Completar el cuadrado (apéndice A, sección A.3).
Intersecciones (p. 59).
Simetría (pp. 59 y 60).
Círculos (pp. 63-66).
Fórmula para ángulo doble y medio ángulo (sección 7.3).
Coordenadas polares (sección 8.4).
Amplitud y periodo de gráficas senoidales (p. 392).

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Panorama Antenas parabólicas

Una antena parabólica tiene la figura de un ***paraboloide de revolución;*** *una superficie que se forma al hacer girar una parábola alrededor de su eje de simetría. Las señales que provienen de un satélite chocan en la superficie de una antena parabólica y son reflejadas hacia un solo punto, donde está colocado el receptor. Si la antena mide 8 pies de diámetro en su abertura y tiene 3 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe ser colocado el receptor? [ejemplo 8 en la sección 9.2].* ■

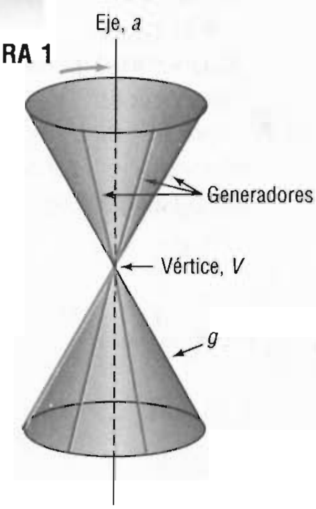
Apolonio (200 a. C.) fue uno de los primeros estudiosos de las cónicas y descubrió algunas de sus interesantes propiedades. En la actualidad se estudian aún las cónicas por sus múltiples usos. Los paraboloides de revolución (parábolas giradas alrededor de su eje de simetría) son usados como receptores de señales (por ejemplo, las antenas parabólicas utilizadas en los sistemas de radar y de televisión por cable), como receptores de energía solar y como reflectores (telescopios, proyección de luz, etc.). Los planetas giran alrededor del Sol en órbitas aproximadamente *elípticas*. Las superficies elípticas pueden ser usadas para reflejar señales como la luz y el sonido desde un lugar a otro. Y las hipérbolas pueden ser empleadas para determinar la ubicación de barcos en el mar.

Los griegos aplicaron los métodos de geometría euclidiana para estudiar las cónicas. Nosotros nos serviremos de los métodos más poderosos de geometría analítica, combinando el álgebra y la geometría, para nuestro estudio de las cónicas. Así, daremos una descripción geométrica de cada cónica y luego, por medio de coordenadas rectangulares y de la fórmula de distancia, encontraremos las ecuaciones que representen cónicas. Recuerde que nos valimos de este procedimiento cuando definimos un círculo en la sección 1.6.

Este capítulo termina con una sección sobre ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares, seguido por un estudio de curvas planas y coordenadas paramétricas.

9.1 Preliminares

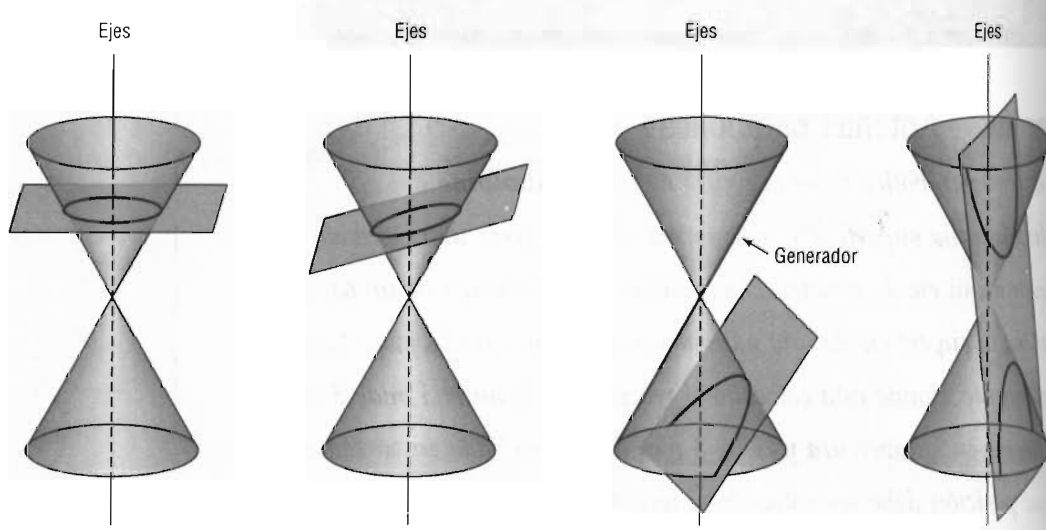
FIGURA 1



La palabra *cónica* se deriva de *cono*, una figura geométrica que puede ser construida de la siguiente manera: Sean a y g dos rectas distintas que se cortan en un punto V. Manteniendo la recta a fija, se hace girar la recta g alrededor de a manteniendo el mismo ángulo entre a y g. Al conjunto de puntos generados por la recta g se le llama **cono (circular recto).** *Véase* la figura 1. La recta fija a es llamada **eje** del cono; el punto V es su **vértice;** las rectas que pasan por V y forman el mismo ángulo con a y g son llamadas **generadores** del cono. Así, cada generador es una recta que pertenece por completo al cono. El cono está constituido por dos partes, llamadas **mantos** (u hojas), que se cortan en el vértice.

Las **cónicas,** una abreviación de **secciones cónicas,** son curvas que resultan de la intersección de un cono (circular recto) y un plano. Las cónicas que estudiaremos en este capítulo surgen cuando el plano no contiene al vértice, como se muestra en la figura 2. Estas cónicas son **círculos** cuando el plano es perpendicular al eje del cono y corta a cada generador del cono; son **elipses** cuando el plano está ligeramente inclinado de modo que corta a cada generador pero sólo en un manto del cono; son **parábolas** cuando el plano es más inclinado de manera que sea paralelo a un (y sólo uno) generador y corta sólo a un manto del cono; y son **hipérbolas** cuando el plano corta a ambos mantos.

FIGURA 2



(a) Círculo **(b)** Elipse **(c)** Parábola **(d)** Hipérbola

Si el plano contiene al vértice, su intersección con el cono es un punto, una recta, o un par de rectas que se cortan. Éstas, por lo regular, son llamadas **cónicas degeneradas.**

9.2 La parábola

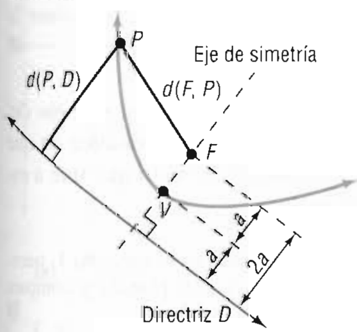
Establecimos anteriormente (sección 3.1) que la gráfica de una función cuadrática es una parábola. En esta sección, empezaremos con una definición geométrica de parábola y la usaremos para obtener una ecuación.

Parábola

Una **parábola** se define como el conjunto de todos los puntos P en el plano que están a la misma distancia de un punto fijo F y de una recta fija D. El punto F es llamado foco de la parábola; la recta D es la **directriz** de la parábola. Como consecuencia, una parábola es el conjunto de puntos P para los cuales

$$d(F, P) = d(P, D) \tag{1}$$

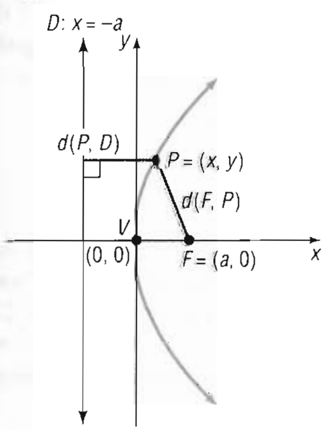
FIGURA 3



La figura 3 muestra una parábola. La recta que pasa por el foco F y es perpendicular a la directriz D es llamada **eje de simetría.** El punto de intersección de la parábola con su eje de simetría es llamado **vértice** V.

Ya que el vértice V pertenece a la parábola, debe satisfacer la ecuación (1): $d(F, V) = d(V, D)$. Así, el vértice es el punto medio entre el foco y la directriz. Hacemos a igual a la distancia $d(F, V)$ de F a V. Ahora estamos preparados para deducir la ecuación de una parábola. Para hacer esto, usamos un sistema de coordenadas rectangulares, colocado de modo que el vértice V, el foco F y la directriz D de la parábola estén ubicados de manera adecuada. Si ubicamos al vértice F en el origen (0, 0), entonces podremos colocar al foco F en cualquiera de los ejes x o y.

FIGURA 4
$y^2 = 4ax$



Primero, consideremos el caso cuando el foco F está sobre la parte positiva del eje x, como se muestra en la figura 4. Dado que la distancia desde F hasta V es a, las coordenadas de F serán $(a, 0)$ con $a > 0$. De manera análoga, ya que la distancia desde V a la directriz D también es a y como D debe ser perpendicular al eje x (ya que es el eje de simetría), la ecuación de la directriz D debe ser $x = -a$. Ahora, si $P = (x, y)$ es cualquier punto en la parábola, entonces P debe satisfacer la ecuación (1):

$$d(F, P) = d(P, D)$$

De esta manera tenemos

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = |x + a| \qquad \text{Usar al fórmula de distancia.}$$
$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$
$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$y^2 = 4ax$$

Teorema

Ecuación de una parábola; vértice en (0, 0), foco en $(a, 0)$, $a > 0$

La ecuación de una parábola con vértice en (0, 0), foco en $(a, 0)$ y directriz $x = -a$, $a > 0$, es

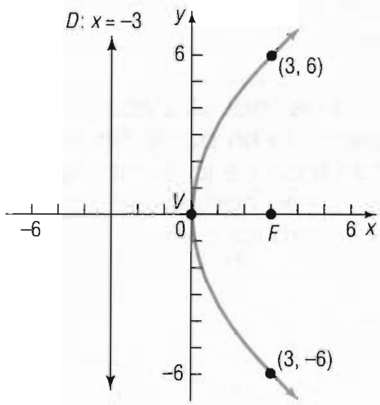
$$y^2 = 4ax \tag{2}$$

■

EJEMPLO 1 *Determinación de la ecuación de una parábola*

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en (0, 0) y foco en (3, 0). Trazar la gráfica de la ecuación.

FIGURA 5
$y^2 = 12x$



Solución La distancia desde el vértice (0, 0) al foco (3, 0) es $a = 3$. Con base en la ecuación (2), la ecuación de esta parábola es

$$y^2 = 4ax$$
$$y^2 = 12x \quad a = 3$$

Para trazar la gráfica de esta parábola resulta útil trazar los dos puntos en la gráfica arriba y abajo del foco. Para localizarlos, hacemos $x = 3$. Entonces

$$y^2 = 12x = 36$$
$$y = \pm 6$$

Los puntos en la parábola arriba y abajo del foco son (3, −6) y (3, 6). *Véase* la figura 5. ■

En general, los puntos en la parábola $y^2 = 4ax$ que están arriba y abajo del foco $(a, 0)$, quedan cada uno a una distancia de $2a$ del foco. Esto se deduce de que si $x = a$ entonces $y^2 = 4ax = 4a^2$, o $y = \pm 2a$. El segmento de recta que une a estos dos puntos es llamado **lado recto;** su longitud es $4a$.

Comentario: Para trazar la gráfica de la parábola $y^2 = 12x$ analizada en el ejemplo 1, necesitamos trazar la gráfica de las dos funciones $y = \sqrt{12x}$ y $y = -\sqrt{12x}$. Hágalo y compare su resultado con la figura 5. ■

■ Ahora resuelva el problema 9.

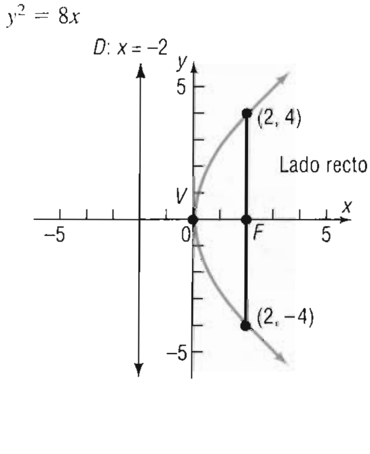
Al invertir los pasos usados para obtener la ecuación (2), se concluye que la gráfica de una ecuación con esta forma es una parábola; su vértice está en (0, 0), su foco en $(a, 0)$, su directriz es la recta $x = -a$, y su eje de simetría es el eje x.

Para el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" significará encontrar el vértice, el foco, la directriz de la parábola y trazar su gráfica.

EJEMPLO 2 *Análisis de la ecuación de una parábola*

Analizar la ecuación: $y^2 = 8x$

FIGURA 6
$y^2 = 8x$



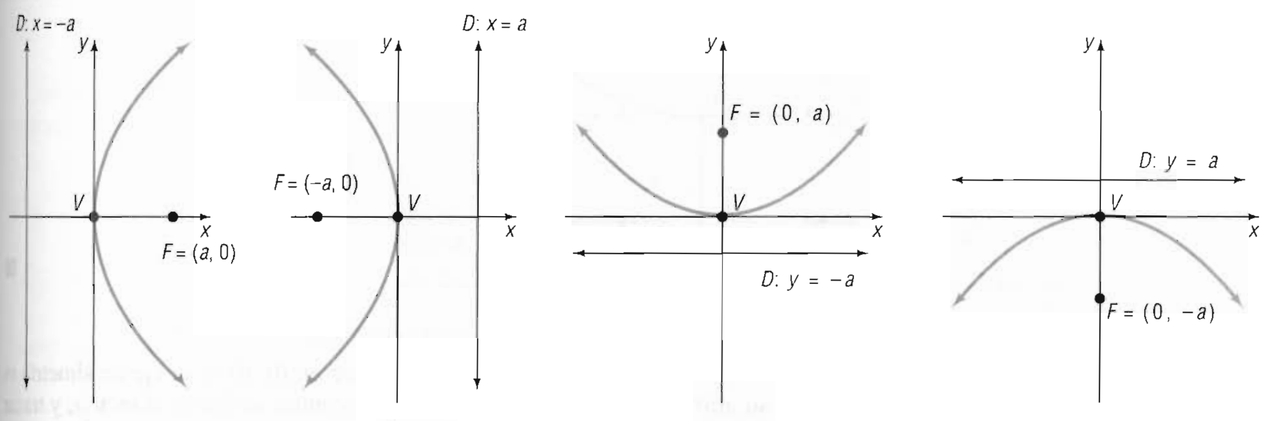
Solución La ecuación $y^2 = 8x$ es de la forma $y^2 = 4ax$, donde $4a = 8$. Así, $a = 2$. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en (0, 0) y foco sobre la parte positiva del eje x en (2, 0). La directriz es la recta vertical $x = -2$. Los dos puntos que definen el lado recto se obtienen haciendo $x = 2$. Entonces $y^2 = 16$, o $y = \pm 4$. Estos puntos ayudan a trazar la gráfica de la parábola, ya que determinan la *abertura* de la gráfica. *Véase* la figura 6.

Recuerde que llegamos a la ecuación (2) después de colocar el foco sobre la parte positiva del eje x. Si el foco es colocado en la parte negativa del eje x, en la parte positiva del eje y o en su parte negativa, se obtiene una forma diferente de la ecuación para la parábola. Las cuatro formas de la ecuación de una parábola con vértice en un eje de coordenadas a una distancia a del origen (0, 0) están dadas en la tabla 1, y sus gráficas se aprecian en el figura 7. Obsérvese que cada gráfica es simétrica respecto a su eje de simetría.

TABLA 1 ECUACIONES DE UNA PARÁBOLA: VERTICE EN (0, 0); FOCO EN EL EJE; $a > 0$

VÉRTICE	FOCO	DIRECTRIZ	ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(0, 0)	$(a, 0)$	$x = -a$	$y^2 = 4ax$	Parábola, el eje de simetría es el eje x, abre hacia la derecha
(0, 0)	$(-a, 0)$	$x = a$	$y^2 = -4ax$	Parábola, el eje de simetría es el eje x, abre hacia la izquierda
(0, 0)	$(0, a)$	$y = -a$	$x^2 = 4ay$	Parábola, el eje de simetría es el eje y, abre hacia arriba
(0, 0)	$(0, -a)$	$y = a$	$x^2 = -4ay$	Parábola, el eje de simetría es el eje y, abre hacia abajo

FIGURA 7



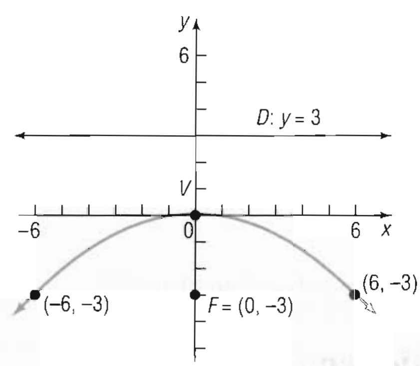
(a) $y^2 = 4ax$ (b) $y^2 = -4ax$ (c) $x^2 = 4ay$ (d) $x^2 = -4ay$

EJEMPLO 3 *Análisis de la ecuación de una parábola*

Analizar la ecuación: $x^2 = -12y$

Solución La ecuación $x^2 = -12y$ es de forma $x^2 = -4ay$, con $a = 3$. En consecuencia, la gráfica de la ecuación es una parábola con vértice en (0, 0), foco en (0, −3) y cuya directriz es la recta $y = 3$. La parábola abre hacia abajo y su eje de simetría es el eje y. Para obtener los puntos que definen el lado recto hacemos $y = -3$. Entonces $x^2 = 36$, o $x = \pm 6$. *Véase* la figura 8.

FIGURA 8
$x^2 = -12y$



■

■ Ahora resuelva el problema 27.

EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación de una parábola*

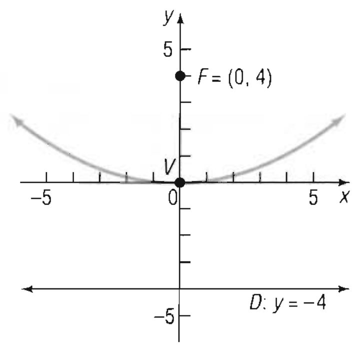
Encontrar la ecuación de la parábola con foco en (0, 4) y directriz $y = -4$. Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución Una parábola con foco en (0, 4) y cuya directriz es la recta horizontal $y = -4$, tendrá su vértice en (0, 0). (¿Advierte por qué? Porque el vértice está a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz.) Así, la ecuación de esta parábola es de la forma $x^2 = 4ay$, con $a = 4$; esto es,

$$x^2 = 16y$$

La figura 9 muestra la gráfica.

FIGURA 9
$x^2 = 16y$



EJEMPLO 5 *Determinación de la ecuación de una parábola*

Encontrar la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) si su eje de simetría es el eje x y su gráfica contiene al punto $(-\frac{1}{2}, 2)$. Encontrar su foco y directriz, y trazar la gráfica de la ecuación.

Solución Ya que el vértice está en el origen y el eje de simetría es el eje x, vemos de la tabla 1 que la forma de la ecuación es

$$y^2 = kx$$

Como el punto $(-\frac{1}{2}, 2)$ está en la parábola, las coordenadas $x = -\frac{1}{2}$, $y = 2$, deben satisfacer la ecuación. Poniendo $x = -\frac{1}{2}$ y $y = 2$ en la ecuación, encontramos

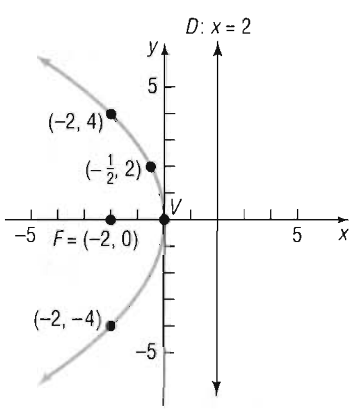
$$4 = k(-\tfrac{1}{2})$$
$$k = -8$$

Así, la ecuación de la parábola es

$$y^2 = -8x$$

Al comparar esta ecuación con $y^2 = -4ax$, encontramos que $a = 2$. Por lo tanto, el foco está en $(-2, 0)$, y la directriz es la recta $x = 2$. Haciendo $x = -2$, encontramos $y^2 = 16$ o $y = \pm 4$. Los puntos $(-2, 4)$ y $(-2, -4)$ definen el lado recto. *Véase* la figura 10.

FIGURA 10
$y^2 = -8x$



■ Ahora resuelva el problema 19.

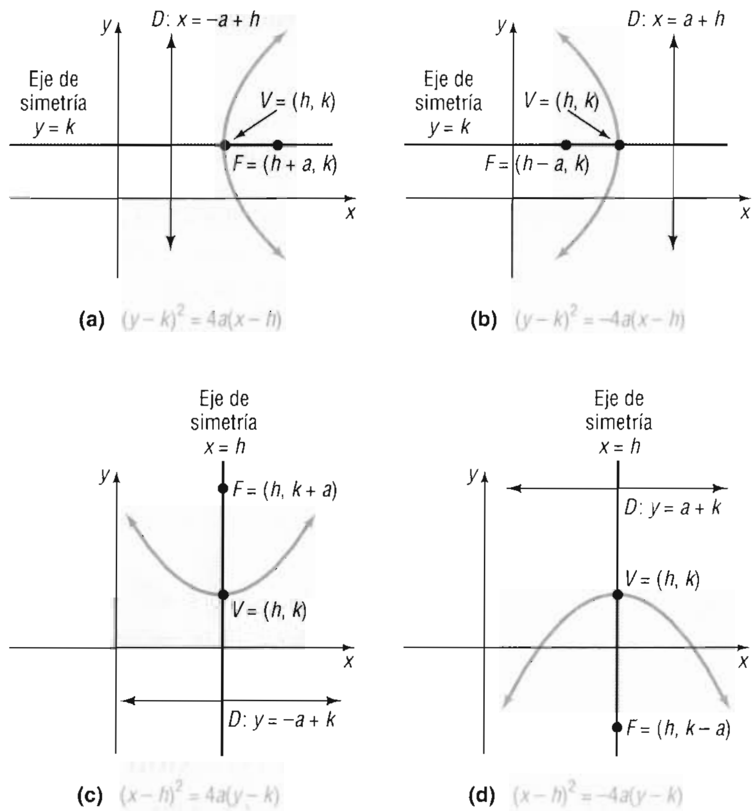
Vértice en (h, k)

Si una parábola con vértice en el origen y eje de simetría a lo largo de uno de los ejes de coordenadas es recorrida h unidades horizontalmente y luego k unidades verticalmente, el resultado será una parábola con vértice en (h, k) y eje de simetría paralelo a un eje de coordenadas. Las ecuaciones de tales parábolas tienen la misma forma que las de la tabla 1, pero con x reemplazada por $x - h$ y y reemplazada por $y - k$. La tabla 2 nos da las formas de las ecuaciones de tales parábolas. La figura 11 ilustra las gráficas para $h > 0$, $k > 0$.

TABLA 2 **PARÁBOLAS CON VÉRTICE EN (h, k), EJE DE SIMETRÍA PARALELO A UNO DE LOS EJES DE COORDENADAS, $a > 0$**

VÉRTICE	FOCO	DIRECTRIZ	ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(h, k)	$(h + a, k)$	$x = -a + h$	$(y-k)^2 = 4a(x - h)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje x, abre hacia la derecha
(h, k)	$(h - a, k)$	$x = a + h$	$(y - k)^2 = -4a(x - h)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje x, abre hacia la izquierda
(h, k)	$(h, k + a)$	$y = -a + k$	$(x - h)^2 = 4a(y - k)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje y, abre hacia arriba
(h, k)	$(h, k - a)$	$y = a + k$	$(x - h)^2 = -4a(y - k)$	Parábola, eje de simetría paralelo al eje y, abre hacia abajo

FIGURA 11



(a) $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ **(b)** $(y-k)^2 = -4a(x-h)$

(c) $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ **(d)** $(x-h)^2 = -4a(y-k)$

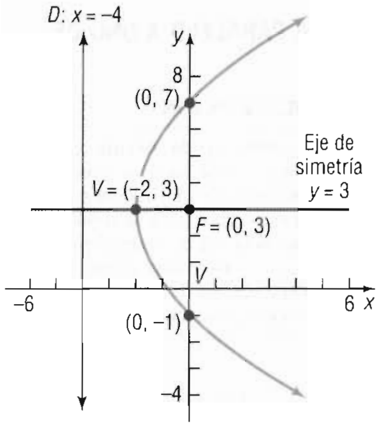
EJEMPLO 6 *Determinación de la ecuación de una parábola con vértice fuera del origen*

Encontrar una ecuación de la parábola con vértice en $(-2, 3)$ y foco en $(0, 3)$. Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución El vértice $(-2, 3)$ y el foco $(0, 3)$ están en la recta horizontal $y = 3$ (el eje de simetría). La distancia a desde $(-2, 3)$ hasta $(0, 3)$ x es $a = 2$. También, ya que el foco está a la derecha del vértice, sabemos que la parábola abre hacia la derecha. En consecuencia, la forma de la ecuación es

$$(y - k)^2 = 4a(x - h)$$

FIGURA 12
$(y-3)^2 = 8(x+2)$



donde $(h, k) = (-2, 3)$ y $a = 2$. Por lo tanto, la ecuación es

$$(y-3)^2 = 4 \cdot 2[x-(-2)]$$
$$(y-3)^2 = 8(x+2)$$

Si $x = 0$, entonces $(y-3)^2 = 16$. Así, $y - 3 = \pm 4$ y $y = -1$, $y = 7$. Los puntos $(0, -1)$ y $(0, 7)$ definen el lado recto; la recta $x = -4$ es la directriz. *Véase* la figura 12. ∎

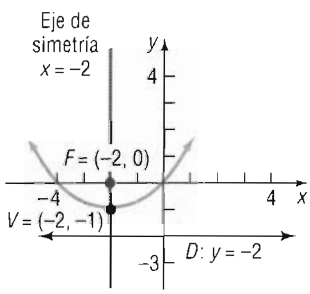
■ Ahora resuelva el problema 17.

Una ecuación polinomial define una parábola si tiene dos variables, es cuadrática en una de las variables y lineal en la otra. Para analizar este tipo de ecuación, primero completamos el cuadrado de la variable al cuadrado.

EJEMPLO 7 *Análisis de la ecuación de una parábola*

Analizar la ecuación: $x^2 + 4x - 4y = 0$

FIGURA 13
$x^2 + 4x - 4y = 0$



Solución Para analizar la ecuación $x^2 + 4x - 4y = 0$, completamos el cuadrado que involucra la variable x. Así,

$$x^2 + 4x - 4y = 0$$
$$x^2 + 4x = 4y \qquad \text{Aislar en el lado izquierdo los términos que tienen } x.$$
$$x^2 + 4x + 4 = 4y + 4 \qquad \text{Completar el cuadrado del lado izquierdo.}$$
$$(x+2)^2 = 4(y+1)$$

Esta ecuación es de la forma $(x-h)^2 = 4a(y-k)$, con $h = -2$, $k = -1$, y $a = 1$. La gráfica es una parábola con vértice en $(h, k) = (-2, -1)$ que abre hacia arriba. El foco está en $(-2, 0)$, y la directriz es la recta $y = -2$. *Véase* la figura 13. ∎

Las parábolas, por su forma, se encuentran en muchas aplicaciones. Por ejemplo, como estudiamos en la sección 5.1, los cables que sostienen los puentes colgantes adquieren la forma de una parábola. Otra cualidad importante de las parábolas, usada en las aplicaciones, es su propiedad de reflexión.

FIGURA 14
Faro buscador.

Propiedad de reflexión

Suponga que tenemos un espejo con forma de **paraboloide de revolución,** una superficie formada al girar una parábola alrededor de su eje de simetría. Si una fuente de luz (o cualquier otra fuente emisora) es colocada en el foco de la parábola, todos los rayos que emanen de ahí se reflejarán en el espejo en líneas paralelas al eje de simetría. Este principio es usado en el diseño de faros buscadores, lámparas de flash para fotografía, ciertos faros de automóviles y otros dispositivos parecidos. *Véase* la figura 14.

De manera recíproca, suponga que rayos de luz (u otras señales) emanan desde una fuente distante de modo que en esencia son paralelos. Cuando los rayos llegan a la superficie de un espejo parabólico cuyo eje de simetría es paralelo a ellos, son reflejados hacia un solo punto en el foco de dicho espejo. Este principio es usado en el diseño de algunos dispositivos de energía solar, antenas parabólicas y los espejos usados en algunos tipos de telescopios. *Véase* la figura 15.

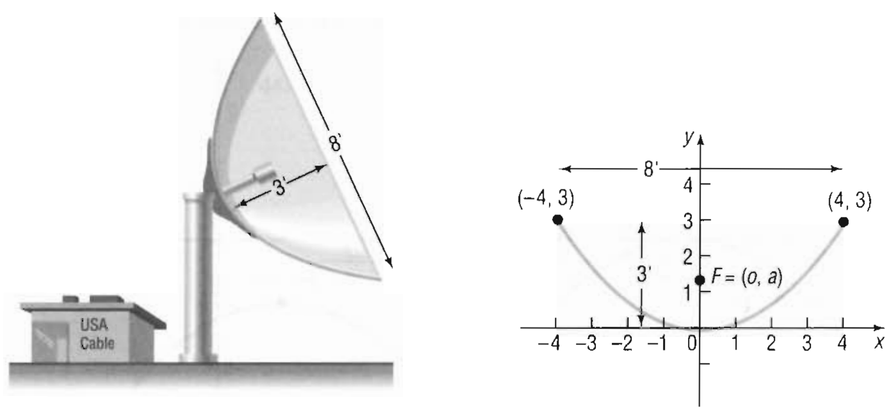
FIGURA 15

EJEMPLO 8

Antena parabólica

Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Las señales que emanan desde un satélite llegan a la superficie de la antena y son reflejadas a un solo punto, donde está colocado el receptor. Si el disco de la antena mide 8 pies de diámetro en su abertura y 3 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe estar colocado el receptor?

FIGURA 16



(a) (b)

Solución La figura 16(a) muestra el disco de la antena parabólica. En un sistema rectangular dibujamos la parábola usada para construir el disco, de modo que el vértice de la parábola esté en el origen y su foco en el eje positivo del eje y. *Véase* la figura 16(b). La forma de la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4ay$$

y su foco está en $(0, a)$. Como $(4, 3)$ es un punto en la gráfica, tenemos

$$4^2 = 4a(3)$$

$$a = \frac{4}{3}$$

El receptor debe colocarse a $1\frac{1}{3}$ pies desde la base del disco, a lo largo de su eje de simetría.

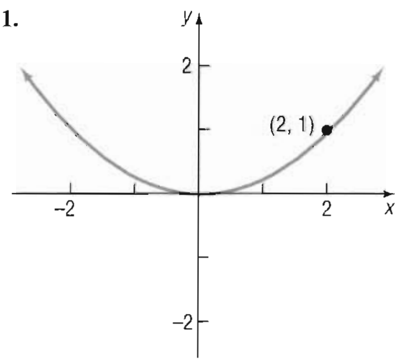
9.2

Ejercicio 9.2

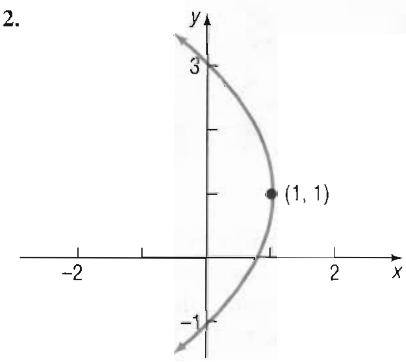
En los problemas del 1 al 8 se da la gráfica de una parábola. Haga corresponder cada gráfica con su ecuación.

A. $y^2 = 4x$	*B.* $x^2 = 4y$	*C.* $y^2 = -4x$
D. $x^2 = -4y$	*E.* $(y-1)^2 = 4(x-1)$	*F.* $(x+1)^2 = 4(y+1)$
G. $(y-1)^2 = -4(x-1)$	*H.* $(x+1)^2 = -4(y+1)$	

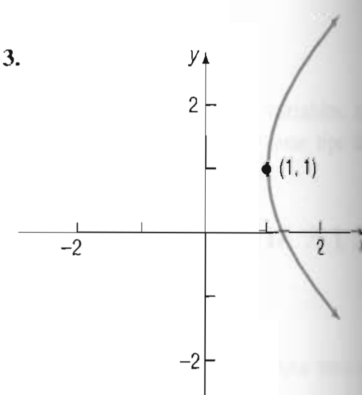
1.



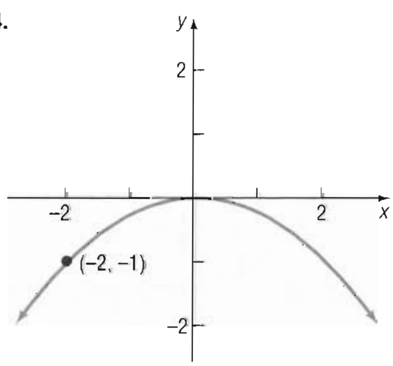
2.



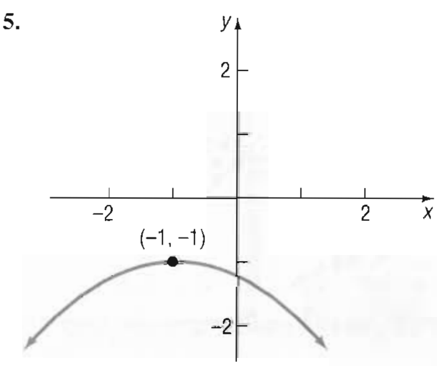
3.



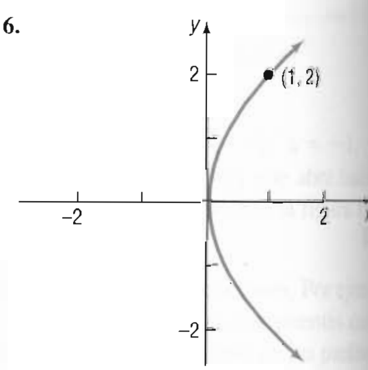
4.



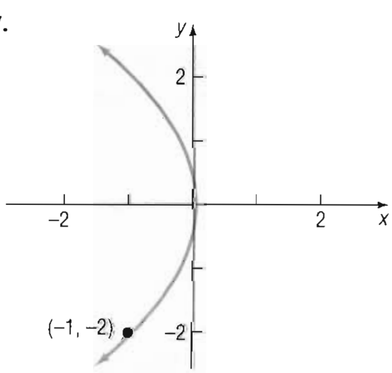
5.



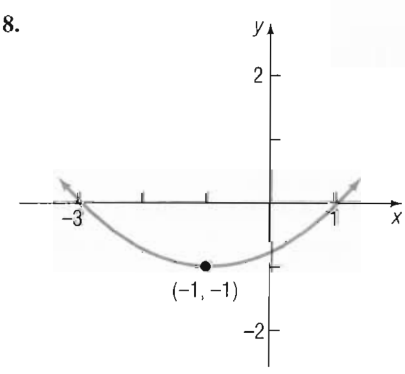
6.



7.



8.



En los problemas del 9 al 24 encuentre la ecuación de la parábola descrita. Encuentre los dos puntos que definen el lado recto y trace la gráfica de la ecuación.

9. Foco en $(4, 0)$; vértice en $(0, 0)$

10. Foco en $(0, 2)$; vértice en $(0, 0)$

11. Foco en $(0, -3)$; vértice en $(0, 0)$

12. Foco en $(-4, 0)$; vértice en $(0, 0)$

13. Foco en $(-2, 0)$; directriz la recta $x = 2$

14. Foco en $(0, -1)$; directriz la recta $y = 1$

15. Directriz la recta $y = -\frac{1}{2}$; vértice en $(0, 0)$

16. Directriz la recta $x = -\frac{1}{2}$; vértice en $(0, 0)$

17. Vértice en $(2, -3)$; foco en $(2, -5)$

18. Vértice en $(4, -2)$; foco en $(6, -2)$

19. Vértice en $(0, 0)$; eje de simetría el eje y pasa por el punto $(2, 3)$

20. Vértice en $(0, 0)$; eje de simetría el eje x-pasa por el punto $(2, 3)$

21. Foco en $(-3, 4)$; directriz la recta $y = 2$

22. Foco en $(2, 4)$; directriz la recta $x = -4$

23. Foco en $(-3, -2)$; directriz la recta $x = 1$

24. Foco en $(-4, 4)$; directriz la recta $y = -2$

En los problemas del 25 al 42 encuentre el vértice, el foco y la directriz de cada parábola. Trace la gráfica de la ecuación.

25. $x^2 = 4y$

26. $y^2 = 8x$

27. $y^2 = -16x$

28. $x^2 = -4y$

29. $(y - 2)^2 = 8(x + 1)$

30. $(x + 4)^2 = 16(y + 2)$

31. $(x - 3)^2 = -(y + 1)$

32. $(y + 1)^2 = -4(x - 2)$

33. $(y + 3)^2 = 8(x - 2)$

34. $(x - 2)^2 = 4(y - 3)$

35. $y^2 - 4y + 4x + 4 = 0$

36. $x^2 + 6x - 4y + 1 = 0$

37. $x^2 + 8x = 4y - 8$

38. $y^2 - 2y = 8x - 1$

39. $y^2 + 2y - x = 0$

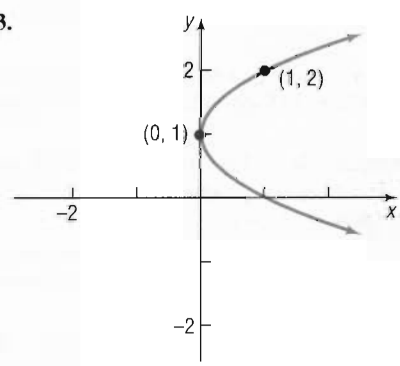
40. $x^2 - 4x = 2y$

41. $x^2 - 4x = y + 4$

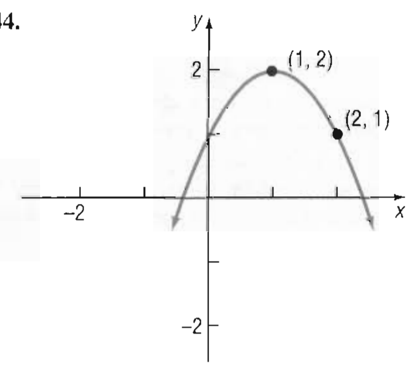
42. $y^2 + 12y = -x + 1$

En los problemas del 43 al 50 escriba una ecuación para cada parábola.

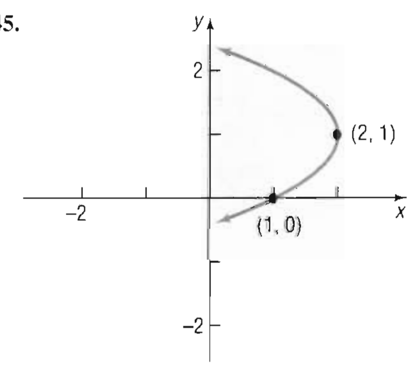
43.



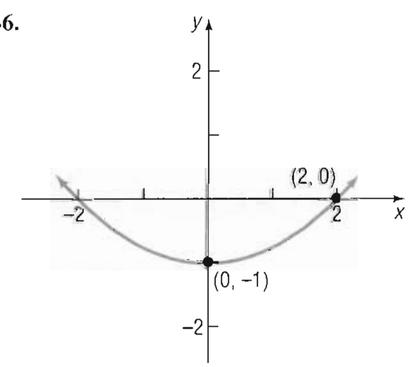
44.



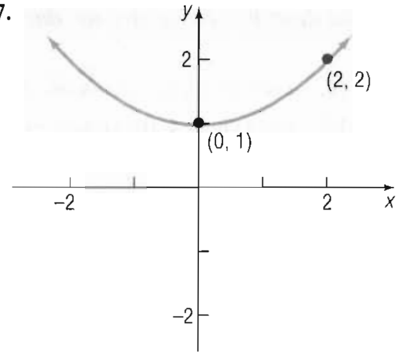
45.



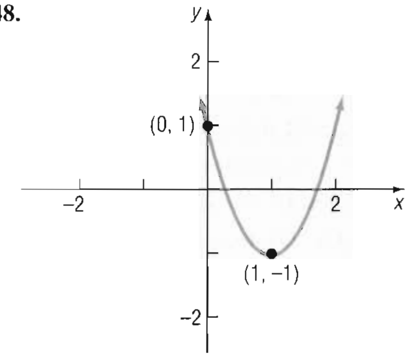
46.



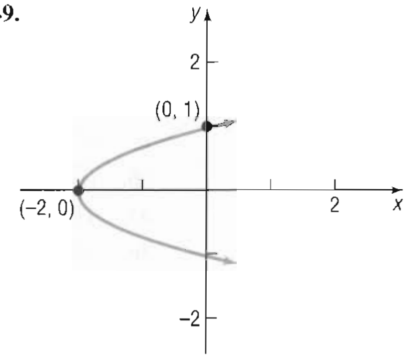
47.



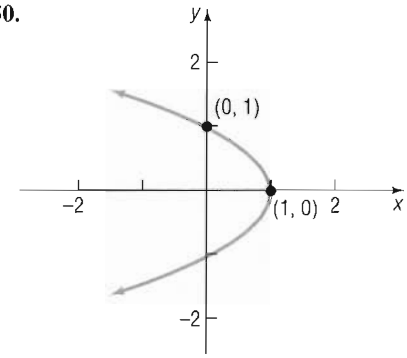
48.



49.



50.



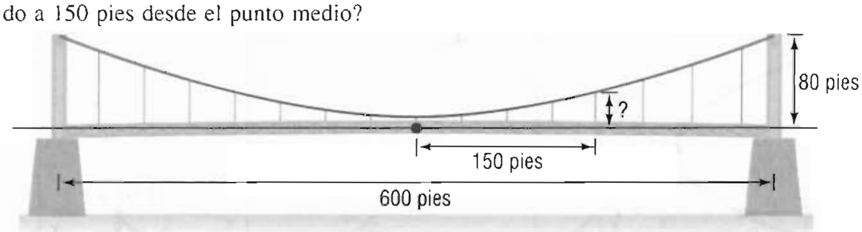
51. *Antena parabólica* Una antena parabólica tiene forma de paraboloide de revolución. Las señales que emanan de un satélite llegan a la superficie de la antena y son reflejadas a un solo punto, donde está colocado el receptor. Si el disco de la antena tiene 10 pies de diámetro en su abertura y 4 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe ser colocado el receptor?

52. *Construcción de una antena parabólica para televisión.* Una antena de televisión tiene forma de paraboloide de revolución. Encuentre la ubicación del receptor, que está colocado en el foco, si la antena mide 6 pies de diámetro en su abertura y 2 pies de profundidad.

53. *Construcción de una lámpara de flash fotográfico.* El reflector de un flash tiene la forma de un paraboloide de revolución. Su diámetro es de 4 pulgadas y su profundidad de 1 pulgada. ¿A qué distancia del vértice debe colocarse la bombilla de modo que los rayos se reflejen de manera paralela al eje?

54. *Construcción de un faro para automóvil.* Un faro para automóvil tiene forma de paraboloide de revolución. El bulbo, que está colocado en el foco, está a una pulgada del vértice. Si la profundidad es de 2 pulgadas, ¿cuál es el diámetro del faro en su abertura?

55. *Puentes colgantes.* Los cables que sostienen un puente colgante adquieren forma parabólica, como se muestra en la figura. Las torres que sostienen los cables están separadas 600 pies y son de 80 pies de altura. Si los cables tocan la superficie de la carretera a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál es la altura del cable en un punto situado a 150 pies desde el punto medio?

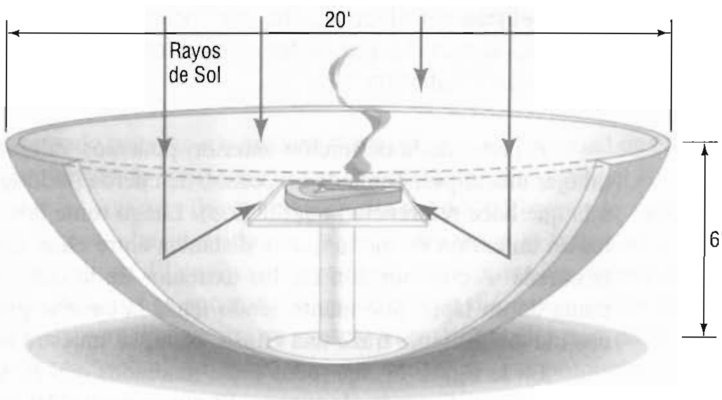


56. *Puentes colgantes.* Los cables que sostienen un puente colgante adquieren forma parabólica. Las torres que los sostienen están separadas 400 pies y son de 100 pies de altura. Si los cables están a una altura de 10 pies a la mitad de la distancia entre las torres, ¿cuál es su altura en un punto situado a 50 pies desde la torre?

57. *Faros buscadores.* Un faro buscador tiene la forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente de luz está colocada a 2 pies de la base en el eje de simetría y la abertura es de 5 pies de diámetro, ¿qué profundidad tiene el faro buscador?

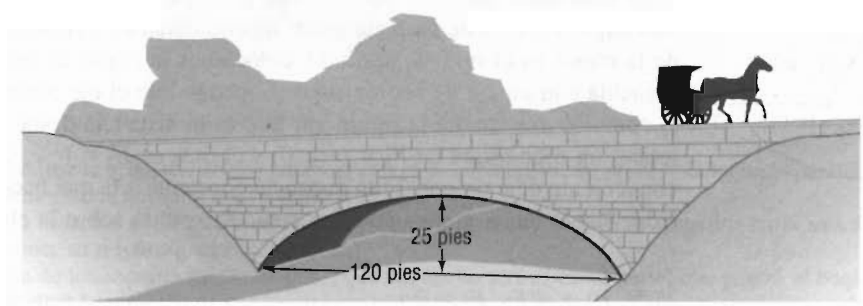
58. *Faros buscadores.* Un faro buscador tiene la forma de un paraboloide de revolución. Si la fuente luminosa está colocada a 2 pies de la base sobre el eje de simetría y la profundidad del faro es de 4 pies, ¿cuál debe ser el diámetro de la abertura?

59. *Calentador solar.* Un espejo en forma de paraboloide de revolución será usado para concentrar los rayos del Sol en su foco, creando una fuente calorífica. Si el espejo es de 20 pies de diámetro en su abertura y de 6 pies de profundidad, ¿dónde se concentrará la fuente de calor?



60. *Telescopios de reflexión.* Un telescopio de reflexión tiene un espejo en forma de paraboloide de revolución. Si el espejo es de 4 pulgadas de diámetro en su abertura y de 3 pies de profundidad, ¿dónde se concentra la luz recibida?

61. *Arco parabólico de un puente.* Un puente está construido en forma de arco parabólico. El puente tiene una extensión de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. *Véase* la ilustración. Seleccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado y encuentre la altura del arco a las distancias de 10, 30 y 50 pies desde el centro.



62. *Arco parabólico de un puente.* Un puente es construido en forma de arco parabólico y tiene una extensión de 100 pies. La altura del arco a una distancia de 40 pies desde el centro mide 10 pies. Encuentre la altura del arco en su centro.

63. Demuestre que una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Ey = 0 \qquad A \neq 0, E \neq 0$$

es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría en el eje y. Encuentre su foco y su directriz.

64. Demuestre que una ecuación de la forma

$$Cy^2 + Dx = 0 \qquad C \neq 0, D \neq 0$$

es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría en el eje x. Encuentre su foco y su directriz.

65. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad A \neq 0$$

(a) Es una parábola si $E \neq 0$.
(b) Es una recta vertical si $E = 0$ y $D^2 - 4AF = 0$.
(c) Son dos rectas verticales si $E = 0$ y $D^2 - 4AF > 0$.
(d) No tiene puntos si $E = 0$ y $D^2 - 4AF < 0$.

66. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad C \neq 0$$

(a) Es una parábola si $D \neq 0$.
(b) Es una recta vertical si $D = 0$ y $E^2 - 4CF = 0$.
(c) Son dos rectas verticales si $D = 0$ y $E^2 - 4CF > 0$.
(d) No tiene puntos si $D = 0$ y $E^2 - 4CF < 0$.

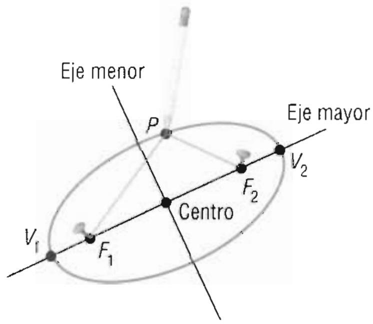
9.3

La elipse

Elipse

Una elipse es el conjunto de todos los puntos en el plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante.

FIGURA 17

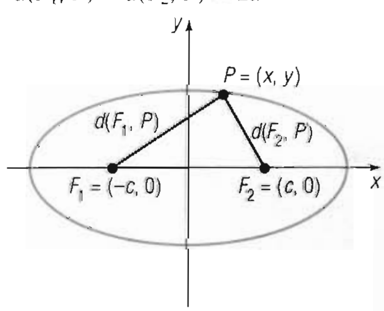


A partir de la definición anterior, podemos valernos de un medio físico para dibujar una elipse. Tome de un pedazo de cuerda (la longitud de ésta es la constante a la que hace referencia la definición). Luego tome dos clavos (los focos) y clávelos en un cartón de modo que la distancia entre ellos sea menor que la longitud de la cuerda. A continuación ate los extremos de la cuerda a los clavos y, usando la punta de un lápiz, jale manteniendo tensa la cuerda, gire el lápiz alrededor de los dos clavos. El lápiz traza una elipse, como se muestra en la figura 17.

En la figura 17, los focos están marcados con F_1 y F_2. La recta que contiene a los focos es llamada **eje mayor.** El punto medio del segmento de recta que une a los focos es llamado **centro** de la elipse. La línea que pasa por el centro y es perpendicular al eje mayor es el **eje menor.**

Los dos puntos de intersección de la elipse con el eje mayor son los **vértices**, V_1 y V_2, de la elipse. La distancia desde un vértice al otro es la **longitud del eje mayor.** La elipse es simétrica respecto a sus ejes mayor y menor.

FIGURA 18
$d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$



Con estas ideas en mente, estamos preparados para encontrar la ecuación de una elipse en un sistema rectangular de coordenadas. Primero, colocamos el centro de la elipse en el origen. Segundo, colocamos la elipse de modo que su eje mayor coincida con un eje de coordenadas. Suponga que el eje mayor coincide con el eje x, como se muestra en la figura 18. Si c es la distancia desde el centro al foco, entonces un foco estará en $F_1 = (-c, 0)$ y el otro en $F_2 = (-c, 0)$. Como veremos, es conveniente denotar con $2a$ la distancia constante a la que hace referencia la definición. Por lo tanto, si $P = (x, y)$ es cualquier punto sobre la elipse, tenemos

$$
\begin{aligned}
d(F_1, P) + d(F_2, P) &= 2a && \text{La suma de las distancias desde } P \text{ a los focos es una constante.}\\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a && \text{Usar la fórmula de distancia.}\\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Aislar un radical.}\\
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}\\
&\quad + (x-c)^2 + y^2 &&\\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Simplificar}\\
&\quad + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &&\\
4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Aislar el radical.}\\
cx - a^2 &= -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Dividir cada lado entre 4.}\\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2[(x-c)^2 + y^2] && \text{Elevar al cuadrado ambos lados otra vez.}\\
c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) &&\\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 &&\\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) && \text{Multiplicar cada lado por } -1\text{; factorizar } a^2 \text{ en el lado derecho.} \quad (1)
\end{aligned}
$$

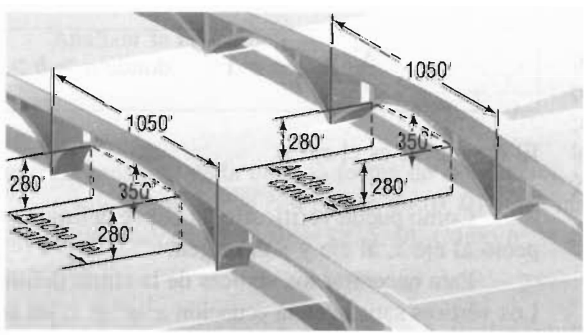
MISIÓN POSIBLE

Capítulo 9

CONSTRUCCIÓN DE UN PUENTE SOBRE EL RÍO ORIENTE

Su equipo está trabajando para las autoridades del transporte de la ciudad de Nueva York. Usted tiene que analizar dos proyectos de construcción para un nuevo puente sobre el Río Oriente en dicha ciudad. El espacio entre los soportes del puente necesita ser de 1050 pies y la altura en el centro del arco de 350 pies. Una compañía ha sugerido que la estructura tenga la forma de una parábola; otra compañía sugiere una semielipse. El equipo de ingeniería determinará las resistencias relativas de los dos proyectos; el trabajo de usted es encontrar si existe alguna diferencia en los anchos del canal.

Un buque petrolero vacío necesita un espacio libre de 280 pies para pasar por debajo del puente. Usted debe encontrar la anchura del canal en cada una de las dos propuestas.



1. Para determinar la ecuación de una parábola con estas características, primero coloque la parábola sobre ejes coordenados en una posición conveniente y dibújela.
2. ¿Cuál es la ecuación de la parábola? (Si usa punto decimal en la ecuación aproxime hasta seis decimales. Si usa fracciones su respuesta será más exacta.)
3. Si la forma de los soportes es parabólica, ¿qué tan ancho será el canal por el que pasará el buque petrolero?
4. Para determinar la ecuación de una semielipse con estas características, coloque la semielipse sobre ejes coordenados en una posición conveniente y dibújela.
5. ¿Cuál es la ecuación de la elipse? ¿Qué tan ancho deberá ser el canal por el que pasará el buque petrolero?
6. Ahora que sabe cuál de las dos alternativas proporciona el canal más ancho, considere otros factores. Su departamento también está encargado de verificar la profundidad del canal, la cantidad de tráfico en el río, y otros detalles. Por ejemplo, si hubiera una inundación en el río y el nivel del agua se elevara 10 pies, ¿cómo se afectaría el espacio libre? Tome una decisión acerca de cuál proyecto piensa que sería mejor por lo que a su departamento concierne y explique su decisión.

Para obtener puntos sobre la elipse que no estén en el eje x, es necesario que $a > c$. Para ver por qué, observe otra vez la figura 18:

$$d(F_1, P) + d(F_2, P) > d(F_1, F_2)$$ La suma de las longitudes de dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado.

$$2a > 2c$$ $d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a$; $d(F_1, F_2) = 2c$

$$a > c$$

Como $a > c$, también tenemos $a^2 > c^2$, de modo que $a^2 - c^2 > 0$. Sea $b^2 = a^2 - c^2$, $b > 0$. Entonces $a > b$ y la ecuación (1) puede ser escrita como

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Dividir cada lado entre a^2b^2.

Teorema

Una ecuación de la elipse con centro en (0, 0) y focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ es

Ecuación de una elipse; centro en (0, 0); focos en ($\pm$ c, 0); eje mayor a lo largo del eje x

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde } a > b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2 \qquad (2)}$$

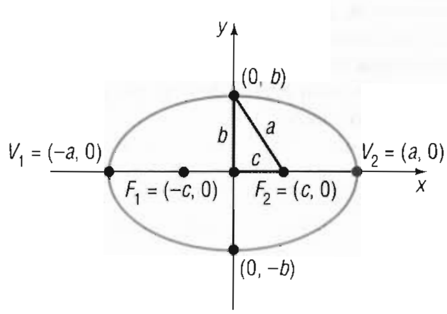
El eje mayor es el eje x. ∎

Como puede verificarlo, la elipse definida por la ecuación (2) es simétrica respecto al eje x, al eje y y al origen.

Para encontrar los vértices de la elipse definida por la ecuación (2), haga $y = 0$. Los vértices satisfacen la ecuación $x^2/a^2 = 1$, las soluciones de esto son $x = \pm a$. En consecuencia, los vértices de la elipse dada por la ecuación (2) son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$. Las intersecciones con el eje y de la elipse, se determinaron haciendo $x = 0$, tienen coordenadas $(0, -b)$ y $(0, b)$. Estas cuatro intersecciones, $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, y $(0, -b)$, son usadas para trazar la gráfica de la elipse. *Véase* la figura 19.

Obsérvese en la figura 19 el triángulo rectángulo formado con los puntos $(0, 0)$, $(c, 0)$, y $(0, b)$. Ya que $b^2 = a^2 - c^2$ (o $b^2 + c^2 = a^2$), la distancia desde el foco en $(c, 0)$ al punto $(0, b)$ es a.

FIGURA 19



EJEMPLO 1 *Determinación de la ecuación de una elipse*

Encontrar la ecuación de una elipse con centro en el origen, un foco en (3, 0) y un vértice en $(-4, 0)$. Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución

La elipse tiene su centro en el origen, y el eje mayor coincide con el eje x. Un foco está en $(c, 0) = (3, 0)$, así que $c = 3$. Un vértice está en $(-a, 0) = (-4, 0)$, así que $a = 4$. De la ecuación (2), se deduce que

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$$

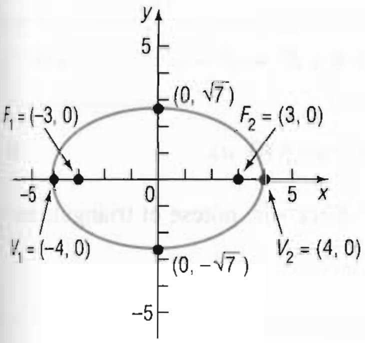
de modo que una ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

La figura 20 muestra la gráfica. ■

FIGURA 20

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$



Una ecuación de la forma de la ecuación (2), con $a > b$, es la ecuación de una elipse con centro en el origen, focos sobre el eje x en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 - b^2$ y eje mayor a lo largo del eje x.

Para el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" significará encontrar el centro, el eje mayor, los focos y vértices de la elipse y trazar la gráfica de la ecuación.

EJEMPLO 2 *Análisis de la ecuación de una elipse*

Analizar la ecuación:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Solución

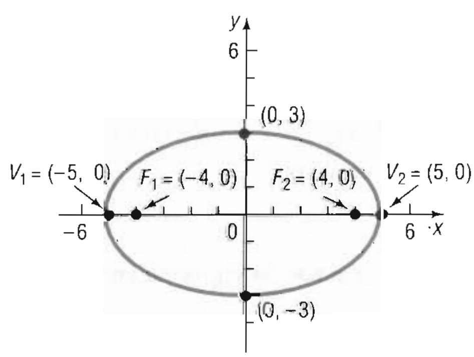
La ecuación dada tiene la forma de la ecuación (2), con $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$. Corresponde a una elipse con centro en $(0, 0)$ y eje mayor a lo largo del eje x. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 5, 0)$. Como $b^2 = a^2 - c^2$, encontramos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$$

Los focos están en $(\pm c, 0) = (\pm 4, 0)$. La figura 21 muestra la gráfica.

FIGURA 21

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$



■

Comentario: Para trazar la gráfica de la elipse $(x^2/25) + (y^2/9) = 1$ analizada en el ejemplo 2, necesitamos trazar la gráfica de las dos funciones $y = 3\sqrt{1 - (x^2/25)}$ y $y = -3\sqrt{1 - (x^2/25)}$. Hágalo y compare el resultado con la figura 21. Asegúrese de establecer el modo necesario para trabajar en una pantalla cuadrada. ■

■ Ahora resuelva los problemas 5 y 15.

Observe en las figuras 20 y 21 cómo usamos las intersecciones de la ecuación para trazar la gráfica de cada elipse. Siguiendo esta práctica le facilitaremos la obtención de una gráfica precisa para una elipse.

Si el eje mayor de una elipse con centro en (0, 0) coincide con el eje y, entonces los focos están en $(0, -c)$ y $(0, c)$. Usando los pasos anteriores, la definición de una elipse conduce al resultado siguiente:

Teorema

Ecuación de una elipse; centro en (0, 0); focos en $(0, \pm c)$; eje mayor a lo largo del eje y

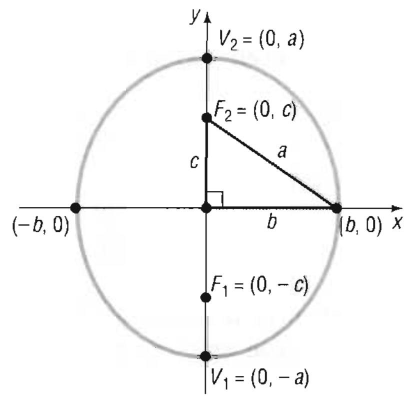
Una ecuación de la elipse con centro en (0, 0) y focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$ es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{donde } a > b > 0 \text{ y } b^2 = a^2 - c^2 \tag{3}$$

El eje mayor es el eje y; los vértices están en $(0, -a)$ y $(0, a)$. ∎

La figura 22 ilustra la gráfica de tal elipse. Otra vez, nótese el triángulo rectángulo con los puntos en (0, 0), $(b, 0)$, y $(0, c)$.

FIGURA 22



Vea cuidadosamente las ecuaciones (2) y (3). Aunque pueden parecer similares, ¡hay una diferencia! En la ecuación (2), el número mayor, a^2, está en el denominador del término de x^2, así que el eje mayor de la elipse está a lo largo del eje x. En la ecuación (3), el número mayor, a^2, está en el denominador del término de y^2, de modo que el eje mayor está a lo largo del eje y.

EJEMPLO 3 *Análisis de la ecuación de una elipse*

Analizar la ecuación:

$$9x^2 + y^2 = 9$$

Solución Para poner la ecuación en forma apropiada dividimos cada lado entre 9:

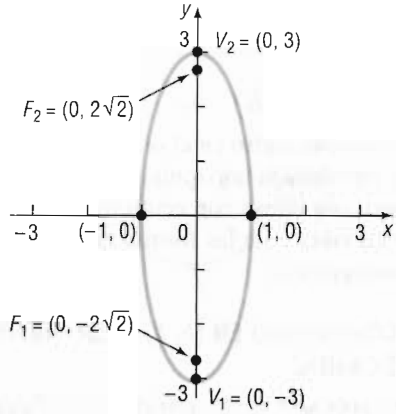
$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

El número mayor, 9, está en el denominador del término y^2, con base en la ecuación (3), esta es la ecuación de una elipse con centro en el origen y eje mayor a lo largo del eje y. Además, concluimos que $a^2 = 9$, $b^2 = 1$, y $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 1 = 8$. Los vértices están en $(0, \pm a) = (0, \pm 3)$, y los focos en $(0, \pm c) = (0, \pm 2\sqrt{2})$. La gráfica aparece en la figura 23. ∎

EJEMPLO 4 *Determinación de la ecuación de una elipse*

Encontrar una ecuación de la elipse que tiene un foco en (0, 2) y vértices en (0, −3) y (0, 3). Trazar la gráfica de la ecuación.

FIGURA 23
$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

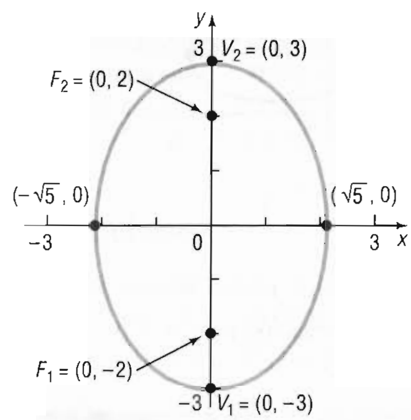


Solución Ya que los vértices están en $(0, -3)$ y $(0, 3)$, el centro de esta elipse está en el origen. Además, su eje mayor coincide con el eje y. La información dada también revela que $c = 2$ y $a = 3$, así que $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$. La forma de la ecuación de esta elipse está dada por la ecuación (3):

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La figura 24 muestra la gráfica.

FIGURA 24
$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$



■

■ Ahora resuelva los problemas 9 y 17.

El círculo puede ser considerado como una clase especial de elipse. Para ver por qué, haga $a = b$ en la ecuación (2) o en la (3). Entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$x^2 + y^2 = a^2$$

Esta es la ecuación de un círculo con centro en el origen y radio a. El valor de c es

$$c^2 = a^2 - b^2 = 0$$

Concluimos que entre más cercanos estén los focos de una elipse, ésta se parecerá más a un círculo.

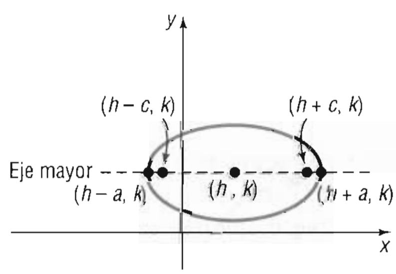
Centro en (h, k)

Si una elipse con centro en el origen y cuyo eje mayor coincide con un eje de coordenadas es trasladada horizontalmente h unidades y verticalmente k unidades, el resultado será una elipse con centro en (h, k) y eje mayor paralelo a un eje de coordenadas. La tabla 3 da las formas de las ecuaciones de tales elipses, y la figura 25 muestra sus gráficas.

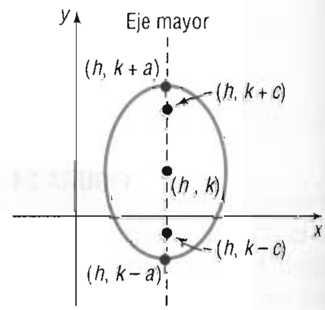
TABLA 3 ELIPSES CON CENTRO EN (h, k) Y EJE MAYOR PARALELO A UNO DE LOS EJES DE COORDENADAS

CENTRO	EJE MAYOR	FOCOS	VÉRTICES	ECUACIÓN
(h, k)	Paralelo al eje x	$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1,$ $a > b$ y $b^2 = a^2 - c^2$
(h, k)	Paralelo al eje y	$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1,$ $a > b$ y $b^2 = a^2 - c^2$

FIGURA 25



(a) $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$



(b) $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

EJEMPLO 5 *Determinación de una ecuación de una elipse con centro fuera del origen*

Encontrar una ecuación para la elipse con centro en $(2, -3)$, un foco en $(3, -3)$, y un vértice en $(5, -3)$. Trazar la gráfica de la ecuación

Solución El centro está en $(h, k) = (2, -3)$, así que $h = 2$ y $k = -3$. El eje mayor es paralelo al eje x. La distancia desde el centro $(2, -3)$ al foco $(3, -3)$ es $c = 1$; la distancia desde el centro $(2, -3)$ al vértice $(5, -3)$ es $a = 3$. Así, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$. La forma de la ecuación es

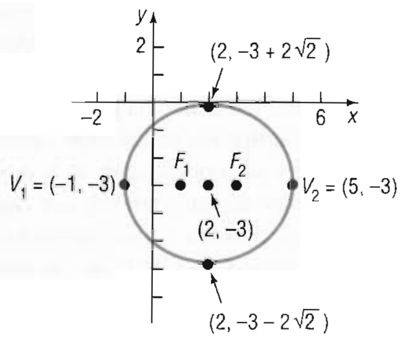
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } h = 2,\ k = -3,\ a = 3,\ b = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1$$

La figura 26 muestra la gráfica. ∎

■ Ahora resuelva el problema 41.

FIGURA 26
$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1$$

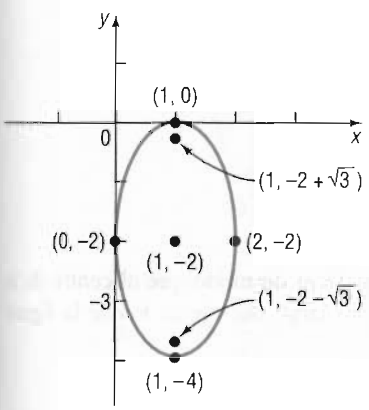


EJEMPLO 6 *Análisis de la ecuación de una elipse*

Analizar la ecuación: $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

Solución Procedemos a completar el cuadrado en x y en y:

FIGURA 27
$$(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$



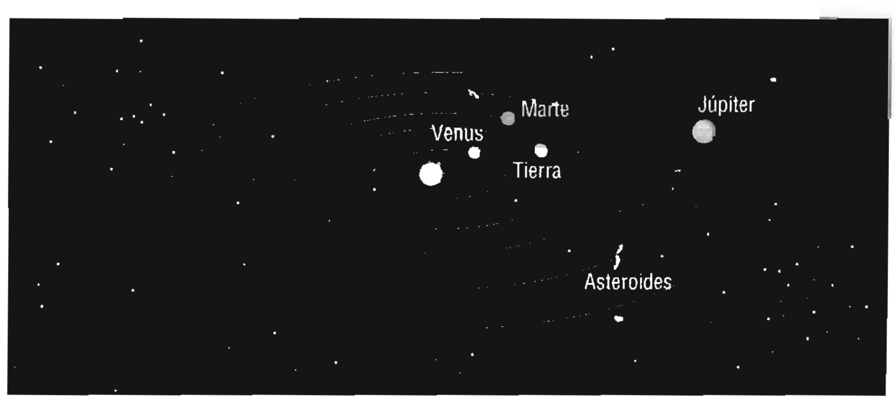
$$\begin{aligned}
4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 &= 0 \\
4x^2 - 8x + y^2 + 4y &= -4 \\
4(x^2 - 2x) + (y^2 + 4y) &= -4 \\
4(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) &= -4 + 4 + 4 && \text{Completar cada cuadrado.} \\
4(x-1)^2 + (y+2)^2 &= 4 \\
(x-1)^2 + \frac{(y+2)^2}{4} &= 1 && \text{Dividir cada lado entre 4.}
\end{aligned}$$

Esta es la ecuación de una elipse con centro en $(1, -2)$ y eje mayor paralelo al eje y. Como $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$, tenemos $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$. Los vértices están en $(h, k \pm a) = (1, -2 \pm 2)$ o $(1, 0)$ y $(1, -4)$. Los focos están en $(h, k \pm c) = (1, -2 \pm \sqrt{3})$ o $(1, -2 - \sqrt{3})$ y $(1, -2 + \sqrt{3})$. La figura 27 muestra la gráfica. ■

Aplicaciones

Las elipses se encuentran en muchas aplicaciones de ciencia e ingeniería. Por ejemplo, las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas, con el Sol en uno de los focos. *Véase* la figura 28.

FIGURA 28



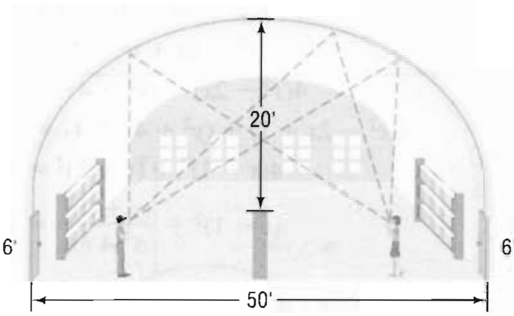
Muchos puentes de piedra o concreto tienen forma de arcos semielípticos. Cuando en mecánica se necesita una velocidad variable de movimiento se utilizan dispositivos elípticos.

Las elipses también tiene una propiedad interesante de reflexión. Si una fuente de luz (o sonido) es colocada en un foco, las ondas transmitidas por la fuente se reflejarán en la elipse y se concentrarán en el otro foco. Este concepto es la base principal de "las galerías de murmullos", las cuales son habitaciones diseñadas con techos elípticos. Una persona parada en un foco de la elipse puede murmurar y ser escuchada en el otro foco, ya que todas las ondas de sonido que llegan al techo son reflejadas hacia ese lugar.

EJEMPLO 7 *Galerías de murmullos*

La figura 29 muestra las especificaciones de un techo elíptico en un salón diseñado como galería de murmullos. En una galería de murmullos, una persona parada en un foco de la elipse puede murmurar y ser escuchada por otra persona parada en el otro foco, ya que todas las ondas de sonido que llegan al techo desde uno de los focos son reflejadas al otro foco. ¿Dónde están ubicados los focos en este salón?

FIGURA 29



Solución Establecemos un sistema de coordenadas rectangulares de modo que el centro de la elipse esté en el origen y el eje mayor quede a lo largo del eje x. *Véase* la figura 30. La ecuación de la elipse es

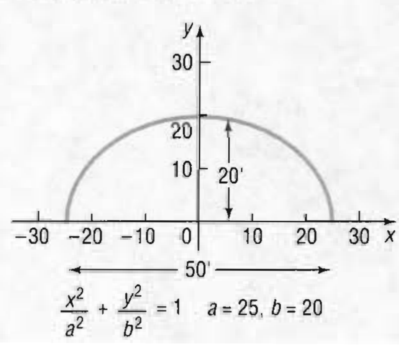
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = 25$ y $b = 20$. Como

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225$$

tenemos $c = 15$. Así, los focos está ubicados a 15 pies desde el centro de la elipse a lo largo del eje mayor. ∎

FIGURA 30



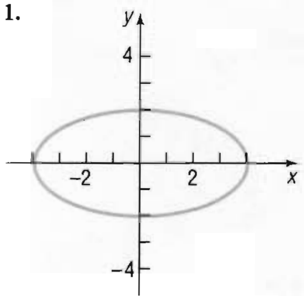
9.3

Ejercicio 9.3

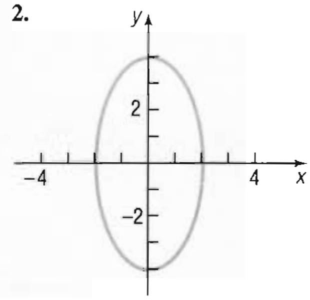
En los problemas del 1 al 4 se da la gráfica de una elipse. Haga corresponder cada gráfica con su ecuación.

A. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ *B.* $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ *C.* $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ *D.* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

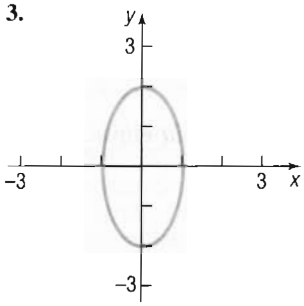
1.



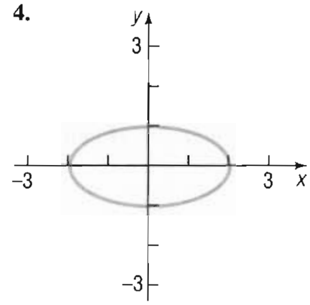
2.



3.



4.



En los problemas del 5 al 14 encuentre los vértices y focos de cada elipse. Trace la gráfica de cada ecuación.

5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

8. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

9. $4x^2 + y^2 = 16$

10. $x^2 + 9y^2 = 18$

11. $4y^2 + x^2 = 8$

12. $4y^2 + 9x^2 = 36$

13. $x^2 + y^2 = 16$

14. $x^2 + y^2 = 4$

En los problemas del 15 al 24 encuentre una ecuación para cada elipse. Trace la gráfica de cada ecuación.

15. Centro en (0, 0); foco en (3, 0); vértice en (5, 0)

16. Centro en (0, 0); foco en (−1, 0); vértice en (3, 0)

17. Centro en (0, 0); foco en (0, −4); vértice en (0, 5)

18. Centro en (0, 0); foco en (0, 1); vértice en (0, −2)

19. Focos en (±2, 0); la longitud del eje mayor es 6

20. Focos en (0, −4); vértices en (0, ±8)

21. Focos en (0, ±3); las intersecciones con el eje x son ±2

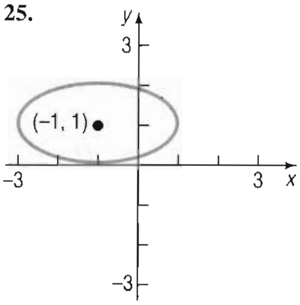
22. Focos en (0, ±2); la longitud del eje mayor es 8

23. Centro en (0, 0); vértice en (0, 4); $b = 1$

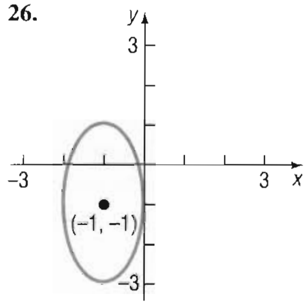
24. Vértices en (±5, 0); $c = 2$

En los problemas del 25 al 28 escriba una ecuación para cada elipse.

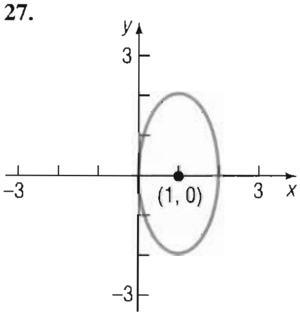
25.



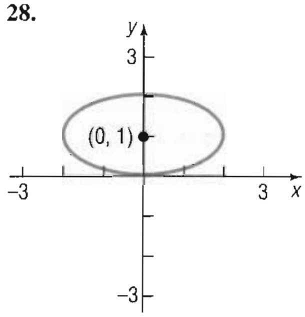
26.



27.



28.



En los problemas del 29 al 40 encuentre el centro, los focos y los vértices de cada elipse. Trace la gráfica de cada ecuación.

29. $\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

30. $\dfrac{(x+4)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$

31. $(x+5)^2 + 4(y-4)^2 = 16$

32. $9(x-3)^2 + (y+2)^2 = 18$

33. $x^2 + 4x + 4y^2 - 8y + 4 = 0$

34. $x^2 + 3y^2 - 12y + 9 = 0$

35. $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 5 = 0$

36. $4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y = 5$

37. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

38. $x^2 + 9y^2 + 6x - 18y + 9 = 0$

39. $4x^2 + y^2 + 4y = 0$

40. $9x^2 + y^2 - 18x = 0$

En los problemas del 41 al 50 encuentre una ecuación para cada elipse. Trace la gráfica de cada ecuación.

41. Centro en $(2, -2)$; vértice en $(7, -2)$; focos en $(4, -2)$

42. Centro en $(-3, 1)$; vértice en $(-3, 3)$; focos en $(-3, 0)$

43. Vértices en $(4, 3)$ y $(4, 9)$; focos en $(4, 8)$

44. Focos en $(1, 2)$ y $(-3, 2)$; vértice en $(-4, 2)$

45. Focos en $(5, 1)$ y $(-1, 1)$; la longitud del eje mayor es 8

46. Vértices en $(2, 5)$ y $(2, -1)$; $c = 2$

47. Centro en $(1, 2)$; focos en $(4, 2)$; pasa por el punto $(1, 3)$

48. Centro en $(1, 2)$; focos en $(1, 4)$; pasa por el punto $(2, 2)$

49. Centro en $(1, 2)$; vértice en $(4, 2)$; pasa por el punto $(1, 3)$

50. Centro en $(1, 2)$; vértice en $(1, 4)$; pasa por el punto $(2, 2)$

En los problemas del 51 al 54 trace la gráfica de cada función. [Sugerencia: Observe que cada función es la mitad de una elipse.]

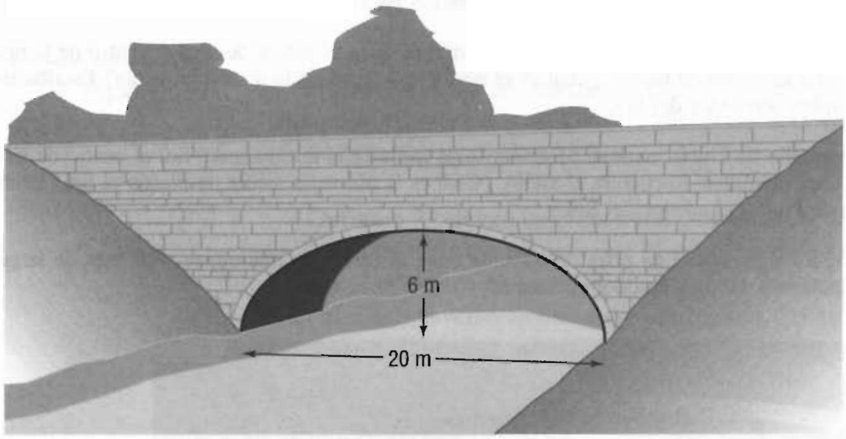
51. $f(x) = \sqrt{16 - 4x^2}$

52. $f(x) = \sqrt{9 - 9x^2}$

53. $f(x) = -\sqrt{64 - 16x^2}$

54. $f(x) = -\sqrt{4 - 4x^2}$

55. *Arco semielíptico de un puente.* Un arco tiene forma de la mitad superior de una elipse y es usado para sostener un puente que debe atravesar un río de 20 metros de ancho. En el centro el arco mide 6 metros desde el centro del río (*véase* la figura). Escriba una ecuación para la elipse en la que el eje x coincida con el nivel del agua y el eje y pase por el centro del arco.



56. *Arco semielíptico de un puente.* El arco de un puente es una semielipse con un eje mayor horizontal. La extensión es de 30 pies, y la parte superior del arco está 10 pies por encima del eje mayor. El camino sobre el puente es horizontal y queda a 2 pies por arriba de la parte superior del arco. Encuentre la altura vertical desde el camino hasta el arco a intervalos de 5 pies a lo largo del camino.

57. *Galerías de murmullos.* Un salón de 100 pies de longitud está diseñado como galería de murmullos. Si los focos están ubicados a 25 pies del centro, ¿cuál es la altura del techo en el centro?

58. *Galerías de murmullos.* Una persona, parada en un foco de una galería de murmullos, está a 6 pies de la pared más cercana. Su amiga está parada en el otro foco, a una distancia de 100 pies. ¿Cuál es la longitud de esta galería de murmullos? En el centro, ¿cuál es la altura del techo elíptico?

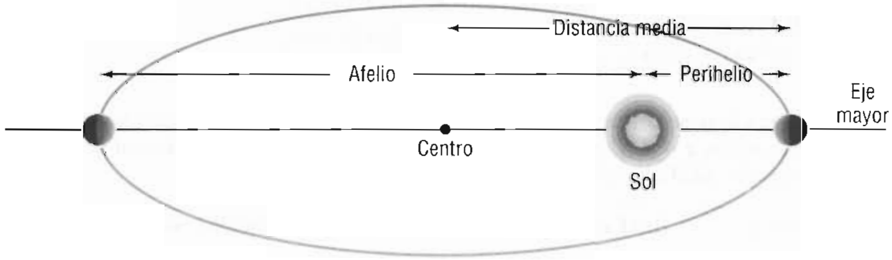
59. *Arco semielíptico de un puente.* Un puente está construido en forma de arco semielíptico. Tiene extensión de 120 pies y una altura máxima de 25 pies. Seleccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado y encuentre la altura del arco a distancias de 10, 20, 30 y 50 pies desde el centro.

60. *Arco semielíptico de un puente.* Un puente está construido en forma de arco semielíptico y tiene una extensión de 100 pies. La altura del arco a una distancia de 40 pies desde el centro es de 10 pies. Encuentre la altura del arco en su centro.

61. *Arco semielíptico.* Un arco en forma de la mitad de una elipse mide 40 pies de ancho y 15 pies de alto en el centro. Encuentre la altura del arco a intervalos de 10 pies a lo largo de su ancho.

62. *Arco semielíptico de un puente.* El arco para un puente sobre una autopista tiene forma de media elipse. La parte superior del arco está a 20 pies desde el nivel del suelo (el eje mayor). La autopista tiene cuatro carriles, cada uno de 12 pies de ancho, una parte central de seguridad de 8 pies de ancho y dos acotamientos laterales, cada uno de 4 pies de ancho. ¿Cuál debe ser la extensión del puente (la longitud de su eje mayor) si tiene una altura de 13 pies a una distancia de 28 pies del centro?

En los problemas del 63 al 66 utilice el hecho de que las órbitas de un planeta forman una elipse alrededor del Sol, con el Sol en uno de los focos. El ***afelio*** *de un planeta es su distancia mayor al Sol y el* ***perihelio*** *su distancia menor. La* ***distancia media*** *de un planeta al Sol es la longitud del semieje mayor de la órbita elíptica. Véase la ilustración.*



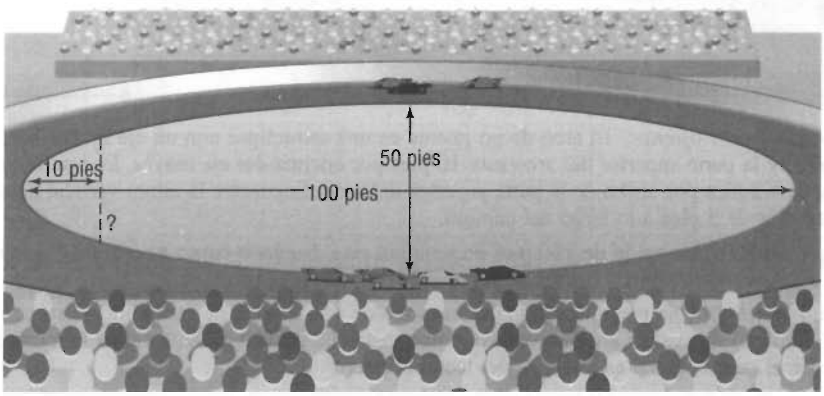
63. *La Tierra.* La distancia media de la Tierra al Sol es de 93 millones de millas. Si el afelio de la Tierra es de 94.5 millones de millas, ¿cuál es su perihelio? Escriba una ecuación para la órbita de la Tierra alrededor del Sol.

64. *Marte.* La distancia media de Marte al Sol es de 142 millones de millas. Si el perihelio de Marte es de 128.5 millones de millas, ¿cuál es su afelio? Escriba una ecuación para la órbita de Marte alrededor del Sol.

65. *Júpiter.* El afelio de Júpiter es de 507 millones de millas. Si la distancia del Sol al centro de la órbita elíptica jupiteriana es de 23.2 millones de millas, ¿cuál es el perihelio? ¿Cuál es la distancia media? Escriba una ecuación para la órbita de Júpiter alrededor del Sol.

66. *Plutón.* El perihelio de Plutón mide 4551 millones de millas y la distancia del Sol al centro de su órbita elíptica es de 897.5 millones de millas. Encuentre el afelio. ¿Cuál es la distancia media de Plutón al Sol? Escriba una ecuación para la órbita de Plutón alrededor del Sol.

67. Consulte la figura siguiente. Una pista de carreras tiene la forma de una elipse, 100 pies de largo y 50 de ancho. ¿Cuál es su anchura a 10 pies desde un extremo?



68. Una pista de carreras tiene la forma de una elipse de 80 pies de largo y 40 de ancho. ¿Cuál es su anchura a 10 pies desde un extremo?

69. Demuestre que una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \qquad A \neq 0,\ C \neq 0,\ F \neq 0$$

donde A y C son del mismo signo y F es de signo opuesto:

(a) Es la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) si $A \neq C$.
(b) Es la ecuación de un círculo con centro en (0, 0) si $A = C$.

70. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad A \neq 0,\ C \neq 0$$

donde A y C son del mismo signo:

(a) Es una elipse si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F$ tiene el mismo signo que A.
(b) Es un punto si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F = 0$.
(c) No tiene puntos si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F$ tiene el signo contrario que A.

71. La **excentricidad** e de una elipse se define como el número c/a, donde a y c son los números dados en la ecuación (2). Como $a > c$, se deduce que $e < 1$. Escriba un párrafo breve acerca de la forma general de cada una de las siguientes elipses. Asegúrese de justificar sus conclusiones.

(a) Excentricidad cercana a 0 (b) Excentricidad = 0.5 (c) Excentricidad cercana a 1

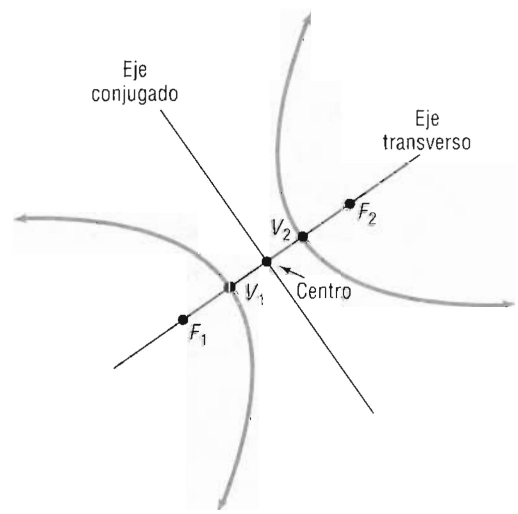
9.4

La hipérbola

Hipérbola Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos en el plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados **focos,** es una constante.

La figura 31 ilustra una hipérbola con focos F_1 y F_2. La recta que contiene a los focos es llamada **eje transverso.** El punto medio del segmento de recta que une los focos es el **centro** de la hipérbola. La recta que pasa por el centro y es perpendicular al eje transverso se llama **eje conjugado.** La hipérbola consiste en dos curvas separadas, llamadas **ramas,** que son simétricas respecto al eje transverso, al eje conjugado y al centro. Los dos puntos de intersección de la hipérbola y el eje transverso son los **vértices,** V_1 y V_2, de la hipérbola.

FIGURA 31



Con estas ideas en mente, estamos preparados para encontrar la ecuación de una hipérbola en un sistema de coordenadas rectangulares. Primero, colocamos el centro en el origen. Después, situamos la hipérbola de modo que su eje transverso coincida con un eje coordenado. Suponga que el eje transverso coincide con el eje x, como se muestra en la figura 32. Si c es la distancia desde el centro hasta el foco, entonces un foco estará en $F_1 = (-c, 0)$ y el otro en $F_2 = (c, 0)$. Ahora, con $\pm 2a$ denotamos la diferencia constante de las distancias desde cualquier punto $P = (x, y)$ sobre la hipérbola hasta los focos F_1 y F_2. (Si P está en la rama derecha se usa el signo $+$; si está en la rama izquierda se usa el signo $-$.) Las coordenadas de P deben satisfacer la ecuación

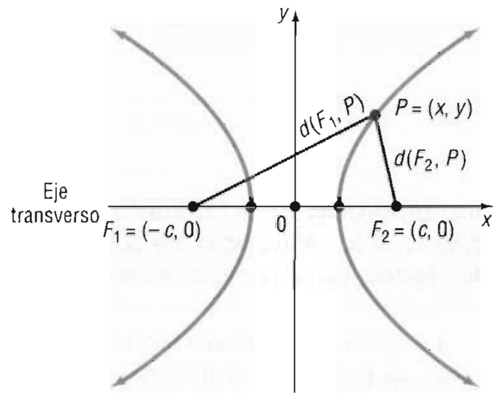
$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = \pm 2a$$

La diferencia de las distancias desde P hasta los focos es igual a $\pm 2a$.

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Usar la fórmula de distancia.

FIGURA 32
$d(F_1, P) - d(F_2, P) = \pm 2a$



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad \text{Aislar un radical.}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \qquad \text{Elevar al cuadrado ambos lados.}$$

Ahora, eliminamos los paréntesis:

$$\begin{aligned}
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
4cx - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Aislar un radical.} \\
cx - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} && \text{Dividir cada lado entre 4.} \\
(cx - a^2)^2 &= a^2[(x-c)^2 + y^2] && \text{Elevar al cuadrado ambos lados.} \\
c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 &= a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\
c^2x^2 + a^4 &= a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2(c^2 - a^2) && (1)
\end{aligned}$$

Para obtener puntos de la hipérbola que no estén sobre el eje x se debe tener $a < c$. Para ver por qué, observe otra vez la figura 32.

$$\begin{aligned}
d(F_1, P) &< d(F_2, P) + d(F_1, F_2) && \text{Usar el triángulo } F_1PF_2. \\
d(F_1, P) - d(F_2, P) &< d(F_1, F_2) && P \text{ está en la rama derecha, así que } d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a. \\
2a &< 2c \\
a &< c
\end{aligned}$$

Como $a < c$, también tenemos $a^2 < c^2$, de modo que $c^2 - a^2 > 0$. Sea $b^2 = c^2 - a^2$, $b > 0$. Entonces la ecuación (1) puede ser escrita como

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Para encontrar los vértices de la hipérbola definida por esta ecuación, hagamos $y = 0$. Los vértices satisfacen la ecuación $x^2/a^2 = 1$, las soluciones son $x = \pm a$. En consecuencia, los vértices de la hipérbola son $V_1 = (-a, 0)$ y $V_2 = (a, 0)$.

Teorema Una ecuación de la hipérbola con centro en $(0, 0)$, focos en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, y vértices en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ es

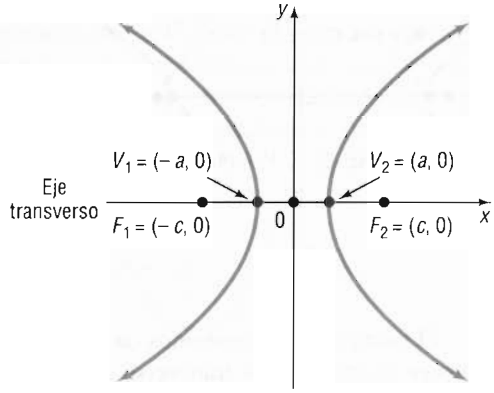
Ecuación de una hipérbola; centro en (0, 0); focos en $(\pm c, 0)$; vértices en $(\pm a, 0)$; eje transverso a lo largo del eje x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde } b^2 = c^2 - a^2 \tag{2}$$

El eje transverso es el eje x. ■

Como puede usted verificar, la hipérbola definida por la ecuación (2) es simétrica respecto al eje x, al eje y y al origen. Para encontrar las intersecciones con el eje y, si las hay, haga $x = 0$ en la ecuación (2). Esto tiene como resultado la ecuación $y^2/b^2 = -1$, que no tiene solución. Concluimos que la hipérbola definida por la ecuación (2) no tiene intersecciones con el eje y. En realidad, como $x^2/a^2 - 1 = y^2/b^2 \geq 0$, se deduce que $x^2/a^2 \geq 1$. Así, no hay puntos de la gráfica para $-a < x < a$. *Véase* la figura 33.

FIGURA 33
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$
$b^2 = c^2 - a^2$



EJEMPLO 1 *Determinación de una ecuación de una hipérbola*

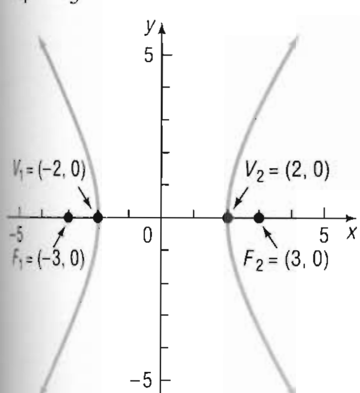
Encontrar una ecuación de la hipérbola con centro en el origen, un foco en (3, 0) y un vértice en $(-2, 0)$. Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución La hipérbola tiene su centro en el origen, y el eje transverso coincide con el eje x. Un foco está en $(c, 0) = (3, 0)$, así que $c = 3$. Un vértice está en $(-a, 0) = (-2, 0)$, así que $a = 2$. De la ecuación (2), se deduce que $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$, de modo que una ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

Véase la figura 34. ■

FIGURA 34
$\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$



Comentario: Para trazar la gráfica de la hipérbola $(x^2/4) - (y^2/5) = 1$ analizada en el ejemplo 1, necesitamos trazar la gráfica de las dos funciones $y = \sqrt{5}\sqrt{(x^2/4) - 1}$ y $y = -\sqrt{5}\sqrt{(x^2/4) - 1}$. Hágalo y compare su resultado con lo que se ve en la figura 34. ■

■ Ahora resuelva el problema 5.

Una ecuación de la forma de la ecuación (2) pertenece a una hipérbola con centro en el origen, focos en el eje x en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde $c^2 = a^2 + b^2$, y eje transverso a lo largo del eje x.

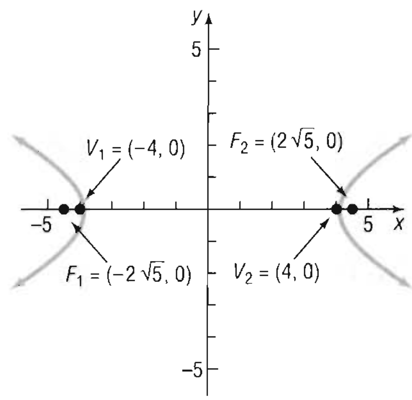
Para el resto de esta sección, la instrucción "Analizar la ecuación" significará encontrar el centro, el eje transverso, los vértices y focos de la hipérbola y trazar la gráfica de la ecuación.

EJEMPLO 2 *Análisis de la ecuación de una hipérbola*

Analizar la ecuación: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

Solución La ecuación dada es de la forma de la ecuación (2), con $a^2 = 16$ y $b^2 = 4$. Así, su gráfica es una hipérbola con centro en (0, 0) y eje transverso a lo largo del eje x. Además, sabemos que $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$, y los focos en $(\pm c, 0) = (\pm 2\sqrt{5}, 0)$. La figura 35 muestra la gráfica.

FIGURA 35
$\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$



El enunciado siguiente nos da la forma de la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y eje transverso a lo largo del eje y.

Teorema Una ecuación de la hipérbola con centro en (0, 0), focos en $(0, -c)$ y $(0, c)$, y vértices en $(0, -a)$ y $(0, a)$ es

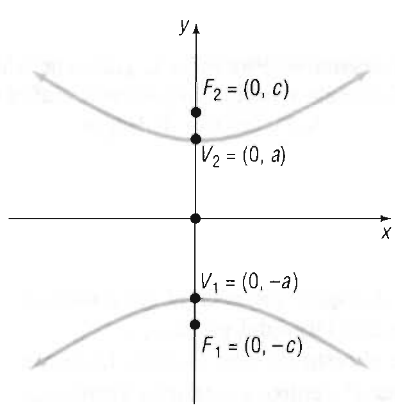
Ecuación de una hipérbola; centro en (0, 0); focos en $(0, \pm c)$; vértices en $(0, \pm a)$; eje transverso a lo largo del eje y

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde } b^2 = c^2 - a^2 \qquad (3)$$

El eje transverso es el eje y.

La figura 36 muestra la gráfica de una hipérbola típica definida por la ecuación (3).

FIGURA 36
$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1,$
$b^2 = c^2 - a^2$



Note la diferencia en la forma de las ecuaciones (2) y (3). Cuando el término con y^2 se resta del término con x^2, el eje transverso es el eje x. Cuando el término con x^2 se resta del término con y^2, el eje transverso es el eje y.

EJEMPLO 3 *Análisis de la ecuación de una hipérbola*

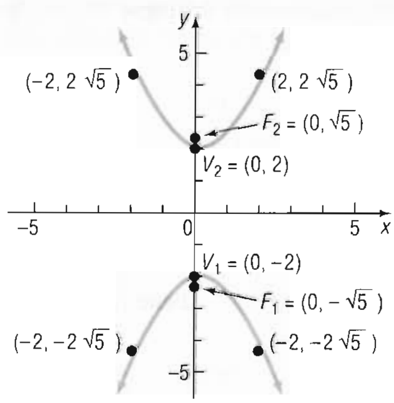
Analizar la ecuación: $y^2 - 4x^2 = 4$

Solución Para escribir la ecuación en la forma apropiada dividimos cada lado entre 4:

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Ya que el término con x^2 se resta del término con y^2, la ecuación pertenece a una hipérbola con centro en el origen y eje transverso a lo largo del eje y. Además, comparando la ecuación anterior con la ecuación (3), encontramos $a^2 = 4$, $b^2 = 1$, y $c^2 = a^2 + b^2 = 5$. Los vértices están en $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$, y los focos en $(0, \pm c) = (0, \pm\sqrt{5})$. La gráfica está dada en la figura 37.

FIGURA 37 $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$



EJEMPLO 4 *Determinación de una ecuación de una hipérbola*

Encontrar una ecuación de la hipérbola que tiene un vértice en (0, 2) y focos en (0, −3) y (0, 3). Trazar la gráfica de la ecuación.

Solución Ya que los focos están en (0, −3) y (0, 3), el centro de la hipérbola está en el origen. Además, el eje transverso se sitúa a lo largo del eje y. La información dada también revela que $c = 3$, $a = 2$, y $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. La forma de la ecuación de la hipérbola está dada por la ecuación (3):

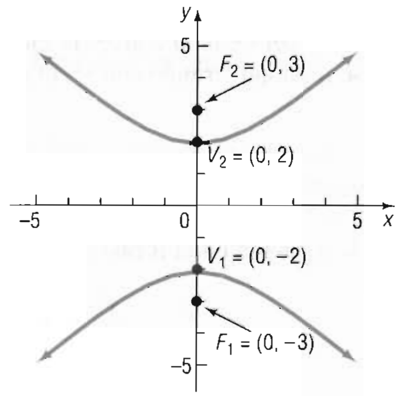
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

Véase la figura 38.

■ Ahora resuelva el problema 7.

FIGURA 38
$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$



Observe las ecuaciones de las hipérbolas en los ejemplos 3 y 4. Para la hipérbola del ejemplo 3, $a^2 = 4$ y $b^2 = 1$, así que $a > b$; para la hipérbola del ejemplo 4, $a^2 = 4$ y $b^2 = 5$, así que $a < b$. Concluimos que, para hipérbolas, no hay requerimientos relativos al tamaño de a y b. Esta situación contrasta con el caso de una elipse, en el que los tamaños relativos de a y b determinan cuál eje es el eje mayor. Otra característica que las distingue de las elipses y las parábolas, es que las hipérbolas tienen asíntotas.

Asíntotas

Recuerde de la sección 5.3 que una asíntota horizontal, o una oblicua, de una gráfica es una recta con la propiedad de que la distancia desde la recta a los puntos en la gráfica se aproxima a cero cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$.

Teorema

La hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene las dos asíntotas oblicuas

Asíntotas de una hipérbola

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Demostración

Empezamos por resolver para y en la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$$

Si $x \neq 0$, podemos reacomodar el lado derecho en la forma

$$y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

$$y = \pm\frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Ahora, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el término a^2/x^2 se aproxima a cero, de modo que la expresión dentro del radical se aproxima a 1. Así, cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, el valor de y se aproxima a $\pm bx/a$; esto es, la gráfica de la hipérbola se acerca a las rectas

$$y = -\frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = \frac{b}{a}x$$

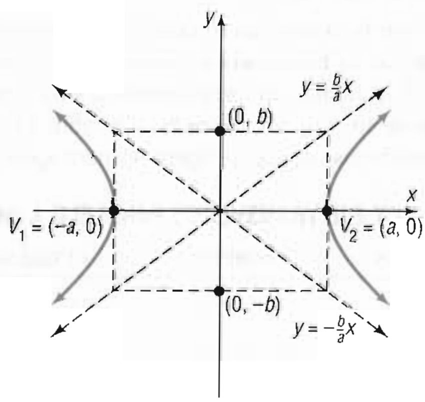
Así, estas rectas son asíntotas oblicuas de la hipérbola. ■

Las asíntotas de una hipérbola no son parte de ella, pero sirven como una guía para trazar su gráfica. Por ejemplo, suponga que queremos trazar la gráfica de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Empezamos por los vértices $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Luego trazamos los puntos $(0, -b)$ y $(0, b)$ y usamos estos cuatro puntos para construir un rectángulo, como se muestra en la figura 39. Las diagonales de este rectángulo tienen pendientes b/a y $-b/a$, y sus prolongaciones son las asíntotas $y = (b/a)x$ y $y = -(b/a)x$ de la hipérbola.

FIGURA 39
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Teorema La hipérbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ tiene las dos asíntotas oblicuas

Asíntotas de una hipérbola

$$y = \frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{a}{b}x$$

■

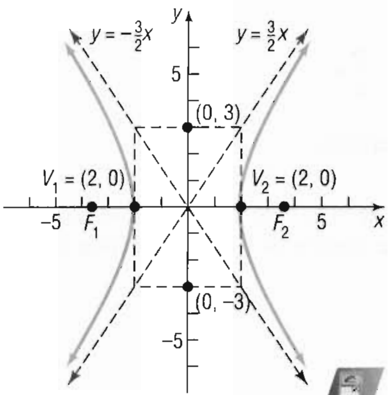
En el problema 60 se le pedirá que demuestre este enunciado.

EJEMPLO 5 *Análisis de la ecuación de una hipérbola*

Analizar la ecuación: $9x^2 - 4y^2 = 36$

FIGURA 40

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$



Solución Primero, dividimos cada lado entre 36 para disponer la ecuación en la forma apropiada:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en el origen y eje transverso a lo largo del eje x. Usando $a^2 = 4$ y $b^2 = 9$, encontramos $c^2 = a^2 + b^2 = 13$. Los vértices están en $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$, los focos están en $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{13}, 0)$ y las asíntotas tienen las ecuaciones

$$y = \frac{3}{2}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{3}{2}x$$

Ahora construimos el rectángulo que contiene los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$, esto es, $(-2, 0)$ $(2, 0)$, $(0, -3)$, y $(0, 3)$. Las prolongaciones de las diagonales de este rectángulo son las asíntotas. *Véase* la figura 40 para apreciar la gráfica. ■

Exploración: Trace la parte superior de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ analizada en el ejemplo 5 y sus asíntotas $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$. Ahora utilice ZOOM y TRACE para ver qué sucede cuando x aumenta sin límite en la dirección positiva. ¿Qué pasa cuando x decrece sin límite en la dirección negativa? ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

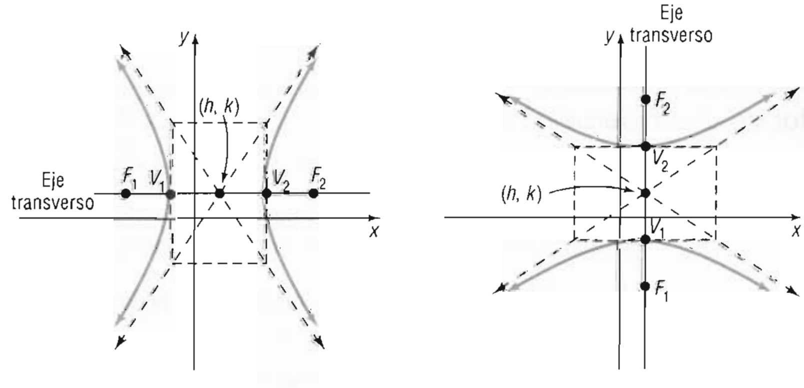
Centro en (h, k)

Si una hipérbola con centro en el origen cuyo eje transverso coincide con un eje de coordenadas es trasladada h unidades horizontalmente y luego k unidades verticalmente, el resultado será una hipérbola con centro en (h, k) y eje transverso paralelo a uno de los ejes coordenados. La tabla 4 nos da las formas de las ecuaciones de tales hipérbolas. *Véase* la figura 41 para apreciar las gráficas.

TABLA 4 HIPÉRBOLAS CON CENTRO EN (h, k) Y EJE TRANSVERSO PARALELO A UNO DE LOS EJES DE COORDENADAS

CENTRO	EJE TRANSVERSO	FOCOS	VÉRTICES	ECUACIÓN	ASÍNTOTAS
(h, k)	Paralelo al eje x	$(h \pm c, k)$	$(h \pm a, k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, $b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$
(h, k)	Paralelo al eje y	$(h, k \pm c)$	$(h, k \pm a)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$, $b^2 = c^2 - a^2$	$y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$

FIGURA 41



(a) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (b) $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

EJEMPLO 6 *Determinación de una ecuación de una hipérbola con centro fuera del origen*

Encontrar una ecuación para la hipérbola con centro en $(1, -2)$, un foco en $(4, -2)$, y un vértice en $(3, -2)$. Trazar la gráfica de la ecuación.

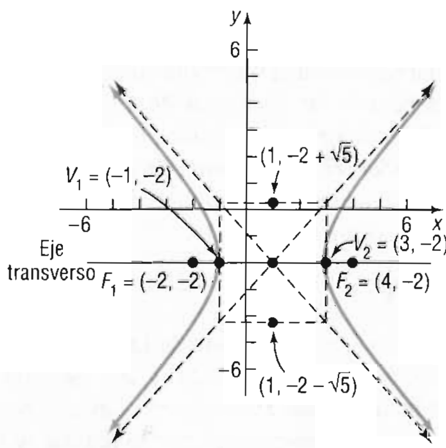
Solución El centro está en $(h, k) = (1, -2)$, así que $h = 1$ y $k = -2$. El eje transverso es paralelo al eje x. La distancia desde el centro $(1, -2)$ al foco $(4, -2)$ es $c = 3$; la distancia desde el centro $(1, -2)$ al vértice $(3, -2)$ es $a = 2$. Así, $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. La ecuación es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

Véase la figura 42.

FIGURA 42 $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{5} = 1$



■ Ahora resuelva el problema 27.

EJEMPLO 7 *Análisis de la ecuación de una hipérbola*

Analizar la ecuación: $-x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 11 = 0$

Solución Completamos los cuadrados en x y en y:

$$-x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 11 = 0$$

$$-(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 4y) = -11 \quad \text{Agrupar términos.}$$

$$-(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) = -1 + 16 - 11 \quad \text{Completar cada cuadrado.}$$

$$-(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 4$$

$$(y-2)^2 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1 \quad \text{Dividir entre 4.}$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en $(-1, 2)$ y eje transverso paralelo al eje y. Además, $a^2 = 1$ y $b^2 = 4$, así que $c^2 = a^2 + b^2 = 5$. Los vértices están en $(h, k \pm a) = (-1, 2 \pm 1)$, o $(-1, 1)$ y $(-1, 3)$. Los focos están en $(h, k \pm c) = (-1, 2 \pm \sqrt{5})$. Las asíntotas son $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 1)$ y $y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 1)$. La figura 43 muestra la gráfica.

FIGURA 43

$$(y-2)^2 - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

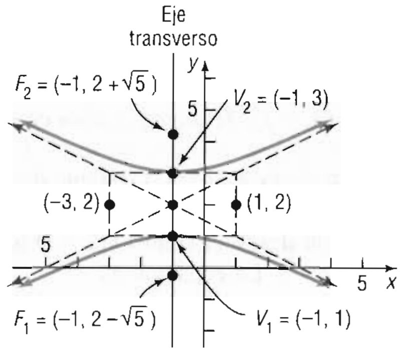
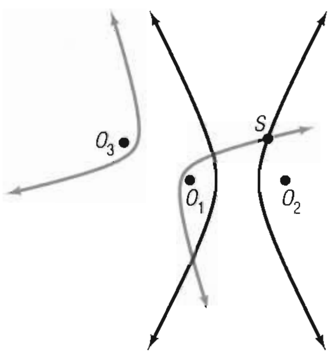


FIGURA 44



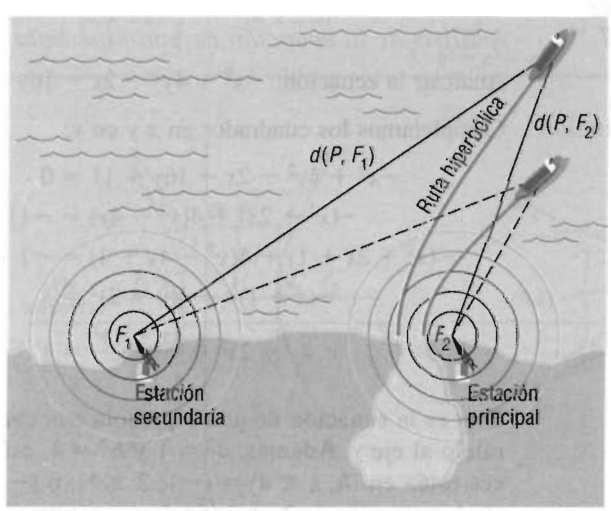
Aplicaciones

Suponga que un arma es disparada desde un origen desconocido S. Un observador en O_1 escucha la detonación (sonido del disparo) un segundo después que otro observador en O_2. Puesto que el sonido viaja a cerca de 1110 pies por segundo, se concluye que el punto S debe estar 1100 pies más cerca de O_2 que de O_1. Así, S está en una rama de una hipérbola con focos en O_1 y O_2. (¿Advierte por qué? Por que la diferencia de las distancias de S a O_1 y de S a O_2 es la constante 1100.) Si un tercer observador en O_3 escucha la misma detonación 2 segundos después que O_1, entonces S estará en una rama de una segunda hipérbola con focos en O_1 y O_3. La intersección de las dos hipérbolas señalará con precisión la ubicación de S. Para una ilustración *véase* la figura 44.

LORAN

En el Sistema de Navegación de Largo Alcance (LORAN, por sus siglas en inglés), una estación principal de radio y una estación secundaria emiten señales que pueden ser recibidas por un barco en el mar. (*Véase* la figura 45.) Aunque un barco recibe siempre las dos señales, por lo regular se halla más cerca de una de las dos estaciones y, por lo tanto, hay cierta diferencia en las distancias que recorren las dos señales, lo cual se traduce en una pequeña diferencia de tiempo entre las señales

FIGURA 45



$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \text{constante}$

registradas. Mientras la diferencia de tiempo permanezca constante, la diferencia de las dos distancias también será constante. Si el barco sigue una ruta que mantenga fija la diferencia de tiempo, seguirá la trayectoria de una hipérbola cuyos focos están localizados en las posiciones de las dos estaciones de radio. Así que para cada diferencia de tiempo se tiene como resultado una trayectoria hiperbólica diferente, cada una llevando al barco a una posición distinta en la costa. Las cartas de navegación muestran las diferentes rutas hiperbólicas correspondientes a diferencias de tiempo distintas.

EJEMPLO 8 *LORAN*

Dos estaciones LORAN están separadas 250 millas a lo largo de una costa recta.

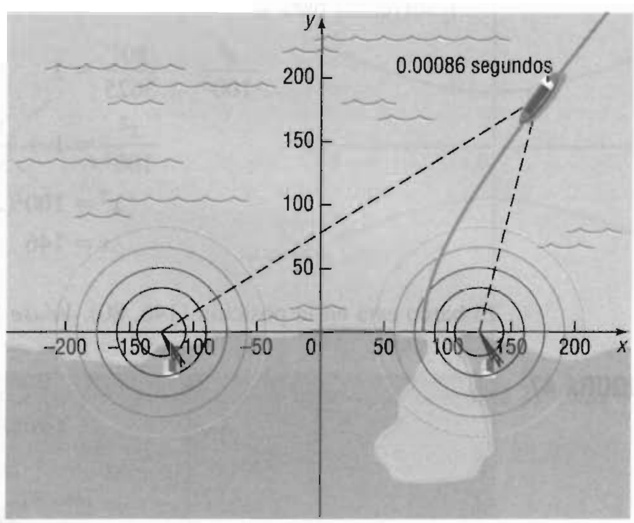
(a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00086 segundos entre las señales LORAN. Establecer un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar dónde el barco alcanzará la costa si continúa sobre la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

(b) Si el barco debe entrar a un puerto localizado entre las dos estaciones a 25 millas desde la estación principal, ¿qué diferencia de tiempo debe observar?

(c) Si el barco está a 80 millas de la costa cuando se obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es su ubicación exacta? *[Nota:* La velocidad de cada señal de radio es de 186,000 millas por segundo.]

Solución (a) Establecemos un sistema de coordenadas rectangulares de modo que las dos estaciones estén en el eje x y el origen a la mitad del camino entre ellas. *Véase* la figura 46.

FIGURA 46



El barco está en una hipérbola cuyos focos son las dos estaciones de radio. La razón para esto es que la diferencia de tiempo constante de las señales desde cada estación tiene como resultado una diferencia constante en la distancia del barco a cada una de las estaciones. Como la diferencia de tiempo son 0.00086 segundos y la velocidad de la señal es de 186,000 millas por segundo, la diferencia en las distancias del barco a cada estación (focos) es

$$\text{Distancia} = \text{Velocidad} \times \text{Tiempo} = 186{,}000 \times 0.00086 = 160 \text{ millas}$$

La diferencia entre las distancias desde el barco a cada estación, 160, es igual a $2a$, así que $a = 80$ y el vértice de la hipérbola correspondiente está en $(80, 0)$.

Como el foco está en (125, 0), al seguir sobre esta hipérbola el barco alcanzará la costa a 45 millas de la estación principal.

(b) Para alcanzar la costa a 25 millas de la estación principal, el barco debe seguir una hipérbola con vértice en (100, 0). Para esta hipérbola $a = 100$, de modo que la diferencia constante entre las distancias del barco a cada estación es de 200 millas. La diferencia de tiempo que el barco debe observar es

$$\text{Tiempo} = \frac{\text{Distancia}}{\text{Velocidad}} = \frac{200}{186{,}000} = 0.001075 \text{ segundos}$$

(c) Para encontrar la ubicación exacta del barco, necesitamos determinar la ecuación de la hipérbola con vértice en (100, 0) y foco en (125, 0). La forma de la ecuación de esta hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a = 100$. Como $c = 125$, tenemos

$$b^2 = c^2 - a^2 = 125^2 - 100^2 = 5625$$

La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{y^2}{5625} = 1$$

Ya que el barco está a 80 millas de la costa, usamos $y = 80$ en la ecuación y resolvemos para x.

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{80^2}{5625} = 1$$

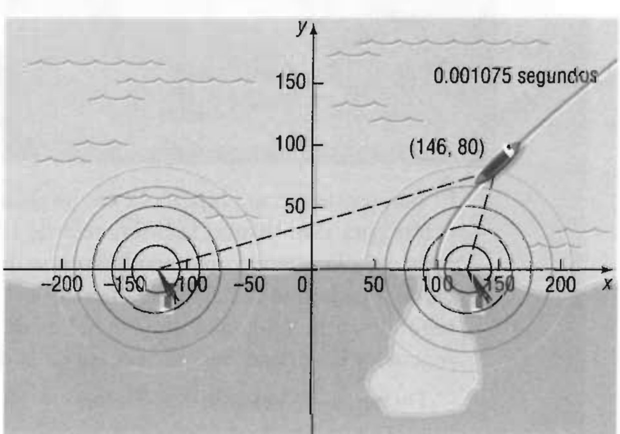
$$\frac{x^2}{100^2} = 1 + \frac{80^2}{5625} = 2.14$$

$$x^2 = 100^2(2.14)$$

$$x = 146$$

El barco está en la posición (146, 80). *Véase* la figura 47.

FIGURA 47

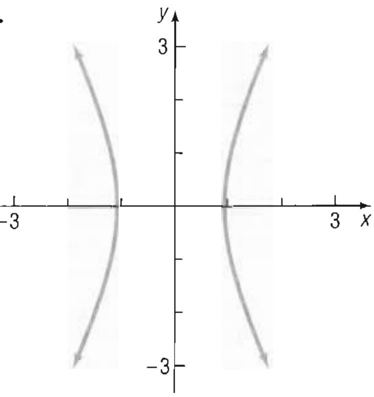


Ejercicio 9.4

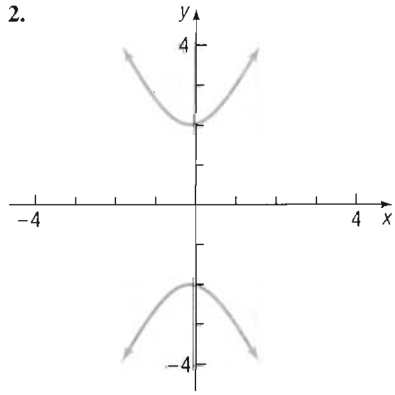
En los problemas del 1 al 4 se da la gráfica de una hipérbola. Haga corresponder cada gráfica con su ecuación.

A. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ *B.* $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ *C.* $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ *D.* $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$

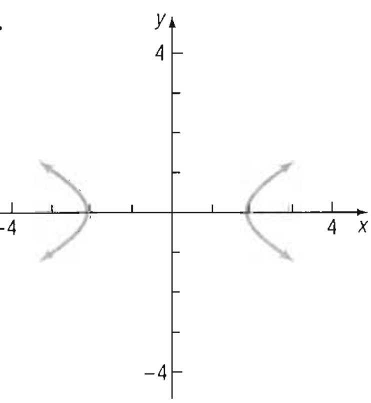
1.



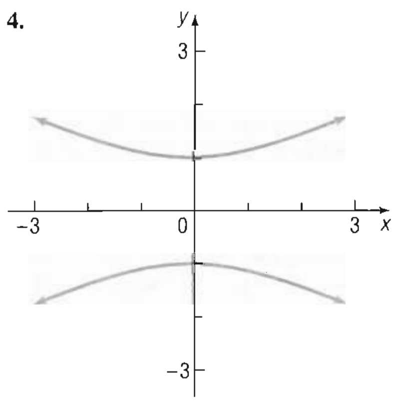
2.



3.



4.



En los problemas del 5 al 14 encuentre una ecuación para la hipérbola descrita. Trace la gráfica de la ecuación.

5. Centro en (0, 0); foco en (3, 0); vértice en (1, 0)

6. Centro en (0, 0); foco en (0, 5); vértice en (0, 3)

7. Centro en (0, 0); foco en (0, −6); vértice en (0, 4)

8. Centro en (0, 0); foco en (−3, 0); vértice en (2, 0)

9. Foco en (−5, 0) y (5, 0); vértice en (3, 0)

10. Foco en (0, 6); vértices en (0, −2) y (0, 2)

11. Vértices en (0, −6) y (0, 6); asíntota la recta $y = 2x$

12. Vértices en (−4, 0) y (4, 0); asíntota la recta $y = 2x$

13. Foco en (−4, 0) y (4, 0); asíntota la recta $y = -x$

14. Foco en (0, −2) y (0, 2); asíntota la recta $y = -x$

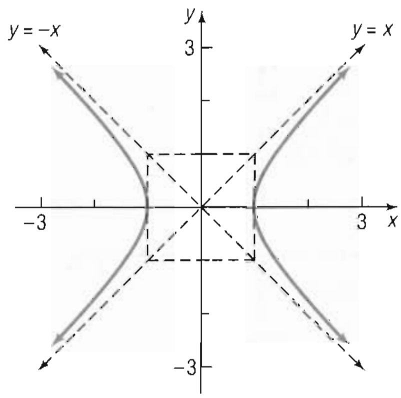
En los problemas del 15 al 22 determine el centro, el eje transverso, los vértices, focos y las asíntotas. Trace la gráfica de cada ecuación.

15. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ **16.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{4} = 1$ **17.** $4x^2 - y^2 = 16$ **18.** $y^2 - 4x^2 = 16$

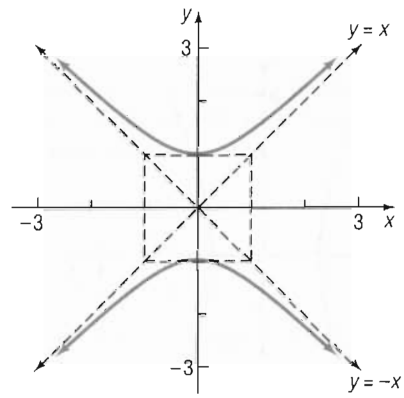
19. $y^2 - 9x^2 = 9$ **20.** $x^2 - y^2 = 4$ **21.** $y^2 - x^2 = 25$ **22.** $2x^2 - y^2 = 4$

En los problemas del 23 al 26 escriba una ecuación para cada hipérbola.

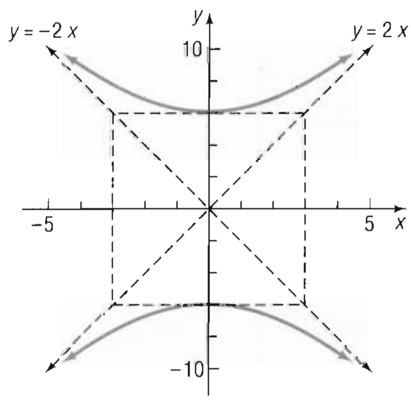
23.



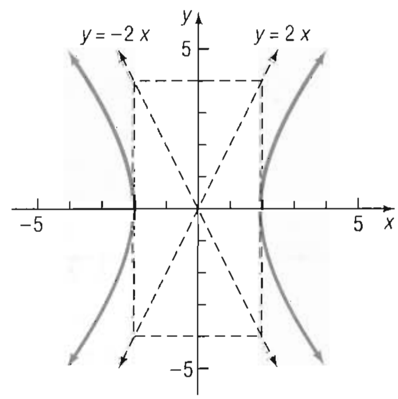
24.



25.



26.



En los problemas del 27 al 34 encuentre una ecuación para la hipérbola descrita. Trace la gráfica de la ecuación.

27. Centro en $(4, -1)$; foco en $(7, -1)$; vértice en $(6, -1)$

28. Centro en $(-3, 1)$; foco en $(-3, 6)$; vértice en $(-3, 4)$

29. Centro en $(-3, -4)$; foco en $(-3, -8)$; vértice en $(-3, -2)$

30. Centro en $(1, 4)$; foco en $(-2, 4)$; vértice en $(0, 4)$

31. Focos en $(3, 7)$ y $(7, 7)$; vértice en $(6, 7)$

32. Foco en $(-4, 0)$; vértices en $(-4, 4)$ y $(-4, 2)$

33. Vértices en $(-1, -1)$ y $(3, -1)$; asíntota de la recta $(x - 1)/2 = (y + 1)/3$

34. Vértices en $(1, -3)$ y $(1, 1)$; asíntota de la recta $(x - 1)/2 = (y + 1)/3$

En los problemas del 35 al 48 encuentre el centro, el eje transverso, los vértices, focos y las asíntotas. Trace la gráfica de cada ecuación.

35. $\dfrac{(x - 2)^2}{4} - \dfrac{(y + 3)^2}{9} = 1$ **36.** $\dfrac{(y + 3)^2}{4} - \dfrac{(x - 2)^2}{9} = 1$

37. $(y-2)^2-4(x+2)^2=4$
38. $(x+4)^2-9(y-3)^2=9$
39. $(x+1)^2-(y+2)^2=4$
40. $(y-3)^2-(x+2)^2=4$
41. $x^2-y^2-2x-2y-1=0$
42. $y^2-x^2-4y+4x-1=0$
43. $y^2-4x^2-4y-8x-4=0$
44. $2x^2-y^2+4x+4y-4=0$
45. $4x^2-y^2-24x-4y+16=0$
46. $2y^2-x^2+2x+8y+3=0$
47. $y^2-4x^2-16x-2y-19=0$
48. $x^2-3y^2+8x-6y+4=0$

En los problemas del 49 al 52 trace la gráfica de cada función. [Sugerencia: Observe que cada función es la mitad de una hipérbola.]

49. $f(x)=\sqrt{16+4x^2}$
50. $f(x)=-\sqrt{9+9x^2}$
51. $f(x)=-\sqrt{-25+x^2}$
52. $f(x)=\sqrt{-1+x^2}$

53. *LORAN.* Dos estaciones LORAN están separadas 200 millas a lo largo de una costa recta.
    (a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00038 segundos entre las señales LORAN. Establezca un sistema de coordenadas rectangulares para determinar dónde alcanzará el barco la costa si sigue la trayectoria de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.
    (b) Si el barco quiere entrar al puerto localizado entre las dos estaciones a 20 millas de la estación central, ¿qué diferencia de tiempo está buscando?
    (c) Si el barco se encuentra a 50 millas mar adentro al obtener la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es la ubicación exacta del barco? [*Nota:* La velocidad de cada señal de radio es de 186 000 millas por segundo.]
54. *LORAN.* Dos estaciones LORAN están separadas 100 millas a lo largo de una costa recta.
    (a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00032 segundos entre las dos señales LORAN. Establezca un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar en dónde alcanzará el barco la costa si continúa sobre la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.
    (b) Si el barco quiere entrar al puerto localizado entre las dos estaciones a 10 millas de la estación central ¿qué diferencia de tiempo está buscando?
    (c) Si el barco se encuentra a 20 millas mar adentro al obtener la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es la ubicación exacta del barco? [*Nota:* La velocidad de cada señal de radio es de 186 000 millas por segundo.]
55. *Calibración de instrumentos.* En una prueba aplicada a sus instrumentos de registro, un equipo de sismólogos colocaron dos de los dispositivos separados una distancia de 2000 pies, con el dispositivo A al oeste del dispositivo en el punto B. En un punto entre los dos instrumentos y a 200 pies del punto B, se detonó una pequeña cantidad de explosivos y se tomó nota del tiempo en que el sonido llegó a cada dispositivo. Se realizó una segunda explosión en un punto directamente al norte del punto B.
    (a) ¿A qué distancia al norte debe estar el sitio de la segunda explosión de modo que la diferencia del tiempo registrado por los dispositivos para la segunda detonación sea la misma que la registrada para la primera detonación?
    (b) Explique por qué este experimento puede ser utilizado para calibrar los instrumentos.
56. Explique con sus palabras el sistema LORAN de navegación.
57. La **excentricidad** e de una hipérbola se define como el número c/a, donde a y c son los números dados en la ecuación (2). Como $c>a$, se deduce que $e>1$. Describa la forma general de una hipérbola cuya excentricidad es cercana a 1. ¿Cuál será la forma si e es muy grande?
58. Una hipérbola para la cual $a=b$ es llamada **hipérbola equilátera**. Encuentre la excentricidad e de una hipérbola equilátera. [*Nota:* La excentricidad de una hipérbola se definió en el problema 57.]
59. Dos hipérbolas que tienen el mismo conjunto de asíntotas son llamadas **conjugadas**. Demuestre que las hipérbolas

$$\frac{x^2}{4}-y^2=1 \quad \text{y} \quad y^2-\frac{x^2}{4}=1$$

son conjugadas. Trace la gráfica de cada hipérbola en el mismo conjunto de ejes coordenados.

60. Demuestre que la hipérbola

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

tiene las dos asíntotas oblicuas

$$y=\frac{a}{b}x \quad \text{y} \quad y=-\frac{a}{b}x$$

61. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0 \qquad A \neq 0, C \neq 0, F \neq 0$$

donde A y C son de signos opuestos, es una hipérbola con centro en (0, 0).

62. Demuestre que la gráfica de una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad A \neq 0, C \neq 0$$

donde A y C son de signos opuestos:
(a) Es una hipérbola si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F \neq 0$.
(b) Son dos rectas que se cortan si $(D^2/4A) + (E^2/4C) - F = 0$.

9.5 Rotación de ejes; forma general de una cónica

En esta sección demostraremos que la gráfica de un ecuación polinomial general de segundo grado con dos variables x y y, esto es, una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

donde A, B y C no son simultáneamente cero, es una cónica. No nos interesaremos en los casos degenerados de la ecuación (1), tales como $x^2 + y^2 = 0$, cuya gráfica es un solo punto (0, 0); o $x^2 + 3y^2 + 3 = 0$, cuya gráfica no contiene puntos; o $x^2 - 4y^2 = 0$, cuya gráfica son dos rectas, $x - 2y = 0$ y $x + 2y = 0$.

Empecemos con el caso donde $B = 0$. En esta situación el término que contiene a xy no está presente, de modo que la ecuación (1) tiene la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A \neq 0$ o $C \neq 0$.

Ya hemos analizado el procedimiento para identificar la gráfica de esta clase de ecuación; completamos los cuadrados de las expresiones cuadráticas en x, en y, o en ambas. Una vez hecho esto, la cónica puede ser identificada comparándola con una de las formas estudiadas en las secciones 9.2, 9.3 y 9.4.

Sin embargo, podemos identificar la cónica de manera directa desde la ecuación, sin tener que completar los cuadrados.

Teorema identificación de las cónicas sin completar los cuadrados

Con excepción de los casos degenerados, la ecuación

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (2)}$$

donde $A \neq 0$ o $C \neq 0$:

(a) Define una parábola si $AC = 0$.

(b) Define una elipse (o un círculo) si $AC > 0$.

(c) Define una hipérbola si $AC < 0$. ∎

Demostración (a) Si $AC = 0$, entonces $A = 0$ o $C = 0$, pero no ambos, de modo que la forma de la ecuación (2) es

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad A \neq 0$$

o

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad C \neq 0$$

Al utilizar los resultados de los problemas 65 y 66 del ejercicio 9.2, se deduce que, excepto para los casos degenerados, la ecuación es una parábola.

(b) Si $AC > 0$, entonces A y C son del mismo signo. Usando los resultados de los problemas 69 y 70 del ejercicio 9.3, excepto para los casos degenerados, la ecuación es una elipse si $A \neq C$ o un círculo si $A = C$.

(c) Si $AC < 0$, entonces A y C son de signos opuestos. Usando los resultados de los problemas 61 y 62 del ejercicio 9.4, excepto para los casos degenerados, la ecuación es una hipérbola. ■

No es de nuestro interés analizar aquí los casos degenerados de la ecuación (2). Sin embargo, en la práctica, debe tener cuidado acerca de la posibilidad de que aparezcan.

EJEMPLO 1 *Identificación de una cónica sin completar los cuadrados*

Identificar cada ecuación sin completar los cuadrados.

(a) $3x^2 + 6y^2 + 6x - 12y = 0$ (b) $2x^2 - 3y^2 + 6y + 4 = 0$

(c) $y^2 - 2x + 4 = 0$

Solución (a) Comparamos la ecuación dada con la ecuación (2) y concluimos que $A = 3$ y $C = 6$. Como $AC = 18 > 0$, la ecuación es una elipse.

(b) Aquí, $A = 2$ y $C = -3$, de modo que $AC = -6 < 0$. La ecuación es una hipérbola.

(c) Aquí, $A = 0$ y $C = 1$, de modo que $AC = 0$. La ecuación es una parábola. ■

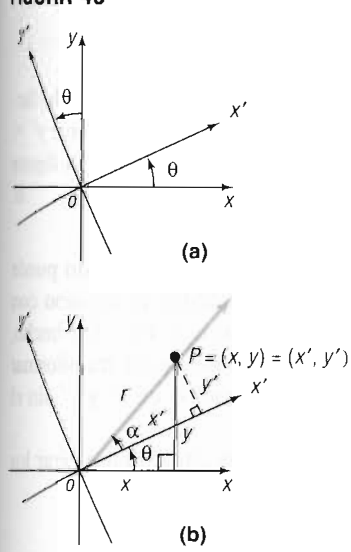
■ Ahora resuelva el problema 1.

Aunque ahora podemos identificar el tipo de cónica representada por cualquier ecuación de la forma de la ecuación (2) sin tener que completar los cuadrados, aún deberemos completarlos cuando queramos obtener información adicional acerca de la cónica.

Ahora pongamos nuestra atención en las ecuaciones de la forma (1), donde $B \neq 0$. Para analizar este caso, primero necesitamos investigar un procedimiento nuevo: la *rotación de ejes.*

Rotación de ejes

FIGURA 48



En una **rotación de ejes,** el origen permanece fijo mientras los ejes x y y son girados un ángulo θ hacia una posición nueva; las nuevas posiciones de los ejes x y y se denotan con x' y y', respectivamente, como se muestra en la figura 48(a).

Ahora observe la figura 48(b). Ahí el punto P tiene las coordenadas (x, y) relativas al plano xy, mientras que el mismo punto P tiene las coordenadas (x', y') relativas al plano $x'y'$. Aquí buscamos relaciones que nos permitan expresar a x y a y en términos de x', y', y θ.

Como vemos en la figura 48(b), r denota la distancia del origen O al punto P, y α denota al ángulo entre el eje positivo x' y el rayo desde O que pasa por P. Entonces, usando las definiciones de seno y coseno, tenemos

$$x' = r\cos\alpha \qquad y' = r\,\text{sen}\,\alpha \tag{3}$$

$$x = r\cos(\theta + \alpha) \qquad y = r\,\text{sen}(\theta + \alpha) \tag{4}$$

Ahora

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \alpha) \\ &= r\,(\cos\theta\cos\alpha - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha) && \text{Fórmula de la suma} \\ &= (r\cos\alpha)(\cos\theta) - (r\,\text{sen}\,\alpha)(\text{sen}\,\theta) \\ &= x'\cos\theta - y'\,\text{sen}\,\theta && \text{Por la ecuación (3)} \end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} y &= r \operatorname{sen}(\theta + \alpha) \\ &= r\,(\operatorname{sen}\theta \cos\alpha + \cos\theta \operatorname{sen}\alpha) \\ &= x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \end{aligned}$$

Teorema fórmulas de rotación

Si los ejes x y y son girados un ángulo θ, las coordenadas (x, y) de un punto P relativo al plano xy y las coordenadas (x', y') del mismo punto relativas a los nuevos ejes x'- y y' estarán relacionadas por las fórmulas

$$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta \qquad y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta \tag{5}$$

■

EJEMPLO 2 *Rotación de ejes*

Expresar la ecuación $xy = 1$ en términos de las nuevas coordenadas $x'y'$ al girar los ejes un ángulo de 45°. Analizar la nueva ecuación.

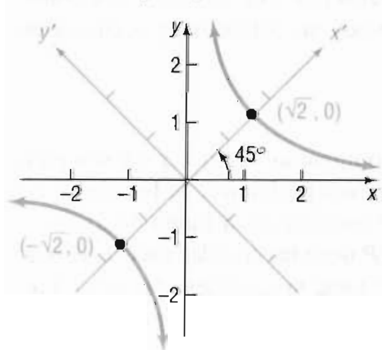
Solución Sea $\theta = 45°$ en la ecuación (5). Entonces

$$x = x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45° = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45° = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

FIGURA 49

$xy = 1$ o $\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$



Al sustituir estas expresiones para x y y en $xy = 1$ se obtiene

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\right]\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\right] = 1$$

$$\frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = 1$$

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$$

Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0) y eje transverso a lo largo del eje x'. Los vértices están en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ sobre el eje x'; las asíntotas son $y' = x'$ y $y' = -x'$ (las cuales corresponden a los ejes x y y originales). *Véase* la figura 49 para apreciar la gráfica. ■

Como ilustra el ejemplo 2, la rotación de ejes en un ángulo apropiado puede transformar una ecuación de segundo grado en x y y que contenga el término con xy, en una ecuación en x' y y' donde no aparezca el término con $x'y'$. De hecho, demostraremos que la rotación de ejes en un ángulo apropiado podrá transformar cualquier ecuación de la forma de la ecuación (1) en una ecuación en x' y y' sin el término con $x'y'$.

Para encontrar la fórmula de seleccionar un ángulo θ apropiado para girar los ejes, empezamos con la ecuación (1),

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

Ahora giramos en un ángulo θ usando las fórmulas de rotación (5):

$$\begin{aligned} A(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)^2 &+ B(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta)(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) \\ &+ C(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta)^2 + D(x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta) \\ &+ E(x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta) + F = 0 \end{aligned}$$

Mediante expansión y agrupación de términos semejantes, obtenemos

$$\begin{aligned} (A \cos^2\theta + B \operatorname{sen}\theta\cos\theta + C \operatorname{sen}^2\theta)x'^2 &+ [B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) + 2(C - A)(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)]x'y' \\ &+ (A \operatorname{sen}^2\theta - B \operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta)y'^2 \qquad (6) \\ &+ (D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta)x' \\ &+ (-D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta)y' + F = 0 \end{aligned}$$

En la ecuación (6), el coeficiente de $x'y'$ es

$$B' = 2(C - A)(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

Ya que deseamos eliminar el término con $x'y'$, seleccionamos un ángulo θ de modo que $B' = 0$.
Así

$$\begin{aligned} 2(C - A)(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) &= 0 \\ (C - A)(\operatorname{sen} 2\theta) + B\cos 2\theta &= 0 \quad \text{Fórmulas para el ángulo doble} \\ B\cos 2\theta &= (A - C)(\operatorname{sen} 2\theta) \\ \cot 2\theta &= \frac{A - C}{B}, \qquad B \neq 0 \end{aligned}$$

Teorema Para transformar la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

en una ecuación en x' y y' sin el término $x'y'$, se debe girar los ejes en un ángulo θ que satisfaga la ecuación

$$\boxed{\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}} \qquad (7)$$

■

La ecuación (7) tiene un número infinito de soluciones para θ. Adoptaremos la convención de seleccionar el ángulo agudo θ que satisface (7). Entonces tenemos las dos posibilidades siguientes:

Si $\cot 2\theta > 0$, entonces $0 < 2\theta \leq \pi/2$ de modo que $0 < \theta \leq \pi/4$.
Si $\cot 2\theta < 0$, entonces $\pi/2 < 2\theta < \pi$ de modo que $\pi/4 < \theta < \pi/2$.

Cada uno de estos enunciados tiene como resultado una rotación de los ejes en sentido contrario al de las manecillas del reloj, en un ángulo agudo θ.*

* Cualquier rotación (en el sentido de las manecillas del reloj, o al contrario) un ángulo θ que satisface $\cot 2\theta = (A - C)/B$ eliminará el término $x'y'$. Sin embargo, las formas finales de la ecuación transformada pueden ser diferentes (pero equivalentes), dependiendo del ángulo elegido.

Advertencia: Tenga cuidado si usa una calculadora para resolver la ecuación (7).

1. Si $\cot 2\theta = 0$, entonces $2\theta = \pi/2$ y $\theta = \pi/4$.
2. Si $\cot 2\theta \neq 0$, encuentre primero $\cos 2\theta$. Luego use la(s) tecla(s) de la función inversa del coseno para obtener 2θ, $0 < 2\theta < \pi$. Finalmente, divida entre 2 para obtener el ángulo agudo θ correcto.

EJEMPLO 3 *Análisis de una ecuación usando una rotación de ejes*

Analizar la ecuación: $x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$

Solución Ya que aparece un término con xy, debemos girar los ejes. Usando $A = 1$, $B = \sqrt{3}$, y $C = 2$, en la ecuación (7), el ángulo agudo θ apropiado por el cual girar los ejes resolverá la ecuación es

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}, \qquad 0° < 2\theta < 180°$$

Ya que $\cot 2\theta = -\sqrt{3}/3$, encontramos que $2\theta = 120°$, de modo que $\theta = 60°$. Usando $\theta = 60°$ en las fórmulas de rotación (5), encontramos

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y')$$
$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$$

Al sustituir estos valores en la ecuación original y simplificando, tenemos

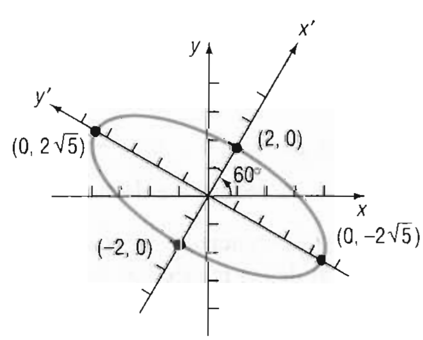
$$x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$$
$$\frac{1}{4}(x' - \sqrt{3}y')^2 + \sqrt{3}\left[\frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y')\right]\left[\frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')\right] + 2\left[\frac{1}{4}(\sqrt{3}x' + y')^2\right] = 10$$

Multiplicamos ambos lados por 4 y desarrollamos para obtener

$$x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2 + \sqrt{3}(\sqrt{3}x'^2 - 2x'y' - \sqrt{3}y'^2) + 2(3x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + y'^2) = 40$$
$$10x'^2 + 2y'^2 = 40$$
$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1$$

Esta es la ecuación de una elipse con centro en (0, 0) y eje mayor a lo largo del eje y'. Los vértices están en $(0, \pm 2\sqrt{5})$ sobre el eje y'. *Véase* la gráfica en la figura 50.

FIGURA 50



■ Ahora resuelva el problema 21.

En el ejemplo 3, el ángulo agudo θ por el cual se giraron los ejes fue fácil de encontrar a causa de los números usados en la ecuación dada. En general, la ecuación $\cot 2\theta = (A - C)/B$ no tiene una solución sencilla. Como lo muestra el ejemplo siguiente, podemos encontrar las fórmulas de rotación apropiadas aún sin usar una aproximación de calculadora, sino aplicando las fórmulas de medio ángulo.

EJEMPLO 4 *Análisis de una ecuación usando rotación de ejes*

Analizar la ecuación: $4x^2 - 4xy + y^2 + 5\sqrt{5}x + 5 = 0$

Solución Haciendo $A = 4$, $B = -4$, y $C = 1$ en la ecuación (7), el ángulo θ apropiado para girar los ejes satisface la ecuación

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{3}{-4}$$

A fin de usar las fórmulas de rotación (5), necesitamos conocer los valores de sen θ y cos θ. Ya que buscamos un ángulo agudo θ, sabemos que sen $\theta > 0$ y cos $\theta > 0$. Así, usamos las fórmulas para el medio ángulo en la forma siguiente

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

Ahora necesitamos encontrar el valor de $\cos 2\theta$. Como $\cot 2\theta = -\frac{3}{4}$ y $\pi/2 < 2\theta < \pi$, se deduce que $\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$. Así,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (-\frac{3}{5})}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + (-\frac{3}{5})}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Con estos valores, las fórmulas de rotación (5) nos dan

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' - \frac{2\sqrt{5}}{5}y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')$$

$$y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' + \frac{\sqrt{5}}{5}y' = \frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')$$

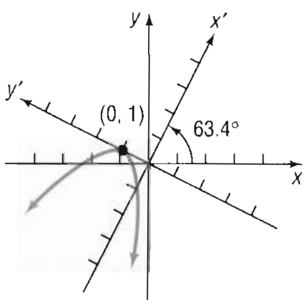
Al sustituir estos valores en la ecuación original y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4xy + y^2 + 5\sqrt{5}x + 5 &= 0 \\ 4\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right]^2 - 4\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right]\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')\right] & \\ + \left[\frac{\sqrt{5}}{5}(2x' + y')\right]^2 + 5\sqrt{5}\left[\frac{\sqrt{5}}{5}(x' - 2y')\right] &= -5 \end{aligned}$$

Multiplicamos ambos lados por 5 y desarrollamos para obtener

$$\begin{aligned} 4(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2) - 4(2x'^2 - 3x'y' - 2y'^2) & \\ + 4x'^2 + 4x'y' + y'^2 + 25(x' - 2y') &= -25 \\ 25y'^2 - 50y' + 25x' &= -25 \\ y'^2 - 2y' + x' &= -1 \\ y'^2 - 2y' + 1 &= -x' \quad \text{Completar el cuadrado en } y' \\ (y' - 1)^2 &= -x' \end{aligned}$$

FIGURA 51



Esta es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 1) en el plano $x'y'$. El eje de simetría es paralelo al eje x'. Usando una calculadora para resolver sen $\theta = 2\sqrt{5}/5$, encontramos que $\theta \approx 63.4°$. *Véase* la gráfica en la figura 51. ■

■ Ahora resuelva el problema 27.

Identificación de las cónicas sin girar los ejes

Suponga que sólo necesitamos identificar (en lugar de analizar) una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0 \tag{8}$$

Si aplicamos las fórmulas de rotación (5) obtendremos una ecuación de la forma

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{9}$$

donde A', B', C', D', E', y F' pueden ser expresados en términos de A, B, C, D, E, F, y el ángulo de rotación θ (*véase* el problema 43 al final de esta sección). Puede demostrarse que el valor de $B^2 - 4AC$ en la ecuación (8), y el valor de $B'^2 - 4A'C'$ en la ecuación (9) son iguales sin importar el ángulo de rotación θ que se elija (*véase* el problema 45). En particular, si el ángulo θ de rotación satisface la ecuación (7), entonces $B' = 0$ en la ecuación (9), y $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Como la ecuación (9) tiene la forma de la ecuación (2),

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

podemos identificarla sin completar los cuadrados, como se dijo al inicio de esta sección. En realidad, podemos identificar la cónica descrita por cualquier ecuación de la forma de la ecuación (8), sin tener que girar los ejes.

Teorema identificación de cónicas sin girar los ejes

Excepto para casos degenerados, la ecuación

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

(a) Define una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.

(b) Define una elipse (o un círculo) si $B^2 - 4AC < 0$.

(c) Define una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$. ■

Se le pedirá que demuestre este teorema en el problema 46.

EJEMPLO 5 *Identificación de una cónica sin girar los ejes*

Identificar la ecuación: $8x^2 - 12xy + 17y^2 - 4\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y - 15 = 0$

Solución Aquí, $A = 8$, $B = -12$, y $C = 17$, de modo que $B^2 - 4AC = -400$. Como $B^2 - 4AC < 0$, la ecuación define una elipse. ■

■ Ahora resuelva el problema 33.

9.5

Ejercicio 9.5

En los problemas del 1 al 10 identifique cada ecuación sin completar los cuadrados.

1. $x^2 + 4x + y + 3 = 0$
2. $2y^2 - 3y + 3x = 0$
3. $6x^2 + 3y^2 - 12x + 6y = 0$
4. $2x^2 + y^2 - 8x + 4y + 2 = 0$
5. $3x^2 - 2y^2 + 6x + 4 = 0$
6. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$
7. $2y^2 - x^2 - y + x = 0$
8. $y^2 - 8x^2 - 2x - y = 0$
9. $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$
10. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 8y = 0$

En los problemas del 11 al 20, determine las fórmulas de rotación apropiadas de modo que la nueva ecuación no contenga el término xy.

11. $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$
12. $x^2 - 4xy + y^2 - 3 = 0$
13. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$
14. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$
15. $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$
16. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$
17. $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$
18. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 5 = 0$
19. $25x^2 - 36xy + 40y^2 - 12\sqrt{13}x - 8\sqrt{13}y = 0$
20. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$

En los problemas del 21 al 32 gire los ejes de modo que la nueva ecuación no contenga el término xy. Analice y trace la gráfica de la nueva ecuación. (Consulte los problemas del 11 al 20 para resolver los del 21 al 30.)

21. $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$
22. $x^2 - 4xy + y^2 - 3 = 0$
23. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$
24. $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 32 = 0$
25. $13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$
26. $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - 4 = 0$
27. $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$
28. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y + 5 = 0$
29. $25x^2 - 36xy + 40y^2 - 12\sqrt{13}x - 8\sqrt{13}y = 0$
30. $34x^2 - 24xy + 41y^2 - 25 = 0$
31. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 130x + 90y = 0$
32. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 60x + 80y = 0$

En los problemas del 33 al 42 identifique cada ecuación sin girar los ejes.

33. $x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + 2y + 5 = 0$
34. $2x^2 - 3xy + 4y^2 + 2x + 3y - 5 = 0$
35. $x^2 - 7xy + 3y^2 - y - 10 = 0$
36. $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x - 2 = 0$
37. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - x - y = 0$
38. $10x^2 + 12xy + 4y^2 - x - y + 10 = 0$
39. $10x^2 - 12xy + 4y^2 - x - y - 10 = 0$
40. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - x - y = 0$
41. $3x^2 - 2xy + y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$
42. $3x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y + 10 = 0$

En los problemas del 43 al 46 aplique las fórmulas de rotación (5) a

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

para obtener la ecuación

$$A'x'^2 + B'x'y + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

43. Exprese A', B', C', D', E', y F' en términos de A, B, C, D, E, F, y del ángulo de rotación θ.
44. Demuestre que $A + C = A' + C'$ para probar que $A + C$ es invariante; esto es, que su valor no cambia bajo una rotación de ejes.
45. Consulte el problema 44. Demuestre que $B^2 - 4AC$ es invariante.

46. Demuestre que, excepto para casos degenerados, la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(a) Define una parábola si $B^2 - 4AC = 0$.
(b) Define una elipse (o un círculo) si $B^2 - 4AC < 0$.
(c) Define una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$.

47. Use las fórmulas de rotación (5) para demostrar que la distancia es invariante bajo una rotación de ejes. Esto es, demuestre que la distancia de $P_1 = (x_1, y_1)$ to $P_2 = (x_2, y_2)$ en el plano xy es igual a la distancia de $P_1 = (x'_1, y'_1)$ a $P_2 = (x'_2, y'_2)$ en el plano $x'y'$.

48. Demuestre que la gráfica de la ecuación $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ es parte de la gráfica de una parábola.

49. Formule una estrategia para analizar y trazar la gráfica de una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. ¿Cómo cambia su estrategia si la ecuación es de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$?

9.6 Ecuaciones polares de las cónicas

En las secciones 9.2, 9.3 y 9.4, dimos definiciones separadas para la parábola, la elipse y la hipérbola con base en propiedades geométricas y la fórmula de distancia. En esta sección presentamos una definición alternativa que define de manera simultánea a todas estas cónicas. Como veremos, este enfoque es muy adecuado para la representación en coordenadas polares. (Consúltese la sección 8.4.)

Cónica

Sean D una recta fija llamada **directriz,** F un punto fijo llamado **foco,** que no está en D, y e un número positivo fijo llamado **excentricidad.** Una **cónica** es el conjunto de todos los puntos P en el plano tales que la razón de la distancia desde F a P a la distancia de P a D es igual a e. Así, una cónica es la colección de puntos P para los cuales

$$\frac{d(F, P)}{d(P, D)} = e \tag{1}$$

Si $e = 1$, la cónica es una **parábola.**

Si $e < 1$, la cónica es una **elipse.**

Si $e > 1$, la cónica es una **hipérbola.**

Observe que si $e = 1$, la definición de una parábola en la ecuación (1) es exactamente la misma que la usada en la sección 9.2.

En el caso de una elipse, el **eje mayor** es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. En el caso de una hipérbola, el eje transverso es una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz. Para una elipse y una hipérbola, la excentricidad e satisface

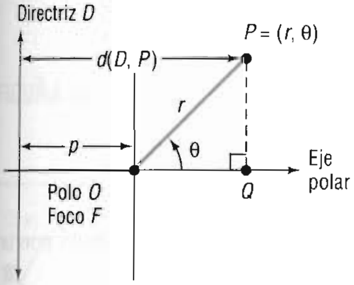
$$e = \frac{c}{a} \tag{2}$$

donde c es la distancia desde el centro al foco y a la distancia desde el centro a un vértice.

Igual que como lo hicimos antes usando coordenadas rectangulares, deducimos las ecuaciones para las cónicas en coordenadas polares seleccionando una posición conveniente para el foco F y la directriz D. El foco F se coloca en el polo, y la directriz D es paralela o perpendicular al eje polar.

Suponga que empezamos con la directriz D perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la izquierda del polo (el foco F). *Véase* la figura 52.

FIGURA 52



Si $P = (r, \theta)$ es cualquier punto en la cónica, entonces, por la ecuación (1),

$$\frac{d(F, P)}{d(D, P)} = e \quad \text{o} \quad d(F, P) = e \cdot d(D, P) \tag{3}$$

Ahora usamos el punto Q obtenido al bajar la perpendicular desde P hasta el eje polar para calcular $d(D, P)$:

$$d(D, P) = p + d(O, Q) = p + r\cos\theta$$

Al usar esta expresión y el hecho de que $d(F, P) = d(O, P) = r$ en la ecuación (3), obtenemos

$$\begin{aligned} d(F, P) &= e \cdot d(D, P) \\ r &= e(p + r\cos\theta) \\ r &= ep + er\cos\theta \\ r - er\cos\theta &= ep \\ r(1 - e\cos\theta) &= ep \\ r &= \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \end{aligned}$$

Teorema ecuación polar de una cónica: foco en el polo; directriz perpendicular al eje polar a una distancia p a la izquierda del polo

La ecuación polar de una cónica con foco en el polo y directriz perpendicular al eje polar a una distancia p a la izquierda del polo es

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \tag{4}$$

donde e es la excentricidad de la cónica. ■

EJEMPLO 1 *Identificación y graficación de la ecuación polar de una cónica*

Identificar y trazar la gráfica de la ecuación: $r = \dfrac{4}{2 - \cos\theta}$

Solución La ecuación dada no está completamente en la forma de la ecuación (4), ya que el primer término en el denominador es 2 en lugar de 1. Así, dividimos el numerador y el denominador entre 2 para obtener

$$r = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}\cos\theta}$$

Esta ecuación está en la forma de la ecuación (4), con

$$e = \tfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad ep = \tfrac{1}{2}p = 2$$

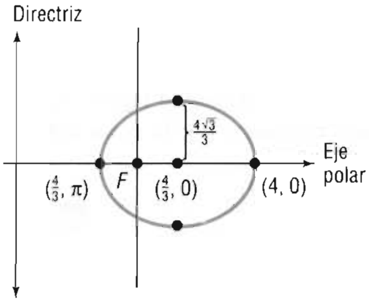
Así, $e = \frac{1}{2}$ y $p = 4$. Concluimos que la cónica es una elipse, ya que $e = \frac{1}{2} < 1$. Un foco está en el polo, y la directriz es perpendicular al eje polar, a una distancia de

4 unidades a la izquierda del polo. Se deduce que el eje mayor está a lo largo del eje polar. Para encontrar los vértices, hacemos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Así, los vértices de la elipse son $(4, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \pi)$. En el punto medio de los vértices, localizamos el centro de la elipse en $(\frac{4}{3}, 0)$. [¿Advierte por qué? Por que los vértices $(4, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \pi)$ en coordenadas polares son $(4, 0)$ y $(-\frac{4}{3}, 0)$ en coordenadas rectangulares. El punto medio en coordenadas rectangulares es $(\frac{4}{3}, 0)$, que también es $(\frac{4}{3}, 0)$ en coordenadas polares.] Así, a es igual a la distancia desde el centro hasta un vértice $= \frac{8}{3}$. Usando $a = \frac{8}{3}$ y $e = \frac{1}{2}$ en la ecuación (2), $e = c/a$, encontramos $c = \frac{4}{3}$. Por último usando $a = \frac{8}{3}$ y $c = \frac{4}{3}$ en $b^2 = a^2 - c^2$, tenemos

$$b^2 = a^2 - c^2 = \frac{64}{9} - \frac{16}{9} = \frac{48}{9}$$

$$b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

FIGURA 53



La figura 53 muestra la gráfica.

Verificación: Trazar la gráfica de $r = 4/(2 - \cos\theta)$ y comparar el resultado con la figura 53. ∎

Exploración: Trace la gráfica de $r = 4/(2 + \cos\theta)$ y compare el resultado con la figura 53. ¿Qué puede concluir? Borre la pantalla y trace la gráfica de $r = 4/(2 - \operatorname{sen}\theta)$ y luego la de $r = 4/(2 + \operatorname{sen}\theta)$. Compare cada una de estas gráficas con la figura 53. ¿Qué puede concluir?

■ Ahora resuelva el problema 5.

La ecuación (4) fue obtenida bajo la hipótesis de que la directriz era perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la izquierda del polo. Una deducción semejante (*véase* el problema 37), en la cual la directriz es perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la derecha del polo, tiene como resultado la ecuación

$$\boxed{r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta}}$$

En los problemas 38 y 39 se le pide que deduzca las ecuaciones polares de cónicas con foco en el polo y directriz paralela al eje polar. La tabla 5 resume las ecuaciones polares de las cónicas.

TABLA 5 ECUACIONES POLARES DE LAS CÓNICAS (FOCO EN EL POLO, EXCENTRICIDAD e)

ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
(a) $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$	La directriz es perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la izquierda del polo.
(b) $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$	La directriz es perpendicular al eje polar a una distancia de p unidades a la derecha del polo.
(c) $r = \dfrac{ep}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$	La directriz es paralela al eje polar a una distancia de p unidades por arriba del polo.
(d) $r = \dfrac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$	La directriz es paralela al eje polar a una distancia de p unidades por abajo del polo.

EXCENTRICIDAD

Si $e = 1$, la cónica es una parábola; el eje de simetría es perpendicular a la directriz.
Si $e < 1$, la cónica es una elipse; el eje mayor es perpendicular a la directriz.
Si $e > 1$, la cónica es una hipérbola; el eje transverso es perpendicular a la directriz.

EJEMPLO 2 *Identificación y graficación de la ecuación polar de una cónica*

Identificar y trazar la gráfica de la ecuación: $r = \dfrac{6}{3 + 3 \operatorname{sen} \theta}$

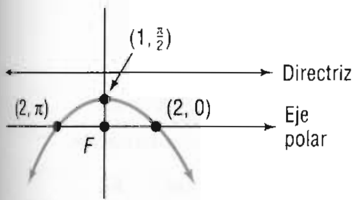
Solución Colocamos la ecuación en forma apropiada, y dividimos el numerador y el denominador entre 3 para obtener

$$r = \frac{2}{1 + \operatorname{sen} \theta}$$

Con referencia a la tabla 5, concluimos que esta ecuación está en la forma de la ecuación (c) con

$$e = 1 \quad \text{y} \quad ep = 2$$

FIGURA 54



Así, $e = 1$ y $p = 2$. La cónica es una parábola con foco en el polo. La directriz es paralela al eje polar a una distancia de 2 unidades arriba del polo; el eje de simetría es perpendicular al eje polar. El vértice de la parábola está en $(1, \pi/2)$. (¿Advierte por qué?) Para apreciar la gráfica *véase* la figura 54. Observe que trazamos dos puntos más, $(2, 0)$ y $(2, \pi)$, para ayudarnos en el proceso de graficación.

Verificación: Trazar la gráfica de $r = 6/(3 + 3 \operatorname{sen} \theta)$ y comparar el resultado con la figura 54. ■

■ Ahora resuelva el problema 7.

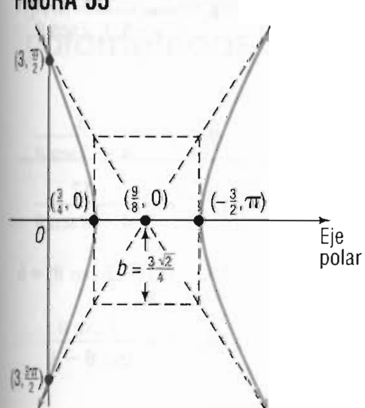
EJEMPLO 3 *Identificación y graficación de la ecuación polar de una cónica*

Identificar y trazar la gráfica de la ecuación: $r = \dfrac{3}{1 + 3 \cos \theta}$

Solución Esta ecuación está en la forma de la ecuación (b) de la tabla 5. Concluimos que

$$e = 3 \quad \text{y} \quad ep = 3p = 3$$

FIGURA 55



Así, $e = 3$ y $p = 1$. Esta es la ecuación de una hipérbola con un foco en el polo. La directriz es perpendicular al eje polar en una unidad a la derecha del polo. El eje transverso está a lo largo del eje polar. Para encontrar los vértices, hacemos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Así, los vértices son $(\frac{3}{4}, 0)$ y $(-\frac{3}{2}, \pi)$. El centro está en el punto medio de $(\frac{3}{4}, 0)$ y $(-\frac{3}{2}, \pi)$, que es $(\frac{9}{8}, 0)$. Por lo tanto, $c =$ es igual a la distancia desde el centro hasta un foco $= \frac{9}{8}$. Ya que $e = 3$, se deduce de la ecuación (2), $e = c/a$, que $a = \frac{3}{8}$. Por último, utilizando $a = \frac{3}{8}$ y $c = \frac{9}{8}$ en $b^2 = c^2 - a^2$, encontramos

$$b^2 = c^2 - a^2 = \frac{81}{64} - \frac{9}{64} = \frac{72}{64} = \frac{9}{8}$$

$$b = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

La figura 55 muestra la gráfica. Obsérvese que trazamos dos puntos más, $(3, \pi/2)$ y $(3, 3\pi/2)$, en la rama izquierda y usamos simetría para obtener la rama derecha. Las asíntotas de esta hipérbola se encontraron de la manera usual construyendo el rectángulo que también se muestra.

Verificación: Trazar la gráfica de $r = 3/(1 + 3 \cos \theta)$ y comparar el resultado con la figura 55. ■

■ Ahora resuelva el problema 11.

EJEMPLO 4 *Conversión de una ecuación polar a una ecuación rectangular*

Convertir la ecuación polar

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\theta}$$

a una ecuación rectangular.

Solución Aquí la estrategia será reacomodar primero la ecuación y elevar al cuadrado cada lado, antes de usar las ecuaciones de transformación:

$$r = \frac{1}{3 - 3\cos\theta}$$

$$3r - 3r\cos\theta = 1$$

$$3r = 1 + 3r\cos\theta \quad \text{Reacomodar la ecuación.}$$

$$9r^2 = (1 + 3r\cos\theta)^2 \quad \text{Elevar al cuadrado cada lado.}$$

$$9(x^2 + y^2) = (1 + 3x)^2 \quad \text{Usar las ecuaciones de transformación.}$$

$$9x^2 + 9y^2 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$9y^2 = 6x + 1$$

Esta es la ecuación de una parábola en coordenadas rectangulares. ■

■ Ahora resuelva el problema 19.

9.6

Ejercicio 9.6

En los problemas del 1 al 6 identifique la cónica que representa cada ecuación polar. Además, dé la posición de la directriz.

1. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$
2. $r = \dfrac{3}{1 - \operatorname{sen}\theta}$
3. $r = \dfrac{4}{2 - 3\operatorname{sen}\theta}$
4. $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$
5. $r = \dfrac{3}{4 - 2\cos\theta}$
6. $r = \dfrac{6}{8 + 2\operatorname{sen}\theta}$

En los problemas del 7 al 18, identifique y trace la gráfica de cada ecuación.

7. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$
8. $r = \dfrac{3}{1 - \operatorname{sen}\theta}$
9. $r = \dfrac{8}{4 + 3\operatorname{sen}\theta}$
10. $r = \dfrac{10}{5 + 4\cos\theta}$
11. $r = \dfrac{9}{3 - 6\cos\theta}$
12. $r = \dfrac{12}{4 + 8\operatorname{sen}\theta}$
13. $r = \dfrac{8}{2 - \operatorname{sen}\theta}$
14. $r = \dfrac{8}{2 + 4\cos\theta}$
15. $r(3 - 2\operatorname{sen}\theta) = 6$
16. $r(2 - \cos\theta) = 2$
17. $r = \dfrac{6\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$
18. $r = \dfrac{3\csc\theta}{\csc\theta - 1}$

En los problemas del 19 al 30 convierta cada ecuación polar en una ecuación rectangular.

19. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$
20. $r = \dfrac{3}{1 - \operatorname{sen}\theta}$
21. $r = \dfrac{8}{4 + 3\operatorname{sen}\theta}$
22. $r = \dfrac{10}{5 + 4\cos\theta}$
23. $r = \dfrac{9}{3 - 6\cos\theta}$
24. $r = \dfrac{12}{4 + 8\operatorname{sen}\theta}$

25. $r = \dfrac{8}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

26. $r = \dfrac{8}{2 + 4\cos\theta}$

27. $r(3 - 2\operatorname{sen}\theta) = 6$

28. $r(2 - \cos\theta) = 2$

29. $r = \dfrac{6\sec\theta}{2\sec\theta - 1}$

30. $r = \dfrac{3\csc\theta}{\csc\theta - 1}$

En los problemas del 31 al 36 encuentre una ecuación polar para cada cónica. En todas ellas, un foco está en el polo.

31. $e = 1$; la directriz es paralela al eje polar una unidad arriba del polo

32. $e = 1$; la directriz es paralela al eje polar 2 unidades abajo del polo

33. $e = \frac{4}{5}$; la directriz es perpendicular al eje polar 3 unidades a la izquierda del polo

34. $e = \frac{2}{3}$; la directriz es paralela al eje polar 3 unidades arriba del polo

35. $e = 6$; la directriz es paralela al eje polar 2 unidades abajo del polo

36. $e = 5$; la directriz es perpendicular al eje polar 5 unidades a la derecha del polo

37. Deduzca la ecuación (b) de la tabla 5: $r = \dfrac{ep}{1 + e\cos\theta}$

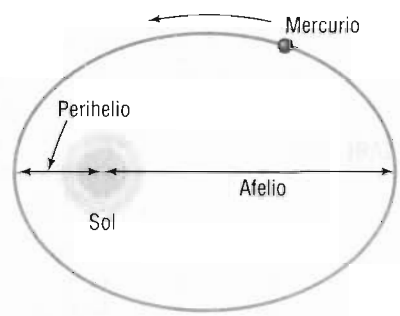
38. Deduzca la ecuación (c) de la tabla 5: $r = \dfrac{ep}{1 + e\operatorname{sen}\theta}$

39. Deduzca la ecuación (d) de la tabla 5: $r = \dfrac{ep}{1 - e\operatorname{sen}\theta}$

40. El planeta Mercurio viaja alrededor del Sol en una órbita elíptica dada de manera aproximada por

$$r = \frac{(3.442)10^7}{1 - 0.206\cos\theta}$$

donde r se mide en millas y el Sol está en el polo. Encuentre la distancia de Mercurio al Sol en el afelio (máxima distancia al Sol) y en el perihelio (mínima distancia al Sol). *Véase* la figura al margen.



9.7

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Las ecuaciones de la forma $y = f(x)$, donde f es una función, tienen gráficas que son cortadas a lo más una vez por cualquier línea vertical. Las gráficas de muchas de las cónicas y otras gráficas más complicadas no tienen esta característica. Aún así cada gráfica, al igual que la gráfica de una función, es una colección de puntos (x, y) en el plano xy; esto es, cada una es una curva plana. En esta sección analizaremos otra manera de representar tales gráficas.

Curvas planas

Sea $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f y g son dos funciones cuyo dominio común es algún intervalo I. La colección de puntos definidos por

$$(x, y) = (f(t), g(t))$$

es llamado **curva plana.** Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde t está en I, son llamadas **ecuaciones paramétricas** de la curva. La variable t es un **parámetro.**

Las ecuaciones paramétricas son útiles, particularmente al describir un movimiento a lo largo de una curva. Suponga que una curva está definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde f y g están definidas, cada una, sobre algún intervalo I. Para un valor dado de t en I, podemos encontrar el valor de $x = f(t)$ y de $y = g(t)$, así se obtiene un punto (x, y) sobre la curva. En realidad, cuando t varía en el intervalo I en algún orden, digamos de izquierda a derecha, los valores sucesivos de t dan el sentido del movimiento en toda la extensión de la curva. Esto es, cuando t varía sobre I en algún orden, la curva es trazada en una cierta dirección por la correspondiente sucesión de puntos (x, y). *Veamos* un ejemplo.

EJEMPLO 1

Análisis de una curva definida por ecuaciones paramétricas

Analizar la curva definida por las ecuaciones paramétricas

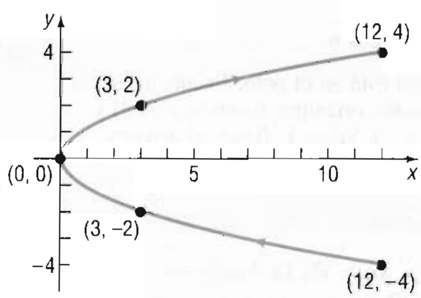
$$x = 3t^2 \qquad y = 2t, \qquad -2 \le t \le 2 \tag{1}$$

Solución A cada número t, $-2 \le t \le 2$, le corresponde un número x y un número y. Por ejemplo, cuando $t = -2$, entonces $x = 12$ y $y = -4$. Cuando $t = 0$, then $x = 0$ y $y = 0$ En realidad, podemos construir una tabla enlistando varios valores del parámetro t y los valores correspondientes para x y y, como se muestra en la tabla 6. Trazando estos puntos y conectándolos mediante una curva suave se obtiene la figura 56.

TABLA 6

t	x	y	(x, y)
−2	12	−4	(12, −4)
−1	3	−2	(3, −2)
0	0	0	(0, 0)
1	3	2	(3, 2)
2	12	4	(12, 4)

FIGURA 56



Observe las flechas en la curva de la figura 56. Ellas indican la dirección u **orientación** de la curva al aumentar los valores del parámetro t.

■ Ahora resuelva el problema 1.

Comentario: La mayor parte de los dispositivos de graficación tiene capacidad para trazar la gráfica de ecuaciones paramétricas. Verifique en cada manual cómo se hace esto.

Verificación: Trace la gráfica de $x = 3t^2$, $y = 2t$, $-2 \le t \le 2$, y compare el resultado con la figura 56.

Las ecuaciones paramétricas que definen a una curva no son únicas. Puede verificarse que la curva en la figura 56 también puede ser definida por cualquiera de las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{3t^2}{4} \qquad y = t, \qquad -4 \le t \le 4$$

o

$$x = 3t^2 + 12t + 12 \qquad y = 2t + 4, \qquad -4 \le t \le 0$$

o

$$x = 3t^{2/3} \qquad y = 2\sqrt[3]{t}, \qquad -8 \le t \le 8$$

La curva de la figura 56 debe serle conocida. Para identificarla de manera precisa, encontremos la ecuación rectangular correspondiente eliminando el parámetro t de las ecuaciones paramétricas (1) dadas en el ejemplo 1,

$$x = 3t^2 \qquad y = 2t, \qquad -2 \le t \le 2$$

Podemos despejar t en $y = 2t$, obteniendo $t = y/2$, sustituimos esta expresión en la otra ecuación:

$$x = 3t^2 \underset{t=\frac{y}{2}}{=} 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3y^2}{4}$$

Esta ecuación, $x = 3y^2/4$, es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y eje a lo largo del eje x.

Note que la curva paramétrica definida por la ecuación (1) y mostrada en la figura 56, sólo es una parte de la parábola $x = 3y^2/4$. Así, la gráfica de la ecuación rectangular obtenida eliminando el parámetro, en general tendrá más puntos que la curva original definida de manera paramétrica. Por lo tanto, se debe tener cuidado cuando se trace una curva de este tipo después de eliminar el parámetro. Sin embargo, aplicar el proceso de eliminación del parámetro t en una curva definida de manera paramétrica para identificarla de manera precisa, algunas veces es un mejor enfoque que sólo trazar puntos; pero en ocasiones requiere de un poco de ingenio.

EJEMPLO 2 *Determinación de la ecuación rectangular de una curva definida de manera paramétrica*

Encontrar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a \cos t \qquad y = a \operatorname{sen} t$$

donde $a > 0$ es una constante. Trazar la gráfica de esta curva, indicando su orientación.

Solución La presencia de senos y cosenos en la ecuación paramétrica sugiere que usemos una identidad pitagórica. De hecho, como

$$\cos t = \frac{x}{a} \qquad \operatorname{sen} t = \frac{y}{a}$$

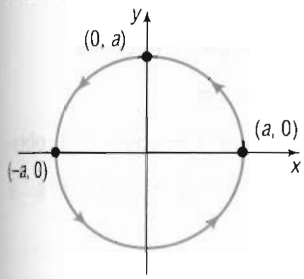
encontramos que

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

FIGURA 57



Así, la curva es un círculo con centro en (0, 0) y radio a. Cuando el parámetro t crece, digamos desde $t = 0$ [el punto $(a, 0)$] a $t = \pi/2$ [el punto (0, a)] a $t = \pi$ [el punto $(-a, 0)$], vemos que los puntos correspondientes son trazados alrededor del círculo en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj. De aquí que la orientación sea como se indica en la figura 57. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

Analicemos un poco más la curva del ejemplo 2. El dominio de cada ecuación paramétrica es $-\infty < t < \infty$. Así, la gráfica de la figura 57 en realidad se repite cada vez que t aumenta en 2π. Si queremos que la curva consista de exactamente una vuelta en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj, podríamos escribir

$$x = a\cos t \qquad y = a\cos t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Esta curva empieza en $t = 0$ [el punto $(a, 0)$] y, avanzando alrededor del círculo en sentido contrario al de las manecillas del reloj, termina en $t = 2\pi$ [también el punto $(a, 0)$].

Si queremos que la curva consista de exactamente tres vueltas en la dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj, podríamos escribir

$$x = a\cos t \qquad y = a\,\text{sen}\, t, \qquad -2\pi \leq t \leq 4\pi$$

o

$$x = a\cos t \qquad y = a\,\text{sen}\, t, \qquad 0 \leq t \leq 6\pi$$

o

$$x = a\cos t \qquad y = a\,\text{sen}\, t, \qquad 2\pi \leq t \leq 8\pi$$

FIGURA 58

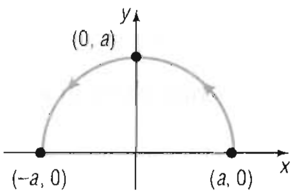
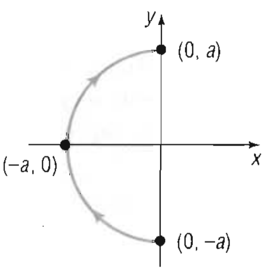


FIGURA 59



Si queremos que la curva consista del semicírculo superior de radio a con una orientación en sentido contrario al de las manecillas del reloj, podríamos escribir

$$x = a\cos t \qquad y = a\,\text{sen}\, t, \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

Véase la figura 58.

Si queremos que la curva consista del semicírculo izquierdo de radio a con una orientación en el sentido del giro de las manecillas del reloj, podríamos escribir

$$x = -a\,\text{sen}\, t \qquad y = -a\cos t, \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

Véase la figura 59.

El tiempo como un parámetro

Si pensamos en parámetro t como el tiempo, entonces las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ de una curva C especifican cómo las coordenadas x y y de un punto en movimiento varían con el tiempo.

Por ejemplo, podemos usar las ecuaciones paramétricas para describir el movimiento de un objeto, llamado algunas veces **movimiento curvilíneo.** Usando ecuaciones paramétricas, podemos especificar no sólo en dónde se halla el objeto, su posición (x, y), sino también cuándo está allí, esto es, el tiempo.

EJEMPLO 3 *Descripción del movimiento de un objeto*

Describir el movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de la curva

$$x = 4\,\text{sen}\, t \qquad y = 3\cos t, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

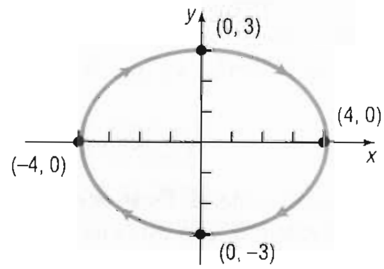
Solución Eliminamos el parámetro t usando la identidad pitagórica $\text{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, obteniendo

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La curva es una elipse con centro en (0, 0), el eje mayor está a lo largo del eje x y los vértices están en $(\pm 4, 0)$. Cuando t varía desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$, el objeto se mueve alrededor de la elipse en dirección contraria al sentido de las manecillas del reloj iniciando en (0, 3), llegando a (4, 0) cuando $t = \pi/2$ y (0, −3) cuando $t = \pi$, y finalizando en (0, 3) cuando $t = 2\pi$. *Véase* la figura 60.

FIGURA 60



Verificación: Trazar la gráfica de $x = 4$ sen t, $y = 3\cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y comparar el resultado con la figura 60. ■

Determinación de ecuaciones paramétricas

Ahora estudiaremos cómo encontrar ecuaciones paramétricas de una curva dada.

Si la curva está definida por la ecuación $y = f(x)$, donde f es una función, una manera de encontrar sus ecuaciones paramétricas es haciendo simplemente $x = t$. Entonces $y = f(t)$. Así,

$$x = t \qquad y = f(t), \qquad t \text{ en en el dominio de } f$$

son las ecuaciones paramétricas de la curva.

EJEMPLO 4 *Determinación de ecuaciones paramétricas para una curva definida por una ecuación rectangular*

Encontrar ecuaciones paramétricas para la ecuación: $y = x^2 - 4$

Solución Sea $x = t$. Entonces las ecuaciones paramétricas son

$$x = t \qquad y = t^2 - 4, \qquad -\infty < t < \infty$$ ■

Otro enfoque menos obvio para el problema 4 es hacer $x = t^3$. Entonces las ecuaciones paramétricas se convierten en

$$x = t^3 \qquad y = t^6 - 4, \qquad -\infty < t < \infty$$

Se debe tener cuidado cuando se utilice este enfoque, ya que la sustitución para x debe ser una función que permita a x tomar todos los valores estipulados por el dominio de f. Así, por ejemplo, el hacer $x = t^2$ de modo que $y = t^4 - 4$, no da como resultado ecuaciones paramétricas equivalentes para $y = x^2 - 4$, puesto que sólo se obtienen puntos para $x \geq 0$.

EJEMPLO 5 *Determinación de ecuaciones paramétricas para un objeto en movimiento*

Encontrar ecuaciones paramétricas de la elipse

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

donde el parámetro t es el tiempo (en segundos) y

(a) El movimiento alrededor de la elipse es en el mismo sentido de las manecillas del reloj, empezando en el punto (0, 3), y se necesita un segundo para completar una vuelta.

(b) El movimiento alrededor de la elipse es en sentido contrario al de las manecillas del reloj, empezando en el punto (1, 0), y se necesita de 2 segundos para completar una vuelta.

Solución (a) Como el movimiento inicia en el punto (0, 3), queremos tener $x = 0$ y $y = 3$ cuando $t = 0$. Además, ya que la ecuación dada es una elipse, empezamos haciendo

$$x = \operatorname{sen} \omega t \qquad \frac{y}{3} = \cos \omega t$$

para alguna constante ω. Estas ecuaciones paramétricas satisfacen claramente la ecuación. Además, con esta elección, cuando $t = 0$, tenemos $x = 0$ y $y = 3$. Para que el movimiento sea en el mismo sentido de las manecillas del reloj, se tiene que empezar aumentando el valor de x y disminuyendo el de y conforme t crezca. Así, $\omega > 0$. Por último, ya que queremos dar una vuelta en un segundo, el periodo es $2\pi/\omega = 1$, de modo que $\omega = 2\pi$. Así, ecuaciones paramétricas que satisfacen las condiciones estipuladas son

$$x = \operatorname{sen} 2\pi t \qquad y = 3 \cos 2\pi t, \qquad 0 \leq t \leq 1 \tag{2}$$

(b) Como el movimiento inicia en el punto (1, 0), queremos tener $x = 1$ y $y = 0$ cuando $t = 0$. Además, ya que la ecuación dada es una elipse, empezamos haciendo

$$x = \cos \omega t \qquad \frac{y}{3} = \operatorname{sen} \omega t$$

para alguna constante ω. Estas ecuaciones paramétricas satisfacen claramente la ecuación. Además, con esta elección, cuando $t = 0$, tenemos $x = 1$ y $y = 0$. Para que el movimiento sea en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se tendrá que empezar disminuyendo el valor de x y aumentando el de y conforme t crezca. Así, $\omega > 0$. Por último, como una vuelta requiere de 2 segundos, el periodo es $2\pi/\omega = 2$, de modo que $\omega = \pi$. Así, las ecuaciones paramétricas que satisfacen las condiciones estipuladas son

$$x = \cos \pi t \qquad y = 3 \operatorname{sen} \pi t, \qquad 0 \leq t \leq 2 \tag{3}$$

■

Cualquiera de las ecuaciones (2) o (3) puede servir como ecuación paramétrica para la elipse $x^2 + (y^2/9) = 1$ dada en el ejemplo 5. La dirección del movimiento, el punto inicial y el tiempo para una vuelta, sólo nos sirven como ayuda para llegar a una representación paramétrica particular.

■ Ahora resuelva el problema 25.

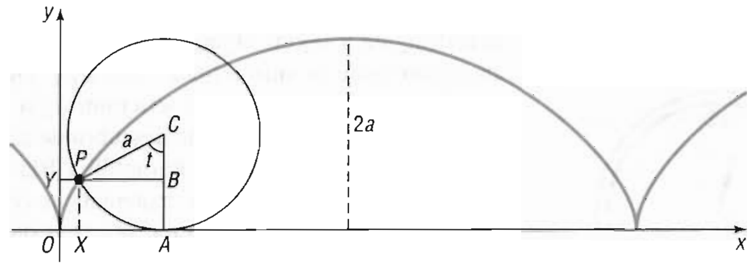
La cicloide

Suponga que un círculo de radio a rueda a lo largo del eje horizontal sin resbalarse. Como el círculo gira a lo largo de una recta, un punto P en el círculo trazará una curva llamada **cicloide** (*véase* la figura 61). Ahora verificaremos las ecuaciones paramétricas* para una cicloide.

Empezamos con un círculo de radio a y hacemos que la recta fija sobre la que el círculo rodará sea el eje x. Sea el origen uno de los puntos en los cuales el

* Cualquier intento por deducir la ecuación rectangular de una cicloide pronto mostraría qué tan complicada es la tarea.

FIGURA 61
Cicloide



punto P hace contacto con el eje x. La figura 61 ilustra la posición de este punto después de que el círculo ha rodado un poco. El ángulo t (en radianes) mide el ángulo que ha rodado el círculo.

Como se requiere que no haya deslizamiento, se deduce que

$$\text{Arco } AP = d(O, A)$$

Por lo tanto,

$$at = d(O, A)$$

La abscisa del punto P es

$$d(O, X) = d(O, A) - d(X, A) = at - a \operatorname{sen} t = a(t - \operatorname{sen} t)$$

La ordenada del punto P es igual a

$$d(O, Y) = d(A, C) - d(B, C) = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$$

Así, las ecuaciones paramétricas de la cicloide son

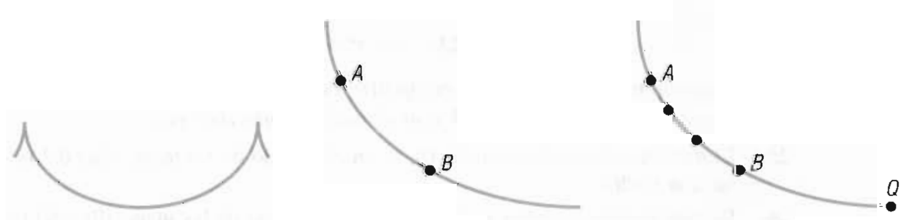
$$\boxed{x = a(t - \operatorname{sen} t) \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (4)}$$

Verificación: Trazar la gráfica de $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y comparar el resultado con la figura 61.

Aplicaciones a la mecánica

Si a es negativo en las ecuaciones (4), obtenemos una cicloide invertida, como se muestra en la figura 62(a). La cicloide invertida ocurre como resultado de algunas aplicaciones notables en el campo de la mecánica. Mencionaremos dos de ellas: la *braquistocrona* y la *tautocrona*.*

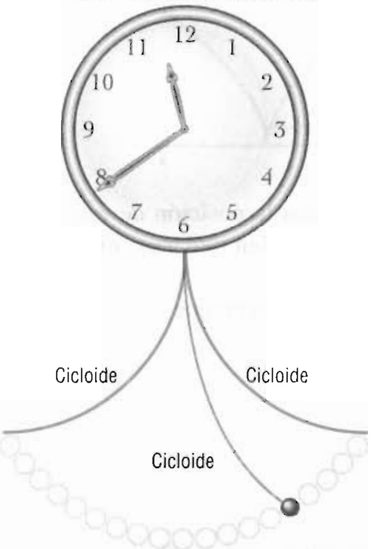
FIGURA 62



(a) Cicloide invertida **(b)** Curva de descenso más rápido **(c)** Todos llegan a Q al mismo tiempo

* En griego, *braquistocrona* significa "el tiempo más breve", y *tautocrona* significa "tiempo igual".

FIGURA 63
Un péndulo flexible restringido por oscilaciones cicloides en una cicloide.



La **braquistocrona** es la curva de descenso más rápido. Si una partícula está restringida a seguir alguna trayectoria desde un punto A hasta un punto B más abajo (no sobre la misma línea vertical) y sólo está actuando la gravedad, el tiempo necesario para el descenso será mínimo si la ruta es una cicloide invertida. *Véase* la figura 62(b). Este notable descubrimiento, atribuido a muchos matemáticos famosos (incluyendo a Johann Bernoulli y Blas Pascal), fue un paso significativo en la creación de la rama de las matemáticas conocida como cálculo de variaciones.

Para definir la **tautocrona,** sea Q el punto más bajo en una cicloide invertida. Si varias partículas colocadas en diferentes puntos sobre la cicloide invertida empiezan a deslizarse bajando por la cicloide de manera simultánea, alcanzarán el punto Q al mismo tiempo, como se indica en la figura 62(c). La propiedad tautocrona de la cicloide fue utilizada por Christian Huygens (1629-1695), matemático, físico y astrónomo holandés, para construir un reloj de péndulo con una pesa que oscilaba a lo largo de una cicloide (*véase* la figura 63). En el reloj de Huygens, se hacía oscilar la pesa a lo largo de una cicloide suspendiéndola de un delgado alambre restringido por dos placas en forma de cicloides. En un reloj con este diseño, el periodo del péndulo es independiente de su amplitud.

9.7

Ejercicio 9.7

En los problemas del 1 al 20 trace la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas están dadas y muestre su orientación. Encuentre la ecuación rectangular de cada curva.

1. $x = 3t + 2, \quad y = t + 1; \quad 0 \le t \le 4$
2. $x = t - 3, \quad y = 2t + 4; \quad 0 \le t \le 2$
3. $x = t + 2, \quad y = \sqrt{t}; \quad t \ge 0$
4. $x = \sqrt{2t}, \quad y = 4t; \quad t \ge 0$
5. $x = t^2 + 4, \quad y = t^2 - 4; \quad -\infty < t < \infty$
6. $x = \sqrt{t} + 4, \quad y = \sqrt{t} - 4; \quad t \ge 0$
7. $x = 3t^2, \quad y = t + 1; \quad -\infty < t < \infty$
8. $x = 2t - 4, \quad y = 4t^2; \quad -\infty < t < \infty$
9. $x = 2e^t, \quad y = 1 + e^t; \quad t \ge 0$
10. $x = e^t, \quad y = e^{-t}; \quad t \ge 0$
11. $x = \sqrt{t}, \quad y = t^{3/2}; \quad t \ge 0$
12. $x = t^{3/2} + 1, \quad y = \sqrt{t}; \quad t \ge 0$
13. $x = 2 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
14. $x = 2 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le \pi$
15. $x = 2 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t; \quad -\pi \le t \le 0$
16. $x = 2 \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le \pi/2$
17. $x = \sec t, \quad y = \tan t; \quad 0 \le t \le \pi/4$
18. $x = \csc t, \quad y = \cot t; \quad \pi/4 \le t \le \pi/2$
19. $x = \operatorname{sen}^3 t, \quad y = \cos^3 t; \quad 0 \le t \le 2\pi$
20. $x = t^2, \quad y = \ln t; \quad t > 0$

En los problemas del 21 al 24 encuentre dos ecuaciones paramétricas diferentes para cada ecuación rectangular

21. $y = x^3$ **22.** $y = x^4 + 1$ **23.** $x = y^{3/2}$ **24.** $x = \sqrt{y}$

En los problemas del 25 al 28 encuentre ecuaciones paramétricas para un objeto que se mueve a lo largo de la elipse $(x^2/4) + (y^2/9) = 1$ con el movimiento descrito.

25. El movimiento empieza en (2, 0), es en el sentido de las manecillas del reloj y requiere de 2 segundos para completar una vuelta.

26. El movimiento empieza en (0, 3), es en el sentido de las manecillas del reloj y requiere de 1 segundo para completar una vuelta.

27. El movimiento empieza en (0, 3), es en sentido contrario al de las manecillas del reloj y requiere de 1 segundo para completar una vuelta.

28. El movimiento empieza en (2, 0), es en sentido contrario al de las manecillas del reloj y requiere de 3 segundos para completar una vuelta.

En los problemas 29 y 30 se dan las ecuaciones paramétricas de cuatro curvas. Trace la gráfica de cada una de ellas, indicando la orientación.

29. C_1: $x = t$, $y = t^2$; $-4 \leq t \leq 4$
C_2: $x = \cos t$, $y = 1 - \operatorname{sen}^2 t$; $0 \leq t \leq \pi$
C_3: $x = e^t$, $y = e^{2t}$; $0 \leq t \leq \ln 4$
C_4: $x = \sqrt{t}$, $y = t$; $0 \leq t \leq 16$

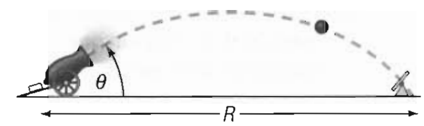
30. C_1: $x = t$, $y = \sqrt{1 - t^2}$; $-1 \leq t \leq 1$
C_2: $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$; $0 \leq t \leq 2\pi$
C_3: $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$; $0 \leq t \leq 2\pi$
C_4: $x = \sqrt{1 - t^2}$, $y = t$; $-1 \leq t \leq 1$

31. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$x = (x_2 - x_1)t + x_1 \qquad y = (y_2 - y_1)t + y_1, \qquad -\infty < t < \infty$$

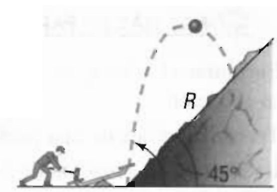
¿Cuál es la orientación de esta recta?

32. *Movimiento de un proyectil.* La posición de un proyectil disparado con una velocidad inicial de v_0 pies sobre segundo, a un ángulo de θ con respecto a la horizontal, después de t segundos, está dada por las ecuaciones paramétricas



$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - 16t^2$$

(a) Obtenga la ecuación rectangular de la trayectoria e identifique la curva.
(b) Demuestre que el proyectil pega contra el suelo ($y = 0$) cuando $t = \frac{1}{16}v_0 \operatorname{sen} \theta$.
(c) ¿Qué distancia (horizontalmente) ha recorrido el proyectil cuando golpea contra el suelo? En otras palabras, encuentre el **alcance R.**
(d) Encuentre el tiempo t cuando $x = y$. Luego encuentre la distancia horizontal x y la distancia vertical y recorrida por el proyectil en este tiempo. Después calcule $\sqrt{x^2 + y^2}$. Esta es la distancia R, el alcance, que el proyectil recorre hacia arriba de un plano inclinado en 45° con respecto a la horizontal ($x = y$). (También *véase* el problema 75 de los ejercicios 7.3.)



En los problemas del 33 al 36 trace la gráfica de la curva definida por las ecuaciones paramétricas dadas.

33. $x = \operatorname{sen}^3 t$, $y = \cos^3 t$
34. $x = \operatorname{sen} t + \cos t$, $y = \operatorname{sen} t - \cos t$
35. $x = 4 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen} 2t$, $y = 4 \cos t - 2 \cos 2t$
36. $x = 4 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t$, $y = 4 \cos t + 2 \cos 2t$

37. Investigue acerca de las curvas llamadas *hipocicloide* y *epicicloide*. Escriba un informe de lo que encuentre. Asegúrese de hacer comparaciones con la cicloide.

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Ecuaciones

Parábola	*Véanse* las tablas 1 y 2.	
Elipse	*Véase* la tabla 3.	
Hipérbola	*Véase* la tabla 4.	
Ecuación general de una cónica	$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	Parábola si $B^2 - 4AC = 0$ Elipse (o círculo) si $B^2 - 4AC < 0$ Hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$
Cónica en coordenadas polares	$\dfrac{d(F, P)}{d(P, D)} = e$	Parábola si $e = 1$ Elipse si $e < 1$ Hipérbola si $e > 1$
Curva plana	$(x, y) = (f(t), g(t))$, t es un parámetro	
Ecuaciones polares de una cónica	*Véase* la tabla 5.	

Definiciones

Parábola	Conjunto de los puntos P en el plano para los cuales $d(F, P) = d(P, D)$, donde F es el foco y D la directriz.
Elipse	Conjunto de puntos P en el plano, cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos (los focos) es una constante.
Hipérbola	Conjunto de puntos P en el plano, cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijo (los focos) es una constante.

Fórmulas

Fórmulas de rotación	$x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$ $y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$
Ángulo θ de rotación que elimina el término $x'y'$	$\cot 2\theta = \dfrac{A - C}{B}$

COMO HACER PARA

Encontrar el vértice, el foco y la directriz de una parábola dada su ecuación

Trazar la gráfica de una parábola dada su ecuación

Encontrar una ecuación de una parábola dada cierta información acerca de la parábola

Encontrar el centro, los focos y el vértice de una elipse dada su ecuación

Trazar la gráfica de una elipse dada su ecuación

Encontrar una ecuación de una elipse dada cierta información acerca de la elipse

Encontrar el centro, los focos, vértices y las asíntotas de una hipérbola dada su ecuación

Trazar la gráfica de una hipérbola dada su ecuación

Encontrar una ecuación de una hipérbola dada cierta información acerca de la hipérbola

Identificar cónicas sin completar cuadrados

Identificar cónicas sin usar la rotación de ejes

Usar las fórmulas de rotación para transformar ecuaciones de segundo grado de modo que no aparezca el término con xy

Identificar y trazar la gráfica de cónicas dadas por una ecuación polar

Trazar la gráfica de ecuaciones paramétricas

Encontrar la ecuación rectangular dadas las ecuaciones paramétricas

CÓMO HACER PARA

1. Una __________ es la colección de todos los puntos en el plano tales que la distancia de cada punto a un punto fijo es igual a su distancia a una recta fija.
2. Una __________ es la colección de todos los puntos en el plano cuya suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.
3. Una __________ es la colección de todos los puntos en el plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.
4. Para una elipse, los focos pertenecen al eje __________ para una hipérbola los focos pertenecen al eje __________.
5. Para la elipse $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$, el eje mayor está a lo largo de __________.
6. Las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $(y^2/9) - (x^2/4) = 1$ son __________ y __________.
7. Para transformar la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad B \neq 0$$

en una en x' y y' sin el término $x'y'$, se debe girar los ejes un ángulo agudo θ que satisface la ecuación __________.

8. La ecuación polar

$$r = \frac{8}{4 - 2 \text{ sen } \theta}$$

es una cónica cuya excentricidad es __________. Es un(a) __________ cuya directriz es __________ al eje polar a una distancia de __________ unidades __________ del polo.

9. Las ecuaciones paramétricas $x = 2$ sen t y $y = 3 \cos t$ representan un(a) __________.

Cierto o falso

C F 1. En una parábola, la distancia desde cualquier punto al foco es igual a la distancia desde ese punto a la directriz.

C F 2. Los focos de una elipse están sobre el eje menor.

C F 3. Los focos de una hipérbola están sobre su eje transverso.

C F 4. Las hipérbolas siempre tienen asíntotas; las elipses nunca tienen asíntotas.

C F 5. Una hipérbola nunca corta a su eje conjugado.

C F 6. Una hipérbola siempre corta a su eje transverso.

C F 7. La ecuación $ax^2 + 6y^2 - 12y = 0$ define una elipse si $a > 0$.

C F 8. La ecuación $3x^2 + bxy + 12y^2 = 10$ define una parábola si $b = -12$.

C F 9. Si (r, θ) son coordenadas polares, la ecuación $r = 2/(2 + 3 \text{ sen } \theta)$ define una hipérbola.

C F 10. Las ecuaciones paramétricas que definen una curva son únicas.

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 20 identifique cada ecuación. Si es una parábola, dé su vértice, foco y directriz; si es una elipse, dé su centro, sus vértices y focos; si es una hipérbola, dé su centro, sus vértices, focos y asíntotas.

1. $y^2 = -16x$
2. $16x^2 = y$
3. $\frac{x^2}{25} - y^2 = 1$
4. $\frac{y^2}{25} - x^2 = 1$
5. $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$
6. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$
7. $x^2 + 4y = 4$
8. $3y^2 - x^2 = 9$
9. $4x^2 - y^2 = 8$
10. $9x^2 + 4y^2 = 36$
11. $x^2 - 4x = 2y$
12. $2y^2 - 4y = x - 2$
13. $y^2 - 4y - 4x^2 + 8x = 4$
14. $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$
15. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y = 11$
16. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 11$
17. $4x^2 - 16x + 16y + 32 = 0$
18. $4y^2 + 3x - 16y + 19 = 0$
19. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y = 23$
20. $x^2 - y^2 - 2x - 2y = 1$

En los problemas del 21 al 36 obtenga una ecuación de la cónica descrita. Trace la gráfica de la ecuación.

21. Parábola; foco en $(-2, 0)$; directriz la recta $x = 2$
22. Elipse; centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 3)$; vértice en $(0, 5)$
23. Hipérbola; centro en $(0, 0)$; foco en $(0, 4)$; vértice en $(0, -2)$
24. Parábola; vértice en $(0, 0)$; directriz la recta $y = -3$
25. Elipse; focos en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$; vértice en $(4, 0)$
26. Hipérbola; vértice en $(-2, 0)$ y $(2, 0)$; foco en $(4, 0)$
27. Parábola; vértice en $(2, -3)$; foco en $(2, -4)$
28. Elipse; centro en $(-1, 2)$; foco en $(0, 2)$; vértice en $(2, 2)$

29. Hipérbola; centro en $(-2, -3)$; foco en $(-4, -3)$; vértice en $(-3, -3)$

30. Parábola; foco en $(3, 6)$; directriz la recta $y = 8$

31. Elipse; focos en $(-4, 2)$ y $(-4, 8)$; vértice en $(-4, 10)$

32. Hipérbola; vértices en $(-3, 3)$ y $(5, 3)$; foco en $(7, 3)$

33. Centro en $(-1, 2)$; $a = 3$; $c = 4$; eje transverso paralelo al eje x

34. Centro en $(4, -2)$; $a = 1$; $c = 4$; eje transverso paralelo al eje y

35. Vértices en $(0, 1)$ y $(6, 1)$; asíntota la recta $3y + 2x - 9 = 0$

36. Vértices en $(4, 0)$ y $(4, 4)$; asíntota la recta $y + 2x - 10 = 0$

En los problemas del 37 al 46, identifique cada cónica sin completar los cuadrados y sin aplicar rotación de ejes.

37. $y^2 + 4x + 3y - 8 = 0$

38. $2x^2 - y + 8x = 0$

39. $x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$

40. $x^2 - 8y^2 - x - 2y = 0$

41. $9x^2 - 12xy + 4y^2 + 8x + 12y = 0$

42. $4x^2 + 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x + 16\sqrt{5}y = 0$

43. $4x^2 + 10xy + 4y^2 - 9 = 0$

44. $4x^2 - 10xy - 4y^2 - 9 = 0$

45. $x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x + 4y - 1 = 0$

46. $4x^2 + 12xy - 10y^2 + x + y - 10 = 0$

En los problemas del 47 al 52, gire los ejes de modo que la ecuación nueva no tenga término en xy. Analice y trace la gráfica de la ecuación nueva.

47. $2x^2 + 5xy + 2y^2 - \frac{9}{2} = 0$

48. $2x^2 - 5xy + 2y^2 - \frac{9}{2} = 0$

49. $6x^2 + 4xy + 9y^2 - 20 = 0$

50. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 16\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y = 0$

51. $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 12x + 8y = 0$

52. $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 80x + 60y = 0$

En los problemas del 53 al 58, identifique la cónica que representa cada ecuación polar y trace su gráfica.

53. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$

54. $r = \dfrac{6}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

55. $r = \dfrac{6}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

56. $r = \dfrac{2}{3 + 2\cos\theta}$

57. $r = \dfrac{8}{4 + 8\cos\theta}$

58. $r = \dfrac{10}{5 + 20\operatorname{sen}\theta}$

En los problemas del 59 al 62 convierta cada ecuación polar en una ecuación rectangular.

59. $r = \dfrac{4}{1 - \cos\theta}$

60. $r = \dfrac{6}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

61. $r = \dfrac{8}{4 + 8\cos\theta}$

62. $r = \dfrac{2}{3 + 2\cos\theta}$

En los problemas del 63 al 68, trace la gráfica de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son dadas y muestre su orientación. Encuentre la ecuación rectangular de cada curva.

63. $x = 4t - 2, \quad y = 1 - t; \quad -\infty < t < \infty$

64. $x = 2t^2 + 6, \quad y = 5 - t; \quad -\infty < t < \infty$

65. $x = 3\operatorname{sen} t, \quad y = 4\cos t + 2; \quad 0 \le t \le 2\pi$

66. $x = \ln t, \quad y = t^3; \quad t > 0$

67. $x = \sec^2 t, \quad y = \tan^2 t; \quad 0 \le t \le \pi/4$

68. $x = t^{3/2}, \quad y = 2t + 4; \quad t \ge 0$

69. Encuentre una ecuación de la hipérbola cuyos focos son los vértices de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y cuyos vértices son los focos de esta elipse.

70. Encuentre una ecuación de la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 16$, y cuyos vértices son los focos de esta hipérbola.

71. Describa la colección de puntos en un plano de modo que la distancia desde cada uno al punto $(3, 0)$ sea tres cuartos de su distancia a la recta $x = \frac{16}{3}$.

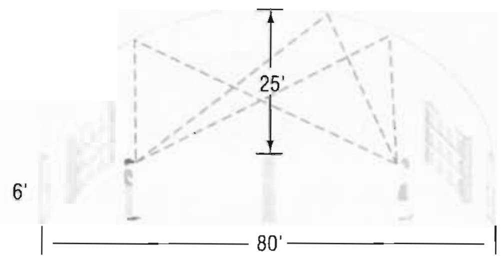
72. Describa la colección de puntos en un plano de modo que la distancia de cada uno al punto (5, 0) sea cinco cuartos de su distancia a la recta $x = \frac{16}{5}$.

73. *Espejos.* Un espejo se construye en forma de paraboloide de revolución. Si una fuente luminosa está ubicada a un pie desde la base a lo largo del eje de simetría y la abertura es de 2 pies de ancho, ¿cuál debe ser la profundidad del espejo?

74. *Arco parabólico de un puente.* Un puente es construido en forma de arco parabólico. El puente tiene una extensión de 60 pies y una altura máxima de 20 pies. Encuentre la altura del arco a distancias de 5, 10 y 20 pies del centro.

75. *Arco semielíptico de un puente.* Un puente es construido en forma de arco semielíptico. El puente tiene una extensión de 60 pies y una altura máxima de 20 pies. Encuentre la altura del arco a distancias de 5, 10 y 20 pies del centro.

76. *Galería de murmullos.* La figura muestra las especificaciones para un techo elíptico en un salón diseñado para ser una galería de murmullos. ¿En dónde están ubicados los focos?



77. *LORAN.* Dos estaciones LORAN están separadas 150 millas a lo largo de una costa recta.

(a) Un barco registra una diferencia de tiempo de 0.00032 segundos entre las señales LORAN. Establezca un sistema de coordenadas rectangulares apropiado para determinar en dónde llegará el barco a la costa si continúa sobre la ruta de la hipérbola correspondiente a esta diferencia de tiempo.

(b) Si el barco debe atracar en un puerto ubicado entre las dos estaciones a 15 millas de la estación principal, ¿cuál es la diferencia de tiempo que debe buscar?

(c) Si el barco está a 20 millas de la costa cuando obtiene la diferencia de tiempo deseada, ¿cuál es su localización exacta? [*Nota:* La velocidad de cada señal de radio es de 186,000 millas por segundo.]

78. Formule una estrategia para analizar y trazar la gráfica de una ecuación de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

PRE

Antes

La lin

Para

Panc

En un

correc

mant

gana

[prob

Capítulo 10

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de iniciar este capítulo repase los siguientes conceptos:

La línea recta (p. 70)

Para la sección 10.5: Círculos (pp. 63–66)
Parábolas (sección 9.2)
Elipses (sección 9.3)
Hipérbolas (sección 9.4)

Panorama Carreras

En una carrera de una milla, el ganador cruzó la meta 10 pies antes del corredor de segundo lugar y 20 pies antes que el tercero. Si cada corredor mantiene una velocidad constante en toda la carrera, ¿por cuántos pies gana el corredor de segundo lugar al de tercero?

[problema 80 en el ejercicio 10.4] ■

En este capítulo estudiaremos la resolución de ecuaciones y desigualdades con dos o más variables. Como sugieren los títulos de sección, existen varias formas de resolver tales expresiones.

El *método de sustitución* para resolver ecuaciones con varias incógnitas data de tiempos antiguos.

El *método de eliminación*, aunque existe desde hace siglos, fue sistematizado por Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y Camille Jordan (1838-1922). En la actualidad, este método se utiliza para resolver sistemas de gran tamaño por medio de computadora.

La teoría de *matrices* fue desarrollada en 1857 por Arthur Cayley (1821-1895), aunque sólo posteriormente las matrices fueron utilizadas de la manera en que las emplearemos en este capítulo. Las matrices se han convertido en un instrumento muy flexible, útil en casi todas las áreas de las matemáticas.

El método de *determinantes* fue ideado por Seki Kōwa (1642-1708) en 1683 en Japón; y por Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) en 1693 en Alemania. Ambos lo utilizaron sólo en relación con las ecuaciones lineales. La *regla de Cramer* recibe el nombre del suizo Gabriel Cramer (1704-1752), quien popularizó el uso de los determinantes para resolver sistemas lineales.

La sección 10.6 presenta la *programación lineal*, que es una aplicación moderna de las desigualdades lineales a ciertos tipos de problemas. Este tema es de utilidad en particular para los estudiantes interesados en la investigación de operaciones.

10.1 Sistemas de ecuaciones lineales: sustitución; eliminación

Comenzaremos con un ejemplo.

EJEMPLO 1 *Venta de boletos en un cine*

Un cine vende boletos a \$8.00 cada uno y las personas de la tercera edad reciben un descuento de \$2.00. En una tarde, el cine tuvo un ingreso de \$3580.00. Si x representa el número de boletos vendidos a \$8.00 y y el de boletos vendidos al precio con descuento de \$6.00, escriba una ecuación que relacione estas variables.

Solución Cada boleto sin descuento implica un ingreso de \$8.00, de modo que x boletos producen $8x$ dólares. De manera análoga, y boletos con descuento producen $6y$ dólares. Si el total obtenido es de \$3580.00, debemos tener

$$8x + 6y = 3580$$

■

En el ejemplo 1, si también supiéramos que se vendieron 525 boletos esa tarde, tendríamos otra ecuación que relaciona las variables x y y:

$$x + y = 525$$

Las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 8x + 6y &= 3580 \\ x + y &= 525 \end{aligned}$$

forman un *sistema* de ecuaciones.

En general, un **sistema de ecuaciones** es una colección de dos o más ecuaciones, cada una de las cuales contiene una o más variables. El ejemplo 2 muestra algunos casos de sistemas de ecuaciones.

EJEMPLO 2 *Sistemas de ecuaciones*

(a) $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = -2 & (2) \end{cases}$ Dos ecuaciones con dos variables, x y y

(b) $\begin{cases} x + y^2 = 5 & (1) \\ 2x + y = 4 & (2) \end{cases}$ Dos ecuaciones con dos variables, x y y

(c) $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 3x - 2y + 4z = 9 & (2) \\ x - y - z = 0 & (3) \end{cases}$ Tres ecuaciones con tres variables, x, y y z

(d) $\begin{cases} x + y + z = 5 & (1) \\ x - y = 2 & (2) \end{cases}$ Dos ecuaciones con tres variables, x, y y z

(e) $\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ 2x + 2z = 4 & (2) \\ y + z = 2 & (3) \\ x = 4 & (4) \end{cases}$ Cuatro ecuaciones con tres variables, x, y y z

■

Utilizamos una llave, como en el ejemplo anterior, para recordar que estamos trabajando con un sistema de ecuaciones. También será conveniente numerar cada ecuación del sistema.

Una **solución** de un sistema de ecuaciones consta de valores para las variables para los cuales cada ecuación del sistema resulta un enunciado verdadero. **Resolver** un sistema de ecuaciones significa determinar todas las soluciones del sistema.

Por ejemplo, $x = 2$, $y = 1$ es una solución del sistema en el ejemplo 2(a), ya que

$$2(2) + 1 = 5 \quad \text{y} \quad -4(2) + 6(1) = -2$$

Una solución del sistema del ejemplo 2(b) es $x = 1$, $y = 2$, ya que

$$1 + 2^2 = 5 \quad \text{y} \quad 2(1) + 2 = 4$$

Otra solución del sistema del ejemplo 2(b) is $x = \frac{11}{4}$, $y = -\frac{3}{2}$, la cual puede verificar usted. Una solución del sistema en el ejemplo 2(c) es 2(c) es $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, ya que

$$\begin{cases} 3 + 2 + 1 = 6 & (1) \quad x = 3,\ y = 2,\ z = 1 \\ 3(3) - 2(2) + 4(1) = 9 & (2) \\ 3 - 2 - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Advierta que $x = 3$, $y = 3$, $z = 0$ no es una solución del sistema del ejemplo 2(c):

$$\begin{cases} 3 + 3 + 0 = 6 \\ 3(3) - 2(3) + 4(0) = 3 \neq 9 \\ 3 - 3 - 0 = 0 \end{cases}$$

Aunque estos valores satisfacen las ecuaciones (1) y (3), no satisfacen la ecuación (2). Cualquier solución del sistema debe satisfacer a *todas* las ecuaciones del sistema.

■ Ahora resuelva el problema 3.

Cuando un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución, es **consistente;** en caso contrario es **inconsistente.**

Una ecuación con n variables es **lineal** si es equivalente a una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdot \cdot \cdot + a_nx_n = b$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son n variables distintas, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b son constantes y al menos una de las constantes a_1 es distinta de cero.

Algunos ejemplos de ecuaciones lineales son

$$2x + 3y = 2 \qquad 5x - 2y + 3z = 10 \qquad 8x + 8y - 2z + 5w = 0$$

Si cada ecuación de un sistema de ecuaciones es lineal, entonces tenemos un **sistema de ecuaciones lineales.** Así, los sistemas de los ejemplos 2(a), (c), (d) y (e) son lineales, mientras que el sistema del ejemplo 2(b) es no lineal. En las secciones 10.1, 10.2 y 10.3 nos centraremos en la solución de sistemas lineales y analizaremos los sistemas no lineales en la sección 10.4.

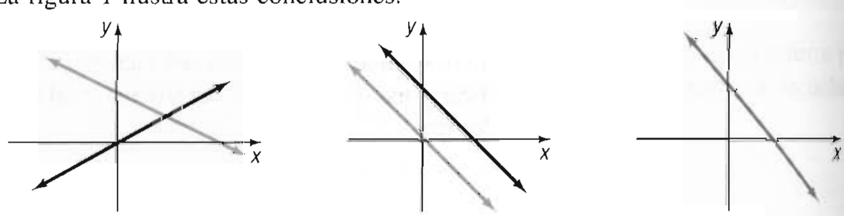
Dos ecuaciones lineales con dos variables

Podemos enfocar el problema de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables como un problema de geometría. La gráfica de cada ecuación de tal sistema es una línea recta. Así, un sistema de dos ecuaciones con dos variables representa un par de rectas. Las rectas (1) se pueden cortar, (2) pueden ser paralelas, o (3) pueden ser **coincidentes** (es decir, idénticas).

1. Si las rectas se cortan, el sistema de ecuaciones tiene una solución dada por el punto de intersección. El sistema es **consistente** y las ecuaciones son **independientes.**
2. Si las rectas son paralelas, el sistema de ecuaciones no tiene solución, ya que las rectas nunca se cortan. El sistema es **inconsistente.**
3. Si las rectas son coincidentes, el sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones, representadas por todos los puntos sobre la recta. El sistema es **consistente** y las ecuaciones son **dependientes.**

La figura 1 ilustra estas conclusiones.

FIGURA 1



(a) Rectas que se cortan; el sistema tiene una solución.
(b) Rectas paralelas; el sistema no tiene solución.
(c) Rectas coincidentes; el sistema tiene una infinidad de soluciones.

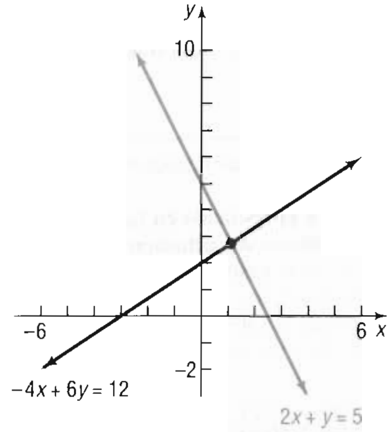
EJEMPLO 3 *Graficación de un sistema de ecuaciones*

Hacer la gráfica del sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$

Solución La ecuación (1) en forma pendiente-ordenada al origen es $y = -2x + 5$, con pendiente -2 y ordenada al origen 5. La ecuación (2) en forma pendiente-ordenada al origen es $y = \frac{2}{3}x + 2$, con pendiente $\frac{2}{3}$ y ordenada al origen 2. La figura 2 muestra la gráfica. ■

A partir de la gráfica de la figura 2, vemos que las rectas se cortan, de modo que el sistema del ejemplo 3 es consistente. También podemos utilizar la gráfica como medio para aproximar la solución que, para este sistema, parece estar cerca del punto (1,3). La solución real, que usted puede verificar, es $(\frac{9}{8}, \frac{11}{4})$. Para obtener las soluciones exactas utilizaremos métodos algebraicos. El primer método algebraico que analizaremos es el *método de sustitución.*

FIGURA 2



Verificación: Haga la gráfica de las rectas $2x + y = 5$ y $-4x + 6y = 12$ y compare con la figura 2. Utilice TRACE para verificar que el punto de intersección es (1.125, 2.75). ■

Método de sustitución

Ilustraremos el **método de sustitución** mediante el sistema del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 *Solución de un sistema de ecuaciones mediante sustitución*

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ -4x + 6y = 12 & (2) \end{cases}$

Solución Primero despejamos y en la primera ecuación, con lo que obtenemos

$$y = 5 - 2x \qquad (1)$$

Sustituimos este resultado en la segunda ecuación y nos quedamos con una ecuación que sólo contiene a la variable x, la cual también podemos despejar:

$$\begin{aligned} -4x + 6y &= 12 \\ -4x + 6(5 - 2x) &= 12 \\ -4x + 30 - 12x &= 12 \\ -16x &= -18 \\ x &= \frac{-18}{-16} = \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Una vez que sabemos que $x = \frac{9}{8}$, podemos determinar con facilidad el valor de y mediante **sustitución regresiva,** es decir, sustituyendo $\frac{9}{8}$ en vez de x en una de las ecuaciones originales. Utilizaremos la primera:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 2\left(\frac{9}{8}\right) + y &= 5 \\ \frac{9}{4} + y &= 5 \\ y &= 5 - \frac{9}{4} = \frac{20}{4} - \frac{9}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = \frac{9}{8}$, $y = \frac{11}{4}$ ■

El método utilizado para resolver el sistema del ejemplo 4 es el de **sustitución.** Bosquejamos a continuación los pasos de este método.

Pasos para resolver por sustitución

PASO 1: Elegir una de las ecuaciones y despejar una de las variables en términos de las otras.
PASO 2: Sustituir el resultado en las demás ecuaciones.
PASO 3: Si se obtiene una ecuación con una variable hay que resolverla. En caso contrario se repite el paso 1 hasta que quede una sola ecuación con una variable.
PASO 4: Determinar los valores de las demás variables por sustitución regresiva.
PASO 5: Verificar la solución determinada.

EJEMPLO 5 *Solución de un sistema de ecuaciones por sustitución*

Resolver: $\begin{cases} 3x - 2y = 5 & (1) \\ 5x - y = 6 & (2) \end{cases}$

Solución PASO 1: Después de observar las dos ecuaciones, concluimos que es más fácil despejar la variable y en la ecuación (2):

$$\begin{aligned} 5x - y &= 6 \\ y &= 5x - 6 \end{aligned}$$

PASO 2: Sustituimos este resultado en la ecuación (1) y simplificamos:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 3x - 2(5x - 6) &= 5 \\ -7x + 12 &= 5 \\ -7x &= -7 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

PASO 3: Como ahora tenemos una solución, $x = 1$, vamos al paso 4.
PASO 4: Como sabemos que $x = 1$, podemos determinar y a partir de la ecuación

$$y = 5x - 6 = 5(1) - 6 = -1$$

PASO 5: *Verificación:* $\begin{cases} 3(1) - 2(-1) = 3 + 2 = 5 \\ 5(1) - (-1) = 5 + 1 = 6 \end{cases}$

La solución del sistema es $x = 1$, $y = -1$. ∎

EJEMPLO 6 *Solución de un sistema de ecuaciones por sustitución*

Resolver: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 & (1) \\ 4x + 5y = 3 & (2) \end{cases}$

Solución PASO 1: Después de analizar el sistema, concluimos que no hay forma de despejar una de las variables sin utilizar fracciones. Despejamos la variable x en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 2x &= 3y + 7 \\ x &= \frac{3}{2}y + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

PASO 2: Sustituimos este resultado en la ecuación (2) y simplificamos:

$$
\begin{aligned}
4x + 5y &= 3 \\
4\left(\frac{3}{2}y + \frac{7}{2}\right) + 5y &= 3 \\
6y + 14 + 5y &= 3 \\
11y + 14 &= 3 \\
11y &= -11
\end{aligned}
$$

PASO 3: $y = -1$

PASO 4: $x = \frac{3}{2}y + \frac{7}{2} = \frac{3}{2}(-1) + \frac{7}{2} = \frac{4}{2} = 2$

PASO 5: *Verificación:* $\begin{cases} 2(2) - 3(-1) = 4 + 3 = 7 \\ 4(2) + 5(-1) = 8 - 5 = 3 \end{cases}$

La solución es $x = 2$, $y = -1$.

Ahora utilice la sustitución para resolver el problema 13.

Método de eliminación

Un segundo procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales es el *método de eliminación*. Por lo general, este método es preferible sobre el de sustitución cuando este último conduce al uso de fracciones o si el sistema contiene más de dos variables. La eliminación también proporciona la motivación necesaria para la solución de sistemas mediante matrices (tema de la siguiente sección).

La idea subyacente tras el método de eliminación es la de reemplazar las ecuaciones originales del sistema con ecuaciones equivalentes, hasta llegar a un sistema de ecuaciones con una solución obvia. Al proceder de esta forma obtenemos **sistemas equivalentes de ecuaciones.** Las reglas para obtener ecuaciones equivalentes son las mismas que estudiamos en el capítulo 1. Sin embargo, también podemos intercambiar dos ecuaciones cualesquiera del sistema o reemplazar cualquier ecuación por la suma (o resta) de esa ecuación con cualquier otra del sistema.

Reglas para obtener un sistema equivalente de ecuaciones

1. Intercambiar dos ecuaciones cualesquiera del sistema.
2. Multiplicar (o dividir) cada lado de una ecuación por la misma constante distinta de cero.
3. Reemplazar cualquier ecuación del sistema por la suma (o resta) de esa ecuación y cualquiera otra del sistema.

Un ejemplo le aclarará lo anterior. Al estudiar el ejemplo, preste particular atención al patrón seguido.

EJEMPLO 7 *Solución de un sistema de ecuaciones por eliminación*

Resolver: $\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -x + y = -3 & (2) \end{cases}$

Solución Multiplicamos cada lado de la ecuación (2) por 2, de modo que los coeficientes de x en las dos ecuaciones sean el negativo uno del otro. El resultado es el sistema equivalente

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -2x + 2y = -6 & (2) \end{cases}$$

Si ahora reemplazamos la ecuación (2) de este sistema por la suma de las dos ecuaciones, obtenemos una ecuación que sólo contiene a la variable y, que podemos entonces despejar así:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 & (1) \\ -2x + 2y = -6 & (2) \end{cases}$$

$$5y = -5$$

$$y = -1$$

Ahora sustituimos en forma regresiva utilizando este valor de y en la ecuación (1), y simplificamos para obtener

$$2x + 3(-1) = 1$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Así, la solución del sistema original es $x = 2$, $y = -1$. Dejaremos para usted la verificación correspondiente. ∎

El procedimiento utilizado en el ejemplo 7 es el **método de eliminación.** Observe el patrón seguido. Primero eliminamos la variable x de la segunda ecuación; después sustituimos en forma regresiva, es decir, sustituimos el valor determinado para y de nuevo en la primera ecuación para encontrar x.

Regresemos al ejemplo del cine (Ejemplo 1).

EJEMPLO 8 *Venta de boletos en un cine*

Un cine vende boletos a \$8.00 cada uno pero las personas de la tercera edad reciben un descuento de \$2.00. En una tarde, el cine vendió 525 boletos y tuvo un ingreso de \$3580.00. ¿Cuántos boletos de cada tipo se vendieron?

Solución Si x representa el número de boletos vendidos a \$8.00 y y el número de boletos vendidos al precio con descuento de \$6.00, entonces la información dada produce el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 8x + 6y = 3580 \\ x + y = 525 \end{cases}$$

Utilizamos eliminación multiplicando la segunda ecuación por -6 y después sumamos las ecuaciones.

$$\begin{cases} 8x + 6y = 3580 \\ -6x - 6y = -3150 \end{cases}$$

$$2x = 430$$

$$x = 215$$

Como $x + y = 525$, entonces $y = 525 - x = 525 - 215 = 310$. Así podemos concluir que se vendieron 215 boletos sin descuento y 310 con descuento. ∎

■ Ahora utilice eliminación para resolver el problema 13.

Los ejemplos anteriores utilizaban sistemas consistentes de ecuaciones que tenían una solución única. Los siguientes dos ejemplos tratan otras dos posibilidades, donde la primera es un sistema que no tiene solución.

EJEMPLO 9 *Un sistema inconsistente de ecuaciones*

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 5 & (1) \\ 4x + 2y = 8 & (2) \end{cases}$

Solución Optamos por el método de sustitución y despejamos y en la ecuación (1):

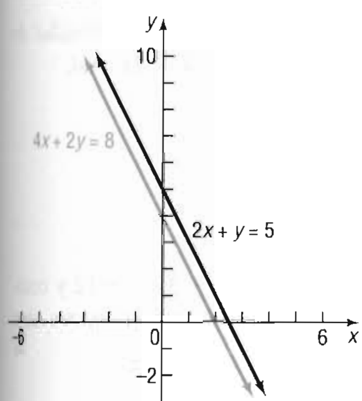
$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ y &= 5 - 2x \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación (2) para obtener

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 8 \\ 4x + 2(5 - 2x) &= 8 \\ 4x + 10 - 4x &= 8 \\ 0 \cdot x &= -2 \end{aligned}$$

Esta ecuación no tiene solución. Así, concluimos que el propio sistema no tiene solución y, por lo tanto, que es inconsistente. ■

FIGURA 3



La figura 3 ilustra el par de rectas cuyas ecuaciones forman el sistema del ejemplo 9. Observe que las gráficas de las dos ecuaciones son rectas, cada una con pendiente -2; una tiene una ordenada al origen de 5 y la otra de 4. Así, las rectas son paralelas y no tienen punto de intersección. Esta afirmación geométrica es equivalente a la afirmación algebraica de que el sistema no tiene solución.

Verificación: Haga la gráfica de las rectas $2x + y = 5$ y $4x + 2y = 8$ compare el resultado con la figura 3. ¿Cómo puede asegurarse de que las rectas son paralelas? ■

El siguiente ejemplo ilustra un sistema con una infinidad de soluciones.

EJEMPLO 10 *Solución de un sistema de ecuaciones con una infinidad de soluciones*

Resolver: $\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$

Solución Optamos por el método de eliminación:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 & (1) \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 & (1) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (1) por 3.} \\ -6x - 3y = -12 & (2) \end{cases}$$

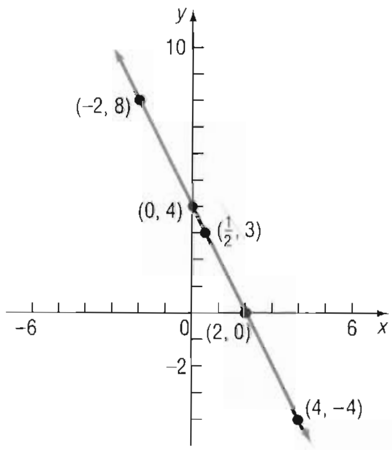
$$\begin{cases} 6x + 3y = 12 & (1) \text{ Reemplazamos la ecuación (2) por la suma de las ecuaciones (1) y (2).} \\ 0 = 0 & (2) \end{cases}$$

Así, el sistema original es equivalente a un sistema que tiene una ecuación, de modo que las ecuaciones son dependientes. Esto significa que todos los valores x y y para los cuales $6x + 3y = 12$ o, en forma equivalente, $2x + y = 4$ son soluciones. Por ejemplo, $x = 2$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 4$; $x = -2$, $y = 8$; $x = 4$, $y = -4$; etcétera, son soluciones. De hecho, existe una infinidad de valores de x y y para los cuales $2x + y = 4$, de modo que el sistema original tiene una infinidad de soluciones. Escribiremos las soluciones del sistema original como

$$y = 4 - 2x$$

FIGURA 4

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -6x - 3y = -12 \end{cases}$$



donde x puede ser cualquier número real, o como

$$x = 2 - \frac{1}{2}y$$

donde y puede ser cualquier número real. ∎

La figura 4 ilustra la situación del ejemplo 10. Observe que las gráficas de las dos ecuaciones son rectas, cada una con pendiente -2 y ordenada al origen 4. Así, las rectas son coincidentes. Observe también que la ecuación (2) del sistema original es simplemente -3 por la ecuación (1), lo cual indica que las dos ecuaciones son dependientes.

Para el sistema del ejemplo 10, podemos escribir algunas de la infinidad de soluciones, asignando valores a x para determinar después $y = 4 - 2x$. Así,

Si $x = 4$, entonces $y = -4$.

Si $x = 0$, entonces $y = 4$.

Si $x = \frac{1}{2}$, entonces $y = 3$.

Los pares (x, y) son puntos sobre la recta de la figura 4.

Verificación: Haga la gráfica de las rectas $2x + y = 4$ y $-6x - 3y = -12$ y compare el resultado con la figura 4. ¿Cómo puede asegurarse de que las rectas sean coincidentes? ∎

■ Ahora resuelva los problemas 19 y 23.

Tres ecuaciones lineales con tres variables

Al igual que un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables también tiene exactamente una solución, ninguna, o una infinidad de soluciones.

Ahora veremos cómo funciona el método de eliminación en un sistema de tres ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 11 *Solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables*

Utilizar el método de eliminación para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ 2x - 2y - 3z = 5 & (3) \end{cases}$$

Solución Para un sistema de tres ecuaciones intentamos eliminar una variable a la vez, formando pares con las ecuaciones dadas. Nuestro plan para este sistema es eliminar la variable x, primero de las ecuaciones (1) y (2) y luego de las ecuaciones (1) y (3). A continuación eliminaremos la variable y de las ecuaciones resultantes, quedándonos una ecuación que sólo contiene a la variable z. Entonces podremos utilizar la sustitución regresiva para obtener los valores de y y luego de x.

Comenzamos multiplicando cada lado de la ecuación (1) por -2, como primer paso para eliminar la variable x de la ecuación (3), sumando las ecuaciones (1) y (3):

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 2 & (1) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (1) por } -2 \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ 2x - 2y - 3z = 5 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 2 & (1) \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ -4y - z = 7 & (3) \text{ Reemplazamos la ecuación (3) por la suma de las ecuaciones (1) y (3).} \end{cases}$$

Ahora eliminamos la variable x de la ecuación (2):

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (1) por 2.} \\ 4x - 3y + 2z = 16 & (2) \\ -4y - z = 7 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \\ -7y + 6z = 20 & (2) \text{ Reemplazamos la ecuación (2) por la suma de las ecuaciones (1) y (2).} \\ -4y - z = 7 & (3) \end{cases}$$

Ahora eliminamos y de la ecuación (3):

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \\ -28y + 24z = 80 & (2) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (2) por 4.} \\ 28y + 7z = -49 & (3) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (3) por } -7. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \\ -28y + 24z = 80 & (2) \\ 31z = 31 & (3) \text{ Reemplazamos la ecuación (3) por la suma de las ecuaciones (2) y (3).} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4z = 4 & (1) \\ -28y + 24z = 80 & (2) \\ z = 1 & (3) \text{ Multiplicamos cada lado de la ecuación (3) por } \tfrac{1}{31}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y + 4 = 4 & (1) \text{ Sustituimos en forma regresiva; reemplazamos } z \text{ por 1 en las ecuaciones (1) y (2).} \\ -28y + 24 = 80 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 4y = 0 & (1) \\ y = -2 & (2) \text{ Despejamos } y \text{ en la ecuación (2).} \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x + 8 = 0 & (1) \text{ Sustituimos en forma regresiva; reemplazamos } y \text{ por } -2. \\ y = -2 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 & (1) \\ y = -2 & (2) \\ z = 1 & (3) \end{cases}$$

La solución del sistema original es $x = 2$, $y = -2$, $z = 1$. (Usted puede verificar este resultado.) ■

Revise de nuevo la solución del ejemplo 11. Observe el patrón: primero hicimos que la ecuación (3) sólo tuviera a la variable z; luego conseguimos que la ecuación (2) sólo tuviera a la variable y y que la ecuación (1) sólo tuviera a la variable x. Aunque usted es quien decide cuáles variables debe despejar, la metodología es la misma en todos los sistemas.

10.1

Ejercicio 10.1

En los problemas del 1 al 10 verifique si los valores dados de las variables son soluciones del sistema de ecuaciones.

1. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$ $x = 2,\ y = -1$

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - 7y = -30 \end{cases}$ $x = -2,\ y = 4$

3. $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ \frac{1}{2}x - 3y = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $x = 2,\ y = \frac{1}{2}$

4. $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 0 \\ 3x - 4y = -\frac{19}{2} \end{cases}$ $x = -\frac{1}{2},\ y = 2$

5. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ $x = 2,\ y = 1$

6. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$ $x = -2,\ y = -1$

7. $\begin{cases} \dfrac{x}{1 + x} + 3y = 6 \\ x + 9y^2 = 36 \end{cases}$ $x = 0,\ y = 2$

8. $\begin{cases} \dfrac{x}{x - 1} + y = 5 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$ $x = 2,\ y = 3$

9. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = 4 \\ x - y - z = 0 \\ 2y - 3z = -8 \end{cases}$ $x = 1,\ y = -1,\ z = 2$

10. $\begin{cases} 4x - z = 7 \\ 8x + 5y - z = 0 \\ -x - y + 5z = 6 \end{cases}$ $x = 2,\ y = -3,\ z = 1$

En los problemas del 11 al 46 resuelva cada sistema de ecuaciones. Si el sistema no tiene solución, señale que es inconsistente. Utilice sustitución o eliminación.

11. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x = 24 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x + 5y = -3 \\ -2y = -4 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x - 6y = 2 \\ 5x + 4y = 1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + 4y = \frac{2}{3} \\ 3x - 5y = -10 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x - y = 5 \\ -3x + 3y = 2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x + 3y = -1 \\ 4x + y = \frac{8}{3} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 10x + y = 11 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5x + 10y = 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$

28. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3 \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y = -5 \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = 11 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 3z = 16 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ -2y + 4z = 0 \\ 3x - 2z = -11 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + z = -7 \\ 3x - 4y - 3z = 7 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = 1 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ x + 5y + 3z = 2 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ 7x - 3y + 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

47. Resuelva: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 0 \end{cases}$

48. Resuelva: $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 0 \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{2y} = 2 \end{cases}$

[*Sugerencia*: Sean $u = 1/x$ y $v = 1/y$, resuelva el sistema en términos u y v. Después, utilice el hecho de que $x = 1/u$ y $y = 1/v$.]

En los problemas del 49 al 54 resuelva cada sistema de ecuaciones. Aproxime la solución redondeada a dos cifras decimales.

49. $\begin{cases} y = \sqrt{2}x - 20\sqrt{7} \\ y = -0.1x + 20 \end{cases}$

50. $\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 100 \\ y = 0.2x + \sqrt{19} \end{cases}$

51. $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + \sqrt{6} = 0 \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2}y + 60 = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} \sqrt{5}x - \sqrt{6}y + 60 = 0 \\ 0.2x + 0.3y + \sqrt{5} = 0 \end{cases}$

53. $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = \sqrt{0.3} \\ 100x - 95y = 20 \end{cases}$

54. $\begin{cases} \sqrt{6}x - \sqrt{5}y + \sqrt{1.1} = 0 \\ y = -0.2x + 0.1 \end{cases}$

55. La suma de dos números es 81. La diferencia del doble del primero y el triple del segundo es 62. Determine los dos números.

56. La diferencia de dos números es 40. Seis veces el menor menos el mayor es igual a 5. Determine los dos números.

57. El perímetro de un piso rectangular es de 90 pies. Determine las dimensiones del piso si la longitud es el doble de la anchura.

58. La cantidad de cerca necesaria para encerrar un campo rectangular es de 3000 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del campo si se sabe que la diferencia entre la longitud y la anchura es de 50 metros?

59. *Costo de comida rápida.* Cuatro hamburguesas grandes con queso y dos malteadas de chocolate cuestan en total \$7.90. Dos malteadas cuestan 15 centavos más que una hamburguesa con queso. ¿Cuánto cuesta una hamburguesa con queso? ¿Una malteada?

60. *Boletos de un cine.* Un cine cobra \$9.00 por adulto y \$7.00 por cada persona de la tercera edad. En un día con asistencia de 325 personas el total recaudado fue de \$2495.00. ¿Cuántas personas pagaron boletos de adulto? ¿Cuántas de la tercera edad?

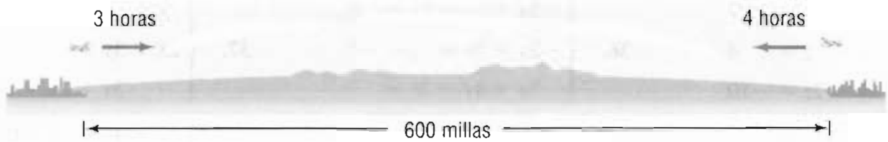
61. *Mezcla de nueces.* Una tienda vende nueces a \$5.00 la libra y cacahuates a \$1.50 la libra. El gerente decide hacer una mezcla de 30 libras de cacahuate con algo de nuez y venderla a \$3.00 la libra. ¿Cuántas libras de nuez debe mezclar con el cacahuate de modo que se produzca el mismo ingreso que se obtendría al vender las nueces por separado?

62. *Planeación financiera.* Una pareja recién jubilada necesita \$12,000.00 como complemento de su pensión. Disponen de \$150,000.00 para invertir y lograr ese ingreso por lo que han decidido utilizar dos tipos de inversión: bonos AA con un rendimiento del 10% anual y certificados bancarios con rendimiento del 5% anual.

(a) ¿Cuánto dinero deben invertir en cada depósito para obtener exactamente \$12,000.00?

(b) Si después de 2 años la pareja necesitará un ingreso anual de \$14,000.00, ¿cómo deben redistribuir su inversión para obtenerlo?

63. *Cálculo de la velocidad del viento.* Con viento a favor, una avioneta Piper puede volar 600 millas en 3 horas. Con el viento en contra puede volar la misma distancia en 4 horas. Determine por separado las velocidades promedio del viento y de la Piper.



64. *Cálculo de la velocidad del viento.* La velocidad promedio (sin viento) de un avión con un solo motor es de 150 millas por hora. Si el avión recorrió una misma distancia en 2 horas con el viento a favor y en 3 horas con el viento en contra, ¿cuál era la velocidad del viento?

65. *Administración de un restaurante.* La gerente de un restaurante desea adquirir 200 juegos de platos. Un diseño cuesta \$25.00 por juego y otro cuesta \$45.00 por juego. Si ella sólo desea gastar \$7400.00, ¿cuántos juegos de cada diseño debe ordenar?

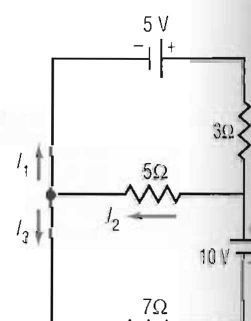
66. *Costo de comida rápida.* Un grupo de personas compró 10 bocadillos y 5 refrescos por \$12.50. Un segundo grupo compró 7 bocadillos y 4 refrescos por \$9.00. ¿Cuál es el costo de un bocadillo? ¿De un refresco?

67. *Cálculo de una devolución.* La tienda donde compramos no marca los precios de los artículos. Mi esposa fue a la tienda, compró tres paquetes de tocino, de una libra cada uno, y dos cartones de huevo; pagó un total de \$7.45. Sin saber que ella había ido a la tienda yo también fui, compré un paquete de tocino y tres cartones de huevo, pagando un total de \$6.45. Ahora queremos devolver dos paquetes de tocino y dos cartones de huevo. ¿Cuánto dinero nos regresarán?

68. *Determinación de la corriente de un río.* Un nadador necesita 3 horas para nadar 15 millas río abajo y 5 horas para el viaje de regreso. Determine la velocidad promedio del nadador en aguas tranquilas. ¿Qué tan rápida es la corriente del río? (Suponga que la velocidad del nadador es la misma en cada dirección.)

69. La suma de tres números es 48. La suma de los dos números mayores es el triple del menor. La suma de los dos números menores es 6 unidades más que el número mayor. Determine los números.

70. Una colección de monedas consta de 37 piezas (de 1, 10 y 25 centavos). Si la colección tiene un valor total de \$3.25 y hay 5 veces más monedas de 10 centavos que de 1 centavo, ¿cuántas monedas de cada tipo hay en la colección?

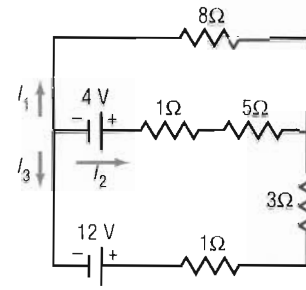


71. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las *leyes de Kirchhoff* al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_2 = I_1 + I_3 \\ 5 - 3I_1 - 5I_2 = 0 \\ 10 - 5I_2 - 7I_3 = 0 \end{cases}$$

Determine las corrientes I_1, I_2, y I_3.*

**Fuente:* Basado en Raymond Serway, *Physics*, tercera edición. Filadelfia: Saunders, 1990, problema 31, p. 790.



72. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_3 = I_1 + I_2 \\ 8 = 4I_3 + 6I_2 \\ 8I_1 = 4 + 6I_2 \end{cases}$$

Determine las corrientes I_1, I_2, y I_3.[†]

73. Un teatro de Broadway tiene 500 asientos, divididos en asientos de orquesta, luneta y de galería. Los asientos de orquesta se venden a \$50.00, los de luneta a \$35.00 y los de galería a \$25.00. Si se venden todos los asientos el ingreso total es de \$17,100.00. Si se venden todos los asientos de luneta y de galería, pero sólo la mitad de los de orquesta, el ingreso es de \$14,600.00. ¿Cuántos asientos existen de cada tipo?

74. *Mesas de trabajo en un laboratorio.* Un laboratorio de química puede ser utilizado por 38 estudiantes al mismo tiempo. El laboratorio tiene 16 mesas de trabajo, algunas configuradas para 2 estudiantes y otras para 3. ¿Cuántas mesas de trabajo existen de cada tipo?

75. Plantee tres sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables tales que:

(a) No tengan solución. (b) Tengan exactamente una solución. (c) Tengan una infinidad de soluciones.

Déselas a un amigo para que las resuelva y critique.

76. Escriba unas líneas explicando su estrategia para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

77. ¿Prefiere el método de sustitución o el de eliminación para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables? ¿Y en el caso de tres ecuaciones lineales con tres variables? Justifique sus respuestas.

78. *Ajuste de curvas.* Determine números reales b y c tales que la parábola $y = x^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1, 3)$ y $(3, 5)$.

79. *Ajuste de curvas.* Determine números reales b y c tales que la parábola $y = x^2 + bx + c$ pase por los puntos $(1, 2)$ y $(-1, 3)$.

80. *Ajuste de curvas.* Determine números reales b y c tales que la parábola $y = x^2 + bx + c$ pase por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

81. *Ajuste de curvas.* Determine números reales a, b y c tales que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(-1, 4)$, $(2, 3)$ y $(0, 1)$.

82. *Ajuste de curvas.* Determine números reales a, b y c tales que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $(-1, -2)$, $(1, -4)$ y $(2, 4)$.

83. Resuelva: $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$

donde $m_1 \neq m_2$.

84. Resuelva: $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$

donde $m_1 = m_2 = m$ y $b_1 \neq b_2$.

85. Resuelva: $\begin{cases} y = m_1x + b_1 \\ y = m_2x + b_2 \end{cases}$

donde $m_1 = m_2 = m$ y $b_1 = b_2 = b$.

[†] *Fuente: Op cit*, problema 27, p. 790.

10.2 Sistemas de ecuaciones lineales: matrices

El punto de vista sistemático del método de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales proporciona otro método de solución que utiliza una notación simplificada.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 4y = 14 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Si optamos por no escribir los símbolos utilizados para las variables, podemos representar este sistema como

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 14 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

donde se entiende que la primera columna representa los coeficientes de la variable x, la segunda columna los coeficientes de y y la tercera columna las constantes ubicadas al lado derecho de los signos de igualdad. La línea vertical sirve para recordarnos los signos de igualdad. Los grandes corchetes cuadrados son los símbolos que se utilizan tradicionalmente en álgebra para denotar una *matriz*.

Matriz

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números,

$$\begin{array}{l} \\ \text{Renglón 1} \\ \text{Renglón 2} \\ \vdots \\ \text{Renglón } i \\ \vdots \\ \text{Renglón } m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \text{Columna 1} & \text{Columna 2} & & \text{Columna } j & & \text{Columna } n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] \end{array} \quad (1)$$

Cada número a_{ij} de la matriz tiene dos índices: **índice de renglón,** i, e **índice de columna,** j. La matriz en (1) tiene m renglones y n columnas. Los números a_{ij} son las **entradas** de la matriz.

Ahora utilizaremos la notación matricial para representar un sistema de ecuaciones lineales. Las matrices utilizadas para representar sistemas de ecuaciones lineales se denominan **matrices aumentadas.**

EJEMPLO 1 *Escritura de la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones*

Escribir la matriz aumentada de cada sistema de ecuaciones.

(a) $\begin{cases} 3x - 4y = -6 & (1) \\ 2x - 3y = -5 & (2) \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ x + z - 1 = 0 & (2) \\ x + 2y - 8 = 0 & (3) \end{cases}$

Solución (a) La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & -6 \\ 2 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

(b) Hay que tener cuidado y escribir el sistema con los coeficientes de todas las variables presentes (si falta alguna variable su coeficiente es 0), y ubicar todas las constantes al lado derecho de los signos de igualdad. Así, debemos reordenar el sistema dado como sigue:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ x + z - 1 = 0 & (2) \\ x + 2y - 8 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ x + 0\cdot y + z = 1 & (2) \\ x + 2y + 0\cdot z = 8 & (3) \end{cases}$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

■

Si no incluimos las constantes a la derecha del signo de igualdad, es decir, a la derecha de la barra vertical en la matriz aumentada, en un sistema de ecuaciones, la matriz resultante será una **matriz de coeficientes** del sistema. Para los sistemas del ejemplo 1, las matrices de coeficientes son

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

■ Ahora resuelva el problema 3.

EJEMPLO 2

Escritura de un sistema de ecuaciones lineales a partir de la matriz aumentada

Escribir el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a cada matriz aumentada.

(a) $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & 13 \\ -3 & 1 & -10 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Solución

(a) La matriz tiene dos renglones, de modo que representa un sistema de dos ecuaciones. Las dos columnas a la izquierda de la barra vertical indican que el sistema tiene dos variables. Si utilizamos x, y para denotar esas variables, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} 5x + 2y = 13 & (1) \\ -3x + y = -10 & (2) \end{cases}$$

(b) Esta matriz representa un sistema de tres ecuaciones con tres variables. Si x, y, z son las tres variables, este sistema es

$$\begin{cases} 3x - y - z = 7 & (1) \\ 2x + 2z = 8 & (2) \\ y + z = 0 & (3) \end{cases}$$

■

Operaciones sobre renglones de una matriz

EJEMPLO 3

Solución de un sistema de ecuaciones

Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x - 3y = 11 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Solución Utilizaremos una variante del método de eliminación para resolver el sistema. En primer lugar, multiplicamos cada lado de la ecuación (2) por -1 y la sumamos con la ecuación (1). Reemplazamos la ecuación (1) con el resultado:

$$\begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos cada lado de la ecuación (1) por -3 y la sumamos a la ecuación (2). Reemplazamos la ecuación (2) con el resultado:

$$\begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ 0 \cdot x + 17y = -17 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos cada lado de la ecuación (2) por $\frac{1}{17}$:

$$\begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ y = -1 & (2) \end{cases}$$

Ahora sustituimos en forma regresiva $y = -1$ en la ecuación (1) para obtener

$$\begin{aligned} x - 5y &= 7 \\ x - 5(-1) &= 7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$. ∎

El patrón de resolución anterior proporciona una manera metódica para resolver cualquier sistema de ecuaciones. La idea es partir de la matriz aumentada del sistema,

$$\left[\begin{array}{rr|r} 4 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} 4x - 3y = 11 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

y llegar a la matriz,

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ y = -1 & (2) \end{cases}$$

Revisemos de nuevo el procedimiento partiendo de la matriz aumentada original y manteniendo en mente la matriz aumentada final:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 4 & -3 & 11 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} 4x - 3y = 11 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Como antes, comenzamos multiplicando cada lado de la ecuación (2) por -1 y sumando el resultado a la ecuación (1). Esto es equivalente a multiplicar cada entrada del segundo renglón de la matriz por -1, sumando el resultado a las entradas correspondientes del primer renglón y reemplazando todo este renglón con esas entradas. El resultado de este paso es que el número 1 aparece en el primer renglón y en la primera columna:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ 3x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos cada entrada del primer renglón por -3, sumamos el resultado a las entradas del segundo renglón y reemplazamos el segundo renglón por estas entradas. El resultado de este paso es que el número 0 aparece en el segundo renglón, primera columna:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 17 & -17 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ 0 \cdot x + 17y = -17 & (2) \end{cases}$$

Multiplicamos cada entrada del segundo renglón por $\frac{1}{17}$. El resultado de este paso es que el número 1 aparece en el renglón 2, columna 2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x - 5y = 7 & (1) \\ y = -1 & (2) \end{cases}$$

Ahora que sabemos que $y = -1$, podemos realizar la sustitución regresiva para obtener $x = 2$.

Las operaciones realizadas en la matriz aumentada son **operaciones de renglón.** De éstas existen tres básicas:

Operaciones de renglón

1. Intercambio de dos renglones cualesquiera.
2. Reemplazo de un renglón por un múltiplo distinto de cero de ese renglón.
3. Reemplazo de un renglón por la suma de ese renglón y un múltiplo constante de algún otro renglón.

Estas tres operaciones de renglón corresponden a las tres reglas ya dadas anteriormente para obtener un sistema equivalente de ecuaciones. Así, al realizar una operación de renglón en una matriz, la matriz resultante representa un sistema de ecuaciones equivalente al sistema representado por la matriz original.

Por ejemplo, consideremos la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Supongamos que queremos aplicar una operación de renglón a esta matriz para tener una matriz cuya entrada en el renglón 2, columna 1 sea un cero. La operación de renglón por utilizar es

Multiplicar cada entrada del renglón 1 por -4 y sumar el resultado a las entradas correspondientes del renglón 2. (2)

Si utilizamos R_2 para representar las nuevas entradas del renglón 2 y r_1 y r_2 para las entradas originales de los renglones 1 y 2, respectivamente, entonces podremos representar la operación de renglón en el enunciado (2) como

$$R_2 = -4r_1 + r_2$$

Así

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{R_2 = -4r_1 + r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -4(1) + 4 & -4(2) + (-1) & -4(3) + 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -10 \end{array}\right]$$

Como queríamos, ahora tenemos la entrada 0 en el renglón 2, columna 1.

EJEMPLO 4 *Aplicación de una operación de renglón a una matriz aumentada*

Apicar las operaciones de renglón $R_2 = -3r_1 + r_2$ a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 9 \end{array}\right]$$

Solución La operación de renglón $R_2 = -3r_1 + r_2$ indica que debemos reemplazar las entradas del renglón 2 por las entradas obtenidas después de multiplicar cada entrada del renglón 1 por -3 y sumar el resultado con las entradas correspondientes del renglón 2. Así,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & 9 \end{array}\right] \underset{R_2 = -3r_1 + r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -3(1) + 3 & (-3)(-2) + (-5) & -3(2) + 9 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

■

EJEMPLO 5 *Determinación de una operación de renglón particular*

Utilizar la matriz

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

y determinar una operación de renglón que produzca una matriz con un 0 en el renglón 1, columna 2.

Solución Queremos un 0 en el renglón 1, columna 2. Podemos obtener este resultado al multiplicar el renglón 2 por 2 y sumar el resultado al renglón 1. Es decir, aplicamos la operación de renglón $R_1 = 2r_2 + r_1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{R_1 = 2r_2 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2(0) + 1 & 2(1) + (-2) & 2(3) + 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

■

Debemos hacer un comentario en cuanto a la notación que hemos presentado. Una operación de renglón como $R_1 = 2r_2 + r_1$ cambia las entradas del renglón 1. Observe también que para modificar las entradas de un renglón dado, multiplicamos las entradas de algún otro renglón por un número adecuado y sumamos los resultados a las entradas originales del renglón por modificar.

■ Ahora resuelva los problemas 11 y 15.

Veamos a continuación la forma de utilizar las operaciones de renglón para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO 6 *Solución de un sistema de ecuaciones mediante matrices*

Resolver: $\begin{cases} 4x + 3y = 11 & (1) \\ x - 3y = -1 & (2) \end{cases}$

Solución Primero escribimos la matriz aumentada que representa a este sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 11 \\ 1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

El primer paso es obtener un 1 en el renglón 1, columna 1. La manera más sencilla de lograr esto es intercambiando los renglones 1 y 2:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right]$$

Ahora, queremos un 0 debajo de la entrada 1 en la columna 1. Utilizamos la operación de renglón $R_2 = -4r_1 + r_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = -4r_1 + r_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 15 & 15 \end{array}\right]$$

Ahora queremos obtener 1 como entrada en el renglón 2, columna 2. Utilizamos $R_2 = \frac{1}{15}r_2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 15 & 15 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = \frac{1}{15}r_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

El segundo renglón de la matriz de la derecha representa la ecuación $y = 1$. Así, con el valor $y = 1$, sustituimos en forma regresiva en la ecuación $x - 3y = -1$ (del primer renglón) para obtener

$$x - 3(1) = -1 \quad y = 1$$
$$x = 2$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = 1$. ■

■ Ahora resuelva el problema 31.

Podemos resumir los pasos que utilizamos para resolver el sistema de ecuaciones lineales del ejemplo 6 como sigue:

Método de matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales

PASO 1: Escribir la matriz aumentada que representa al sistema.

PASO 2: Realizar operaciones de renglón que coloquen la entrada 1 en el renglón 1, columna 1.

PASO 3: Realizar operaciones de renglón que dejen un 1 en el renglón 1, columna 1, sin variar pero de modo que aparezcan ceros debajo de esta entrada en la columna 1.

PASO 4: Realizar operaciones de renglón que coloquen la entrada 1 en el renglón 2, columna 2 y dejen las entradas en las columnas a su izquierda sin variación. Si no es posible colocar un 1 en el renglón 2, columna 2, entonces trate de colocar un 1 en el renglón 2, columna 3. Una vez que un 1 quede en un lugar, realizar operaciones de renglón para colocar ceros debajo de él.

PASO 5: Repetir el paso 4 colocando un 1 en el siguiente renglón pero en una columna hacia la derecha. Continuar hasta llegar al último renglón inferior o la barra vertical.

PASO 6: Si se obtienen renglones que sólo contengan ceros del lado izquierdo de la barra vertical, coloque esos renglones en la parte inferior de la matriz.

Al concluir los pasos del 1 al 6 la matriz tendrá **forma escalonada.** Un poco de reflexión le convencerá que una matriz tiene forma escalonada cuando:

1. La entrada del renglón 1, columna 1, es un 1, y aparecen ceros debajo de ésta.
2. La primera entrada distinta de cero en cada renglón después del primero es un 1, con ceros debajo de éste, y aparece a la derecha de la primera entrada distinta de cero en cualquier renglón superior.
3. Todos los renglones que sólo contienen ceros a la izquierda de la barra vertical aparecen en la parte inferior.

Dos de las ventajas de resolver un sistema de ecuaciones escribiendo la matriz aumentada en forma escalonada son las siguientes:

1. El proceso es algorítmico; es decir, consta de pasos repetitivos, de modo que puede programarse en una computadora.
2. El proceso funciona con cualquier sistema de ecuaciones lineales, sin importar el número de ecuaciones o de variables.

El siguiente ejemplo muestra cómo escribir una matriz en forma escalonada.

EJEMPLO 7 *Solución de un sistema de ecuaciones mediante matrices*

$$\text{Resolver: } \begin{cases} x - y + z = 8 & (1) \\ 2x + 3y - z = -2 & (2) \\ 3x - 2y - 9z = 9 & (3) \end{cases}$$

Solución **PASO 1:** La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right]$$

PASO 2: Como la entrada 1 ya está presente en el renglón 1, columna 1, podemos ir directamente al paso 3.

PASO 3: Realizamos las operaciones de renglón $R_2 = -2r_1 + r_2$ y $R_3 = -3r_1 + r_3$. Cada una de estas operaciones deja la entrada 1 en el renglón 1, columna 1 sin variar, y hacen que aparezcan ceros debajo de ella:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -9 & 9 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = -2r_1 + r_2 \\ R_3 = -3r_1 + r_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \end{array}\right]$$

PASO 4: La manera más sencilla de obtener la entrada 1 en el renglón 2, columna 2, sin alterar la columna 1 es intercambiando los renglones 2 y 3 (otra forma sería multiplicar el renglón 2 por $\frac{1}{5}$, pero esto nos haría trabajar con fracciones):

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right]$$

Para obtener ceros debajo del 1 en el renglón 2, columna 2, realizamos la operación de renglón $R_3 = -5r_2 + r_3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 5 & -3 & -18 \end{array}\right] \underset{R_3 = -5r_2 + r_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right]$$

PASO 5: Para continuar, colocamos un 1 en el renglón 3, columna 3, utilizando $R_3 = \frac{1}{57}r_3$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right] \underset{R_3 = \frac{1}{57}r_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Como hemos llegado al último renglón, la matriz tiene forma escalonada y podemos detenernos.

El sistema de ecuaciones representado por la matriz en forma escalonada es

$$\begin{cases} x - y + z = 8 \\ \phantom{x - {}} y - 12z = -15 \\ z = 1 \end{cases}$$

Con $z = 1$, sustituimos en forma regresiva para obtener

$$\begin{cases} x - y + 1 = 8 & \text{Del renglón 1 de la matriz} \\ y - 12(1) = -15 & \text{Del renglón 2 de la matriz} \end{cases}$$

Así, obtenemos $y = -3$, y con la sustitución en forma regresiva en $x - y = 7$, tenemos $x = 4$. La solución del sistema es $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$. ■

A veces conviene escribir una matriz en **forma escalonada reducida.** En esta forma utilizamos operaciones de renglón para obtener entradas que son 0 sobre (al igual que debajo) del primer 1 de un renglón. Por ejemplo, la forma escalonada obtenida en la solución del ejemplo 7 es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Para escribir esta matriz en forma escalonada reducida procedemos como sigue:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1 = r_2 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -12 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_1 = 11r_3 + r_1 \\ R_2 = 12r_3 + r_2}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora la matriz está en forma escalonada reducida. La ventaja de escribir la matriz en esta forma es que la solución del sistema, $x = 4$, $y = -3$, $z = 1$, es evidente, sin tener que realizar la sustitución regresiva. En la sección 12.1, donde analizaremos la inversa de una matriz, veremos otra ventaja.

■ Ahora resuelva el problema 49.

El método matricial para resolver un sistema de ecuaciones lineales también identifica a los sistemas que tienen una infinidad de soluciones y a los que son inconsistentes. *Veamos* cómo lo hace.

EJEMPLO 8 *Solución matricial de un sistema de ecuaciones*

Resolver: $\begin{cases} 6x - y - z = 4 & (1) \\ -12x + 2y + 2z = -8 & (2) \\ 5x + y - z = 3 & (3) \end{cases}$

Solución Comenzamos con la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 6 & -1 & -1 & 4 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{R_1 = -1r_3 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -12 & 2 & 2 & -8 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = 12r_1 + r_2 \\ R_3 = -5r_1 + r_3}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Para obtener un 1 en el renglón 2, columna 2 sin alterar la columna 1, hacemos $R_2 = -\frac{1}{22}r_2$ o $R_3 = \frac{1}{11}r_3$. (¿Puede advertir por qué?) Utilizamos la primera opción:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -22 & 2 & 4 \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{R_2 = -\frac{1}{22}r_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 11 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{R_3 = -11r_2 + r_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz tiene forma escalonada. Como el renglón inferior sólo tiene ceros, el sistema consta en realidad de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ y - \frac{1}{11}z = -\frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

Realizamos la sustitución regresiva de la solución para y desde la segunda ecuación, $y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11}$, a la primera ecuación para obtener

$$x = 2y + 1 = 2(\tfrac{1}{11}z - \tfrac{2}{11}) + 1 = \tfrac{2}{11}z + \tfrac{7}{11}$$

Así, el sistema original es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} & (1) \\ y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real.

Analicemos un poco la situación. El sistema original de tres ecuaciones es equivalente a uno con dos ecuaciones. Esto significa que cualesquiera valores de x, y, z que satisfagan

$$x = \tfrac{2}{11}z + \tfrac{7}{11} \quad \text{y} \quad y = \tfrac{1}{11}z - \tfrac{2}{11}$$

eran soluciones. Por ejemplo, $z = 0$, $x = \frac{7}{11}$, $y = -\frac{2}{11}$; $z = 1$, $x = \frac{9}{11}$, $y = -\frac{1}{11}$; y $z = -1$, $x = \frac{5}{11}$, $y = -\frac{3}{11}$ son algunas de las soluciones del sistema original. De hecho, existe una infinidad de valores de x, y, z para los que se satisfacen las dos ecuaciones. Es decir, el sistema original tiene una infinidad de soluciones. Escribiremos la solución del sistema original como

$$\begin{cases} x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} \\ y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11} \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real. ■

También podemos determinar la solución si escribimos la matriz aumentada en forma escalonada reducida. Partiendo de la forma escalonada, tenemos

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{R_1 = 2r_2 + r_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{2}{11} & \frac{7}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz de la derecha tiene forma escalonada reducida. El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{cases} x - \frac{2}{11}z = \frac{7}{11} & (1) \\ y - \frac{1}{11}z = -\frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

o bien, en forma equivalente,

$$\begin{cases} x = \frac{2}{11}z + \frac{7}{11} & (1) \\ y = \frac{1}{11}z - \frac{2}{11} & (2) \end{cases}$$

donde z puede ser cualquier número real.

■ Ahora resuelva el problema 53.

EJEMPLO 9 *Solución matricial de un sistema de ecuaciones*

Resolver: $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y - z = 3 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

Solución La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = -2r_1 + r_2 \\ R_3 = -1r_1 + r_3}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{\text{Intercambiamos los} \\ \text{renglones 2 y 3.}}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \end{array}\right] \underset{R_3 = 3r_2 + r_3}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -27 \end{array}\right]$$

Esta matriz tiene forma escalonada. El renglón inferior es equivalente a la ecuación

$$0x + 0y + 0z = -27$$

que no tiene solución. Por lo tanto, el sistema original es inconsistente. ■

■ Ahora resuelva los problemas 23 y 29.

El método de matrices es de particular eficacia en sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones y de variables es distinto. Aquí también, tales sistemas de ecuaciones pueden ser inconsistentes o consistentes. Si un sistema es consistente, tendrá exactamente una solución o una infinidad de soluciones.

Veamos ahora un sistema de cuatro ecuaciones con tres variables.

EJEMPLO 10 *Solución matricial de un sistema de ecuaciones*

Resolver: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 & (1) \\ 2x + 2y - 3z = -3 & (2) \\ y - z = -1 & (3) \\ -x + 4y + 2z = 13 & (4) \end{cases}$

Solución La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 13 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 = -2r_1 + r_2 \\ R_4 = r_1 + r_4}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right] \underset{\text{Intercambiamos los renglones 2 y 3.}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_3 = -6r_2 + r_3 \\ R_4 = -2r_2 + r_4}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right] \underset{R_4 = -5r_3 + r_4}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Podríamos detenernos en este punto, pues la matriz tiene forma escalonada, y sustituir en forma regresiva $z = 3$ para determinar x y y. O bien podemos continuar para obtener la forma escalonada reducida:

$$\underset{R_1 = 2r_2 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{R_1 = r_3 + r_1 \\ R_2 = r_3 + r_2}}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La matriz tiene ahora la forma escalonada reducida, y podemos ver que la solución es $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. ∎

EJEMPLO 11 *Mezcla de ácidos*

Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido nítrico, HNO_3. Un recipiente contiene una solución concentrada de HNO_3 al 10%, el segundo tiene HNO_3 al 20% y el tercero HNO_3 al 40%. ¿Cuántos litros de cada recipiente hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea de 25% de HNO_3?

Solución Sean x, y, z el número de litros de las concentraciones de 10, 20 y 40% de HNO_3, respectivamente. Queremos 100 litros en total, y que la concentración de HNO_3 de cada solución sume 25% de 100 litros. Así, tenemos que

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0.10x + 0.20y + 0.40z = 0.25(100) \end{cases}$$

Ahora, la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0.10 & 0.20 & 0.40 & 25 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0.10 & 0.30 & 15 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 3 & 150 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -50 \\ 0 & 1 & 3 & 150 \end{array}\right]$$

La matriz tiene ahora la forma escalonada reducida. La matriz final representa al sistema

$$\begin{cases} x - 2z = -50 & (1) \\ y + 3z = 150 & (2) \end{cases}$$

que tiene una infinidad de soluciones dadas por

$$\begin{cases} x = \quad 2z - 50 & (1) \\ y = -3z + 150 & (2) \end{cases}$$

donde z es cualquier número real. Sin embargo, las consideraciones prácticas de este problema nos obligan a restringir las soluciones a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Además, necesitamos que $25 \leq z \leq 50$, pues en caso contrario $x < 0$ o $y < 0$. La tabla 1 muestra algunas soluciones posibles. La determinación final acerca de la solución elegida por el laboratorio dependerá de la disponibilidad, las diferencias de costos y otras consideraciones.

TABLA 1

LITROS DE SOLUCIÓN AL 10%	LITROS DE SOLUCIÓN AL 20%	LITROS DE SOLUCIÓN AL 40%	LITROS DE SOLUCIÓN AL 25%
0	75	25	100
10	60	30	100
12	57	31	100
16	51	33	100
26	36	38	100
38	18	44	100
46	6	48	100
50	0	50	100

■

10.2

Ejercicio 10.2

En los problemas del 1 al 10 escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones dado.

1. $\begin{cases} x - 5y = 5 \\ 4x + 3y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ 4x - 6y + 2 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9x - y = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 0.01x - 0.03y = 0.06 \\ 0.13x + 0.10y = 0.20 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{3}{2}y = \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y + z = 10 \\ 3x + 2y = 5 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + y = 5 \\ 2x - 3z = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ x - 5z + 2 = 0 \end{cases}$

En los problemas del 11 al 20 realice las operaciones indicadas, en orden (a), (b) y (c), sobre la matriz aumentada que se especifica.

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -2 \\ 2 & -5 & -4 & 5 \\ -3 & 5 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 4r_2 + r_3$

12. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -3 \\ 2 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 7r_2 + r_3$

13. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & -5 & 6 & 6 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 6r_2 + r_3$

14. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & -5 \\ 2 & -5 & -3 & -5 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 11r_2 + r_3$

15. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ -3 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 15r_2 + r_3$

16. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -4 & -6 \\ 2 & -5 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 8r_2 + r_3$

17. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 8r_2 + r_3$

18. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 & 6 \\ -3 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 15r_2 + r_3$

19. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 11r_2 + r_3$

20. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 5 & -3 \\ 2 & -5 & 1 & -4 \\ -3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right]$ (a) $R_2 = -2r_1 + r_2$ (b) $R_3 = 3r_1 + r_3$ (c) $R_3 = 6r_2 + r_3$

En los problemas del 21 al 30 se proporciona la forma escalonada reducida de un sistema de ecuaciones lineales. Escriba el sistema de ecuaciones correspondiente a la matriz dada. Utilice x, y, o bien x, y, z, incluso x_1, x_2, x_3, x_4 como variables. Determine si el sistema es consistente o inconsistente. Si es consistente proporcione la solución.

21. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

22. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

23. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

24. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

25. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

26. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

27. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

28. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$

29. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

30. $\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$

En los problemas del 31 al 72 resuelva cada sistema de ecuaciones mediante matrices (operaciones de renglón). Si el sistema no tiene soluciones señale que es inconsistente.

31. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - 5y = -13 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

35. $\begin{cases} 3x - 6y = 24 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 5y = -9 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x - y = 5 \\ -3x + 3y = 2 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

41. $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 9x - 3y = 21 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$

44. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$

47. $\begin{cases} x - y = 6 \\ 2x - 3z = 16 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x + y = -4 \\ -2y + 4z = 0 \\ 3x - 2z = -11 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 2x + y + z = 4 \\ -3x + 2y - 2z = -10 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + z = -7 \\ 3x - 4y - 3z = 7 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 2 \\ 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -x + 2y + z = 5 \\ 3x - 4y - z = 1 \end{cases}$

53. $\begin{cases} -x + y + z = -1 \\ -x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - 2y - 7z = 0 \end{cases}$

54. $\begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 2 \\ x + 5y + 3z = 2 \end{cases}$

55. $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y - 7z = 1 \end{cases}$

56. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6 \\ 7x - 3y + 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

58. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$

59. $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$

60. $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

61. $\begin{cases} 3x + y - z = \frac{2}{3} \\ 2x - y + z = 1 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

62. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = \frac{8}{3} \end{cases}$

63. $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + 2y + z - w = 6 \\ x - 2y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$

64. $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z - w = 6 \\ -2x + y - 2z + 2w = -1 \end{cases}$

65. $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = 3 \end{cases}$

66. $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 6 \\ x - 3y + 3z = 4 \end{cases}$

67. $\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

68. $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases}$

70. $\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x - y - 4z = 0 \\ x - 3y + 2z = 1 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

71. $\begin{cases} 4x + y + z - w = 4 \\ x - y + 2z + 3w = 3 \end{cases}$

72. $\begin{cases} -4x + y = 5 \\ 2x - y + z - w = 5 \\ z + w = 4 \end{cases}$

73. *Ajuste de curvas.* Determine la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, 2)$, $(-2, -7)$, y $(2, -3)$.

74. *Ajuste de curvas.* Determine la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(1, -1)$, $(3, -1)$, y $(-2, 14)$.

75. *Ajuste de curvas.* Determine la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para la cual $f(-3) = -112$, $f(-1) = -2$, $f(1) = 4$, y $f(2) = 13$.

76. *Ajuste de curvas.* Determine la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ para la cual $f(-2) = -10$, $f(-1) = 3$, $f(1) = 5$, y $f(3) = 15$.

77. *Mezcla de ácidos.* Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido sulfúrico, H_2SO_4. Un recipiente contiene una solución concentrada de H_2SO_4 al 15%, el segundo tiene H_2SO_4 al 25% y el tercero H_2SO_4 al 50%. ¿Cuántos litros de cada solución hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución cuya concentración sea del 40% de H_2SO_4? Construya una tabla similar a la tabla 1 con algunas de las combinaciones posibles.

78. *Pintura de una casa.* Si los tres pintores Miguel, Daniel y Catalina trabajan juntos, pueden pintar el exterior de una casa en 10 horas. Daniel y Catalina juntos pueden pintar una casa similar en 15 horas. Un día, los tres trabajaron en el mismo tipo de casa durante 4 horas, después de lo cual Catalina se fue. Miguel y Daniel necesitaron 8 horas más de trabajo para terminar. Si no hay pérdida ni ganancia de eficiencia, ¿cuánto tiempo tardaría cada persona en terminar el trabajo ella sola?

79. *Precios de comida rápida.* Un grupo de clientes compró 8 hamburguesas de lujo, 6 órdenes grandes de papas y 6 refrescos grandes por \$26.10. Un segundo grupo ordenó 10 hamburguesas de lujo, 6 órdenes grandes de papas y 8 refrescos grandes y pagó \$31.60. ¿Existe la información suficiente para determinar el precio de cada artículo? En caso contrario, construya una tabla que muestre las diversas posibilidades. Suponga que las hamburguesas cuestan entre \$1.75 y \$2.25, las papas entre \$0.75 y \$1.00 y los refrescos entre \$0.60 y \$0.90.

80. *Precios de comida rápida.* Utilice la información del problema 79 y suponga que un tercer grupo compró 3 hamburguesas de lujo, 2 órdenes grandes de papas y 4 refrescos grandes por \$10.95. ¿Ahora existe la información suficiente para determinar el precio de cada artículo?

81. *Planeación financiera.* Tres parejas retiradas necesitan cada una un ingreso anual adicional de \$2000.00. Como consultor financiero, usted les recomienda que inviertan algo de dinero en bonos del gobierno, que producen 7%, algo más en bonos empresariales al 9% y otra parte en un tercer tipo de bonos al 11%. Prepare una tabla para cada pareja con las diversas formas de lograr su objetivo:

(a) Si la primera pareja tiene \$20,000 para invertir.

(b) Si la segunda pareja tiene \$25,000 para invertir.

(c) Si la tercera pareja tiene \$30,000 para invertir.

(d) ¿Qué consejo le daría a cada pareja con respecto de la cantidad a invertir y las opciones disponibles? [Los intereses más altos conllevan por lo general mayor riesgo.]

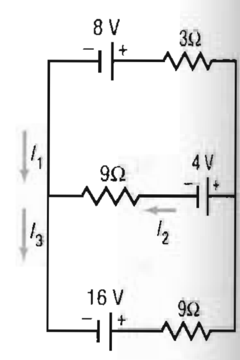
82. *Planeación financiera.* Una pareja retirada tiene \$25,000.00 para invertir. Como consultor financiero, usted le recomienda que inviertan algo de dinero en los bonos del gobierno, que producen 7%, algo más en bonos empresariales al 9% y otra parte en un tercer tipo de bonos al 11%. Prepare una tabla con las diversas formas en que esta pareja puede lograr los siguientes objetivos:

(a) Un ingreso anual de \$1500.

(b) Un ingreso anual de \$2000.

(c) Un ingreso anual de \$2500.

(d) ¿Qué consejo le daría a la pareja respecto del ingreso que desean y las opciones disponibles? [Los intereses más altos conllevan por lo general mayor riesgo.]



83. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las *leyes de Kirchhoff* al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_3 \\ 16 - 8 - 9I_3 - 3I_1 = 0 \\ 16 - 4 - 9I_3 - 9I_2 = 0 \\ 8 - 4 - 9I_2 + 3I_1 = 0 \end{cases}$$

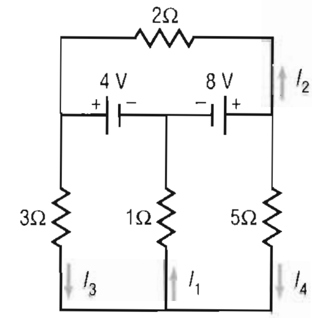
Determine las corrientes I_1, I_2 y I_3.*

***Fuente:* Basado en Raymond Serway, *Physics*, tercera edición. Filadelfia: Saunders, 1990, problema 31, p. 790.

84. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -4 + 8 - 2I_2 = 0 \\ 8 = 5I_4 + I_1 \\ 4 = 3I_3 + I_1 \\ I_3 + I_4 = I_1 \end{cases}$$

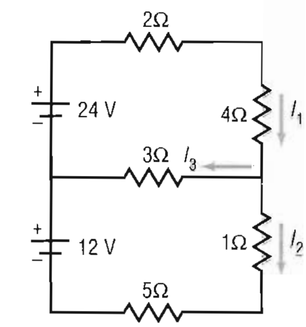
Determine las corrientes I_1, I_2, I_3, y I_4.*



85. *Electricidad: leyes de Kirchhoff.* Una aplicación de las leyes de Kirchhoff al circuito de la figura anexa produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 = I_3 + I_2 \\ 24 - 6I_1 - 3I_3 = 0 \\ 12 + 24 - 6I_1 - 6I_2 = 0 \end{cases}$$

Determine las corrientes I_1, I_2, y I_3.†



86. Escriba unas líneas que expliquen su estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices.

87. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales con matrices, ¿prefiere colocar la matriz aumentada en forma escalonada o en forma escalonada reducida? Justifique su elección.

88. Plantee tres sistemas de tres ecuaciones lineales con tres variables tales que:

(a) El primero no tenga solución. (b) El segundo tenga exactamente una solución.
(c) El tercero tenga una infinidad de soluciones.

Déselos a un amigo para que los resuelva y critique.

89. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Si $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, utilice matrices para mostrar que la solución es

$$x = \frac{1}{D}(c_1b_2 - c_2b_1), \qquad y = \frac{1}{D}(a_1c_2 - a_2c_1)$$

90. Para el sistema del problema 89, suponga que $D = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Utilice matrices para mostrar que el sistema es inconsistente si $a_1c_2 \neq a_2c_1$ o bien si $b_1c_2 \neq b_2c_1$ y que tiene una infinidad de soluciones si $a_1c_2 = a_2c_1$ y $b_1c_2 = b_2c_1$.

91. La gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un plano. Proporcione un argumento geométrico de lo que puede ocurrir al resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con tres variables. [*Sugerencia*: Dos planos en un espacio tridimensional son coincidentes (los mismos), paralelos, o se cortan en una recta.]

92. Consulte el problema 91. Proporcione un argumento geométrico de lo que puede ocurrir al resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables.

93. Consulte el problema 91. Proporcione un argumento geométrico de lo que puede ocurrir al resolver un sistema de cuatro ecuaciones lineales con tres variables.

**Fuente: Íbidem*, problema 34, p. 791.
†Fuente: Íbidem, problema 38, p. 791.

10.3 Sistemas de ecuaciones lineales: determinantes

En la sección anterior describimos un método que utiliza matrices para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales. En esta sección veremos otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales; sin embargo, sólo se puede utilizar cuando el número de ecuaciones es igual al número de variables. Aunque el método servirá en cualquier sistema (siempre que el número de ecuaciones sea igual al número de variables), se utiliza con más frecuencia para sistemas de dos ecuaciones con dos variables o de tres ecuaciones con tres variables. Este método es la *regla de Cramer* y se basa en el concepto de *determinante*.

Determinantes de 2 por 2

Determinante de 2 por 2

Si a, b, c y d son cuatro números reales, el símbolo

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se llama **determinante de 2 por 2.** Su valor es el número $ad - bc$; es decir,

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc} \qquad (1)$$

Una forma que puede ayudarnos a recordar el valor de un determinante de 2 por 2 es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

bc

ad

Menos

EJEMPLO 1

Evaluación de un determinante de 2 por 2

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(-2) = 3 - (-12) = 15$$

■ Ahora resuelva el problema 3.

Veamos enseguida el papel que juega un determinante de 2 por 2 en la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos variables. Consideremos el sistema

$$\begin{cases} ax + by = s & (1) \\ cx + dy = t & (2) \end{cases} \qquad (2)$$

Utilizaremos el método de eliminación para resolver este sistema.

Si $d \neq 0$ y $b \neq 0$, este sistema es equivalente al sistema

$$\begin{cases} adx + bdy = sd & (1) \text{ Multiplicamos por } d. \\ bcx + bdy = tb & (2) \text{ Multiplicamos por } b. \end{cases}$$

Al restar la segunda ecuación de la primera obtenemos

$$\begin{cases} (ad - bc)x + 0 \cdot y = sd - tb & (1) \\ \quad bcx \quad + \quad bdy = tb & (2) \end{cases}$$

Ahora, podemos reescribir la primera ecuación usando la notación de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}$$

Si $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, podemos despejar x para obtener

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{D} \tag{3}$$

Ahora, regresemos al problema original (2). Si $a \neq 0$ y $c \neq 0$, el sistema es equivalente a

$$\begin{cases} acx + bcy = cs & (1) \text{ Multiplicamos por } c. \\ acx + ady = at & (2) \text{ Multiplicamos por } a. \end{cases}$$

Al restar la primera ecuación de la segunda, obtenemos

$$\begin{cases} acx + \quad bcy \quad = \quad cs & (1) \\ 0 \cdot x + (ad - bc)y = at - cs & (2) \end{cases}$$

Así podemos reescribir la segunda ecuación usando la notación de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

Si $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, podemos despejar y para obtener

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{D} \tag{4}$$

Las ecuaciones (3) y (4) conducen al siguiente resultado, la **regla de Cramer:**

Teorema
regla de Cramer para dos ecuaciones con dos variables

La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax + by = s & (1) \\ cx + dy = t & (2) \end{cases} \tag{5}$$

está dada por

$$x = \frac{\begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \tag{6}$$

siempre que

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

■

En la deducción anterior de la regla de Cramer, supusimos que ninguno de los números a, b, c y d eran iguales a cero. En el problema 58 al final de esta sección, el lector deberá completar la demostración bajo la condición más débil $D = ad - bc \neq 0$.

Ahora observe con cuidado el patrón de la regla de Cramer. El denominador de la solución (6) es el determinante de los coeficientes de las variables:

$$\begin{cases} ax + by = s \\ cx + dy = t \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

En la solución para x, el numerador es el determinante (denotado D_x) formado al reemplazar las entradas en la primera columna (los coeficientes de x) en D por las constantes que aparecen al lado derecho del signo de igualdad:

$$D_x = \begin{vmatrix} s & b \\ t & d \end{vmatrix}$$

En la solución para y, el numerador es el determinante (denotado D_y) formado al reemplazar las entradas en la segunda columna (los coeficientes de y) en D por las constantes que aparecen al lado derecho del signo de igualdad:

$$D_y = \begin{vmatrix} a & s \\ c & t \end{vmatrix}$$

La regla de Cramer establece entonces que, si $D \neq 0$,

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D} \tag{7}$$

EJEMPLO 2 *Solución de un sistema de ecuaciones mediante determinantes*

Utilice la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4 & (1) \\ 6x + \ \ y = 13 & (2) \end{cases}$$

Solución El determinante D de los coeficientes de las variables es

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (6)(-2) = 15$$

Como $D \neq 0$, podemos utilizar la regla de Cramer (7):

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix}}{15} = \frac{30}{15} = 2, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 13 \end{vmatrix}}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

La solución es $x = 2$, $y = 1$. ∎

Si, al intentar utilizar la regla de Cramer, el determinante de D de los coeficientes de las variables es igual a 0 (de modo que no se pueda aplicar la regla de Cramer), entonces el sistema es inconsistente o tiene una infinidad de soluciones. (Consulte el problema 90 del ejercicio 10.2.)

■ Ahora resuelva el problema 11.

MISIÓN POSIBLE

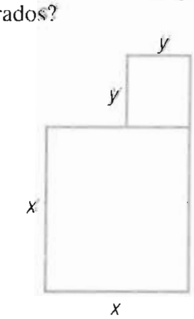
Capítulo 10

RANCHOS GANADEROS

Su equipo es dueño de una compañía que vende material para cercar terrenos. Una propietaria quiere comprar cerca para formar dos corrales cuadrados de igual tamaño. Ella quisiera tener cercado un total de 4500 pies cuadrados y piensa que si los dos corrales están juntos, la cerca entre ellos podría funcionar como un lado para cada corral, lo que le permitiría utilizar menos cerca. Ella espera que ustedes puedan ayudarle a determinar la longitud de los lados. Su presupuesto le permite comprar hasta 300 pies de cerca.

Por supuesto, ustedes quieren ayudarle a lograr el uso más eficiente posible de la cerca; aunque esto signifique por ahora que ella comprará menos cerca, tendrá sus ventajas a largo plazo pues será una clienta fiel.

1. Realicen un bosquejo de los corrales. Señalen las longitudes de los lados con variables.
2. Formulen ecuaciones que relacionen las longitudes de los lados de los dos corrales con el área y el perímetro que la propietaria tiene en mente.
3. Resuelvan el sistema de ecuaciones y muestren a la clienta las longitudes que se obtendrán con las medidas de los corrales proporcionadas por ella. ¿Serán suficientes 300 pies de cerca?
4. Si el presupuesto de ella realmente está restringido a 300 pies de cerca y debe tener dos corrales de igual tamaño con la forma que describió, ¿cuál será el tamaño de cada corral en pies cuadrados?
5. Considere otras formas posibles para que la propietaria rodee al menos 4500 pies cuadrados con 300 pies de cerca. No se limite a la configuración mencionada por ella. Por ejemplo, ¿qué ocurriría si los corrales no tuvieran el mismo tamaño? ¿Cuáles serían sus dimensiones?
6. ¿Qué ocurriría si no es obligatorio mantener el ganado separado por edad, sexo o raza? Si forma un corral grande con sus 300 pies de cerca podría incluir más pies cuadrados. Muestre a su clienta otras posibilidades si, por ejemplo, utiliza un corral triangular, rectangular, cuadrado o, incluso, circular. Junto a cada forma de corral coloque el número de pies cuadrados que encerraría. ¿Existe una mejor forma en términos de incluir más pies cuadrados por menos cerca? ¿Cuál sería esta?



Determinantes de 3 por 3

Para utilizar la regla de Cramer en la solución de un sistema de tres ecuaciones con tres variables, necesitamos definir un determinante de 3 por 3.

Un **determinante de 3 por 3** se simboliza como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{8}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \ldots$ son números reales.

Como en el caso de las matrices, utilizamos un doble subíndice para identificar una entrada, indicando sus números de renglón y de columna. Por ejemplo, la entrada a_{23} está en el renglón 2, columna 3.

Podemos definir el valor de un determinante de 3 por 3 mediante determinantes de 2 por 2 y la siguiente fórmula:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{Menos}}{-} a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Determinante 2 por 2 que queda después de eliminar el renglón y la columna que contienen a a_{11}

Determinante 2 por 2 que queda después de eliminar el renglón y la columna que contienen a a_{12}

Determinante 2 por 2 que queda después de eliminar el renglón y la columna que contienen a a_{13}

Tome nota del signo menos que aparece en el segundo término, ¡es fácil olvidarlo! La fórmula (9) se recordará mejor al observar que cada entrada del renglón 1 se multiplica por el determinante de 2 por 2 restante después de eliminar el renglón y la columna que contienen a la entrada, como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{Primer término}$$

Escribimos estas entradas como un determinante 2 por 2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \text{Segundo término}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \text{Tercer término}$$

Ahora insertamos el signo menos antes de la expresión intermedia y sumamos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \overset{\text{Menos}}{-} a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

La fórmula (9) exhibe una forma de encontrar el valor de un determinante de 3 por 3, *desarrollando sobre el renglón 1*. De hecho, podemos hacer este desarrollo sobre de cualquier renglón o columna. Los términos que se suman o restan constan de la entrada del renglón (o columna) por el valor del determinante de 2 por 2 restante después de eliminar el renglón y la columna de la entrada. Calculamos el valor del determinante sumando o restando los términos de acuerdo con el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{array}$$

Por ejemplo, si optamos por desarrollar sobre la columna 2, obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Desarrollamos mediante la columna 2 ($-$, $+$, $-$)

Si preferimos desarrollar sobre el renglón 3, obtenemos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Desarrollamos mediante el renglón 3 ($+$, $-$, $+$)

Es posible mostrar que el valor de un determinante no depende de la elección del renglón o columna utilizados en el desarrollo.

EJEMPLO 3 *Evaluación de un determinante de 3 por 3*

Calcular el valor del determinante de 3 por 3: $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Solución Vamos a desarrollar sobre el renglón 1.

Recuerde el signo menos.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3(18 + 4) - 4(12 - 16) + (-1)(-8 - 48) \\ &= 3(22) - 4(-4) + (-1)(-56) \\ &= 66 + 16 + 56 = 138 \end{aligned}$$

■

También podríamos calcular el valor del determinante de 3 por 3 del ejemplo 3 desarrollando sobre la columna 3 (los signos son $+$, $-$, $+$):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} &= (-1)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -1(-8 - 48) - 2(-6 - 32) + 3(18 - 16) \\ &= 56 + 76 + 6 = 138 \end{aligned}$$

■ Ahora resuelva el problema 7.

Sistemas de tres ecuaciones con tres variables

Consideremos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres variables:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \end{cases} \tag{10}$$

Se puede mostrar que si el determinante D de los coeficientes de las variables no es 0, es decir, si

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces la única solución del sistema (10) está dada por

Regla de Cramer para tres ecuaciones con tres variables

$$x = \frac{D_x}{D}, \qquad y = \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

donde

$$D_x = \begin{vmatrix} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & & a_{13} \\ a_{21} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \end{vmatrix}$$

Es evidente la analogía de este patrón con el observado antes para un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

EJEMPLO 4 *Uso de la regla de Cramer*

Utilizar la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 & (1) \\ -x + 2y + 4z = -3 & (2) \\ x - 2y - 3z = 4 & (3) \end{cases}$$

Solución El valor del determinante D de los coeficientes de las variables es

$$D = \begin{vmatrix} & & \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (\quad)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) - 1(-1) + (-1)(0)$$

$$= 4 + 1 = 5$$

Como $D \neq 0$, calcularemos los valores de D_x, D_y y D_z:

$$D_x = \begin{vmatrix} & & \\ -3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} + (\quad)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2) - 1(-7) + (-1)(-2) = 15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} & & \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (\quad)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-7) - 3(-1) + (-1)(-1)$$

$$= -14 + 3 + 1 = -10$$

$$D_z = \begin{vmatrix} & & \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2) - 1(-1) + 3(0) = 5$$

Como resultado,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{5} = 3, \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-10}{5} = -2, \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{5}{5} = 1$$

La solución es $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$. ■

Si el determinante de los coeficientes de las variables de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables es 0, entonces no se puede aplicar la regla de Cramer. En este caso, el sistema es inconsistente o tiene una infinidad de soluciones.

■ Ahora resuelva el problema 29.

Más acerca de los determinantes

Los determinantes tienen varias propiedades que con frecuencia son útiles para obtener su valor. Enseguida mencionaremos algunas de ellas.

Teorema El valor de un determinante cambia de signo si intercambiamos dos cualesquiera renglones (o columnas). (11)

Demostración para determinantes de 2 por 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

■

EJEMPLO 5 *Ejemplificando un teorema (11)*

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

■

Teorema Si todas las entradas de cualquier renglón (o columna) son iguales a cero, el valor del determinante es 0. (12)

Demostración Sólo hay que desarrollar sobre el renglón (o la columna) que contenga los ceros. ■

Teorema Si dos renglones cualesquiera (o dos columnas) de un determinante tienen entradas correspondientes iguales, el valor del determinante es 0. (13)

En el problema 61 al final de esta sección, se le pedirá que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3 donde las entradas de la columna 1 son iguales a las entradas en la columna 3.

EJEMPLO 6 *Ejemplificando un teorema (13)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3)$$

$$= -3 + 12 - 9 = 0$$

■

Teorema Si cualquier renglón (o columna) de un determinante se multiplica por un número distinto de cero k, el valor del determinante también se multiplicará por el factor k. (14)

■

En el problema 60 al final de esta sección, se le pedirá que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3, utilizando el renglón 2.

EJEMPLO 7 *Ejemplificando un teorema(14)*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2$$

$$\begin{vmatrix} k & 2k \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8k = -2k = k(-2) = k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

■

Teorema Si las entradas de cualquier renglón (o columna) de un determinante se multiplican por un número distinto de cero k y el resultado se suma a las entradas correspondientes de otro renglón (o columna), el valor del determinante permanece sin cambio. (15)

■

En el problema 62 al final de esta sección, se le pedirá que demuestre este resultado para un determinante de 3 por 3, utilizando los renglones 1 y 2.

EJEMPLO 8 *Ejemplificando un teorema(15)*

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

Multiplicamos el renglón 2 por -2 y lo sumamos al renglón 1. ■

10.3

Ejercicio 10.3

En los problemas del 1 al 10 calcule el valor de cada determinante.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & -5 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} 3 & -9 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

En los problemas del 11 al 38 resuelva cada sistema de ecuaciones mediante la regla de Cramer, si es aplicable. En caso contrario, indíquelo.

11. $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 5x - y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x = 24 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 4x + 5y = -3 \\ -2y = -4 \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} 3x - 6y = 24 \\ 5x + 4y = 12 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x + 4y = 16 \\ 3x - 5y = -9 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 4x - 8y = 6 \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 4x + 2y = \frac{8}{3} \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 10x + 10y = 5 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5x + 10y = 4 \end{cases}$ **25.** $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - y = \frac{1}{2} \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = -2 \\ x - 2y = 8 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ 15x + 5y = 21 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x + y - z = 6 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 2x - 3y + 4z = -15 \\ 5x + y - 2z = 12 \end{cases}$ **31.** $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 4y + z = -7 \\ -2x + 2y - 3z = 4 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x + 4y - 3z = -8 \\ 3x - y + 3z = 12 \\ x + y + 6z = 1 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 2 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y = 4 \\ -2x + 2y - 4z = -10 \end{cases}$ **35.** $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - 4y + z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + 4y - 3z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + y + 6z = 0 \end{cases}$ **37.** $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \\ -2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$

39. Resuelva: $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y} = 0 \end{cases}$ **40.** Resuelva: $\begin{cases} \dfrac{4}{x} - \dfrac{3}{y} = 0 \\ \dfrac{6}{x} + \dfrac{3}{2y} = 2 \end{cases}$

[*Sugerencia:* Sean $u = 1/x$ y $v = 1/y$ y resuelva las ecuaciones en términos de u y v.]

En los problemas del 41–46, despeje x.

41. $\begin{vmatrix} x & x \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5$ **42.** $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = -2$ **43.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 2$

44. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & x & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ **45.** $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 0 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 7$ **46.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4x$

En los problemas del 47 al 54, utilice las propiedades de los determinantes para calcular el valor de cada determinante, si se sabe que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

47. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$ **48.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ **49.** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ -3 & -6 & -9 \\ u & v & w \end{vmatrix}$

50. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-u & y-v & z-w \\ u & v & w \end{vmatrix}$ **51.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-3 & y-6 & z-9 \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix}$ **52.** $\begin{vmatrix} x & y & z-x \\ u & v & w-u \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

53. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \\ u-1 & v-2 & w-3 \end{vmatrix}$ **54.** $\begin{vmatrix} x+3 & y+6 & z+9 \\ 3u-1 & 3v-2 & 3w-3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

55. *Geometría: ecuación de una recta.* Podemos expresar una ecuación de la recta que contiene a los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Demuestre este resultado desarrollando el determinante y comparando el resultado con la forma de la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

56. *Geometría: puntos colineales.* Utilice el resultado del problema 55 y muestre que tres puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2), y (x_3, y_3) son colineales (están en una misma recta) si, y sólo si,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

57. Muestre que $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = (y-z)(x-y)(x-z).$

58. Complete la demostración de la regla de Cramer para dos ecuaciones con dos variables. [*Sugerencia:* En el sistema (5), de la página 643, si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y $c \neq 0$, pues $D = -bc \neq 0$. Ahora, muestre que las ecuaciones (6) proporcionan una solución del sistema cuando $a = 0$. Todavía restan tres casos: $b = 0$, $c = 0$, y $d = 0$.]

59. Intercambie las columnas 1 y 3 de un determinante de 3 por 3. Muestre que el valor del nuevo determinante es -1 por el valor del determinante original.

60. Multiplique cada entrada del renglón 2 de un determinante de 3 por 3 por el número k, $k \neq 0$. Muestre que el valor del nuevo determinante es k veces el valor del determinante original.

61. Demuestre que un determinante de 3 por 3 en donde las entradas de la columna 1 son iguales a las de la columna 3 tiene como valor al cero.

62. Demuestre que, si el renglón 2 de un determinante de 3 por 3 se multiplica por k, $k \neq 0$, y el resultado se suma a las entradas del renglón 1, entonces no cambia el valor del determinante.

10.4 Sistemas de ecuaciones no lineales

No existe una metodología general para resolver un sistema de ecuaciones no lineales. En ciertos casos es mejor la sustitución; en otros, la eliminación; en otros más, ninguno de estos métodos funciona. La experiencia y cierto grado de imaginación serán sus mejores aliados.

Antes de comenzar debemos hacer unos comentarios:

1. Si el sistema contiene dos variables y se pueden hacer las gráficas de sus ecuaciones con facilidad, entonces hágalas. Al hacer la gráfica de cada ecuación podemos darnos una idea del número de soluciones que tiene el sistema y su posición aproximada.
2. Pueden surgir soluciones extrañas al resolver sistemas no lineales, así que es imperativo verificar todas las soluciones aparentes.

EJEMPLO 1

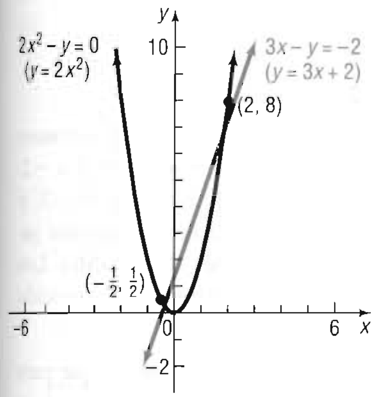
Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales mediante sustitución

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x - y = -2 & (1) \text{ Una recta} \\ 2x^2 - y = 0 & (2) \text{ Una parábola} \end{cases}$$

Solución Observemos primero que el sistema contiene dos variables y que sabemos cómo hacer la gráfica de cada ecuación. En la figura 5 vemos que, aparentemente, el sistema tiene dos soluciones.

FIGURA 5



Utilizaremos el método de sustitución para resolver el sistema. Podemos despejar a y con facilidad en la ecuación (1):

$$3x - y = -2$$
$$y = 3x + 2$$

Sustituimos esta expresión por y en la ecuación (2). El resultado es una ecuación que sólo contiene a la variable x, la cual podemos entonces despejar:

$$2x^2 - y = 0$$
$$2x^2 - (3x + 2) = 0$$
$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$
$$(2x + 1)(x - 2) = 0$$
$$2x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad x = 2$$

Con estos valores de x en $y = 3x + 2$, tenemos

$$y = 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad y = 3(2) + 2 = 8$$

Las soluciones aparentes son $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ y $x = 2$, $y = 8$.

Verificación: Para $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} 3\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2 & (1) \\ 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Para $x = 2$, $y = 8$:

$$\begin{cases} 3(2) - 8 = 6 - 8 = -2 & (1) \\ 2(2)^2 - 8 = 2(4) - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

Las dos soluciones aparentes son soluciones reales. Ahora sabemos que las gráficas de la figura 5 se cortan en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y en (2, 8).

Verificación: Haga la gráfica de $3x - y = -2$ y $2x^2 - y = 0$ y compare el resultado con la figura 5. Utilice ZOOM y TRACE para determinar los puntos de intersección. ■

■ Ahora resuelva el problema 3.

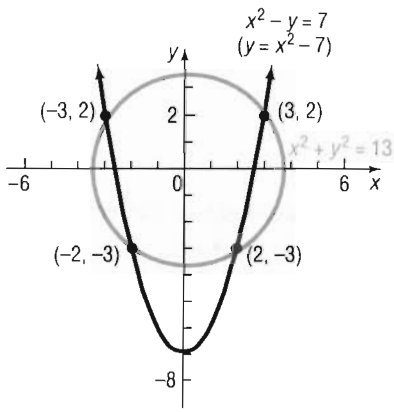
Nuestro siguiente ejemplo ilustra la forma en que el método de eliminación funciona con los sistemas no lineales.

EJEMPLO 2 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación*

Resolver: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 & (1) \text{ Un círculo} \\ x^2 - y = 7 & (2) \text{ Una parábola} \end{cases}$

Solución Primero hacemos la gráfica de cada ecuación, como nos muestra la figura 6. Con base en la gráfica, esperamos cuatro soluciones. Al restar la ecuación (2) de la ecuación (1) eliminamos la variable x, obteniendo

FIGURA 6



$$y^2 + y = 6$$

Podemos resolver con facilidad esta ecuación cuadrática en y factorizando:

$$y^2 + y - 6 = 0$$
$$(y + 3)(y - 2) = 0$$
$$y = -3 \quad \text{o} \quad y = 2$$

Utilizamos valores de y en la ecuación (2) para determinar x. Si $y = 2$, entonces $x^2 = y + 7 = 9$ y $x = 3$ o -3. Si $y = -3$, entonces $x^2 = y + 7 = 4$ y $x = 2$ o -2. Así tenemos cuatro soluciones: $x = 3$, $y = 2$; $x = -3$, $y = 2$; $x = 2$, $y = -3$; y $x = -2$, $y = -3$. Usted puede verificar que estas cuatro soluciones realmente satisfacen la ecuación (1), de modo que las cuatro son soluciones del sistema. Los cuatro puntos, (3, 2), (−3, 2), (2, −3), y (−2, −3), son los puntos de intersección de las gráficas. *Véase* de nuevo la figura 6.

Verificación: Haga la gráfica de $x^2 + y^2 = 13$ y $x^2 - y = 7$. [Recuerde que para hacer la gráfica $x^2 + y^2 = 13$ necesita dos funciones: $y = \sqrt{13 - x^2}$ y $y = -\sqrt{13 - x^2}$.] Compare el resultado con la figura 6. Utilice ZOOM y TRACE para determinar los cuatro puntos de intersección. ∎

■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 3 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación*

Resolver: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ x^3 - y^2 = x & (2) \end{cases}$

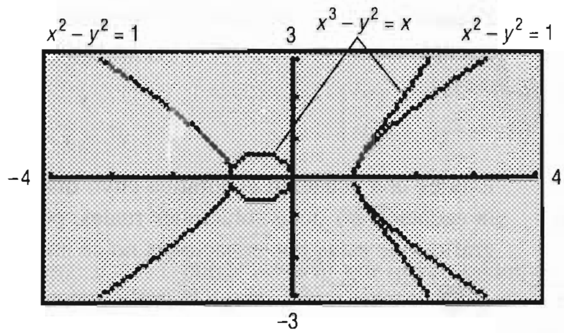
Solución Como no es fácil hacer la gráfica de la segunda ecuación, omitimos ese paso. Utilizamos eliminación, restando la ecuación (2) de la ecuación (1), para obtener

$$x^2 - x^3 = 1 - x$$
$$x^2(1 - x) = 1 - x$$
$$x^2(1 - x) - (1 - x) = 0$$
$$(x^2 - 1)(1 - x) = 0$$
$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{o} \quad 1 - x = 0$$
$$x = \pm 1 \qquad\qquad x = 1$$

Ahora utilizamos la ecuación (1) para obtener y. Si $x = 1$, entonces $1 - y^2 = 1$ y $y = 0$. Si $x = -1$, entonces $1 - y^2 = 1$ y $y = 0$. Existen dos soluciones aparentes: $x = 1$, $y = 0$ y $x = -1$, $y = 0$. Como cada una de estas soluciones también satisface la ecuación (2), el sistema tiene dos soluciones: $x = 1$, $y = 0$ y $x = -1$, $y = 0$. Las gráficas de estas ecuaciones se cortan en (1, 0) y en (−1, 0). ∎

Verificación: Haga la gráfica $x^2 - y^2 = 1$ y $x^3 - y^2 = x$. [Necesitará hacer la gráfica de cuatro funciones: $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $y = -\sqrt{x^2 - 1}$, $y = \sqrt{x^3 - x}$, y $y = -\sqrt{x^3 - x}$.] Utilice ZOOM y TRACE para verificar los dos puntos de intersección. *Véase* la figura 7.

FIGURA 7



■

EJEMPLO 4 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales mediante eliminación*

Resolver: $\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = 0 & (1) \\ x + 1 + \dfrac{y^2 - y}{x} = 0 & (2) \end{cases}$

Solución Primero multiplicamos la ecuación (2) por x para eliminar la fracción. El resultado es un sistema equivalente, pues x no puede anularse [observe la ecuación (2) para ver por qué]:

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 3y + 2 = 0 & (1) \\ x^2 + x + y^2 - y = 0 & (2) \end{cases}$$

Ahora reste la ecuación (2) de la ecuación (1) para eliminar x. El resultado es

$$-2y + 2 = 0$$
$$y = 1$$

Para determinar x, sustituimos en forma regresiva $y = 1$ en la ecuación (1):

$$x^2 + x + 1 - 3 + 2 = 0$$
$$x^2 + x = 0$$
$$x(x + 1) = 0$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = -1$$

Como x no puede anularse, el valor $x = 0$ es extraño y lo descartamos. Así, la solución es $x = -1$, $y = 1$.

Verificación: Ahora verificamos $x = -1$, $y = 1$:

$$\begin{cases} (-1)^2 + (-1) + 1^2 - 3(1) + 2 = 1 - 1 + 1 - 3 + 2 = 0 & (1) \\ -1 + 1 + \dfrac{1^2 - 1}{-1} = 0 + \dfrac{0}{-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Así, la única solución del sistema es $x = -1$, $y = 1$. Las gráficas de estas ecuaciones se cortan en $(-1, 1)$. ■

■ Ahora resuelva los problemas 17 y 41.

EJEMPLO 5 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales*

Resolver: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & (1) \text{ Una hipérbola} \\ y = x^2 & (2) \text{ Una parábola} \end{cases}$

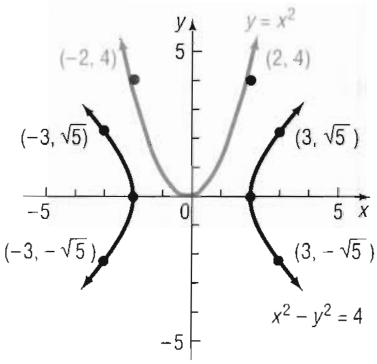
Solución

Podemos utilizar sustitución o eliminación en este caso. Utilizamos sustitución y reemplazamos x^2 por y en la ecuación (1). El resultado es

$$y - y^2 = 4$$
$$y^2 - y + 4 = 0$$

Esta es una ecuación cuadrática cuyo discriminante es $1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0$. Así, la ecuación no tiene soluciones reales, por lo que el sistema es inconsistente. Las gráficas de estas dos ecuaciones no se cortan. *Véase* la figura 8.

FIGURA 8



Verificación: Haga la gráfica $x^2 - y^2 = 4$ y $y = x^2$ y compare con la figura 8. Seleccione una pantalla que no deje lugar a dudas acerca de que las gráficas nunca se cortan.

Los siguientes ejemplos ilustran dos de las formas más imaginativas de resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 6 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales*

Resolver: $\begin{cases} 4x^2 - 9xy - 28y^2 = 0 & (1) \\ 16x^2 - 4xy = 16 & (2) \end{cases}$

Solución

Observemos que la ecuación (1) es factorizable:

$$4x^2 - 9xy - 28y^2 = 0$$
$$(4x + 7y)(x - 4y) = 0$$

Esto produce las siguientes dos ecuaciones

$$4x + 7y = 0 \quad \text{o} \quad x - 4y = 0$$
$$x = -\tfrac{7}{4}y \qquad\qquad x = 4y$$

Sustituimos cada uno de estos valores para x en la ecuación (2):

$$\begin{aligned} 16x^2 - 4xy &= 16 \\ 16(-\tfrac{7}{4}y)^2 - 4(-\tfrac{7}{4}y)y &= 16 \\ 49y^2 + 7y^2 &= 16 \\ 56y^2 &= 16 \\ 7y^2 &= 2 \\ y^2 &= \tfrac{2}{7} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 16x^2 - 4xy &= 16 \\ 16(4y)^2 - 4(4y)y &= 16 \\ 16(16y^2) - 16y^2 &= 16 \\ 15y^2 &= 1 \\ y^2 &= \tfrac{1}{15} \end{aligned}$$

Así, tenemos

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{7}} = \pm\frac{\sqrt{14}}{7} \qquad y = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$$
$$x = -\frac{7}{4}y = \mp\frac{\sqrt{14}}{4} \qquad x = 4y = \pm\frac{4\sqrt{15}}{15}$$

Verifique usted que las cuatro soluciones $x = -\sqrt{14}/4$, $y = \sqrt{14}/7$; $x = \sqrt{14}/4$, $y = -\sqrt{14}/7$; $x = 4\sqrt{15}/15$, $y = \sqrt{15}/15$; y $x = -4\sqrt{15}/15$, $y = -\sqrt{15}/15$ son soluciones reales del sistema.

EJEMPLO 7 *Resolución de un sistema de ecuaciones no lineales*

Resolver: $\begin{cases} 3xy - 2y^2 = -2 & (1) \\ 9x^2 + 4y^2 = 10 & (2) \end{cases}$

Solución Multiplicamos la ecuación (1) por 2 y sumamos el resultado a la ecuación (2) para eliminar los términos en y^2:

$$\begin{cases} 6xy - 4y^2 = -4 & (1) \\ 9x^2 + 4y^2 = 10 & (2) \end{cases}$$

$$9x^2 + 6xy = 6$$

$$3x^2 + 2xy = 2 \qquad \text{Dividimos cada lado entre 3.}$$

Como $x \neq 0$ (¿puede advertir por qué?), podemos despejar y en esta ecuación para obtener

$$y = \frac{2 - 3x^2}{2x}, \qquad x \neq 0 \tag{1}$$

Ahora sustituimos y en la ecuación (2) del sistema:

$$9x^2 + 4y^2 = 10$$

$$9x^2 + 4\left(\frac{2 - 3x^2}{2x}\right)^2 = 10$$

$$9x^2 + \frac{4 - 12x^2 + 9x^4}{x^2} = 10$$

$$9x^4 + 4 - 12x^2 + 9x^4 = 10x^2$$

$$18x^4 - 22x^2 + 4 = 0$$

$$9x^4 - 11x^2 + 2 = 0$$

Podemos factorizar esta ecuación cuadrática (en x^2):

$$(9x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$9x^2 - 2 = 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \tfrac{2}{9} \qquad\qquad x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3} \qquad\qquad x = \pm 1$$

Para determinar y, utilizamos la ecuación (1):

$$\text{Si } x = \frac{\sqrt{2}}{3}: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{2(\sqrt{2}/3)} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{Si } x = -\frac{\sqrt{2}}{3}: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - \frac{2}{3}}{-2(\sqrt{2}/3)} = \frac{4}{-2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$

$$\text{Si } x = 1: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - 3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Si } x = -1: \quad y = \frac{2 - 3x^2}{2x} = \frac{2 - 3}{-2} = \frac{1}{2}$$

El sistema tiene cuatro soluciones, las cuales debe usted verificar. ■

■ Ahora resuelva el problema 37.

EJEMPLO 8 *Carrera de maratón*

En una carrera de maratón de 50 millas, el ganador cruza la meta con una milla de ventaja sobre el corredor de segundo lugar y con 4 millas de ventaja sobre el tercero.

Si cada corredor mantiene una velocidad constante en toda la carrera, ¿por cuántas millas gana el corredor de segundo lugar al de tercero?

Solución Sean v_1, v_2, v_3 las velocidades de los corredores que quedaron en primero, segundo y tercer lugares, respectivamente. Sean t_1 y t_2 los tiempos (en horas) necesarios para que el primero y el segundo corredor terminaran la carrera. Entonces tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 50 = v_1t_1 & \text{(1) El primer corredor recorre 50 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 49 = v_2t_1 & \text{(2) El segundo corredor recorre 49 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 46 = v_3t_1 & \text{(3) El tercer corredor recorre 46 millas en } t_1 \text{ horas.} \\ 50 = v_2t_2 & \text{(4) El segundo corredor recorre 50 millas en } t_2 \text{ horas.} \end{cases}$$

Buscamos la distancia del corredor de tercer lugar a la meta en el instante t_2. Es decir,

$$\begin{aligned} 50 - v_3t_2 &= 50 - v_3\left(t_1 \cdot \frac{t_2}{t_1}\right) \\ &= 50 - (v_3t_1) \cdot \frac{t_2}{t_1} \\ &= 50 - 46 \cdot \frac{50/v_2}{50/v_1} && \begin{cases} \text{De (3), } v_3t_1 = 46; \\ \text{de (4), } t_2 = 50/v_2; \\ \text{de (1), } t_1 = 50/v_1. \end{cases} \\ &= 50 - 46 \cdot \frac{v_1}{v_2} \\ &= 50 - 46 \cdot \frac{50}{49} && \text{Formamos el cociente de (1) y (2).} \\ &\approx 3.06 \text{ millas} \end{aligned}$$

■

CARACTERÍSTICA HISTÓRICA

■ Recuerde que, al inicio de esta sección, señalamos la importancia de emplear la imaginación y la experiencia para resolver ecuaciones no lineales simultáneas. De hecho, estos tipos de problemas han conducido a algunas de las partes más profundas y difíciles de las matemáticas modernas. Revise de nuevo las gráficas de los ejemplos 1 y 2 de esta sección (figuras 5 y 6). Vemos que el ejemplo 1 tiene dos soluciones y que el ejemplo 2 tiene cuatro. Podríamos conjeturar que el número de soluciones es igual al producto de los grados de las ecuaciones en cuestión. Esta conjetura fue planteada por Etienne Bezout (1739-1783), pero afinar los detalles se llevó cerca de 150 años. Se puede ver que, para lograr el número correcto de intersecciones, hay que contar no sólo las intersecciones numéricas complejas, sino también aquellas que, en cierto sentido, están en el infinito. Por ejemplo, una parábola y una recta sobre el eje de esa parábola se cortan en el vértice y en el infinito. El tema es parte del estudio de la geometría algebraica. ■

PROBLEMA HISTÓRICO

■ 1. Un papiro que data de 1950 a.C., contiene el siguiente problema: Un área dada de 100 unidades debe representarse como la suma de dos cuadrados cuyos lados están en proporción de $1:\frac{3}{4}$. Determine las longitudes de los lados resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x = \frac{3}{4}y \end{cases}$$

■

10.4

Ejercicio 10.4

En los problemas del 1 al 12, haga la gráfica de cada ecuación del sistema y después resuelva éste.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + 2x + y^2 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 + y^2 + 4y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y = x + 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 - x = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x^2 - 2y = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 = y \\ xy = 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x^2 - 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} xy = 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 6x - 13 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$

En los problemas del 13 al 44 resuelva cada sistema. Use el método que desee.

13. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 18 \\ xy = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 \\ x + y = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 16 \\ 2y - x = 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 6y - x = -5 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x^2 - xy + y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x^2 - 3xy + 9y^2 = 15 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2y^2 - 3xy + 6y + 2x + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x^2 - 4y^2 + 7 = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 31 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 5 = 0 \\ 2x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 7x^2 - 3y^2 + 5 = 0 \\ 3x^2 + 5y^2 = 12 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 1 = 0 \\ 2x^2 - 7y^2 + 5 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^2 + 2xy = 10 \\ 3x^2 - xy = 2 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 5xy + 13y^2 + 36 = 0 \\ xy + 7y^2 = 6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - 2y^2 + 8 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} y^2 - x^2 + 4 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 16 \\ 4x^2 - y^2 = 24 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 4x^2 + 3y^2 = 4 \\ 2x^2 - 6y^2 = -3 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{2}{y^2} + 3 = 0 \\ \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 7 \end{cases}$

32. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{y^2} + 1 = 0 \\ \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{7}{y^2} + 2 = 0 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{6}{y^4} = 6 \\ \dfrac{2}{x^4} - \dfrac{2}{y^4} = 19 \end{cases}$

34. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{y^4} = 1 \\ \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{y^4} = 4 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + xy = 6 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ xy + x + 6 = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} xy - x^2 + 3 = 0 \\ 3xy - 4y^2 = 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} 5x^2 + 4xy + 3y^2 = 36 \\ x^2 + xy + y^2 = 9 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26 \\ x - y = 2 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 26 \\ x + y = 2 \end{cases}$

41. $\begin{cases} y^2 + y + x^2 - x - 2 = 0 \\ y + 1 + \dfrac{x-2}{y} = 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + y^2 + 3y - 4 = 0 \\ x - 2 + \dfrac{y^2 - y}{x^2} = 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \log_x y = 3 \\ \log_x(4y) = 5 \end{cases}$

44. $\begin{cases} \log_x(2y) = 3 \\ \log_x(4y) = 2 \end{cases}$

45. La diferencia de dos números es 2 y la suma de sus cuadrados es 10. Determine los números.

46. La suma de dos números es 7 y la diferencia de sus cuadrados es 21. Determine los números.

47. El producto de dos números es 4 y la suma de sus cuadrados es 8. Determine los números.

48. El producto de dos números es 10 y la diferencia de sus cuadrados es 21. Determine los números.

49. La diferencia de dos números es igual a su producto, y la suma de sus recíprocos es 5. Determine los números.

50. La suma de dos números es igual a su producto, y la diferencia de sus recíprocos es 3. Determine los números.

51. La razón entre a y b es $\frac{2}{3}$. La suma de a y b es 10. ¿Cuál es la razón entre $a + b$ y $b - a$?

52. La razón entre a y b es $\frac{4}{3}$. La suma de a y b es 14. ¿Cuál es la razón entre $- b$ y $a + b$?

En los problemas del 53 al 60 haga la gráfica de cada ecuación del sistema. Asegúrese de señalar los puntos de intersección.

53. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$

54. $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$

55. $\begin{cases} y = \sqrt{36 - x^2} \\ y = 8 - x \end{cases}$

56. $\begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

57. $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 2 - x \end{cases}$

58. $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = 6 - x \end{cases}$

59. $\begin{cases} x = 2y \\ x = y^2 - 2y \end{cases}$

60. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

En los problemas del 61 al 66 haga la gráfica de cada ecuación y determine los puntos de intersección, si existen.

61. La recta $x + 2y = 0$ y el círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

62. La recta $x + 2y + 6 = 0$ y el círculo $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

63. El círculo $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ y la parábola $y^2 + 4y - x + 1 = 0$

64. El círculo $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ y la parábola $y^2 - 2y - x - 5 = 0$

65. La gráfica de $y = \dfrac{4}{x - 3}$ y el círculo $x^2 - 6x + y^2 + 1 = 0$

66. La gráfica de $y = \dfrac{4}{x + 2}$ y el círculo $x^2 + 4x + y^2 - 4 = 0$

En los problemas del 67 al 74 resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones. Exprese las soluciones redondeadas a dos cifras decimales.

67. $\begin{cases} y = x^{2/3} \\ y = e^{-x} \end{cases}$

68. $\begin{cases} y = x^{3/2} \\ \end{cases}$

69. $\begin{cases} x^2 + y^3 = 2 \\ x^3 y = 4 \end{cases}$

70. $\begin{cases} x^3 + y^2 = 2 \\ x^2 y = 4 \end{cases}$

71. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 12 \\ xy^2 = 2 \end{cases}$

72. $\begin{cases} x^4 + y^4 = 6 \\ xy = 1 \end{cases}$

73. $\begin{cases} xy = 2 \\ y = \ln x \end{cases}$

74. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \ln x \end{cases}$

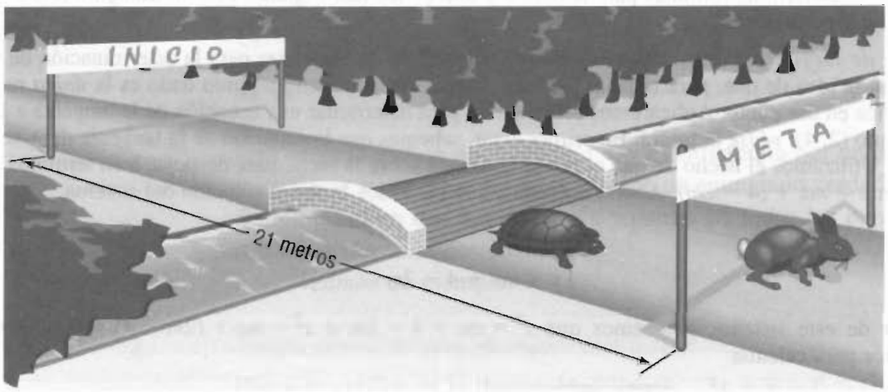
75. *Geometría.* El perímetro de un rectángulo es de 16 pulgadas y su área de 15 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son sus dimensiones?

76. *Geometría.* Hay que encerrar un área de 52 pies cuadrados mediante dos cuadrados cuyos lados están en la razón 2:3. Determine los lados de los cuadrados.

77. *Geometría.* Los perímetros de dos círculos suman 12π centímetros y las áreas suman 20π centímetros cuadrados. Determine los radios de los círculos.

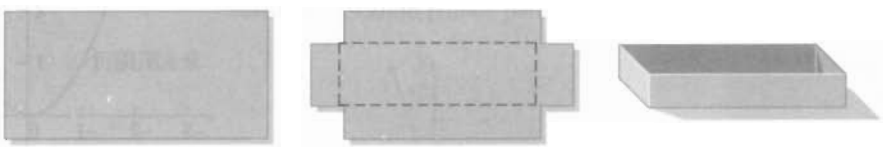
78. *Geometría.* La altura de un triángulo isósceles trazada hasta su base es de 3 centímetros, y su perímetro es de 18 centímetros. Determine la longitud de su base.

79. *La liebre y la tortuga.* En una carrera de 21 metros entre una tortuga y una liebre, la tortuga sale 9 minutos antes que la liebre. La liebre, que corre a una velocidad promedio de 0.5 metros por hora más rápido que la tortuga, cruza la meta 3 minutos antes que la tortuga. ¿Cuáles son las velocidades promedio de la tortuga y la liebre?

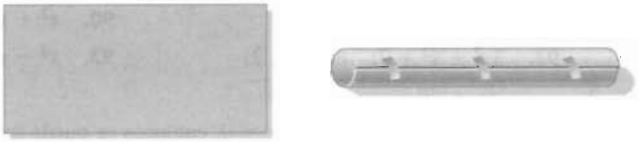


80. *Carreras.* En una carrera de una milla, el ganador cruza la meta 10 pies antes del corredor de segundo lugar y 20 pies antes que el tercero. Si cada corredor mantiene una velocidad constante en toda la carrera, ¿por cuántos pies gana el corredor de segundo lugar al de tercero?

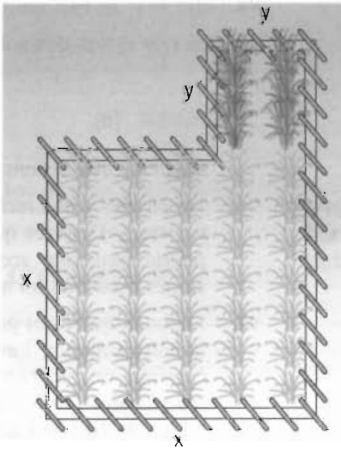
81. *Construcción de una caja.* Un pedazo rectangular de cartulina, cuya área es de 216 centímetros cuadrados, debe formar una caja abierta al cortarle un cuadrado de 2 centímetros en cada esquina y doblar después los lados hacia arriba. *Véase* la figura. Si la caja debe tener un volumen de 224 centímetros cúbicos, ¿con qué tamaño de cartulina hay que comenzar?



82. *Construcción de un tubo cilíndrico.* Un pedazo rectangular de cartulina, cuya área es de 216 centímetros cuadrados, debe formar un tubo cilíndrico al unir dos de sus lados. (*Véase* la figura.) Si el tubo debe tener un volumen de 224 centímetros cúbicos, ¿con qué tamaño de cartulina hay que comenzar?



83. *Cercas.* Un agricultor dispone de 300 pies de cerca para encerrar 4500 pies cuadrados en forma de dos cuadrados adyacentes, con lados de longitudes x y y. *Véase* la figura. Determine x y y.



84. *Alambre.* Un alambre con longitud de 60 pies se corta en dos partes. ¿Es posible doblar una parte para formar un cuadrado y doblar la otra para formar un círculo, de modo que el área total encerrada por las dos partes sea de 100 pies cuadrados? En caso de que así sea, determine la longitud de un lado del cuadrado y el radio del círculo.

85. *Geometría.* Determine fórmulas para la longitud l y la anchura w de un rectángulo en términos de su área A y perímetro P.

86. *Geometría.* Determine fórmulas para la base b y uno de los lados iguales l de un triángulo isósceles en términos de su altura h y perímetro P.

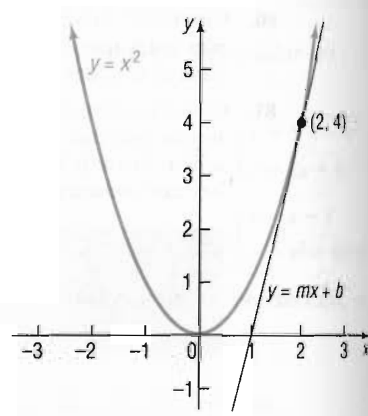
87. *Método de Descartes de las raíces iguales.* El método de Descartes para la determinación de tangentes se relaciona con la idea de que, para muchas gráficas, la recta tangente en un punto dado es la *única* recta que sólo corta a la gráfica en ese punto. Aplicaremos este método para determinar una ecuación de la tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (2, 4); *véase* la figura. En primer lugar, sabemos que la ecuación de la tangente debe ser de la forma $y = mx + b$. Utilizamos el hecho de que el punto (2,4) está sobre la recta, para despejar b en términos de m y obtener la ecuación $y = mx + (4 - 2m)$. Ahora, queremos que (2, 4) sea la *única* solución del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + 4 - 2m \end{cases}$$

A partir de este sistema, obtenemos que $x^2 = mx + 4 - 2m$ o $x^2 - mx + (2m - 4) = 0$. Utilizamos la fórmula cuadrática para calcular

$$x = m \pm \frac{\sqrt{m^2 - 4(2m - 4)}}{2}$$

Para obtener una única solución de x, las dos raíces deben ser iguales; en otras palabras, la expresión $m^2 - 4(2m - 4)$ debe anularse. Concluya el trabajo pertinente para obtener m y escriba una ecuación de la tangente.



En los problemas del 88 al 94, utilice el método de Descartes del problema 87 para determinar la ecuación de la tangente a la gráfica en el punto dado.

88. $x^2 + y^2 = 10$; en (1, 3)
89. $y = x^2 + 2$; en (1, 3)
90. $x^2 + y = 5$; en (−2, 1)
91. $2x^2 + 3y^2 = 14$; en (1, 2)
92. $3x^2 + y^2 = 7$; en (−1, 2)
93. $x^2 - y^2 = 3$; en (2, 1)
94. $2y^2 - x^2 = 14$; en (2, 3)

95. Si r_1 y r_2 son dos soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, entonces se puede mostrar que

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

Resuelva este sistema de ecuaciones en términos der r_1 y r_2.

96. Un círculo y una recta se cortan cuando mucho dos veces. Un círculo y una parábola se cortan un máximo de cuatro veces. Deduzca que un círculo y la gráfica de un polinomio de grado 3 se cortan cuando mucho seis veces. ¿Qué podría conjeturar acerca de un polinomio de grado 4? ¿De un polinomio de grado n? ¿Puede explicar sus conclusiones mediante un argumento algebraico?

97. Suponga que es el gerente de un taller de hojas de metal. Un cliente le pide que fabrique 10,000 cajas abiertas por la parte superior. Las cajas deben tener una base cuadrada y una capacidad de 9 pies cúbicos. Usted las construye cortando un cuadrado en cada esquina de una hoja cuadrada de metal, y doblando los lados hacia arriba.

(a) ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado que se debe utilizar para cada caja si el área total de la hoja metálica es de 100 pies cuadrados?

(b) ¿Podría fabricar las cajas con una pieza más pequeña de hoja metálica? Forme una lista con las dimensiones de una caja para diversos tamaños de hoja metálica.

10.5 Sistemas de desigualdades

En el capítulo 1 analizamos las desigualdades en una variable. En esta sección analizaremos las desigualdades en dos variables. El ejemplo 1 muestra algunos casos.

EJEMPLO 1 *Casos de desigualdades en dos variables*

(a) $3x + y - 6 < 0$ (b) $x^2 + y^2 < 4$ (c) $y^2 \leq x$ ■

Una desigualdad en dos variables x, y es **satisfecha** por un par ordenado (a,b) si, al reemplazar x por a y y por b, se obtiene un enunciado verdadero. La **gráfica de una desigualdad en dos variables** x y y consta de todos los puntos (x,y) cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad.

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2 *Graficación de una desigualdad lineal*

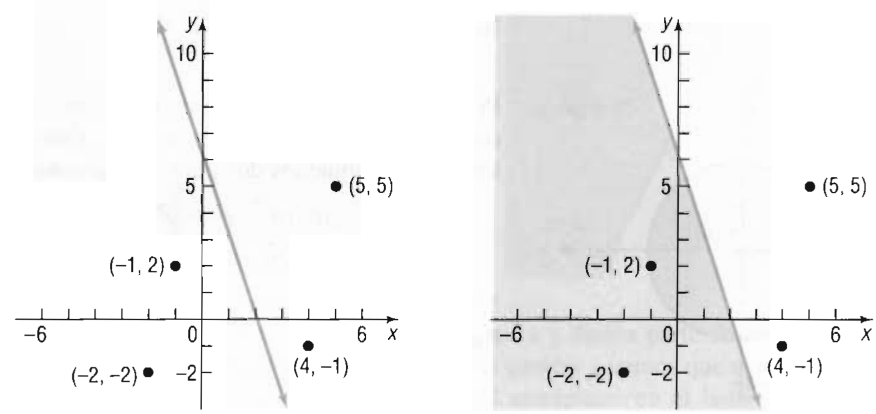
Hacer la gráfica de la desigualdad lineal: $3x + y - 6 \leq 0$

Solución Comenzamos con el problema asociado de hacer la gráfica de la igualdad lineal

$$3x + y - 6 = 0$$

formada al reemplazar (por el momento) el símbolo ≤ por un signo =. La gráfica de la ecuación lineal es una recta. *Véase* la figura 9(a). Esta recta es parte de la desigualdad que buscamos pues la desigualdad no es estricta. (¿Puede advertir por qué? Porque estamos buscando puntos para los cuales $3x + y - 6$ es menor *o igual que* 0.)

FIGURA 9



(a) $3x + y - 6 = 0$ **(b)** Gráfica de $3x + y - 6$ 0

Ahora verificaremos algunos puntos elegidos al azar para ver si pertenecen a la gráfica de la desigualdad.

	$3x + y - 6$	CONCLUSIÓN
$(4, -1)$	$3(4) + (-1) - 6 = 5 > 0$	No pertenece a la gráfica
$(5, 5)$	$3(5) + 5 - 6 = 14 > 0$	No pertenece a la gráfica
$(-1, 2)$	$3(-1) + 2 - 6 = -7 < 0$	Pertenece a la gráfica
$(-2, -2)$	$3(-2) + (-2) - 6 = -14 < 0$	Pertenece a la gráfica

Observe de nuevo la figura 9(a). Advierta que los dos puntos que pertenecen a la gráfica están (ambos) del mismo lado de la recta, y los dos puntos que no pertenecen a la gráfica están del lado opuesto. Como puede verse, éste será siempre el caso. Así, la gráfica buscada consta de todos los puntos que están del mismo lado de la recta que $(-1, 2)$ y $(-2, -2)$. La gráfica buscada es la región sombreada de la figura 9(b). ■

Podemos obtener la gráfica de cualquier desigualdad en dos variables de manera similar. En primer lugar, hacemos la gráfica de la ecuación correspondiente a la desigualdad, utilizando líneas punteadas si la desigualdad es estricta y con líneas continuas si no es estricta. Esta gráfica, en la mayor parte de los casos, separará el plano xy en dos o más regiones. En cada región, todos los puntos satisfacen la desigualdad o ningún punto la satisface. Así, sólo hay que verificar un punto de prueba para ver si los puntos de esa región son parte de la gráfica o no. Los pasos a seguir aparecen a continuación.

Pasos para hacer la gráfica de una desigualdad

PASO 1: Reemplazar el símbolo de desigualdad por un signo de igualdad y hacer la gráfica de la ecuación resultante. Si la desigualdad es estricta, utilizar una línea punteada; si no lo es, utilizar una línea continua. Esta gráfica separa al plano xy en dos o más regiones.

PASO 2: En cada una de las regiones, elija un punto de prueba P.

(a) Si las coordenadas de P satisfacen la desigualdad, entonces también la satisfacen todos los puntos de esa región. Indicar esto sombreando la región.

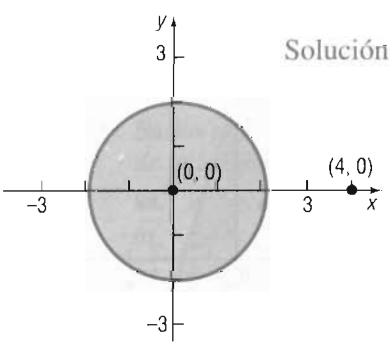
(b) Si las coordenadas de P no satisfacen la desigualdad, entonces ninguno de los puntos de esa región la satisface.

EJEMPLO 3

Graficación de una desigualdad

Hacer la gráfica de: $x^2 + y^2 \leq 4$

FIGURA 10



Solución Primero hacemos la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, un círculo de radio 2, con centro en el origen. Utilizaremos una línea continua pues la desigualdad no es estricta. Seleccionamos dos puntos de prueba, uno dentro del círculo y otro fuera:

Dentro	$(0, 0)$:	$x^2 + y^2 = 0^2 + 0^2 = 0 \leq 4$	Pertenece a la gráfica
Fuera	$(4, 0)$:	$x^2 + y^2 = 4^2 + 0^2 = 16 > 4$	No pertenece a la gráfica

Todos los puntos dentro y sobre el círculo satisfacen la desigualdad. *Véase* la figura 10. ■

■ Ahora resuelva el problema 7.

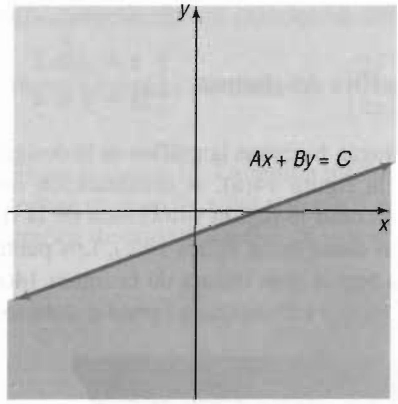
Las desigualdades lineales presentan alguna de las formas siguientes:

$$Ax + By < C, \qquad Ax + By > C, \qquad Ax + By \leq C, \qquad Ax + By \geq C$$

La gráfica de la ecuación correspondiente a una desigualdad lineal es una recta que separa el plano xy en dos regiones, llamadas **semiplanos.** *Véase* la figura 11.

Como se muestra en la figura, si $Ax + By = C$ es la ecuación de la recta frontera, entonces ésta divide al plano en dos semiplanos; en uno de ellos, $Ax + By < C$ y en el otro $Ax + By > C$. Debido a esto, sólo es necesario un punto de prueba para las desigualdades lineales.

FIGURA 11



E J E M P L O 4 *Graficación de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica de: (a) $y < 2$ (b) $y \geq 2x$

Solución (a) La gráfica de la ecuación $y = 2$ es una recta horizontal y no forma parte de la gráfica de la desigualdad. Como (0,0) satisface la desigualdad, la gráfica consta del semiplano por debajo de la recta $y = 2$. *Véase* la figura 12.

FIGURA 12

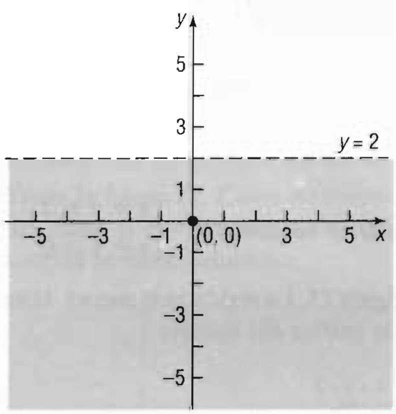
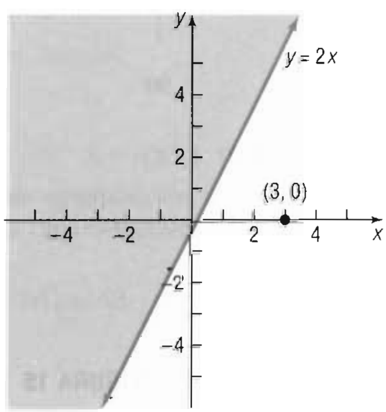


FIGURA 13



(b) La gráfica de la ecuación $y = 2x$ es una recta y forma parte de la gráfica de la desigualdad. Utilizamos (3,0) como punto de prueba y vemos que no satisface la desigualdad $[0 < 2 \cdot 3]$. Así, los puntos del semiplano en el lado opuesto de $y = 2x$ satisfacen la desigualdad. *Véase* la figura 13. ■

■ Ahora resuelva el problema 3.

Sistemas de desigualdades con dos variables

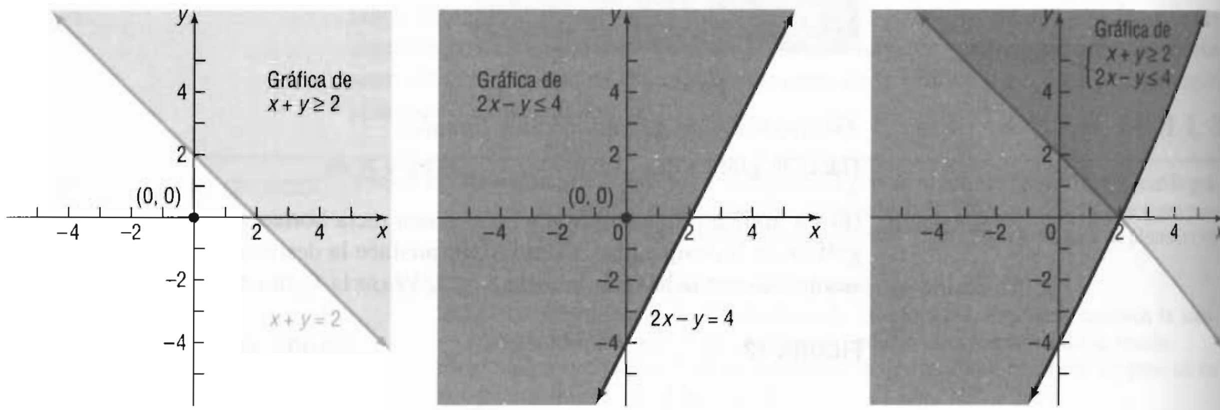
La **gráfica de un sistema de desigualdades** con dos variables x, y es el conjunto de todos los puntos (x,y) que satisfacen en forma simultánea *cada una* de las desigualdades del sistema. Así, podemos obtener la gráfica de un sistema de desigualdades haciendo la gráfica de cada desigualdad en forma individual y determinando entonces si se cortan.

EJEMPLO 5 *Graficación de un sistema de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$

Solución En primer lugar, hacemos la gráfica de la desigualdad $x + y \geq 2$ como la región sombreada de la figura 14(a). A continuación hacemos la gráfica de la desigualdad $2x - y \leq 4$ como la región sombreada de la figura 14(b). Ahora superponemos las dos gráficas como en la figura 14(c). Los puntos que están en ambas regiones sombreadas [la región más oscura de la figura 14(c)] son las soluciones que estábamos buscando, ya que satisfacen en forma simultánea cada desigualdad lineal del sistema.

FIGURA 14

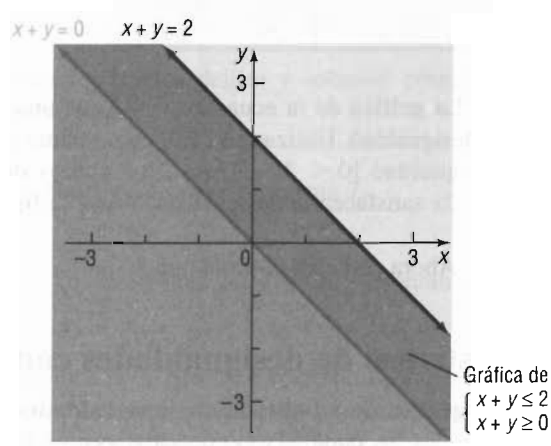


EJEMPLO 6 *Graficación de un sistema de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x + y \geq 0 \end{cases}$

Solución *Véase* la figura 15. La región más oscura, la superposición, entre las dos rectas fronterizas es la gráfica del sistema.

FIGURA 15



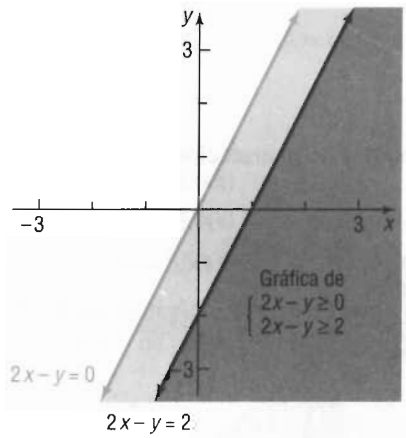
Ahora resuelva el problema 25.

EJEMPLO 7 *Graficación de un sistema de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$

Solución *Véase* la figura 16. La región más oscura, la superposición, entre las dos rectas fronterizas es la gráfica del sistema. Observe que la gráfica del sistema es idéntica a la gráfica de la desigualdad $2x - y \geq 2$.

FIGURA 16

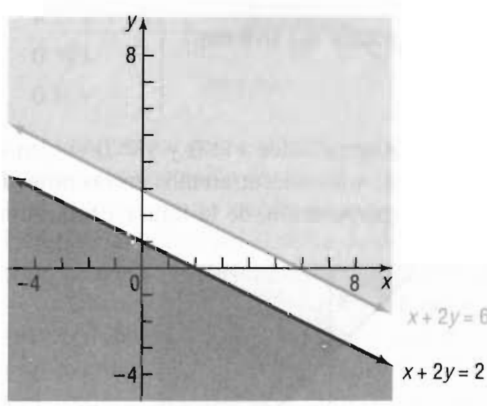


EJEMPLO 8 *Graficación de un sistema de desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} x + 2y \leq 2 \\ x + 2y \geq 6 \end{cases}$

Solución *Véase* la figura 17. Como no existe una región de superposición, no existen puntos del plano xy que satisfagan en forma simultánea cada desigualdad. Por lo tanto, el sistema no tiene solución.

FIGURA 17



EJEMPLO 9 *Graficación de un sistema de desigualdades*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$

Solución La figura 18 muestra que la gráfica del sistema consta de la región encerrada por las gráficas de la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta $x + y = 2$. Determinamos los puntos de intersección de las dos ecuaciones resolviendo el sistema de ecuaciones

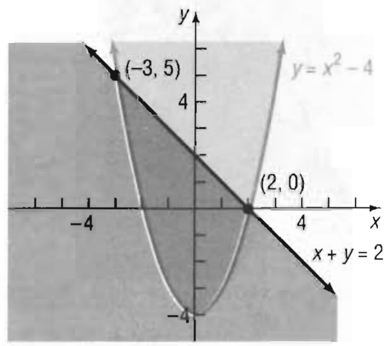
$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Utilizamos sustitución para encontrar

$$\begin{aligned} x + (x^2 - 4) &= 2 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x + 3)(x - 2) &= 0 \\ x = -3, \qquad x &= 2 \end{aligned}$$

Los dos puntos de intersección son $(-3, 5)$ y $(2, 0)$.

FIGURA 18



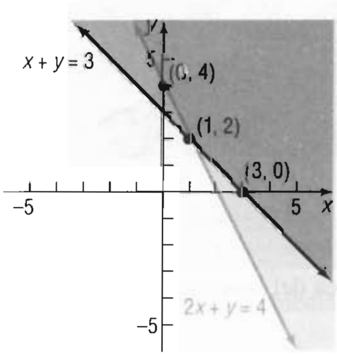
■ Ahora resuelva el problema 19.

EJEMPLO 10 *Graficación de un sistema de cuatro desigualdades lineales*

Hacer la gráfica del sistema: $\begin{cases} x + y \geq 3 \\ 2x + y \geq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Solución Las dos desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ exigen que la gráfica esté en el primer cuadrante. Así, nos concentraremos en las otras dos desigualdades. La región más oscura, la superposición, de la figura 19 muestra la gráfica del sistema.

FIGURA 19



EJEMPLO 11 *Planeación financiera*

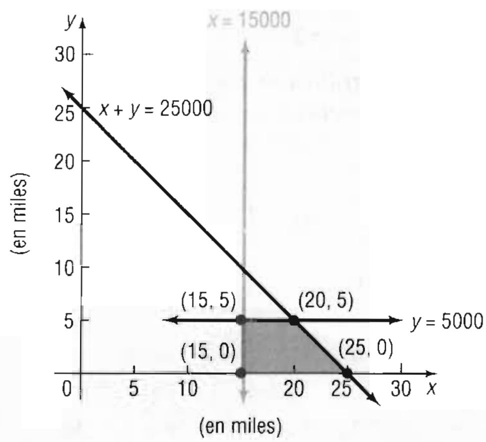
Una pareja retirada puede invertir hasta \$25,000.00. Como asesor financiero, usted recomienda que deben colocar al menos \$15,000.00 en bonos del gobierno, que rinden el 6%, y cuando mucho \$5000.00 en bonos empresariales que rinden un 9 por ciento.
(a) Utilice x para denotar la cantidad de dinero invertido en bonos del gobierno y y para la cantidad invertida en bonos empresariales; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa las cantidades posibles de cada inversión.
(b) Haga la gráfica del sistema.

Solución (a) El sistema de desigualdades lineales es

$$\begin{cases} x \geq 0 & \\ y \geq 0 & x \text{ y } y \text{ son variables no negativas, pues representan el dinero invertido.} \\ x + y \leq 25{,}000 & \text{El total de las dos inversiones, } x + y\text{, no puede exceder de \$25,000.} \\ x \geq 15{,}000 & \text{Al menos \$15,000 en bonos del gobierno} \\ y \leq 5000 & \text{Cuando mucho \$5000 en bonos empresariales} \end{cases}$$

(b) *Véase* la región sombreada en la figura 20. Observe que las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ de nuevo exigen que la gráfica del sistema esté en el primer cuadrante.

FIGURA 20



La gráfica del sistema de desigualdades en la figura 20 está **acotada,** ya que puede estar contenida dentro de un círculo con un radio lo suficientemente grande. Una gráfica que no puede estar contenida en círculo alguno es **no acotada.** Por ejemplo, la gráfica del sistema de desigualdades lineales en la figura 19 es no acotada, ya que se extiende de manera indefinida en una dirección particular.

Observe, en las figuras 19 y 20, que los puntos de la gráfica pertenecientes a la intersección de las fronteras han sido resaltados. Tales puntos son los **vértices** o **esquinas** de la gráfica. Así, el sistema cuya gráfica aparece en la figura 19 tiene tres vértices: (0,4), (1,2) y (3,0). El sistema de la figura 20 tiene cuatro vértices: (15.0), (25.0), (20,5) y (15,5).

Utilizaremos estas ideas en la siguiente sección para desarrollar un método que permita solucionar problemas de programación lineal, una aplicación muy importante de las desigualdades lineales.

Ahora resuelva el problema 33.

10.5

Ejercicio 10.5

En los problemas del 1 al 12 haga la gráfica de cada desigualdad.

1. $x \geq 0$ **2.** $y \geq 0$ **3.** $x \geq 4$ **4.** $y \leq 2$

5. $2x + y \geq 6$ **6.** $3x + 2y \leq 6$ **7.** $x^2 + y^2 > 1$ **8.** $x^2 + y^2 \leq 9$

9. $y \leq x^2 - 1$ **10.** $y > x^2 + 2$ **11.** $xy \geq 4$ **12.** $xy \leq 1$

En los problemas del 13 al 30 haga la gráfica de cada sistema de desigualdades.

13. $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} 3x - y \geq 6 \\ x + 2y \leq 2 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ 3x + 2y \geq -6 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 4x - 5y \leq 0 \\ 2x - y \geq 2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - 3y \leq 0 \\ 3x + 2y \leq 6 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 4x - y \geq 2 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 9 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y \geq x^2 - 4 \\ y \leq x - 2 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} y^2 \leq x \\ y \geq x \end{cases}$ **23.** $\begin{cases} xy \geq 4 \\ y \geq x^2 + 1 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} y + x^2 \leq 1 \\ y \geq x^2 - 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x - 2y \leq 6 \\ 2x - 4y \geq 0 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x + 4y \leq 8 \\ x + 4y \geq 4 \end{cases}$ **27.** $\begin{cases} 2x + y \geq -2 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x - 4y \leq 4 \\ x - 4y \geq 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ 2x + 3y \leq 0 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$

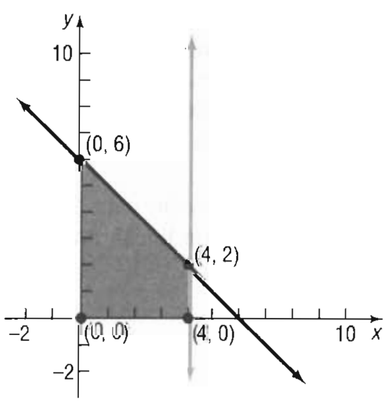
En los problemas del 31 al 40 haga la gráfica de cada sistema de desigualdades lineales. Indique si la gráfica está acotada o no, y señale los vértices.

31. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$ **33.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ 2x + y \geq 4 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$ **35.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ 3x + y \leq 12 \end{cases}$

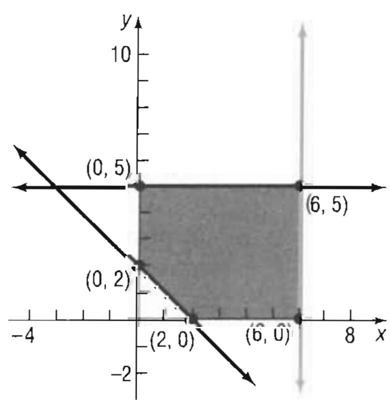
36. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 10 \\ 2x + y \leq 3 \end{cases}$ **37.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \\ x + 2y \geq 1 \end{cases}$ **39.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 1 \\ x + 2y \leq 10 \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 1 \\ x + 2y \leq 10 \\ x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \end{cases}$

En los problemas del 41 al 44 escriba un sistema de desigualdades lineales que tenga la gráfica dada.

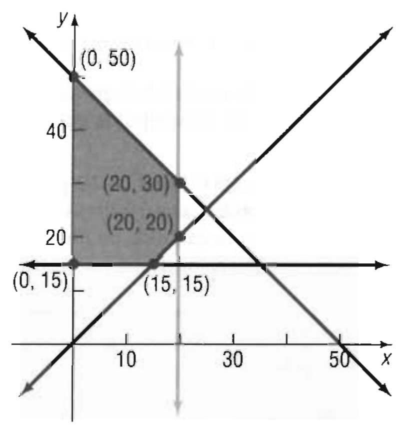
41.



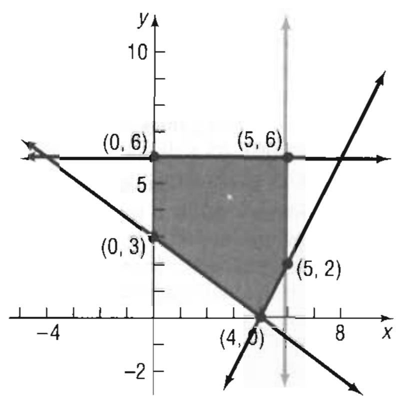
42.



43.



44.



45. *Planeación financiera.* Una pareja retirada puede invertir hasta \$50,000.00. Como asesor financiero, usted recomienda que deben colocar al menos \$35,000.00 en bonos gubernamentales que rinden un 7% y, cuando mucho, \$10,000.00 en bonos empresariales que rinden el 10 por ciento.

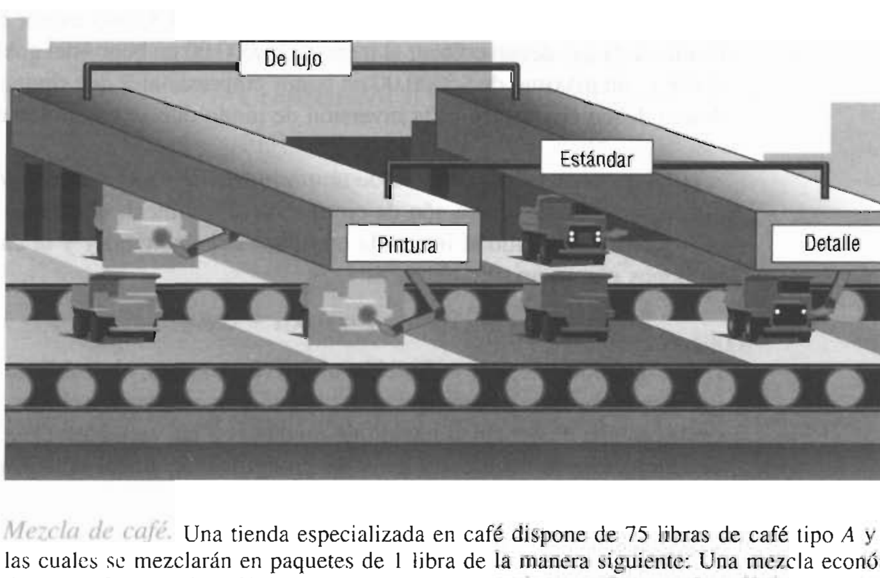
(a) Utilice x para denotar la cantidad de dinero invertido en bonos del gobierno y y para la cantidad invertida en bonos empresariales; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa las cantidades posibles de cada inversión.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

46. *Fabricación de camiones.* Un fabricante de camiones de juguete manufactura de dos tipos: un modelo estándar y otro de lujo. Cada modelo estándar requiere 2 horas para pintura y 3 horas para trabajo de detalle; cada modelo de lujo requiere 3 horas para pintura y 4 horas para trabajo de detalle. La compañía contrata dos pintores y tres trabajadores de detalle, y cada uno trabaja 40 horas a la semana.

(a) Utilice x para denotar la cantidad de camiones de modelo estándar y y para la cantidad de modelos de lujo; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa las cantidades posibles de cada modelo que pueden fabricarse en una semana.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.



47. *Mezcla de café.* Una tienda especializada en café dispone de 75 libras de café tipo A y 120 libras de café tipo B, las cuales se mezclarán en paquetes de 1 libra de la manera siguiente: Una mezcla económica, con 4 onzas de café tipo A y 12 onzas de café tipo B, y una mezcla superior, con 8 onzas de café tipo A y 8 onzas de café tipo B.

(a) Utilice x para denotar la cantidad de paquetes de la mezcla económica y y para la cantidad de paquetes de la mezcla superior; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la cantidad posible de paquetes de cada tipo de mezcla.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

48. *Mezcla de nueces.* Una tienda especializada tiene 90 libras de nueces y 120 libras de cacahuates, las cuales se mezclarán en paquetes de 12 onzas como sigue: un paquete de bajo precio con 8 onzas de cacahuates y 4 de nueces, y un paquete de calidad, con 6 onzas de cacahuates y 6 de nueces.

(a) Utilice x para denotar la cantidad de paquetes de bajo precio y y para la cantidad de paquetes de calidad. Escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la cantidad posible de cada tipo de paquete.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

49. *Transporte de artículos.* Un camión pequeño puede transportar no más de 1600 libras o 150 pies cúbicos. Una impresora pesa 20 libras y ocupa 3 pies cúbicos de espacio. Un horno de microondas pesa 30 libras y ocupa 2 pies cúbicos.

(a) Utilice x para representar la cantidad de hornos de microondas y y para la cantidad de impresoras; escriba un sistema de desigualdades lineales que describa la cantidad de hornos e impresoras que puede transportar el camión.

(b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

10.6 Programación lineal

Desde el punto de vista histórico, la programación lineal surgió como una técnica para resolver problemas relacionados con la distribución de artículos y materiales para la Fuerza Aérea de Estados Unidos durante la Segunda Guerra Mundial. Hoy en día, las técnicas de programación lineal se utilizan para resolver una amplia gama de problemas, como la optimización de la distribución de los vuelos en las líneas aéreas y el establecimiento de redes telefónicas. Aunque la mayor parte de los problemas prácticos de programación lineal utilizan sistemas de varios cientos de desigualdades lineales con varios cientos de variables, nos limitaremos al análisis de problemas con sólo dos variables, ya que podemos resolver tales problemas con técnicas de graficación.*

Comenzaremos con el ejemplo 11 de la sección anterior.

EJEMPLO 1 *Planeación financiera*

Una pareja retirada puede invertir hasta $25,000.00. Como asesor financiero, usted recomienda que deben colocar al menos $15,000.00 en bonos del gobierno que rinden el 6% y un máximo de $5000.00 en bonos empresariales que rinden el 9%. ¿Cuánto dinero deben colocar en cada inversión de modo que se maximice el ingreso? ■

Este es un ejemplo típico de un *problema de programación lineal.* El problema requiere la maximización de cierta expresión lineal, el ingreso. Si I representa el ingreso, x la cantidad invertida en bonos del gobierno y y la cantidad invertida en bonos empresariales, entonces

$$I = 0.06x + 0.09y$$

Esta expresión lineal es la **función objetivo.** Además, el problema exige que el ingreso máximo se alcance bajo ciertas condiciones o **restricciones,** cada una de las cuales es una desigualdad lineal que involucra a las variables. (*Véase* el ejemplo 11 de la sección 10.5.) El problema de programación lineal del ejemplo 1 se puede enunciar de nuevo como

Maximizar $\quad I = 0.06x + 0.09y$

sujeta a las condiciones

*El **método simplex** es una forma de resolver problemas de programación lineal con muchas desigualdades y variables. Fue desarrollado por George Dantzig en 1946 y es particularmente adecuado para usarlo en computadoras. En 1984 Narendra Karmarkar, de los laboratorios Bell, descubrió una forma para resolver problemas de programación lineal de gran tamaño que mejora el método simplex.

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$
$$x + y \leq 25{,}000$$
$$x \geq 15{,}000$$
$$y \leq 5000$$

En general, todo problema de programación lineal tiene dos componentes:

1. Una función objetivo, lineal, que debe maximizarse o minimizarse.
2. Una colección de desigualdades lineales que deben satisfacerse en forma simultánea.

Problema de programación lineal

Un **problema de programación lineal** en dos variables *x*, *y* consiste en maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal

$$z = Ax + By, \qquad A \text{ y } B \text{ son números reales, que no se anulan en forma simultánea}$$

sujeta a ciertas condiciones, o restricciones, que pueden expresarse como desigualdades lineales en *x* y *y*.

Para maximizar (o minimizar) la cantidad $z = Ax + By$, debemos identificar los puntos (x,y) que hacen a la expresión para z lo más grande (o lo más pequeña) posible. Pero no todos los puntos (x,y) son elegibles; sólo se pueden utilizar aquellos que además satisfacen cada desigualdad lineal (restricción). Cada punto (x,y) que satisface el sistema de desigualdades lineales (las restricciones) es un **punto factible.** Así, en un problema de programación lineal, buscamos el punto (o puntos) factible que maximiza (o minimiza) la función objetivo.

Observemos de nuevo el problema de programación lineal del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 *Análisis de un problema de programación lineal*

Consideremos el problema de programación lineal:

Maximizar $\quad I = 0.06x + 0.09y$

sujeta a las condiciones

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0$$
$$x + y \leq 25{,}000$$
$$x \geq 15{,}000$$
$$y \leq 5000$$

Haga la gráfica de las restricciones. Después haga la gráfica de la función objetivo para $I = 0, 0.9, 1.35, 1.65,$y 1.8.

Solución La figura 21 muestra la gráfica de las restricciones. Sobre esta gráfica superponemos la de la función objetivo para los valores dados de I.

Para $I = 0$, la función objetivo es la recta $0 = 0.06x + 0.09y$.

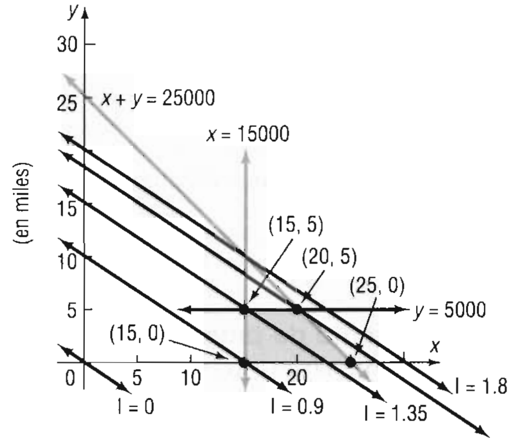
Para $I = 0.9$, la función objetivo es la recta $0.9 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 1.35$, la función objetivo es la recta $1.35 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 1.65$, la función objetivo es la recta $1.65 = 0.06x + 0.09y$.

Para $I = 1.8$, la función objetivo es la recta $1.8 = 0.06x + 0.09y$.

FIGURA 21



Una **solución** de un problema de programación lineal consta del punto (o puntos) factible que maximiza (o minimiza) la función objetivo, además del valor correspondiente de la función objetivo. Una condición para que un problema de programación lineal en dos variables tenga una solución es que la gráfica de los puntos factibles esté acotada. (Consulte la página 669.)

Si ninguno de los puntos factibles maximiza (o minimiza) la función objetivo, o si no existen puntos factibles, entonces el problema de programación lineal no tiene solución.

Considere el problema de programación lineal enunciado en el ejemplo 2 y observe de nuevo la figura 21. Los puntos factibles son los que están en la región sombreada. Por ejemplo, (20,3) es un punto factible, al igual que (15,5), (20,5), (18,4), etc. Para determinar la solución del problema, debemos encontrar un punto factible (x,y) que haga $I = 0.06x + 0.09y$ tan grande como sea posible. Observe que cuando I aumenta su valor de $I = 0$ a $I=0.9$ a $I = 1.35$ a $I = 1.65$ a $I = 1.8$, obtenemos una colección de rectas paralelas. Además, observe que el máximo valor de I que se puede obtener con los puntos factibles presentes es $I = 1.65$, que corresponde a la recta $1.65 = 0.06x + 0.09y$. Cualquier valor mayor de I produce una recta que no pasa por ningún punto factible. Por último, observe que el punto factible que produce $I = 1.65$ es el punto (20,5), un vértice. Estas observaciones son la base del siguiente resultado, que enunciamos sin demostración.

Teorema localización de la solución de un problema de programación lineal

Si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta se localiza en un vértice de la gráfica de los puntos factibles.

Si un problema de programación lineal tiene varias soluciones, al menos una de ellas está en un vértice de la gráfica de los puntos factibles.

En cualquier caso, el valor correspondiente de la función objetivo es único. ■

En este libro no consideraremos problemas de programación lineal sin solución. Como resultado, podemos resumir el procedimiento para resolver un problema de programación lineal como sigue:

Procedimiento para resolver un problema de programación lineal

PASO 1: Escribir una expresión para la cantidad por maximizar (o minimizar). Esta expresión es la función objetivo.
PASO 2: Escribir todas las restricciones como un sistema de desigualdades lineales y hacer la gráfica del sistema.
PASO 3: Enlistar los vértices de la gráfica de los puntos factibles.
PASO 4: Enlistar los valores correspondientes de una función objetivo en cada vértice. El mayor (o menor) de estos es la solución.

EJEMPLO 3 *Solución de un problema de programación lineal*

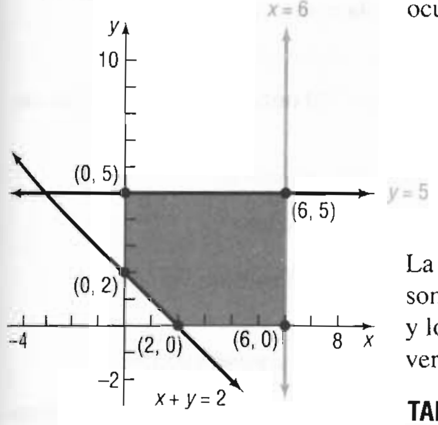
Minimizar la expresión

$$z = 2x + 3y$$

sujeta a las restricciones

$$y \leq 5, \quad x \leq 6, \quad x + y \geq 2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

FIGURA 22



Solución La función objetivo es $z = 2x + 3y$. Buscamos el valor mínimo de z que puede ocurrir, si x y y son soluciones del sistema de desigualdades lineales

$$\begin{cases} y \leq 5 \\ x \leq 6 \\ x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La figura 22 muestra la gráfica de este sistema (los puntos factibles) como la región sombreada. También hemos indicado los vértices. La tabla 2 enumera los vértices y los valores correspondientes de la función objetivo. A partir de esa tabla podemos ver que el valor mínimo de z es 4, y que ocurre en el punto (2,0).

TABLA 2

ESQUINA	VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
(x, y)	$z = 2x + 3y$
(0, 2)	$z = 2(0) + 3(2) = 6$
(0, 5)	$z = 2(0) + 3(5) = 15$
(6, 5)	$z = 2(6) + 3(5) = 27$
(6, 0)	$z = 2(6) + 3(0) = 12$
(2, 0)	$z = 2(2) + 3(0) = 4$

■

■ Ahora resuelva los problemas 3 y 9.

EJEMPLO 4 *Maximización de la ganancia*

Al final de cada mes, después de surtir los pedidos de sus clientes regulares, a una compañía de café le sobra cierta cantidad de café puro de Colombia y de café especial. La práctica de la compañía ha sido empaquetar una mezcla de los dos cafés en paquetes de una libra de la manera siguiente: una mezcla de menor calidad con 4 onzas de café de Colombia y 12 onzas de café especial, y otra mezcla de mayor calidad con 8 onzas de café de Colombia y 8 onzas de café especial. Así logra una ganancia de \$0.30 por paquete de mezcla de menor calidad, y una ganancia de \$0.40 por paquete de mezcla de mayor calidad. Este mes sobraron 120 libras de café especial y 100 de café de Colombia. ¿Cuántos paquetes de cada mezcla hay que preparar para lograr la ganancia máxima? Suponga que se venden todos los paquetes preparados.

Solución Comenzamos asignando símbolos a las dos variables:

x = Cantidad de paquetes de la mezcla de menor calidad

y = Cantidad de paquetes de la mezcla de mayor calidad

Si P denota la ganancia, entonces

$$P = \$0.30x + \$0.40y$$

Esta expresión es la función objetivo. Queremos maximizar P sujeta a ciertas restricciones sobre x y y. Como x y y representan cantidades de paquetes, los únicos valores para x y y que tienen sentido son los enteros no negativos. Así, tenemos las dos restricciones

$$x \geq 0, \qquad y \geq 0 \quad \text{Restricciones no negativas}$$

También sabemos la cantidad de café disponible. Por ejemplo, la cantidad total de café de Colombia utilizado en las dos mezclas no puede exceder las 100 libras, o 1600 onzas. Como utilizamos 4 onzas en cada paquete de menor calidad y 8 onzas en cada paquete de mayor calidad, esto produce la restricción

$$4x + 8y \leq 1600 \quad \text{Restricción del café de Colombia}$$

De manera análoga, la existencia de 120 libras, o 1920 onzas, de café especial conduce a la restricción

$$12x + 8y \leq 1920 \quad \text{Restricción del café especial}$$

Podemos enunciar el problema de programación lineal como

$$\text{Maximizar} \quad P = 0.3x + 0.4y$$

sujeta a las restricciones

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 4x + 8y \leq 1600, \quad 12x + 8y \leq 1920$$

La figura 23 muestra la gráfica de las restricciones (los puntos factibles). Enlistamos los vértices y evaluamos la función objetivo en cada una. En la tabla 3 podemos ver que la ganancia máxima, \$84.00, se logra con 40 paquetes de la mezcla de menor calidad y 180 paquetes de la mezcla de mayor calidad.

FIGURA 23

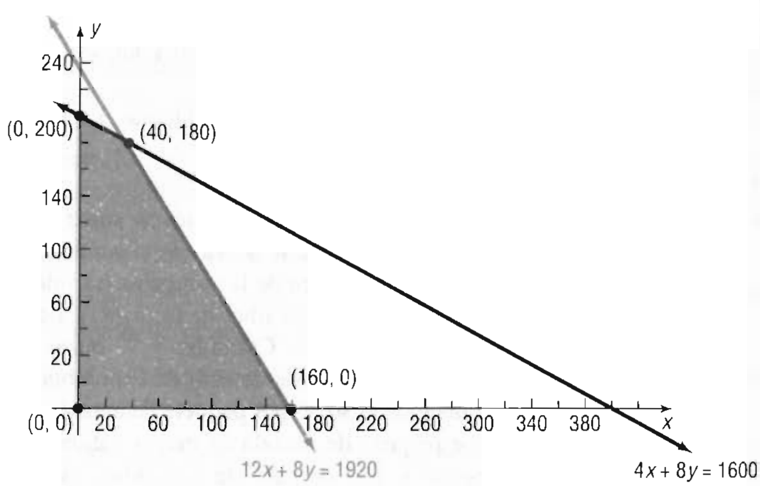


TABLA 3

ESQUINA	VALOR DE LA GANANCIA
(x, y)	$P = 0.3x + 0.4y$
$(0, 0)$	$P = 0$
$(0, 200)$	$P = 0.3(0) + 0.4(200) = \$80$
$(40, 180)$	$P = 0.3(40) + 0.4(180) = \$84$
$(160, 0)$	$P = 0.3(160) + 0.4(0) = \$48$

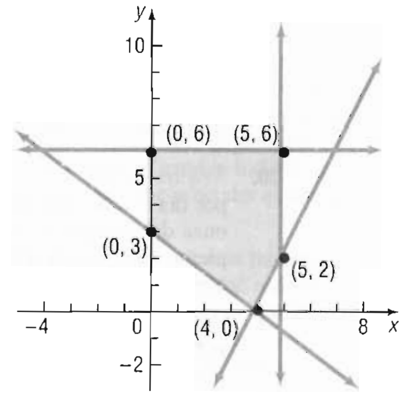
■ Ahora resuelva el problema 17.

10.6

Ejercicio 10.6

En los problemas del 1 al 6 determine los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada.

La figura ilustra la gráfica de los puntos factibles de un problema de programación lineal.



1. $z = x + y$ **2.** $z = 2x + 3y$ **3.** $z = x + 10y$

4. $z = 10x + y$ **5.** $z = 5x + 7y$ **6.** $z = 7x + 5y$

En los problemas del 7 al 16 resuelva cada problema de programación lineal.

7. Maximice $z = 2x + y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $x + y \geq 1$

8. Maximice $z = x + 3y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 3$, $x \leq 5$, $y \leq 7$

9. Minimice $z = 2x + 5y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 2$, $x \leq 5$, $y \leq 3$

10. Minimice $z = 3x + 4y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \geq 6$, $x + y \leq 8$

11. Maximice $z = 3x + 5y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 2$, $2x + 3y \leq 12$, $3x + 2y \leq 12$

12. Maximice $z = 5x + 3y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 2$, $x + y \leq 8$, $2x + y \leq 10$

13. Minimice $z = 5x + 4y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 2$, $2x + 3y \leq 12$, $3x + y \leq 12$

14. Minimice $z = 2x + 3y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 3$, $x + y \leq 9$, $x + 3y \geq 6$

15. Maximice $z = 5x + 2y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 10$, $2x + y \geq 10$, $x + 2y \geq 10$

16. Maximice $z = 2x + 4y$ sujeta a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + y \geq 4$, $x + y \leq 9$

17. *Maximización de la ganancia.* Un fabricante de esquíes produce dos tipos: descenso y campo traviesa. Utilice la tabla siguiente para determinar la cantidad de esquíes de cada tipo que deben producirse para obtener una ganancia máxima. ¿Cuál es la ganancia máxima? ¿Cuál sería la ganancia máxima si el tiempo disponible para la fabricación aumentara a 48 horas?

	DESCENSO	CAMPO TRAVIESA	TIEMPO MÁXIMO DISPONIBLE
Tiempo de fabricación por esquí	2 horas	1 hora	40 horas
Tiempo de acabado por esquí	1 hora	1 hora	32 horas
Ganancia por esquí	\$70	\$50	

18. *Administración de una granja.* Un agricultor tiene 70 acres de tierra disponibles para plantar soya o trigo. El costo de preparación del suelo, los días necesarios y la ganancia esperada por acre plantado para cada tipo de cosecha aparecen en la tabla siguiente:

	SOYA	TRIGO
Costo de preparación por acre	\$60	\$30
Días de trabajo necesarios por acre	3	4
Ganancias por acre	\$180	\$100

El agricultor no puede gastar más de \$1800.00 en costos de preparación ni más de 120 días de trabajo en total. ¿Cuántos acres de cada cosecha debe plantar para maximizar la ganancia? ¿Cuál es la ganancia máxima? ¿Cuál sería la ganancia máxima si el agricultor estuviera dispuesto a gastar hasta \$2400.00 en la preparación del terreno?

19. *Administración de una granja.* Una granja pequeña tiene 100 acres de tierra disponibles para la siembra de maíz y soya. La tabla siguiente muestra el costo de cultivo por acre, el costo de la mano de obra por acre, y la ganancia esperada por acre. La columna de la derecha muestra la cantidad de dinero disponible para cada uno de estos gastos. Determine el número de acres de cada cosecha que deben plantarse para maximizar la ganancia.

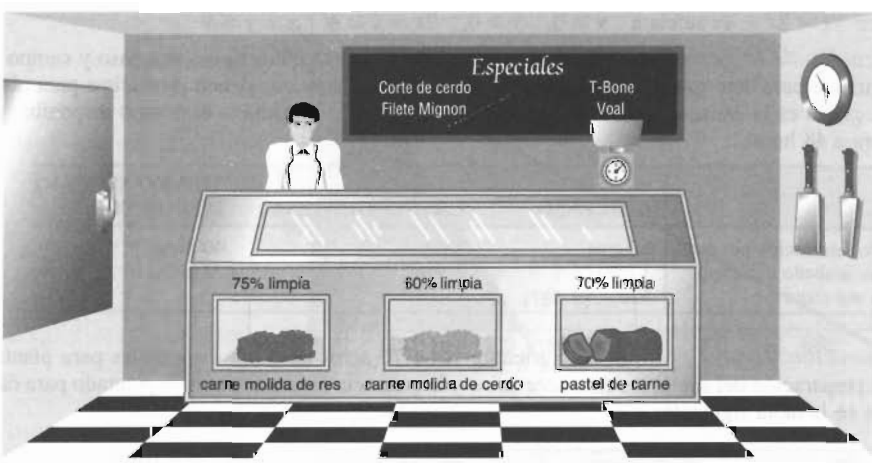
	SOYA	MAÍZ	DINERO DISPONIBLE
Costo de cultivo por acre	\$40	\$60	\$1800
Costo de mano de obra por acre	\$60	\$60	\$2400
Ganancia por acre	\$200	\$250	

20. *Requisitos de una dieta.* Cierta dieta exige al menos 60 unidades de carbohidratos, 45 de proteína y 30 de grasa por día. Cada onza del Complemento A proporciona 5 unidades de carbohidratos, 3 de proteína y 4 de grasa. Cada onza del Complemento B proporciona 2 unidades de carbohidratos, 2 de proteína y 1 unidad de grasa. Si el Complemento A cuesta \$1.50 la onza y el Complemento B \$1.00 la onza, ¿cuántas onzas de cada complemento hay que consumir diariamente para minimizar el costo de la dieta?

21. *Planeación de la producción.* En una fábrica, la máquina 1 produce clavos de 8 pulgadas a razón de 60 unidades por hora, y clavos de 6 pulgadas a razón de 70 unidades por hora. La máquina 2 produce clavos de 8 pulgadas a razón de 40 unidades por hora y clavos de 6 pulgadas a razón de 20 unidades por hora. El costo de operación de la máquina 1 es de \$50.00 la hora, mientras que el costo de operación de la máquina 2 es de \$30.00 la hora. El plan de producción exige que se produzcan al menos 240 unidades de clavos de 8 pulgadas y 140 unidades de clavos de 6 pulgadas cada 10 horas. ¿Cuál combinación de máquinas produce el menor costo de operación?

22. *Administración de una granja.* El propietario de una granja de árboles frutales contrata una cuadrilla de trabajadores para podar al menos 25 de sus 50 árboles. Se necesita una hora para podar cada árbol joven, y una hora y media para cada árbol viejo. La cuadrilla se contrata para trabajar por lo menos 30 horas y cobra \$15.00 por cada árbol joven y \$20.00 por cada árbol viejo. Para minimizar sus costos, ¿de cuántos árboles de cada tipo hay que podar? ¿Cuál será el costo?

23. *Administración de una carnicería.* Una carnicería combina carne molida de res y de cerdo en paquetes para pastel de carne. La carne de res es 75% limpia (75% carne, 25% grasa) y cuesta a la carnicería \$0.75 la libra. La carne de cerdo es 60% limpia y cuesta a la carnicería \$0.45 la libra. El pastel de carne debe ser al menos 70% limpio. Si la carnicería quiere utilizar al menos 50 libras del cerdo disponible, pero no más de 200 libras de la carne de res disponible, ¿cuánta carne molida de res debe mezclarse con la de cerdo para minimizar el costo?



24. *Ingreso por inversión.* Un asesor en inversiones recibe las instrucciones de una cliente para invertir hasta \$20,000.00, una parte en un bono que produce el 9% anual y otra parte en bonos del gobierno, que producen el 7% por año. La cliente desea invertir al menos \$8000.00 en los bonos gubernamentales y no más de \$12,000.00 en los otros.

(a) ¿Qué cantidad recomendaría el asesor se coloque en cada tipo de inversión, de modo que se maximice el ingreso, si la cliente insiste en que la cantidad invertida en bonos del gobierno debe ser mayor o igual a la de los otros bonos?

(b) ¿Qué cantidad recomendaría el asesor se coloque en cada tipo de inversión, de modo que se maximice el ingreso, si la cliente insiste en que la cantidad invertida en bonos del gobierno debe ser menor que la de los otros bonos?

25. *Maximización de la ganancia en patines para hielo.* Una fábrica produce dos tipos de patines para hielo: para carrera y para patinaje artístico. Los primeros requieren 6 horas de trabajo en el departamento de producción y una hora en acabado, mientras que los segundos requieren 4 horas de trabajo en producción y dos horas en acabado. El departamento de producción dispone de un máximo de 120 horas de trabajo al día, y el departamento de acabado no dispone de más de 40 horas de trabajo. Si la ganancia en cada par de patines de carrera es de $10.00 y en cada par del otro tipo es de $12.00, ¿cuántos patines de cada tipo deben fabricarse diariamente para maximizar la ganancia? (Suponga que se venden todos los patines fabricados.)

26 *Planeación financiera.* Una pareja de jubilados dispone de hasta $50,000.00 para invertir en bonos de rendimiento fijo. Su asesor financiero les recomienda dos tipos de inversión: un bono AAA que rinde el 8% anual, y un certificado de depósito que rinde un 4% al año. Después de un análisis cuidadoso de las alternativas, la pareja decide invertir cuando mucho $20,000.00 en el bono AAA y al menos $15,000.00 en el certificado. También indican al asesor financiero que invierta en el certificado al menos tanto dinero como en el bono. ¿Cómo debe proceder el asesor para maximizar la ganancia en esta inversión?

27. *Diseño de un producto.* Un empresario encarga a su equipo de diseño que produzca al menos seis muestras de un nuevo tipo de sujetador que desea introducir al mercado. El costo de producción de cada sujetador metálico es de $9.00 y el costo de un sujetador de plástico es de $4.00. Él quiere al menos dos ejemplares de cada versión del sujetador, y debe disponer de todas las muestras dentro de 24 horas a partir de este momento. Cada muestra metálica tarda 4 horas en producción, y una muestra de plástico tarda 2 horas. Para minimizar el costo de las muestras, ¿cuántos sujetadores de cada tipo debe ordenar el empresario? ¿Cuál será el costo de las muestras?

28. *Nutrición animal.* Amadeus, el perro de Tomás, gusta de dos tipos de comida enlatada para perros. Una lata de "Gourmet Dog" cuesta 40 centavos, tiene 20 unidades de un complejo vitamínico y 75 calorías. Una lata de "Chow Hound" cuesta 32 centavos, tiene 35 unidades de vitaminas y 50 calorías. Tomás quiere que Amadeus tenga al menos 1175 unidades de vitamina y 2375 calorías al mes. Si tiene espacio para almacenar sólo 60 latas al mismo tiempo, ¿cuántas latas de cada tipo debe comprar Tomás cada mes para minimizar su costo?

29. *Ganancia de una aerolínea.* Una aerolínea tiene dos tipos de servicio: primera clase y turismo. La experiencia de la administración indica que cada avión debe tener al menos 8, pero no más de 16, asientos de primera clase y al menos 80, pero no más de 120, asientos de turismo.
   (a) Si la administración decide que la proporción de asientos de primera clase y turismo no debe ser mayor que 1:12, ¿con cuántos asientos de cada tipo debe configurar sus aviones para maximizar la ganancia?
   (b) Si la administración decide que la proporción de asientos de primera clase y turismo no debe ser mayor que 1:8, ¿con cuántos asientos de cada tipo debe configurar sus aviones para maximizar la ganancia?
   (c) Si usted fuese el administrador, ¿qué haría?
   [*Sugerencia:* Suponga que la aerolínea cobra $\$C$ por cada asiento en clase turista y $\$F$ por un asiento de primera clase; $C > 0$, $F > 0$.]

30. *Minimización de costos.* En una granja especializada en pollo se agregan cuatro tipos de vitamina a la comida usual de los pollos. El dueño quiere que la comida complementada contenga al menos 50 unidades de vitamina I, 90 de vitamina II, 60 de vitamina III y 100 de vitamina IV por cada 100 onzas de comida. Hay dos complementos disponibles: el complemento A, que contiene 5 unidades de vitamina I, 25 de vitamina II, 10 de vitamina III y 35 de vitamina IV por onza; y el complemento B, que contiene 25 unidades de vitamina I, 10 de vitamina II, 10 de vitamina III y 20 de vitamina IV por onza. Si el complemento A cuesta $0.06 la onza y el complemento B $0.08 la onza, ¿qué cantidad de cada complemento debe comprarse para agregarla a cada 100 onzas de comida y mantener mínimo el costo total, pero conservando las especificaciones de contenido vitamínico estipuladas?

31. Explique con sus propias palabras lo que es un problema de programación lineal y cómo se puede resolver.

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Sistemas de ecuaciones

Los sistemas que no tienen solución son inconsistentes. Los que tienen solución son consistentes.

Los sistemas consistentes tienen una única solución o una infinidad de soluciones.

Problema de programación lineal

Maximizar (o minimizar) una función objetivo lineal, $z = Ax + By$, sujeta a ciertas condiciones, o restricciones, que pueden expresarse con desigualdades lineales en términos de x y y.

Punto factible

El punto (x,y) que satisface las restricciones de un problema de programación lineal.

Localización de la solución

Si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta se localiza en un vértice de la gráfica de los puntos factibles.

Si un problema de programación lineal tiene varias soluciones, al menos una de ellas se localiza en un vértice de la gráfica de puntos factibles.

En cualquiera de estos casos, el valor correspondiente de la función objetivo es único.

CÓMO HACER PARA

Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de sustitución

Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación

Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices

Resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante determinantes

Resolver un sistema de ecuaciones no lineales

Hacer la gráfica de un sistema de desigualdades

Determinar los vértices de la gráfica de un sistema de desigualdades lineales

Resolver problemas de programación lineal

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. Si un sistema de ecuaciones no tiene solución, se dice que es __________.
2. Un arreglo de números rectangular m por n es una __________.
3. La regla de Cramer utiliza __________ para resolver un sistema de ecuaciones lineales.
4. La matriz utilizada para representar un sistema de ecuaciones lineales es una matriz __________ .
5. La gráfica de una desigualdad lineal es una __________.
6. Un problema de programación lineal pide maximizar (o minimizar) una expresión lineal, llamada __________ __________.
7. Todo punto que satisface las restricciones de un problema de programación lineal es un __________ __________.

CIERTO O FALSO

C F 1. Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas siempre tiene al menos una solución.

C F 2. La matriz aumentada de un sistema de dos ecuaciones con tres variables tiene dos renglones y cuatro columnas.

C F 3. Un determinante 3 por 3 nunca puede ser igual a 0.

C F 4. Un sistema de ecuaciones consistente tiene una solución exacta.

C F 5. La gráfica de una desigualdad lineal es un semiplano.

C F 6. En algunos casos, la gráfica de un sistema de desigualdades lineales es acotada.

C F 7. Si un problema de programación lineal tiene una solución, ésta se localiza en un vértice de la gráfica de los puntos factibles.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 20, resuelva cada sistema de ecuaciones mediante el método de sustitución o el de eliminación. Si el sistema no tiene solución, indique que es inconsistente.

1. $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 7x - y = 3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x - 4y = 4 \\ x - 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 5x - 4y = -\frac{13}{2} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ x = 3y + 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 5y + 2 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y + \frac{2}{5} = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x + \frac{1}{4}y = 2 \\ y + 4x + 2 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x - 2y - 8 = 0 \\ 2x + 2y - 10 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x - 3y + \frac{7}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y - 2x = 11 \\ 2y - 3x = 18 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0 \\ 5x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x + 3y - 13 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x + 5y = 21 \\ 5x + 6y = 42 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x - \frac{2}{3}y = 12 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 4x + 10y = 15 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + 3z = -13 \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + 5y - z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - y + 2z = 11 \end{cases}$

En los problemas del 21 al 30 resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando matrices. Si el sistema no tiene soluciones, indique que es inconsistente.

21. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 10x + 10y = 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x + 6y - 3z = 6 \\ 4x - 7y - 2z = -3 \\ 3x + y - 7z = 1 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x + y + z = 5 \\ 4x - y - 3z = 1 \\ 8x + y - z = 5 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ 2x + 3y = -3 \\ 4x - 3y - 4z = 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 2y + z = -1 \\ 6x + 4y + 3z = 5 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y - 5z - 6 = 0 \\ 2x - 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x - 3y + 5z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 0 \\ 6x + 2y + z = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x - y - z - t = 1 \\ 2x + y + z + 2t = 3 \\ x - 2y - 2z - 3t = 0 \\ 3x - 4y + z + 5t = -3 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x - 3y + 3z - t = 4 \\ x + 2y - z = -3 \\ x + 3z + 2t = 3 \\ x + y + 5z = 6 \end{cases}$

En los problemas del 31 al 36 encuentre el valor de cada determinante.

31. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

En los problemas del 37 al 42 utilice la regla de Cramer, si es aplicable, para resolver cada sistema.

37. $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x - 3y = -5 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

39. $\begin{cases} 2x + 3y - 13 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} 3x - 4y - 12 = 0 \\ 5x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - y + 3z = -13 \\ 3x - 2y + 3z = -16 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x - y + z = 8 \\ 2x + 3y - z = -2 \\ 3x - y - 9z = 9 \end{cases}$

En los problemas del 43 al 52 resuelva cada sistema de ecuaciones.

43. $\begin{cases} 2x + y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 2x - y^2 = -8 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 2xy + y^2 = 10 \\ 3y^2 - xy = 2 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 1 \\ 7x^2 - 2y^2 - 5 = 0 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 64 \\ x^2 = 3y \end{cases}$

48. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 3x^2 + 4xy + 5y^2 = 8 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \\ xy - 2y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

51. $\begin{cases} x^2 - 3x + y^2 + y = -2 \\ \dfrac{x^2 - x}{y} + y + 1 = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} x^2 + x + y^2 = y + 2 \\ x + 1 = \dfrac{2 - y}{x} \end{cases}$

En los problemas del 53 al 58 haga la gráfica de cada sistema de desigualdades. Indique si la gráfica es acotada o no, y señale los vértices.

53. $\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ **54.** $\begin{cases} x - 2y \leq 6 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$ **55.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 6 \end{cases}$ **56.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 6 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 8 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$ **58.** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 9 \\ 2x + 3y \geq 6 \end{cases}$

En los problemas del 59 al 62 haga la gráfica de cada sistema de desigualdades.

59. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ **60.** $\begin{cases} y^2 \leq x - 1 \\ x - y \leq 3 \end{cases}$ **61.** $\begin{cases} y \leq x^2 \\ xy \leq 4 \end{cases}$ **62.** $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$

En los problemas del 63 al 68 resuelva cada problema de programación lineal.

63. Maximice $z = 3x + 4y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + 2y \geq 6$, $x + y \leq 8$

64. Maximice $z = 2x + 4y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 6$, $x \geq 2$

65. Minimice $z = 3x + 5y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \geq 1$, $3x + 2y \leq 12$, $x + 3y \leq 12$

66. Minimice $z = 3x + y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 8$, $y \leq 6$, $2x + y \geq 4$

67. Maximice $z = 5x + 4y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + 2y \geq 2$, $3x + 4y \leq 12$, $y \geq x$

68. Maximice $z = 4x + 5y$ sujeto a $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x + 3y \geq 6$, $x \geq y$, $2x + y \leq 12$

69. Determine A de modo que el sistema de ecuaciones lineales tenga una infinidad de soluciones.

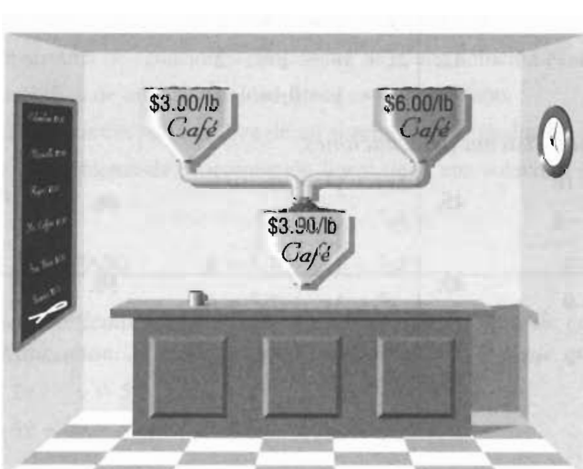
$$\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 4x + 10y = A \end{cases}$$

70. Determine A de modo que el sistema de ecuaciones lineales tenga una infinidad de soluciones.

71. *Ajuste de curvas.* Determine la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ que pasa por los puntos $(0, 1)$, $(1, 0)$, y $(-2, 1)$.

72. *Ajuste de curvas.* Determine la ecuación general del círculo que pasa por los tres puntos $(0, 1)$, $(1, 0)$, y $(-2, 1)$. [*Nota*: La ecuación general de un círculo es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.]

73. *Mezcla de café.* Un distribuidor de café mezcla un nuevo café que costará \$3.90 por libra. El café será una mezcla de un tipo de café de \$3.00 por libra y de otro de \$6.00 por libra. ¿Cuánta cantidad de cada café debe usar para obtener la mezcla deseada? [*Sugerencia:* Suponga que el peso del café mezclado es de 100 libras.]



74. *Agricultura.* En una granja de 1000 acres se siembra maíz y soya. El costo por acre para cultivar maíz es de \$65.00 y para la soya es de \$45.00. Si el presupuesto disponible es de \$54,325.00 y hay que utilizar todo el terreno, ¿cuántos acres se deben asignar a cada cultivo?

75. *Pedidos de galletas.* Una compañía fabrica tres tipos de galletas: avena con pasas, chispas de chocolate y saladas, empaquetadas en cajas pequeñas, medianas y grandes. La caja pequeña contiene una docena de galletas de avena con pasas y una docena de chispas de chocolate; la caja mediana contiene 2 docenas de galletas de avena con pasas, una docena de chispas de chocolate y una docena de galletas saladas; la caja grande contiene 2 docenas del tipo avena con pasas, 2 docenas de chispas de chocolate y 3 docenas de saladas. Si usted necesita exactamente 15 docenas de galletas de avena con pasas, 10 de chispas de chocolate y 11 saladas, ¿cuántas cajas de cada tamaño debe comprar?

76. *Mezcla de nueces.* Una tienda especializada tiene 72 libras de nueces y 120 libras de cacahuates, que se van a mezclar en paquetes de 12 onzas de la manera siguiente: un paquete de menor precio con 8 onzas de cacahuates y 4 de nueces, y un paquete de calidad con 6 onzas de cacahuates y 6 de nueces.
    (a) Utilice x para denotar la cantidad de paquetes de menor precio y y para la cantidad de paquetes de calidad. Escriba un sistema de desigualdades lineales que describan la cantidad posible de cada tipo de paquete.
    (b) Haga la gráfica del sistema y señale los vértices.

77. Un lote rectangular pequeño tiene un perímetro de 68 pies. Si su diagonal mide 26 pies, ¿cuáles son sus dimensiones?

78. El área de una ventana rectangular es de 4 pies cuadrados. Si la diagonal mide $2\sqrt{2}$ pies, ¿cuáles son las dimensiones de la ventana?

79. *Geometría.* Cierto triángulo rectángulo tiene un perímetro de 14 pulgadas. Si la hipotenusa mide 6 pulgadas, ¿cuánto miden los catetos?

80. *Geometría.* Cierto triángulo isósceles tiene un perímetro de 18 pulgadas. Si la altura mide 6 pulgadas, ¿cuánto mide la base?

81. ¿Cuántos metros de cerca se necesitan para encerrar 5000 pies cuadrados mediante dos cuadrados cuyos lados están en la proporción 1:2?

82. *Mezcla de ácidos.* Un laboratorio químico tiene tres recipientes de ácido clorhídrico, HCl. Un recipiente tiene una solución concentrada al 10% de HCl, el segundo tiene una concentración del 25% y el tercero 40% de HCl. ¿Cuántos litros de cada recipiente hay que mezclar para obtener 100 litros de una solución concentrada al 30% de HCl? Construya una tabla con algunas de las combinaciones posibles.

83. *Cálculo de participación.* Catalina, Miguel, Daniel y Alejandra acordaron arreglar el jardín de su casa por \$45.00 y dividirlo entre ellos. Al terminar, su padre dispuso que Miguel debía recibir el doble que Catalina, que Catalina y Alejandra merecen la misma cantidad y Daniel la mitad de lo obtenido por Catalina. ¿Cuánto dinero recibió cada uno?

84. *Rapidez de la propulsión a chorro.* En un vuelo entre el aeropuerto Midway (Chicago) y Fort Lauderdale, Florida, un Boeing 737 mantiene una velocidad de 475 millas por hora. Si el viaje de Chicago a Fort Lauderdale tarda 2 horas con 30 minutos y el vuelo de retorno tarda 2 horas con 50 minutos, ¿cuál es la rapidez de la propulsión a chorro? (Suponga que la rapidez de la propulsión permanece constante en las diversas altitudes del plano.)

85. *Trabajos de razón constante.* Si Catalina y Miguel trabajan juntos durante 1 hora y 20 minutos terminarán cierta labor. Si Miguel y Daniel trabajan juntos durante 1 hora y 36 minutos, pueden terminar el mismo trabajo. Si Daniel y Catalina trabajan juntos pueden concluir en 2 horas y 40 minutos. ¿Cuánto tiempo tardaría cada uno en realizar el trabajo solo?

86. *Maximización de la ganancia en figurines.* Una fábrica produce dos tipos de figuras de cerámica: una bailarina y una sirena, cada una de las cuales requiere tres procesos: moldeo, pintura y vidriado. La mano de obra disponible diariamente para moldeo no es mayor que 90 horas de trabajo, para la pintura no es mayor que 120 horas y para el vidriado no más de 60 horas. La bailarina requiere 3 horas de trabajo para el moldeo, 6 horas para la pintura y 2 para el vidriado. La sirena requiere 3 horas de trabajo para el moldeo, 4 horas para la pintura y 3 para el vidriado. Si la ganancia por cada figura es de \$25.00 en las bailarinas y de \$30.00 en las sirenas, ¿cuántas figuras de cada tipo hay que producir diariamente para maximizar la ganancia? Si la gerencia decide producir el número de cada figura que maximice la ganancia, determine cuál de los procesos tiene un exceso de horas de trabajo asignadas.

87. Una fábrica produce motores a gasolina y a diesel. Cada semana se deben entregar al menos 20 motores de gasolina y 15 motores diesel. Sin embargo, debido a limitaciones físicas, la fábrica no puede producir más de 60 motores a gasolina ni más de 40 motores a diesel. Por último, para evitar la escasez, hay que producir cuando menos 50 motores. Si el costo de producción de un motor a gasolina es de \$450.00 y el de un motor diesel es de \$550.00, ¿cuántos motores hay que producir por semana para minimizar el costo? ¿Cuál es la capacidad de exceso de la fábrica, es decir, cuántos motores de cada tipo se están produciendo aparte del número que la fábrica está obligada a entregar?

88. Describa cuatro formas de resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. ¿Qué método prefiere usted? ¿Por qué?

Pano

Un pis

20 pies

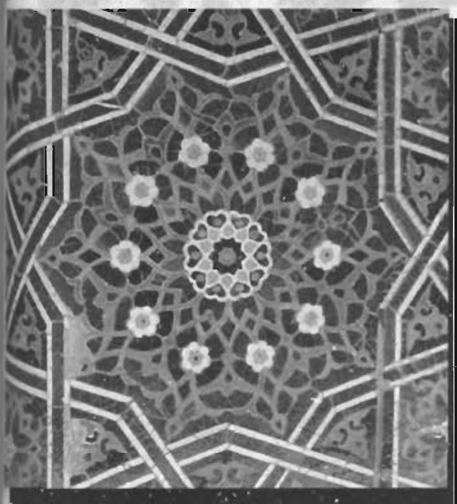
mosaic

sucesiv

necesit

Capítulo 11

Sucesiones; inducción; métodos de conteo; probabilidad



Panorama Creación de un diseño para el piso

Un piso de mosaico de cerámica está diseñado en forma de trapecio con 20 pies de ancho en la base y 10 pies de ancho en la parte superior. Los mosaicos, de 12 por 12 pulgadas, serán colocados de modo que cada fila sucesiva tenga un mosaico menos que la anterior. ¿Cuántos mosaicos se necesitarán? [ejemplo 7 de la sección 11.2.]

*E*ste capítulo introduce temas que se tratan con mayor detalle en los cursos de *Matemáticas finitas* o *Matemáticas discretas.* Aplicaciones de estos temas se encuentran en los campos de ciencias de la computación, ingeniería, economía y negocios, las ciencias sociales y las ciencias físicas y biológicas.

El capítulo puede ser dividido en cuatro partes independientes:

Las secciones 11.1, 11.2 y 11.3, tratan acerca de las sucesiones, las cuales son funciones cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Las sucesiones forman la base de las *funciones definidas de manera recursiva* y de *procedimientos recursivos* utilizados en la programación de computadoras.

La sección 11.4, inducción matemática, nos permitirá conocer una técnica para demostrar teoremas que involucran a los números naturales.

La sección 11.5, el teorema del binomio, introduce una fórmula para la expansión de $(x + a)^n$, donde n es cualquier número natural.

Las secciones 11.6, 11.7 y 11.8; donde las dos primeras tienen que ver con técnicas y fórmulas para contar el número de objetos en un conjunto, una parte de la rama de las matemáticas llamada *combinatoria*. Estas fórmulas son usadas en ciencias de la computación para analizar algoritmos y funciones recursivas y para estudiar pilas y colas. También son usadas para determinar *probabilidades*, esto es, la posibilidad de que ocurra cierto resultado en un experimento aleatorio.

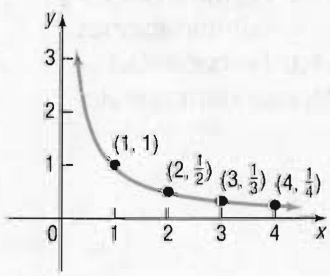
11.1 Sucesiones

Sucesiones

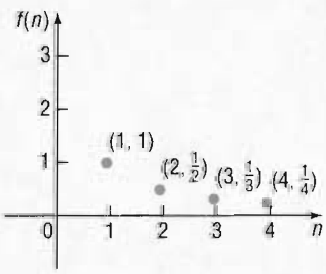
Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.

Puesto que una sucesión es una función, tendrá una gráfica. En la figura 1(a), reconocerá la gráfica de la función $f(x) = 1/x$, $x > 0$. Si todos los puntos de esta gráfica fueran eliminados excepto aquellos cuya coordenada x, o abscisa, sea un entero positivo —esto es, si todos los puntos son eliminados excepto $(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$, $(3, \frac{1}{3})$, y así sucesivamente—, los puntos que quedarían serían la gráfica de la sucesión $f(n) = 1/n$, como se muestra en la figura 1(b).

FIGURA 1



(a) $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$



(b) $f(n) = \frac{1}{n}$

Por lo común, una sucesión es representada enlistando sus valores ordenadamente. Por ejemplo, la sucesión cuya gráfica aparece en la figura 1(b) puede ser representada como

$$f(1), f(2), f(3), f(4), \ldots \quad \text{o} \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

La lista nunca termina, como lo indican los puntos suspensivos. Los números en esta lista ordenada son llamados **términos** de la sucesión.

Al tratar con sucesiones, por lo regular usamos letras con subíndice, por ejemplo, a_1 para representar al primer término, a_2 para el segundo término, a_3 para el tercer término, y así sucesivamente. De esta manera, para la sucesión $f(n) = 1/n$, escribimos

$$\begin{aligned} a_1 &= f(1) = 1 \\ a_2 &= f(2) = \frac{1}{2} \\ a_3 &= f(3) = \frac{1}{3} \\ a_4 &= f(4) = \frac{1}{4} \\ &\vdots \\ a_n &= f(n) = \frac{1}{n} \\ &\vdots \end{aligned}$$

En otras palabras, por lo regular no usamos la notación tradicional de funciones $f(n)$ para escribir sucesiones. Para esta sucesión en particular, tenemos una regla para el n-ésimo término, a saber, $a_n = 1/n$, de modo que es fácil encontrar cualquier término de la sucesión.

Cuando se conoce una fórmula para el n-ésimo término, en lugar de escribir los términos de la sucesión, normalmente representamos a toda la sucesión colocando llaves alrededor de la fórmula para el n-ésimo término. Por ejemplo, la sucesión cuyo n-ésimo término es $b_n = (\frac{1}{2})^n$ puede ser representada como

$$\{b_n\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

o por

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{2} \\ b_2 &= \frac{1}{4} \\ b_3 &= \frac{1}{8} \\ &\vdots \\ b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &\vdots \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 *Escritura de los primeros términos de una sucesión*

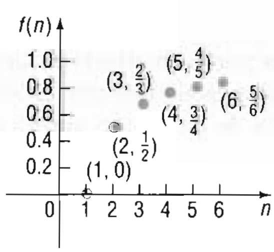
Escribir los primeros seis términos de la sucesión siguiente y trazar su gráfica.

$$\{a_n\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$$

Solución

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{2}{3} \\ a_4 &= \frac{3}{4} \\ a_5 &= \frac{4}{5} \\ a_6 &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

FIGURA 2



Véase la figura 2.

Verificación: Escribir un programa que genere los primeros seis términos de la sucesión $\{(n-1)/n\}$. Escribir un segundo programa que trace la gráfica de esta sucesión y compararla con lo que se ve en la figura 2. ■

EJEMPLO 2 *Escritura de los primeros términos de una sucesión*

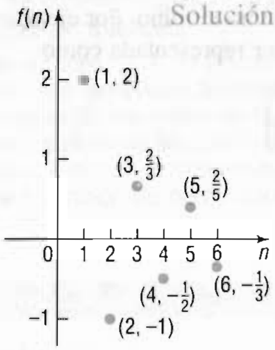
Escribir los primeros seis términos de la sucesión siguiente y trazar su gráfica.

$$\{b_n\} = \left\{(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right)\right\}$$

Solución

$$b_1 = 2$$
$$b_2 = -1$$
$$b_3 = \frac{2}{3}$$
$$b_4 = -\frac{1}{2}$$
$$b_5 = \frac{2}{5}$$
$$b_6 = -\frac{1}{3}$$

FIGURA 3



Véase la figura 3.

EJEMPLO 3 *Escritura de los primeros términos de una sucesión*

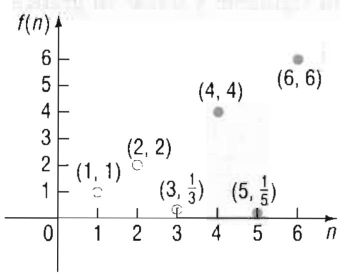
Escribir los primeros seis términos de la sucesión siguiente y trazar su gráfica.

$$\{c_n\} = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ 1/n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Solución

$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 2$$
$$c_3 = \frac{1}{3}$$
$$c_4 = 4$$
$$c_5 = \frac{1}{5}$$
$$c_6 = 6$$

FIGURA 4



Véase la figura 4.

■ Ahora resuelva los problemas 3 y 5.

Algunas veces una sucesión se indica por un patrón observado en los primeros términos, lo que hace posible inferir la forma del n-ésimo término. En el ejemplo siguiente, se da un número suficiente de términos de modo que sugiera una elección natural para el n-ésimo término.

EJEMPLO 4 *Determinación de una sucesión a partir de un patrón*

(a) $e, \frac{e^2}{2}, \frac{e^3}{3}, \frac{e^4}{4}, \ldots$ $\quad a_n = \frac{e^n}{n}$

(b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$ $\quad b_n = \frac{1}{3^{n-1}}$

(c) $1, 3, 5, 7, \ldots$ $\qquad c_n = 2n - 1$

(d) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ $\qquad d_n = n^2$

(e) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ $\qquad e_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)$ ■

En la sucesión $\{e_n\}$ del ejemplo 4(c), obsérvese que los signos de los términos **alternan.** Cuando ocurre esto, usamos factores tales como $(-1)^{n+1}$, que es igual a 1 si n es impar e igual a -1 si n es par, o bien $(-1)^n$, que es igual a -1 si n es impar e igual a 1 si n es par.

■ Ahora resuelva el problema 13.

El símbolo de factorial

Símbolo de factorial, $n!$

Si $n \geq 0$ es un entero, el **símbolo de factorial** $n!$ se define como sigue:

$$0! = 1 \qquad 1! = 1$$

$$n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad \text{si } n \geq 2$$

Por ejemplo, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, y así sucesivamente. La tabla 1 enlista los valores de $n!$ para $0 \leq n \leq 6$.

TABLA 1

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720

Ya que

$$n! = n\underbrace{(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-1)!}$$

podemos usar la fórmula

$$\boxed{n! = n(n-1)!}$$

para encontrar factoriales sucesivos. Por ejemplo, ya que $6! = 720$, tenemos

$$7! = 7 \cdot 6! = 7(720) = 5040$$

y

$$8! = 8 \cdot 7! = 8(5040) = 40{,}320$$

Comentario: Su calculadora puede tener una tecla para el factorial. Úsela para ver qué tan rápido aumenta el valor del factorial. Encuentre el valor de 69! ¿Qué sucede cuando trata de encontrar 70!? En realidad, 70! es mayor que 10^{100} (un *googol*), el número más grande que la mayoría de las calculadoras puede mostrar.

Fórmulas recursivas

Una segunda forma de definir una sucesión es asignando un valor al primer término (o primeros términos), y especificando el n-ésimo término por una fórmula o ecuación que involucre uno o más de los términos que le preceden. Las sucesiones que están definidas de esta manera se dice que están definidas **recursivamente**, y la regla o fórmula es llamada **fórmula recursiva.**

EJEMPLO 5 *Escritura de los términos de una sucesión definida de manera recursiva*

Escribir los primeros cinco términos de la sucesión siguiente definida recursivamente.

$$s_1 = 1, \qquad s_n = 4s_{n-1}$$

Solución El primer término es $s_1 = 1$. Para obtener el segundo término, usamos $n = 2$ en la fórmula para obtener $s_2 = 4s_1 = 4 \cdot 1 = 4$. Para obtener el tercer término, usamos $n = 3$ en la fórmula para obtener $s_3 = 4s_2 = 4 \cdot 4 = 16$. Para obtener un término nuevo se requiere que conozcamos el valor del término precedente. Los primeros cinco términos son

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 4 \cdot 1 = 4 \\ s_3 &= 4 \cdot 4 = 16 \\ s_4 &= 4 \cdot 16 = 64 \\ s_5 &= 4 \cdot 64 = 256 \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 *Escritura de los términos de una sucesión definida recursivamente*

Escribir los primeros cinco términos de la sucesión siguiente definida de manera recursiva,

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1, \qquad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$$

Solución Se nos dan los primeros dos términos. Para obtener el tercer término necesitamos conocer cada uno de los dos términos anteriores. Así,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 \\ u_3 &= u_1 + u_2 = 2 \\ u_4 &= u_2 + u_3 = 1 + 2 = 3 \\ u_5 &= u_3 + u_4 = 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

■

La sucesión definida en el ejemplo 6 es llamada **sucesión de Fibonacci,** y los términos de esta sucesión son llamados **números de Fibonacci**. Estos números aparecen en una amplia variedad de aplicaciones (*véanse* los problemas 55 y 56).

EJEMPLO 7 *Escritura de los términos de una sucesión definida recursivamente*

Escribir los primeros cinco términos de la sucesión siguiente definida de manera recursiva.

$$f_1 = 1, \qquad f_{n+1} = (n + 1)f_n$$

Solución Aquí

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2f_1 = 2 \cdot 1 = 2 \\ f_3 &= 3f_2 = 3 \cdot 2 = 6 \\ f_4 &= 4f_3 = 4 \cdot 6 = 24 \\ f_5 &= 5f_4 = 5 \cdot 24 = 120 \end{aligned}$$

Debe reconocer el n-ésimo término de la sucesión del ejemplo 7 como $n!$

Ahora resuelva los problemas 21 y 29.

Suma de los primeros n términos de una sucesión; notación de sumatoria

Con frecuencia es importante poder determinar la suma de los primeros n términos de una sucesión $\{a_n\}$, es decir,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n \tag{1}$$

Sin embargo, en lugar de escribir todos los términos, introducimos una forma más concisa de expresar esta suma, llamada **notación de sumatoria.** Usando la notación de sumatoria, escribimos la suma (1) como

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdot \cdot \cdot + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

El símbolo $\sum$ (una versión estilizada de la letra griega sigma) sólo significa la instrucción para sumar, o añadir, los términos. El entero k es llamado **índice** de la suma; indica dónde iniciar la suma y dónde terminarla. Por lo tanto, la expresión

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \tag{2}$$

es una instrucción para sumar los términos a_k de la sucesión $\{a_n\}$ desde $k = 1$ hasta $k = n$. La expresión (2) la leemos como "la suma de a_k desde $k = 1$ hasta $k = n$."

EJEMPLO 8 *Ampliación de la notación de sumatoria*

Escribir cada suma

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$

Solución (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! = 1! + 2! + \cdot \cdot \cdot + n!$

EJEMPLO 9 *Escritura de una suma en la notación de sumatoria*

Expresar cada suma usando la notación de sumatoria.

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ (b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

Solución (a) La suma $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ tiene n términos, cada uno de la forma k^2, inicia en $k = 1$ y termina en $k = n$. De este modo,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

(b) La suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

tiene n términos, cada uno de la forma $1/2^{k-1}$, inicia en $k = 1$ y termina en $k = n$. Así,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$ ■

El índice de la sumatoria no siempre necesita empezar en 1 ni terminar en n; por ejemplo,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

En lugar de k pueden ser utilizadas otras letras como índice. Por ejemplo,

$$\sum_{j=1}^{n} j! \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} i!$$

cada una representa la misma suma que la dada en el ejemplo 8(b).

■ Ahora resuelva los problemas 37 y 47.

A continuación enlistamos algunas propiedades de las sucesiones usando notación de sumatoria.

Teorema propiedades de las sucesiones Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones y c es un número real, entonces

1. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$
2. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
3. $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$
4. $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k$, cuando $1 < j < n$ ■

Aunque no demostraremos estas propiedades, las demostraciones están basadas en las propiedades de los números reales.

Ejercicio 11.1

En los problemas 1 al 12, escriba los primeros cinco términos de cada sucesión.

1. $\{n\}$ **2.** $\{n^2+1\}$ **3.** $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$ **4.** $\left\{\dfrac{2n+1}{2n}\right\}$

5. $\{(-1)^{n+1}n^2\}$ **6.** $\left\{(-1)^{n-1}\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)\right\}$ **7.** $\left\{\dfrac{2^n}{3^n+1}\right\}$ **8.** $\left\{\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}$

9. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}\right\}$ **10.** $\left\{\dfrac{3^n}{n}\right\}$ **11.** $\left\{\dfrac{n}{e^n}\right\}$ **12.** $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}$

En los problemas del 13 al 20 el patrón dado continúa. Escriba el enésimo término de cada sucesión sugerida por el patrón.

13. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \ldots$ **14.** $\dfrac{1}{1\cdot 2}, \dfrac{1}{2\cdot 3}, \dfrac{1}{3\cdot 4}, \dfrac{1}{4\cdot 5}, \ldots$ **15.** $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$

16. $\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{8}{27}, \dfrac{16}{81}, \ldots$ **17.** $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ **18.** $1, \dfrac{1}{2}, 3, \dfrac{1}{4}, 5, \dfrac{1}{6}, 7, \dfrac{1}{8}, \ldots$

19. $1, -2, 3, -4, 5, -6, \ldots$ **20.** $2, -4, 6, -8, 10, \ldots$

En los problemas del 21 al 34 se define una sucesión de manera recursiva. Escriba los primeros cinco términos.

21. $a_1 = 2;\ a_{n+1} = 3 + a_n$ **22.** $a_1 = 3;\ a_{n+1} = 4 - a_n$

23. $a_1 = -2;\ a_{n+1} = n + a_n$ **24.** $a_1 = 1;\ a_{n+1} = n - a_n$

25. $a_1 = 5;\ a_{n+1} = 2a_n$ **26.** $a_1 = 2;\ a_{n+1} = -a_n$

27. $a_1 = 3;\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$ **28.** $a_1 = -2;\ a_{n+1} = n + 3a_n$

29. $a_1 = 1;\ a_2 = 2;\ a_{n+2} = a_n a_{n+1}$ **30.** $a_1 = -1;\ a_2 = 1;\ a_{n+2} = a_{n+1} + na_n$

31. $a_1 = A;\ a_{n+1} = a_n + d$ **32.** $a_1 = A;\ a_{n+1} = ra_n,\ r \neq 0$

33. $a_1 = \sqrt{2};\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ **34.** $a_1 = \sqrt{2};\ a_{n+1} = \sqrt{a_n/2}$

En los problemas del 35 al 44 escriba en forma desarrollada cada suma.

35. $\sum_{k=1}^{n} (k+2)$ **36.** $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)$ **37.** $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k^2}{2}$ **38.** $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^2$

39. $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{3^k}$ **40.** $\sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{3}{2}\right)^k$ **41.** $\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{3^{k+1}}$ **42.** $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)$

43. $\sum_{k=2}^{n} (-1)^k \ln k$ **44.** $\sum_{k=3}^{n} (-1)^{k+1} 2^k$

En los problemas del 45 al 54 exprese cada suma usando la notación de sumatoria.

45. $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ **46.** $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

47. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} + \cdots + \dfrac{n}{n+1}$ **48.** $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1)$

49. $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots + (-1)^n\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$ **50.** $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{27} - \cdots + (-1)^{n+1}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

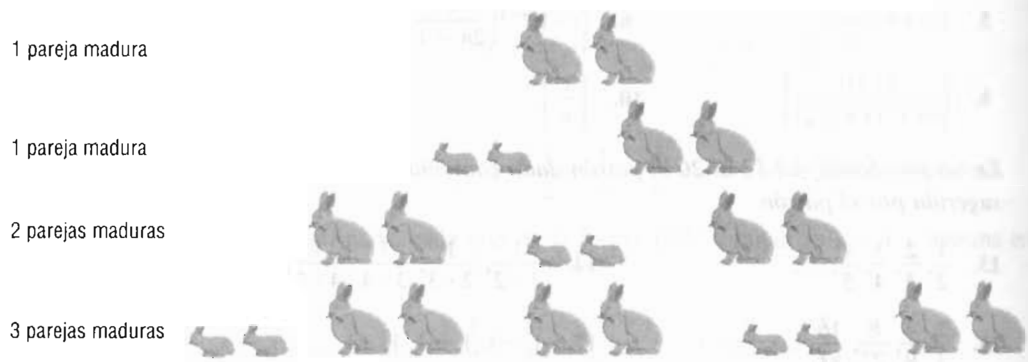
51. $3 + \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} + \cdots + \frac{3^n}{n}$

52. $\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n}$

53. $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + nd)$

54. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$

55. *Crecimiento de una colonia de conejos.* Una colonia de conejos empieza con una pareja de conejos maduros, la cual procreará una pareja de descendientes (un macho y una hembra) cada mes. Suponga que todos los conejos maduran en 1 mes y procrean una pareja de descendientes (un macho y una hembra) después de 2 meses. Si ningún conejo muere, ¿cuántas parejas de conejos maduros habrá dentro de 7 meses? [*Sugerencia:* Una sucesión de Fibonacci modela esta colonia. ¿Advierte por qué?]



56. *Sucesión de Fibonacci.* Defina con

$$u_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

al n-ésimo término de una sucesión.

(a) Demuestre que $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$. (b) Demuestre que $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

(c) Llegue a la conclusión de que $\{u_n\}$ es una sucesión de Fibonacci.

En los problemas 57 y 58, usamos el hecho de que en lenguajes de programación es posible tener una función, o una subrutina, que pueda llamarse a sí misma.

57. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa que acepte como entrada números enteros e imprima el número y su factorial. Utilice una función definida de manera recursiva; esto es, una función que se llame a sí misma.

58. *Ejercicio de programación.* Escriba un programa que acepte como entrada un entero positivo N y resulte el N-ésimo número de Fibonacci. Use una subrutina definida de manera recursiva.

59. Divida el siguiente arreglo triangular (llamado triángulo de Pascal) usando líneas diagonales como se muestra. Encuentre la suma de los números en cada uno de estos renglones diagonales. ¿Reconoce esta sucesión?

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

60. Investigue varias aplicaciones que lleven a una sucesión de Fibonacci. Escriba un ensayo acerca de dichas aplicaciones.

11.2

Sucesiones aritméticas

Cuando la diferencia entre términos consecutivos de una sucesión siempre es el mismo número, la sucesión es llamada **aritmética.** Así, una sucesión aritmética* puede ser definida de manera recursiva como $a_1 = a$, $a_{n+1} - a_n = d$, o como

Sucesión artimética

$$\boxed{a_1 = a, \qquad a_{n+1} = a_n + d \qquad (1)}$$

donde $a = a_1$ y d son números reales. El número a es el primer término, y el número d es llamado **diferencia común.**

Así, los términos de una sucesión aritmética con primer término d y diferencia común d siguen el patrón

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad \ldots$$

EJEMPLO 1 *Determinar si una sucesión es aritmética*

La sucesión

$$4, 7, 10, 13, \ldots$$

es aritmética ya que la diferencia entre términos sucesivos es 3. El primer término es 4, y la diferencia común es 3. ■

EJEMPLO 2 *Determinar si una sucesión es aritmética*

Demostrar que la sucesión siguiente es aritmética. Encuentre el primer término y la diferencia común.

$$\{s_n\} = \{3n + 5\}$$

Solución El primer término es $s_1 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$. El $(n + 1)$ésimo y el n-ésimo términos de la sucesión $\{s_n\}$ son

$$s_{n+1} = 3(n + 1) + 5 = 3n + 8 \quad \text{y} \quad s_n = 3n + 5$$

Su diferencia es

$$s_{n+1} - s_n = (3n + 8) - (3n + 5) = 8 - 5 = 3$$

Así, la diferencia de dos términos sucesivos no depende de n; la diferencia común es 3, y la sucesión es aritmética. ■

EJEMPLO 3 *Determinar si una sucesión es aritmética*

Demostrar que la sucesión siguiente es aritmética. Encuentre el primer término y la diferencia común.

$$\{t_n\} = \{4 - n\}$$

Solución El primer término es $t_1 = 4 - 1 = 3$. Los términos $(n + 1)$ y n-ésimo son

$$t_{n+1} = 4 - (n + 1) = 3 - n \quad \text{y} \quad t_n = 4 - n$$

*Algunas veces llamada **progresión aritmética.**

Su diferencia es

$$t_{n+1} - t_n = (3 - n) - (4 - n) = 3 - 4 = -1$$

La diferencia de dos términos sucesivos no depende de n; siempre es igual al mismo número, -1. De aquí que $\{t_n\}$ sea una sucesión aritmética cuya diferencia común es -1. ∎

■ Ahora resuelva el problema 3.

Suponga que a es el primer término de una sucesión aritmética cuya diferencia común es d. Buscamos una fórmula para el n-ésimo término, a_n. Para ver el patrón, escribimos los primeros términos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a + 0 \cdot d \\
a_2 &= a + d = a + 1 \cdot d \\
a_3 &= a_2 + d = (a + d) + d = a + 2 \cdot d \\
a_4 &= a_3 + d = (a + 2 \cdot d) + d = a + 3 \cdot d \\
a_5 &= a_4 + d = (a + 3 \cdot d) + d = a + 4 \cdot d \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} + d = [a + (n - 2)d] + d = a + (n - 1)d
\end{aligned}$$

Esto nos conduce al enunciado siguiente:

Teorema Para una sucesión aritmética $\{a_n\}$ cuyo primer término es a y cuya diferencia es d, el n-ésimo término está determinado por la fórmula

n-ésimo término de una sucesión aritmética

$$a_n = a + (n - 1)d \qquad (2)$$

EJEMPLO 4 *Determinación de un término particular en una sucesión aritmética*

Encuentre el 13 término de la sucesión aritmética 2, 6, 10, 14, 18, ...

Solución El primer término de esta sucesión aritmética es $a = 2$, y la diferencia común es 4. Por la fórmula (2), el n-ésimo término es

$$a_n = 2 + (n - 1)4$$

De aquí que el decimotercer término sea

$$a_{13} = 2 + 12 \cdot 4 = 50$$ ∎

Exploración: Escribir un programa que encuentre el decimotercer término de la sucesión dada en el ejemplo 4. Úsela para encontrar el vigésimo y el quincuagésimo términos. ∎

EJEMPLO 5 *Determinación de una fórmula recursiva para una sucesión aritmética*

El octavo término de una sucesión aritmética es 75 y el vigésimo es 39. Encuentre el primer término y la diferencia común. Dé una fórmula recursiva para la sucesión.

Solución Por la ecuación (2), sabemos que

$$\begin{cases} a_8 = a + 7d = 75 \\ a_{20} = a + 19d = 39 \end{cases}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que puede resolverse por eliminación. Restando la segunda ecuación de la primera, obtenemos

$$-12d = 36$$
$$d = -3$$

Con $d = -3$, encontramos $a = 75 - 7d = 75 - 7(-3) = 96$. Una fórmula recursiva para esta sucesión es

$$a_1 = 96, \qquad a_{n+1} = a_n - 3$$

■

Con base en la fórmula (2), una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión $\{a_n\}$ del ejemplo 5 es

$$a_n = a + (n-1)d = 96 + (n-1)(-3) = 99 - 3n$$

■ Ahora resuelva los problemas 19 y 25.

Suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética

El enunciado siguiente nos da una fórmula para encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética.

Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión aritmética con primer término a y diferencia común d. La suma S_n de los primeros n términos de $\{a_n\}$ es

Suma de n-términos de una sucesión aritmética

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a + a_n) \qquad (3)}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\
&= a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n-1)d] \\
&= \underbrace{(a + a + \cdots + a)}_{n \text{ términos}} + [d + 2d + \cdots + (n-1)d] \\
&= na + d[1 + 2 + \cdots + (n-1)] \\
&= na + d\left[\frac{(n-1)n}{2}\right] \\
&= na + \frac{n}{2}(n-1)d \\
&= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] && \text{Factorizar } n/2. \\
&= \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] \\
&= \frac{n}{2}(a + a_n) && \text{Fórmula (2)}
\end{aligned}$$

■

La fórmula (3) proporciona dos maneras de encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética. Observe que una involucra al primer término y la diferencia común, mientras que la otra involucra al primero y al n-ésimo término. Use la que resulte más sencilla, según el caso.

EJEMPLO 6 *Determinación de la suma de n términos en una sucesión aritmética*

Encontrar la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $\{3n + 5\}$; esto es, encontrar

$$8 + 11 + 14 + \cdots + (3n + 5)$$

Solución La sucesión $\{3n + 5\}$ es una sucesión aritmética con primer término $a = 8$ y n-ésimo término $(3n + 5)$. Para encontrar la suma S_n usamos la fórmula (3):

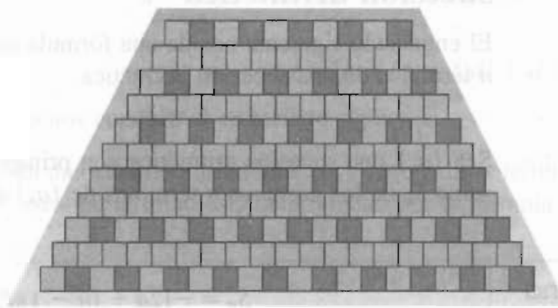
$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{n}{2}[8 + (3n + 5)] = \frac{n}{2}(3n + 13)$$

■ Ahora resuelva el problema 33.

EJEMPLO 7 *Creación de un diseño para el piso*

Un piso de mosaico de cerámica está diseñado en forma de trapecio, con 20 pies de ancho en la base y 10 pies de ancho en la parte superior. *Véase* la figura 5. Los mosaicos, de 12 por 12 pulgadas, serán colocados de modo que cada fila sucesiva tenga un mosaico menos que la anterior. ¿Cuántos mosaicos se necesitarán?

FIGURA 5



Solución La fila inferior requiere de 20 mosaicos y la fila superior de 10. Ya que cada fila sucesiva requiere de un mosaico menos, el número total de mosaicos necesarios es

$$S = 20 + 19 + 18 + \cdots + 11 + 10$$

Esta es la suma de una sucesión aritmética; la diferencia común es -1. El número de términos sumados es $n = 11$, con el primer término $a = 20$ y el último $a_{11} = 10$. La suma S es

$$S = \frac{n}{2}(a + a_{11}) = \frac{11}{2}(20 + 10) = 165$$

Así, se necesitarán 165 mosaicos.

11.2 Ejercicio 11.2

En los problemas del 1 al 10 se da una sucesión aritmética. Encuentre la diferencia común y escriba los primeros cuatro términos.

1. $\{n + 4\}$ **2.** $\{n - 5\}$ **3.** $\{2n - 5\}$ **4.** $\{3n + 1\}$ **5.** $\{6 - 2n\}$

6. $\{4 - 2n\}$ **7.** $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n\right\}$ **8.** $\left\{\frac{2}{3} + \frac{n}{4}\right\}$ **9.** $\{\ln 3^n\}$ **10.** $\{e^{\ln n}\}$

En los problemas del 11 al 18, encuentre el enésimo término de la sucesión aritmética cuyo término inicial a *y diferencia común* d *están dados. ¿Cuál es el quinto término?*

11. $a = 2;\ d = 3$

12. $a = -2;\ d = 4$

13. $a = 5;\ d = -3$

14. $a = 6;\ d = -2$

15. $a = 0;\ d = \frac{1}{2}$

16. $a = 1;\ d = -\frac{1}{3}$

17. $a = \sqrt{2};\ d = \sqrt{2}$

18. $a = 0;\ d = \pi$

En los problemas del 19 al 24 encuentre el término indicado en cada sucesión aritmética.

19. Duodécimo término de 2, 4, 6, . . .

20. Octavo término de $-1, 1, 3, \ldots$

21. Décimo término de $1, -2, -5, \ldots$

22. Noveno término de $5, 0, -5, \ldots$

23. Octavo término de $a, a + b, a + 2b, \ldots$

24. Séptimo término de $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, \ldots$

En los problemas del 25 al 32, encuentre el primer término y la diferencia común de la sucesión aritmética descrita. Dé una fórmula recursiva para la sucesión.

25. El octavo término es 8, el vigésimo 44.

26. El cuarto término es -5, el vigésimo 35.

27. El noveno término es -5, el decimoquinto 31.

28. El octavo término es 4, el decimoctavo -96

29. El decimoquinto término es 0, el cuadragésimo -50

30. El quinto término es -2, el decimotercero 30.

31. El decimocuarto término es -1, el decimoctavo -9.

32. El duodécimo término es 4, el decimoctavo 28.

En los problemas del 33 al 40 encuentre la suma.

33. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$

34. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

35. $7 + 12 + 17 + \cdots + (2 + 5n)$

36. $-1 + 3 + 7 + \cdots + (4n - 5)$

37. $2 + 4 + 6 + \cdots + 70$

38. $1 + 3 + 5 + \cdots + 59$

39. $5 + 9 + 13 + \cdots + 49$

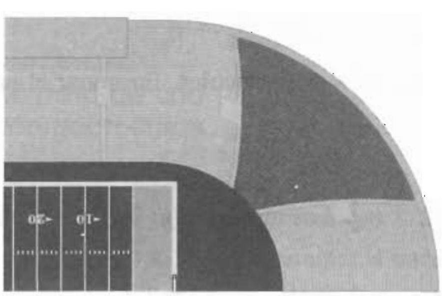
40. $2 + 5 + 8 + \cdots + 41$

41. Encuentre x de modo que $x + 3$, $2x + 1$, y $5x + 2$ sean términos consecutivos de una sucesión aritmética.

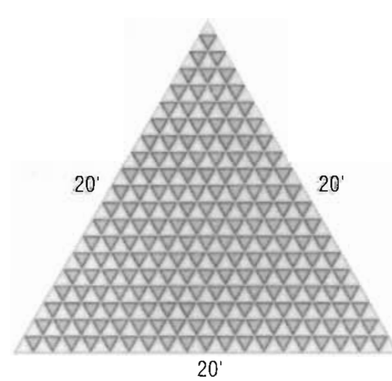
42. Encuentre x de modo que $2x$, $3x + 2$, y $5x + 3$ sean términos consecutivos de una sucesión aritmética.

43. *Teatro Drury Lane.* El teatro Drury Lane tiene 25 butacas en la primera fila y 30 filas en total. Cada fila sucesiva tiene una butaca adicional. ¿Cuántas butacas hay en total en dicho teatro?

44. *Estadio de fútbol.* La sección de una esquina en un estadio de fútbol tiene 15 asientos en la primera fila y 40 filas en total. Cada fila sucesiva tiene dos asientos adicionales. ¿Cuántos asientos hay en esa sección?



45. *Creación de un mosaico.* Un piso de mosaicos está diseñado en forma de triángulo equilátero de 20 pies por lado. Cada mosaico tiene la forma de un triángulo equilátero de 12 pulgadas por lado. Los mosaicos se alternan en color como se muestra en la ilustración. ¿Cuántos mosaicos de cada color se necesitarán para llevar a cabo el proyecto?



46. *Construcción de una escalera de ladrillos.* Se va a construir una escalera de ladrillos de 30 escalones. El escalón inferior requiere de 100 ladrillos y cada escalón sucesivo necesita dos menos que el inmediato anterior.

(a) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el escalón superior?

(b) ¿Cuántos para construir la escalera?

47. Construya una sucesión aritmética. Désela a un compañero y pregúntele por su vigésimo término.

11.3 Sucesiones geométricas; series geométricas

Sucesiones geométricas

Cuando la razón de dos términos sucesivos de una sucesión siempre es el mismo número diferente de cero, la sucesión es llamada **geométrica.** Así, una sucesión geométrica* puede ser definida de manera recursiva como $a_1 = a$, $a_{n+1} / a_n = r$, o como

$$a_1 = a, \qquad a_{n+1} = ra_n \tag{1}$$

donde $a_1 = a$ y $r \neq 0$ son números reales. El número a es el primer término, y el número r diferente de cero es llamado **razón común.**

De modo que los términos de una sucesión geométrica con primer término a y razón común r siguen el patrón

$$a, \ ar, \ ar^2, \ ar^3, \ \ldots$$

EJEMPLO 1 *Determinar si una sucesión es geométrica*

La sucesión

$$2, 6, 18, 54, 162, \ldots$$

es geométrica ya que la razón de términos sucesivos es 3. El primer término es 2 y la razón común 3. ∎

EJEMPLO 2 *Determinar si una sucesión es geométrica*

Demostrar que la siguiente sucesión es geométrica. Encontrar el primer término y la razón común.

$$\{s_n\} = 2^{-n}$$

Solución El primer término es $s_1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$. Los términos $(n + 1)$ y n de la sucesión $\{s_n\}$ son

$$s_{n+1} = 2^{-(n+1)} \quad \text{y} \quad s_n = 2^{-n}$$

Su razón es

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} = 2^{-n-1+n} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

Ya que la razón de términos sucesivos es un número diferente de cero independiente de n, la sucesión $\{s_n\}$ es geométrica con razón común $\frac{1}{2}$. ∎

*Algunas veces llamada **progresión matemática.**

EJEMPLO 3 *Determinar si una sucesión es geométrica*

Demostrar que la sucesión siguiente es geométrica. Encontrar el primer término y la razón común.

$$\{t_n\} = \{4^n\}$$

Solución El primer término es $t_1 = 4^1 = 4$. Los términos $(n + 1)$ y n son

$$t_{n+1} = 4^{n+1} \quad \text{y} \quad t_n = 4^n$$

Su razón es

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$$

Así, $\{t_n\}$ es una sucesión geométrica con razón común 4. ■

■ Ahora resuelva el problema 3.

Suponga que a es el primer término de una sucesión geométrica con razón común $r \neq 0$. Buscamos una fórmula para el n-ésimo término a_n. Para ver el patrón escribimos los primeros términos:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \cdot a = ar^0 \\
a_2 &= ra = ar^1 \\
a_3 &= ra_2 = r(ar) = ar^2 \\
a_4 &= ra_3 = r(ar^2) = ar^3 \\
a_5 &= ra_4 = r(ar^3) = ar^4 \\
&\vdots \\
a_n &= ra_{n-1} = r(ar^{n-2}) = ar^{n-1}
\end{aligned}$$

Esto nos conduce al enunciado siguiente:

Teorema Para una sucesión geométrica $\{a_n\}$ cuyo primer término es a y cuya razón común es r, el n-ésimo término está determinado por la fórmula

n-ésimo término de una sucesión geométrica

$$\boxed{a_n = ar^{n-1}, \qquad r \neq 0 \qquad (2)}$$

■

EJEMPLO 4 *Determinación de un término particular en una sucesión geométrica*

Determinar el noveno término de la sucesión geométrica $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots$.

Solución El primer término de esta sucesión geométrica es $a = 2$, y la razón común es $\frac{1}{3}$. (Usar $\frac{2}{3}/2 = \frac{1}{3}$, o $\frac{2}{9}/\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, o cualesquiera dos términos sucesivos.) Por la fórmula (2), el n-ésimo término es

$$a_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

De aquí que el noveno término sea

$$a_9 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{2}{3^8} = \frac{2}{6561} \approx 0.0003$$ ■

Exploración: Escriba un programa que encuentre el noveno término de la sucesión dada en el ejemplo 4. Úselo para encontrar el vigésimo y el quincuagésimo términos.

Ahora resuelva los problemas 25 y 33.

Suma de los primeros *n* términos de una sucesión geométrica

El enunciado siguiente nos da una fórmula para encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica.

Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión geométrica con primer término a y razón común r. La suma S_n de los primeros n términos de $\{a_n\}$ es

Suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}, \qquad r \neq 0, 1 \tag{3}$$

Demostración

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} \tag{4}$$

Multiplicar cada lado por r para obtener

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^n \tag{5}$$

Ahora, restar (5) de (4). El resultado es

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

Como $r \neq 1$, podemos resolver para S_n:

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

EJEMPLO 5 *Determinación de la suma de n términos en una sucesión geométrica*

Encontrar la suma S_n de los primeros n términos de la sucesión $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$; esto es, encontrar

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Solución

La sucesión $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ es una sucesión geométrica con $a = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$. La suma S_n que buscamos es la suma de los primeros n términos de la sucesión, de modo que usamos la fórmula (3) para obtener

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right]$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Ahora resuelva el problema 39.

Series geométricas

Serie geométrica infinita

Una suma infinita de la forma

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

con primer término a y razón común r, es llamada **serie geométrica infinita** y se denota por

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

Con base en la fórmula (3), la suma S_n de los primeros n términos de una serie geométrica es

$$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \tag{6}$$

Si esta suma finita S_n se aproxima a un número L cuando $n \to \infty$, entonces llamamos a L **la suma de la serie geométrica infinita,** y escribimos

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

Teorema Si $|r| < 1$, la suma de la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$ es

Suma de una serie geométrica infinita

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}} \tag{7}$$

■

Prueba intuitiva Ya que $|r| < 1$, se deduce que $|r^n|$ se aproxima a 0 cuando $n \to \infty$. Entonces, con base en la fórmula (6), la suma S_n se aproxima a $a/(1 - r)$ cuando $n \to \infty$. ■

EJEMPLO 6 *Determinación de la suma de una serie geométrica*

Encontrar la suma de la serie geométrica $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots$.

Solución El primer término es $a = 2$ y la razón común es

$$r = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ya que $|r| < 1$, usamos la fórmula (7) para encontrar que

$$2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \cdots = \frac{2}{1 - \frac{2}{3}} = 6$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 45.

EJEMPLO 7 *Decimales que se repiten*

Demostrar que el decimal repetido 0.999... es igual a 1.

Solución

$$0.999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots$$

Así, 0.999... es una serie geométrica con primer término $\frac{9}{10}$ y razón común $\frac{1}{10}$. De aquí que,

$$0.999\ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

■

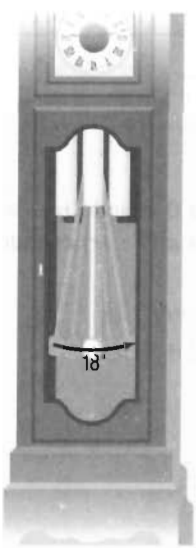
EJEMPLO 8

Péndulo

Un péndulo oscila describiendo inicialmente un arco de 18 pulgadas. En cada oscilación sucesiva, la longitud del arco es 0.98 de la longitud anterior

(a) ¿Cuál es la longitud del arco después de 10 oscilaciones?
(b) ¿En que oscilación la longitud del arco es por primera vez menor de 12 pulgadas?
(c) Después de 15 oscilaciones, ¿cuál es la longitud total que ha oscilado el péndulo?
(d) Cuando se detiene, ¿cuál es la longitud total que ha oscilado el péndulo?

Solución



(a) La longitud de la primera oscilación mide 18 pulgadas. La de la segunda oscilación es de 0.98(18) pulgadas; la longitud de la tercera oscilación es de $0.98(0.98)(18) = 0.98^2(18)$ pulgadas. La longitud de arco de la décima oscilación es

$$(0.98)^9(18) = 15.007 \text{ pulgadas}$$

(b) La longitud de arco de la enésima oscilación es $(0.98)^{n-1}(18)$. Para que esto sea exactamente 12 pulgadas se necesita

$$(0.98)^{n-1}(18) = 12$$
$$(0.98)^{n-1} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$
$$n - 1 = \log_{0.98}\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$n = 1 + \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{\ln 0.98} = 1 + 20.07 = 21.07$$

La longitud del arco excede las 12 pulgadas en la vigésimo primera oscilación, y la primera oscilación menor de 12 pulgadas es la vigésimo segunda.

(c) Después de 15 oscilaciones, el péndulo habrá oscilado la longitud total siguiente L:

$$L = \underset{\text{1o.}}{18} + \underset{\text{2o.}}{0.98(18)} + \underset{\text{3o.}}{(0.98)^2(18)} + \underset{\text{4o.}}{(0.98)^3(18)} + \cdots + \underset{\text{15o}}{(0.98)^{14}(18)}$$

Esta es la suma de una sucesión geométrica. La razón común es 0.98; el primer término es 18. La suma tiene 15 términos, de modo que

$$L = 18\,\frac{1 - 0.98^{15}}{1 - 0.98} = 18(13.07) = 235.29 \text{ pulgadas}$$

Después de 15 oscilaciones el péndulo habrá oscilado una longitud de 235.29 pulgadas.

(d) Cuando el péndulo se detenga habrá oscilado la siguiente longitud total T:

$$T = 18 + 0.98(18) + (0.98)^2(18) + (0.98)^3(18) + \cdots$$

Esta es la suma de una serie geométrica. La razón común es $r = 0.98$; el primer término es $a = 18$. La suma es

$$T = \frac{a}{1-r} = \frac{18}{1-0.98} = 900$$

Cuando finalmente se detiene, el péndulo ha oscilado un total de 900 pulgadas. ■

DATO HISTÓRICO

■ Las sucesiones se cuentan entre los temas más antiguos de investigación matemática, han sido estudiadas durante más de 3500 años. Sin embargo, después de los pasos iniciales, se lograron pocos avances hasta alrededor del año 1600.

Las sucesiones aritméticas y geométricas aparecen en el papiro de Rhind, un texto matemático que contiene 85 problemas copiados alrededor de 1650 a. C., por el escriba egipcio Ahmes de un trabajo anterior (*véase* problema histórico 1). Fibonacci (1220 d. C.) escribió acerca de problemas semejantes a los del papiro de Rhind, lo cual nos lleva a sospechar que Fibonacci pudo haber dispuesto de material valioso que ahora está perdido. Este material habría estado basado en la tradición no euclidiana griega de Herón (alrededor de 75 d. C.) y Diofanto (alrededor de 250 d. C.). Un problema, nuevamente modificado un poco, sobrevive hasta nuestros días en el acertijo popular "Cuando iba a San Ives ..." (*Véase* el problema histórico 2.)

El papiro de Rhind indica que los egipcios sabían cómo sumar los términos de una sucesión aritmética y de una geométrica, igual que los babilonios. La regla para sumar una sucesión geométrica se encuentra en los *Elementos* de Euclides (libro IX, 35, 36) donde, al igual que toda el álgebra de Euclides, se presenta en forma geométrica.

Las investigaciones de otras clases de sucesiones empezaron en el siglo XVI, cuando el álgebra estaba lo suficientemente desarrollada como para manejar problemas más complicados. El desarrollo del cálculo en el siglo XVII añadió una herramienta muy poderosa, en especial para encontrar la suma de series infinitas; y la materia sigue floreciendo hoy en día. ■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. *Problema de una sucesión aritmética del papiro de Rhind (por claridad, el planteamiento ha sido modificado ligeramente)* Un ciento de piezas de pan es dividido entre cinco personas de modo que las cantidades distribuidas formen una sucesión aritmética. Las primeras dos personas, juntas, reciben un séptimo de lo que reciben las otras tres. ¿Cuánto recibe cada una? [*Respuesta parcial*: La primera persona recibe $1\frac{2}{3}$ de piezas de pan.]

2. La siguiente es una rima antigua para niños que se parece a uno de los problemas del papiro de Rhind:

Cuando iba a San Ives
Encontré a un hombre con siete esposas
Cada esposa llevaba siete costales
Cada costal tenía siete gatos
Cada gato tenía siete gatitos
Gatitos, gatos, costales y esposas
¿Cuántos iban a San Ives?

(a) Si suponemos que el narrador y el criador de gatos se encuentran recorriendo direcciones opuestas, ¿cuál es la respuesta?
(b) ¿Cuántos gatitos son transportados?
(c) Gatitos, gatos, costales, esposas; ¿cuántos son? [*Sugerencia*: Es más fácil, si se incluye al hombre, encontrar la suma con la fórmula y luego restarle un 1 al resultado.] ■

11.3

Ejercicio 11.3

En los problemas del 1 al 10 se da una sucesión geométrica. Encuentre la razón y escriba los cuatro primeros términos.

1. $\{3^n\}$ **2.** $\{(-5)^n\}$ **3.** $\left\{-3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ **4.** $\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^n\right\}$ **5.** $\left\{\frac{2^{n-1}}{4}\right\}$

6. $\left\{\frac{3^n}{9}\right\}$ **7.** $\{2^{n/3}\}$ **8.** $\{3^{2n}\}$ **9.** $\left\{\frac{3^{n-1}}{2^n}\right\}$ **10.** $\left\{\frac{2^n}{3^{n-1}}\right\}$

En los problemas del 11 al 24, determine si la sucesión dada es aritmética, geométrica o de ninguno de los dos tipos. Si la sucesión es aritmética, encuentre la diferencia común; si es geométrica, encuentre la razón común.

11. $\{n+2\}$ **12.** $\{2n-5\}$ **13.** $\{4n^2\}$ **14.** $\{5n^2+1\}$ **15.** $\{3-\frac{2}{3}n\}$

16. $\{8-\frac{3}{4}n\}$ **17.** $1, 3, 6, 10, \ldots$ **18.** $2, 4, 6, 8, \ldots$ **19.** $\{(\frac{2}{3})^n\}$ **20.** $\{(\frac{5}{4})^n\}$

21. $-1, -2, -4, -8, \ldots$ **22.** $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ **23.** $\{3^{n/2}\}$ **24.** $\{(-1)^n\}$

En los problemas del 25 al 32, encuentre el quinto y el n-ésimo términos de la sucesión geométrica cuyo término inicial a *y razón común* r *están dados.*

25. $a=2;\ r=3$ **26.** $a=-2;\ r=4$ **27.** $a=5;\ r=-1$

28. $a=6;\ r=-2$ **29.** $a=0;\ r=\frac{1}{2}$ **30.** $a=1;\ r=-\frac{1}{3}$

31. $a=\sqrt{2};\ r=\sqrt{2}$ **32.** $a=0;\ r=1/\pi$

En los problemas del 33 al 38 encuentre el término indicado de cada sucesión geométrica.

33. Séptimo término de $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ **34.** Octavo término de $1, 3, 9, \ldots$

35. Noveno término de $1, -1, 1, \ldots$ **36.** Décimo término de $-1, 2, -4, \ldots$

37. Octavo término de $0.4, 0.04, 0.004, \ldots$ **38.** Séptimo término de $0.1, 1.0, 10.0, \ldots$

En los problemas del 39 al 44 encuentre la suma.

39. $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2^2}{4}+\frac{2^3}{4}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{4}$ **40.** $\frac{3}{9}+\frac{3^2}{9}+\frac{3^3}{9}+\cdots+\frac{3^n}{9}$

41. $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ **42.** $\sum_{k=1}^{n}4\cdot 3^{k-1}$

43. $-1-2-4-8-\cdots-(2^{n-1})$ **44.** $2+\frac{6}{5}+\frac{18}{25}+\cdots+2\left(\frac{3}{5}\right)^n$

En los problemas del 45 al 54 encuentre la suma de cada serie geométrica.

45. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots$ **46.** $2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\cdots$

47. $8+4+2+\cdots$ **48.** $6+2+\frac{2}{3}+\cdots$

49. $2-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-\frac{1}{32}+\cdots$ **50.** $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\cdots$

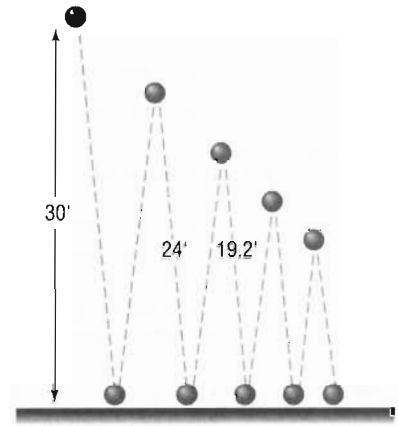
51. $\sum_{k=1}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$ **52.** $\sum_{k=1}^{\infty} 8\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ **53.** $\sum_{k=1}^{\infty} 6\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ **54.** $\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

55. Encuentre x de modo que x, $x + 2$, y $x + 3$ sean los términos de una sucesión geométrica.

56. Encuentre x de modo que $x - 1$, x, y $x + 2$ sean los términos de una sucesión geométrica.

57. *Oscilación de un péndulo.* En el inicio, un péndulo oscila a lo largo de un arco de 2 pies. En cada oscilación sucesiva, la longitud del arco es 0.9 de la longitud anterior.

(a) ¿Cuál es la longitud del arco después de 10 oscilaciones?
(b) ¿En qué oscilación la longitud del arco es por primera vez menor que 1 pie?
(c) Después de 15 oscilaciones, ¿cuál es la longitud total que ha oscilado el péndulo?
(d) Cuando se detiene, ¿cuál es la longitud total que ha oscilado el péndulo?



58. *Rebote de una pelota.* Se deja caer una pelota desde una altura de 30 pies. Cada vez que la pelota golpea contra el piso rebota a 0.8 de la altura anterior.

(a) ¿Cuál es la altura a la que rebota la pelota después de que pega por tercera ocasión en el piso?
(b) ¿Cuál es la altura después del n-ésimo rebote?
(c) ¿Cuántas veces necesita pegar en el piso la pelota antes de que su altura sea menor de 6 pulgadas?
(d) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la pelota antes de dejar de rebotar?

59. *Aumento de salario.* Suponga que acaba de ser contratado con un salario anual de \$18,000.00 y espera recibir aumentos anuales del 5%. ¿Cuál será su salario al inicio del quinto año?

60. *Depreciación de equipo.* Una pieza nueva cuesta \$15,000.00. Cada año, para fines de impuestos, una compañía deprecia este valor en 15%. ¿Cuál es el valor que se le da al equipo después de 5 años?

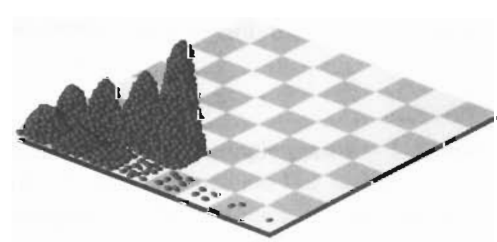
61. *Pensamiento crítico.* Usted acaba de firmar un contrato de 7 años con una liga de fútbol profesional y recibirá un salario inicial de \$2,000,000.00 anuales. La administración le propone las siguientes alternativas con respecto a su salario durante los siete años.

(1) Un bono de \$100,000.00 cada año.
(2) Un aumento anual del 4.5% por año iniciando después del primer año.
(3) Un aumento anual de \$95,000.00 por año iniciando después del primer año.

¿Cuál alternativa proporciona más dinero en el periodo de 7 años? ¿Cuál proporciona menos? ¿Cuál elegiría? ¿Por qué?

62. *La promesa de un hombre rico.* Un hombre rico promete darle a usted \$1000.00 el primero de septiembre de 1998. Cada día después le dará $\frac{9}{10}$ de lo que le dio el día anterior. ¿Cuál es la fecha en la que la cantidad que reciba será menor que 1 centavo? Cuando esto suceda, ¿cuánto habrá recibido?

63. *Granos de trigo en un tablero de ajedrez.* En un relato antiguo, a un plebeyo que acababa de salvar la vida del rey éste le preguntó lo que quería de recompensa. Siendo un hombre juicioso, el hombre dijo: "Mi deseo es simple, señor. Coloque un grano de trigo en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, dos granos en el segundo cuadro, cuatro granos en el tercer cuadro, y continúe sucesivamente hasta que haya terminado con todos los cuadros del tablero. Eso es todo lo que deseo." Calcule el número total de granos necesarios para satisfacer la petición anterior y vea por qué, siendo en apariencia simple, no puede ser cumplida. (Un tablero de ajedrez consiste de $8 \times 8 = 64$ cuadros.)



64. ¿Puede una sucesión ser al mismo tiempo aritmética y geométrica? Dé razones para su respuesta.

65. Construya una sucesión geométrica. Désela a un compañero y pregúntele por su vigésimo término.

66. Construya dos series geométricas infinitas, una que tenga una suma y otra que no la tenga. Désela a un compañero y pídale que encuentre la suma de cada serie.

67. Si $x < 1$, entonces $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = 1/(1 - x)$. Construya una tabla de valores usando $x = 0.1$, $x = 0.25$, $x = 0.5$, $x = 0.75$, y $x = 0.9$ para calcular $1/(1 - x)$. Luego determine cuántos términos son necesarios en el desarrollo $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ antes de que se aproxime a $1/(1 - x)$ redondeada a dos decimales. Por ejemplo, si $x = 0.1$, entonces $1/(1 - x) = 10/9 = 1.111\ldots$. El desarrollo requiere de tres términos.

68. ¿Cuál de las siguientes alternativas, *A* o *B*, tiene como resultado más dinero?

A: Recibir \$1000 el día 1, \$999 el día 2, \$998 el día 3, en un proceso que finaliza al cabo de 1000 días.

B: Recibir \$1 el día 1, \$2 el día 2, \$4 el día 3, durante 19 días

69. Usted está en una entrevista de trabajo y recibe dos ofertas:

A: \$20,000 iniciales con aumentos garantizados del 6% anual durante 5 años.

B: \$22,000 iniciales con aumentos garantizados del 3% anual durante 5 años.

Si su meta es ganar tanto dinero como sea posible después de 5 años, ¿cuál es la mejor oferta? ¿Cuál es mejor si su meta es ganar tanto dinero como sea posible durante la duración del contrato (cinco años)?

70. Observe la figura de la derecha. ¿Eventualmente, qué fracción del cuadrado estará sombreada si el proceso de sombreado que se indica continúa de manera indefinida?

11.4 Inducción matemática

La *inducción matemática* es un método para demostrar que enunciados que involucran a los números naturales son verdaderos para todos los números naturales.* Por ejemplo, el enunciado "$2n$ siempre es un entero par", puede demostrarse que es verdadero para todos los números naturales usando inducción matemática. También, el enunciado "la suma de los primeros n enteros impares positivos es igual a n^2", esto es,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{1}$$

puede demostrarse para todos los números naturales n usando inducción matemática.

Antes de empezar a estudiar el método de inducción matemática tratemos de adquirir un sentido de su potencialidad. Con este fin, usemos el enunciado de la ecuación (1) repitiéndolo para varios valores de $n = 1, 2, 3, \ldots$:

*Recuerde del capítulo 1 que los números naturales son 1, 2, 3, 4, ... En otras palabras, los términos *números naturales* y *enteros positivos* son sinónimos.

$n = 1$ La suma del primer entero positivo impar es 1^2: $1 = 1^2$.

$n = 2$ La suma de los primeros 2 enteros positivos impares es 2^2; $1 + 3 = 4 = 2^2$.

$n = 3$ La suma de los primeros 3 enteros positivos impares es 3^2; $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$.

$n = 4$ La suma de los primeros 4 enteros positivos impares es 4^2; $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

Aunque a partir de este patrón podríamos conjeturar que el enunciado (1) es verdadero para cualquier elección de n, ¿podemos estar seguros de que no falla para alguna elección de n? El método de demostración por inducción matemática, en realidad, demostrará que el enunciado es verdadero para toda n.

Teorema principio de inducción matemática

Suponga que se satisfacen las dos condiciones siguientes para un enunciado acerca de los números naturales:

CONDICIÓN I: El enunciado es cierto para el número natural 1.

CONDICIÓN II: Si el enunciado es verdadero para algún número natural k, también es verdadero para el siguiente número natural $k + 1$.

Entonces el enunciado es verdadero para todos los números naturales. ■

No demostraremos este principio. Sin embargo, podemos proporcionar una interpretación física que nos ayudará a ver por qué funciona. Piense en un conjunto de números naturales que cumplen el enunciado como un conjunto infinito de fichas de dominó (*véase* la figura 6).

FIGURA 6

Ahora, suponga que establecemos estos dos hechos:

1. Se hace caer la primera ficha.
2. Si una de las fichas de dominó cae, digamos la k-ésima, entonces también caerá la siguiente, la ficha $(k + 1)$.

¿Es seguro concluir que *todas* las fichas caerán? La respuesta es sí, ya que, si la primera cae (condición I), entonces la segunda caerá (por la condición II); y si la segunda cae, también lo hará la tercera (por la condición II); y así sucesivamente.

Ahora demostraremos algunos enunciados acerca de los números naturales usando inducción matemática.

EJEMPLO 1 *Uso de la inducción matemática*

Demostrar que el enunciado siguiente es verdadero para todos los números naturales n:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \tag{2}$$

Solución Primero necesitamos demostrar que el enunciado (2) se cumple para $n = 1$. Como $1 = 1^2$, el enunciado (2) es cierto para $n = 1$. Así, la condición I se satisface.

Ahora necesitamos demostrar que se cumple la condición II. Suponga que sabemos que para algún número k

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \tag{3}$$

Deseamos demostrar que, con base en la ecuación (3), el enunciado (2) se cumple para $k + 1$. Así, examinamos la suma de los primeros $k + 1$ enteros positivos impares para determinar si es igual a $(k + 1)^2$:

$$1 + 3 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = \underbrace{[1 + 3 + \cdots + (2k - 1)]}_{= k^2 \text{ por ecuación (3)}} + (2k + 1)$$
$$= k^2 + (2k + 1)$$
$$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Las condiciones I y II se satisfacen; así, por el principio de inducción matemática, el enunciado (2) es cierto para todos los números naturales. ■

EJEMPLO 2 *Uso de la inducción matemática*

Demostrar que el enunciado siguiente es verdadero para todos los números naturales n:

$$2^n > n$$

Solución Primero, demostramos que el enunciado $2^n > n$ es cierto para $n = 1$. Como $2^1 = 2 > 1$, la desigualdad es verdadera para $n = 1$. Así, se cumple la condición I.

Luego supongamos, para algún número natural k, que $2^k > k$. Deseamos demostrar que la fórmula se cumple para $k + 1$; esto es, deseamos demostrar que $2^{k+1} > k + 1$. Ahora,

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Sabemos que} \\ 2^k > k.}}{>} 2 \cdot k = k + k \underset{\substack{\uparrow \\ k \geq 1}}{\geq} k + 1$$

Así, si $2^k > k$, entonces $2^{k+1} > k + 1$, de modo que se satisface la condición II del principio de inducción matemática. De aquí que $2^n > n$ resulta verdadera para todos los números naturales n. ■

EJEMPLO 3 *Uso de la inducción matemática*

Demostrar que la fórmula siguiente es verdadera para todos los números naturales n:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2} \tag{4}$$

Solución Primero, demostramos que la fórmula (4) es verdadera para $n = 1$. Como

$$\frac{1(1 + 1)}{2} = \frac{1(2)}{2} = 1$$

Se cumple la condición I del principio de inducción matemática.

Ahora suponemos que se cumple la fórmula (4) para alguna k, y determinamos si entonces se cumple la fórmula para $k + 1$. Así, supongamos que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k + 1)}{2} \quad \text{para alguna } k \tag{5}$$

Ahora, necesitamos demostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 1 + 1)}{2} = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

Esto lo hacemos como sigue

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k + 1) = \underbrace{[1 + 2 + 3 + \cdots + k]}_{= \frac{k(k+1)}{2} \text{ por ecuación (5)}} + (k + 1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$
$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Así, se cumple la condición II. Como consecuencia de esto, la fórmula (4) resulta verdadera para todos los números naturales. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

EJEMPLO 4 *Uso de la inducción matemática*

Demostrar que $3^n - 1$ es divisible entre 2 para todos los números naturales n.

Solución Primero, demostramos que el enunciado es verdadero para $n = 1$. Como $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$ es divisible entre 2, el enunciado es verdadero para $n = 1$. Así, se satisface la condición I.

Ahora, suponemos que el enunciado se cumple para alguna k, y determinamos si se cumple para $k + 1$. Así, suponemos que $3^k - 1$ es divisible entre 2 para alguna k. Necesitamos demostrar que $3^{k+1} - 1$ es divisible entre 2. Luego,

$$\begin{aligned} 3^{k+1} - 1 &= 3^{k+1} - 3^k + 3^k - 1 \\ &= 3^k(3-1) + (3^k - 1) = 3^k \cdot 2 + (3^k - 1) \end{aligned}$$

Ya que $3^k \cdot 2$ es divisible entre 2 y $3^k - 1$ es divisible entre 2, se deduce que $3^k \cdot 2 + (3^k - 1) = 3^{k+1} - 1$ es divisible entre 2. Así, también se satisface la condición II. En consecuencia, el enunciado "$3^n - 1$ es divisible entre 2" es verdadero para todos los números naturales n. ■

Advertencia: La conclusión de que un enunciado que involucra a los números naturales es verdadero para todos los números naturales, se obtiene sólo después de que *ambas* condiciones, I y II, del principio de inducción matemática han sido satisfechas. El problema 27 del ejercicio que viene a continuación muestra un enunciado para el que sólo se cumple la condición I, pero que no es cierto para todos los números naturales. El problema 28 muestra un enunciado para el que sólo se cumple la condición II, pero que *no* es verdadero para cualquier número natural.

11.4

Ejercicio 11.4

En los problemas del 1 al 26, utilice el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero para todos los números naturales.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$

2. $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) = n(2n-1)$

3. $3 + 4 + 5 + \cdots + (n+2) = \frac{1}{2}n(n+5)$

4. $3 + 5 + 7 + \cdots + (2n+1) = n(n+2)$

5. $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \frac{1}{2}n(3n+1)$

6. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$

7. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

8. $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

9. $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

10. $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

11. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

12. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

13. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

14. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

15. $4 + 3 + 2 + \cdots + (5-n) = \frac{1}{2}n(9-n)$

16. $-2 - 3 - 4 - \cdots - (n + 1) = -\frac{1}{2}n(n + 3)$

17. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2)$

18. $1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \cdots + (2n - 1)(2n) = \frac{1}{3}n(n + 1)(4n - 1)$

19. $n^2 + n$ es divisible entre 2.

20. $n^3 + 2n$ es divisible entre 3.

21. $n^2 - n + 2$ es divisible entre 2.

22. $n(n + 1)(n + 2)$ es divisible entre 6.

23. Si $x > 1$, entonces $x^n > 1$.

24. Si $0 < x < 1$, entonces $0 < x^n < 1$.

25. $a - b$ es factor de $a^n - b^n$. [*Sugerencia:* $a^{k+1} - b^{k+1} = a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$]

26. $a + b$ es un factor de $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

27. Demuestre que el enunciado "$n^2 - n + 41$ es un número primo", es verdadero para $n = 1$, pero no para $n = 41$.

28. Demuestre que la fórmula

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n + 2$$

cumple la condición II del principio de inducción matemática. Esto es, demuestre que si la fórmula es verdadera para algún k, también lo es para $k + 1$. Luego demuestre que la fórmula es falsa para $n = 1$ (o para cualquier otra elección de n).

29. Utilice inducción matemática para demostrar que si $r \neq 1$ entonces

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

30. Utilice inducción matemática para demostrar que

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = na + d\frac{n(n - 1)}{2}$$

31. *Geometría.* Utilice inducción matemática para demostrar que la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

32. *El principio ampliado de inducción matemática.* El principio ampliado de inducción matemática establece que si se cumplen las condiciones I y II, esto es,

(I) Un enunciado es cierto para algún número natural j.

(II) Si el enunciado es verdadero para algún número natural $k > j$, entonces también es cierto para el siguiente número natural $k + 1$.

Entonces, el enunciado es verdadero para *todos* los números naturales $\geq j$.

Utilice el principio ampliado de inducción matemática para demostrar que el número de diagonales en un polígono convexo de n lados es $\frac{1}{2}n(n - 3)$. [*Sugerencia:* Empiece demostrando que el enunciado es cierto cuando $n = 4$ (condición I).]

33. ¿Cómo explicaría a un compañero el principio de inducción matemática?

11.5 Teorema del binomio

El *teorema del binomio** es una fórmula para el desarrollo de $(x + a)^n$ para cualquier entero positivo. Si $n = 1, 2, 3,$ y 4, el desarrollo de $(x + a)^n$ puede calcularse directamente:

$(x + a)^1 = x + a$	2 términos, empezando con x^1 y terminando con a^1
$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	3 términos, empezando con x^2 y terminando con a^2
$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$	4 términos, empezando con x^3 y terminando con a^3
$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$	5 términos, empezando con x^4 y terminando con a^4

**Binomio* se deriva del hecho que $x + a$ es un binomio, es decir, contiene dos términos.

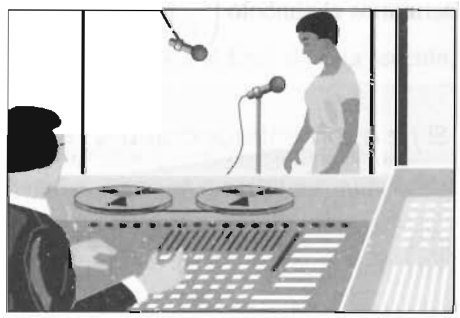
MISIÓN POSIBLE

Capítulo 11

OBTENER EL MAYOR PROVECHO DE UN CONTRATO

Usted y su orquesta acaban de firmar un contrato de grabación con el estudio de grabación reconocido nacionalmente, NASBURG TENS. Ellos le han prometido \$200,000.00 al año durante seis años, más una posibilidad de entre las cuatro siguientes:

(a) Un bono de \$10,000.00 por año.
(b) Un aumento anual del 4.5% anual (iniciando después del primer año).
(c) Un aumento anual del 6% anual (iniciando después del segundo año).
(d) Un aumento anual de \$9,500.00 anuales (iniciando después del primer año).



El día de hoy usted tiene que comunicarles su decisión acerca de cuál posibilidad ha elegido. Su agente se encuentra fuera de la ciudad y fuera del alcance de su teléfono celular, de modo que usted tendrá que hacer los cálculos matemáticos.

1. Para cada alternativa, encuentre cual será su pago por año durante los seis años. Redondee al entero más cercano.
2. Identifique cuáles posibilidades son ejemplos de sucesiones aritméticas o geométricas.
3. Calcule para cada caso cuánto le pagará el estudio en total durante los seis años. ¿Tiene fórmulas que le reduzcan este trabajo?
4. ¿Cuál posibilidad le rendirá más en total? ¿Hay alguna consideración o circunstancia que pueda resultar más conveniente aunque ustedes reciban menos dinero? ¿Hay ventajas en el hecho de que se les pague más al inicio del contrato? ¿Cuáles son?

Observe que cada desarrollo de $(x + a)^n$ empieza con x^n y termina con a^n; y que conforme se lee de izquierda a derecha, las potencias de x van disminuyendo mientras que las de a aumentan. Además, el número de términos que aparecen es igual a $n + 1$. También observe que el grado de cada monomio en este desarrollo es igual a n. Por ejemplo, en $(x + a)^3$, cada monomio $(x^3, 3ax^2, 3a^2x, a^3)$ es de grado 3. En consecuencia, podríamos conjeturar que el desarrollo de $(x + a)^n$ sería de este estilo:

$$(x + a)^n = x^n + \_\_ax^{n-1} + \_\_a^2x^{n-2} + \cdots + \_\_a^{n-1}x + a^n$$

donde los espacios en blanco representan números que deben ser buscados. Este es, en realidad, el caso, como veremos dentro de poco.

Primero, necesitamos introducir un símbolo.

El Símbolo $\binom{n}{j}$

Definimos el símbolo $\binom{n}{j}$, que se lee "n tomados de j en j", como sigue:

Símbolo $\binom{n}{j}$

Si j y n son enteros con $0 \leq j \leq n$, el símbolo $\binom{n}{j}$ se define como

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \qquad (1)$$

Comentario: En una calculadora, el símbolo $\binom{n}{j}$ puede estar denotado por la tecla $\boxed{\text{nCr}}$ o por la tecla $\boxed{\text{COMB}}$.

EJEMPLO 1 *Evaluación de* $\binom{n}{j}$

Encontrar:

(a) $\binom{3}{1}$ (b) $\binom{4}{2}$ (c) $\binom{8}{7}$ (d) $\binom{65}{15}$

Solución

(a) $\binom{3}{1} = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} = \dfrac{3!}{1!2!} = \dfrac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1(2 \cdot 1)} = \dfrac{6}{2} = 3$

(b) $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{4!}{2!2!} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1)(2 \cdot 1)} = \dfrac{24}{4} = 6$

(c) $\binom{8}{7} = \dfrac{8!}{7!(8-7)!} = \dfrac{8!}{7!1!} = \dfrac{8 \cdot 7!}{7! \cdot 1!} = \dfrac{8}{1} = 8$

$8! = 8 \cdot 7!$

(d) Usamos una calculadora.

Teclear: $\boxed{65}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{nCr}}$ $\boxed{15}$ $\boxed{=}$

Teclear: $\boxed{65}$ $\boxed{15}$ $\boxed{2.073747\ ^{14}}$

Así, $\binom{65}{15} = 2.073747 \times 10^{14}$. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Dos fórmulas útiles que involucran al símbolo $\binom{n}{j}$ son

$$\boxed{\binom{n}{0} = 1 \quad \text{y} \quad \binom{n}{n} = 1}$$

Demostración

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{1} = 1$$

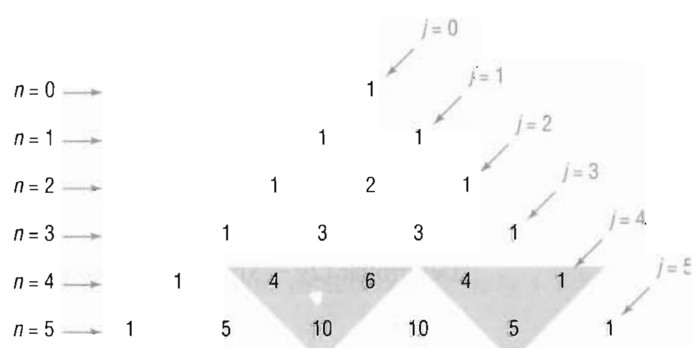
En el problema 41, al final de esta sección, se le pide demostrar que $\binom{n}{n} = 1$ ■

Suponga que acomodamos los diferentes valores del símbolo $\binom{n}{j}$ en forma triangular, como se muestra a continuación en la figura 7:

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}
\end{array}$$

Este es el llamado **triángulo de Pascal,** en honor de Blas Pascal (1623–1662), un matemático francés.

FIGURA 7
Triángulo de Pascal.



El triángulo de Pascal tiene números uno en los extremos. Para obtener cualquier otra entrada, sólo sume las dos entradas más cercanas del renglón inmediato superior. Los triángulos sombreados en la figura 7 sirven para ilustrar esta característica del triángulo de Pascal. Con base en esto, el renglón correspondiente a $n = 6$ se encontró como sigue:

$n = 5 \rightarrow$ 1 5 10 10 5 1

$n = 6 \rightarrow$ 1 6 15 20 15 6 1

Más adelante probaremos que esta suma siempre funciona (*véase* el teorema en la página 718).

Aunque el triángulo de Pascal proporciona una representación interesante y organizada del símbolo $\binom{n}{j}$, en la práctica no es tan útil. Por ejemplo, si quisiéramos conocer el valor de $\binom{12}{5}$, necesitaríamos escribir doce renglones del triángulo antes de ver la respuesta. En lugar de eso, resulta mucho más fácil usar la definición (1).

El teorema del binomio

Ahora ya estamos preparados para establecer el **teorema del binomio;** el cual se demuestra al final de esta sección.

Teorema

Sean x y a números reales. Para cualquier entero positivo, tenemos

Teorema del binomio

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + \binom{n}{j}a^jx^{n-j} + \cdots + \binom{n}{n}a^n$$
$$= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j}a^j \qquad (2)$$

Ahora sabemos por qué necesitábamos introducir el símbolo $\binom{n}{j}$; estos símbolos son los coeficientes numéricos que aparecen en el desarrollo de $(x + a)^n$. Por eso, el símbolo $\binom{n}{j}$ es llamado **coeficiente binomial.**

EJEMPLO 2 *Desarrollo de un binomio*

Usar el teorema del binomio para desarrollar $(x + 2)^5$.

Solución En el teorema del binomio, sea $a = 2$ y $n = 5$. Entonces

$$(x + 2)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}2x^4 + \binom{5}{2}2^2x^3 + \binom{5}{3}2^3x^2 + \binom{5}{4}2^4x + \binom{5}{5}2^5$$

Usar la ecuación (2).

$$= 1 \cdot x^5 + 5 \cdot 2x^4 + 10 \cdot 4x^3 + 10 \cdot 8x^2 + 5 \cdot 16x + 1 \cdot 32$$

Usar el renglón $n = 5$ del triángulo de Pascal o la fórmula (1) para $\binom{n}{j}$.

$$= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$$

EJEMPLO 3 *Desarrollo de un binomio*

Desarrollar $(2y - 3)^4$ usando el teorema del binomio.

Solución Primero, reescribimos la expresión $(2y - 3)^4$ como $[2y + (-3)]^4$. Luego usamos el teorema del binomio con $n = 4$, $x = 2y$, y $a = -3$:

$$
\begin{aligned}
[2y + (-3)]^4 &= \binom{4}{0}(2y)^4 + \binom{4}{1}(-3)(2y)^3 + \binom{4}{2}(-3)^2(2y)^2 \\
&\quad + \binom{4}{3}(-3)^3(2y) + \binom{4}{4}(-3)^4 \\
&= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usar el renglón } n = 4 \text{ del triángulo de Pascal o la fórmula (1) para } \binom{n}{j}}}{1} \cdot 16y^4 + 4(-3)8y^3 + 6 \cdot 9 \cdot 4y^2 + 4(-27)2y + 1 \cdot 81 \\
&= 16y^4 - 96y^3 + 216y^2 - 216y + 81
\end{aligned}
$$

Observe que en este desarrollo los signos se alternan debido a que $a = -3 < 0$. ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

EJEMPLO 4 *Determinación de un coeficiente particular en el desarrollo de un binomio*

Encontrar el coeficiente de y^8 en el desarrollo de $(2y + 3)^{10}$.

Solución Escribimos el desarrollo usando el teorema del binomio:

$$
\begin{aligned}
(2y + 3)^{10} &= \binom{10}{0}(2y)^{10} + \binom{10}{1}(2y)^9(3)^1 + \binom{10}{2}(2y)^8(3)^2 + \binom{10}{3}(2y)^7(3)^3 \\
&\quad + \binom{10}{4}(2y)^6(3)^4 + \cdots + \binom{10}{9}(2y)(3)^9 + \binom{10}{10}(3)^{10}
\end{aligned}
$$

Del tercer término en la expresión, el coeficiente de y^8 es

$$\binom{10}{2}(2)^8(3)^2 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 2^8 \cdot 9 = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2 \cdot \cancel{8!}} \cdot 2^8 \cdot 9 = 103{,}680$$ ■

Como lo demuestra esta solución, podemos usar el teorema del binomio para escribir un término particular en un desarrollo sin tener que escribir todo el desarrollo. Con base en el desarrollo de $(x + a)^n$, el término con x^j es

$$\boxed{\binom{n}{n-j}a^{n-j}x^j \qquad (3)}$$

Por ejemplo, podemos resolver el ejemplo 4 usando la fórmula (3) con $n = 10$, $a = 3$, $x = 2y$, y $j = 8$. Entonces el término con y^8 es

$$
\begin{aligned}
\binom{10}{10-8}3^{10-8}(2y)^8 &= \binom{10}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^8 \cdot y^8 = \frac{10!}{2!8!} \cdot 9 \cdot 2^8y^8 \\
&= \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{2!\cancel{8!}} \cdot 9 \cdot 2^8y^8 = 103{,}680y^8
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 5 *Determinación de un término particular en el desarrollo de un binomio*

Determinar el sexto término en el desarrollo de $(x + 2)^9$.

Solución A Desarrollamos usando el teorema del binomio hasta llegar al sexto término:

$$(x+2)^9 = \binom{9}{0}x^9 + \binom{9}{1}x^8\cdot 2 + \binom{9}{2}x^7\cdot 2^2 + \binom{9}{3}x^6\cdot 2^3 + \binom{9}{4}x^5\cdot 2^4 + \binom{9}{5}x^4\cdot 2^5 + \cdots$$

El sexto término es

$$\binom{9}{5}x^4\cdot 2^5 = \frac{9!}{5!4!}\cdot x^4\cdot 32 = 4032x^4$$

Solución B El sexto término en la expresión de $(x+2)^9$, que tiene diez términos en total, contiene a x^4. (¿Advierte por qué?) Así, por la fórmula (3), el sexto término es

$$\binom{9}{9-4}2^{9-4}x^4 = \binom{9}{5}2^5x^4 = \frac{9!}{5!4!}\cdot 32x^4 = 4032x^4$$

■ Ahora resuelva los problemas 25 y 31.

A continuación demostramos que la característica de "sumar en triángulo" del triángulo de Pascal ilustrada en la figura 7 siempre funciona.

Teorema Si n y j son enteros con $1 \le j \le n$, entonces

$$\boxed{\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j} \qquad (4)}$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} &= \frac{n!}{(j-1)![n-(j-1)]!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} \\
&= \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} \\
&= \frac{jn!}{j(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{(n-j+1)n!}{j!(n-j+1)(n-j)!} \\
&= \frac{jn!}{j!(n-j+1)!} + \frac{(n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} \\
&= \frac{jn! + (n-j+1)n!}{j!(n-j+1)!} \\
&= \frac{n!(j+n-j+1)}{j!(n-j+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{j!(n-j+1)!} = \frac{(n+1)!}{j![(n+1)-j]!} = \binom{n+1}{j}
\end{aligned}$$

Multiplicar el primer término por j/j y el segundo por $(n-j+1)/(n-j+1)$.

Ahora los denominadores son iguales.

Demostración del teorema del binomio Usamos inducción matemática para demostrar el teorema del binomio. Primero, demostramos que la fórmula (2) es verdadera para $n = 1$:

$$(x+a)^1 = x + a = \binom{1}{0}x^1 + \binom{1}{1}a^1$$

Ahora suponemos que la fórmula (2) es verdadera para alguna k. Esto es, suponemos que

$$(x+a)^k = \binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}ax^{k-1} + \cdots + \binom{k}{j-1}a^{j-1}x^{k-j+1} + \binom{k}{j}a^jx^{k-j} + \cdots + \binom{k}{k}a^k \tag{5}$$

Ahora calculemos $(x+a)^{k+1}$:

$$\begin{aligned}
(x+a)^{k+1} &= (x+a)(x+a)^k = x(x+a)^k + a\,(x+a)^k \\
&\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Usar la ecuación (5)}}}{=} x\left[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}ax^{k-1} + \cdots + \binom{k}{j-1}a^{j-1}x^{k-j+1} + \binom{k}{j}a^jx^{k-j} + \cdots + \binom{k}{k}a^k\right] \\
&\quad + a\left[\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}ax^{k-1} + \cdots + \binom{k}{j-1}a^{j-1}x^{k-j+1} + \binom{k}{j}a^jx^{k-j} + \cdots + \binom{k}{k-1}a^{k-1}x + \binom{k}{k}a^k\right] \\
&= \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}ax^k + \cdots + \binom{k}{j-1}a^{j-1}x^{k-j+2} + \binom{k}{j}a^jx^{k-j+1} + \cdots + \binom{k}{k}a^kx \\
&\quad + \binom{k}{0}ax^k + \binom{k}{1}a^2x^{k-1} + \cdots + \binom{k}{j-1}a^jx^{k-j+1} + \binom{k}{j}a^{j+1}x^{k-j} + \cdots + \binom{k}{k-1}a^kx + \binom{k}{k}a^{k+1} \\
&= \binom{k}{0}x^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]ax^k + \cdots + \left[\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1}\right]a^jx^{k-j+1} + \cdots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]a^kx + \binom{k}{k}a^{k+1}
\end{aligned}$$

Ya que

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0},\quad \binom{k}{1} + \binom{k}{0} \underset{\substack{\uparrow\\(4)}}{=} \binom{k+1}{1},\quad \ldots,$$

$$\binom{k}{j} + \binom{k}{j-1} \underset{\substack{\uparrow\\(4)}}{=} \binom{k+1}{j},\quad \ldots,\quad \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}$$

tenemos

$$(x+a)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}ax^k + \cdots + \binom{k+1}{j}a^jx^{k-j+1} + \cdots + \binom{k+1}{k+1}a^{k+1}$$

Así, se satisfacen las condiciones I y II del principio de inducción matemática y, por lo tanto, la fórmula (2) resulta ser verdadera para toda n. ■

DATO HISTÓRICO

■ El caso $n = 2$ del teorema del binomio, $(a+b)^2$, era ya conocido por Euclides 300 a. C., pero la ley general parece haber sido descubierta por el matemático y astrónomo persa Omar Khayam (1044?–1123?), quien también es conocido como el autor del *Rubaiyat*, una colección de poemas de cuatro líneas que contienen observaciones sobre la condición humana. Omar Khayam no estableció el teorema de manera explícita, pero afirmaba tener un método para extraer raíces tercera, cuarta, quinta, y así sucesivamente. Un poco de estudio demuestra que se debe conocer el teorema del binomio para crear tal método.

La parte principal del teorema del binomio es la fórmula para los coeficientes numéricos y, como vimos, estos pueden ser escritos en una forma triangular simétrica. El triángulo de Pascal apareció primero en los libros de Yang Hui (alrededor del año 1270) y Chu Shihchie (1303). El nombre de Pascal fue asociado con el triángulo a causa de la gran cantidad de aplicaciones en que lo usó él, en especial en conteo y probabilidad. Al fundamentar sus enunciados, Pascal se convirtió en uno de los primeros usuarios de la inducción matemática.

Mucha gente trabajó en la demostración del teorema del binomio, que finalmente fue completada para toda n (incluyendo números complejos) por Niels Abel (1802–1829). ∎

11.5

Ejercicio 11.5

En los problemas del 1 al 12 evalúe cada expresión.

1. $\binom{5}{3}$ **2.** $\binom{7}{3}$ **3.** $\binom{7}{5}$ **4.** $\binom{9}{7}$ **5.** $\binom{50}{49}$ **6.** $\binom{100}{98}$

7. $\binom{1000}{1000}$ **8.** $\binom{1000}{0}$ **9.** $\binom{55}{23}$ **10.** $\binom{60}{20}$ **11.** $\binom{47}{25}$ **12.** $\binom{37}{19}$

En los problemas del 13 al 24 desarrolle cada expresión usando el teorema del binomio.

13. $(x+1)^5$ **14.** $(x-1)^5$ **15.** $(x-2)^6$ **16.** $(x+3)^4$

17. $(3x+1)^4$ **18.** $(2x+3)^5$ **19.** $(x^2+y^2)^5$ **20.** $(x^2-y^2)^6$

21. $(\sqrt{x}+\sqrt{2})^6$ **22.** $(\sqrt{x}-\sqrt{3})^4$ **23.** $(ax+by)^5$ **24.** $(ax-by)^4$

En los problemas del 25 al 38 utilice el teorema del binomio para encontrar el coeficiente o término indicado.

25. El coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(x+3)^{10}$

26. El coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(x-3)^{10}$

27. El coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(2x-1)^{12}$

28. El coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(2x+1)^{12}$

29. El coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(2x+3)^9$

30. El coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(2x-3)^9$

31. El quinto término en $(x+3)^7$

32. El tercer término en $(x-3)^7$

33. El tercer término en $(3x-2)^9$

34. El sexto término en $(3x+2)^8$

35. El coeficiente de x^0 en el desarrollo de $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{12}$

36. El coeficiente de x^0 en el desarrollo de $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^9$

37. El coeficiente de x^4 en el desarrollo de $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

38. El coeficiente de x^2 en $\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^8$

39. Utilice el teorema del binomio para encontrar el valor numérico de $(1.001)^5$ redondeado a cinco decimales. [*Sugerencia:* $(1.001)^5 = (1+10^{-3})^5$]

40. Utilice el teorema del binomio para encontrar el valor numérico de $(0.998)^6$ redondeado a cinco decimales.

41. Demuestre que $\binom{n}{n} = 1$.

42. Demuestre que, si n y j son enteros con $0 \leq j \leq n$, entonces

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$$

Por lo tanto, concluya que el triángulo de Pascal es simétrico con respecto a una línea vertical dibujada desde la entrada superior.

43. Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

[*Sugerencia:* $2^n = (1 + 1)^n$; ahora use el teorema del binomio.]

44. Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

45. $$\binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right) + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5 = ?$$

46. La *fórmula de Stirling* para aproximar $n!$ cuando n es grande está dada por

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \frac{1}{12n - 1}\right)$$

Calcule $12!$, $20!$ y $25!$. Luego utilice la fórmula de Stirling para aproximar $12!$, $20!$ y $25!$.

11.6 Conjuntos y métodos de conteo

Conjunto

Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos distintos. Los objetos de un conjunto son llamados **elementos.** Por **bien definida,** queremos dar a entender que existe una regla para determinar si un objeto dado es elemento de un conjunto. Si un conjunto no tiene elementos es llamado **conjunto vacío,** o **conjunto nulo,** y se denota por el símbolo $\varnothing$.

Ya que los elementos de un conjunto son distintos, nunca los repetimos (en el mismo conjunto). Así, nunca debemos escribir $\{1, 2, 3, 2\}$; la lista correcta es $\{1, 2, 3\}$. Además, ya que un conjunto es una colección, el orden en que los elementos son enlistados no es importante. Por eso, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, etc., representan todos al mismo conjunto.

EJEMPLO 1 *Escritura de elementos de un conjunto*

Escribir el conjunto que consiste de los resultados posibles de dos lanzamientos de una moneda. Usar A para "águila" y S para "sol".*

Solución Al lanzar una moneda dos veces, podemos obtener águila las dos veces, AA; o águila la primera vez y sol la segunda, AS; o sol la primera vez y águila la segunda, SA; o sol las dos veces, SS. Ya que no existen otras posibilidades, el conjunto de resultados es

$$\{AA, AS, SA, SS\}$$

■

Si dos conjuntos A y B tienen precisamente los mismos elementos, entonces decimos que A y B son **iguales** y escribimos $A = B$.

Si cada elemento de un conjunto A también es un elemento de un conjunto B, entonces decimos que A es un **subconjunto** de B y escribimos $A \subseteq B$.

Si $A \subseteq B$ y $A \neq B$, entonces decimos que A es un **subconjunto propio** de B y escribimos $A \subset B$.

*Decir "águila o sol" en México equivale a decir "cara o cruz" en otras regiones de Hispanoamérica [N. del T.]

Así, cuando $A \subseteq B$, todo elemento en el conjunto A también está en el conjunto B, pero B puede o no tener elementos adicionales. Si $A \subset B$, todo elemento en A también está en B, y B tiene al menos un elemento que no está en A.

Por último, convenimos en que el conjunto vacío es un subconjunto de todo conjunto; esto es,

$$\varnothing \subseteq A \qquad \text{para cualquier conjunto } A$$

EJEMPLO 2 *Determinación de todos los subconjuntos de un conjunto*

Escribir todos los subconjuntos del conjunto $\{a, b, c\}$.

Solución Para organizar nuestro trabajo escribimos primero todos los subconjuntos que tienen cero elementos, luego aquellos con un elemento, después los que contienen dos elementos y, por último, los de tres elementos. Esto nos dará todos los subconjuntos. ¿Advierte por qué?

0 ELEMENTOS	1 ELEMENTO	2 ELEMENTOS	3 ELEMENTOS
$\varnothing$	$\{a\}, \{b\}, \{c\}$	$\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$	$\{a, b, c\}$

■ Ahora resuelva el problema 21.

Intersección; unión

Si A y B son conjuntos, la **intersección** de A con B, denotada $A \cap B$, es el conjunto que consiste de los elementos pertenecientes a A y a B. La **unión** de A con B, denotada $A \cup B$, es el conjunto que consiste de los elementos pertenecientes a A, a B o a ambos.

EJEMPLO 3 *Determinación de la intersección y la unión de conjuntos*

Sean $A = \{1, 3, 5, 8\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, y $C = \{2, 4, 6, 8\}$. Encontrar:

(a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $B \cap (A \cup C)$

Solución
(a) $A \cap B = \{1, 3, 5, 8\} \cap \{3, 5, 7\} = \{3, 5\}$
(b) $A \cup B = \{1, 3, 5, 8\} \cup \{3, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7, 8\}$
(c) $B \cap (A \cup C) = \{3, 5, 7\} \cap [\{1, 3, 5, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8\}]$
$= \{3, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \{3, 5\}$ ■

■ Ahora resuelva el problema 5.

Por lo común, al trabajar con conjuntos designamos un **conjunto universal**, o **universo**, el cual consiste de todos los elementos que deseamos considerar. Una vez designado el conjunto universal, podemos considerar elementos pertenecientes a él que no se encuentren en un conjunto dado.

Complemento

Si A es un conjunto, el **complemento** de A, denotado A', es el conjunto que consiste de todos los elementos que no están en A.

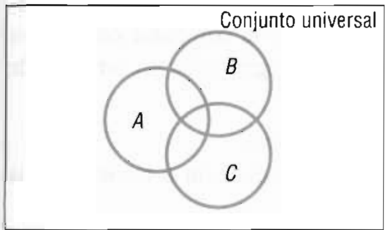
EJEMPLO 4 *Determinación del complemento de un conjunto*

Si el conjunto universal es $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, y si $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, entonces $A' = \{2, 4, 6, 8\}$. ■

Obsérvese que: $A \cup A' = U$ y $A \cap A' = \varnothing$.

■ Ahora resuelva el problema 13.

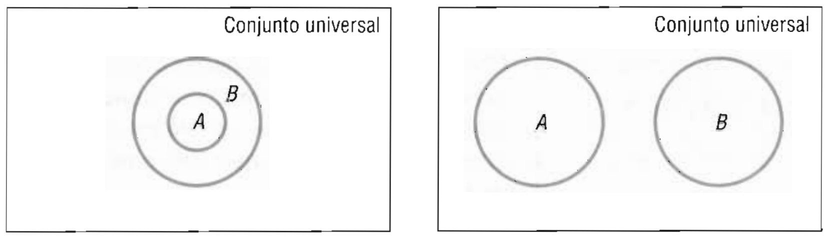
FIGURA 8



Con frecuencia resulta útil dibujar una ilustración de los conjuntos. Tales ilustraciones, llamadas **diagramas de Venn,** representan a los conjuntos como círculos encerrados en un rectángulo que representa al conjunto universal. Muchas veces tales diagramas nos ayudan a visualizar varias relaciones entre conjuntos. *Véase* la figura 8.

Si sabemos que $A \subseteq B$, podríamos usar el diagrama de Venn de la figura 9(a). Si sabemos que A y B no tienen elementos en común, esto es, si $A \cap B = \varnothing$, podríamos usar el diagrama de Venn de la figura 9(b).

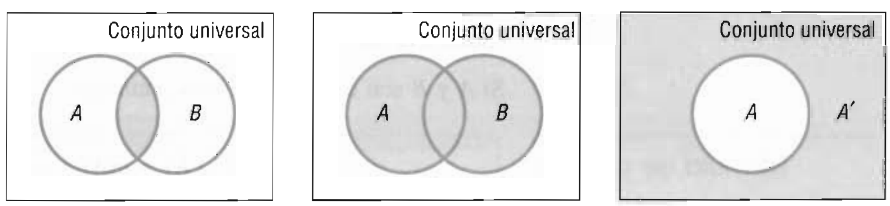
FIGURA 9



(a) $A \subseteq B$ **(b)** $A \cap B = \varnothing$

Las figuras 10(a), 10(b) y 10(c) usan diagramas de Venn para ilustrar las definiciones de intersección, unión y complemento, respectivamente.

FIGURA 10



(a) $A \cap B$ **(b)** $A \cup B$ **(c)** A'

Conteo

Cuando usted cuenta el número de estudiantes en un salón de clase o el número de centavos en su bolsa, lo que realmente hace es lograr la correspondencia uno a uno, entre cada objeto contado, con los números de conteo 1, 2, 3, ..., n, para algún número n. Si un conjunto A se hace corresponder de esta manera con el conjunto $\{1, 2, ..., 25\}$, concluiríamos que en el conjunto A hay 25 elementos. Usamos la notación $n(A) = 25$ para indicar que hay 25 elementos en el conjunto A.

Ya que el conjunto vacío no tiene elementos, escribimos

$$n(\varnothing) = 0$$

Si el número de elementos en un conjunto es un entero no negativo, decimos que el conjunto es **finito.** De otra forma es **infinito.** Aquí dedicaremos nuestro estudio sólo a conjuntos finitos.

Del ejemplo 2 podemos ver que un conjunto con 3 elementos tiene $2^3 = 8$ subconjuntos. En realidad, se puede demostrar que un conjunto con n elementos tiene exactamente 2^n elementos. Este hecho tiene una aplicación importante en las computadoras que estudiaremos al final de esta sección.

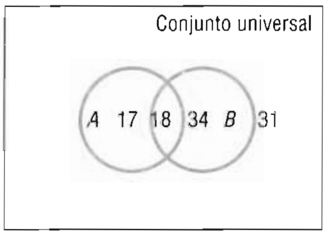
EJEMPLO 5

Análisis de la información de una encuesta

En una encuesta aplicada a 100 estudiantes de universidad se registró que 35 estaban inscritos en Álgebra, 52 en Introducción a ciencias de la computación y 18 en ambos cursos. ¿Cuántos de los encuestados no estaban registrados en ninguno de estos cursos?

Solución Primero, hacemos A = Conjunto de estudiantes en Álgebra,
B = Conjunto de estudiantes en Introducción a ciencias de la computación

FIGURA 11



Entonces la información nos dice que

$$n(A) = 35 \qquad n(B) = 52 \qquad n(A \cap B) = 18$$

Observe la figura 11, ¿advierte cómo fueron determinadas las entradas numéricas? Con base en este diagrama concluimos que $17 + 18 + 34 = 69$ estudiantes estaban registrados en al menos uno de los dos cursos. Ya que la encuesta se aplicó a 100 estudiantes, se deduce que $100 - 69 = 31$ no estaban registrados en ningún curso de los mencionados. ■

■ Ahora resuelva el problema 35.

Las conclusiones sacadas del ejemplo 5 nos conducen al planteamiento de una fórmula general de conteo. Si contamos los elementos en cada uno de los conjuntos A y B, contaremos necesariamente dos veces los elementos que están en ambos conjuntos, esto es, aquellos elementos que están en $A \cap B$. Así, para contar correctamente los elementos que están en A o en B, esto es, para encontrar $n(A \cup B)$, necesitamos restar los que están en $A \cap B$ de $n(A) + n(B)$.

Teorema Si A y B son conjuntos finitos, entonces

Fórmula de conteo

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \tag{1}$$

■

Un caso especial de la fórmula de conteo (1) ocurre cuando A y B no tienen elementos en común. En este caso, $A \cap B = \varnothing$ de modo que $n(A \cap B) = 0$.

Teorema Si dos conjuntos A y B no tienen elementos en común, entonces

Principio de adición de conteo

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \tag{2}$$

■

EJEMPLO 6

Conteo del número de códigos posibles

Un código consiste de una letra del alfabeto o de un dígito, pero no de ambos. ¿Cuántos códigos son posibles?

Solución Sean los conjuntos A y B definidos como

A = Conjunto de letras del alfabeto

B = Conjunto de dígitos $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

Entonces

$$n(A) = 26 \qquad n(B) = 10$$

Ya que las letras y los dígitos son diferentes, $A \cap B = \varnothing$. Por lo tanto, el número de maneras en que una letra o un dígito pueden ser seleccionados es,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 26 + 10 = 36$$

Aplicación a las computadoras

La información almacenada en una computadora puede conceptualizarse como una serie de interruptores, los cuales están encendidos o apagados y denotados por el número 0 (apagado) o el número 1 (encendido). Estos números son los dígitos binarios, o **bits.** Un **registro** tiene cierto número fijo de *bits*. Por ejemplo, el microprocesador Z-80 tiene registros de 8 *bits*; la minicomputadora PDP-11 tiene registros de 16 *bits*, y la computadora IBM-370 tiene registros de 32 *bits*. Así, un registro del Z-80 puede tener una entrada que se vea como: 01111001 (8 *bits*). Deseamos determinar cuántas representaciones diferentes son posibles en un registro dado.

Vayamos por pasos y consideremos primero un registro hipotético de 3 *bits*. Tomamos la solución del ejemplo 2 y acomodamos todos los subconjuntos de $\{a, b, c\}$ como se muestra en la tabla 1. Como lo ilustra la tabla, el número de subconjuntos de un conjunto de 3 elementos es igual al número de representaciones diferentes en un registro de 3 *bits*. Un conjunto con n elementos tiene 2^n elementos; así, un registro de n *bits* tiene 2^n representaciones. De modo que un registro de 8 *bits* puede contener $2^8 = 256$ símbolos diferentes, un registro de 16 *bits* puede contener $2^{16} = 65{,}536$ símbolos diferentes, y un registro de 32 *bits* puede contener $2^{32} \approx 4.3 \times 10^9$ símbolos diferentes.

TABLA 1

a	b	c	SUBCONJUNTO
0	0	0	$\varnothing$
1	0	0	$\{a\}$
0	1	0	$\{b\}$
0	0	1	$\{c\}$
1	1	0	$\{a, b\}$
0	1	1	$\{b, c\}$
1	0	1	$\{a, c\}$
1	1	1	$\{a, b, c\}$

11.6

Ejercicio 11.6

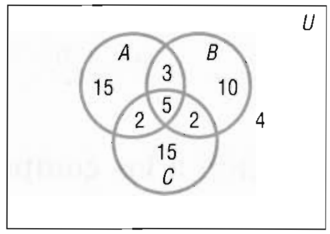
En los problemas del 1 al 10 utilice $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 5, 6, 7\}$, *y* $C = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ *para determinar cada conjunto.*

1. $A \cup B$
2. $A \cup C$
3. $A \cap B$
4. $A \cap C$
5. $(A \cup B) \cap C$
6. $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
7. $(A \cap B) \cup C$
8. $(A \cup B) \cup C$
9. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$
10. $(A \cap B) \cap C$

En los problemas del 11 al 20 utilice $U =$ *conjunto universal* $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 4, 5, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, *y* $C = \{1, 3, 4, 6\}$, *para determinar cada conjunto.*

11. A'
12. C'
13. $(A \cap B)'$
14. $(B \cup C)'$
15. $A' \cup B'$
16. $B' \cap C'$
17. $(A \cap C')'$
18. $(B' \cup C)'$
19. $(A \cup B \cup C)'$
20. $(A \cap B \cap C)'$
21. Escriba todos los subconjuntos de $\{a, b, c, d\}$.
22. Escriba todos los subconjuntos de $\{a, b, c, d, e\}$.
23. Si $n(A) = 15$, $n(B) = 20$, y $n(A \cap B) = 10$, encuentre $n(A \cup B)$.
24. Si $n(A) = 20$, $n(B) = 40$, y $n(A \cup B) = 35$, encuentre $n(A \cap B)$.
25. Si $n(A \cup B) = 50$, $n(A \cap B) = 10$, y $n(B) = 20$, determine $n(A)$.
26. Si $n(A \cup B) = 60$, $n(A \cap B) = 40$, y $n(A) = n(B)$, encuentre $n(A)$.

En los problemas del 27 al 34 use la información dada en la figura para determinar la cantidad de elementos de los conjuntos.



27. ¿Cuántos están en el conjunto A?

28. ¿Cuántos están en el conjunto B?

29. ¿Cuántos están en A o en$B$?

30. ¿Cuántos están en A y B?

31. ¿Cuántos están en A pero no en C?

32. ¿Cuántos no están en A?

33. ¿Cuántos están en A y en B y en C?

34. ¿Cuántos están en A o en B o en C?

35. *Análisis de la información de una encuesta.* En una encuesta de consumidores aplicada a 500 personas, 200 indicaron que comprarían un aparato electrodoméstico en el siguiente mes; 150 indicaron que comprarían un automóvil y 25 dijeron que comprarían un aparato electrodoméstico y un automóvil. ¿Cuántos no comprarán ninguna de las dos cosas? ¿Cuántos comprarán sólo un automóvil?

36. *Análisis de la información de una encuesta.* En una encuesta aplicada a estudiantes, 200 indicaron que asistirían a la Sesión de verano I y 150 indicaron que asistirían a la Sesión de verano II. Si 75 estudiantes planearon asistir a ambas sesiones y 275 indicaron que no asistirían a éstas, ¿cuántos estudiantes participaron en la encuesta?

37. *Análisis de la información de una encuesta.* En una encuesta aplicada a 100 inversionistas del mercado de acciones, los propietarios de estos valores se clasificaron como sigue:

50 en IBM
40 en AT&T
45 en GE
20 en IBM y en AT&T
20 en IBM y GE
15 en AT&T y GE
5 en las tres empresas

(a) ¿Cuántos inversionistas encuestados no tenían acciones de ninguna de las tres compañías?
(b) ¿Cuántos sólo tenían acciones de IBM?
(c) ¿Cuántos sólo tenían acciones de GE?
(d) ¿Cuántos no tenían acciones de IBM ni de GE?
(e) ¿Cuántos tenían acciones de IBM o de AT&T pero no de GE?

38. *Clasificación de tipos de sangre.* La sangre humana está clasificada como Rh+ o Rh−. También está clasificada por tipos: A, si contiene un antígeno A; B, si contiene el antígeno B; AB, si contiene ambos antígenos, y O, si no contiene ningún antígeno. Dibuje un diagrama de Venn que ilustre los distintos tipos de sangre. Con base en esta clasificación, ¿cuántas clases diferentes de sangre hay?

39. Construya un problema diferente de los que aparecen en el texto y que necesite el principio de adición de conteo para resolverse. Déselo a un compañero para que lo resuelva y critique.

40. Investigue cómo se relaciona la noción de conteo con los conjuntos infinitos. Escriba un ensayo de sus hallazgos.

11.7 Permutaciones y combinaciones

El conteo juega un papel importante en diversas áreas, tales como probabilidad, estadística y ciencias de la computación. En esta sección estudiaremos tipos especiales de problemas de conteo y desarrollaremos fórmulas generales para resolverlos.

Empecemos con un ejemplo que demostrará un principio general de conteo.

EJEMPLO 1 *Conteo del número de menúes diferentes*

El precio fijo de una comida en un restaurante permite las elecciones siguientes:

Aperitivo:	sopa o ensalada
Plato fuerte:	pollo al horno, carne a la parrilla, hígado de ternera o carne asada
Postre:	helado o pastel de queso

¿Cuántas comidas completas pueden ser ordenadas?

Solución Una comida completa requiere de tres decisiones separadas:

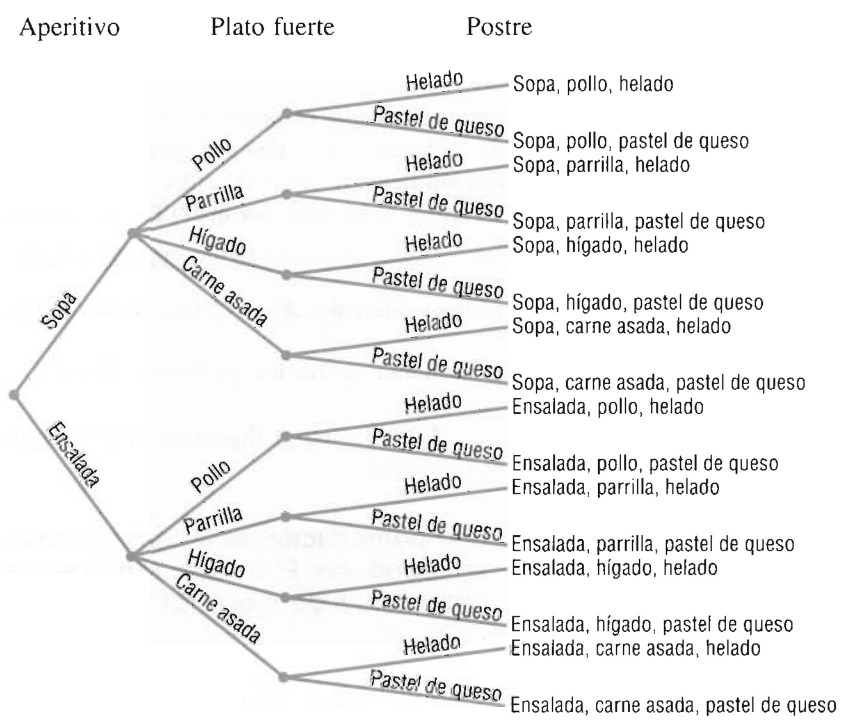
SELECCIÓN DE UN APERITIVO	SELECCIÓN DE UN PLATO FUERTE	SELECCIÓN DE UN POSTRE
2 posibilidades	4 posibilidades	2 posibilidades

Véase el **diagrama de árbol** en la figura 12. El diagrama nos muestra que por cada selección de un aperitivo hay 4 posibilidades de plato fuerte. Y por cada una de estas $2 \cdot 4 = 8$ posibilidades, hay 2 de postre. Así, en total tenemos

$$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$$

comidas completas diferentes que pueden ser ordenadas.

FIGURA 12



El ejemplo 1 ilustra un principio general de conteo.

Teorema principio de multiplicación de conteo

Si una tarea consiste de una sucesión de posibilidades en la que hay p oportunidades para la primera posibilidad, q para la segunda, r para la tercera, y así sucesivamente, entonces la tarea de seleccionar puede ser hecha de

$$p \cdot q \cdot r \cdot \ldots$$

formas distintas. ■

EJEMPLO 2

Conteo de códigos de aeropuertos

La asociación internacional de aerolíneas de transporte (IATA, por sus siglas en inglés) asigna códigos de tres letras para representar las ubicaciones de aeropuertos. Por ejemplo, JFK representa el aeropuerto internacional Kennedy en Nueva York. ¿Cuántos códigos diferentes son posibles?

Solución La tarea consiste en tomar tres decisiones. Cada selección requiere la elección de una letra del alfabeto (26 posibilidades). Así, por el principio de multiplicación, hay

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17{,}576$$

códigos diferentes de ubicación de aeropuertos. ■

En el ejemplo anterior estaba permitido repetir una letra. Ahí un código válido es FLL (aeropuerto internacional de Fort Lauderdale), en el que la letra L aparece dos veces. En el ejemplo siguiente no se permite esto.

EJEMPLO 3

Conteo sin repetición

Suponga que deseamos establecer un código de tres letras usando cualquiera de las 26 del alfabeto, pero requerimos que ninguna letra se use más de una vez. ¿Cuántos códigos diferentes podemos obtener?

Solución La tarea consiste en hacer tres selecciones. La primera requiere la selección de una de 26 letras. Como ninguna letra puede ser usada más de una vez, la segunda selección requiere elegir de entre 25 letras. La tercera requiere seleccionar de entre 24 letras. (¿Advierte por qué?) Por el principio de multiplicación, hay

$$26 \cdot 25 \cdot 24 = 15{,}600$$

códigos diferentes de tres letras sin letras repetidas. ■

■ Ahora resuelva los problemas 25 y 19.

Este ejemplo 3 ilustra un tipo de problema de conteo que se conoce como *permutación*.

Permutación

Una **permutación** es un arreglo ordenado de n objetos distintos sin repetición. El símbolo $P(n, r)$ representa el número de permutaciones de n objetos distintos, tomados r a la vez, donde $r \leq n$.

Líneas arriba, en el ejemplo 3, se pregunta por el número de maneras en que las 26 letras del alfabeto pueden ser dispuestas en grupos de tres sin que se repitan. La respuesta es

$$P(26, 3) = 26 \cdot 25 \cdot 24 = 15{,}600$$

Al tratar de establecer una fórmula para $P(n, r)$, notamos que la tarea de obtener un arreglo ordenado de n objetos en los que sólo $r \leq n$ de ellos son utilizados, sin repetir ninguno, requiere de hacer r selecciones. Para la primera selección hay n posibilidades y para la segunda $n - 1$ posibilidades; para la tercera selección hay $n - 2$ posibilidades; ...; para la r-ésima selección hay $n - (r - 1)$ posibilidades. Por el principio de multiplicación, tenemos

$$\begin{aligned} P(n, r) &= \overset{1^a}{n} \cdot \overset{2^a}{(n-1)} \cdot \overset{3^a}{(n-2)} \cdot \ldots \cdot \overset{4^a}{[n-(r-1)]} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \end{aligned}$$

Esta fórmula para $P(n, r)$ puede ser escrita de manera compacta usando la notación de factorial:*

$$\begin{aligned} P(n, r) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \cdot \frac{(n-r) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

Teorema
número de permutaciones de n objetos distintos tomados r a la vez

El número de órdenes diferentes de n objetos usando $r \leq n$ de ellos, en los que

1. los n objetos son distintos,
2. una vez que un objeto es usado no puede ser repetido, y
3. el orden es importante,

está dado por la fórmula

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad (1)$$

EJEMPLO 4 Evaluar: (a) $P(7, 3)$ (b) $P(6, 1)$

Solución Trabajaremos cada problema de dos formas.

(a) $P(7, 3) = \underbrace{7 \cdot 6 \cdot 5}_{\text{3 factores}} = 210$

$$P(7, 3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 210$$

(b) $P(6, 1) = \underbrace{6}_{\text{1 factor}} = 6$

$$P(6, 1) = \frac{6!}{(6-1)!} = \frac{6!}{5!} = \frac{6 \cdot 5!}{5!} = 6$$

Ahora resuelva el problema 1.

*Recuerde que $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1, \cdots, n! = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

EJEMPLO 5 ¿De cuántas maneras pueden sentarse en fila 5 personas?

Solución Es obvio que las cinco personas son distintas. Una vez que una persona está en la fila no puede ubicarse en otro lugar; y, en la alineación de las personas, el orden es importante. Así, tenemos una permutación de 5 objetos tomados de 5 en 5. Podemos alinear a las cinco personas de

$$P(5, 5) = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{5 factores}} = 5! = 120 \text{ formas}$$

■ Ahora resuelva el problema 31.

Combinaciones

En una permutación el orden es importante; por ejemplo, los arreglos *ABC*, *CAB*, *BAC*, ... son considerados órdenes diferentes de las letras *A*, *B* y *C*. Aunque en muchas situaciones el orden no es importante. Por ejemplo, en el juego de póker, el orden en el que las cartas son recibidas no es importante; es la *combinación* de las cartas lo que importa.

Combinación

Una **combinación** es un arreglo, sin importar el orden, de n objetos distintos sin repetición. El símbolo $C(n, r)$ representa el número de combinaciones de n objetos distintos tomando r a la vez, donde $r \leq n$.

EJEMPLO 6 *Enlistado de combinaciones*

Enlistar todas las combinaciones posibles de los 4 objetos a, b, c, d tomados 2 a la vez. ¿Cuál es el valor de $C(4, 2)$?

Solución Una combinación de a, b, c, d tomando 2 a la vez es

$$ab$$

Se excluye ba, ya que el orden no es importante en una combinación. La lista de todas las combinaciones posibles (cerciórese usted mismo) es

$$ab, \quad ac, \quad ad, \quad bc, \quad bd, \quad cd$$

Así,

$$C(4, 2) = 6$$

Podemos encontrar una fórmula para $C(n, r)$ al notar que la única diferencia entre una permutación y una combinación es que en las combinaciones hacemos caso omiso del orden. Así, para determinar $C(n, r)$, sólo necesitamos eliminar de la fórmula de $P(n, r)$ el número de permutaciones que fueron sólo reacomodos del conjunto dado de r objetos. Y esto es fácil de determinar a partir de la fórmula para $P(n, r)$ calculando $P(r, r) = r!$. De modo que, si dividimos $P(n, r)$ entre $r!$, tendremos la fórmula deseada para $C(n, r)$:

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Usar la fórmula (1)}}}{=} \frac{n!/(n-r)!}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Hemos demostrado el enunciado siguiente.

Teorema número de combinaciones de n objetos distintos tomando r a la vez

El número de arreglos diferentes de n objetos usando $r \leq n$ de ellos, en los que

1. los n objetos dos distintos
2. una vez que un objeto es usado no puede repetirse, y
3. el orden no es importante,

está dado por la fórmula

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{2}$$

■

Con base en la fórmula (2), descubrimos que los símbolos $C(n, r)$ y $\binom{n}{r}$ para los coeficientes binomiales son, en realidad, iguales. Así, el triángulo de Pascal (*véase* la sección 9.5) puede ser utilizado para encontrar el valor de $C(n, r)$. Sin embargo, ya que es más práctico y conveniente, en su lugar usaremos la fórmula (2).

EJEMPLO 7 *Uso de la fórmula (2)*

Usar la fórmula (2) para determinar el valor de cada expresión.

(a) $C(3, 1)$ (b) $C(6, 3)$ (c) $C(n, n)$ (d) $C(n, 0)$

Solución

(a) $C(3, 1) = \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$

(b) $C(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$

(c) $C(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{1} = 1$

(d) $C(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{1}{1} = 1$ ■

■ Ahora resuelva el problema 9.

EJEMPLO 8 *Formación de comités*

¿Cuántos comités diferentes de 3 personas se pueden formar de un grupo de 7?

Solución Por supuesto que las 7 personas son distintas. Aunque más importante es la observación de que el orden en que son seleccionadas para formar un comité no es crucial. Así, el problema radica en calcular el número de combinaciones de 7 objetos tomados 3 a la vez:

$$C(7, 3) = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$$ ■

EJEMPLO 9 *Formación de comités*

¿De cuántas maneras puede constituirse un comité para que contenga 2 profesores y 3 estudiantes, si hay 6 de los primeros y 10 estudiantes elegibles?

Solución El problema puede dividirse en dos partes: el número de maneras en que los profesores pueden ser elegidos, $C(6, 2)$, y el número de maneras en que los miembros estudiantes pueden ser elegidos, $C(10, 3)$. Por el principio de multiplicación, el comité puede ser formado en

$$C(6, 2) \cdot C(10, 3) = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{10!}{7!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!3!}$$

$$= \frac{30}{2} \cdot \frac{720}{6} = 1800 \text{ maneras}$$

■ Ahora resuelva el problema 47.

Permutaciones con repetición

Recuerde que una permutación involucra el conteo de objetos *diferentes*. Una permutación en la que algunos objetos están repetidos es llamada **permutación con repetición.** Algunos libros se refieren a esto como **permutación indistinguible.**

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 10 *Formación de palabras diferentes*

¿Cuántas palabras diferentes pueden construirse usando todas las letras de la palabra REARRANGE?

Solución Cada palabra formada tendrá 9 letras: 3 R, 2 A, 3 E, 1 N y 1 G. Para construir cada palabra necesitamos llenar 9 posiciones con las 9 letras:

$$\overline{1} \quad \overline{2} \quad \overline{3} \quad \overline{4} \quad \overline{5} \quad \overline{6} \quad \overline{7} \quad \overline{8} \quad \overline{9}$$

El proceso de construir una palabra consiste de cinco tareas:

Tarea 1: Seleccionar las posiciones para las 3 letras R.

Tarea 2: Seleccionar las posiciones para las 2 letras A.

Tarea 3: Seleccionar las posiciones para las 2 letras E.

Tarea 4: Seleccionar la posición para la N.

Tarea 5: Seleccionar la posición para la G.

La tarea 1 puede hacerse de $C(9, 3)$ maneras. Entonces quedan 6 posiciones por ser llenadas, de modo que la tarea 2 puede ser hecha de $C(6, 2)$ maneras. Quedan 4 posiciones a ser llenadas, de modo que la tarea 3 puede hacerse de $C(4, 2)$ maneras. Faltan 2 posiciones por llenar, así que la tarea 4 puede hacerse de $C(2, 1)$ maneras. La última posición puede llenarse de $C(1, 1)$ forma. Usando el principio de multiplicación, el número de palabras posibles que pueden ser construidas es

$$C(9, 3) \cdot C(6, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(2, 1) \cdot C(1, 1) = \frac{9!}{3! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{1!}{0! \cdot 1!}$$

$$= \frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!}$$

La forma de la respuesta del ejemplo 10 nos sugiere un planteamiento general. Si las letras en REARRANGE hubieran sido cada una diferentes, habríamos obtenido $P(9, 9) = 9!$ palabras diferentes. Este es el numerador de la respuesta. La presencia de 3 letras R, 2 A y 2 E, reduce el número posible de palabras diferentes, como lo ilustran las entradas en el denominador. Así llegamos al enunciado siguiente:

Teorema permutaciones con repetición

El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 de una segunda clase, ..., y n_k son de una k-ésima clase está dado por

$$\boxed{\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} \qquad (3)}$$

donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. ■

EJEMPLO 11

Disposición de banderas

¿Cuántos arreglos verticales diferentes? hay de 8 banderas, si 4 son blancas, 3 azules y una es roja?

Solución

Buscamos el número posible de permutaciones de 8 objetos, de los cuales 4 son de una clase, 3 de una segunda clase y 1 de una tercera clase. Usando la fórmula (3) encontramos que hay

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = 280 \text{ arreglos distintos}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 53.

11.7

Ejercicio 11.7

En los problemas del 1 al 8 encuentre el valor de cada permutación.

1. $P(6, 2)$	**2.** $P(7, 2)$	**3.** $P(5, 5)$	**4.** $P(4, 4)$
5. $P(8, 0)$	**6.** $P(9, 0)$	**7.** $P(8, 3)$	**8.** $P(8, 5)$

En los problemas del 9 al 16 utilice la fórmula (2) para encontrar el valor de cada combinación.

9. $C(8, 2)$	**10.** $C(8, 6)$	**11.** $C(6, 4)$	**12.** $C(6, 2)$
13. $C(15, 15)$	**14.** $C(18, 1)$	**15.** $C(26, 13)$	**16.** $C(18, 9)$

17. Enliste todas las permutaciones posibles de 5 objetos a, b, c, d y e, tomados de tres en tres. ¿Cuánto es $P(5, 3)$?

18. Enliste todas las permutaciones posibles de 5 objetos a, b, c, d y e, tomados dos a la vez. ¿Cuánto es $P(5, 2)$?

19. Enliste todas las permutaciones posibles de 4 objetos, 1, 2, 3 y 4, tomados 3 a la vez. ¿Cuánto es $P(4, 3)$?

20. Enliste todas las permutaciones posibles de 6 objetos, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, tomados 3 a la vez. ¿Cuánto es $P(6, 3)$?

21. Enliste todas las combinaciones posibles de 5 objetos, a, b, c, d y e, tomados 3 a la vez. ¿Cuánto es $C(5, 3)$?

22. Enliste todas las combinaciones posibles de 5 objetos, a, b, c, d y e, tomados 2 a la vez. ¿Cuánto es $C(5, 2)$?

23. Enliste todas las combinaciones posibles de 4 objetos, 1, 2, 3 y 4, tomados de 3 en 3. ¿Cuánto es $C(4, 3)$?

24. Enliste todas las combinaciones posibles de 6 objetos, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, tomados 3 a la vez. ¿Cuánto es $C(6, 3)$?

25. Un hombre tiene 5 camisas y 2 corbatas. ¿Cuántas combinaciones puede hacer con estas prendas?

26. Una mujer tiene 3 blusas y 5 faldas. ¿Cuántos conjuntos puede ponerse al combinar estas prendas?

27. *Formación de códigos.* ¿Cuántos códigos de dos letras pueden formarse usando las letras A, B, C y D? Se permite repetir letras.

28. *Formación de códigos.* ¿Cuántos códigos de dos letras pueden formarse usando las letras A, B, C, D y E? Se permite repetir letras.

29. *Formación de números.* ¿Cuántos números de tres dígitos se pueden crear usando los dígitos 0 y 1? Se permite repetir los dígitos.

30. *Formación de números.* ¿Cuántos números de tres dígitos pueden crearse usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9? Se permite repetir los dígitos.

31. ¿De cuántas maneras se pueden formar en una fila 4 personas?

32. ¿De cuántas maneras se pueden apilar 5 cajas diferentes?

33. *Formación de códigos.* ¿Cuántos códigos diferentes de tres letras podrán formarse si sólo pueden ser usadas las letras A, B, C, D y E, y ninguna letra puede ser usada más de una vez?

34. *Formación de códigos.* ¿Cuántos códigos diferentes de cuatro letras podrán formarse si sólo son usadas las letras A, B, C, D, E y F, y ninguna letra puede ser usada más de una vez?

35. *Arreglo de letras.* ¿Cuántos arreglos de letras hay en la palabra MONEY?

36. *Arreglo de dígitos.* ¿Cuántos arreglos hay de los dígitos del número 51,342?

37. *Constitución de comités.* ¿De cuántas maneras puede ser constituido un comité de 4 estudiantes de un conjunto de 7 estudiantes?

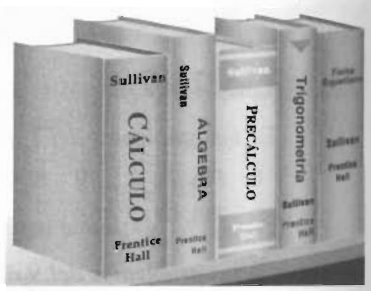
38. *Constitución de comités.* ¿De cuántas maneras puede ser constituido un comité de 3 profesores de un departamento que tiene 8 profesores?

39. *Posibles respuestas en un examen de cierto o falso.* ¿Cuántos arreglos posibles de respuestas hay en un examen de cierto o falso que contiene 10 preguntas?

40. *Posibles respuestas en un examen de opción múltiple.* ¿Cuántos arreglos de respuestas son posibles en un examen de opción múltiple con 5 preguntas si cada pregunta tiene 4 respuestas posibles?

41. ¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden crearse usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, si el primer dígito no puede ser 0? Se permite repetir los dígitos.

42. ¿Cuántos números de cinco dígitos pueden crearse usando los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, si el primer dígito no puede ser 0 ni 1? Se permite repetir los dígitos.



43. *Acomodo de libros.* Cinco libros diferentes de matemáticas se acomodarán en el escritorio de un estudiante. ¿Cuántos acomodos son posibles?

44. *Formación de números de placa.* ¿Cuántos números de placa pueden formarse usando 2 letras seguidas por cuatro dígitos seleccionados de entre los del 0 al 9, si

(a) Las letras y los dígitos pueden repetirse?

(b) ¿Las letras pueden repetirse pero los dígitos no?

(c) ¿No pueden repetirse letras ni dígitos?

45. *Portafolios de acciones.* Como asesor financiero, se le pide a usted seleccionar una acción de cada uno de los grupos siguientes: 8 acciones DOW, 15 NASDAQ, y 4 acciones globales. ¿Cuántas combinaciones diferentes son posibles?

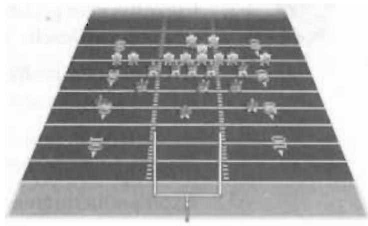
46. *Cerraduras de combinación.* Una cerradura de combinación tiene 50 números. Para abrirla, se le da vuelta hacia la derecha hasta que una flecha apunta a cierto número, luego se gira hacia la izquierda a un segundo número, y después se gira a la derecha hasta un tercer número. ¿Cuántas combinaciones diferentes puede haber de esta cerradura?

47. Se debe formar un comité de 2 jóvenes y 3 mujeres. Si los miembros se elegirán de entre 4 jóvenes y 8 mujeres, ¿cuántos comités diferentes son posibles?

48. *Equipos de béisbol.* Un equipo de béisbol tiene 15 miembros. Cuatro jugadores son lanzadores y los 11 restantes pueden jugar en cualquier posición. ¿Cuántos equipos diferentes de 9 jugadores pueden formarse con los 15 miembros?

49. El comité de relaciones estudiantiles de una universidad consiste de 2 administradores, 3 profesores y 5 estudiantes. Hay 4 administradores, 8 profesores y 20 estudiantes elegibles. ¿Cuántos comités diferentes son posibles?

50. *Equipo de fútbol.* Un equipo defensivo de fútbol consiste de 25 jugadores. De estos, 10 son hombres de línea, 10 sirven de apoyo y 5 son defensas. ¿Cuántos equipos diferentes pueden formarse con 5 hombres de línea, 3 de apoyo y 3 defensas?



51. *Béisbol.* En Estados Unidos, la Liga Americana de béisbol puede emplear un bateador designado. ¿Cuántas órdenes de bateo son posibles? (Hay 9 jugadores en un equipo.)

52. *Béisbol.* En Estados Unidos, en la Liga Nacional de béisbol por lo regular el lanzador batea en noveno lugar. Si éste es el caso, ¿cuántas órdenes de bateo son posibles?

53. *Formación de palabras.* ¿Cuántas palabras diferentes (reales o imaginarias) de 9 letras pueden ser formadas con las letras de la palabra ECONOMÍAS?

54. *Formación de palabras.* ¿Cuántas palabras diferentes (reales o imaginarias) de 9 letras pueden ser formadas con las letras de la palabra MATEMÁTICAS?

55. *Comités del senado.* El senado de Estados Unidos tiene 100 miembros. Suponga que se desea colocar a cada senador en uno solo de 7 posibles comités. El primer comité tiene 22 miembros, el segundo 13, el tercero 10, el cuarto 5, el quinto 16, el sexto 17 y el séptimo 17. ¿De cuántas maneras pueden formarse los comités?

56. *Serie mundial.* En la Serie Mundial de béisbol estadounidense, el equipo de la Liga Americana (A) y el de la liga Nacional (N) juegan hasta que uno de los dos gana cuatro juegos. Si la sucesión de juegos ganados es designada con sus iniciales (por ejemplo, $NAAAA$ significa que el equipo de la Liga Nacional ganó el primer juego y el de la Americana ganó los siguientes cuatro), ¿cuántas secuencias diferentes son posibles?

57. *Equipos de baloncesto.* Un equipo de baloncesto tiene 6 jugadores que juegan como defensas (2 de 5 posiciones iniciales). ¿Cuántos equipos diferentes son posibles, suponiendo que las 3 posiciones restantes están cubiertas y que no hay distinción entre defensa derecho e izquierdo?

58. *Equipos de baloncesto.* En un equipo de baloncesto de 12 jugadores, 2 juegan sólo como centros, 3 juegan sólo como defensas y los restantes juegan como delanteros (5 jugadores en un equipo: 2 delanteros, 2 defensas y un centro). ¿Cuántos equipos diferentes pueden formarse suponiendo que no es posible distinguir entre defensas derecho e izquierdo ni entre delanteros izquierdo y derecho?

59. *Selección de objetos.* Una urna contiene 7 bolas blancas y 3 rojas. Se seleccionan tres bolas. ¿De cuántas maneras pueden sacarse las 3 bolas del total de 10:

(a) Si 2 bolas deben ser blancas y 1 roja?

(b) ¿Si las tres deben ser blancas?

(c) ¿Si las tres deben ser rojas?

60. *Selección de objetos.* Una urna contiene 15 bolas rojas y 10 blancas. Cinco bolas son seleccionadas. ¿De cuántas maneras pueden sacarse las 5 bolas del total de 25:

(a) Si todas deben ser rojas?

(b) ¿Si 3 deben ser rojas y 2 blancas?

(c) ¿Si al menos 4 deben ser rojas?

61. *Ejercicio de programación.* Cuando n y r son grandes, determinar $C(n, r)$ en una computadora puede conducir a calcular números enteros muy grandes. Para evitarlo podemos aproximar los valores de $C(n, r)$. Una manera de hacer esto es:

$$C(40, 20) = \frac{40!}{20!20!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot \ldots \cdot 21}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{40}{20} \cdot \frac{39}{19} \cdot \frac{38}{18} \cdot \ldots \cdot \frac{21}{1}$$

$$\approx 2.000 \cdot 2.053 \cdot 2.111 \cdot \ldots \cdot 21.000 = 1.3784652 \times 10^{11}$$

(a) Escriba un programa que reciba como entrada dos enteros N y R y calcule $C(N, R)$ usando la fórmula (1).

(b) Utilice el programa para determinar cuándo ocurre desbordamiento (*overflow*) en su computadora.

(c) Escriba un programa que reciba como entrada dos enteros N y R y calcule $C(N, R)$ por la técnica de aproximación mostrada anteriormente.

(d) Compare las respuestas de las partes (a) y (c).

62. Construya un problema diferente de los que aparecen en el texto y que requiera del principio de multiplicación para resolverlo. Déselo a un compañero para que lo resuelva y critique.

63. Construya un problema diferente de los que aparecen en el texto y que requiera de una permutación para resolverlo. Déselo a un compañero para que lo resuelva y critique.

64. Construya un problema diferente de los que aparecen en el texto y que requiera de una combinación para resolverlo. Déselo a un compañero para que lo resuelva y critique.

65. Explique la diferencia entre una permutación y una combinación. Dé un ejemplo para ilustrar su explicación.

11.8 Probabilidad

La probabilidad es un área de las matemáticas que trata con experimentos que, aún obteniendo resultados aleatorios, admiten cierta regularidad. Tales experimentos no siempre producen el mismo resultado, de modo que ninguna observación es predecible. Sin embargo, en un periodo largo, esos resultados producen patrones regulares que nos permiten predecir con notable precisión.

EJEMPLO 1 *Lanzamiento de una moneda no cargada*

En el lanzamiento de una moneda no cargada, sabemos que el resultado será águila o sol. Aunque en cualquier lanzamiento no podamos predecir qué resultará, si lanzamos la moneda muchas veces, observaremos que el número de veces que aparece águila es aproximadamente igual al número de veces que aparece sol. Por lo tanto, parece razonable asignar una probabilidad de $\frac{1}{2}$ a que aparezca águila y una probabilidad de $\frac{1}{2}$ a que aparezca sol. ■

Modelos de probabilidad

El análisis del ejemplo 1 deriva en la construcción de un **modelo de probabilidad** para el experimento de lanzar una moneda no cargada. Un modelo de probabilidad tiene dos componentes: un espacio muestral y una asignación de probabilidades. Un **espacio muestral** S es un conjunto cuyos elementos representan todas las posibilidades que puedan ocurrir como resultado de un experimento. Cada elemento de S es llamado **resultado** o **evento elemental.** A cada resultado se le asigna un número llamado **probabilidad** de ese resultado, el cual tiene dos propiedades:

1. Cada probabilidad es no negativa.
2. La suma de todas las probabilidades es igual a 1.

Así, cuando un modelo de probabilidad tiene el espacio muestral

$$S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$$

donde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son los posibles resultados, y si $P(e_1), P(e_2), \ldots, P(e_n)$ denotan las respectivas probabilidades de estos resultados, entonces

$$P(e_1) \geq 0, \quad P(e_2) \geq 0, \quad \ldots, \quad P(e_n) \geq 0 \tag{1}$$

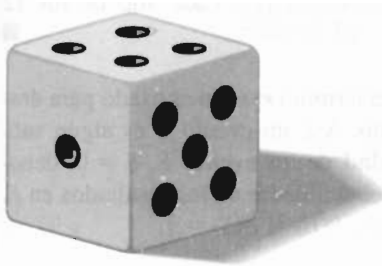
$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1 \tag{2}$$

Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 2

Construcción de un modelo de probabilidad

Un experimento consiste en tirar una vez un dado no cargado.* Construir un modelo de probabilidad para este experimento.



Solución Un espacio muestral S consiste de todas las posibilidades que puedan ocurrir. Ya que tirar el dado tendrá como resultado que una de sus seis caras aparezca hacia arriba, el espacio muestral S es

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Puesto que el dado no está cargado, todas sus caras tienen la misma probabilidad de caer hacia arriba. Como consecuencia de esto, nuestra asignación de probabilidades es

$$P(1) = \tfrac{1}{6} \qquad P(2) = \tfrac{1}{6}$$
$$P(3) = \tfrac{1}{6} \qquad P(4) = \tfrac{1}{6}$$
$$P(5) = \tfrac{1}{6} \qquad P(6) = \tfrac{1}{6}$$

■

Suponga que el dado se carga de manera que la asignación de probabilidades sea

$$P(1) = 0, \quad P(2) = 0, \quad P(3) = \frac{1}{3}, \quad P(4) = \frac{2}{3}, \quad P(5) = 0, \quad P(6) = 0$$

Esta asignación sería hecha si el dado estuviera cargado de modo que sólo el 3 o el 4 pudiesen ocurrir, y es dos veces más probable que ocurra el 4 que el 3. Esta asignación es consistente con la definición ya que cada asignación está entre 0 y 1, y la suma de todas las asignaciones de probabilidad es igual a 1. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

EJEMPLO 3

Construcción de un modelo de probabilidad

Un experimento consiste en el lanzamiento de una moneda. La moneda está cargada de modo que es tres veces más probable que ocurra la águila (A) que la sol (S). Construir un modelo de probabilidad para este experimento.

Solución El espacio muestral S es $S = \{A, S\}$. Si x denota la probabilidad de que ocurra sol, entonces

$$P(\mathrm{T}) = x \quad \text{y} \quad P(\mathrm{H}) = 3x$$

Ya que la suma de las probabilidades de los posibles resultados debe ser igual a 1, tenemos

$$\begin{aligned} P(\mathrm{T}) + P(\mathrm{H}) = x + 3x &= 1 \\ 4x &= 1 \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así, asignamos las probabilidades

$$P(\mathrm{T}) = \frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{H}) = \frac{3}{4}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 17.

*Un dado es un cubo en el que cada cara tiene 1, 2, 3, 4, 5, o 6 puntos.

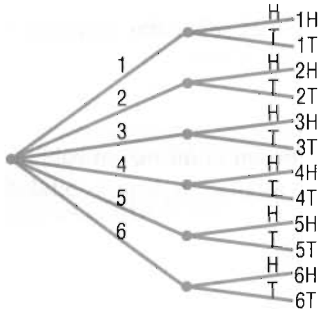
EJEMPLO 4

Un experimento consiste en tirar un dado no cargado y después una moneda no cargada. Construir un modelo de probabilidad para este experimento.

Solución

Un diagrama de árbol es útil para enlistar todos los posibles resultados. *Véase* la figura 13. El espacio muestral lo constituyen los resultados

FIGURA 13



$$S = \{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$$

El dado y la moneda no están cargados; así que ningún resultado es más probable que otro. En consecuencia, asignamos la probabilidad $\frac{1}{12}$ a cada uno de los 12 resultados. ■

Al trabajar con modelos de probabilidad, el término **evento** es usado para describir un conjunto de resultados del experimento. Así, un evento E es algún subconjunto del espacio muestral S. La **probabilidad de un evento** E, $E \neq 0$, denotada por $P(E)$, se define como la suma de las probabilidades de los resultados en E. Si $E = \varnothing$, entonces $P(E) = 0$; si $E = S$, entonces $P(E) = P(S) = 1$.

EJEMPLO 5

Determinación de la probabilidad de un evento

Para el experimento descrito en el ejemplo 4, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra un número par seguido por un águila?

Solución

El evento E, un número par seguido por un águila, es

$$E = \{2H, 4H, 6H\}$$

La probabilidad de E es

$$P(E) = P(2H) + P(4H) + P(6H) = \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{4}$$ ■

El enunciado siguiente, llamado **regla aditiva,** puede ser utilizado para encontrar la probabilidad de la unión de dos eventos.

Teorema regla aditiva

Para cualesquiera dos eventos E y F,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \tag{3}$$

■

Si E y F son ajenos, es decir, $E \cap F = \varnothing$, entonces la fórmula (3) toma la forma

Eventos mutuamente excluyentes

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) \tag{4}$$

Cuando se aplica la fórmula (4), decimos que E y F son **eventos mutuamente excluyentes.**

EJEMPLO 6

Uso de las fórmulas (3) y (4)

(a) Si $P(E) = 0.2$, $P(F) = 0.3$, y $P(E \cap F) = 0.1$, encontrar $P(E \cup F)$.

(b) Si $P(E) = 0.2$, $P(F) = 0.3$, y E, F son mutuamente excluyentes, encontrar $P(E \cup F)$.

Solución

(a) Usamos la regla aditiva, fórmula (3).

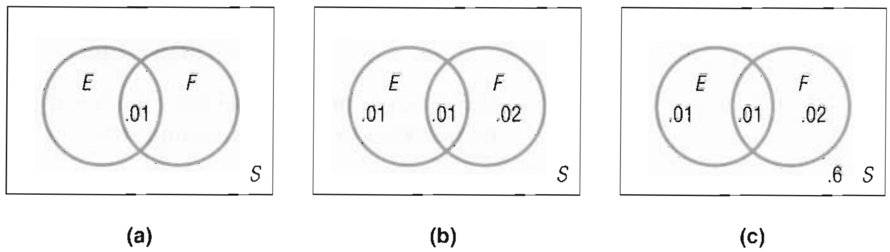
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4$$

(b) Como E y F son mutuamente excluyentes, usamos la fórmula (4).

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$ ■

Algunas veces puede ser usado un diagrama de Venn para obtener probabilidades. Para construir uno que represente la información del ejemplo 6(a) dibujemos dos conjuntos E y F. Empezamos con el hecho de que $P(E \cap F) = 0.1$. *Véase* la figura 14(a). Luego, como $P(E) = 0.2$ y $P(F) = 0.3$, llenamos E con $0.2 - 0.1 = 0.1$ y F con $0.3 - 0.1 = 0.2$. *Véase* la figura 14(b). Como $P(S) = 1$, completamos el diagrama insertando $1 - [0.1 + 0.1 + 0.2] = 0.6$. *Véase* la figura 14(c). Ahora es fácil ver, por ejemplo, que la probabilidad de F, pero no de E, es de 0.2. También, que la probabilidad de que no ocurran E ni F es de 0.6.

FIGURA 14



■ Ahora resuelva el problema 23.

Resultados igualmente probables

Cuando se asigna la misma probabilidad a cada resultado del espacio muestral, se dice que el experimento tiene **resultados igualmente probables.**

Teorema probabilidad para resultados igualmente probables

Si un experimento tiene n resultados igualmente probables, y si el número de maneras en que un evento E puede ocurrir es m, entonces la probabilidad de E es

$$P(E) = \frac{\text{Número de maneras en que puede ocurrir } E}{\text{Número de todas las posibilidades lógicas}} = \frac{m}{n} \qquad (5)$$

Así, cuando S es el espacio muestral de este experimento,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \qquad (6)$$

■

Con base en (6), un método alterno de solución del ejemplo 5 es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

EJEMPLO 7 *Cálculo de probabilidades para resultados igualmente probables*

Una vasija contiene 10 canicas; 5 son de color oscuro, 4 moteadas y 1 es clara.

(a) Si se saca una canica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que resulte moteada?
(b) Si se saca una canica al azar, ¿cuál es la probabilidad de que resulte de color claro u oscuro?

Solución Este es un experimento en el cual los resultados son igualmente probables; ninguna canica tiene más probabilidad de salir que otra. Si S es el espacio muestral, entonces hay 10 resultados posibles en S, de modo que $n(S) = 10$.

(a) Defina el evento E: se saca una canica moteada. Hay 4 maneras en que puede ocurrir E. Así,

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{10} = 0.4$$

(b) Defina los eventos F: se saca una canica de color claro y G: se saca una canica de color oscuro. Entonces hay una manera de que ocurra F y 5 maneras de que ocurra G. Así,

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{1}{10}, \qquad P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{5}{10}$$

Buscamos la probabilidad del evento F o G, esto es, $P(F \cup G)$. Como F y G son mutuamente excluyentes, usamos (4).

$$P(F \cup G) = P(F) + P(G) = \frac{1}{10} + \frac{5}{10} = \frac{6}{10} = 0.6$$

■

■ Ahora resuelva el problema 27.

EJEMPLO 8

El juego de Craps

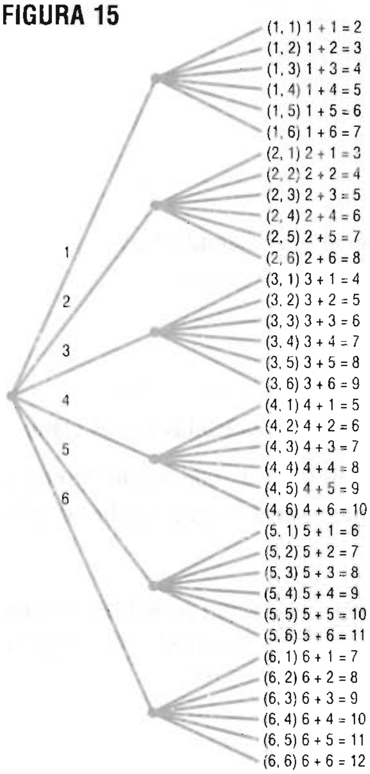
En el juego de "craps" se tiran dos dados no cargados. Si el total de las caras hacia arriba es igual a 7 u 11, usted gana. Si el total es 2, 3 o 12, pierde. En los demás casos, usted tira los dados nuevamente.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que usted gane?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que pierda?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que necesite tirar los dados otra vez?

FIGURA 15



Solución

Empezamos construyendo un modelo de probabilidad para el experimento. El diagrama de árbol de la figura 15 nos ayudará para ver todas las posibilidades.

Como los dados no están cargados, ninguno de los 36 resultados posibles en el espacio muestral S es más probable que otro. Así, tenemos resultados igualmente probables con $n(S) = 36$

(a) El evento E, "el total en los dados es 7 u 11", consiste en los resultados

$$E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}$$

Ya que $n(E) = 8$, tenemos

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \approx 0.222$$

(b) El evento F, "el total en los dados es 2, 3 o 12", son los resultados

$$F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (6, 6)\}$$

Como $n(F) = 4$,

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0.111$$

(c) El número de posibilidades en que puede requerirse que usted tire otra vez es $36 - n(E) - n(F) = 36 - 8 - 4 = 24$. Así, la probabilidad de que se requiera otro tiro es

$$\frac{24}{36} = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

■ Ahora resuelva el problema 29.

Aplicaciones que involucran permutaciones y combinaciones

EJEMPLO 9 *Cálculo de probabilidades*

A causa de un error, 5 teléfonos defectuosos fueron empacados con 15 buenos. Todos los teléfonos son iguales y tienen la misma probabilidad de ser seleccionados. Se seleccionan tres.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que los 3 sean defectuosos?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 sean defectuosos?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 sean defectuosos?

Solución El espacio muestral S consta del número de maneras en que 3 objetos pueden ser seleccionados de entre 20, esto es, el número posible de combinaciones de 20 cosas tomadas 3 a la vez.

$$n(S) = C(20, 3) = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140$$

Cada uno de estos resultados es igualmente probable que ocurra.

(a) Si E es el evento "3 son defectuosos", entonces el número de elementos en E es el número de maneras en que 3 teléfonos defectuosos pueden ser seleccionados de entre 5 teléfonos defectuosos; $C(5, 3) = 10$. Así, la probabilidad de E es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10}{1140} = 0.0088$$

(b) Si F es el evento "exactamente 2 son defectuosos" y se seleccionan 3 teléfonos, entonces el número de elementos en F es el número de maneras en que 2 teléfonos defectuosos se pueden seleccionar de los 5 empacados más 1 teléfono bueno de entre los 15 buenos. Lo primero puede hacerse en $C(5, 2)$ maneras y lo segundo en $C(15, 1)$. Por el principio de multiplicación, el evento F puede ocurrir en

$$C(5, 2)C(15, 1) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \frac{15!}{14! \cdot 1!} = 10 \cdot 15 = 150 \text{ maneras}$$

Por lo tanto, la probabilidad de F es

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{150}{1140} = 0.1316$$

(c) El evento G, "al menos dos son defectuosos", cuando son seleccionados 3, es equivalente a requerir que se seleccionen exactamente 2 o exactamente 3. Esto es, $G = E \cup F$. Como E y F son mutuamente excluyentes (no es posible seleccionar 2 teléfonos defectuosos y, al mismo tiempo, seleccionar 3 teléfonos defectuosos), encontramos

$$P(G) = P(E) + P(F) = 0.0088 + 0.1316 = 0.1404$$

■ Ahora resuelva el problema 43.

EJEMPLO 10 *Lanzamiento de una moneda*

Una moneda no cargada es lanzada 6 veces.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 5 águilas y un sol?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener entre 4 y 6 águilas, inclusive?

Solución El número de elementos en el espacio muestral S se encuentra usando el principio de multiplicación. Cada lanzamiento tiene como resultado águila (A) o sol (S). Como la moneda es lanzada 6 veces, tenemos

$$n(S) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{6 lanzamientos}} = 2^6 = 64$$

Los resultados son igualmente probables ya que la moneda no está cargada.

(a) Cualquier secuencia que tenga 5 águilas y una sol estará determinada una vez que la posición de las 5 águilas (o de 1 Sol) sea conocida. El número de maneras en que podemos colocar 5 águilas en una secuencia de 6 es $C(6, 5) = 6$. La probabilidad del evento E: exactamente 5 águilas y una sol es

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{C(6, 5)}{2^6} = \frac{6}{64} = 0.0938$$

(b) Sea F el evento: entre 4 y 6 águilas, inclusive. Obtener entre 4 y 6 águilas es equivalente al evento: 4 o 5 o 6 águilas. Como cada uno de estos eventos es mutuamente excluyente (es imposible obtener 4 y 5 águilas cuando lanzamos una moneda 6 veces), tenemos

$$\begin{aligned} P(F) &= P(4 \text{ o } 5 \text{ o } 6 \text{ águilas}) \\ &= P(4 \text{ águilas}) + P(5 \text{ águilas}) + P(6 \text{ águilas}) \end{aligned}$$

Las probabilidades a la derecha se obtienen como en la parte (a). Así

$$P(F) = \frac{C(6, 4)}{2^6} + \frac{C(6, 5)}{2^6} + \frac{C(6, 6)}{2^6} = \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64} = 0.3438$$ ■

DATO HISTÓRICO

■ La teoría de conjuntos, el conteo y la probabilidad, tomaron forma primero como una teoría sistemática en el intercambio de cartas (1654) entre Pierre de Fermat (1601–1665) y Blas Pascal (1623–1662). Ellos discutieron el problema de cómo dividir las apuestas en un juego interrumpido antes de terminar, si se conoce cuántos puntos necesita cada jugador para ganar. Fermat resolvió el problema enlistando todas las posibilidades y contando las favorables, mientras que Pascal hizo uso del triángulo que ahora lleva su nombre. Como se mencionó en el texto, las entradas en el triángulo de Pascal son equivalentes a $C(n, r)$. Este reconocimiento del papel de $C(n, r)$ en el conteo es el fundamento de todos los desarrollos posteriores.

El primer libro sobre probabilidad, el trabajo de Christian Huygens (1629–1695), apareció en 1657. En él, se explora la noción de esperanza matemática. Esto permite el cálculo de ganancias o pérdidas que un jugador puede esperar, conociendo las probabilidades involucradas en el juego. (*Véanse* los problemas históricos que siguen.)

Es interesante notar que Girolamo Cardano (1501–1576) escribió un tratado sobre probabilidad, el cual no fue publicado hasta 1663 en la recopilación de trabajos de Cardano; demasiado tarde como para tener algún efecto sobre el desarrollo de la teoría.

En 1713, la publicación póstuma *Ars Conjectandi* de Jacobo Bernoulli dio a la teoría la forma que tuvo hasta 1900. En el siglo actual, la combinatoria (conteo) y la probabilidad experimentaron un desarrollo rápido debido al uso de las computadoras.

Un comentario final acerca de la notación. Las notaciones $C(n, r)$ y $P(n, r)$ son variaciones de una forma de notación desarrollada en Inglaterra después de 1830. La notación $\binom{n}{r}$ para $C(n, r)$ se remonta a Leonardo Euler (1707–1783), pero ahora está perdiendo terreno porque no tiene un simbolismo del mismo tipo relacionado claramente para permutaciones. Los símbolos $\cup$ y $\cap$ fueron introducidos por Giuseppe Peano (1858–1932) en 1888 en un contexto ligeramente diferente. El símbolo de inclusión $\subset$ fue introducido por E. Schroeder (1841–1902) alrededor de 1890. El tratamiento de la teoría de conjuntos en el texto es debido a George Boole (1815–1864), quien escribió $A + B$ para $A \cup B$ y AB para $A \cap B$ (los estadísticos aún utilizan AB para $A \cap B$). ■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. *El problema discutido por Fermat y Pascal.* Un juego entre dos jugadores igualmente hábiles, A y B, es interrumpido cuando A necesita 2 puntos para ganar y B necesita 3 puntos. ¿En qué proporción deben ser repartidas las apuestas? [*Nota:* Si cada jugada tiene como resultado un punto para alguno de los jugadores, cuando mucho en cuatro juegos más se decidiría la partida.]

(a) *Solución de Fermat.* Enlistar todos los resultados posibles que terminarían el juego para formar el espacio muestral (por ejemplo, ABAA, ABBB, etc.). Entonces la probabilidad de que A gane y la de que B gane determinarán cómo deben ser repartidas las apuestas.

(b) *Solución de Pascal.* Usar combinaciones para determinar el número de maneras en que los 2 puntos que necesita A para ganar puedan ocurrir en cuatro juegos. Luego usar combinaciones para determinar el número de maneras en que los 3 puntos que necesita B para ganar puedan ocurrir. Esto es más confuso ya que A puede ganar con 2 puntos en dos, tres o cuatro juegos. Calcular las probabilidades y comparar con los resultados en la parte (a).

2. *Esperanza matemática de Huygens.* En un juego con n posibles resultados con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, suponga que las ganancias netas son $w_1, w_2, \ldots, w_n$, respectivamente. Entonces la esperanza matemática es

$$E = p_1w_1 + p_2w_2 + \cdots + p_nw_n$$

El número E representa la ganancia o pérdida por juego a la larga. Los problemas siguientes son una modificación de los de Huygens:

(a) Se tira un dado no cargado. Un jugador gana \$3.00 si aparece un 6 y \$6.00 si aparece un 5. ¿Cuál es su esperanza? [*Nota:* $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 0$]

(b) Un jugador juega el mismo juego de la parte (a), pero ahora él debe pagar \$1.00 por jugar. Esto significa $w_5 = \$5$, $w_6 = \$2$, y $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = -\$1$. ¿Cuál es la esperanza? ■

11.8

Ejercicio 11.8

En los problemas del 1 al 6 construya un modelo de probabilidad para cada experimento.

1. Lanzamiento de una moneda no cargada dos veces.
2. Lanzamiento de una moneda no cargada una vez.

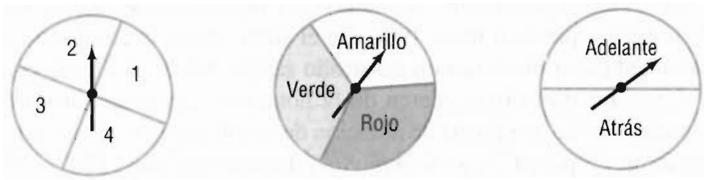
3. Lanzamiento de dos monedas no cargadas y luego un dado no cargado.

4. Lanzamiento de una moneda no cargada, un dado no cargado y luego una moneda no cargada.

5. Lanzamiento de tres monedas no cargadas una vez.

6. Lanzamiento de una moneda no cargada tres veces.

En los problemas del 7 al 12, utilice los discos giratorios y construya un modelo de probabilidad para cada experimento.



Disco I   Disco II   Disco III

7. Girar el disco I luego el disco II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2 o un 4, seguido por rojo?
8. Girar el disco III luego el disco II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener Adelante, seguida de amarillo o verde?
9. Girar el disco I, luego el II y después el III. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 seguido por rojo o verde, seguido por Atrás?
10. Girar el disco II, luego el I y después el III. ¿Cuál es la probabilidad de obtener amarillo, seguido por un 2 o un 4, seguido por Adelante?
11. Girar el disco I dos veces, luego el disco II. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2, seguido de un 2 o un 4, seguido por rojo o verde?
12. Girar el disco II, luego el disco I dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener Adelante, seguido por un 1 o un 3, seguido por un 2 o un 4?

En los problemas del 13 al 16 considere el experimento de lanzar una moneda dos veces. La tabla enlista seis posibles asignaciones de probabilidades para este experimento. Usando esta tabla, responda las preguntas siguientes.

13. ¿Cuáles de las asignaciones de probabilidades son consistentes con la definición de probabilidad de un resultado?
14. ¿Si se sabe que la moneda no está cargada, ¿cuál de las asignaciones debe ser utilizada?
15. Si se sabe que la moneda siempre cae sol, ¿cuál asignación de probabilidades debe ser usada?
16. ¿Cuál de las asignaciones debe ser usada si la ocurrencia de sol es dos veces más probable que la de águila?

ASIGNACIONES	ESPACIO MUESTRAL			
	AA	AS	SA	SS
A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
B	0	0	0	1
C	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
E	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
F	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

17. *Asignación de probabilidades* Una moneda está cargada de modo que águila es cuatro veces más probable de ocurrir que sol. ¿Qué probabilidad debemos asignar a águila? ¿Y a sol?
18. *Asignación de probabilidades* Una moneda está cargada de modo que es dos veces más probable que ocurra águila. ¿Qué probabilidad debemos asignar a águila? ¿Y a sol?
19. *Asignación de probabilidades* Un dado está cargado de modo que es dos veces más probable que aparezca un número impar que un número par. ¿Qué probabilidad debemos asignar a cada una de sus águilas?
20. *Asignación de probabilidades* Un dado está cargado de modo que el seis no puede aparecer. Las otras caras ocurren con la misma frecuencia. ¿Qué probabilidad debemos asignar a cada cara?

En los problemas del 21 al 24 encuentre la probabilidad del evento indicado si $P(A) = 0.30$ y $P(B) = 0.40$.

21. $P(A \cup B)$ si A, B son mutuamente excluyentes.
22. $P(A \cap B)$ si A, B son mutuamente excluyentes.
23. $P(A \cup B)$ si $P(A \cap B) = 0.15$
24. $P(A \cap B)$ si $P(A \cup B) = 0.6$

En los problemas del 25 al 28 se selecciona al azar una pelota de golf de una caja que contiene 9 pelotas blancas, 8 verdes y 3 anaranjadas, encuentre la probabilidad de cada evento.

25. La pelota de golf es blanca.

26. La pelota de golf es verde.

27. La pelota de golf es blanca o verde.

28. La pelota de golf no es blanca.

29. ¿Cuál es la probabilidad de tirar un 6 o un 8 en un juego de *craps*? (Consulte el ejemplo 8.)

30. ¿Cuál es la probabilidad de tirar un 5 o un 9 en un juego de *craps*? (Consulte el ejemplo 8.)

Los problemas del 31 al 34 están basados en una encuesta a consumidores acerca de los ingresos anuales de 100 familias. La tabla siguiente proporciona la información:

Ingreso	\$0–9999	\$10,000–19,999	\$20,000–29,999	\$30,000–39,999	\$40,000 más
Número de familias	5	35	30	20	10

31. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga un ingreso anual de \$30,000.00 o más?

32. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga un ingreso anual de entre \$10,000.00 y \$29,999.00, inclusive?

33. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga un ingreso anual menor de \$20,000.00?

34. ¿Cuál es la probabilidad de que una familia tenga un ingreso anual de \$20,000.00 o más?

35. *Encuesta.* A partir de los datos de una encuesta acerca del número de televisores en las casas, se construyó la tabla de probabilidades siguiente:

Número de televisores	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	0.05	0.24	0.33	0.21	0.17

Encuentre la probabilidad de que una casa tenga:

(a) 1 o 2 televisores (b) 1 o más televisores (c) 3 o menos televisores (d) 3 o más televisores

(e) Menos de 2 televisores (f) Menos de 1 televisor (g) 1, 2 o 3 televisores (h) 2 o más televisores

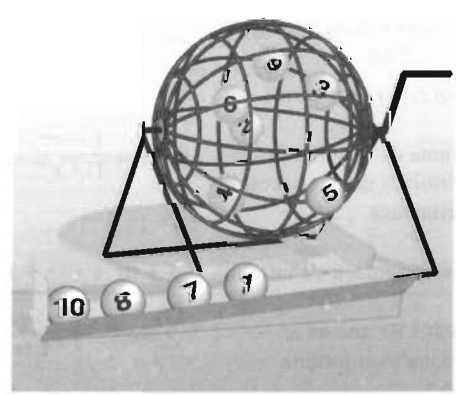
36. *Filas para pagar.* Por observación, se ha determinado que la probabilidad de que un número dado de personas espere en la fila de una caja registradora de "cinco artículos o menos" en un supermercado es:

Número esperando la fila	0	1	2	3	4 o más
Probabilidad	0.10	0.15	0.20	0.24	0.31

Encuentre la probabilidad de que:

(a) Cuando mucho haya 2 personas en la fila.
(b) Al menos haya 2 personas en la fila.
(c) Al menos haya 1 persona en la fila.

37. *Ganancias en la lotería.* En cierta lotería hay 10 bolas numeradas con 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. De estas, se sacan cinco en un orden establecido. Si usted selecciona cinco números que coincidan con los aparecidos en el orden establecido gana \$1,000,000.00. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en tal lotería?



38. Un comité de 6 personas será elegido al azar en un grupo de 14 que consiste de 2 supervisores, 5 trabajadores especializados y 7 no especializados. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité seleccionado tenga 2 trabajadores especializados y 4 no especializados?

39. Se lanza una moneda no cargada cinco veces.
(a) Encuentre la probabilidad de que aparezcan exactamente 3 águilas.
(b) Encuentre la probabilidad de que no aparezcan águilas.

40. Se lanza cuatro veces una moneda no cargada.
(a) Encuentre la probabilidad de que aparezca exactamente 1 sol.
(b) Encuentre la probabilidad de que no aparezca más de 1 sol.

41. Se tira un par de dados no cargados 3 veces.
(a) Encuentre la probabilidad de que la suma 7 aparezca 3 veces.
(b) Encuentre la probabilidad de que una suma de 7 u 11 aparezca al menos dos veces.

42. Se tira un par de dados no cargados cinco veces.
(a) Encuentre la probabilidad de que la suma nunca sea 2.
(b) Encuentre la probabilidad de que la suma nunca sea 7.

43. Por una confusión en la línea de producción, 5 televisores defectuosos fueron enviados con 25 buenos. Si son seleccionados 5 al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los cinco sean defectuosos? ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 de ellos sean defectuosos?

44. En un embarque de 50 transformadores se sabe que 10 son defectuosos. Si se sacan al azar 30 transformadores, ¿cuál es la probabilidad de que los 30 no sean defectuosos? Suponga que todos los transformadores parecen iguales y tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

45. En una promoción, 50 dólares de plata, uno de los cuales está valuado en más de $10,000.00, son colocados en una bolsa. Al ganador de la promoción se le da la oportunidad de meter la mano en la bolsa, con los ojos vendados, y sacar 5 monedas. ¿Cuál es la probabilidad de que una de las 5 monedas sea la valuada en más de $10,000.00?

46. Vaya a la biblioteca y en un libro de probabilidad busque "el problema del cumpleaños". Escriba un breve ensayo acerca de ese problema y dé su solución.

Repaso del capítulo

Conceptos fundamentales

Sucesión	Una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.
Factoriales	$0! = 1,\ 1! = 1,\ n! = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$ si $n \geq 2$
Sucesión aritmética	$a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d$, donde a = primer término, d = diferencia común, $a_n = a + (n-1)d$
Suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética	$S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \dfrac{n}{2}(a + a_n)$
Sucesión geométrica	$a_1 = a,\ a_{n+1} = ra_n$; donde a = primer término, r = razón común, $a_n = ar^{n-1},\ r \neq 0$
Suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética	$S_n = a\dfrac{1-r^n}{1-r},\quad r \neq 0, 1$
Serie geométrica infinita	$a + ar + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$
Suma de una serie geométrica infinita	$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \dfrac{a}{1-r},\quad \lvert r\rvert < 1$
Principio de inducción matemática	Condición I: El enunciado es verdadero para el número natural 1. Condición II: Si el enunciado es verdadero para algún número natural k, también es verdadero para $k+1$ Entonces el enunciado es verdadero para todos los números naturales.

Coeficiente binomial	$\binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
Triángulo de Pascal	*Véase* la figura 7.	
Teorema del binomio	$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \cdots + \binom{n}{j}a^j x^{n-j} + \cdots + \binom{n}{n}a^n$	
Conjunto		Colección bien definida de objetos distintos, llamados elementos.
Conjunto vacío	$\varnothing$	Conjunto sin elementos.
Igualdad	$A = B$	A y B tienen los mismos elementos.
Subconjunto	$A \subseteq B$	Cada elemento de A también es un elemento de B.
Intersección	$A \cap B$	Conjunto que consta de los elementos que pertenecen a A y a B.
Unión	$A \cup B$	Conjunto que consta de los elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos.
Conjunto universal	U	Conjunto que consta de todos los elementos que deseamos considerar.
Complemento	A'	Conjunto que consta de los elementos del conjunto universal que no están en A.
Conjunto finito		El número de elementos en el conjunto es un entero no negativo.
Conjunto infinito		Un conjunto que no es finito.
Fórmula de conteo	$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$	
Principio de adición		Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
Principio de multiplicación		Si una tarea consiste en una sucesión de posibilidades en las que hay p selecciones para la primera posibilidad, q para la segunda, y así sucesivamente, entonces la tarea de seleccionar puede hacerse de $p \cdot q \cdot \ldots$ maneras diferentes.
Permutación	$P(n, r) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot [n-(r-1)] = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	Un arreglo ordenado de n objetos distintos sin repetición.
Combinación	$C(n, r) = \dfrac{P(n, r)}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$	Un arreglo, sin considerar el orden, de n objetos distintos sin repetición.
Permutaciones con repetición	$\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$	El número de permutaciones de n objetos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 son de una segunda clase, . . . , y n_k son de una k-ésima clase, donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$
Espacio muestral		Conjunto cuyos elementos representan todas las posibilidades de que pueda ocurrir cierto resultado en un experimento.
Probabilidad		Un número asignado a cada resultado o evento elemental de un espacio muestral; la suma de todas las probabilidades de los resultados es igual a 1.
Regla aditiva	$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$	
Resultados igualmente probables	$P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$	A cada resultado se le asigna la misma probabilidad.

CÓMO HACER PARA

Escribir los términos de una sucesión

Usar la notación de sumatoria

Identificar una sucesión aritmética

Encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética

Identificar una sucesión geométrica

Encontrar la suma de los primeros n términos de una sucesión geométrica

Encontrar la suma de una serie geométrica

Demostrar enunciados acerca de los números naturales empleando inducción matemática

Aplicar el teorema del binomio

Encontrar la unión, la intersección y el complemento en conjuntos
Usar diagramas de Venn para ilustrar conjuntos
Reconocer un problema de permutación
Reconocer un problema de combinación
Resolver ciertos problemas de probabilidad
Contar los elementos presentes en un espacio muestral
Dibujar un diagrama de árbol

COMPLETE EN LOS ESPACIOS

1. Un(a) __________ es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos.
2. En una sucesión __________, la diferencia entre términos sucesivos siempre es el mismo número.
3. En una sucesión __________, la razón de dos términos sucesivos siempre es el mismo número.
4. __________ __________ es una disposición triangular de los coeficientes binomiales.
5. $\binom{6}{2} =$ __________
6. La __________ de A con B consta de todos los elementos que están en A o en B; la __________ de A con B consta de todos los elementos que están en A y en B.
7. $P(5, 2) =$ __________; $C(5, 2) =$ __________
8. Un(a) __________ es un arreglo ordenado de n objetos distintos.
9. Un(a) __________ es un arreglo de n objetos distintos sin importar el orden.
10. Cuando se asigna la misma probabilidad a cada resultado de un espacio muestral se dice que se tienen resultados __________ __________.

CIERTO O FALSO

C F 1. Una sucesión aritmética es una función.
C F 2. Para sucesiones aritméticas, la diferencia entre términos sucesivos siempre es el mismo número.
C F 3. Para sucesiones geométricas, la razón entre términos sucesivos siempre es el mismo número.
C F 4. La inducción matemática puede ser usada algunas veces para probar teoremas que involucren números naturales.
C F 5. $\binom{n}{j} = \dfrac{j!}{n!(n-j)!}$
C F 6. El desarrollo de $(x + a)^n$ tiene n términos.
C F 7. $\sum_{i=1}^{n+1} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$
C F 8. La intersección de dos conjuntos siempre es un subconjunto de su unión.
C F 9. $P(n, r) = \dfrac{n!}{r!}$
C F 10. En un problema de combinaciones, el orden no es importante.
C F 11. En un problema de permutaciones, una vez que un objeto es utilizado no puede ser repetido.
C F 12. La probabilidad de un evento nunca puede ser cero.

EJERCICIOS DE REPASO

En los problemas del 1 al 8 evalúe cada expresión.

1. $5!$ 2. $6!$ 3. $\binom{5}{2}$ 4. $\binom{8}{6}$ 5. $P(8, 3)$ 6. $P(7, 3)$ 7. $C(8, 3)$ 8. $C(7, 3)$

En los problemas del 9 al 16 escriba los primeros cinco términos de cada sucesión.

9. $\left\{(-1)^n\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)\right\}$

10. $\{(-1)^{n+1}(2n+3)\}$

11. $\left\{\dfrac{2^n}{n^2}\right\}$

12. $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}$

13. $a_1 = 3; \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$

14. $a_1 = 4; \quad a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$

15. $a_1 = 2; \quad a_{n+1} = 2 - a_n$

16. $a_1 = -3; \quad a_{n+1} = 4 + a_n$

En los problemas del 17 al 28 determine si la sucesión dada es aritmética, geométrica o de ninguno de los dos tipos. Si la sucesión es aritmética, encuentre la diferencia común y la suma de los primeros n términos. Si es geométrica, encuentre la razón común y la suma de los primeros n términos.

17. $\{n + 5\}$

18. $\{4n + 3\}$

19. $\{2n^3\}$

20. $\{2n^2 - 1\}$

21. $\{2^{3n}\}$

22. $\{3^{2n}\}$

23. $0, 4, 8, 12, \ldots$

24. $1, -3, -7, -11, \ldots$

25. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$

26. $5, -\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots$

27. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

28. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}, \ldots$

En los problemas del 29 al 34 encuentre el término indicado de cada sucesión.

29. Noveno término de $3, 7, 11, 15, \ldots$

30. Octavo término de $1, -1, -3, -5, \ldots$

31. Undécimo término de $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$

32. Undécimo término de $1, 2, 4, 8, \ldots$

33. Noveno término de $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots$

34. Noveno término de $\sqrt{2}, 2, 2^{3/2}, \ldots$

En los problemas del 35 al 38 encuentre una fórmula general para cada sucesión aritmética.

35. El séptimo término es 31, el vigésimo es 96.

36. El octavo término es -20, el decimoséptimo es -47.

37. El décimo término es 0, el decimoctavo es 8.

38. El duodécimo término es 30, el vigésimo segundo es 50.

En los problemas del 39 al 44 encuentre la suma de cada serie geométrica infinita.

39. $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$

40. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$

41. $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots$

42. $6 - 4 + \frac{8}{3} - \frac{16}{9} + \cdots$

43. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

44. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(-\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

En los problemas del 45 al 50, utilice el principio de inducción matemática para demostrar que el enunciado dado es verdadero para todos los números naturales.

45. $3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \dfrac{3n}{2}(n + 1)$

46. $2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$

47. $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$

48. $3 + 6 + 12 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1} = 3(2^n - 1)$

49. $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3n - 2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$

50. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n + 2) = \dfrac{n}{6}(n + 1)(2n + 7)$

En los problemas del 51 al 54 desarrolle cada expresión usando el teorema del binomio.

51. $(x + 2)^5$

52. $(x - 3)^4$

53. $(2x + 3)^5$

54. $(3x - 4)^4$

55. Encuentre el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(x + 2)^9$.

56. Encuentre el coeficiente de x^3 en el desarrollo de $(x - 3)^8$.

57. Encuentre el coeficiente de x^2 en el desarrollo de $(2x + 1)^7$.

58. Encuentre el coeficiente de x^6 en el desarrollo de $(2x + 1)^8$.

En los problemas del 59 al 66, utilice U = *conjunto universal* = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 6, 7, 8\}$ *y* $C = \{2, 3, 7, 8, 9\}$ *para encontrar cada conjunto.*

59. $A \cup B$ **60.** $B \cup C$ **61.** $A \cap C$ **62.** $A \cap B$

63. $A' \cup B'$ **64.** $B' \cap C'$ **65.** $(B \cap C)'$ **66.** $(A \cup B)'$

67. Si $n(A) = 8$, $n(B) = 12$ y $n(A \cap B) = 3$, encuentre $n(A \cup B)$.

68. Si $n(A) = 12$, $n(A \cup B) = 30$, y $n(A \cap B) = 6$, encuentre $n(B)$.

En los problemas del 69 al 74 utilice la información proporcionada en la figura:

69. ¿Cuántos están en A?

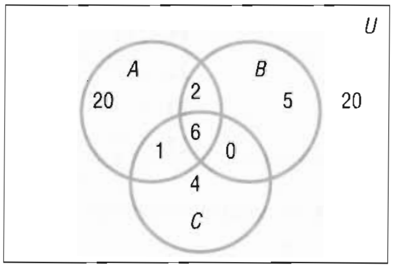
70. ¿Cuántos están en A o en B?

71. ¿Cuántos están en A y en C?

72. ¿Cuántos no están en B?

73. ¿Cuántos no están en A ni en C?

74. ¿Cuántos están en B pero no en C?



75. Un almacén de ropa vende trajes de lana pura y de poliéster con lana. Cada traje viene en 3 colores y 10 tallas. ¿Cuántos trajes se necesitan para tener un surtido completo?

76. En la conexión de cierto dispositivo eléctrico, 5 alambres están conectados a 5 terminales diferentes. ¿Cuántos contactos son posibles si se conecta un alambre a cada terminal?

77. *Béisbol.* En un día determinado, la Liga Americana de béisbol programa 7 partidos. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles, suponiendo que cada partido se juega completo?

78. *Béisbol.* En un día determinado, la Liga Nacional de béisbol programa 6 juegos. ¿Cuántos resultados diferentes son posibles, suponiendo que cada partido se juega completo?

79. Si 4 personas suben a un autobús que tiene 9 asientos desocupados, ¿en cuántas formas se pueden sentar?

80. ¿Cuántos arreglos diferentes son posibles con las letras de la palabra ROSE?

81. Un equipo de 4 corredores de relevos, ¿de cuántas maneras puede ser seleccionado de un equipo de 8 corredores de pista?

82. Una profesora tiene 10 problemas semejantes para poner en un examen de 3 preguntas. ¿Cuántos exámenes diferentes puede diseñar?

83. *Béisbol.* ¿De cuántas maneras diferentes pueden formarse parejas con los 14 equipos de la Liga Americana, sin tomar en cuenta cuál equipo es anfitrión?

84. *Acomodo de libros en un estante.* Se tienen 5 libros diferentes de francés y 5 libros diferentes de español. ¿Cuántas formas hay de acomodarlos en un estante si:
(a) Los libros del mismo lenguaje deben ir juntos, francés a la izquierda, español a la derecha?
(b) ¿Los libros de francés y español deben alternarse, empezando con un libro de francés?

85. *Números telefónicos.* Usando los dígitos 0, 1, 2, . . . , 9, ¿cuántos números de 7 dígitos pueden ser formados si el primer dígito no puede ser 0 ni 9, y si el último dígito es mayor o igual a 2 y menor o igual que 3? Se permite repetir los dígitos.

86. *Selección de una casa.* Un contratista construye casas con 5 tipos diferentes de acabado exterior, 3 tipos de techos y 4 diseños distintos de ventanas. ¿Cuántos estilos diferentes de casa puede construir?

87. *Posibles placas de un automóvil.* Una placa consta de una letra, exceptuando O e I, seguida por un número de 4 dígitos que no pueden tener al 0 en la primera posición. ¿Cuántas placas son posibles?

88. Si se usan los dígitos 0 y 1, ¿cuántos números diferentes de 8 dígitos pueden ser creados?

89. *Formación de palabras diferentes.* ¿Cuántas palabras diferentes pueden ser creadas usando todas las letras de la palabra MISSING?

90. *Arreglo de banderas.* ¿Cuántos arreglos verticales pueden hacerse con 10 banderas si 4 son blancas, 3 azules, 2 verdes y 1 es roja?

91. *Formación de comités.* Un grupo de 9 personas va a formar comités de 4, 3 y 2 personas. ¿Cuántos comités pueden formarse si:
(a) Una persona puede servir en cualquier número de comités?
(b) ¿Ninguna persona puede estar en más de un comité?

92. *Formación de comités.* De un grupo de 5 hombres y 8 mujeres se formará un comité de 4, y la política dicta que al menos una mujer debe estar en el comité.
(a) ¿Cuántos comités que incluyan a un hombre pueden formarse?
(b) ¿Cuántos comités que incluyan a 2 mujeres pueden formarse?
(c) ¿Cuántos comités que tengan al menos a un hombre pueden formarse?

93. De una caja con tres focos de 40 wats, seis de 60 wats y once de 75 wats se saca un foco al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que se saque un foco de 40 wats? ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de 75 wats?

94. En su bolsa usted tiene cuatro monedas de $1.00, tres de $5.00 y dos de $10.00. Si saca una moneda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una de $1.00?

95. Cada una de las letras de la palabra ROSE es escrita en una tarjeta y luego las tarjetas se revuelven. ¿Cuál es la probabilidad de que, cuando las tarjetas sean repartidas y siguiendo el orden de repartición, pueda deletrearse la palabra ROSE?

96. Cada uno de los números, 1, 2, . . . , 100 es escrito en una tarjeta y las tarjetas se revuelven. Si se selecciona al azar una tarjeta, ¿cuál es la probabilidad de que el número escrito en ella sea divisible entre 5? ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta seleccionada sea un uno o un número primo?

97. *Cálculo de probabilidades.* A causa de un error al empacar, una caja con 12 botellas de vino tinto contiene 5 Merlot y 7 Cabernet, sin etiquetas. Todas las botellas se ven iguales y tienen la misma probabilidad de ser elegidas. Se seleccionan tres.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 sean Merlot?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 sean Merlot?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna sea Merlot?

98. *Lanzamiento de una moneda.* Una moneda no cargada es lanzada 10 veces.
(a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 5 águilas?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener águila todas las veces?

99. *Construcción de una escalera de ladrillos.* Una escalera de ladrillos debe tener 25 escalones. El escalón inferior requiere de 80 ladrillos y cada escalón sucesivo requiere tres ladrillos menos que el precedente.
(a) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para el escalón superior?
(b) ¿Cuántos ladrillos se necesitan para construir la escalera?

100. *Creación del diseño para un piso.* Un piso de mosaico de cerámica está diseñado en forma de trapecio, con 30 pies de ancho en la base y 15 pies de ancho en la parte superior. *Véase* la figura 5. Los mosaicos, de 12 por 12 pulgadas, serán colocados de modo que cada fila sucesiva tenga un mosaico menos que la fila anterior. ¿Cuántos mosaicos se necesitarán?

101. *Rebote de pelota.* Una pelota se deja caer desde una altura de 20 pies. Cada vez que la pelota pega contra el piso rebota hasta $\frac{3}{4}$ de la altura anterior.

(a) ¿A qué altura rebota la pelota después de golpear el piso por tercera vez?
(b) ¿Cuál es la altura después de que pega en el piso la n-ésima vez?
(c) ¿Cuántas veces necesita rebotar la pelota antes de que la altura del rebote sea menor de 6 pulgadas?
(d) ¿Cuál es la distancia total que recorre la pelota antes de detenerse?

102. *Aumento de salario.* Su amiga acaba de ser contratada con un salario anual de $20,000.00. Si ella espera recibir un aumento anual del 4%, ¿cuál será su salario al inicio del quinto año?

103. En un taller de ajuste y reparación de frenos, el administrador ha encontrado que cierto automóvil necesita ajuste con una probabilidad de 0.6, una reparación de frenos con probabilidad de 0.1, y ambas operaciones con una probabilidad de 0.02.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil necesite ajuste o reparación de frenos?
(b) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil necesite un ajuste pero no reparación de frenos?
(c) ¿Cuál es la probabilidad de que el automóvil no necesite ningún tipo de trabajo?

Capítulo 12

PREPARACIÓN PARA ESTE CAPÍTULO

Antes de iniciar este capítulo repase los siguientes conceptos:

Para la sección 12.1: Operaciones de renglón en matrices (p. 627)

Para la sección 12.2: Identidades (p. 441)
Factorización de polinomios (apéndice A, p. 806)
Funciones racionales propias e impropias (pp. 211, 212)
Teorema fundamental del álgebra (p. 242; también p. 250)

Para la sección 12.3 y 12.4: Coordenadas rectangulares (p. 53)
Ley de los cosenos (sección 8.2)

TEMAS DIVERSOS

Panorama Determinar la velocidad y dirección de un avión

Un avión boeing 737 mantiene una velocidad constante de 500 millas por hora en dirección sur. La velocidad de la corriente de chorro es de 80 millas por hora en dirección noreste.

(a) Determinar un vector unitario con dirección noreste.

(b) Determinar un vector con magnitud de 80 unidades en la misma dirección que el vector unitario de la parte (a).

(c) Determinar la velocidad real del avión respecto del suelo. [ejemplo 6 de la sección 12.3.]

(d) Determinar la dirección real del avión respecto del suelo. [ejemplo 4 de la sección 12.4.] ■

Este capítulo contiene tres temas independientes entre sí que pueden ser cubiertos en cualquier orden.

La primera sección considera una matriz como un concepto algebraico, presentando las ideas de suma y multiplicación así como algunas propiedades del álgebra de matrices.

La segunda sección, **descomposición en fracciones parciales,** proporciona una aplicación particular de los sistemas de ecuaciones. Esta aplicación se utiliza en el estudio del cálculo integral.

Por último, las dos secciones finales presentan una introducción al concepto de **vector** y algunas de sus aplicaciones, tema de gran importancia en ingeniería y física.

12.1 Álgebra de matrices

En la sección 10.2 definimos una matriz como un arreglo de números reales y utilizamos una matriz aumentada para representar un sistema de ecuaciones lineales. Sin embargo, existe una rama de las matemáticas, el **álgebra lineal,** que considera a las matrices desde un punto de vista que da lugar a un álgebra de matrices. En esta sección veremos cómo se desarrolla el **álgebra de matrices.**

Antes de comenzar, recordemos la definición de una matriz.

Matriz

Una **matriz** se define como un arreglo rectangular de números:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{columna } j & & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \text{renglón } i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Cada número a_{ij} de la matriz tiene dos índices: el **índice de renglón** i y el **índice de columna** j. La matriz anterior tiene m renglones y n columnas. Los $m \cdot n$ números a_{ij} son las **entradas** de la matriz.

Comencemos con un ejemplo que muestra la forma de utilizar las matrices para representar de manera adecuada un arreglo de información.

EJEMPLO 1 *Arreglo de datos en una matriz*

En una encuesta de 1000 personas se obtuvo la siguiente información:

200 hombres	Piensan que el gasto militar es muy alto.
150 hombres	Piensan que el gasto militar es muy bajo.
45 hombres	No opinaron.
315 mujeres	Piensan que el gasto militar es muy alto.
125 mujeres	Piensan que el gasto militar es muy bajo.
165 mujeres	No opinaron.

Podemos arreglar los datos anteriores en un arreglo rectangular como sigue:

	MUY ALTO	MUY BAJO	SIN OPINIÓN
Hombres	200	150	45
Mujeres	315	125	165

o como

$$\begin{bmatrix} 200 & 150 & 45 \\ 315 & 125 & 165 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene dos renglones (hombres y mujeres) y tres columnas ("muy alto", "muy bajo" y "sin opinión"). ■

La matriz del ejemplo 1 tiene 2 renglones y 3 columnas. En general, una matriz con m renglones y n columnas es una **matriz de m por n.** Así, la matriz del ejemplo 1 es una matriz de 2 por 3. Observe que una matriz de m por n tiene $m \cdot n$ entradas.

Si una matriz de m por n tiene el mismo número de renglones que de columnas, es decir, si $m = n$, entonces es una **matriz cuadrada.**

EJEMPLO 2 *Ejemplos de matrices*

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz cuadrada de 2 por 2. (b) $[1 \quad 0 \quad 3]$ Matriz 1 por 3

(c) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Matriz cuadrada de 3 por ■

Igualdad y suma de matrices

Comenzamos nuestro análisis del álgebra de matrices definiendo lo que significa que dos matrices sean iguales y las operaciones de suma y resta. Es importante observar que estas definiciones requieren que ambas matrices tengan el mismo número de renglones *y* de columnas como prerrequisito para la igualdad, la suma y la resta.

Por lo general, representaremos las matrices con letras mayúsculas como A, B, C, y así sucesivamente.

Matrices iguales

Dos matrices A y B de m por n son **iguales**, lo cual se denota

$$A = B$$

siempre y cuando cada entrada a_{ij} en A sea igual a la entrada correspondiente b_{ij} en B.

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{9} & \sqrt{4} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt[3]{-8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$ Porque las entradas del renglón 1, columna 2 no son iguales.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$ Porque la matriz de la izquierda es 2 por y la de la derecha 2 por 4.

Si cada una de las matrices A y B es de m por n (y, por lo tanto, cada una tiene $m \cdot n$ entradas), la proposición $A = B$ representa un sistema de $m \cdot n$ ecuaciones. Más adelante haremos uso de este hecho.

Suponga que A y B representan dos matrices de m por n. Definimos su **suma** $\mathbf{A + B}$ como la matriz de m por n formada al sumar las entradas correspondientes a_{ij} de A y b_{ij} de B. La **diferencia** $\mathbf{A - B}$ es la matriz de m por n formada por la resta de las entradas b_{ij} de B de las entradas correspondientes a_{ij} de A. La suma y resta de matrices sólo valen para matrices con el mismo número m de renglones y el mismo número n de columnas. Así, por ejemplo, no se puede sumar o restar una matriz de 2 por 3 con una matriz de 2 por 4.

EJEMPLO 3 *Suma y resta de matrices*

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar: (a) $A + B$ (b) $A - B$

Solución

(a)
$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 + (-3) & 4 + 4 & 8 + 0 & -3 + 1 \\ 0 + 6 & 1 + 8 & 2 + 2 & 3 + 0 \end{bmatrix} \quad \text{Sumamos las entradas correspondientes.}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 & 8 & -2 \\ 6 & 9 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 - (-3) & 4 - 4 & 8 - 0 & -3 - 1 \\ 0 - 6 & 1 - 8 & 2 - 2 & 3 - 0 \end{bmatrix} \quad \text{Restamos las entradas correspondientes.}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 & -4 \\ -6 & -7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Verificación: Introduzca las matrices A y B. Después determine $A + B$ y $A - B$. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Muchas de las propiedades algebraicas de la suma de números reales también son válidas para la suma de matrices. Suponga que A, B y C son matrices de m por n. Entonces la suma de matrices es **conmutativa.** Es decir,

Propiedad conmutativa

$$A + B = B + A$$

La suma de matrices también es **asociativa.** Es decir,

Propiedad asociativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

Aunque no demostraremos estos enunciados, las demostraciones, como lo ilustran los siguientes ejemplos, se basan en las propiedades de conmutatividad y asociatividad para los números reales.

EJEMPLO 4 *Ejemplo de la propiedad conmutativa*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-1) & 3+2 & -1+1 \\ 4+5 & 0+(-3) & 7+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+2 & 2+3 & 1+(-1) \\ 5+4 & -3+0 & 4+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$ ■

Una matriz cuyas entradas son todas nulas es una **matriz cero.** Cada una de las siguientes matrices es una matriz cero:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz cero cuadrada de 2 por 2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz cero de 2 por 3. $[0 \quad 0 \quad 0]$ Matriz cero de 1 por 3.

Las matrices cero tienen propiedades similares a las del número real 0. Es decir, si A es una matriz m por n y 0 una matriz m por n, entonces

$$\boxed{A + 0 = A}$$

En otras palabras, la matriz cero es la identidad aditiva en el álgebra de matrices.

También podemos multiplicar una matriz por un número real. Si k es un número real y A una matriz de m por n, la matriz kA es la matriz de m por n formada al multiplicar cada una de las entradas de A por k. Al número k se le llama **escalar** y la matriz kA es un **múltiplo escalar** de A.

EJEMPLO 5 *Operaciones con matrices*

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Determinar: (a) $4A$ (b) $\frac{1}{3}C$ (c) $3A - 2B$

Solución

(a) $4A = 4\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cdot 3 & 4\cdot 1 & 4\cdot 5 \\ 4(-2) & 4\cdot 0 & 4\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 20 \\ -8 & 0 & 24 \end{bmatrix}$

(b) $\frac{1}{3}C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\cdot 9 & \frac{1}{3}\cdot 0 \\ \frac{1}{3}(-3) & \frac{1}{3}\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $3A - 2B = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 3 & 3\cdot 1 & 3\cdot 5 \\ 3(-2) & 3\cdot 0 & 3\cdot 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 8 & 2\cdot 1 & 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 3 & 15 \\ -6 & 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 16 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-8 & 3-2 & 15-0 \\ -6-16 & 0-2 & 18-(-6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 15 \\ -22 & -2 & 24 \end{bmatrix}$$

Comentario. La mayor parte de los dispositivos de graficación pueden hacer álgebra de matrices. De hecho, la mayor parte de las calculadoras gráficas pueden utilizar matrices hasta de 9 por 9.

Verificación: Introduzca las matrices A, B, y C. Después determine $4A$, $\frac{1}{3}C$, y $3A - 2B$.

Ahora resuelva el problema 5.

Enlistaremos ahora algunas propiedades algebraicas de la multiplicación escalar.

Sean h y k números reales y A y B matrices m por n. Entonces

Propiedades de la multiplicación por un escalar

$$k(hA) = (kh)A$$
$$(k + h)A = kA + hA$$
$$k(A + B) = kA + kB$$

Las demostraciones de estas propiedades se basan en las propiedades de los números reales. Por ejemplo, si A y B son matrices de 2 por 2, entonces

$$k(A + B) = k\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\right) = k\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k(a_{11} + b_{11}) & k(a_{12} + b_{12}) \\ k(a_{21} + b_{21}) & k(a_{22} + b_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} + kb_{11} & ka_{12} + kb_{12} \\ ka_{21} + kb_{21} & ka_{22} + kb_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = kA + kB$$

Multiplicación de matrices

A diferencia de la definición directa para la suma de dos matrices, la definición para la multiplicación de dos matrices no es lo que podríamos esperar. Como preparación para estudiarla necesitamos las siguientes definiciones:

Un **vector renglón** R es una matriz de 1 por n:

$$R = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]$$

Un **vector columna** C es una matriz de n por 1:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

El **producto** RC de R por C es el número

$$RC = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = r_1c_1 + r_2c_2 + \cdots + r_nc_n$$

Observe que un vector renglón y un vector columna pueden multiplicarse sólo si tienen el mismo número de entradas.

EJEMPLO 6 *El producto de un vector renglón y un vector columna*

Si $R = [3 \quad -5 \quad 2]$ y $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$, entonces

$$RC = [3 \quad -5 \quad 2]\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 3 + (-5)4 + 2(-5)$$
$$= 9 - 20 - 10 = -21$$

Veamos una aplicación del producto de un vector renglón por un vector columna.

EJEMPLO 7 *Uso de matrices para calcular ganancias*

En una tienda de ropa se venden camisas a \$25.00, corbatas de seda a \$8.00 y trajes de lana a \$300.00. El mes pasado se vendieron 100 camisas, 200 corbatas y 50 trajes. ¿Cuál fue la ganancia total por estas ventas?

Solución Establecemos un vector renglón R para representar los precios de cada artículo y un vector columna C para el número de artículos vendidos.

Entonces

$$R = \begin{array}{c} \text{Precios} \\ \begin{array}{ccc} \text{Camisas} & \text{Corbatas} & \text{Trajes} \end{array} \\ [\begin{array}{ccc} 25 & 8 & 300 \end{array}] \end{array} \qquad C = \begin{array}{c} \text{Cantidad vendida} \\ \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Camisas} \\ \text{Corbatas} \\ \text{Trajes} \end{array}$$

La ganancia obtenida es el producto RC. Es decir,

$$RC = [25 \quad 8 \quad 300]\begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 50 \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{25 \cdot 100}_{\text{Ganancia de camisas}} + \underbrace{8 \cdot 200}_{\text{Ganancia de corbatas}} + \underbrace{300 \cdot 50}_{\text{Ganancia de trajes}} = \underbrace{\$19{,}100}_{\text{Ganancia total}}$$

La definición para la multiplicación de dos matrices se basa en la definición de un vector renglón por un vector columna.

Producto

> Sean A una matriz de m por r y B una matriz de r por n. El **producto** AB es la matriz m por n cuya entrada en el renglón i, columna j es el producto del i-ésimo renglón de A y la j-ésima columna de B.

La definición del producto AB de dos matrices A y B, en este orden, exige que el número de columnas de A sea igual al número de renglones de B; de otra forma, el producto no está definido:

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ m \text{ por } r & & r \text{ por } n \end{array}$$

Deben ser iguales para definir AB

AB es m por n

Un ejemplo ayudará a aclarar la definición.

EJEMPLO 8 *Multiplicación de matrices*

Determinar el producto AB si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución Primero observemos que A es de 2 por 3 y B es de 3 por 4, de modo que el producto AB está definido y será una matriz de 2 por 4. Si queremos determinar la entrada del renglón 2, columna 3 de AB, calculamos el producto del vector renglón 2 de A y el vector columna de la columna 3 de B:

$$\underset{\text{Renglón 2 de } A}{[5 \quad 8 \quad 0]} \underset{\text{Columna 3 de } B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}} = 5 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 0(-2) = 5$$

Hasta ahora, tenemos

$$\begin{array}{cl} & \text{Columna 3} \\ AB = \begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & 5 & \_\_ \end{bmatrix} & \leftarrow \text{Renglón 2} \end{array}$$

Ahora, para determinar la entrada del renglón 1, columna 4 de AB, calculamos el producto del renglón 1 de A y la columna 4 de B.

$$\underset{\text{Renglón 1 de } A}{[2 \quad 4 \quad -1]} \underset{\text{Columna 4 de } B}{\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}} = 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + (-1)(-1) = 33$$

Continuamos de esta forma y calculamos AB:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 \\ 4 & 8 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \text{Renglón 1 de } A & \text{Renglón 1 de } A & \text{Renglón 1 de } A & \text{Renglón 1 de } A \\ \text{por} & \text{por} & \text{por} & \text{por} \\ \text{columna 1 de } B & \text{columna 2 de } B & \text{columna 3 de } B & \text{columna 4 de } B \\ \\ \text{Renglón 2 de } A & \text{Renglón 2 de } A & \text{Renglón 2 de } A & \text{Renglón 2 de } A \\ \text{por} & \text{por} & \text{por} & \text{por} \\ \text{columna 1 de } B & \text{columna 2 de } B & \text{columna 3 de } B & \text{columna 4 de } B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2+4\cdot 4+(-1)(-3) & 2\cdot 5+4\cdot 8+(-1)1 & 2\cdot 1+4\cdot 0+(-1)(-2) & 33 \text{ (calculado antes)} \\ 5\cdot 2+8\cdot 4+0(-3) & 5\cdot 5+8\cdot 8+0\cdot 1 & 5 \text{ (calculado antes)} & 5\cdot 4+8\cdot 6+0(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 41 & 4 & 33 \\ 42 & 89 & 5 & 68 \end{bmatrix}$$

Verificación: Introduzca las matrices A y B. Calcule AB. (Observe lo que ocurre si intenta calcular BA.) ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

Observe que para las matrices del ejemplo 8, el producto BA no está definido, pues B es de 3 por 4 y A es de 2 por 3. El siguiente ejemplo muestra otro resultado que puede ocurrir al multiplicar dos matrices.

EJEMPLO 9 *Multiplicación de matrices*

Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

calcular: (a) AB (b) BA

Solución (a) $$AB = \underset{2 \text{ por } 3}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{3 \text{ por } 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{2 \text{ por } 2}{\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

(b) $$BA = \underset{3 \text{ por } 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} \underset{2 \text{ por } 3}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{3 \text{ por } 3}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}}$$ ■

En el ejemplo 9, observe que AB es de 2 por 2 y BA es de 3 por 3. Así, es posible que AB y BA estén ambas definidas, pero que sean distintas. De hecho, aunque A y B sean matrices de n por n, de modo que AB y BA estén definidas y sean de n por n, AB y BA casi siempre serán distintas.

EJEMPLO 10 *Multiplicación de dos matrices cuadradas*

Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

calcular: (a) AB (b) BA

Solución

(a) $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(-3) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 0(-3) + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

(b) $$BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (-3)2 + 1 \cdot 0 & (-3)1 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$$

■

Los ejemplos anteriores demuestran que una propiedad importante de los números reales, la propiedad conmutativa de la multiplicación, no es compartida por las matrices. Así, en general:

Teorema

La multiplicación de matrices no es conmutativa. ■

■ Ahora resuelva los problemas 7 y 9.

A continuación daremos dos propiedades de los números reales que son compartidas por las matrices. Si cada producto y cada suma están definidos, entonces

Propiedad asociativa

$$A(BC) = (AB)C$$

Propiedad distributiva

$$A(B + C) = AB + AC$$

La matriz identidad

Para una matriz cuadrada de n por n, las entradas en el renglón i, columna i, $1 \leq i \leq n$, son las **entradas de la diagonal.** Una matriz cuadrada de n por n cuyas entradas de la diagonal son unos, mientras que las demás son ceros, es la **matriz identidad I_n**. Por ejemplo,

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

etcétera.

EJEMPLO 11 *Multiplicación con una matriz identidad*

Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular: (a) AI_3 (b) I_2A (c) BI_2

Solución

(a) $AI_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$

(b) $I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A$

(c) $BI_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = B$ ■

El ejemplo 11 muestra la siguiente propiedad: si A es una matriz de m por n, entonces

Propiedad de la identidad

$$I_mA = A \quad \text{y} \quad AI_n = A$$

Si A es una matriz cuadrada de n por n, entonces $AI_n = I_nA = A$. Así, una matriz identidad tiene propiedades análogas a las del número 1. En otras palabras, la matriz identidad es un neutro multiplicativo en el álgebra de matrices.

La inversa de una matriz

Matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada de n por n. Si existe una matriz A^{-1}, de n por n (se lee "A inversa") para la cual

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

entonces A^{-1} es la **inversa** de la matriz A.

Como veremos en breve, no toda matriz cuadrada tiene una inversa. Cuando una matriz A tiene una inversa A^{-1}, entonces A es **no singular.**

EJEMPLO 12 *Multiplicación de una matriz por su inversa*

Mostrar que la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Debemos mostrar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 1(-2) & 3(-1) + 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1(-2) & 2(-1) + 1 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2 & 1 - 1 \\ -6 + 6 & -2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$ ■

Ahora mostraremos una forma de calcular la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea A^{-1} dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \tag{1}$$

donde x, y, z, y w son cuatro variables. Con base en la definición de inversa, entonces, si A realmente tiene inversa, tenemos

$$AA^{-1} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x + z & 3y + w \\ 2x + z & 2y + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como las entradas correspondientes deben ser iguales, entonces esta ecuación matricial es equivalente a cuatro ecuaciones normales:

$$\begin{cases} 3x + z = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y + w = 0 \\ 2y + w = 1 \end{cases}$$

La matriz aumentada de cada sistema es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{2}$$

El procedimiento usual sería transformar cada matriz aumentada a su forma escalonada reducida. Sin embargo, conviene observar que los lados izquierdos de las matrices aumentadas son iguales, de modo que podemos utilizar las mismas operaciones de renglón (*véase* la sección 10.2) para reducir cada una. Así, es más eficiente combinar las dos matrices aumentadas (2) en una sola, como se muestra a continuación, que después transformamos a su forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora intentaremos reducir el lado izquierdo a una matriz identidad:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{R_1 = -1r_2 + r_1}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_2 = -2r_1 + r_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \tag{3}$$

La matriz (3) tiene forma escalonada reducida. Ahora invertimos el paso anterior de combinar las dos matrices aumentadas en (2) y escribimos la matriz (3) como dos matrices aumentadas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \text{ y } \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Con estas matrices, concluimos que $x = 1$, $z = -2$ y $y = -1$, $w = 3$. Al sustituir estos valores en la matriz (1), tenemos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

En la matriz (3), observe que la matriz de 2 por 2 a la derecha de la barra vertical es, de hecho, la inversa de A. Observe también que la matriz identidad I_2 es la matriz que aparece a la izquierda de la barra vertical. Estas observaciones y los procedimientos que hemos seguido son válidos en general.

Procedimiento para calcular la inversa de una matriz no singular

Para determinar la inversa de una matriz de n por n no singular A, procedemos como sigue:

PASO 1: Formamos la matriz $[A|I_n]$.

PASO 2: Transformamos la matriz $[A|I_n]$ a su forma escalonada reducida.

PASO 3: La forma escalonada reducida de $[A|I_n]$ contendrá la matriz identidad I_n a la izquierda de la barra vertical; la matriz de n por n a la derecha de la barra vertical es la inversa de A.

En otras palabras, si A es no singular, comenzamos con la matriz $[A|I_n]$ y, después de transformarla a su forma escalonada reducida, terminamos con la matriz $[I_n|A^{-1}]$.

Veamos otro ejemplo.

EJEMPLO 13 *Calcular la inversa de una matriz*

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

es no singular. Calcular su inversa.

Solución Primero formamos la matriz

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A continuación, utilizamos las operaciones de renglón para transformar $[A|I_3]$ en su forma escalonada reducida:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = r_2 + r_1]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = \frac{1}{4}r_2]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 = -1r_2 + r_1 \\ R_3 = -4r_2 + r_3}]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 = -1r_3]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 = r_1 + r_3 \\ R_2 = -1r_3 + r_2}]{} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

La matriz $[A|I_3]$ tiene ahora su forma escalonada reducida, y la matriz identidad I_3 está a la izquierda de la barra vertical. Por lo tanto, la inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

■

Usted puede (y debe) verificar que ésta es la inversa correcta, demostrando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

Verificación: Introduzca la matriz A. Calcule después A^{-1}. Luego determine el producto AA^{-1}. ■

■ Ahora resuelva el problema 23.

Si la transformación de la matriz $[A|I_n]$ a su forma escalonada reducida no produce una matriz identidad I_n a la izquierda de la barra vertical, entonces A no tiene inversa. El siguiente ejemplo muestra una matriz de este tipo.

EJEMPLO 14 *Una matriz sin inversa*

Mostrar que la siguiente matriz no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Procedemos como en el ejemplo 13 y formamos la matriz

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{rr|rr} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Después utilizamos operaciones de renglón para transformar $[A \mid I_2]$ a su forma escalonada reducida:

$$[A|I_2] = \left[\begin{array}{rr|rr} 4 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 = \frac{1}{4}r_1]{} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 = -2r_1 + r_2]{} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

La matriz $[A|I_2]$ ya está suficientemente reducida como para ver que la matriz identidad no puede aparecer a la izquierda de la barra vertical. Concluimos que A no tiene inversa.

Verificación: Introduzca la matriz A e intente calcular la inversa. ¿Qué ocurre? ■

■ Ahora resuelva el problema 51.

Resolución de sistemas de ecuaciones

Podemos utilizar las matrices inversas para resolver sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones es igual al de variables.

EJEMPLO 15 *Uso de la matriz inversa para resolver un sistema de ecuaciones*

Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + 3y + 4z = -3 \\ 4y + 3z = 2 \end{cases}$

Solución Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

entonces podemos escribir el sistema original de manera compacta como la ecuación matricial

$$AX = B \tag{4}$$

Por el ejemplo 13, sabemos que la matriz A tiene la inversa A^{-1}, de modo que multiplicamos cada lado de la ecuación (4) por A^{-1}:

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\ (A^{-1}A)X &= A^{-1}B && \text{Propiedad asociativa de la multiplicación.} \\ I_3X &= A^{-1}B && \text{Definición de matriz inversa.} \\ X &= A^{-1}B && \text{Propiedad de la matriz identidad} \end{aligned}$$

Ahora utilizamos esto para calcular $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{Ejemplo 13}} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Así, $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$. ■

El método utilizado en el ejemplo 15 para resolver un sistema de ecuaciones es de particular utilidad cuando hay que resolver varios sistemas de ecuaciones con diversas constantes a la derecha del signo de igualdad, mientras que los coeficientes de las variables de la izquierda siguen siendo los mismos. *Véanse* los problemas del 31 al 50 para una ilustración de esto.

DATO HISTÓRICO

■ Las matrices fueron inventadas en 1857 por Arthur Cayley (1821-1895), como una forma para calcular de manera eficiente el resultado de sustituir un sistema lineal en otro (*véase* el problema histórico 2). El sistema resultante trajo consigo una riqueza increíble, en el sentido de que las matrices podrían utilizarse en una amplia gama de sistemas matemáticos. Cayley y su amigo J. J. Sylvester (1814-1897), ocuparon gran parte del resto de su vida elaborando la teoría. Después pasaron la estafeta a G. Frobenius (1848-1917), cuyas profundas investigaciones establecieron un papel central para las matrices en las matemáticas modernas. En 1924, con gran sorpresa de los físicos, se estableció que las matrices (con números complejos) eran la herramienta correcta para describir el comportamiento de los sistemas atómicos. En la actualidad, las matrices tienen una amplia variedad de aplicaciones. ■

PROBLEMAS HISTÓRICOS

■ 1. *Matrices y números complejos.* En sus investigaciones, Frobenius enfatizó la forma en que podrían utilizarse las matrices para imitar otros sistemas matemáticos. En este ejercicio imitaremos el comportamiento de los números complejos mediante matrices. Los matemáticos llaman a esta relación *isomorfismo*.

Número complejo ⟷ Matriz

$$a + bi \quad \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Observe que el número complejo se puede leer en la línea superior de la matriz. Así,

$$2 + 3i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \longleftrightarrow 4 - 2i$$

(a) Encuentre las matrices correspondientes a $2 - 5i$ y $1 + 3i$.
(b) Multiplique las dos matrices.
(c) Determine el número complejo correspondiente a la matriz encontrada en la parte (b).
(d) Multiplique $2 - 5i$ por $1 + 3i$. El resultado debe ser igual al determinado en la parte (c).

El proceso también funciona para la suma y la resta. Inténtelo.

2. *Definición de Cayley para la multiplicación matricial.* Cayley inventó la multiplicación matricial para simplificar el siguiente problema:

$$\begin{cases} u = ar + bs \\ v = cr + ds \end{cases} \qquad \begin{cases} x = ku + lv \\ y = mu + nv \end{cases}$$

(a) Determine x y y en términos de r y s sustituyendo u y v del primer sistema de ecuaciones en el segundo sistema.
(b) Utilice el resultado de la parte (a) para determinar la matriz A de 2 por 2 en

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

(c) Ahora observe la siguiente manera de hacerlo: escriba las ecuaciones en forma matricial

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

De modo que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$$

¿Puede apreciar la forma en que Cayley definió la multiplicación matricial? ■

12.1

Ejercicio 12.1

En los problemas del 1 al 16 utilice las siguientes matrices para calcular la expresión dada.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. $A + B$ **2.** $A - B$ **3.** $4A$ **4.** $-3B$

5. $3A - 2B$ **6.** $2A + 4B$ **7.** AC **8.** BC

9. CA **10.** CB **11.** $C(A + B)$ **12.** $(A + B)C$

13. $AC - 3I_2$ **14.** $CA + 5I_3$ **15.** $CA - CB$ **16.** $AC + BC$

En los problemas del 17 al 20 calcule cada producto.

17. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas del 21 al 30 cada matriz es no singular. Determine la inversa de cada matriz y asegúrese de verificar su respuesta.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$ **26.** $\begin{bmatrix} b & 3 \\ b & 2 \end{bmatrix}, \quad b \neq 0$ **27.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas del 31 al 50, utilice las inversas de los problemas del 21 al 30 para resolver cada sistema de ecuaciones.

31. $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} 3x - y = 8 \\ -2x + y = 4 \end{cases}$ **33.** $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$

34. $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ -2x + y = 5 \end{cases}$ **35.** $\begin{cases} 6x + 5y = 7 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} -4x + y = 0 \\ 6x - 2y = 14 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 6x + 5y = 13 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} -4x + y = 5 \\ 6x - 2y = -9 \end{cases}$ **39.** $\begin{cases} 2x + y = -3 \\ ax + ay = -a \end{cases} \quad a \neq 0$

40. $\begin{cases} bx + 3y = 2b + 3 \\ bx + 2y = 2b + 2 \end{cases} \quad b \neq 0$ **41.** $\begin{cases} 2x + y = 7/a \\ ax + ay = 5 \end{cases} \quad a \neq 0$ **42.** $\begin{cases} bx + 3y = 14 \\ bx + 2y = 10 \end{cases} \quad b \neq 0$

43. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ -2y + z = -1 \\ -2x - 3y = -5 \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} x + 2z = 6 \\ -x + 2y + 3z = -5 \\ x - y = 6 \end{cases}$ **45.** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ -2y + z = 2 \\ -2x - 3y = \frac{1}{2} \end{cases}$

46. $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ -x + 2y + 3z = -\frac{3}{2} \\ x - y = 2 \end{cases}$

47. $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x + 2y - z = 8 \\ 3x + y + 2z = 1 \end{cases}$

48. $\begin{cases} 3x + 3y + z = 8 \\ x + 2y + z = 5 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$

49. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = \frac{7}{3} \\ 3x + y + 2z = \frac{10}{3} \end{cases}$

50. $\begin{cases} 3x + 3y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$

En los problemas del 51 al 56 muestre que cada matriz no tiene inversa.

51. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} -3 & \frac{1}{2} \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

53. $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

55. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & -7 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

56. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & 1 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas del 57 al 60 determine la inversa (si existe) de cada matriz.

57. $\begin{bmatrix} 25 & 61 & -12 \\ 18 & -2 & 4 \\ 8 & 35 & 21 \end{bmatrix}$

58. $\begin{bmatrix} 18 & -3 & 4 \\ 6 & -20 & 14 \\ 10 & 25 & -15 \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 44 & 21 & 18 & 6 \\ -2 & 10 & 15 & 5 \\ 21 & 12 & -12 & 4 \\ -8 & -16 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

60. $\begin{bmatrix} 16 & 22 & -3 & 5 \\ 21 & -17 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 27 & 20 \\ 5 & 15 & -3 & -10 \end{bmatrix}$

En los problemas del 61 al 64 utilice la idea subyacente en el ejemplo 15 para resolver los sistemas de ecuaciones.

61. $\begin{cases} 25x + 61y - 12z = 10 \\ 18x - 12y + 7z = -9 \\ 3x + 4y - z = 12 \end{cases}$

62. $\begin{cases} 25x + 61y - 12z = 5 \\ 18x - 12y + 7z = -3 \\ 3x + 4y - z = 12 \end{cases}$

63. $\begin{cases} 25x + 61y - 12z = 21 \\ 18x - 12y + 7z = 7 \\ 3x + 4y - z = -2 \end{cases}$

64. $\begin{cases} 25x + 61y - 12z = 25 \\ 18x - 12y + 7z = 10 \\ 3x + 4y - z = -4 \end{cases}$

65. *Cálculo de un costo de producción.* La compañía de acero Acme produce recipientes de acero inoxidable y de aluminio. Cierto día se fabricaron los siguientes recipientes de acero inoxidable: 500 con capacidad de 10 galones, 350 con capacidad de 5 galones y 400 con capacidad de un galón. El mismo día se produjeron los siguientes recipientes de aluminio: 700 con capacidad de 10 galones, 500 con capacidad de 5 galones y 850 con capacidad de un galón.

(a) Determine una matriz de 2 por 3 que represente los datos anteriores. Determine también una matriz de 3 por 2 para los mismos datos.

(b) Si la cantidad de material utilizado en los recipientes de 10 galones son 15 libras, la cantidad utilizada en los recipientes de 5 galones es de 8 libras y la cantidad utilizada en los recipientes de un galón son 3 libras, determine una matriz de 3 por 1 que represente la cantidad de material.

(c) Multiplique la matriz de 2 por 3 de la parte (a) y la matriz de 3 por 1 de la parte (b) para obtener una matriz de 2 por 1 que represente el uso diario de material.

(d) Si el acero inoxidable cuesta a Acme \$0.10 por libra y el aluminio le cuesta \$0.05 la libra, determine una matriz de 1 por 2 que represente el costo.

(e) Multiplique las matrices de las partes (c) y (d) para determinar el costo total de producción de ese día.

66. *Cálculo de ganancia.* A Un vendedor de autos tiene dos agencias, una en el centro de la ciudad y otra en los suburbios. En enero, la agencia del centro vendió 400 coches compactos, 250 de tamaño intermedio y 50 camionetas; en febrero, vendió 350 compactos, 100 intermedios y 30 camionetas. En la agencia de los suburbios, en enero se vendieron 450 compactos, 200 intermedios y 140 camionetas; en febrero se vendieron 350 compactos, 300 intermedios y 100 camionetas.

(a) Determine matrices de 2 por 3 que resuman los datos de venta para cada agencia, para enero y febrero (una matriz para cada mes).

(b) Utilice la suma de matrices para obtener las ventas totales para el periodo de dos meses.

(c) La ganancia unitaria por tipo de auto es: \$100.00 para los compactos, \$150.00 los de tamaño intermedio y \$200.00 por camioneta. Determine una matriz de 3 por 1 que represente esta ganancia.

(d) Multiplique las matrices de las partes (b) y (c) para obtener una matriz de 2 por 1 que muestre la ganancia en cada agencia.

67. Considere la matriz cuadrada de 2 por 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Si $D = ad - bc \neq 0$, muestre que A es no singular y que

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

68. Plantee una situación diferente a cualquiera de las que aparecen en el texto y que se pueda representar mediante una matriz.

12.2 Descomposición en fracciones parciales

Considere el problema de sumar las dos fracciones

$$\frac{3}{x+4} \quad \text{y} \quad \frac{2}{x-3}$$

El resultado es

$$\frac{3}{x+4} + \frac{2}{x-3} = \frac{3(x-3) + 2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \frac{5x-1}{x^2+x-12}$$

El procedimiento inverso, comenzar con la expresión racional $(5x - 1)/(x^2 + x - 12)$ y escribirla como la suma (o resta) de dos fracciones más sencillas $3/(x + 4)$ y $2/(x - 3)$ se conoce como **descomposición en fracciones parciales,** y las dos fracciones más sencillas son las **fracciones parciales.** La descomposición de una expresión racional en una suma de fracciones parciales es importante para resolver ciertos tipos de problemas de cálculo. Esta sección presenta una manera sistemática de descomponer expresiones racionales.

Recordemos que una expresión racional es el cociente de dos polinomios, digamos, P y $Q \neq 0$, que no tienen factores en común. Una expresión racional P/Q es **propia** si el grado del polinomio en el numerador es menor que el grado del polinomio en el denominador. De otro modo, la expresión racional es **impropia.**

Como una expresión racional impropia se puede reducir (mediante una división) a una forma mixta que consta de la suma de un polinomio y una expresión racional propia, restringiremos el siguiente análisis a las expresiones racionales propias.

La descomposición en fracciones parciales de la expresión racional P/Q depende de los factores del denominador Q. Recuerde (sección 3.5) que cualquier polinomio cuyos coeficientes sean números reales puede factorizarse (en los números reales) en productos de factores lineales o de factores cuadráticos irreducibles. Así, el denominador Q de la expresión racional P/Q sólo contendrá factores de uno o ambos de los tipos siguientes:

1. *Factores lineales* de la forma $x - a$, donde a es un número real.
2. *Factores cuadráticos irreducibles* de la forma $ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac < 0$ (lo cual garantiza que $ax^2 + bx + c$ no puede ser escrito como el producto de dos factores lineales con coeficientes reales).

Debemos analizar cuatro casos. Comenzamos con el caso donde Q sólo tiene factores lineales no repetidos.

CASO 1: Q sólo tiene factores lineales no repetidos.

Con esta hipótesis sobre Q, este polinomio tiene la forma

$$\boxed{Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)}$$

donde ninguno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son iguales. En este caso, la descomposición en fracciones parciales de P/Q es de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x - a_n} \tag{1}$$

donde hay que determinar los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

En el siguiente ejemplo mostraremos cómo determinar estos números.

EJEMPLO *Factores lineales no repetidos*

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$.

Solución Primero factorizamos el denominador,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

y concluimos que el denominador sólo tiene factores lineales no repetidos. Después descomponemos las expresiones racionales según la ecuación (1):

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} \tag{2}$$

donde hay que determinar A y B. Para esto, eliminamos las fracciones multiplicando cada lado por $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6$. El resultado es

$$x = A(x - 3) + B(x - 2) \tag{3}$$

o

$$x = (A + B)x + (-3A - 2B)$$

Esta ecuación es una identidad en x. Así, debemos igualar los coeficientes de las potencias de x para obtener

$$\begin{cases} 1 = A + B & \text{Igualamos los coeficientes de } x\text{: } 1x = (A + B)x. \\ 0 = -3A - 2B & \text{Igualamos los coeficientes de } x^0\text{, las constantes: } 0x^0 = (-3A - 2B)x^0. \end{cases}$$

Podemos resolver este sistema de dos ecuaciones con dos variables, A y B, con cualquier método, y obtenemos

$$A = -2 \qquad B = 3$$

MISIÓN POSIBLE

Capítulo 12

GUARDANDO SECRETOS

Su grupo descubre que una empresa de consultoría rival ha estado interceptando y leyendo los informes que ustedes se envían entre sí. Ustedes necesitan entonces codificar sus decisiones finales, de modo que esa empresa no les quite negocios robando sus ideas. Ustedes han decidido buscar una forma de codificar sus mensajes más importantes para que no puedan ser leídos por quien no debe.

Su método de codificación comienza con el método más sencillo utilizado por los niños, a saber, asignando a cada letra del alfabeto un número que representa su posición en éste. Por ejemplo, $A = 1, B = 2, \ldots, M = 13, N = 14, \ldots, Z = 26$. El espacio se representaría por 27; un punto por 0. Así, el mensaje se traduce en matrices de 2×1 como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Suponga que quiere enviar el mensaje: *Choose Dealer C.* Primero, escribiría el mensaje agrupando las letras de dos en dos y después como matrices.

$$\begin{array}{cccccccc} Ch & oo & se & D & ea & le & r & C \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 19 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 27 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 18 \\ 27 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Después utilizaría una matriz de código, una matriz cuadrada de 2×2 elegida de modo que exista su inversa. Utilizaremos $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ como muestra matriz de código. Para codificar un mensaje, multiplique la matriz de código por cada matriz del mensaje, como sigue:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 75 \end{bmatrix}, \quad \text{etcétera.}$$

El conjunto de matrices resultante sería enviado a su colega como una serie de números: 50,50,150,75, y así sucesivamente. Su colega utilizaría la inversa de la matriz de código para descifrar su mensaje. Obviamente, ¡debe guardar celosamente la matriz de código y su inversa!

1. Determine la inversa de la matriz de código anterior. Asegúrese de que sea la correcta multiplicando las dos matrices de código por su matriz para ver si puede recuperar las dos matrices originales.
2. A continuación, cree su propio mensaje (¡no demasiado largo!) y codifíquelo mediante la matriz de código anterior. Copie el código resultante en otra hoja de papel como una serie de números.
3. Intercambie los mensajes codificados con otro grupo.
4. Utilice la matriz inversa para decodificar el mensaje enviado a usted por el otro grupo.
5. La criptografía es una ciencia practicada por los gobiernos en guerra o por las empresas, en situaciones donde el secreto es crucial. Si su empresa de consultoría es muy estricta para guardar secretos, tal vez deba perfeccionar sus procedimientos de código. Por ejemplo, el mensaje anterior *Choose Dealer C*, puede descomponerse en cuatro matrices de 4×1. Entonces, la matriz de código tendría que ser 4×4, con una inversa de las mismas dimensiones. El gobierno podría utilizar una matriz de código 20×20 para disminuir la probabilidad de que sea descifrada. Diseñe su propia matriz de código de 4×4, determine su inversa y codifique un mensaje de su elección en matrices de 4×1. Después pase el código y la clave a un grupo vecino para que lo decodifiquen.

Así, de la ecuación (2), la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{-2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3}$$

Verificación: Podemos verificar la descomposición sumando las fracciones:

$$\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{-2(x-3) + 3(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 9.

A veces podemos determinar más fácilmente los números en la descomposición en fracciones parciales si elegimos x en forma adecuada (lo cual podría incluir números complejos) en la identidad obtenida después de eliminar las fracciones. En el ejemplo 1, la identidad que queda después de eliminar fracciones en la ecuación (3), es

$$x = A(x - 3) + B(x - 2)$$

Si hacemos $x = 2$ en esta expresión, el término que contiene B desaparece, quedando $2 = A(-1)$ o $A = -2$. De manera análoga, si $x = 3$, el término que contiene A desaparece, quedando $3 = B$. Así, como antes, $A = -2$ y $B = 3$.

En el ejemplo siguiente utilizamos este método.

CASO 2: Q tiene factores lineales repetidos.

Si el polinomio Q tiene un factor repetido, digamos,, $(x - a)^n$, $n \geq 2$ un entero, entonces, en la descomposición en fracciones parciales de P/Q utilizamos los términos

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

donde hay que determinar los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

EJEMPLO 2 *Factores lineales repetidos*

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}$.

Solución Primero factorizamos el denominador,

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$$

y vemos que tiene el factor lineal no repetido x y el factor lineal repetido $(x - 1)^2$. Por el caso 1, debemos utilizar el término A/x en la descomposición; y por el caso 2, debemos utilizar los términos $B/(x - 1) + C/(x - 1)^2$.

Así, escribimos

$$\frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \tag{4}$$

De nuevo, eliminamos las fracciones multiplicando cada lado por $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. El resultado es la identidad

$$x + 2 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx \tag{5}$$

Si $x = 0$ en esta expresión, los términos que tienen B y C desaparecen, quedando $2 = A(-1)^2$ o $A = 2$. De igual manera, si $x = 1$, los términos que tienen A y B desaparecen, quedando $3 = C$. Así, la ecuación (5) queda

$$x + 2 = 2(x-1)^2 + Bx(x-1) + 3x$$

Ahora, sea $x = 2$ (cualquier elección distinta de 0 o 1 funcionará bien). El resultado es

$$\begin{aligned} 4 &= 2(1)^2 + B(2)(1) + 3(2) \\ 2B &= 4 - 2 - 6 = -4 \\ B &= -2 \end{aligned}$$

Así, tenemos $A = 2$, $B = -2$, y $C = 3$.

De la ecuación (4), la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x+2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{2}{x} + \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

■

EJEMPLO 3 *Factores lineales repetidos*

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^3 - 8}{x^2(x-1)^3}$.

Solución El denominador tiene los factores lineales repetidos x^2 y $(x-1)^3$. Así, la descomposición en fracciones parciales toma la forma

$$\frac{x^3 - 8}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3} \tag{6}$$

Como antes, eliminamos fracciones para obtener la identidad

$$x^3 - 8 = Ax(x-1)^3 + B(x-1)^3 + Cx^2(x-1)^2 + Dx^2(x-1) + Ex^2 \tag{7}$$

Sea $x = 0$. (¿Advierte usted la razón de esta elección?) Entonces,

$$\begin{aligned} -8 &= B(-1) \\ B &= 8 \end{aligned}$$

Ahora, sea $x = 1$ en la ecuación (7). Entonces

$$-7 = E$$

Utilizamos $B = 8$ y $E = -7$ en la ecuación (7) y agrupamos los términos semejantes:

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= Ax(x-1)^3 + 8(x-1)^3 \\ &\quad + Cx^2(x-1)^2 + Dx^2(x-1) - 7x^2 \\ x^3 - 8 - 8(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 7x^2 &= Ax(x-1)^3 + Cx^2(x-1)^2 + Dx^2(x-1) \\ -7x^3 + 31x^2 - 24x &= x(x-1)[A(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx] \\ x(x-1)(-7x + 24) &= x(x-1)[A(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx] \\ -7x + 24 &= A(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx \end{aligned} \tag{8}$$

Ahora trabajamos con la ecuación (8). Sea $x = 0$. Entonces

$$24 = A$$

Ahora, sea $x = 1$ en la ecuación (8). Entonces

$$17 = D$$

Utilizamos $A = 24$ y $D = 17$ en la ecuación (8) y agrupamos los términos semejantes:

$$\begin{aligned} -7x + 24 &= 24(x-1)^2 + Cx(x-1) + 17x \\ -24x^2 + 48x - 24 - 17x - 7x + 24 &= Cx(x-1) \\ -24x^2 + 24x &= Cx(x-1) \\ -24x(x-1) &= Cx(x-1) \\ -24 &= C \end{aligned}$$

Ahora conocemos todos los números $A, B, C, D,$ y E, de modo que, por la ecuación (6), tenemos la descomposición

$$\frac{x^3-8}{x^2(x-1)^3} = \frac{24}{x} + \frac{8}{x^2} + \frac{-24}{x-1} + \frac{17}{(x-1)^2} + \frac{-7}{(x-1)^3}$$ ■

El método del ejemplo 3, aunque un poco tedioso, es mejor que resolver el sistema de cinco ecuaciones con cinco variables al que conduce el desarrollo de la ecuación (6).

■ Ahora resuelva el problema 15.

Los últimos dos casos implican factores cuadráticos irreducibles. Como mencionamos en la sección 3.5, un factor cuadrático es irreducible si no se puede factorizar en factores lineales con coeficientes reales. Una expresión cuadrática $ax^2 + bx + c$ es irreducible siempre que $b^2 - 4ac < 0$. Por ejemplo, $x^2 + x + 1$ y $x^2 + 4$ son irreducibles.

CASO 3: Q tiene un factor cuadrático irreducible no repetido.

Si Q tiene un factor cuadrático irreducible no repetido de la forma $ax^2 + bx + c$, entonces, la descomposición en fracciones parciales de P/Q incluye el término

$$\boxed{\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}}$$

donde hay que determinar los números A y B.

EJEMPLO 4 *Factores cuadráticos irreducibles no repetidos*

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{3x-5}{x^3-1}$.

Solución Factorizamos el denominador,

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

y vemos que tiene un factor lineal no repetido $x - 1$ y un factor cuadrático irreducible no repetido $x^2 + x + 1$. Así, incluimos el término $A/(x-1)$ por el caso 1, y el término $(Bx + C)/(x^2 + x + 1)$ por el caso 3. En consecuencia, escribimos

$$\frac{3x-5}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \tag{9}$$

Eliminamos las fracciones multiplicando cada lado de la ecuación (9) por $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ para obtener la identidad

$$3x - 5 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) \tag{10}$$

Ahora hagamos $x = 1$. Entonces la ecuación (10) implica $-2 = A(3)$, o $A = -\frac{2}{3}$. Utilizamos este valor de A en la ecuación (10) y simplificamos:

$$\begin{aligned}
3x - 5 &= -\frac{2}{3}(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1) \\
3(3x - 5) &= -2(x^2 + x + 1) + 3(Bx + C)(x - 1) && \text{Multiplicamos cada lado por 3.} \\
9x - 15 &= -2x^2 - 2x - 2 + 3(Bx + C)(x - 1) \\
2x^2 + 11x - 13 &= 3(Bx + C)(x - 1) && \text{Agrupamos términos.} \\
(2x + 13)(x - 1) &= 3(Bx + C)(x - 1) && \text{Factorizamos el lado izquierdo} \\
2x + 13 &= 3Bx + 3C \\
2 = 3B \quad &\text{y} \quad 13 = 3C && \text{Igualamos los coeficientes.} \\
B = \frac{2}{3} \quad & \quad C = \frac{13}{3}
\end{aligned}$$

Así, de la ecuación (9), vemos que

$$\frac{3x-5}{x^3-1} = \frac{-\frac{2}{3}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}}{x^2+x+1}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 17.

CASO 4: Q tiene factores cuadráticos irreducibles repetidos.

Si el polinomio Q tiene un factor cuadrático irreducible repetido $(ax^2 + bx + c)^n$, $n \geq 2$, n entero, entonces, en la descomposición en fracciones parciales de P/Q, incluimos los términos

$$\boxed{\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}}$$

donde hay que determinar los números $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n$.

EJEMPLO 5 *Factores cuadráticos irreducibles repetidos*

Escribir la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^3 + x^2}{(x^2+4)^2}$.

Solución El denominador contiene el factor cuadrático irreducible repetido $(x^2 + 4)^2$, de modo que escribimos

$$\frac{x^3 + x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{Cx + D}{(x^2+4)^2} \tag{11}$$

Eliminamos las fracciones para obtener

$$x^3 + x^2 = (Ax + B)(x^2 + 4) + Cx + D$$

Al agrupar términos semejantes tenemos

$$x^3 + x^2 = Ax^3 + Bx^2 + (4A + C)x + D + 4B$$

Al igualar coeficientes, llegamos al sistema

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ 4A + C = 0 \\ D + 4B = 0 \end{cases}$$

La solución es $A = 1$, $B = 1$, $C = -4$, $D = -4$. Por lo tanto, de la ecuación (11),

$$\frac{x^3 + x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-4x - 4}{(x^2 + 4)^2}$$

Ejercicio 12.2

En los problemas del 1 al 8 indique si la expresión racional dada es propia o impropia. Si es impropia, reescríbala como la suma de un polinomio y una expresión racional propia.

1. $\dfrac{x}{x^2 - 1}$
2. $\dfrac{5x + 2}{x^3 - 1}$
3. $\dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 4}$
4. $\dfrac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$
5. $\dfrac{5x^3 + 2x - 1}{x^2 - 4}$
6. $\dfrac{3x^4 + x^2 - 2}{x^3 + 8}$
7. $\dfrac{x(x - 1)}{(x + 4)(x - 3)}$
8. $\dfrac{2x(x^2 + 4)}{x^2 + 1}$

En los problemas del 9 al 42 escriba la descomposición en fracciones parciales para cada expresión racional.

9. $\dfrac{4}{x(x - 1)}$
10. $\dfrac{3x}{(x + 2)(x - 1)}$
11. $\dfrac{1}{x(x^2 + 1)}$
12. $\dfrac{1}{(x + 1)(x^2 + 4)}$
13. $\dfrac{x}{(x - 1)(x - 2)}$
14. $\dfrac{3x}{(x + 2)(x - 4)}$
15. $\dfrac{x^2}{(x - 1)^2(x + 1)}$
16. $\dfrac{x + 1}{x^2(x - 2)}$
17. $\dfrac{1}{x^3 - 8}$
18. $\dfrac{2x + 4}{x^3 - 1}$
19. $\dfrac{x^2}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$
20. $\dfrac{x + 1}{x^2(x - 2)^2}$
21. $\dfrac{x - 3}{(x + 2)(x + 1)^2}$
22. $\dfrac{x^2 + x}{(x + 2)(x - 1)^2}$
23. $\dfrac{x + 4}{x^2(x^2 + 4)}$
24. $\dfrac{10x^2 + 2x}{(x - 1)^2(x^2 + 2)}$
25. $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}$
26. $\dfrac{x^2 - 11x - 18}{x(x^2 + 3x + 3)}$
27. $\dfrac{x}{(3x - 2)(2x + 1)}$
28. $\dfrac{1}{(2x + 3)(4x - 1)}$
29. $\dfrac{x}{x^2 + 2x - 3}$
30. $\dfrac{x^2 - x - 8}{(x + 1)(x^2 + 5x + 6)}$
31. $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 4)^2}$
32. $\dfrac{x^3 + 1}{(x^2 + 16)^2}$
33. $\dfrac{7x + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x}$
34. $\dfrac{x^5 + 1}{x^6 - x^4}$
35. $\dfrac{x^2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

36. $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 3}$

37. $\dfrac{x^3}{(x^2 + 16)^3}$

38. $\dfrac{x^2}{(x^2 + 4)^3}$

39. $\dfrac{4}{2x^2 - 5x - 3}$

40. $\dfrac{4x}{2x^2 + 3x - 2}$

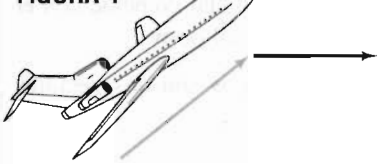
41. $\dfrac{2x + 3}{x^4 - 9x^2}$

42. $\dfrac{x^2 + 9}{x^4 - 2x^2 - 8}$

12.3 Vectores

En términos sencillos, un **vector** (del latín *vehere*, que significa "cargar") es una cantidad que tiene magnitud y dirección. Para un vector en el plano, único caso que analizaremos, conviene representarlo con una flecha. La longitud de la flecha representa la **magnitud** del vector y la cabeza de la flecha indica la **dirección** del vector.

FIGURA 1

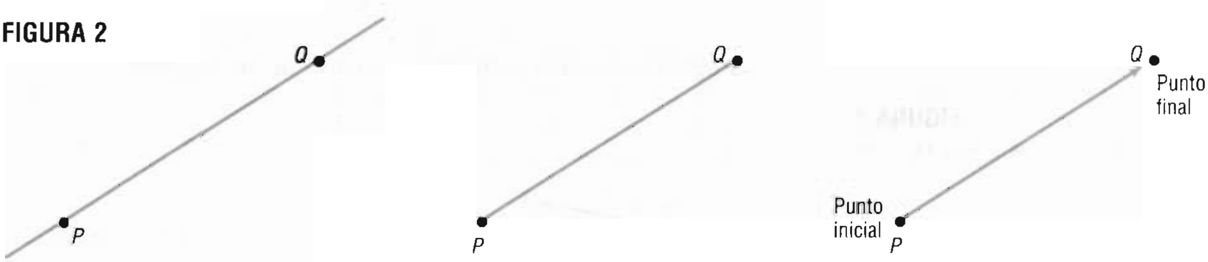


En física, muchas cantidades se pueden representar con vectores. Por ejemplo, la velocidad de un avión se puede representar por una flecha que apunte en la dirección del movimiento; la longitud de la flecha representa la velocidad. Así, cuando aumenta la velocidad del avión, alargamos la flecha; si el avión cambia de dirección, introducimos una flecha orientada en la nueva dirección. *Véase* la figura 1. Con base en esta representación, no debe sorprendernos que los vectores y los segmentos de recta dirigidos estén relacionados de alguna manera.

Segmentos de línea dirigidos

Si P y Q son dos puntos distintos en el plano xy, existe exactamente una recta que contiene a ambos. Los puntos en la parte de la recta que une P con Q, incluyéndolos, forman el **segmento de recta** $\overline{PQ}$. Si ordenamos los puntos de modo que vayan de P a Q, tenemos un **segmento de recta dirigido** de P a Q, el cual denotamos $\overrightarrow{PQ}$. En un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, llamamos P al **punto inicial** y Q al **punto final,** como se indica en la figura 2.

FIGURA 2



(a) Recta que contiene a P y Q **(b)** El segmento $\overline{PQ}$ **(c)** Segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$

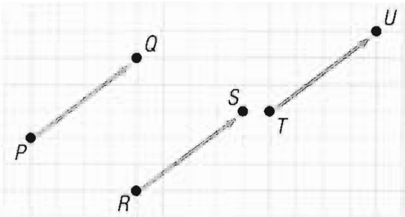
La magnitud del segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es la distancia del punto P al punto Q; es decir, es la longitud del segmento de recta. La dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es de P a Q. Si un vector $\mathbf{v}$* tiene la misma magnitud y la misma dirección que el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, entonces escribimos

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

El vector $\mathbf{v}$ cuya magnitud es cero es el **vector cero, 0.** El vector cero no tiene asignada dirección.

*Utilizaremos letras en negritas para denotar vectores y distinguirlos de los números. En trabajos manuscritos (dentro de texto) colocaremos una flecha sobre las letras para indicar un vector.

FIGURA 3



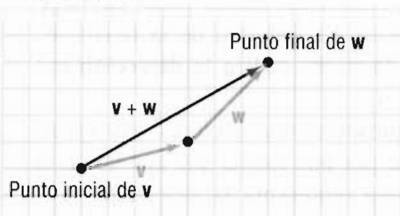
Dos vectores **v** y **w** son **iguales**, lo que se escribe

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}$$

si tienen la misma magnitud y la misma dirección.

Por ejemplo, los vectores de la figura 3 tienen la misma magnitud y la misma dirección, por lo que son iguales, no obstante tener distintos puntos iniciales y finales. De aquí que sea útil pensar en un vector sólo como una flecha, teniendo en mente que dos flechas (vectores) son iguales si tienen la misma dirección y la misma magnitud (longitud).

FIGURA 4



Suma de vectores

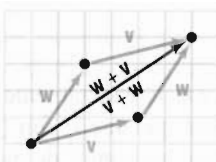
La **suma v + w** de dos vectores se define como sigue: colocamos los vectores **v** y **w** de modo que el punto final de **v** coincida con el punto inicial de **w**, como en la figura 4. El vector **v + w** es entonces el vector cuyo punto inicial coincide con el punto inicial de **v** y cuyo punto final coincide con el punto final de **w**.

La suma de vectores es **conmutativa.** Es decir, si **v** y **w** son dos vectores cualesquiera, entonces

Propiedad conmutativa

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

FIGURA 5



La figura 5 ilustra este hecho. (Observe que la propiedad conmutativa es otra forma de decir que los lados opuestos de un paralelogramo son iguales y paralelos.)

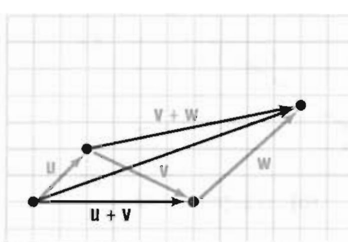
La suma de vectores también es **asociativa.** Es decir, si **u, v** y **w** son vectores, entonces

Propiedad asociativa

$$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$$

La figura 6 ilustra la propiedad asociativa de los vectores.

FIGURA 6
$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$



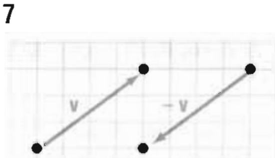
El vector cero tiene la propiedad de que

Propiedad del neutro

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$$

para cualquier vector **v**.

FIGURA 7



Si **v** es un vector, entonces −**v** es el vector que tiene la misma magnitud que **v** pero cuya dirección es opuesta, como nos muestra la figura 7.

Además,

Propiedad del inverso aditivo

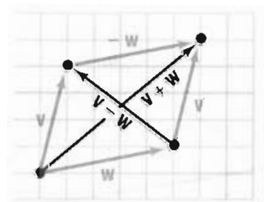
$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$$

Si **v** y **w** son dos vectores, definimos la **resta** $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ como

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\mathbf{w})$$

La figura 8 ilustra las relaciones entre **v**, **w**, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, y $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

FIGURA 8



Multiplicación de vectores por números

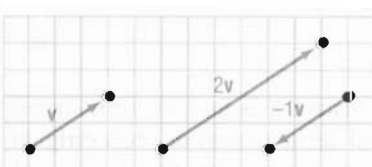
Al trabajar con vectores, nos referimos a los números reales como **escalares.** Los escalares son cantidades que sólo tienen magnitud. Algunos ejemplos físicos de cantidades escalares son la temperatura, la rapidez y el tiempo. Ahora definiremos la multiplicación de un vector pcr un escalar.

Producto por un escalar

Si α es un escalar y **v** un vector, el **producto de v por el escalar** α se define como:

1. Si $\alpha > 0$, el producto $\alpha\mathbf{v}$ es el vector cuya magnitud es α veces la magnitud de **v** y cuya dirección es igual a la de **v**.
2. Si $\alpha < 0$, el producto $\alpha\mathbf{v}$ es el vector cuya magnitud es $|\alpha|$ veces la magnitud de **v** y cuya dirección es opuesta a la de **v**.
3. Si $\alpha = 0$ o si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

FIGURA 9



Véase la figura 9 para una ilustración de lo anterior.

Por ejemplo, si **a** es la aceleración de un objeto de masa m debida a la fuerza **F** ejercida sobre ella, entonces, por la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. En este caso, $m\mathbf{a}$ es el producto del escalar m por el vector **a**.

El producto por un escalar tiene las siguientes propiedades:

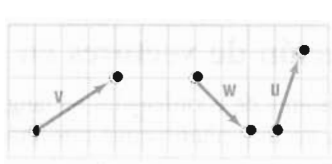
Propiedades del producto por un escalar

$$0\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad 1\mathbf{v} = \mathbf{v} \qquad -1\mathbf{v} = -\mathbf{v}$$
$$(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v} \qquad \alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$$
$$\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$$

EJEMPLO 1 *Trazado de gráficas de vectores*

Utilizar los vectores de la figura 10 para trazar la gráfica de cada expresión.

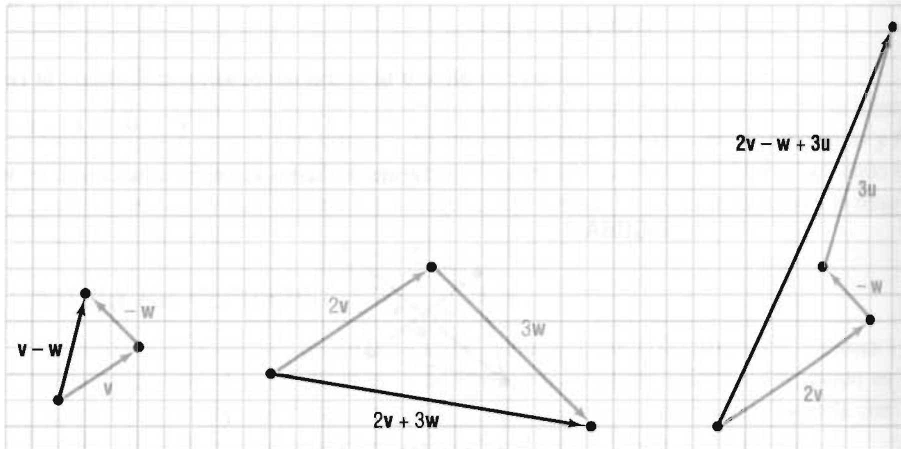
FIGURA 10



(a) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ (b) $2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ (c) $2\mathbf{v} - \mathbf{w} + 3\mathbf{u}$

Solución La figura 11 ilustra cada gráfica.

FIGURA 11



(a) v − w (b) 2v + 3w (c) 2v − w + 3u

■

■ Ahora resuelva los problemas 1 y 3.

Magnitudes de vectores

Si **v** es un vector, utilizamos el símbolo $\|\mathbf{v}\|$ para representar la **magnitud** de **v**. Como $\|\mathbf{v}\|$ es igual a la longitud de un segmento de recta dirigido, esto implica que $\|\mathbf{v}\|$ tiene las siguientes propiedades:

Teorema propiedades de $\|\mathbf{v}\|$

Si **v** es un vector y α un escalar, entonces:

(a) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ (b) $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

(c) $\|-\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ (d) $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|$ ■

La propiedad (a) es consecuencia de que la distancia es un número no negativo. La propiedad (b) se deduce de que la longitud del segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es positiva, a menos que P y Q sean el mismo punto, en cuyo caso la longitud es 0. La propiedad (c) se debe a que la longitud del segmento de recta $\overline{PQ}$ es igual a la longitud del segmento de recta $\overline{QP}$. La propiedad (d) es consecuencia directa de la definición de producto por un escalar.

Vector unitario

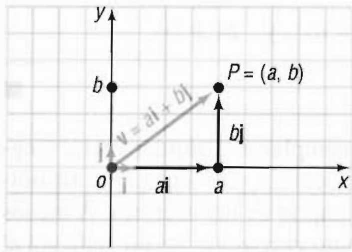
Un vector **u** para el que $\|\mathbf{u}\|$ = es un vector unitario

Para calcular la magnitud y la dirección de un vector, necesitamos hacer uso de una forma algebraica de representar vectores.

Representación de vectores en el plano

Utilizamos un sistema de coordenadas rectangulares para representar vectores en el plano. Sean **i** un vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje x positivo, y **j** un vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje y positivo. Si **v** es un vector con punto inicial en el origen O y punto final en $P = (a, b)$, entonces podemos representar $\mathbf{v}$ en términos de los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ como

FIGURA 12



$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Véase la figura 12. Los escalares a y b son las **componentes** del vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, donde a es la componente en la dirección $\mathbf{i}$ y b es la componente en la dirección $\mathbf{j}$.

Un vector con punto inicial en el origen es un **vector de posición.** El siguiente enunciado establece que cualquier vector cuyo punto inicial no sea el origen, es igual a un único vector de posición.

Teorema

Sea $\mathbf{v}$ un vector con punto inicial $P_1 = (x_1, y_1)$, no necesariamente el origen, y punto final $P_2 = (x_2, y_2)$. Si $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$, entonces $\mathbf{v}$ es igual al vector de posición

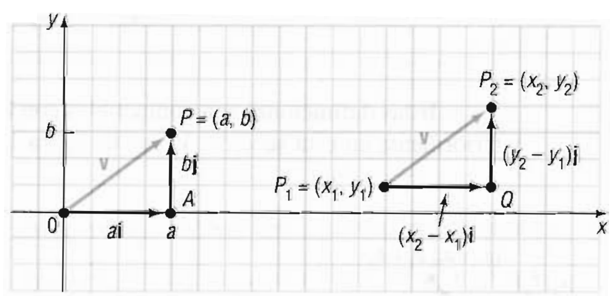
$$\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

Para ver por qué esto es cierto, observe la figura 13. Los triángulos OPA y P_1P_2Q son congruentes. (¿Advierte por qué?) Los segmentos de recta tienen la misma magnitud, en consecuencia $d(O, P) = d(P_1, P_2)$; y tienen la misma dirección, de modo que $\angle POA = \angle P_2P_1Q$. Como los triángulos son rectángulos, tenemos ángulo-lado-ángulo. Así, los lados correspondientes son iguales. Como resultado, $x_2 - x_1 = a$ y $y_2 - y_1 = b$, por lo cual podemos escribir $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} \qquad (1)$$

FIGURA 13

$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$



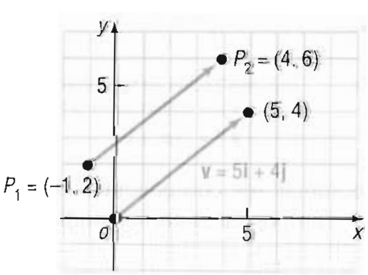
EJEMPLO 2 *Determinar un vector de posición*

Determinar el vector de posición del vector $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2}$ si $P_1 = (-1, 2)$ y $P_2 = (4, 6)$.

Solución Por la ecuación (1), el vector de posición igual a $\mathbf{v}$ es

$$\mathbf{v} = [4 - (-1)]\mathbf{i} + (6 - 2)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

FIGURA 14



Véase la figura 14.

Ahora resuelva el problema 21.

Dos vectores posición $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son iguales si, y sólo si, el punto final de $\mathbf{v}$ es igual al de $\mathbf{w}$. Esto nos lleva al siguiente resultado:

Teorema

Dos vectores **v** y **w** son iguales si, y sólo si, sus componentes correspondientes son iguales. Es decir:

Igualdad de vectores

Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$,
entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ si, y sólo si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

∎

Con base en el enunciado anterior, podemos reemplazar cualquier vector (segmento de recta dirigido) por un único vector de posición y viceversa. Esta flexibilidad es una de las razones principales para el uso amplio de los vectores. A menos que se especifique otra cosa, a partir de este momento el término *vector* indicará el único vector de posición igual a éste.

Ahora definiremos las operaciones de suma, resta, producto por un escalar y magnitud en términos de las componentes de un vector.

Sean $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ dos vectores y α un escalar. Entonces

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + a_2)\mathbf{i} + (b_1 + b_2)\mathbf{j} \tag{2}$$

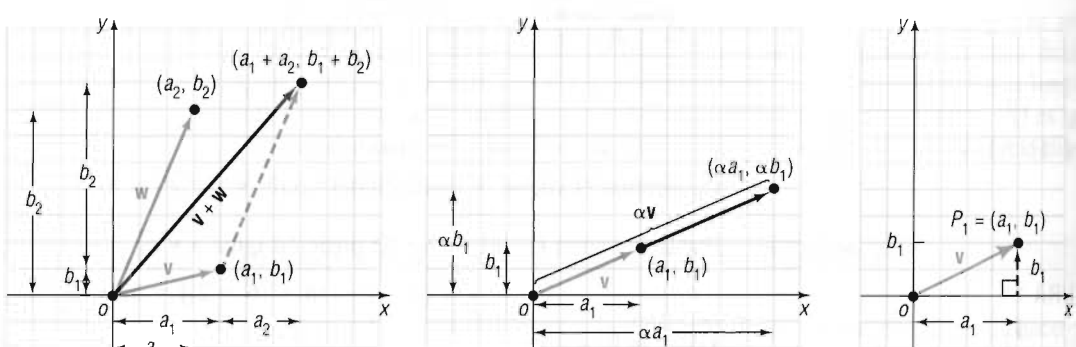
$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (a_1 - a_2)\mathbf{i} + (b_1 - b_2)\mathbf{j} \tag{3}$$

$$\alpha\mathbf{v} = (\alpha a_1)\mathbf{i} + (\alpha b_1)\mathbf{j} \tag{4}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \tag{5}$$

Estas definiciones son compatibles con las definiciones geométricas dadas anteriormente en esta sección. *Véase* la figura 15.

FIGURA 15



(a) Ilustración de la propiedad (2) **(b)** Ilustración de la propiedad (4) **(c)** Ilustración de la propiedad (5): $\|\mathbf{v}\|$ = Distancia de O a P_1; $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$

Así, para sumar dos vectores, sólo hay que sumar sus componentes correspondientes. Para restar dos vectores, restamos las componentes correspondientes.

EJEMPLO 3 *Suma y resta de vectores*

Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; determinar:

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{v} - \mathbf{w}$

Solución (a) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2 + 3)\mathbf{i} + (3 - 4)\mathbf{j}$
$= 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$

(b) $\mathbf{v} - \mathbf{w} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = (2 - 3)\mathbf{i} + [3 - (-4)]\mathbf{j}$
$= -\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ ■

EJEMPLO 4 *Formación de productos por escalares*

Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, determinar:

(a) $3\mathbf{v}$ (b) $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ (c) $\|\mathbf{v}\|$

Solución (a) $3\mathbf{v} = 3(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$

(b) $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w} = 2(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) - 3(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
$= -5\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$

(c) $\|\mathbf{v}\| = \|2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ ■

■ Ahora resuelva los problemas 27 y 33.

Recuerde que un vector unitario $\mathbf{u}$ cumple $\|\mathbf{u}\| = 1$. En muchas aplicaciones, es útil poder determinar un vector unitario $\mathbf{u}$ con la misma dirección que el vector dado $\mathbf{v}$.

Teorema Para cualquier vector distinto de cero $\mathbf{v}$, el vector

Vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

es un vector unitario con la misma dirección de $\mathbf{v}$. ■

Demostración Sea $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Entonces $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{a\mathbf{i} + b\mathbf{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\mathbf{j}$$

El vector $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección de $\mathbf{v}$, ya que $\|\mathbf{v}\| > 0$, y

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} = 1$$

Así, $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$. ■

Como consecuencia de este teorema, si $\mathbf{u}$ es un vector unitario en la misma dirección que un vector $\mathbf{v}$, entonces podemos expresar a $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\,\mathbf{u} \tag{6}$$

Esta forma de expresar un vector es muy útil en diversas aplicaciones.

EJEMPLO 5 *Determinación de un vector unitario*

Determinar un vector unitario en la misma dirección que $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

Solución Encontramos primero $\|\mathbf{v}\|$

$$\|\mathbf{v}\| = \|4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$$

Ahora multiplicamos $\mathbf{v}$ por el escalar $1/\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{5}$. El resultado es

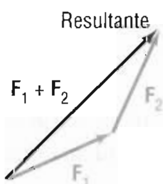
$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}}{5} = \frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$$

Verificación: Este vector es unitario, ya que $\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$.

■ Ahora resuelva el problema 43.

Aplicaciones

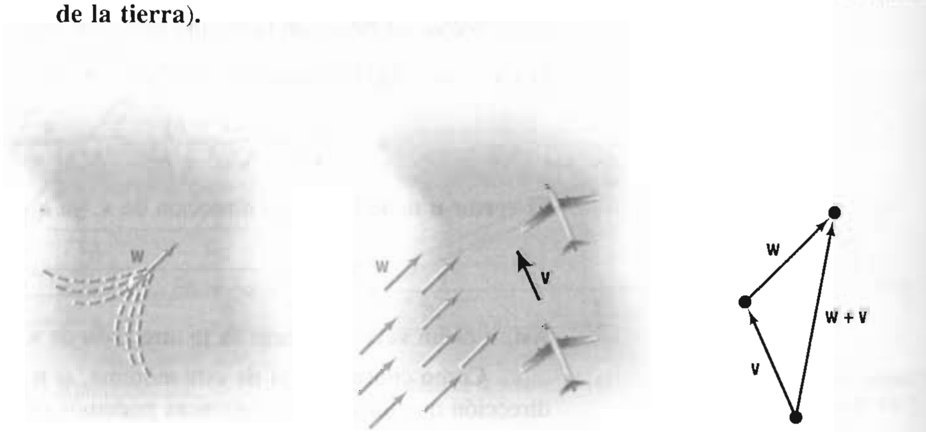
FIGURA 16



Las fuerzas son un ejemplo de cantidades físicas que podemos representar de manera conveniente mediante vectores; dos fuerzas se "combinan" de la misma forma en que se "suman" los vectores. ¿Cómo sabemos esto? Porque experimentos de laboratorio lo demuestran. Por lo tanto, si $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son dos fuerzas que actúan de manera simultánea sobre un objeto, el vector suma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ es la fuerza que produce el mismo efecto obtenido sobre el objeto cuando las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ actúan sobre él. La fuerza $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ es la **resultante** de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. *Véase* la figura 16.

Dos aplicaciones importantes de la resultante de dos vectores aparecen, por ejemplo, cuando un avión vuela en presencia de viento y cuando un bote cruza un río en presencia de corriente. Esto es, considere que la velocidad del viento actúa sobre la velocidad de un avión (*véase* la figura 17). Suponga que el vector $\mathbf{w}$ describe la velocidad del viento; es decir, $\mathbf{w}$ representa la dirección y rapidez del viento. Si $\mathbf{v}$ es la velocidad del avión en ausencia de viento (**velocidad respecto del aire**), entonces $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ es el vector igual a la velocidad real del avión (**velocidad respecto de la tierra**).

FIGURA 17



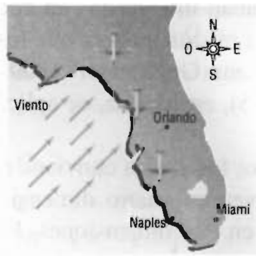
(a) Velocidad **w** del viento con respecto de la tierra.

(b) Velocidad **v** del avión con respecto al aire

(c) La resultante **w + v** es igual a la velocidad del avión con respecto de la tierra.

Nuestro siguiente ejemplo ilustra el uso de vectores en la navegación.

EJEMPLO 6 *Determinación de la velocidad real de un avión*



Un avión Boeing 737 mantiene en el aire una velocidad constante de 500 millas por hora en dirección sur. La velocidad de la corriente de chorro es de 80 millas por hora en dirección noreste.

(a) Determinar un vector unitario con dirección noreste.

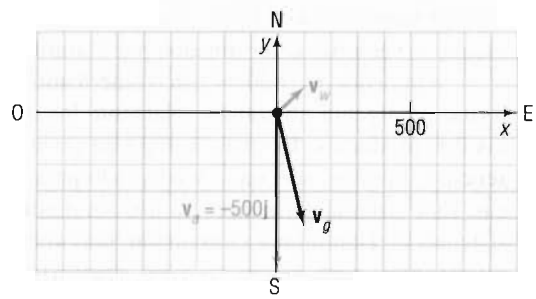
(b) Determinar un vector con magnitud de 80 unidades en la misma dirección que el vector unitario de la parte (a).

(c) Determinar la velocidad real del avión respecto de la tierra.

Solución Planteamos un sistema de coordenadas donde el norte (N) se indica por el eje y positivo. *Véase* la figura 18. Sean

$$\mathbf{v}_a = \text{Velocidad del avión respecto del aire} = -500\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v}_g = \text{Velocidad del avión respecto de la tierra}$$
$$\mathbf{v}_w = \text{Velocidad de la corriente de chorro}$$

FIGURA 18



(a) Un vector con dirección noreste es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. El vector unitario en esta dirección es

$$\frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\|\mathbf{i} + \mathbf{j}\|} = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

(b) La velocidad $\mathbf{v}_w$ de la corriente de chorro es un vector con magnitud 80 en la dirección del vector unitario $(1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$. Así, de (6),

$$\mathbf{v}_w = 80\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})\right] = 40\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

(c) La velocidad $\mathbf{v}_g$ del avión respecto de la tierra es la resultante de los vectores $\mathbf{v}_a$ y $\mathbf{v}_w$. Así,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_w &= -500\mathbf{j} + 40\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})\\ &= 40\sqrt{2}\mathbf{i} + (40\sqrt{2} - 500)\mathbf{j}\end{aligned}$$

La velocidad real (velocidad respecto de la tierra) del avión es

$$\|\mathbf{v}_g\| = \sqrt{(40\sqrt{2})^2 + (40\sqrt{2} - 500)^2} \approx 447 \text{ millas por hora}$$ ■

En el ejemplo 4 de la sección 12.4 determinaremos la dirección real del avión en este ejemplo 6.

DATO HISTÓRICO

■ Es sorprendente que la historia de los vectores sea tan complicada siendo un concepto tan natural. En el plano xy, los números complejos son la mejor semejanza de los vectores. Cerca de 1840, los matemáticos estaban interesados en encontrar un sistema que funcionara para tres dimensiones de la misma manera que los números complejos funcionan para dos dimensiones. Hermann Grassmann (1809-1877), en Alemania, y William Rowan Hamilton (1805-1865), en Irlanda, se aplicaron a determinar las soluciones para este problema.

El sistema de Hamilton fueron los *cuaternios*, los cuales conviene conceptualizar como un número real más un vector, y sirven en cuatro dimensiones de la misma forma que los números complejos sirven en dos dimensiones. En este sistema, es importante seguir un orden en la multiplicación; es decir, **ab** $\neq$ **ba**. Hamilton pasó el resto de su vida trabajando en la teoría de los cuaternios y buscando su aprobación en las matemáticas aplicadas, pero encontró una gran resistencia debido a la complicada naturaleza de la multiplicación. Al utilizar los cuaternios, surgen dos productos de vectores, el escalar (o punto) y el vectorial (o cruz).

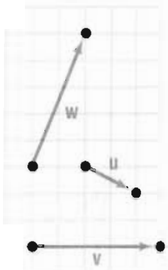
Grassmann fue más lejos que Hamilton; pero si los estudiosos no gustaban del trabajo de Hamilton, al menos lo entendían. El estilo abstracto de Grassmann, aunque fácil de leer hoy en día, fue casi impenetrable durante el siglo pasado y sólo se apreciaron algunas de sus ideas. Entre esas ideas estaban los mismos productos escalar y vectorial determinados por Hamilton.

Alrededor de 1880, el físico americano Josiah Willard Gibbs (1839-1903) conformó un álgebra utilizando solamente los conceptos más sencillos: los vectores y los dos productos. Después agregó un poco de cálculo y el sistema resultante fue sencillo, flexible, adecuado y adaptado para expresar un gran número de leyes físicas. Este sistema permanece en uso sin modificaciones esenciales. Cada uno de los sistemas de Hamilton y Grassmann, más amplios, dieron origen a matemáticas muy interesantes, pero pocos de estos resultados matemáticos se estudian en niveles elementales. ■

12.3

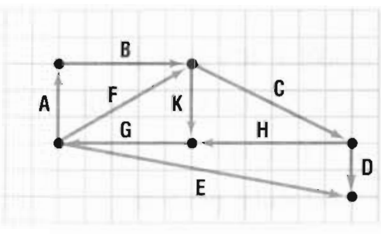
Ejercicio 12.3

En los problemas del 1 al 8 utilice los vectores de la figura a la derecha para trazar la gráfica de cada expresión.



1. **v** + **w**	**2.** **u** + **v**	**3.** 3**v**	**4.** 4**w**
5. **v** − **w**	**6.** **u** − **v**	**7.** 3**v** + **u** − 2**w**	**8.** 2**u** − 3**v** + **w**

En los problemas del 9 al 16 utilice la siguiente figura para determinar cada vector.



9. **x**, si **x** + **B** = **F**

10. **x**, si **x** + **D** = **E**

11. **C** en términos de **E**, **D**, y **F**

12. **G** en términos de **C**, **D**, **E**, y **K**

13. **E** en términos de **G**, **H**, y **D**

14. **E** en términos de **A**, **B**, **C**, y **D**

15. **x**, si **x** = **A** + **B** + **K** + **G**

16. **x**, si **x** = **A** + **B** + **C** + **H** + **G**

17. Si $\|\mathbf{v}\| = 4$, ¿cuánto vale $\|3\mathbf{v}\|$?

18. Si $\|\mathbf{v}\| = 2$, ¿cuánto vale $\|-4\mathbf{v}\|$?

En los problemas del 19 al 26 el vector **v** *tiene punto inicial P y punto final Q. Escriba* **v** *con la forma a***i** + *b***j**; *es decir, determine su vector de posición.*

19. $P = (0, 0)$; $Q = (3, 4)$
20. $P = (0, 0)$; $Q = (-3, -5)$
21. $P = (3, 2)$; $Q = (5, 6)$
22. $P = (-3, 2)$; $Q = (6, 5)$
23. $P = (-2, -1)$; $Q = (6, -2)$
24. $P = (-1, 4)$; $Q = (6, 2)$
25. $P = (1, 0)$; $Q = (0, 1)$
26. $P = (1, 1)$; $Q = (2, 2)$

En los problemas del 27 al 32 determine $\|\mathbf{v}\|$.

27. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
28. $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
29. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
30. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$
31. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
32. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

En los problemas del 33 al 38 determine cada cantidad si $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ *y* $\mathbf{w} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

33. $2\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$
34. $3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$
35. $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$
36. $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$
37. $\|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{w}\|$
38. $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$

En los problemas del 39 al 44 determine el vector unitario con la misma dirección que **v**.

39. $\mathbf{v} = 5\mathbf{i}$
40. $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$
41. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
42. $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$
43. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
44. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$

45. Determine un vector **v** cuya magnitud sea 4 y su componente en la dirección **i** sea el doble de la componente en la dirección **j**.

46. Determine un vector **v** cuya magnitud sea 3 y su componente en la dirección **i** sea igual a la componente en la dirección **j**.

47. Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = x\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, determine todos los números x para los cuales $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| = 5$.

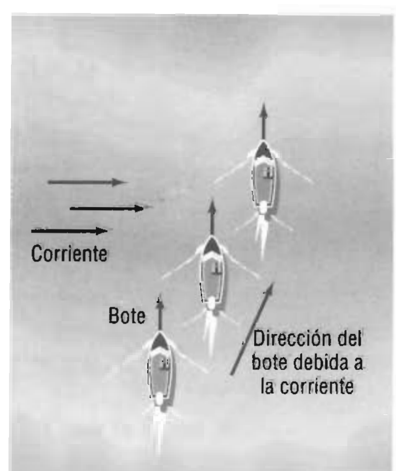
48. Si $P = (-3, 1)$ y $Q = (x, 4)$, determine todos los números x para los cuales el vector representado por $\overrightarrow{PQ}$ tiene longitud 5.

49. *Determinación de velocidad respecto de la tierra.* Cierto avión lleva una velocidad de 500 kilómetros por hora en dirección este. Si la velocidad del viento es de 60 kilómetros por hora en dirección noroeste, determine la velocidad del avión respecto de la tierra.

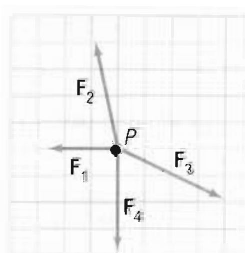
50. *Determinación de velocidad en el aire.* Después de volar una hora, un avión llega a un punto situado 200 millas al sur de su punto de salida. Si hubo viento estable de 30 millas por hora desde el noroeste durante todo el vuelo, ¿cuál es la velocidad promedio del avión en el aire?

51. *Determinación de velocidad sin viento.* Un avión viaja en dirección noroeste a velocidad constante respecto de la tierra de 250 millas por hora, con viento del este de 50 millas por hora. ¿Qué tan rápido iría el avión si no hubiera viento?

52. *Determinación de la velocidad real de un bote de motor.* Un bote pequeño de motor mantiene una velocidad promedio de 10 millas por hora en agua tranquila. Al cruzar un río (es decir, navegar perpendicular a la corriente) cuya corriente es de 4 millas por hora, ¿cuál será la velocidad real del bote de motor?



53. Muestre en la siguiente gráfica la fuerza necesaria para evitar que un objeto en P se mueva.



54. Explique con sus propias palabras lo que es un vector y proporcione un ejemplo.

55. Escriba un párrafo breve comparando el álgebra de los números complejos con el álgebra de vectores.

12.4

El producto punto

La definición del producto de dos vectores es algo sorpresiva. Sin embargo, este producto tiene cierto significado en las aplicaciones geométricas y físicas.

Producto punto **v w**

Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ son dos vectores, el **producto punto** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ se define como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1a_2 + b_1b_2 \tag{1}$$

EJEMPLO 1

Determinación de productos punto

Si $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, determinar:

(a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ (b) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ (c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

(d) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ (e) $\|\mathbf{v}\|$ (f) $\|\mathbf{w}\|$

Solución

(a) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 2(5) + (-3)3 = 1$ (b) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 5(2) + 3(-3) = 1$

(c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 2(2) + (-3)(-3) = 13$ (d) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 5(5) + 3(3) = 34$

(e) $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ (f) $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ ■

Como el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ de dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es un número real (escalar), también se le conoce como **producto escalar.**

Propiedades

Los resultados del ejemplo 1 sugieren algunas propiedades generales.

Teorema

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores, entonces

Propiedad conmutativa

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{2}$$

Propiedad demostrativa

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \tag{3}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2 \tag{4}$$

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

Demostración

Demostraremos las propiedades (2) y (4) y dejaremos las (3) y (5) como ejercicio (*véanse* los problemas 29 y 30 al final de esta sección).

Para demostrar la propiedad (2), sean $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. Entonces

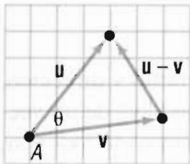
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1a_2 + b_1b_2 = a_2a_1 + b_2b_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

Para demostrar la propiedad (4), sea $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Entonces

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = a^2 + b^2 = \|\mathbf{v}\|^2$$ ■

El producto punto permite calcular el ángulo entre dos vectores.

FIGURA 19



Ángulo entre vectores

Sean **u** y **v** dos vectores con el mismo punto inicial A. En este caso, los vectores **u**, **v** y **u** − **v** forman un triángulo. El ángulo θ en el vértice A del triángulo es el **ángulo entre los vectores u y v.** *Véase* la figura 19. Queremos determinar una fórmula para calcular el ángulo θ.

Los lados del triángulo miden $\|\mathbf{v}\|$, $\|\mathbf{u}\|$, y $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$, y θ es el ángulo entre los lados de longitud $\|\mathbf{v}\|$ y $\|\mathbf{u}\|$. Podemos utilizar la ley de los cosenos (sección 8.2) para determinar el coseno del ángulo entre estos lados:

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta$$

Ahora utilizamos la propiedad (4) para reescribir esta ecuación en términos de productos punto:

$$(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta \qquad (6)$$

y después aplicamos la propiedad distributiva (3) dos veces del lado izquierdo para obtener

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) &= \mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})\\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\\ &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Propiedad (2)}}}{=} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \qquad (7)\end{aligned}$$

Al combinar las ecuaciones (6) y (7), tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta\end{aligned}$$

Así, hemos demostrado el siguiente enunciado:

Teorema ángulo entre vectores

Si **u** y **v** son dos vectores no nulos, el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, entre **u** y **v** está dado por la fórmula

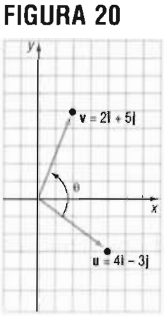
$$\boxed{\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \qquad (8)}$$

■

EJEMPLO 2 *Determinación del ángulo θ entre dos vectores*

$$\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

FIGURA 20



Solución Calculamos las cantidades $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= 4(2) + (-3)(5) = -7\\ \|\mathbf{u}\| &= \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5\\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}\end{aligned}$$

Por la fórmula (8), si θ es el ángulo entre **u** y **v**, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{-7}{5\sqrt{29}} \approx -0.26$$

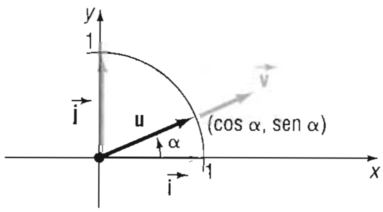
Con una calculadora, determinamos que $\theta \approx 105°$. *Véase* la figura 20. ■

■ Ahora resuelva el problema 1.

Escritura de un vector en términos de su magnitud y dirección

Muchas aplicaciones describen a un vector en términos de su magnitud y dirección, y no en términos de sus componentes. Si tenemos dados la magnitud $\|\mathbf{v}\|$ de un vector $\mathbf{v}$ no nulo y el ángulo α entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$, para expresar $\mathbf{v}$ en términos de $\|\mathbf{v}\|$ y α, primero determinamos el vector unitario $\mathbf{u}$ con la misma dirección que $\mathbf{v}$:

FIGURA 21



$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \quad \text{o} \quad \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u} \qquad (9)$$

Observe la figura 21. Las coordenadas del punto final son $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$, de modo que $\mathbf{u} = \cos \alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen} \alpha\mathbf{j}$, y por (9),

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|(\cos \alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen} \alpha\mathbf{j}) \qquad (10)$$

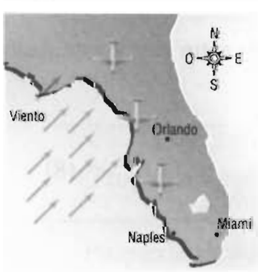
E J E M P L O 3 *Escritura de un vector, dadas su magnitud y dirección*

Una fuerza $\mathbf{F}$ de 5 libras se aplica en una dirección que forma un ángulo de 30° con el eje x positivo. Expresar $\mathbf{F}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.

Solución La magnitud de $\mathbf{F}$ es $\|\mathbf{F}\| = 5$ y el ángulo entre la dirección de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{i}$, el eje x positivo, es $\alpha = 30°$. Así, por (10),

$$\mathbf{F} = \|\mathbf{F}\|(\cos \alpha\mathbf{i} + \operatorname{sen} \alpha\mathbf{j}) = 5(\cos 30°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30°\mathbf{j})$$
$$= 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{5}{2}(\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}) \qquad \blacksquare$$

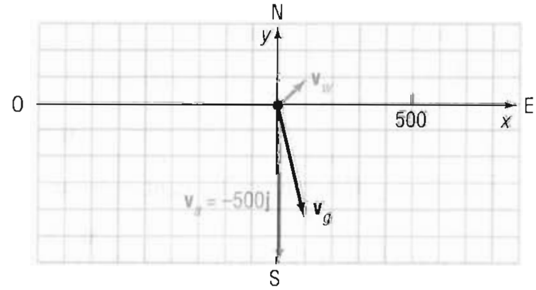
E J E M P L O 4 *Determinación de la dirección real de un avión*



Un avión Boeing 737 mantiene una velocidad constante de 500 millas por hora en dirección sur. La velocidad de la corriente de chorro es de 80 millas por hora en dirección noreste. Determinar la dirección real del avión respecto del suelo.

Solución Esta es la misma información del ejemplo 6, sección 12.3. Repetimos la figura de ese ejemplo como figura 22.

FIGURA 22



La velocidad del avión respecto del aire es

$$\mathbf{v}_a = -500\mathbf{j}$$

El viento tiene magnitud 80 y dirección $\alpha = 45°$. Así, la velocidad del viento es

$$\mathbf{v}_w = 80(\cos 45°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 45°\mathbf{j}) = 80\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right)$$
$$= 40\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

La velocidad del avión con respecto a la tierra es

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_w = -500\mathbf{j} + 40\sqrt{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 40\sqrt{2}\mathbf{i} + (40\sqrt{2} - 500)\mathbf{j}$$

El ángulo θ entre $\mathbf{v}_g$ y el vector $\mathbf{v}_a = -500\mathbf{j}$ (la velocidad del avión con respecto al aire) quedan determinados por la ecuación

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v}_g \cdot \mathbf{v}_a}{\|\mathbf{v}_g\|\,\|\mathbf{v}_a\|} = \frac{(40\sqrt{2} - 500)(-500)}{(447)(500)} \approx 0.9920$$
$$\theta \approx 7.2°$$

La dirección del avión con respecto a la tierra es aproximadamente de 7.2° al este del sur. ■

■ Ahora resuelva el problema 19.

Vectores paralelos y ortogonales

Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son **paralelos** si existe un escalar no nulo α tal que $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{w}$. En este caso, el ángulo θ entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es 0 o π.

EJEMPLO 5

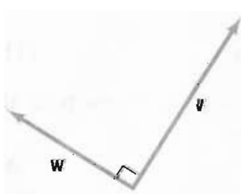
Determinación del paralelismo entre dos vectores

Los vectores $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ son paralelos, ya que $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{w}$. Además, como

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{18 + 2}{\sqrt{10}\sqrt{40}} = \frac{20}{\sqrt{400}} = 1$$

el ángulo θ entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es 0. ■

FIGURA 23
$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$
$\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$



Si el ángulo θ entre dos vectores no nulos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\pi/2$, los vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son **ortogonales.***

La fórmula (8) implica que si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, pues $\cos(\pi/2) = 0$.

Por otro lado, si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ o $\cos\theta = 0$. En el último caso, $\theta = \pi/2$ y $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales. *Véase* la figura 23. Si $\mathbf{v}$ o $\mathbf{w}$ son el vector cero, entonces, como el vector cero no tiene una dirección específica, adoptaremos la convención de que el vector cero es ortogonal a cualquier vector.

Teorema Dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son ortogonales si, y sólo si

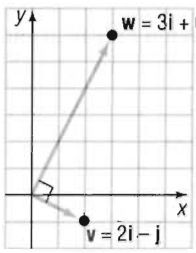
$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0}$$

■

**Ortogonal, perpendicular* y *normal* son términos que indican: "se intersecan en ángulo recto". Se acostumbra decir que dos vectores son *ortogonales*, que dos rectas son *perpendiculares*, y que una recta y un plano, o un vector y un plano, son *normales*.

EJEMPLO 6 *Determinación de la ortogonalidad entre dos vectores*

FIGURA 24



Los vectores

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

son ortogonales, pues

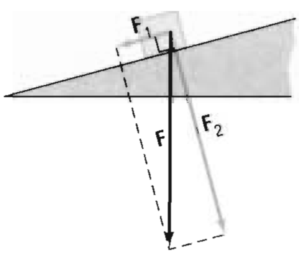
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 6 - 6 = 0$$

Véase la figura 24. ∎

■ Ahora resuelva el problema 11.

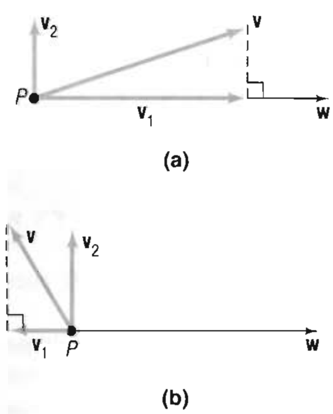
Proyección de un vector sobre otro

FIGURA 25



En muchas aplicaciones físicas es necesario determinar "cuánto" de un vector se aplica en una dirección dada. Observe la figura 25. La fuerza **F** debida a la gravedad jala directamente hacia abajo (hacia el centro de la Tierra) al bloque. Para estudiar el efecto de la gravedad sobre el bloque, es necesario determinar cuánto de **F** está realmente jalando hacia abajo de la rampa ($\mathbf{F}_1$) y cuánto de **F** empuja contra la rampa ($\mathbf{F}_2$), formando un ángulo recto con ésta. Al conocer la **descomposición** de **F**, con frecuencia podemos determinar el momento en que se supera la fricción y el bloque comienza a resbalar por la rampa.

FIGURA 26



Sean **v** y **w** dos vectores no nulos con el mismo punto inicial P. Queremos descomponer **v** en dos vectores: $\mathbf{v}_1$, paralelo a **w**, y $\mathbf{v}_2$, ortogonal a **w**. *Véanse* las figuras 26(a) y 26(b). El vector $\mathbf{v}_1$ es la **proyección vectorial de v sobre w** y se denota $\text{proy}_{\mathbf{w}}\, \mathbf{v}$.

Obtenemos el vector $\mathbf{v}_1$ como sigue: desde el punto final de **v** trazamos una perpendicular hasta la recta que contiene a **w**. El vector $\mathbf{v}_1$ es el vector que va de P al pie de esta perpendicular. El vector $\mathbf{v}_2$ está dado por $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1$. Observe que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1$ es paralelo a **w** y que $\mathbf{v}_2$ es ortogonal a **w**. Ésta es la descomposición para **v** que estábamos buscando.

Ahora buscamos una fórmula para $\mathbf{v}_1$ con base en el conocimiento de los vectores **v** y **w**. Como $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, tenemos

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w} \qquad (11)$$

Como $\mathbf{v}_2$ es ortogonal a **w**, $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w} = 0$. Como $\mathbf{v}_1$ es paralelo a **w**, $\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{w}$ para algún escalar α. Así, podemos escribir la ecuación (11) como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \alpha \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \alpha \|\mathbf{w}\|^2$$

$$\alpha = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}$$

Entonces,

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{w} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}$$

Teorema Si **v** y **w** son dos vectores no nulos, la proyección vectorial de **v** sobre **w** es

$$\boxed{\text{proy}_{\mathbf{w}}\, \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w}}$$

La descomposición de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ es paralelo a $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}_2$ perpendicular a $\mathbf{w}$, es

$$\mathbf{v}_1 = \text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} \qquad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 \tag{12}$$

■

EJEMPLO 7 *Decomposición de un vector en dos vectores ortogonales*

Determinar la proyección vectorial de $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Descomponer $\mathbf{v}$ en dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{v}_1$ sea paralelo a $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}_2$ ortogonal a $\mathbf{w}$.

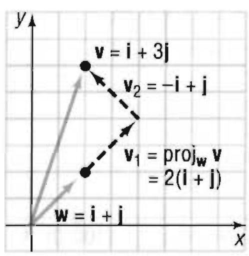
Solución Utilizamos las fórmulas (12).

$$\mathbf{v}_1 = \text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\mathbf{w} = \frac{1+3}{(\sqrt{2})^2}\mathbf{w} = 2\mathbf{w} = 2(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = (\mathbf{i}+3\mathbf{j}) - 2(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = -\mathbf{i}+\mathbf{j}$$

Véase la figura 27. ■

FIGURA 27



■ Ahora resuelva el problema 13.

Trabajo realizado por una fuerza constante

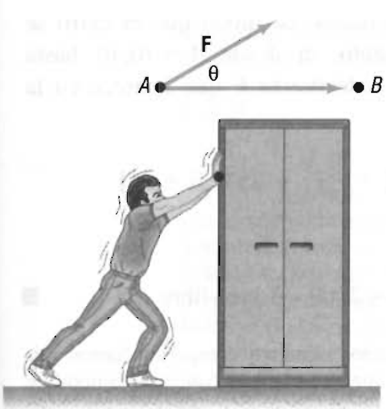
En física elemental, el **trabajo** W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ para desplazar un objeto de un punto A hasta un punto B se define como

$$W = (\text{Magnitud de la fuerza})(\text{Distancia}) = \|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{AB}\|$$

(El trabajo se mide por lo general en pies-libras o en Newtons-metros.)

En esta definición suponemos que la fuerza $\mathbf{F}$ se aplica a lo largo de la línea de movimiento. Si la fuerza constante $\mathbf{F}$ no se aplica a lo largo de la línea de movimiento sino formando un ángulo θ en dirección de éste, como nos muestra la figura 28, entonces el **trabajo** W **realizado por F** al mover un objeto de A a B se define así:

FIGURA 28



$$W = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB} \tag{11}$$

Esta definición es compatible con la definición "fuerza por distancia" anterior, ya que

$$W = (\text{Cantidad de fuerza en la dirección de } \overrightarrow{AB})(\text{Distancia})$$
$$= \|\text{proy}_{\overrightarrow{AB}}\,\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AB}\| = \mathbf{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

EJEMPLO 8 *Cálculo de trabajo*

Determinar el trabajo realizado por una fuerza de 5 libras que actúa en la dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ al mover un objeto una distancia de 1 pie, de (0, 0) hasta (1, 0).

Solución Primero debemos expresar la fuerza $\mathbf{F}$ como un vector. La fuerza tiene magnitud 5 y dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Por lo tanto, la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$ forma un ángulo de 45° con $\vec{\mathbf{i}}$. Así, la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es

$$\mathbf{F} = 5(\cos 45°\mathbf{i} + \text{sen } 45°\mathbf{j}) = 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

La línea de movimiento del objeto va desde $A = (0, 0)$ hasta $B = (1, 0)$, de modo que $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i}$. Por lo tanto, el trabajo W es

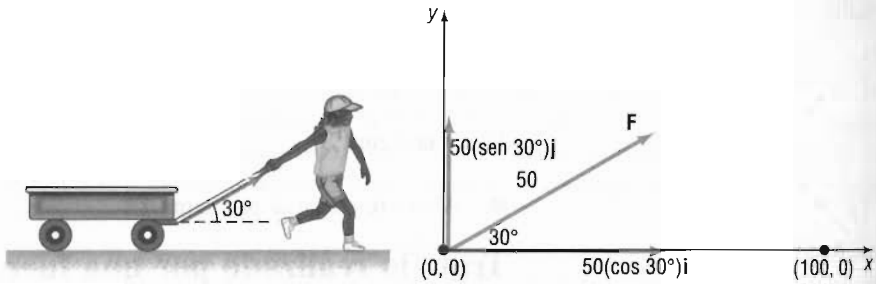
$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{5\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ pies-libra}$$

■ Ahora resuelva el problema 25.

EJEMPLO 9 *Cálculo de trabajo*

La figura 29(a) muestra a una niña jalando un carro con una fuerza de 50 libras. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover el carro 100 pies si el asa forma un ángulo de 30° con el piso?

FIGURA 29



(a) (b)

Solución Colocamos los vectores en un sistema de coordenadas, de modo que el carro se mueve de (0, 0) a (100, 0). Así, el movimiento va desde $A = (0, 0)$ hasta $B = (100, 0)$, de modo que $\overrightarrow{AB} = 100\mathbf{i}$. El vector de fuerza $\mathbf{F}$ que aparece en la figura 29(b), es

$$\mathbf{F} = 50(\cos 30°\mathbf{i} + \operatorname{sen} 30°\mathbf{j}) = 50\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 25\sqrt{3}\mathbf{i} + 25\mathbf{j}$$

Por la fórmula (13), el trabajo W realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} = (25\sqrt{3}\mathbf{i} + 25\mathbf{j}) \cdot 100\mathbf{i} = 2500\sqrt{3} \text{ pies-libra}$$

PROBLEMA HISTÓRICO

■ 1. En un *Dato histórico* anterior, establecimos que los números complejos fueron utilizados como vectores en el plano antes de que quedara claro el concepto general de vector. Formemos la correspondencia

$$\begin{aligned} \text{Vector} &\longleftrightarrow \text{Número complejo} \\ a\mathbf{i} + b\mathbf{j} &\longleftrightarrow a + bi \\ c\mathbf{i} + d\mathbf{j} &\longleftrightarrow c + di \end{aligned}$$

Muestre que

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (c\mathbf{i} + d\mathbf{j}) = \text{Parte real}[\overline{(a + bi)}(c + di)]$$

Ésta es la forma original en que se planteó el producto punto. La parte imaginaria también es interesante. Es un determinante (*véase* la sección 10.3) y representa el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores. Esto se acerca a una de las ideas de Hermann Grassmann y también está relacionado con el triple producto escalar de los vectores tridimensionales ■

12.4

Ejercicio 12.4

En los problemas del 1 al 10 determine el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *el coseno del ángulo entre* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$.

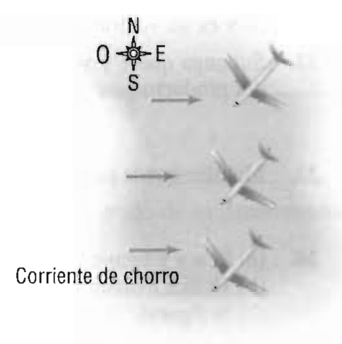
1. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
2. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
3. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
4. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
5. $\mathbf{v} = \sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
6. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
7. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
8. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
9. $\mathbf{v} = 4\mathbf{i}$, $\mathbf{w} = \mathbf{j}$
10. $\mathbf{v} = \mathbf{i}$, $\mathbf{w} = -3\mathbf{j}$

11. Determine a de modo que el ángulo entre $\mathbf{v} = a\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ sea $\pi/2$.
12. Determine b de modo que el ángulo entre $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + b\mathbf{j}$ sea $\pi/2$.

En los problemas del 13 al 18, descomponga $\mathbf{v}$ *en dos vectores* $\mathbf{v}_1$ *y* $\mathbf{v}_2$*, donde* $\mathbf{v}_1$ *sea paralelo a* $\mathbf{w}$ *y* $\mathbf{v}_2$ *sea ortogonal a* $\mathbf{w}$.

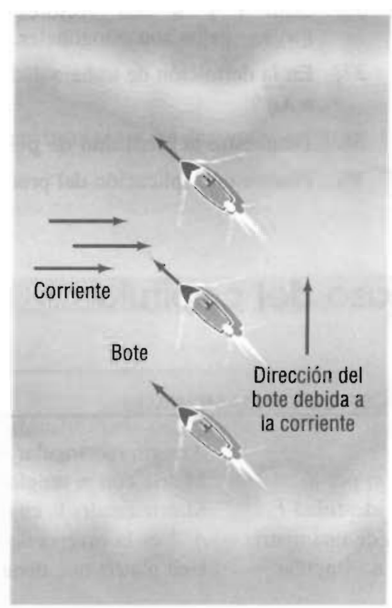
13. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
14. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
15. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
16. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
17. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j}$
18. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$

19. *Determinación de la rapidez y dirección reales de un avión.* Un jet DC-10 mantiene una velocidad en el aire de 550 millas por hora en dirección suroeste. La velocidad de la corriente de chorro (constante) es de 80 millas por hora desde el oeste. Determine la rapidez y dirección reales del avión.



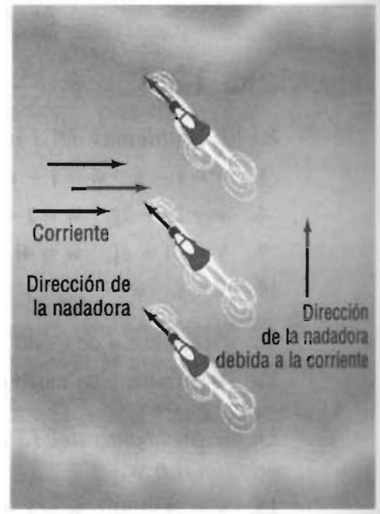
20. *Determinación del rumbo correcto.* El piloto de un avión desea dirigirse hacia el este pero enfrenta un viento con velocidad de 40 millas por hora desde el noroeste. Si el piloto mantiene una velocidad en el aire de 250 millas por hora, ¿qué rumbo deberá mantener? ¿Cuál es la rapidez real del avión?

21. *Dirección correcta para cruzar un río.* Cierto río tiene una corriente constante de 3 kilómetros por hora. ¿Qué ángulo debe formar un bote de motor (capaz de mantener una velocidad constante de 20 kilómetros por hora) con respecto al muelle para llegar al punto directamente opuesto del otro lado del río? Si el río tiene un ancho de $\frac{1}{2}$ kilómetro, ¿cuánto tiempo tardará el bote en cruzarlo?



22. *Dirección correcta para cruzar un río* Repita el problema 21 si la corriente es de 5 kilómetros por hora.

23. *Dirección correcta para cruzar un río.* Un río mide 500 metros de ancho y tiene una corriente de 1 kilómetro por hora. Si Sharon puede nadar a razón de 2 kilómetros por hora, ¿con qué ángulo respecto de la orilla debe nadar si desea cruzar el río hasta llegar al punto directamente opuesto al de salida? ¿Cuánto tiempo tardará en cruzar el río?



24. Un avión viaja 200 millas hacia el oeste y luego 150 millas a 60° al norte del oeste. Determine el desplazamiento resultante.

25. Determine el trabajo realizado por una fuerza de 3 libras que actúa en la dirección $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ para mover un objeto 2 pies, de (0, 0) a (0, 2).

26. *Cálculo de trabajo.* Determine el trabajo realizado por una fuerza de 1 libra, que actúa en la dirección $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ al mover un objeto 5 pies, de (0, 0) a (3, 4).

27. *Cálculo de trabajo.* Un carro se jala en forma horizontal ejerciendo una fuerza de 20 libras sobre el asa y a un ángulo de 30° respecto de la horizontal. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover el carro 100 pies?

28. Determine el ángulo agudo que forma un vector unitario de fuerza constante con el eje x positivo si el trabajo realizado por la fuerza al mover una partícula de (0, 0) a (4, 0) es igual a 2.

29. Demuestre la propiedad distributiva, $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

30. Demuestre la propiedad (5), $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$.

31. Si $\mathbf{v}$ es un vector unitario y el ángulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$ es α, muestre que $\mathbf{v} = \cos \alpha \mathbf{i} + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{j}$.

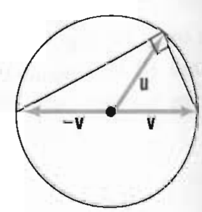
32. Suponga que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores unitarios. Si el ángulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{i}$ es α y el ángulo entre $\mathbf{w}$ e $\mathbf{i}$ es β . utilice la idea del producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ para demostrar que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

33. Muestre que la proyección de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{i}$ es $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i}$. De hecho, muestre que siempre podemos escribir un vector $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$$

34. (a) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma magnitud, muestre entonces que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ son ortogonales.
(b) Utilice lo anterior para demostrar que un ángulo inscrito en un semicírculo es recto (*véase* la figura).



35. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores no nulos. Muestre que el vector $\mathbf{v} - \alpha\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{w}$ si $\alpha = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})/\|\mathbf{w}\|^2$.

36. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores no nulos. Muestre que los vectores $\|\mathbf{w}\|\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{w}$ y $\|\mathbf{w}\|\mathbf{v} - \|\mathbf{v}\|\mathbf{w}$ son ortogonales.

37. En la definición de trabajo dada en esta sección, ¿cuál es el trabajo realizado si $\mathbf{F}$ es ortogonal a $\overrightarrow{AB}$?

38. Demuestre la **identidad de polarización:** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

39. Plantee una aplicación del producto punto distinta de las que aparecen en el texto.

Repaso del capítulo

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Matriz	Arreglo rectangular de números, llamados entradas
Matriz m por n	Matriz con m renglones y n columnas
Matriz identidad I	Matriz cuadrada cuyas entradas en la diagonal son números uno, mientras que el resto son ceros
Inversa de una matriz	A^{-1} es la inversa de A si $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
Matriz no singular	Una matriz que tiene inversa

Vector	Cantidad que tiene magnitud y dirección; equivale a un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$
Vector de posición	Vector cuyo punto inicial está en el origen
Vector unitario	Vector cuya magnitud es 1
Producto punto	Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a_1a_2 + b_1b_2$.
Ángulo θ entre dos vectores no nulos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$	$\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\lVert\mathbf{u}\rVert\,\lVert\mathbf{v}\rVert}$

Cómo hacer para

Reconocer matrices iguales

Sumar y restar matrices

Multiplicar matrices

Determinar la inversa de una matriz no singular

Resolver un sistema de ecuaciones mediante la inversa de una matriz

Escribir la descomposición en fracciones parciales de una expresión racional

Sumar y restar vectores

Formar múltiplos escalares de vectores

Determinar la magnitud de un vector

Resolver problemas que utilicen vectores

Determinar el producto punto de dos vectores

Encontrar el ángulo entre dos vectores

Determinar si dos vectores son paralelos

Determinar si dos vectores son ortogonales

Calcular la proyección vectorial de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{w}$

Complete en los espacios

1. Una matriz B para la cual $AB = I_n$, la matriz identidad, es la __________ de A.

2. En el álgebra de matrices, la matriz que tiene propiedades similares al número 1 es la matriz __________.

3. Una función racional es __________ si el grado de su numerador es menor que el grado de su denominador.

4. Un vector de magnitud 1 es un vector __________.

5. Si el ángulo entre dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ es $\pi/2$, entonces el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ es igual a __________.

Cierto o Falso

C F **1.** Toda matriz cuadrada tiene una inversa.

C F **2.** La multiplicación de matrices es conmutativa.

C F **3.** Cualquier par de matrices se puede multiplicar entre sí.

C F **4.** Los factores del denominador de una expresión racional se utilizan para obtener la descomposición en fracciones parciales.

C F **5.** Los vectores son cantidades que tienen magnitud y dirección.

C F **6.** La fuerza es un ejemplo físico de un vector.

C F **7.** Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores ortogonales, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Ejercicios de repaso

En los problemas del 1 al 8 utilice las siguientes matrices para calcular cada expresión.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

1. $A + C$ **2.** $A - C$ **3.** $6A$ **4.** $-4B$ **5.** AB **6.** BA **7.** CB **8.** BC

En los problemas del 9 al 14 determine la inversa de cada matriz, si existe. Si no existe una inversa, indique que la matriz es singular.

9. $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

En los problemas del 15 al 24 escriba la descomposición en fracciones parciales de cada expresión racional.

15. $\dfrac{6}{x(x-4)}$ **16.** $\dfrac{x}{(x+2)(x-3)}$ **17.** $\dfrac{x-4}{x^2(x-1)}$ **18.** $\dfrac{2x-6}{(x-2)^2(x-1)}$

19. $\dfrac{x}{(x^2+9)(x+1)}$ **20.** $\dfrac{3x}{(x-2)(x^2+1)}$ **21.** $\dfrac{x^3}{(x^2+4)^2}$ **22.** $\dfrac{x^3+1}{(x^2+16)^2}$

23. $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2-1)}$ **24.** $\dfrac{4}{(x^2+4)(x^2-1)}$

En los problemas del 25 al 28 representamos el vector $\mathbf{v}$ *mediante el segmento de recta dirigido* $\overrightarrow{PQ}$. *Escriba* $\mathbf{v}$ *en la forma* $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ *y determine* $\|\mathbf{v}\|$.

25. $P = (1, -2)$; $Q = (3, -6)$ **26.** $P = (-3, 1)$; $Q = (4, -2)$

27. $P = (0, -2)$; $Q = (-1, 1)$ **28.** $P = (3, -4)$; $Q = (-2, 0)$

En los problemas del 29 al 36 utilice los vectores $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *y* $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

29. Determine $4\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$. **30.** Determine $-\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$. **31.** Determine $\|\mathbf{v}\|$. **32.** Determine $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$.

33. Determine $\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$. **34.** Determine $\|2\mathbf{v}\| - 3\|\mathbf{w}\|$.

35. Determine un vector unitario con la misma dirección que $\mathbf{v}$.

36. Determine un vector unitario con la dirección opuesta a la de $\mathbf{w}$.

En los problemas del 37 al 40, determine el producto punto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ *y el coseno del ángulo entre* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$.

37. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ **38.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

39. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ **40.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

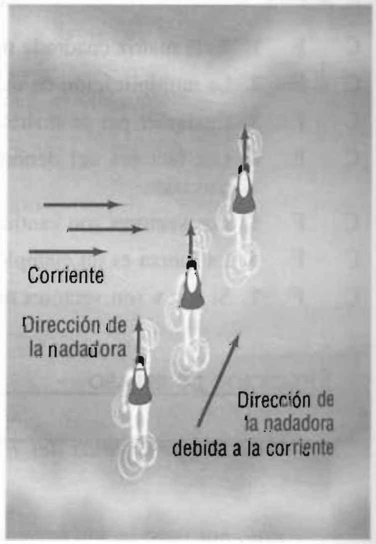
41. Determine la proyección vectorial de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

42. Determine la proyección vectorial de $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ sobre $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

43. Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

44. Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

45. *Rapidez y dirección reales de una nadadora.* Cierta nadadora puede mantener una rapidez constante de 5 millas por hora. Si ella sigue un sentido recto para atravesar un río, el cual tiene una corriente que se mueve a razón de 2 millas por hora, ¿cuál es la rapidez real de la nadadora? (*Véase* la figura.) Si el río tiene una milla de ancho, ¿a qué distancia río abajo terminará la nadadora con respecto del punto que está directamente enfrente, al otro lado del río, del punto de partida?



46. *Rapidez y dirección reales de un bote de motor.* Un bote pequeño de motor se mueve con una rapidez real de 11 millas por hora en dirección sur. La corriente viene del noreste, a 3 millas por hora, ¿cuál es la rapidez del bote con respecto al agua? ¿Cuál es la dirección del bote según la brújula?

47. *Dirección correcta para cruzar un río.* Un río de 1 kilómetro de ancho tiene una corriente constante de 5 kilómetros por hora. ¿Con qué ángulo debe dirigirse un bote, si puede mantener una rapidez constante de 15 kilómetros por hora, para llegar hasta el punto directamente opuesto al de partida?

48. *Rapidez y dirección reales de un avión.* Un avión tiene en el aire una velocidad de 500 kilómetros por hora en dirección norte. La velocidad del viento es de 60 kilómetros por hora en dirección sureste. Determine la rapidez y dirección reales del avión con respecto al suelo.

Apéndice A REPASO DE ÁLGEBRA

A.1 Expresiones polinomiales y racionales

Con frecuencia el álgebra es descrita como una generalización de la aritmética en la que se utilizan letras para representar números reales. Utilizaremos las últimas letras del alfabeto, x, y, y z, para representar variables, y las primeras letras, a, b, y c, para representar constantes. Así, en las expresiones $3x + 5$ y $ax + b$, se debe entender que x es una variable y que a y b son constantes, aunque las constantes a y b no estén especificadas. Como usted podrá ver, en general el contexto aclara el significado pretendido.

Ahora presentaremos un poco de vocabulario básico.

Monomio

Un **monomio** en una variable es el producto de una constante por una variable elevada a una potencia entera no negativa. De este modo, un monomio tiene la forma.

$$ax^k$$

donde a es una constante, x una variable y $k \geq 0$ un número entero. La constante a es el **coeficiente** del monomio. Si $a \neq 0$, entonces k es el **grado** del monomio.

Algunos ejemplos de monomios son:

MONOMIO	COEFICIENTE	GRADO	
$6x^2$	6	2	
$-\sqrt{2}x^3$	$-\sqrt{2}$	3	
3	3	0	Ya que $3 = 3 \cdot 1 = 3x^0$
$-5x$	-5	1	Ya que $-5x = -5x^1$
x^4	1	4	Ya que $x^4 = 1 \cdot x^4$

Dos monomios ax^k y bx^k del mismo grado y con la misma variable son **términos semejantes.** Al sumar o restar estos monomios, los podemos combinar en un único monomio mediante la propiedad distributiva. Por ejemplo,

$$2x^2 + 5x^2 = (2 + 5)x^2 = 7x^2 \quad \text{y} \quad 8x^3 - 5x^3 = (8 - 5)x^3 = 3x^3$$

La suma o resta de dos monomios con grados distintos es un **binomio.** La suma o resta de tres monomios con tres grados diferentes es un **trinomio.** Por ejemplo,

$x^2 - 2$ es un binomio

$x^3 - 3x + 5$ es un trinomio

$2x^2 + 5x^2 + 2 = 7x^2 + 2$ es un binomio

Polinomio

Un **polinomio** en una variable es una expresión algebraica de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{1}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes* llamadas **coeficientes** del polinomio, $n \geq 0$ es un entero y x es una variable. Si $a_n \neq 0$, éste es el **coeficiente principal** y n es el **grado** del polinomio.

Los monomios que conforman a un polinomio son sus **términos.** Si todos los coeficientes son nulos el polinomio es un **polinomio cero,** esto es, que no tiene grado.

Por lo general, los polinomios se escriben en **forma canónica** iniciando desde el término, distinto de cero, que posea el mayor grado y continuando con los términos en orden descendente de acuerdo con su grado. Algunos ejemplos de polinomios son:

POLINOMIO	COEFICIENTE	GRADO
$3x^2 - 5 = 3x^2 + 0 \cdot x + (-5)$	$3, 0, -5$	2
$8 - 2x + x^2 = 1 \cdot x^2 - 2x + 8$	$1, -2, 8$	2
$5x + \sqrt{2} = 5x^1 + \sqrt{2}$	$5, \sqrt{2}$	1
$3 = 3 \cdot 1 = 3 \cdot x^0$	3	0
0	0	Sin grado

Aunque hemos utilizado x para representar la variable, también suelen usarse letras como y o z Así,

$3x^4 - x^2 + 2$ es un polinomio (en x) de grado 4.

$9y^3 - 2y^2 + y - 3$ es un polinomio (en y) de grado 3.

$z^5 + \pi$ es un polinomio (en z) de grado 5.

Las expresiones algebraicas como

$$\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{x^2+1}{x+5}$$

no son polinomios. La primera no es un polinomio debido a que $1/x = x^{-1}$ tiene un exponente que no es un número entero no negativo. Aunque la segunda expresión es el cociente de dos polinomios, el polinomio del denominador tiene grado mayor que 0, por lo que la expresión no puede ser un polinomio.

*La notación a_n se lee "a subíndice n." El número n es un **subíndice** y no debe ser confundido con un exponente. Utilizaremos subíndices para distinguir una constante de otra, cuando necesitemos un número grande o indeterminado de constantes.

Suma y resta de polinomios

Los polinomios se suman y restan agrupando sus términos semejantes.

EJEMPLO 1 *Determinar sumas y restas de polinomios*

Encontrar

(a) $(8x^3 - 2x^2 + 6x - 2) + (3x^4 - 2x^3 + x^2 + x)$

(b) $(3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1) - (2x^4 - 8x^2 - 6x + 5)$

Solución (a) La idea aquí es agrupar los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(8x^3 - 2x^2 + 6x - 2) &+ (3x^4 - 2x^3 + x^2 + x)\\ &= 3x^4 + (8x^3 - 2x^3) + (-2x^2 + x^2) + (6x + x) - 2\\ &= 3x^4 + 6x^3 - x^2 + 7x - 2\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1) &- (2x^4 - 8x^2 - 6x + 5)\\ &= 3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 1 \underbrace{- 2x^4 + 8x^2 + 6x - 5}_{\text{Asegúrese de cambiar el signo de cada término del segundo polinomio.}}\\ &= (3x^4 - 2x^4) + (-4x^3) + (6x^2 + 8x^2) + 6x + (-1 - 5)\end{aligned}$$

Agrupamos los términos semejantes.

$$= x^4 - 4x^3 + 14x^2 + 6x - 6$$

■ Ahora resuelva el problema 1.

Multiplicación de polinomios

Determinamos el producto de polinomios utilizando varias veces la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes.

EJEMPLO 2 *Determinar el producto de dos polinomios*

Encontrar el producto $(2x + 5)(x^2 - x + 2)$

Solución *Multiplicación horizontal*

$$(2x + 5)(x^2 - x + 2) = 2x(x^2 - x + 2) + 5(x^2 - x + 2)$$

Propiedad distributiva.

$$= 2x \cdot x^2 - 2x \cdot x + 2x \cdot 2 + 5 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 5 \cdot 2$$

Propiedad distributiva.

$$= 2x^3 - 2x^2 + 4x + 5x^2 - 5x + 10$$

Leyes de los exponentes.

$$= 2x^3 + 3x^2 - x + 10$$

Agrupamos los términos semejantes.

Multiplicación vertical: La idea aquí es similar a la multiplicación de un número de dos dígitos por otro de tres.

$$\begin{array}{rrl} & x^2 - x + 2 & \\ & 2x + 5 & \\ \hline & 2x^3 - 2x^2 + 4x & \text{Este renglón es } 2x(x^2 - x + 2). \\ (+) & 5x^2 - 5x + 10 & \text{Este renglón es } 5(x^2 - x + 2). \\ \hline & 2x^3 + 3x^2 - x + 10 & \text{Suma de los dos renglones anteriores.} \end{array}$$

■ Ahora resuelva el problema 5.

Con frecuencia aparecen en álgebra ciertos productos llamados **productos notables.** En la lista siguiente, x,a,b,c y d son números reales:

Diferencia de dos cuadrados

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2 \tag{2}$$

Cuadrados de binomios o cuadrados perfectos

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \tag{3a}$$
$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2 \tag{3b}$$

Trinomios diversos

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \tag{4a}$$
$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd \tag{4b}$$

Cubos de binomios o cubos perfectos

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \tag{5a}$$
$$(x - a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3 \tag{5b}$$

Diferencia de dos cubos

$$(x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 - a^3 \tag{6}$$

Suma de dos cubos

$$(x + a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 + a^3 \tag{7}$$

Las fórmulas de las ecuaciones de la (2) a la (7) se utilizan con frecuencia y hay que memorizarlas. Pero si olvida alguna o no está seguro de su forma, debe poder deducirla en caso necesario.

Un **polinomio en dos variables** x y y es la suma de uno o más monomios de la forma ax^ny^m, donde a es una constante llamada **coeficiente**, x y y son variables, y n y m son enteros no negativos. El **grado** del monomio ax^ny^m es $n + m$. El **grado** de un polinomio en dos variables x y y es el mayor grado de todos los monomios con coeficientes distintos de cero que aparecen en el polinomio.

La definición de los **polinomios en tres variables** x, y y z y los polinomios con más de tres variables es análoga. Estos son algunos ejemplos:

$3x^2 + 2x^3y + 5$ Dos variables, grado 4	$\pi x^3 - y^2$ Dos variables, grado 3	$x^4 + 4x^3y - xy^3 + y^4$ Dos variables, grado 4
$x^2 + y^2 - z^2 + 4$ Tres variables, grado 2	x^3y^2z Tres variables grado 6	$5x^2 - 4y^2 + z^3y + 2w^2x$ Cuatro variables grado 4

La suma y la multiplicación de polinomios con dos o más variables se realiza de la misma forma que en el caso de los polinomios con una variable.

■ Ahora resuelva el problema 3.

División de polinomios

El procedimiento para dividir dos polinomios es similar al usado para dividir dos enteros. Este proceso ya debe ser familiar para usted, pero lo recordaremos a continuación.

EJEMPLO 3 *División de dos enteros*

Dividir 842 entre 15.

Solución

$$\begin{array}{rrl} & 56 & \leftarrow \text{Cociente} \\ \text{Divisor} \rightarrow 15 & \overline{)842} & \leftarrow \text{Dividendo} \\ & \underline{75} & \leftarrow 5 \cdot 15 \quad \text{(Se resta)} \\ & 92 & \\ & \underline{90} & \leftarrow 6 \cdot 15 \quad \text{(Se resta)} \\ & 2 & \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Así, $\frac{842}{15} = 56 + \frac{2}{15}$. ■

En el proceso de división larga detallado en el ejemplo 3, el número 15 es el **divisor,** 842 el **dividendo,** 56 el **cociente** y 2 el **residuo.**

Para verificar la respuesta obtenida en un problema de división multiplicamos el cociente por el divisor y a este producto le sumamos el residuo. La cantidad resultante debe coincidir con el dividendo.

$$\boxed{(\text{Cociente})(\text{Divisor}) + \text{Residuo} = \text{Dividendo}}$$

Por ejemplo, podemos verificar el resultado del ejemplo 3 como sigue:

$$(56)(15) + 2 = 840 + 2 = 842$$

Para dividir dos polinomios primero debemos escribir cada uno en forma canónica. El proceso sigue entonces un patrón similar al del ejemplo 3. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 4 *División de dos polinomios*

Determinar el cociente y el residuo al dividir

$$3x^3 + 4x^2 + x + 7 \quad \text{es dividido por} \quad x^2 + 1$$

Solución Cada polinomio está en forma canónica. El dividendo es $3x^3 + 4x^2 + x + 7$, y el divisor es $x^2 + 1$.

PASO 1: Dividimos el término principal del dividendo, $3x^3$, entre el término principal del divisor, x^2. Escribimos el resultado $3x$, sobre el término $3x^3$, como sigue:

$$
\begin{array}{r}
3x \phantom{{}+4x^2+x+7} \\
x^2+1\,\overline{\big)\,3x^3+4x^2+x+7}
\end{array}
$$

PASO 2: Multiplicamos $3x$ por $x^2 + 1$ y escribimos el resultado debajo del dividendo.

$$
\begin{array}{r}
3x \phantom{{}+4x^2+x+7} \\
x^2+1\,\overline{\big)\,3x^3+4x^2+x+7} \\
\underline{3x^3\phantom{{}+4x^2}+3x\phantom{{}+7}}
\end{array}
\quad \leftarrow 3x\cdot(x^2+1) = 3x^3+3x
$$

Observe que alineamos el término $3x$ debajo de la x para facilitar el siguiente paso.

PASO 3: Restamos y bajamos los términos restantes

$$
\begin{array}{rl}
3x \phantom{{}+4x^2+x+7} & \\
x^2+1\,\overline{\big)\,3x^3+4x^2+x+7} & \\
\underline{3x^3\phantom{{}+4x^2}+3x\phantom{{}+7}} & \leftarrow \text{Restamos.} \\
4x^2-2x+7 & \leftarrow \text{Bajamos el } 4x^2 \text{ y el } 7.
\end{array}
$$

PASO 4: Repetimos los pasos del 1 al 3 con $4x^2 - 2x + 7$ como dividendo.

$$
\begin{array}{rl}
3x+4 \phantom{{}+x+7} & \\
x^2+1\,\overline{\big)\,3x^3+4x^2+x+7} & \\
\underline{3x^3\phantom{{}+4x^2}+3x\phantom{{}+7}} & \\
4x^2-2x+7 & \leftarrow \text{Dividimos } 4x^2 \text{ entre } x^2 \text{ para obtener } 4. \\
\underline{4x^2\phantom{{}-2x}+4} & \leftarrow \text{Multiplicamos } x^2+1 \text{ por } 4; \text{ y restamos.} \\
-2x+3 &
\end{array}
$$

Como x^2 no divide a $-2x$ de manera exacta (es decir, el resultado no es un monomio), el proceso termina. El cociente es $3x + 4$, y el residuo $-2x + 3$.

Verificación: (Cociente)(Divisor) + Residuo

$$
\begin{aligned}
&= (3x + 4)(x^2 + 1) + (-2x + 3) \\
&= 3x^3 + 4x^2 + 3x + 4 + (-2x + 3) \\
&= 3x^3 + 4x^2 + x + 7 = \text{Dividendo}
\end{aligned}
$$

Así,

$$\frac{3x^3 + 4x^2 + x + 7}{x^2 + 1} = 3x + 4 + \frac{-2x + 3}{x^2 + 1}$$ ■

El proceso de división de dos polinomios nos conduce al siguiente resultado:

Teorema El residuo que obtenemos después de dividir dos polinomios es el polinomio cero o un polinomio de grado menor que el grado del divisor. ■

■ Ahora resuelva el problema 13.

Factorización

Considere el siguiente producto:

$$(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 5x - 12$$

Los dos polinomios de la izquierda son los **factores** del polinomio de la derecha. El proceso de expresar un polinomio dado como un producto de otros polinomios, es decir, determinar los factores de un polinomio, es la **factorización.**

Aquí restringiremos nuestro análisis a la factorización de polinomios en una variable en productos de polinomios en una variable, donde todos los coeficientes son enteros. Llamaremos a esto **factorización sobre los enteros.** Sin embargo, en ocasiones necesitaremos **factorizar sobre los números racionales** e incluso **sobre los números reales.** La factorización sobre los números racionales significa escribir un polinomio dado cuyos coeficientes son números racionales, como un producto de polinomios cuyos coeficientes son también números racionales. La factorización sobre los números reales significa escribir un polinomio dado cuyos coeficientes son números reales, como un producto de polinomios cuyos coeficientes sean también números reales. A menos que se indique lo contrario, aquí factorizaremos sobre los enteros.

Siempre podemos escribir cualquier polinomio como el producto de 1 por él mismo -1 por su inverso aditivo. Si no podemos escribir un polinomio como el producto de otros dos polinomios (excluyendo a 1 y -1), entonces el polinomio es **primo.** Si un polinomio está escrito como un producto que sólo tiene factores primos, quiere decir que ya está **factorizado en forma completa.** Algunos ejemplos de polinomios primos son

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad x, \quad x+1, \quad x-1, \quad 3x+4$$

Lo primero que debemos buscar en un problema de factorización es un monomio que aparezca como factor común en cada término del polinomio. Si existe dicho factor común utilizaremos la propiedad distributiva para factorizarlo. Por ejemplo,

POLINOMIO	MONOMIO FACTOR COMÚN	FACTOR RESTANTE	FORMA FACTORIZADA
$2x+4$	2	$x+2$	$2x+4=2(x+2)$
$3x-6$	3	$x-2$	$3x-6=3(x-2)$
$2x^2-4x+8$	2	x^2-2x+4	$2x^2-4x+8=2(x^2-2x+4)$
$8x-12$	4	$2x-3$	$8x-12=4(2x-3)$
x^2+x	x	$x+1$	$x^2+x=x(x+1)$
x^3-3x^2	x^2	$x-3$	$x^3-3x^2=x^2(x-3)$
$6x^2+9x$	$3x$	$2x+3$	$6x^2+9x=3x(2x+3)$

La lista de productos notables del (2) al (7) que aparece en la página 804 nos proporciona ciertas fórmulas de factorización cuando leemos las ecuaciones de derecha a izquierda. Por ejemplo, la ecuación (2) establece que si el polinomio es la diferencia de dos cuadrados, x^2-a^2, podemos factorizarlo como $(x-a)(x+a)$. El siguiente ejemplo muestra algunas técnicas de factorización.

EJEMPLO 5 *Factorización de polinomios*

Factorizar cada polinomio en forma completa.

(a) x^4-16 (b) x^3-1 (c) $9x^2-6x+1$ (d) $x^2+4x-12$

(e) $3x^2+10x-8$ (f) x^3-4x^2+2x-8

Solución (a) $x^4-16=\underbrace{(x^2-4)}_{\text{Diferencia de cuadrados}}(x^2+4)=\underbrace{(x-2)(x+2)}_{\text{Diferencia de cuadrados}}(x^2+4)$

(b) $x^3-1=\underbrace{(x-1)(x^2+x+1)}_{\text{Diferencia de cubos}}$

(c) $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$

$\uparrow$ Cuadrado perfecto

(d) $x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$

$\uparrow$ 6 y −2 son factores −12, y la suma de 6 y −2 es 4

$12x - 2x = 10x$

(e) $3x^2 + 10x - 8 = (3x - 2)(x + 4)$

$3x^2 \quad -8$

(f) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 = (x^3 - 4x^2) + (2x - 8)$

$\uparrow$ Reagrupamos

$= x^2(x - 4) + 2(x - 4) = (x^2 + 2)(x - 4)$

$\uparrow$ Propiedad distributiva ■

La técnica utilizada en el ejemplo 5(f) es llamada **factorización por agrupación.**

■ Ahora resuelva el problema 21.

Expresiones racionales

Si formamos el cociente de dos polinomios, el resultado es una **expresión racional;** Algunos ejemplos de expresiones racionales son

(a) $\dfrac{x^3 + 1}{x}$ (b) $\dfrac{3x^2 + x - 2}{x^2 + 5}$ (c) $\dfrac{x}{x^2 - 1}$ (d) $\dfrac{xy^2}{(x - y)^2}$

Donde (a), (b), y (c) son expresiones racionales en una variable, x, mientras que (d) es una expresión racional de dos variables x y y.

Describimos las expresiones racionales de la misma forma que a los números racionales. Así, en la expresión (a), el polinomio $x^3 + 1$ es el **numerador** y x el **denominador.** Cuando el numerador y el denominador de una expresión racional no tienen factores en común (excepto 1 y −1), decimos que la expresión racional está **reducida a su mínima expresión**, o **simplificada.**

Reducimos una expresión racional a su mínima expresión factorizando de manera completa el numerador y el denominador y cancelando todos los factores comunes mediante la propiedad de cancelación,

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}, \qquad b \neq 0,\ c \neq 0$$

Seguiremos como práctica común el uso de una diagonal para indicar la cancelación. Por ejemplo,

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x - 1)\cancel{(x + 1)}}{(x - 3)\cancel{(x + 1)}} = \frac{x - 1}{x - 3}$$

EJEMPLO 6 *Simplificación de expresiones racionales*

Reducir cada expresión racional a su mínima expresión.

(a) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$ (b) $\dfrac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2}$ (c) $\dfrac{8 - 2x}{x^2 - x - 12}$

Solución (a) $\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+3x+2}=\dfrac{\cancel{(x+2)}(x+2)}{\cancel{(x+2)}(x+1)}=\dfrac{x+2}{x+1},\quad x\neq -2,-1$

(b) $\dfrac{x^3-8}{x^3-2x^2}=\dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{x^2\cancel{(x-2)}}=\dfrac{x^2+2x+4}{x^2},\quad x\neq 0,2$

(c) $\dfrac{8-2x}{x^2-x-12}=\dfrac{2(4-x)}{(x-4)(x+3)}=\dfrac{2(-1)\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+3)}=\dfrac{-2}{x+3},\quad x\neq -3,4$ ■

Las reglas para la multiplicación y la división de expresiones racionales son iguales a las usadas para la multiplicación y división de números racionales:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\qquad \text{si } b\neq 0,\ d\neq 0 \tag{8}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc},\qquad \text{si } b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0 \tag{9}$$

Al utilizar las ecuaciones (8) y (9) con expresiones racionales hay que factorizar primero cada polinomio en forma completa para poder cancelar los factores comunes. Seguiremos la práctica de dejar las respuestas en forma factorizada.

EJEMPLO 7 *Determinación de productos y cocientes de expresiones racionales*

Realizar la operación indicada y simplificar el resultado. Dejar la respuesta en forma factorizada.

(a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+x}\cdot\dfrac{4x^2+4}{x^2+x-2}$ (b) $\dfrac{\frac{x+3}{x^2-4}}{\frac{x^2-x-12}{x^3-8}}$

Solución (a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^3+x}\cdot\dfrac{4x^2+4}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-1)^2}{x(x^2+1)}\cdot\dfrac{4(x^2+1)}{(x+2)(x-1)}$

$$=\frac{(x-1)^2(4)\cancel{(x^2+1)}}{x\cancel{(x^2+1)}(x+2)\cancel{(x-1)}}=\frac{4(x-1)}{x(x+2)},$$

$x\neq -2,0,1$

(b) $\dfrac{\frac{x+3}{x^2-4}}{\frac{x^2-x-12}{x^3-8}}=\dfrac{x+3}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^3-8}{x^2-x-12}$

$$=\frac{x+3}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-4)(x+3)}$$

$$=\frac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)(x-4)\cancel{(x+3)}}=\frac{x^2+2x+4}{(x+2)(x-4)},$$

$x\neq -3,-2,2,4$ ■

Nota: Una buena costumbre a seguir es utilizar diferentes sentidos en la inclinación de la diagonal al cancelar diversos factores, como en el ejemplo 7, ya que esto puede ayudarnos a rectificar posibles errores.

■ Ahora resuelva el problema 31.

Si los denominadores de dos expresiones racionales que se desean sumar (o restar) son iguales, sumamos (o restamos) los numeradores y conservamos el denominador común. Es decir, si a/b y c/b son dos expresiones racionales, entonces

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}, \qquad \text{si } b \neq 0 \tag{10}$$

EJEMPLO 8 *Determinación de la suma de dos expresiones racionales*

Realizar la operación indicada y simplificar el resultado. Dejar la respuesta en forma factorizada.

$$\frac{2x^2-4}{2x+5}+\frac{x+3}{2x+5}, \qquad x \neq -\tfrac{5}{2}$$

Solución

$$\frac{2x^2-4}{2x+5}+\frac{x+3}{2x+5}=\frac{(2x^2-4)+(x+3)}{2x+5}$$
$$=\frac{2x^2+x-1}{2x+5}=\frac{(2x-1)(x+1)}{2x+5}$$ ■

Si los denominadores de dos expresiones racionales por sumar o restar no son iguales, podemos utilizar las fórmulas generales para la suma y resta de cocientes:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}+\frac{c}{d}&=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad+bc}{bd}, \qquad \text{si } b\neq 0,\ d\neq 0 \\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}&=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ad+bc}{bd}, \qquad \text{si } b\neq 0,\ d\neq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

EJEMPLO 9 *Determinación de la recta de dos expresiones racionales*

Realizar la operación indicada y simplificar el resultado. Dejar la respuesta en forma factorizada.

$$\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x}, \qquad x \neq -2, 0, 2$$

Solución

$$\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x}=\frac{x^2(x)-(x^2-4)(1)}{(x^2-4)(x)}=\frac{x^3-x^2+4}{(x-2)(x+2)(x)}$$ ■

Mínimo común múltiplo (mcm)

Si los denominadores de dos expresiones racionales por sumar (o restar) tienen factores comunes, no utilizamos las reglas generales dadas por la ecuación (11) ya que al hacerlo el problema se complica más de lo necesario. En vez de eso, como en el caso de las fracciones, aplicamos el **método del mínimo común múltiplo (mcm)** utilizando el polinomio de menor grado que contiene a cada polinomio denominador como factor. Después reescribimos cada expresión racional con el mcm como denominador común y utilizamos la ecuación (10) para realizar la suma o resta.

Para determinar el mínimo común múltiplo de dos o más polinomios primero factorizamos cada polinomio en forma completa. El mcm es el producto de los diversos factores primos de cada polinomio, de modo que cada factor aparece el máximo número de veces que aparece en cada polinomio. El siguiente ejemplo le mostrará la idea.

EJEMPLO 10 *Determinación del mínimo común múltiplo*

Determinar el mínimo común múltiplo de la siguiente pareja de polinomios.

$$x(x-1)^2(x+1) \quad \text{y} \quad 4(x-1)(x+1)^3$$

Solución Los polinomios ya están factorizados en forma completa como

$$x(x-1)^2(x+1) \quad \text{y} \quad 4(x-1)(x+1)^3$$

Primero escribimos los factores del polinomio de la izquierda. (También podríamos comenzar con el de la derecha.)

$$x(x-1)^2(x+1)$$

Ahora consideremos el polinomio de la derecha. Su primer factor, 4, no aparece en nuestra lista, de modo que lo insertamos:

$$4x(x-1)^2(x+1)$$

El siguiente factor $x-1$, ya está en nuestra lista, de modo que no es necesario ningún cambio. El factor final es $(x+1)^3$. Como nuestra lista tiene $x+1$ elevado solamente a la primera potencia, reemplazamos $x+1$ en la lsita por $(x+1)^3$. El mcm es

$$4x(x-1)^2(x+1)^3$$

Observe que el mcm es, de hecho, el polinomio de menor grado que contiene a $x(x-1)^2(x+1)$ y $4(x-1)(x+1)^3$ como factores. ■

El siguiente ejemplo ilustra la forma de utilizar el mcm para sumar y restar expresiones racionales.

EJEMPLO 11 *Uso del mcm para sumar expresiones racionales*

Realizar la operación indicada y simplificar el resultado. Dejar la respuesta en forma factorizada.

$$\frac{x}{x^2+3x+2}+\frac{2x-3}{x^2-1}, \qquad x \neq -2, -1, 1$$

Solución Primero determinamos el mcm de los denominadores:

$$x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

El mcm es $(x+2)(x+1)(x-1)$. A continuación, reescribimos cada expresión racional utilizando el mcm como denominador.

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{x}{(x+2)(x+1)}=\frac{x(x-1)}{(x+2)(x+1)(x-1)}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por $x-1$ para obtener el mcm en el denominador.

$$\frac{2x-3}{x^2-1} = \frac{2x-3}{(x-1)(x+1)} = \frac{(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x+1)(x+2)}$$

Multiplicamos el numerador y el denominador por $x + 2$ para obtener el mcm en el denominador.

Ahora podemos sumar mediante la ecuación (10)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{2x-3}{x^2-1} &= \frac{x(x-1)}{(x+2)(x+1)(x-1)} + \frac{(2x-3)(x+2)}{(x+2)(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{(x^2-x)+(2x^2+x-6)}{(x+2)(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{3x^2-6}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{3(x^2-2)}{(x+2)(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

■

Si no hubiéramos utilizado la técnica del mcm para sumar los cocientes del ejemplo 11 sino la regla general de la ecuación (11), habríamos obtenido una expresión más complicada, como la siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{2x-3}{x^2-1} &= \frac{x(x^2-1)+(x^2+3x+2)(2x-3)}{(x^2+3x+2)(x^2-1)} \\
&= \frac{3x^3+3x^2-6x-6}{(x^2+3x+2)(x^2-1)} = \frac{3(x^3+x^2-2x-2)}{(x^2+3x+2)(x^2-1)}
\end{aligned}$$

Ahora enfrentamos un problema más complicado, expresar este cociente en su mínima expresión. Siempre es mejor buscar primero factores comunes entre los denominadores de las expresiones por sumar o restar para, si se encuentran, utilizar su mcm.

■ Ahora resuelva el problema 35.

Cocientes mixtas

Cuando aparecen sumas o restas de expresiones racionales como numerador o denominador de un cociente, se dice que tenemos un **cociente mixto.** Por ejemplo,

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} \quad \text{y} \quad \frac{\frac{x^2}{x^2-4}-3}{\frac{x-3}{x+2}-1}$$

son cocientes mixtos. **Simplificar** un cociente mixto significa escribirlo como una expresión racional reducida a su mínima expresión. Podemos realizar esto considerando al numerador y al denominador del cociente mixto en forma separada, realizando las operaciones adecuadas y simplificando los resultados. Siga este procedimiento para simplificar la expresión racional resultante.

EJEMPLO 12 *Simplificación de cocientes mixtos*

Simplificar el cociente mixto: $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

Solución
$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x}\cdot\frac{x}{x-1}$$
$$= \frac{(x+1)x}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

Ahora resuelva el problema 39.

A.1

Ejercicio A.1

En los problemas del 1 al 10 realice las operaciones indicadas. Exprese cada respuesta como un polinomio.

1. $(10x^5 - 8x^2) + (3x^3 - 2x^2 + 6)$
2. $3(x^2 - 3x + 1) + 2(3x^2 + x - 4)$
3. $(x + a)^2 - x^2$
4. $(x - a)^2 - x^2$
5. $(x + 8)(2x + 1)$
6. $(2x - 1)(x + 2)$
7. $(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1)$
8. $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 3x + 4)$
9. $(x + 1)^3 - (x - 1)^3$
10. $(x + 1)^3 - (x + 2)^3$

En los problemas 11 al 20, determine el cociente y el residuo. Verifique su trabajo comprobando que

(Cociente)(divisor) + Residuo = Dividendo

11. $4x^3 - 3x^2 + x + 1$ dividido entre x
12. $3x^3 - x^2 + x - 2$ dividido entre x
13. $4x^3 - 3x^2 + x + 1$ dividido entre $x + 2$
14. $3x^3 - x^2 + x - 2$ dividido entre $x + 2$
15. $4x^3 - 3x^2 + x + 1$ dividido entre $x - 4$
16. $3x^3 - x^2 + x - 2$ dividido entre $x - 4$
17. $4x^3 - 3x^2 + x + 1$ dividido entre x^2
18. $3x^3 - x^2 + x - 2$ dividido entre x^2
19. $4x^3 - 3x^2 + x + 1$ dividido entre $x^2 + 2$
20. $3x^3 - x^2 + x - 2$ dividido entre $x^2 + 2$

En los problemas del 21 al 30 factorice cada polinomio en forma completa. Si el polinomio no se puede factorizar, indique que es primo.

21. $x^2 - 2x - 15$
22. $x^2 - 6x - 14$
23. $ax^2 - 4a^2x - 45a^3$
24. $bx^2 + 14b^2x + 45b^3$
25. $x^3 - 27$
26. $x^3 + 27$
27. $3x^2 + 4x + 1$
28. $4x^2 + 3x - 1$
29. $x^7 - x^5$
30. $x^8 - x^5$

En los problemas del 31 al 34, realice la operación indicada y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

31. $\frac{3x-6}{5x}\cdot\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$
32. $\frac{9x-25}{2x-2}\cdot\frac{1-x^2}{6x-10}$
33. $\frac{4x^2-1}{x^2-16}\cdot\frac{x^2-4x}{2x+1}$
34. $\frac{12}{x^2-x}\cdot\frac{x^2-1}{4x-2}$

En los problemas del 35 al 42 realice las operaciones indicadas y simplifique el resultado. Deje su respuesta en forma factorizada.

35. $\frac{x}{x^2-7x+6} - \frac{x}{x^2-2x-24}$
36. $\frac{x}{x-3} - \frac{x+1}{x^2+5x-24}$

37. $\dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{2}{x^2+x-6}$

38. $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{x-4}{x^2-2x+1}$

39. $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$

40. $\dfrac{1-\frac{x}{x+1}}{2-\frac{x-1}{x}}$

41. $\dfrac{3-\frac{x^2}{x+1}}{1+\frac{x}{x^2-1}}$

42. $\dfrac{3x-\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}-1}$

A.2

Radicales; exponentes racionales

Raíces cuadradas

Obtenemos el cuadrado de un número real cuando lo elevamos a su segunda potencia. El procedimiento inverso de elevar al cuadrado consiste en determinar una **raíz cuadrada.** Por ejemplo, como $6^2 = 36$ y $(-6)^2 = 36$, los números 6 y -6 son raíces cuadradas de 36.

El símbolo $\sqrt{}$, llamado **signo radical,** para denotar la raíz cuadrada **principal,** no negativa. Así $\sqrt{36} = 6$.

Raíz cuadrada principal

En general, si a es un número real no negativo, el número no negativo b tal que $b^2 = a$ es la **raíz cuadrada principal** de a y se denota por $b = \sqrt{a}$.

Los siguientes comentarios son importantes:

1. Los números negativos no tienen raíz cuadrada (en el sistema de los números reales), ya que el cuadrado de cualquier número real es *no negativo*. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no es un número real pues no existe un número real cuyo cuadrado sea -4.
2. La raíz cuadrada principal de 0 es 0, ya que $0^2 = 0$. Es decir, $\sqrt{0} = 0$.
3. La raíz cuadrada principal de un número positivo es positiva.
4. Si $c \geq 0$, entonces $(\sqrt{c})^2 = c$. Por ejemplo, $(\sqrt{2})^2 = 2$ y $(\sqrt{3})^2 = 3$.

EJEMPLO 1 *Evaluación de raíces cuadradas*

(a) $\sqrt{64} = 8$ (b) $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ (c) $(\sqrt{1.4})^2 = 1.4$ ■

Los ejemplos 1(a) y (b) son muestras de **raíces cuadradas perfectas.** Así, 64 es un **cuadrado perfecto,** ya que $64 = 8^2$; y $\frac{1}{16}$ es un cuadrado perfecto, ya que $\frac{1}{16} = (\frac{1}{4})^2$.

En general, tenemos

$$\sqrt{a^2} = |a| \tag{1}$$

Observe la necesidad del valor absoluto en la ecuación (1). Como $a^2 \geq 0$, la raíz cuadrada principal de a^2 está definida siempre, sin importar que $a > 0$ o $a < 0$. Sin embargo, como la raíz cuadrada principal es no negativa, necesitamos del valor absoluto para garantizar que el resultado sea no negativo.

EJEMPLO 2 *Uso de la ecuación (1)*

(a) $\sqrt{(2.3)^2} = |2.3| = 2.3$ (b) $\sqrt{(-2.3)^2} = |-2.3| = 2.3$ (c) $\sqrt{x^2} = |x|$ ■

Raíces n-ésimas

Definimos la **raíz n-ésima principal de un número real a,** denotada $\sqrt[n]{a}$, como sigue:

Raíz n-ésima principal

$\sqrt[n]{a} = b$ significa $a = b^n$, donde $a \geq 0$ y $b \geq 0$ si n es par y a, b son números reales arbitrarios si n es impar

Observe que si a es negativo y n par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no está definida. Cuando está definida, la raíz n-ésima principal de un número es única.

El símbolo $\sqrt[n]{a}$ para la raíz n-ésima principal de a se suele llamar **radical;** el entero n es el **índice** y a el **radicando.** Si el índice de un radical es 2, $\sqrt[2]{a}$ es la **raíz cuadrada** de a y omitimos el índice 2, escribiendo sólo $\sqrt{a}$. Si el índice es 3, $\sqrt[3]{a}$ es la **raíz cúbica** de a.

EJEMPLO 3 *Evaluación de raíces enésimas principales*

$$\sqrt[3]{8} = 2 \qquad \sqrt[6]{64} = 2 \qquad \sqrt[3]{-64} = -4 \qquad \sqrt[4]{\tfrac{1}{16}} = \tfrac{1}{2}$$

ya que

$$8 = 2^3 \qquad 64 = 2^6 \qquad -64 = (-4)^3 \qquad \tfrac{1}{16} = (\tfrac{1}{2})^4$$

■

Estos son ejemplos de **raíces perfectas.** Así, 8 y -64 son cubos perfectos, ya que $8 = 2^3$ y $-64 = (-4)^3$; 2 es una raíz sexta perfecta de 64, ya que $64 = 2^6$; y $\frac{1}{2}$ es una raíz cuarta perfecta de $\frac{1}{16}$, ya que $\frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4$.

En general, si $n \geq 2$ es un entero positivo y a es un número real, tenemos que

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \quad \text{si } n \text{ es impar} \tag{1a}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|, \quad \text{si } n \text{ es par} \tag{1b}$$

Observe la necesidad del valor absoluto en la ecuación (1b). Si n es par, entonces a^n es positivo, sin importar que $a > 0$ o $a < 0$. Pero si n es par, la raíz n-ésima principal debe ser no negativa. De ahí el uso del valor absoluto para obtener un resultado no negativo.

EJEMPLO 4 *Uso de las ecuaciones (1a) y (1b)*

(a) $\sqrt[3]{4^3} = 4$ (b) $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$ (c) $\sqrt[4]{2^4} = 2$

(d) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$ (e) $\sqrt{x^2} = |x|$ ■

Propiedades de las ecuaciones

Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos y a y b números reales. Si todos los radicales están definidos, tendremos las siguientes propiedades:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad (2a)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (2b)$$

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad (2c)$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (2d)$$

En el caso de los radicales, la palabra "simplificar" significa eliminar de éstos cualquier raíz perfecta que aparezca como factor. Veamos algunos ejemplos de aplicación de las reglas anteriores para simplificar radicales.

EJEMPLO 5 *Simplificación de radicales*

Simplificar cada expresión. Suponga que todos los radicales con variables están definidos.

(a) $\sqrt{32}$ (b) $\sqrt[3]{8x^4}$ (c) $\sqrt{\sqrt[3]{x^7}}$ (d) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^5}{27y^2}}$ (e) $\dfrac{\sqrt{x^5y}}{\sqrt{x^3y^3}}$

Solución

(a) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

16 es un cuadro perfecto. (2a)

(b) $\sqrt[3]{8x^4} = \sqrt[3]{8x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{(2x)^3 \cdot x} = \sqrt[3]{(2x)^3}\,\sqrt[3]{x} = 2x\sqrt[3]{x}$

Factorizamos cada cubo perfecto. (2a) (1a)

(c) $\sqrt{\sqrt[3]{x^7}} = \sqrt[6]{x^7} = \sqrt[6]{x^6 \cdot x} = \sqrt[6]{x^6} \cdot \sqrt[6]{x} = |x|\,\sqrt[6]{x}$

(2d) (1b)

(d) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^5}{27y^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3x^3x^2}{3^3y^2}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2x}{3}\right)^3 \cdot \dfrac{x^2}{y^2}} = \sqrt[3]{\left(\dfrac{2x}{3}\right)^3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^2}} = \dfrac{2x}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{y^2}}$

(e) $\dfrac{\sqrt{x^5y}}{\sqrt{x^3y^3}} = \sqrt{\dfrac{x^5y}{x^3y^3}} = \sqrt{\dfrac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2} = \left|\dfrac{x}{y}\right|$ ■

■ Ahora resuelva los problemas 1 y 15.

Racionalización

Cuando los radicales aparecen en cocientes, es una práctica común reescribir el cociente de modo que el denominador no contenga radicales. Este procedimiento es la **racionalización del denominador.**

La idea es determinar una expresión adecuada de modo que, al ser multiplicada por el radical en el denominador, el nuevo denominador no tenga radicales. Por ejemplo,

SI EL RADICAL ES	MULTIPLICAMOS POR	PARA OBTENER EL PRODUCTO SIN RADICALES
$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{9} = 3$
$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{3} + 1$	$\sqrt{3} - 1$	$(\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$
$\sqrt{2} - 3$	$\sqrt{2} + 3$	$(\sqrt{2})^2 - 3^2 = 2 - 9 = -7$
$\sqrt{5} - \sqrt{3}$	$\sqrt{5} + \sqrt{3}$	$(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$

Usted estará en lo correcto si advierte en la lista que, después del segundo tipo de radicales, el producto notable para las diferencias de cuadrados es la base para determinar el factor por el cual multiplicar.

EJEMPLO 6 *Racionalización de denominadores*

Racionalizar el denominador de cada expresión

(a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$, $x \geq 0$

Solución (a) $\dfrac{4}{\sqrt{2}} = \underset{\uparrow}{} \dfrac{4}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Multiplicamos por $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

(b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2}$

Multiplicamos por $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$.

(c) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x})^2 - 2^2}$

$$= \frac{(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 4}{x-4} = \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{x-4}$$ ■

En cálculo, hay ocasiones en que el numerador debe ser racionalizado.

EJEMPLO 7 *Racionalización de numeradores*

Racionalizar el numerador: $\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$, $x \geq 0$

Solución Multiplicamos por $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$:

$$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x})^2 - 2^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-4}{x+3\sqrt{x}+2}$$ ■

■ Ahora resuelva el problema 31.

Ecuaciones con radicales

Cuando la variable de una ecuación aparece en una raíz cuadrada, cúbica, etc., es decir, cuando se encuentra dentro de un radical, tenemos una **ecuación radical.** En ciertos casos, una operación adecuada transformará una ecuación radical en una lineal o cuadrática. El procedimiento más común consiste en aislar el radical más complicado a un lado de la ecuación y después eliminarlo elevando ambos miembros a una potencia igual al índice del radical. Pero debe tenerse cuidado ya que pueden aparecer soluciones extrañas. Así, al trabajar con ecuaciones radicales, siempre debemos verificar las soluciones aparentes. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO 8 *Solución de ecuaciones radicales*

Resolver la ecuación $\sqrt[3]{2x-4}-2=0$

Solución La ecuación contiene un radical cuyo índice es 3. Lo aislamos del lado izquierdo:

$$\sqrt[3]{2x-4}-2=0$$
$$\sqrt[3]{2x-4}=2$$

Ahora elevamos cada lado a la tercera potencia (ya que el índice del radical es 3) y despejamos:

$$(\sqrt[3]{2x-4})^3=2^3$$
$$2x-4=8$$
$$2x=12$$
$$x=6$$

Verificación: $\sqrt[3]{2(6)-4}-2=\sqrt[3]{12-4}-2=\sqrt[3]{8}-2=2-2=0$
La solución es $x=6$. ■

■ Ahora resuelva el problema 37.

Exponentes racionales

Los radicales sirven para definir exponentes racionales.

$a^{1/n}$

Si a es un número real y $n \geq 2$ es un entero, entonces

$$a^{1/n}=\sqrt[n]{a} \qquad (3)$$

siempre y cuando $\sqrt[n]{a}$ exista.

EJEMPLO 9 *Uso de la ecuación (3)*

(a) $4^{1/2}=\sqrt{4}=2$ (b) $(-27)^{1/3}=\sqrt[3]{-27}=-3$
(c) $8^{1/2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ (d) $16^{1/3}=\sqrt[3]{16}=2\sqrt[3]{2}$ ■

$a^{m/n}$

Si a es un número real y m y n son enteros sin factores en común, $n \geq 2$, entonces

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m \qquad (4)$$

siempre y cuando $\sqrt[n]{a}$ exista.

Haremos dos comentarios con respecto a la ecuación (4):

1. El exponente m/n debe estar en su mínima expresión y n debe ser positivo.
2. Al simplificar $a^{m/n}$, se puede utilizar $\sqrt[n]{a^m}$ o $(\sqrt[n]{a})^m$. Por lo general, es preferible calcular primero la raíz.

Es posible demostrar que las leyes de los exponentes son válidas para exponentes racionales.

EJEMPLO 10 *Simplificación de expresiones con exponentes racionales*

Simplificar cada expresión. Expresar la respuesta sólo con exponentes positivos. Suponga que las variables son positivas.

(a) $\left(\dfrac{2x^{1/3}}{y^{2/3}}\right)^{-3}$ (b) $(x^{2/3}y^{-3/4})(x^{-2}y)^{1/2}$

(c) $\left(\dfrac{9x^2y^{1/3}}{x^{1/3}y}\right)^{1/2}$ (d) $\dfrac{(2x+5)^{1/3}(2x+5)^{-1/2}}{(2x+5)^{-3/4}}$

Solución

(a) $\left(\dfrac{2x^{1/3}}{y^{2/3}}\right)^{-3} = \left(\dfrac{y^{2/3}}{2x^{1/3}}\right)^{3} = \dfrac{(y^{2/3})^3}{(2x^{1/3})^3} = \dfrac{y^2}{2^3(x^{1/3})^3} = \dfrac{y^2}{8x}$

(b)
$$\begin{aligned}(x^{2/3}y^{-3/4})(x^{-2}y)^{1/2} &= (x^{2/3}y^{-3/4})[(x^{-2})^{1/2}y^{1/2}]\\ &= x^{2/3}y^{-3/4}x^{-1}y^{1/2} = (x^{2/3}x^{-1})(y^{-3/4}y^{1/2})\\ &= x^{-1/3}y^{-1/4} = \frac{1}{x^{1/3}y^{1/4}}\end{aligned}$$

(c) $\left(\dfrac{9x^2y^{1/3}}{x^{1/3}y}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{9x^{2-(1/3)}}{y^{1-(1/3)}}\right)^{1/2} = \left(\dfrac{9x^{5/3}}{y^{2/3}}\right)^{1/2} = \dfrac{9^{1/2}(x^{5/3})^{1/2}}{(y^{2/3})^{1/2}} = \dfrac{3x^{5/6}}{y^{1/3}}$

(d)
$$\begin{aligned}\frac{(2x+5)^{1/3}(2x+5)^{-1/2}}{(2x+5)^{-3/4}} &= (2x+5)^{(1/3)-(1/2)-(-3/4)}\\ &= (2x+5)^{(4-6+9)/12} = (2x+5)^{7/12}\end{aligned}$$

■

■ Ahora resuelva el problema 57.

Los siguientes dos ejemplos muestran un poco del álgebra que deberá saber manejar para resolver ciertos problemas de cálculo.

EJEMPLO 11 *Escribir una expresión como un cociente único*

Escribir la expresión como un cociente único que sólo tenga exponentes positivos.

$$(x^2+1)^{1/2} + x\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x$$

Solución

$$\begin{aligned}(x^2+1)^{1/2} + x\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}\cdot 2x &= (x^2+1)^{1/2} + \frac{x^2}{(x^2+1)^{1/2}}\\ &= \frac{(x^2+1)^{1/2}(x^2+1)^{1/2} + x^2}{(x^2+1)^{1/2}}\\ &= \frac{(x^2+1)+x^2}{(x^2+1)^{1/2}}\\ &= \frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 12 *Factorización de una expresión con exponentes radicales*

Factor: $4x^{1/3}(2x+1)+2x^{4/3}$

Solución Primero buscamos factores comunes a los dos términos. Observe que 2 y $x^{1/3}$ son factores comunes. Así

$$\begin{aligned} 4x^{1/3}(2x+1)+2x^{4/3} &= 2x^{1/3}[2(2x+1)+x] \\ &= 2x^{1/3}(5x+2) \end{aligned}$$

A.2

Ejercicio A.2

En los problemas del 1 al 20 simplifique cada expresión. Suponga que todos los radicales con variables están definidos.

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt[4]{32}$
3. $\sqrt[3]{16x^4}$
4. $\sqrt{27x^3}$
5. $\sqrt[3]{\sqrt{x^6}}$
6. $\sqrt{\sqrt{x^6}}$
7. $\sqrt{\dfrac{32x^3}{9x}}$
8. $\sqrt[3]{\dfrac{x}{8x^4}}$
9. $\sqrt[4]{x^{12}y^8}$
10. $\sqrt[5]{x^{10}y^5}$
11. $\sqrt[4]{\dfrac{x^9y^7}{xy^3}}$
12. $\sqrt[3]{\dfrac{3xy^2}{81x^4y^2}}$
13. $\sqrt{36x}$
14. $\sqrt{9x^5}$
15. $\sqrt{3x^2}\sqrt{12x}$
16. $\sqrt{5x}\sqrt{20x^3}$
17. $(\sqrt{5}\sqrt[3]{9})^2$
18. $(\sqrt[3]{3}\sqrt{10})^4$
19. $\sqrt{\dfrac{2x-3}{2x^4+3x^3}}\sqrt{\dfrac{x}{}}$
20. $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}}\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{x+1}}$

En los problemas del 21 al 26 realice la operación indicada y simplifique el resultado. Suponga que todas las variables presentes son positivas.

21. $(3\sqrt{6})(2\sqrt{2})$
22. $(5\sqrt{8})(-3\sqrt{3})$
23. $(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-1)$
24. $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+3)$
25. $(\sqrt{x}-1)^2$
26. $(\sqrt{x}+\sqrt{5})^2$

En los problemas del 27 al 36 racionalice el denominador de cada expresión. Suponga que todas las variables presentes son positivas.

27. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
28. $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4}}$
29. $\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$
30. $\dfrac{-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{8}}$
31. $\dfrac{\sqrt{3}}{5-\sqrt{2}}$
32. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}+2}$
33. $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+3\sqrt{5}}$
34. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+3}$
35. $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$
36. $\dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x-h}}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x-h}}$

En los problemas del 37 al 40 resuelva cada ecuación.

37. $\sqrt{2t-1}=1$
38. $\sqrt{3t+4}=2$
39. $\sqrt{15-2x}=x$
40. $\sqrt{12-x}=x$

En los problemas del 41 al 52 simplifique cada expresión.

41. $8^{2/3}$
42. $4^{3/2}$
43. $(-27)^{1/3}$
44. $16^{3/4}$
45. $16^{3/2}$
46. $64^{3/2}$
47. $9^{-3/2}$
48. $25^{-5/2}$
49. $\left(\dfrac{9}{8}\right)^{3/2}$
50. $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{2/3}$
51. $\left(\dfrac{8}{9}\right)^{-3/2}$
52. $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3}$

En los problemas del 53 al 60 simplifique cada expresión. Exprese su respuesta sólo con exponentes positivos. Suponga que las variables son positivas.

53. $x^{3/4}x^{1/3}x^{-1/2}$ **54.** $x^{2/3}x^{1/2}x^{-1/4}$ **55.** $(x^3y^6)^{1/3}$ **56.** $(x^4y^8)^{3/4}$

57. $(x^2y)^{1/3}(xy^2)^{2/3}$ **58.** $(xy)^{1/4}(x^2y^2)^{1/2}$ **59.** $(16x^2y^{-1/3})^{3/4}$ **60.** $(4x^{-1}y^{1/3})^{3/2}$

En los problemas del 61 al 66, escriba cada expresión como un único cociente donde sólo aparezcan exponentes positivos o radicales.

61. $\dfrac{x}{(1+x)^{1/2}} + 2(1+x)^{1/2}$ **62.** $\dfrac{1+x}{2x^{1/2}} + x^{1/2}$

63. $\dfrac{\sqrt{1+x} - x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}$ **64.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$

65. $\dfrac{(x+4)^{1/2} - 2x(x+4)^{-1/2}}{x+4}$ **66.** $\dfrac{(9-x^2)^{1/2} + x^2(9-x^2)^{-1/2}}{9-x^2}$

En los problemas del 67 al 70 factorice cada expresión.

67. $(x+1)^{3/2} + x \cdot \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$ **68.** $(x^2+4)^{4/3} + x \cdot \frac{4}{3}(x^2+4)^{1/3} \cdot 2x$

69. $6x^{1/2}(x^2+x) - 8x^{3/2} - 8x^{1/2}$ **70.** $6x^{1/2}(2x+3) + x^{3/2} \cdot 8$

A.3 Completar el cuadrado; la fórmula cuadrática

Completar el cuadrado

Comencemos con un resultado preliminar. Supongamos que queremos resolver la ecuación cuadrática

$$x^2 = p \tag{1}$$

donde $p \geq 0$ es un número no negativo. Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 - p &= 0 && \text{Lo escribimos en forma canónica.} \\ (x - \sqrt{p})(x + \sqrt{p}) &= 0 && \text{Factorizamos (sobre los números reales).} \\ x = \sqrt{p} \quad \text{o} \quad x &= -\sqrt{p} && \text{Despejamos.} \end{aligned}$$

Así, tenemos el siguiente resultado:

$$\text{Si } x^2 = p \text{ y } p \geq 0, \text{ entonces } x = \sqrt{p} \text{ o } x = -\sqrt{p}. \tag{2}$$

Observe que si $p > 0$ la ecuación $x^2 = p$ tiene dos ecuaciones: $x = \sqrt{p}$ y $x = -\sqrt{p}$. Por lo general, abreviamos estas soluciones como $x = \pm\sqrt{p}$, que se lee como "x es igual a más menos la raíz cuadrada de p". Por ejemplo, las dos soluciones de la ecuación

$$x^2 = 4$$

son

$$x = \pm\sqrt{4}$$

y como $\sqrt{4} = 2$, tenemos

$$x = \pm 2$$

El conjunto solución es $\{-2, 2\}$.

No confunda las dos soluciones de la ecuación $x^2 = 4$ con el valor de la raíz cuadrada principal de 4, que es $\sqrt{4} = 2$. La raíz cuadrada principal de un número positivo es única, mientras que la ecuación $x^2 = p$, $p > 0$, tiene dos soluciones.

EJEMPLO 1 *Solución de ecuaciones*

Resolver cada ecuación.

(a) $x^2 = 5$ (b) $(x - 2)^2 = 16$

Solución (a) Utilizamos el resultado de la ecuación (2) para obtener

$$\begin{aligned} x^2 &= 5 \\ x &= \pm\sqrt{5} \\ x &= \sqrt{5} \quad \text{o} \quad x = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$.

(b) Utilizamos el resultado de la ecuación (2) para obtener

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &= 16 \\ x - 2 &= \pm\sqrt{16} \\ x - 2 &= \sqrt{16} \quad \text{o} \quad x - 2 = -\sqrt{16} \\ x - 2 &= 4 \qquad\quad\;\; x - 2 = -4 \\ x &= 6 \qquad\qquad\quad\; x = -2 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{-2, 6\}$. ■

Ahora presentamos el método **completar el cuadrado.** La idea subyacente de este método es "ajustar" una expresión cuadrática, $ax^2 + bx + c$, para convertirla en un cuadrado perfecto (el cuadrado de un polinomio de primer grado). Por ejemplo, $x^2 + 6x + 9$ y $x^2 - 4x + 4$ son cuadrados perfectos, ya que

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2 \quad \text{y} \quad x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

¿Cómo ajustar la expresión cuadrática? Sumando el número adecuado para crear un cuadrado perfecto. Por ejemplo, para que $x^2 + 6x$ sea un cuadrado perfecto sumamos 9.

Observemos varios ejemplos para completar el cuadrado cuando el coeficiente de x^2 es 1:

INICIO	SUMA	RESULTADO
$x^2 + 4x$	4	$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$
$x^2 + 12x$	36	$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$
$x^2 - 6x$	9	$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$
$x^2 + x$	$\frac{1}{4}$	$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

¿Observa el patrón? Como el coeficiente de x^2 es 1, completamos el cuadrado sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x:

INICIO	SUMA	RESULTADO
$x^2 + mx$	$\left(\frac{m}{2}\right)^2$	$x^2 + mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{m}{2}\right)^2$

■ Ahora resuelva el problema 1.

El siguiente ejemplo ilustra la forma de utilizar este procedimiento para resolver una ecuación cuadrática.

EJEMPLO 2 *Solución de una ecuación cuadrática complementando el cuadrado*

Resolver completando el cuadrado: $x^2 + 5x + 4 = 0$

Solución Este procedimiento se comienza siempre reordenando la ecuación de modo que la constante se encuentre del lado derecho:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 &= 0 \\ x^2 + 5x &= -4 \end{aligned}$$

Como el coeficiente de x^2 es 1, podemos completar el cuadrado del lado izquierdo sumando $\left(\frac{1}{2} \cdot 5\right)^2 = \frac{25}{4}$. Por supuesto, en una ecuación, lo que sumemos del lado izquierdo debe sumarse también del lado derecho. Así, sumamos $\frac{25}{4}$ en *ambos* lados:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + \tfrac{25}{4} &= -4 + \tfrac{25}{4} \\ \left(x + \tfrac{5}{2}\right)^2 &= \tfrac{9}{4} \\ x + \tfrac{5}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{9}{4}} \\ x + \tfrac{5}{2} &= \pm\tfrac{3}{2} \\ x &= -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$x = -\tfrac{5}{2} + \tfrac{3}{2} = -1 \quad \text{o} \quad x = -\tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2} = -4$$

El conjunto solución es $\{-4, -1\}$. ■

■ Ahora resuelva el problema 7.

EJEMPLO 3 *Solución de una ecuación cuadrática completando el cuadrado*

Resuelva completando el cuadrado: $2x^2 + 8x - 5 = 0$

Solución Primero, reescribimos la ecuación:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 8x - 5 &= 0 \\ 2x^2 - 8x &= 5 \end{aligned}$$

Después, dividimos entre 2 para que el coeficiente de x^2 sea 1. (Esto nos permite completar el cuadrado en el siguiente paso.)

$$x^2 - 4x = \tfrac{5}{2}$$

Por último, completamos el cuadrado sumando 4 en cada lado:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 &= \tfrac{5}{2} + 4 \\ (x - 2)^2 &= \tfrac{13}{2} \\ x - 2 &= \pm\sqrt{\tfrac{13}{2}} = \pm\tfrac{\sqrt{26}}{2} \\ x &= 2 \pm \tfrac{\sqrt{26}}{2} \end{aligned}$$

Dejaremos nuestra respuesta en esta forma compacta. Así, el conjunto solución es $\{2 - \sqrt{26}/2, 2 + \sqrt{26}/2\}$. ■

Nota: Si queremos una aproximación de estas soluciones con, digamos, dos cifras decimales, utilizamos una calculadora para obtener $\{-0.55, 4.55\}$.

■ Ahora resuelva el problema 11.

La fórmula cuadrática

Podemos utilizar el método de completar el cuadrado para obtener una fórmula general y resolver la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0$$

Como en los ejemplos 2 y 3, reordenamos los términos:

$$ax^2 + bx = -c$$

Como $a \neq 0$, podemos dividir ambos lados entre a para obtener

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Ahora el coeficiente de x^2 es 1. Para completar el cuadrado del lado izquierdo sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x; es decir, sumamos

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

en cada lado.
Entonces

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{3}$$

Si $b^2 - 4ac \geq 0$, podemos aplicar el resultado de la ecuación (2) para obtener

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿Qué sucede si $b^2 - 4ac$ es negativo? Entonces la ecuación (3) establece que la expresión de la izquierda (un número real al cuadrado) es igual a la expresión de la derecha (un número negativo). Como esto no puede suceder para los números reales, concluimos que, si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación cuadrática no tiene solución *real*.

Ahora enunciaremos la *fórmula cuadrática*

Teorema Considere la ecuación cuadrática

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, esta ecuación no tiene solución real. Si $b^2 - 4ac \geq 0$, la solución (soluciones) real(es) de esta ecuación está(n) dada(s) por la **fórmula cuadrática:**

Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

A.3

Ejercicio A.3

En los problemas del 1 al 6 indique el número que debe sumarse para completar el cuadrado de cada expresión.

1. $x^2 - 4x$
2. $x^2 - 2x$
3. $x^2 + \frac{1}{2}x$
4. $x^2 - \frac{1}{3}x$
5. $x^2 - \frac{2}{3}x$
6. $x^2 - \frac{2}{5}x$

En los problemas del 7 al 12 resuelva cada ecuación completando el cuadrado.

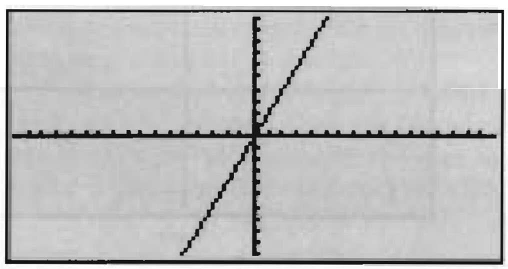
7. $x^2 + 4x - 21 = 0$
8. $x^2 - 6x = 13$
9. $x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{16}$
10. $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}$
11. $3x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$
12. $2x^2 - 3x = 1$

Apéndice B DISPOSITIVOS DE GRAFICACIÓN

B.1 La pantalla

Todos los dispositivos de graficación (es decir, todas las calculadoras gráficas y todos los paquetes de *software* para graficación por computadora) delinean gráficas de ecuaciones trazando puntos en una pantalla. La propia pantalla consta de rectángulos muy pequeños, llamados ***pixeles.*** Entre más *pixeles* tenga la pantalla mejor será la resolución. Muchas calculadoras gráficas tienen 48 *pixeles* por pulgada cuadrada y una gran parte de las pantallas de computadora tienen de 32 a 108 pixeles por pulgada cuadrada. Cuando el punto por localizar se encuentra dentro de un *pixel*, este se activa (se enciende). De este modo, la gráfica de una ecuación es una colección de *pixeles*. La figura 1 muestra la gráfica de $y = 2x$ obtenida en una calculadora gráfica TI85.

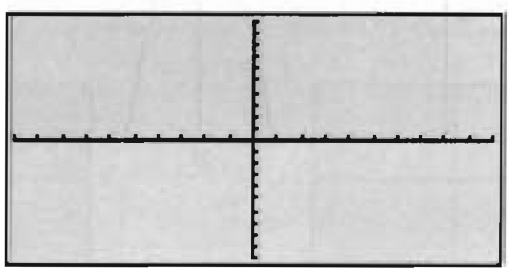
FIGURA 1
$y = 2x$



La pantalla de un dispositivo de graficación desplegará los ejes coordenados de un sistema de coordenadas rectangulares. Sin embargo, usted debe establecer la escala de cada uno de los ejes. También debe indicar los valores más pequeños y más grandes de x y y que desee incluir en la gráfica. A esto se le llama **establecer el RANGO** y da como resultado **el rectángulo de visión** o **ventana.**

La figura 2 ilustra una ventana típica.

FIGURA 2



Si conocemos la escala utilizada en cada eje, podremos determinar los valores mínimo y máximo de x y y mostrados en la pantalla contando las marcas. Observe de nuevo la figura 2. Para una escala de 1 en cada eje, los valores mínimo y máximo de x son -10 y 10, respectivamente; los valores mínimo y máximo de y son también -10 y 10. Si la escala es 2 en cada eje, entonces los valores mínimo y máximo de x son -20 y 20, respectivamente, al igual que los de y.

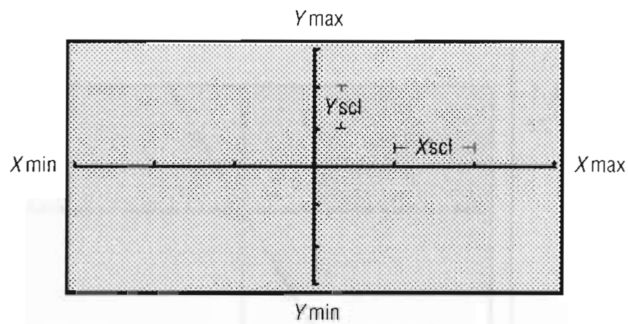
De manera similar, cuando conocemos los valores mínimo y máximo de x y y podemos determinar las escalas utilizadas contando las marcas desplegadas. En nuestras ilustraciones mostraremos los valores mínimo y máximo de x y y para que usted conozca el RANGO establecido.

Para seleccionar la ventana debemos dar valores a las expresiones siguientes:

Xmin:	el valor más pequeño de x
Xmax:	el valor más grande de x
Xscl:	el número de unidades por marca en el eje x
Ymin:	el valor más pequeño de y
Ymax:	el valor más grande de y
Yscl:	el número de unidades por marca en el eje y

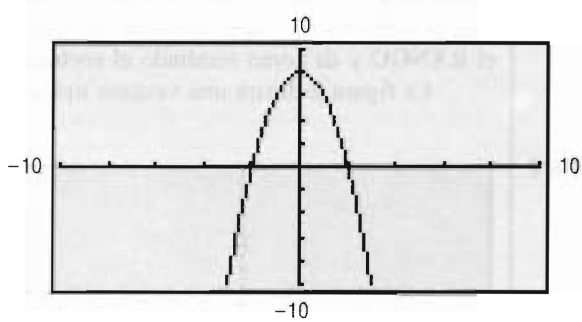
La figura 3 ilustra estos valores para una pantalla típica.

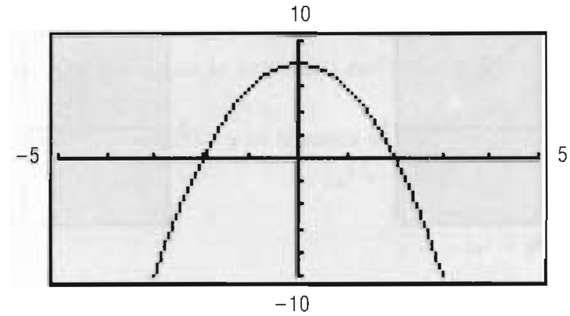
FIGURA 3

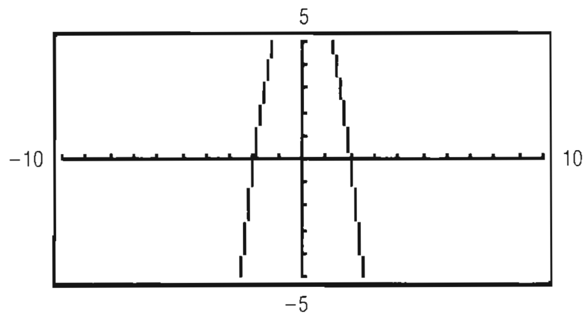


Tenga cuidado al elegir una ventana. Si es demasiado pequeña puede excluir algunas partes importantes de la gráfica; si es demasiado grande la gráfica puede distorsionarse. La figura 4 muestra la gráfica de $y = -2x^2 + 8$ para diferentes ventanas.

FIGURA 4







Como lo ilustra la figura 4, la elección de una ventana es fundamental para obtener una gráfica completa. Pero, ¿cómo obtener la mejor vista de una gráfica? Y, lo más importante, ¿cómo interpretamos lo que vemos? Por lo general esto requiere de cierto conocimiento de las propiedades de una ecuación, lo cual iremos estudiando al avanzar en este libro.

Algunos dispositivos de graficación tienen una función integrada que proporciona en forma automática una gráfica completa. Para aquellos que no tienen esta característica, en la sección 2 del apéndice analizaremos una forma de obtener una gráfica completa mediante la función ZOOM-OUT.

B.1

Ejercicio B.1

En los problemas del 1 al 6 elija valores para RANGE de modo que los puntos dados se encuentren dentro de la ventana.

1. $(-10, 5), (3, -2), (4, -1)$

2. $(5, 0), (6, 8), (-2, -3)$

3. $(40, 20), (-20, -80), (10, 40)$

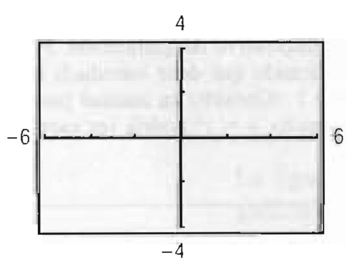
4. $(-80, 60), (20, -30), (-20, -40)$

5. $(0, 0), (100, 5), (5, 150)$

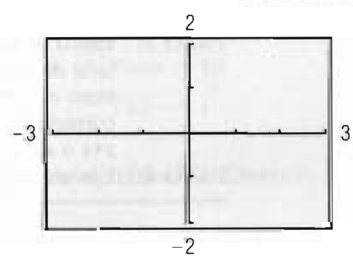
6. $(0, -1), (100, 50), (-10, 30)$

En los problemas del 7 al 16 determine los valores para RANGE utilizados en cada ventana.

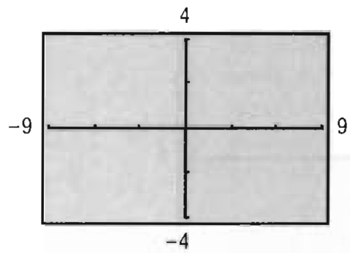
7.



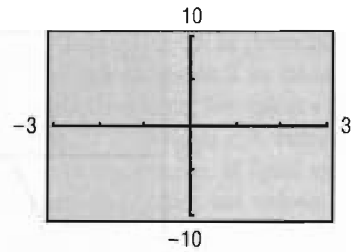
8.



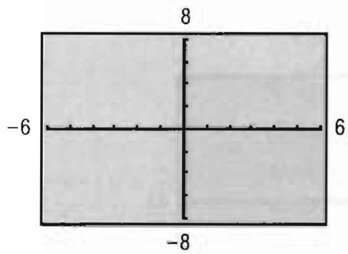
9.



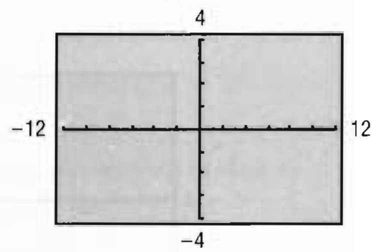
10.



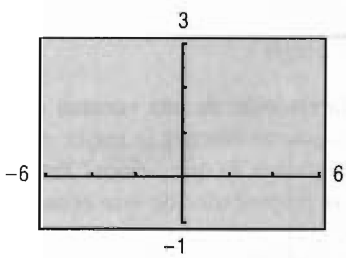
11.



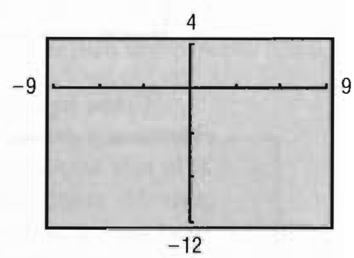
12.



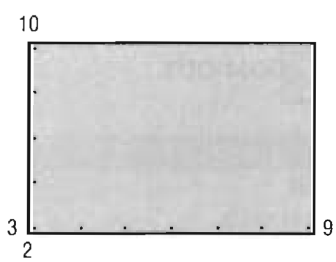
13.



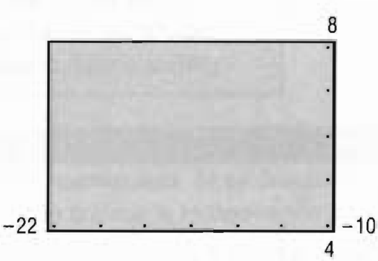
14.



15.



16.



B.2 Trazado de gráficas de ecuaciones mediante dispositivos de graficación

La mayoría de las herramientas de graficación requiere de los siguientes pasos para desplegar la gráfica de una ecuación:

PASO 1: Despejar y en términos de x en la ecuación.

PASO 2: Elegir la ventana.

PASO 3: Entrar al modo gráfico de su dispositivo de graficación. Por lo general, la pantalla desplegará $y =$, indicando que debe introducir la expresión que contiene a x obtenida en el PASO 1. (Consulte su manual para introducir en forma correcta la expresión; por ejemplo, $y = x^2$ podría ser captada como x^2, como $x{*}x$ o así $x\ x^Y\ 2$).

PASO 4: Ejecute el programa.

EJEMPLO 1

Trazado de la gráfica de una ecuación mediante un dispositivo de graficación

Trace la gráfica de la ecuación: $6x^2 + 3y = 24$

Solución

PASO 1 Despejamos y en términos de x.

$$6x^2 + 3y = 24$$
$$3y = -6x^2 + 24$$
$$y = -2x^2 + 8$$

PASO 2 Elegimos una ventana. Utilizaremos la siguiente.

Xmin = −5

Xmax = 5

Xscl = 1

Ymin = −10

Ymax = 20

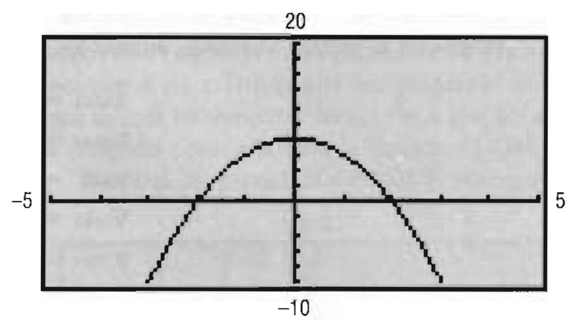
Yscl = 2

PASO 3 En modo gráfico, introduzca la expresión $-2x^2 + 8$ después del indicador $y =$

PASO 4 Ejecute

La pantalla deberá verse como en la figura 5.

FIGURA 5



Ahora que hemos visto la gráfica de $y = -2x^2 + 8$, tal vez quisiéramos trazarla de nuevo con los valores siguientes:

Xmin = −5

Xmax = 5

Xscl = 1

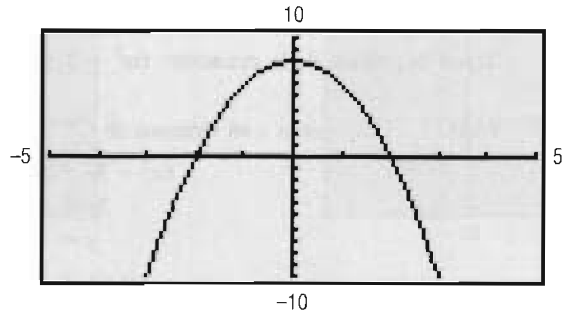
Ymin = −10

Ymax = 10

Yscl = 1

La figura 6 muestra la gráfica así obtenida. Observe la mejoría con respecto a la gráfica de la figura 5.

FIGURA 6



En ciertos dispositivos de graficación es posible recorrer la gráfica hacia arriba, hacia abajo, hacia la izquierda o hacia la derecha, para apreciarla en todas sus partes, en lugar de establecer otros valores para una nueva ventana. Con ese corrimiento la escala continúa siendo la misma; sólo cambian los valores mínimo y máximo.

EJEMPLO 2 *Uso de las intersecciones con los ejes para establecer la ventana*

Trazar la gráfica de: $y = x^3 - 8$

Solución Como ayuda para poder elegir la ventana determinamos las intersecciones con los ejes:

Si $x = 0$, entonces $y = -8$. La intersección con el eje y es -8.

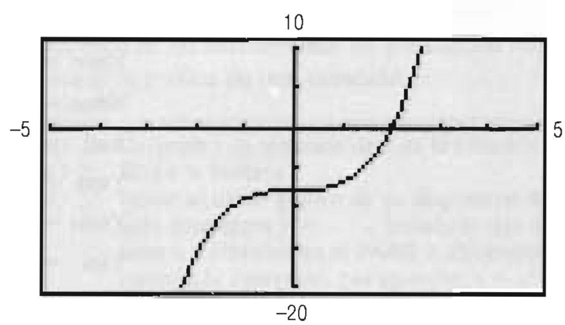
Si $y = 0$, entonces $x^3 - 8 = 0$ o $x = 2$. La intersección con el eje x es 2.

Como las intersecciones con los ejes son (2,0) y (0, −8) y queremos incluir estos puntos en la gráfica, debemos utilizar los valores

Xmin = −5
Xmax = 5
Xscl = 1
Ymin = −20
Ymax = 10
Yscl = 5

La figura 7 muestra la gráfica.

FIGURA 7



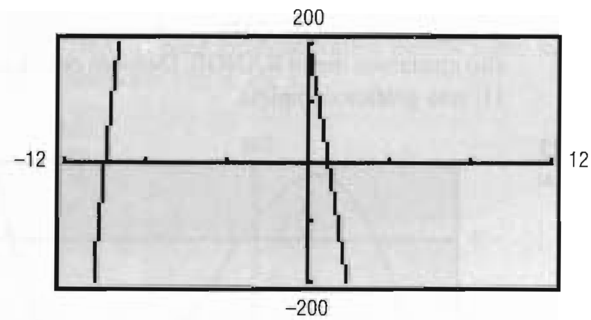
E J E M P L O 3 *Uso de ZOOM-OUT para obtener una gráfica completa*

Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 11x^2 - 190x + 200$ con los siguientes valores para la ventana:

Xmin:	−12
Xmax:	12
Xscl:	4
Ymin:	−200
Ymax:	200
Yscl:	100

Solución La figura 8 muestra la gráfica.

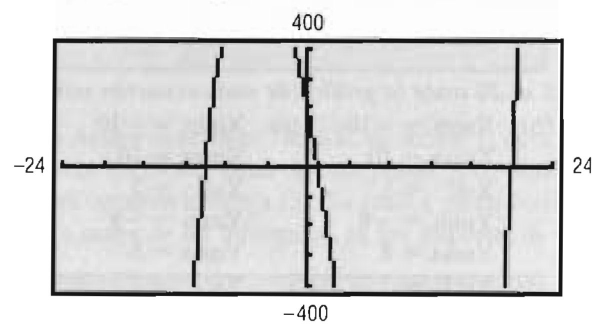
FIGURA 8



Observe lo irregular de la gráfica. Queda claro que la escala y no es adecuada puesto que la gráfica parece tener dos intersecciones con el eje x. Sin embargo, como veremos en el capítulo 5, un polinomio de grado 3 puede tener una o tres intersecciones con el eje x. Utilizamos esta propiedad de la ecuación para concluir que existe una tercera intersección con el eje x que no aparece en la figura. La gráfica no está completa pero aplicando la función ZOOM-OUT podemos obtenerla.

Después del primer ZOOM-OUT, obtenemos la figura 9.

FIGURA 9

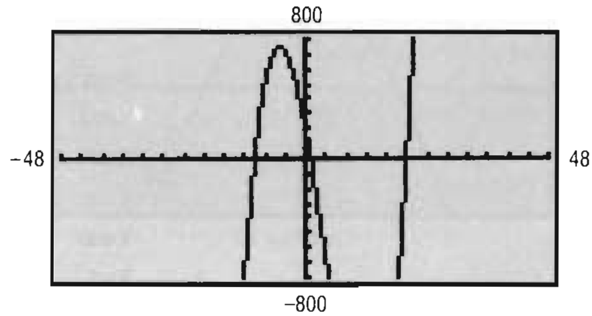


Observe que duplicamos los valores mínimo y máximo, mientras que la escala es la misma.* También observe que podemos ver las tres intersecciones con el

*En algunos dispositivos de graficación el factor por omisión para utilizar ZOOM-OUT es 4, lo que significa que los valores mínimo y máximo originales serán multiplicados por 4. Pero usted también puede establecer el factor que, además, no tiene que ser el mismo para x y y.

eje x. Sin embargo, aún no podemos ver las partes superior e inferior de la gráfica. De nuevo utilizamos ZOOM-OUT para obtener la gráfica de la figura 10.

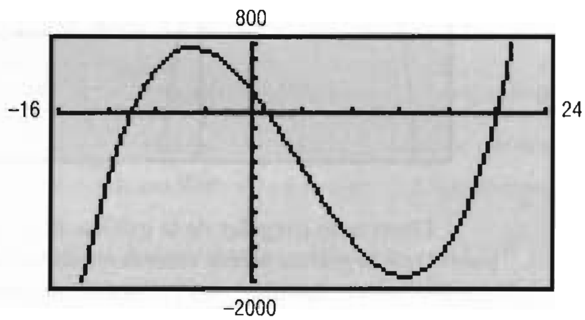
FIGURA 10



Ahora podemos ver casi toda la gráfica con excepción de la parte inferior. Por lo tanto, otro ZOOM-OUT posiblemente no nos mostrará la gráfica completa. Para ello ajustamos mejor RANGE. Después de experimentar un poco obtenemos la figura 11, una gráfica completa.

FIGURA 11
$y = x^3 - 11x^2 - 190x + 200$

RANGE
xMin = −16
xMax = 24
xScl = 4
yMin = −2000
yMax = 800
yScl = 200



■

B.2 Ejercicio B.2

En los problemas del 1 al 20 trace la gráfica de cada ecuación utilizando los siguientes valores de RANGE:

(a)		(b)		(c)		(d)	
	Xmin = −5		Xmin = −10		Xmin = −10		Xmin = −5
	Xmax = 5		Xmax = 10		Xmax = 10		Xmax = 5
	Xscl = 1		Xscl = 1		Xscl = 2		Xscl = 1
	Ymin = −4		Ymin = −8		Ymin = −8		Ymin = −20
	Ymax = 4		Ymax = 8		Ymax = 8		Ymax = 20
	Yscl = 1		Yscl = 1		Yscl = 2		Yscl = 5

1. $y = x + 2$ **2.** $y = x - 2$ **3.** $y = -x + 2$ **4.** $y = -x - 2$

5. $y = 2x + 2$ **6.** $y = 2x - 2$ **7.** $y = -2x + 2$ **8.** $y = -2x - 2$

9. $y = x^2 + 2$ **10.** $y = x^2 - 2$ **11.** $y = -x^2 + 2$ **12.** $y = -x^2 - 2$

13. $y = 2x^2 + 2$ **14.** $y = 2x^2 - 2$ **15.** $y = -2x^2 + 2$ **16.** $y = -2x^2 - 2$

17. $3x + 2y = 6$ **18.** $3x - 2y = 6$ **19.** $-3x + 2y = 6$ **20.** $-3x - 2y = 6$

En los problemas del 21 al 40 trace la gráfica de cada ecuación. Indique la ventana utilizada y trace la gráfica en papel.

21. $3x + 5y = 75$ **22.** $3x - 5y = 75$ **23.** $3x + 5y = -75$ **24.** $3x - 5y = -75$

25. $y = (x - 10)^2$ **26.** $y = (x + 10)^2$ **27.** $y = x^2 - 100$ **28.** $y = x^2 + 100$

29. $x^2 + y^2 = 100$	**30.** $x^2 + y^2 = 164$	**31.** $3x^2 + y^2 = 900$	**32.** $4x^2 + y^2 = 1600$
33. $x^2 + 3y^2 = 900$	**34.** $x^2 + 4y^2 = 1600$	**35.** $y = x^2 - 10x$	**36.** $y = x^2 + 10x$
37. $y = x^2 - 18x$	**38.** $y = x^2 + 18x$	**39.** $y = x^2 - 36x$	**40.** $y = x^2 + 36x$

B.3

Las funciones TRACE, ZOOM-IN y BOX

La función TRACE

La mayor parte de los dispositivos de graficación permiten moverse de un punto a otro en la gráfica, desplegando en la pantalla las coordenadas de tales puntos. Esta característica es la función TRACE.

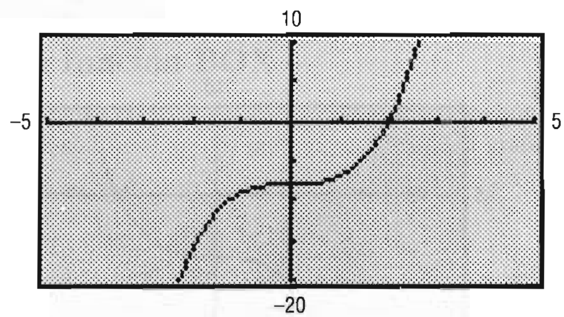
EJEMPLO 1 *Uso de la función TRACE para localizar intersecciones con los ejes*

Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 8$ con la ventana siguiente. Utilizar la función TRACE para localizar varios puntos sobre la gráfica. En particular, localizar la intersección con el eje x.

RANGE
xMin = −5
xMax = 5
xScl = 1
yMin = −20
yMax = 10
yScl = 5

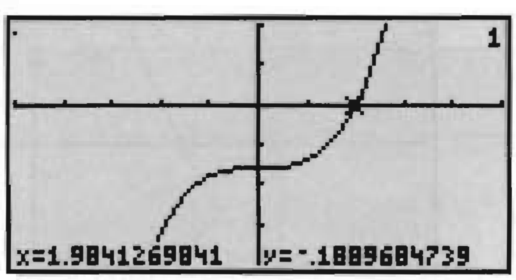
Solución Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 8$.

FIGURA 12



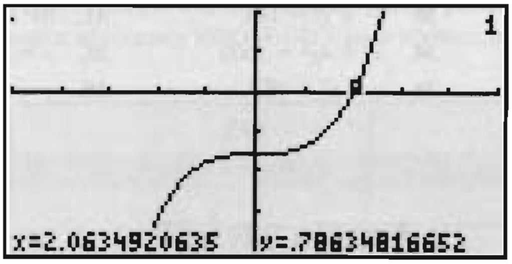
Active la función TRACE. Al mover el cursor a lo largo de la gráfica se desplegarán las coordenadas de cada punto. Justo antes de alcanzar el eje x, la pantalla se verá como en la figura 13. (Su gráfica puede verse un poco diferente a la mostrada aquí a causa de las diferencias en los dispositivos de graficación.)

FIGURA 13



En la figura 13, el valor negativo de la ordenada indica que todavía estamos debajo del eje x. La figura 14 muestra la siguiente posición del cursor.

FIGURA 14



El valor positivo de la ordenada indica que ahora estamos sobre el eje x. Esto significa que entre estos dos puntos la gráfica cruzó el eje x. La intersección con el eje x se encuentra entre 1.9841269841 y 2.0634920635. ■

La función ZOOM-IN

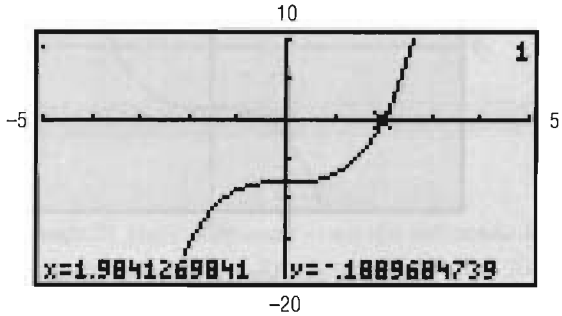
La mayor parte de los dispositivos de graficación tienen una función ZOOM-IN para proporcionar mejores aproximaciones.

EJEMPLO 2 *Uso de ZOOM-IN*

Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 8$ y utilizar la función ZOOM-IN para mejorar la aproximación del ejemplo 1 en la intersección con el eje x.

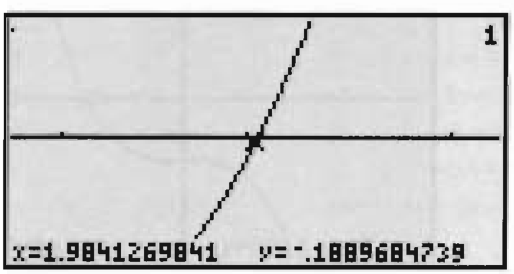
Solución Utilizamos la ventana del ejemplo 1; trazamos la gráfica de la ecuación y con TRACE logramos que el cursor se acerque a la intersección con el eje x. *Véase* la figura 15.

FIGURA 15



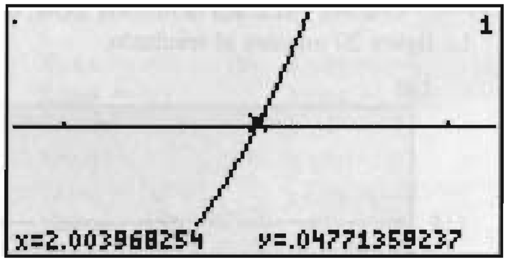
Activamos la función ZOOM-IN. La figura 16 muestra el resultado.

FIGURA 16



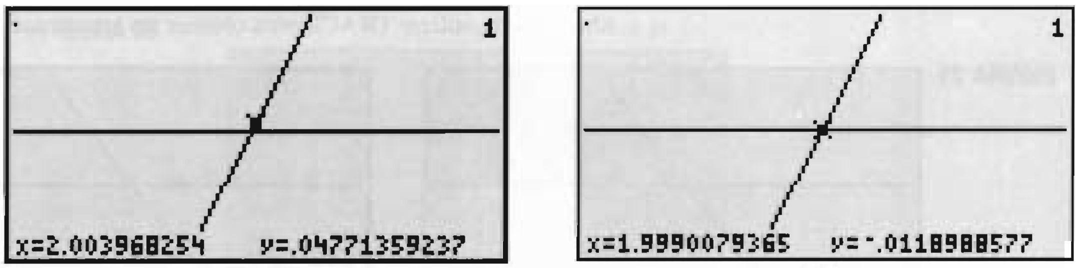
Mueva el cursor hacia arriba. La figura 17 muestra el resultado.

FIGURA 17



Observe la mejoría. Ahora sabemos que la intersección con el eje x se encuentra entre 1.9841269841 y 2.003968254. Realizamos otro ZOOM-IN. La figura 18(a) muestra el resultado. La figura 18(b) resulta de mover el cursor hacia abajo.

FIGURA 18



(a) (b)

Ahora sabemos que la intersección con el eje x se encuentra entre 1.9990079365 y 2.003968254. ■

La función BOX

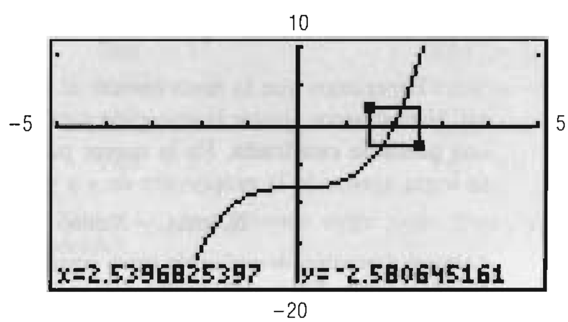
La mayor parte de los dispositivos de graficación tienen una función BOX que permite centrarse en una parte específica de la gráfica de una ecuación.

EJEMPLO 3 *Uso de la función BOX*

Trazar la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 8$ y utilizar la función BOX para mejorar la aproximación del ejemplo 1 en la intersección con el eje x.

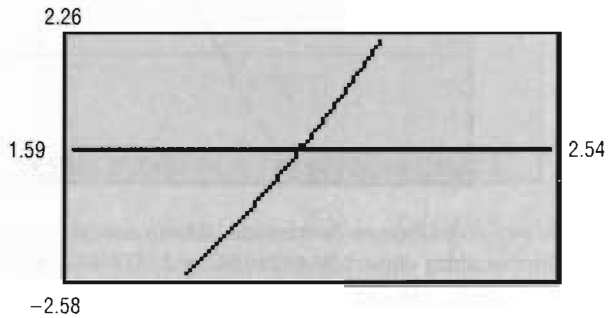
Solución Con la ventana del ejemplo 1, trace la gráfica de la ecuación. Active la función BOX. (En algunos dispositivos hay que colocar el cursor en una esquina del rectángulo y después trazar los lados del rectángulo hasta la esquina opuesta en diagonal.) *Véase* la figura 19.

FIGURA 19



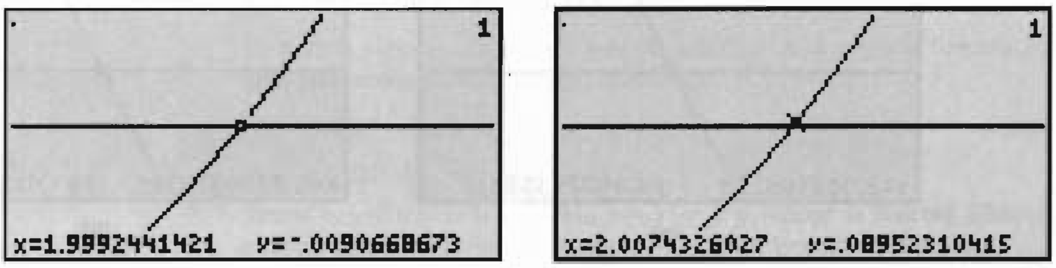
Una vez ejecutada la función BOX, el rectángulo se convierte en una ventana. La figura 20 muestra el resultado.

FIGURA 20



Ahora puede utilizar TRACE para obtener las aproximaciones de la figura 21.

FIGURA 21



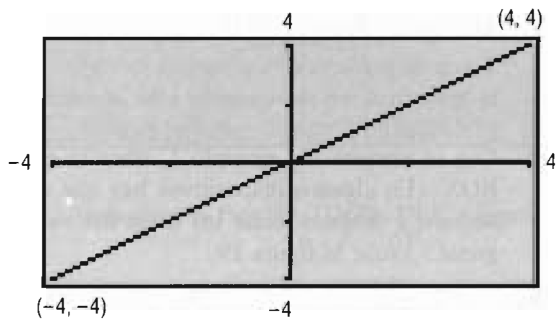
■

B.4 Pantallas cuadradas

Para obtener una visión no distorsionada de la pendiente, hay que utilizar la misma escala en cada eje. Sin embargo, la mayor parte de los dispositivos de graficación tienen una pantalla rectangular. Debido a esto, el uso del mismo rango para x y y produce una visión distorsionada. Por ejemplo, la figura 22 muestra la gráfica de la recta $y = x$ que une los puntos $(-4, -4)$ y $(4, 4)$.

FIGURA 22

Range
xMin = −4
xMax = 4
xScl = 2
yMin = −4
yMax = 4
yScl = 2



Esperamos que la recta bisecte al primer y tercer cuadrantes pero no resulta así. Necesitamos ajustar la selección para Xmin, Xmax, Ymin y Ymax para obtener una **pantalla cuadrada.** En la mayor parte de los dispositivos de graficación esto se logra ajustando la proporción de x a y a 3:2.* En otras palabras,

$$2(\text{Xmax} - \text{Xmin}) = 3(\text{Ymax} - \text{Ymin})$$

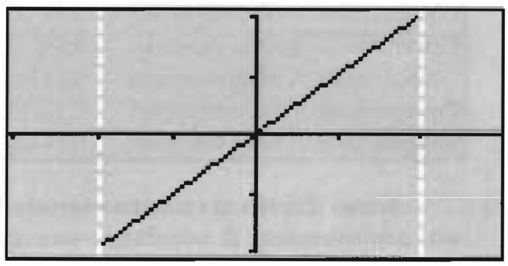
*Algunos dispositivos de graficación tienen integrada una función que despliega automáticamente una pantalla cuadrada. Por ejemplo, la TI85 tiene una función ZSQR que hace esto. Otros dispositivos requieren una proporción distinta a 3:2 para cuadrar la pantalla; la HP48G requiere una razón de 1:2 para hacerlo. Consulte su manual.

EJEMPLO 1 *Ejemplos de rangos que producen pantallas cuadradas*

(a)		(b)		(c)	
Xmin =	-3	Xmin =	-6	Xmin =	-6
Xmax =	3	Xmax =	6	Xmax =	6
Xscl =	1	Xscl =	2	Xscl =	2
Ymin =	-2	Ymin =	-4	Ymin =	-4
Ymax =	2	Ymax =	4	Ymax =	4
Yscl =	1	Yscl =	2	Yscl =	1

La figura 23 muestra la gráfica de la recta $y = x$ en una pantalla cuadrada desplegada a partir de los valores dados en el ejemplo 1(b). Observe que ahora la recta bisecta al primer y tercer cuadrantes. Compare esta ilustración con la figura 22.

FIGURA 23



B.4 Ejercicio B.4

En los problemas del 1 al 8 determine cuáles valores de RANGE producen una pantalla cuadrada.

1. Xmin = -3, Xmax = 3, Xscl = 1, Ymin = -2, Ymax = 2, Yscl = 1

2. Xmin = -5, Xmax = 5, Xscl = 1, Ymin = -4, Ymax = 4, Yscl = 1

3. Xmin = 0, Xmax = 9, Xscl = 3, Ymin = -2, Ymax = 4, Yscl = 2

4. Xmin = -6, Xmax = 6, Xscl = 2, Ymin = -4, Ymax = 4, Yscl = 1

5. Xmin = -6, Xmax = 6, Xscl = 1, Ymin = -2, Ymax = 2, Yscl = .5

6. Xmin = -6, Xmax = 6, Xscl = 1, Ymin = -4, Ymax = 4, Yscl = 1

7. Xmin = 0, Xmax = 9, Xscl = 1, Ymin = -2, Ymax = 4, Yscl = 1

8. Xmin = -6, Xmax = 6, Xscl = 2, Ymin = -4, Ymax = 4, Yscl = 2

9. Si Xmin = -4, Xmax = 8, y Xscl = 1, ¿cómo debemos elegir Ymin, Ymax, y Yscl de modo que la pantalla contenga al punto (4, 8) y sea cuadrada?

10. Si Xmin = -6, Xmax = 12, y Xscl = 2, ¿cómo debemos elegir Ymin, Ymax, y Yscl de modo que la ventana contenga al punto (4, 8) y sea cuadrada?

B.5 Aproximaciones

En la práctica, al resolver ecuaciones, es raro que obtengamos soluciones exactas. Por lo general, lo mejor que podemos esperar es una solución aproximada. En esta sección analizaremos la forma de utilizar un dispositivo de graficación para aproximar soluciones de ecuaciones. Desarrollaremos un algoritmo en el que cada aplicación sucesiva del mismo produce una cifra decimal adicional de exactitud.

Comencemos con un ejemplo que muestra el significado de escribir un número "correcto hasta n cifras decimales".

EJEMPLO 1 *Escritura de un número correcto hasta n cifras decimales*

ESCRIBIR EL NÚMERO	1/7	$\sqrt{2}$	π
Correcto hasta 1 cifra decimal	0.1	1.4	3.1
Correcto hasta 2 cifras decimales	0.14	1.41	3.14
Correcto hasta 3 cifras decimales	0.142	1.414	3.141
Correcto hasta 4 cifras decimales	0.1428	1.4142	3.1415
Correcto hasta 5 cifras decimales	0.14285	1.41421	3.14159
Correcto hasta 6 cifras decimales	0.142857	1.414213	3.141592 ■

Como muestra el ejemplo, **correcto hasta *n* cifras decimales** indica el decimal que se obtiene al interrumpir una secuencia numérica después de la n-ésima cifra decimal.

El siguiente ejemplo muestra los pasos a seguir para aproximar la solución de una ecuación mediante un dispositivo de graficación.

EJEMPLO 2 *Uso de un dispositivo de graficación para aproximar soluciones de una ecuación*

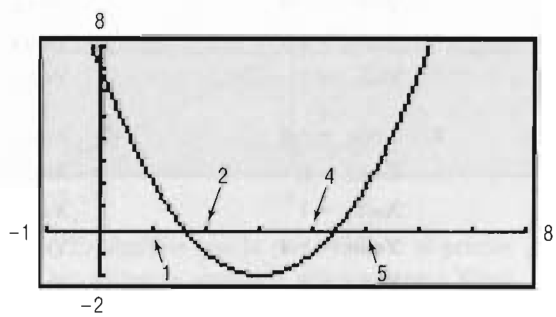
Determinar la menor de las dos soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$. Expresar la respuesta correcta hasta dos cifras decimales.

Solución Las soluciones de la ecuación $x^2 - 6x + 7 = 0$ son iguales a las intersecciones del eje x con la función $f(x) = x^2 - 6x + 7$. Primero trazamos la gráfica de la función f con una escala de 1 en cada eje.

La figura 24 muestra la gráfica

FIGURA 24

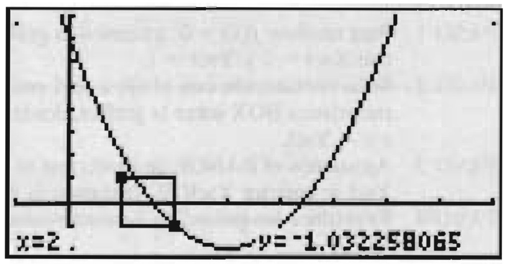
Range
xMin = −1
xMax = 8
xScl = 1
yMin = −2
yMax = 8
yScl = 1



La menor de las dos intersecciones con el eje x (soluciones de la ecuación) está entre 1 y 2. (Recuerde que Xscl = 1). Así, la menor de las soluciones a la ecuación, correcta hasta 0 cifras decimales, es $x = 1$.

A continuación, utilizamos la característica BOX sobre la gráfica, de $x = 1$ a $x = 2$ y de $y = -1$ o $y = 1$. *Véase* la figura 25.

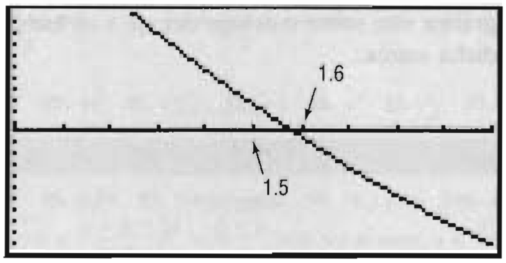
FIGURA 25



Ajustamos el parámetro RANGE de modo que Xscl = 0.1 y Yscl = 0.1. Trazamos de nuevo la gráfica de *f*. *Véase* la figura 26.

FIGURA 26

Range
xMin = 1
xMax = 2
xScl = .1
yMin = −1.03225806452
yMax = 1.06451612903
yScl = .1



La intersección con el eje x está entre 1.5 y 1.6. (Recuerde que la caja era de $x = 1$ a $x = 2$ y Xscl = 0.1). Así, la menor de las soluciones a la ecuación, correcta hasta 1 cifra decimal, es $x = 1.5$.

A continuación, utilizamos de nuevo la característica BOX, de $x = 1.5$ a $x = 1.6$ y de $y = -0.1$ a $y = 0.1$. *Véase* la figura 27. Ajustamos el parámetro RANGE de modo que Xscl = 0.01 y Yscl = 0.01 y trazamos la gráfica de *f*. *Véase* la figura 28.

FIGURA 27

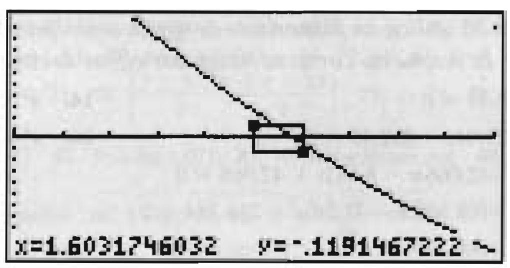
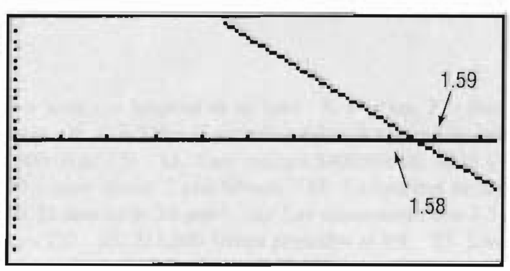


FIGURA 28

Range
xMin = 1.5
xMax = 1.60317460318
xScl = .01
yMin = .119146722168
yMax = .11758584807
yScl = .01



La intersección con el eje x está entre 1.58 y 1.59. Recuerde que la caja era de $x = 1.5$ a $x = 1.6$ y Xscl = 0.01. Así, la menor de las soluciones a la ecuación, correcta hasta 2 cifras decimales, es $x = 1.58$. ■

A continuación describimos los pasos a seguir para aproximar soluciones de ecuaciones, correctas hasta el número de cifras decimales deseado.

PASO 1 Para resolver $f(x) = 0$, trazamos la gráfica de la función $y = f(x)$ en una ventana, con Xscl = 1 y Yscl = 1.

PASO 2 Si la intersección con el eje x está entre $x = c$ y $x = c +$ Xscl, utilizamos la característica BOX sobre la gráfica, desde $x = c$ hasta $x = c +$ Xscl y de $y = -$Yscl a $y =$ Yscl.

PASO 3 Ajustamos el RANGE de modo que el nuevo Xscl = anterior Xscl/10 y el nuevo Yscl = anterior Yscl/10. Trazamos la gráfica de f.

PASO 4 Repetimos los pasos 2 y 3 hasta obtener la exactitud deseada

Si la intersección con el eje x que intentamos determinar parece caer en una marca sobre el eje, entonces debería evaluar la función en esa marca. Si el valor es cero, entonces existe una solución exacta. Si el valor no es cero, usted sabrá si la gráfica está sobre o debajo del eje x en ese punto observando el signo del valor en dicha marca.

B.5

Ejercicio B.5

En los problemas del 1 al 6 escriba cada expresión en forma decimal redondeada a tres cifras decimales.

1. $\frac{3}{7}$ **2.** $\frac{2}{11}$ **3.** $\sqrt{5}$ **4.** $\sqrt{6}$ **5.** $\sqrt[3]{2}$ **6.** $\sqrt[3]{3}$

En los problemas del 7 al 12 utilice un dispositivo de graficación para aproximar la menor de las dos soluciones de cada ecuación. Exprese la respuesta correcta hasta dos cifras decimales.

7. $x^2 + 4x + 2 = 0$ **8.** $x^2 + 4x - 3 = 0$ **9.** $2x^2 + 4x + 1 = 0$

10. $3x^2 + 5x + 1 = 0$ **11.** $2x^2 - 3x - 1 = 0$ **12.** $2x^2 - 4x - 1 = 0$

En los problemas del 13 al 20 utilice un dispositivo de graficación para aproximar las soluciones ***positivas*** *de cada ecuación. Exprese la respuesta correcta hasta dos cifras decimales.*

13. $x^3 + 3.2x^2 - 16.83x - 5.31 = 0$

14. $x^3 + 3.2x^2 - 7.25x - 6.3 = 0$

15. $x^4 - 1.4x^3 - 33.71x^2 + 23.94x + 292.41 = 0$

16. $x^4 + 1.2x^3 - 7.46x^2 - 4.692x + 15.2881 = 0$

17. $\pi x^3 - (8.88\pi + 1)x^2 - (42.066\pi - 8.88)x + 42.066 = 0$

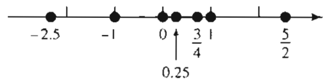
18. $\pi x^3 - (5.63\pi + 2)x^2 - (108.392\pi - 11.26)x + 216.784 = 0$

19. $x^3 + 19.5x^2 - 1021x + 1000.5 = 0$

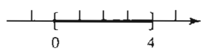
20. $x^3 + 14.2x^2 - 4.8x - 12.4 = 0$

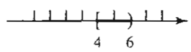
RESPUESTAS

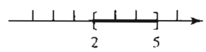
CAPÍTULO 1 *Ejercicio 1.1*

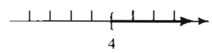
1. $>$ **3.** $>$ **5.** $>$ **7.** $=$ **9.** $<$ **11.** 

13. $x > 0$ **15.** $x < 2$ **17.** $x \leq 1$ **19.** $2 < x < 5$

21. $[0, 4]$ 

23. $[4, 6)$ 

25. $2 \leq x \leq 5$ 

27. $x \geq 4$ o $4 \leq x < \infty$ 

29. 1 **31.** 5 **33.** 1

35. $\frac{1}{16}$ **37.** $\frac{4}{9}$ **39.** $\frac{1}{9}$ **41.** $\frac{9}{4}$ **43.** 324 **45.** 27 **47.** 16 **49.** $4\sqrt{2}$ **51.** $-\frac{2}{3}$ **53.** y^2 **55.** $\frac{y}{x^2}$ **57.** $\frac{1}{x^3y}$ **59.** $\frac{25y^2}{16x^2}$ **61.** $\frac{1}{x^3y^3z^2}$ **63.** $\frac{-8x^3}{9yz^2}$
65. $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$ **67.** $\frac{16x^2}{9y^2}$ **69.** 13 **71.** 26 **73.** 25 **75.** 4 **77.** 24 **79.** Sí; 5 **81.** No es un triángulo rectángulo **83.** Sí; 25 **85.** 72.42
87. 30.66 **89.** 111.17 **91.** 11.03 **93.** -0.49 **95.** 0.59 **97.** 9.4 pulgadas **99.** 58.3 pies **101.** 46.7 millas **103.** 3 millas

105. $a \leq b, c > 0; a - b \leq 0$
$(a - b)c \leq 0(c)$
$ac - bc \leq 0$
$ac \leq bc$

107. $\frac{a + b}{2} - a = \frac{a + b - 2a}{2} = \frac{b - a}{2} > 0$; por lo tanto, $a < \frac{a + b}{2}$
$b - \frac{a + b}{2} = \frac{2b - a - b}{2} = \frac{b - a}{2} > 0$; en consecuencia, $b > \frac{a + b}{2}$

109. No; No **111.** 1

113. 3.15 o 3.16
115. La luz puede ser vista en el horizonte a 23.3 millas de distancia. Los aviones volando a 10,000 pies pueden verla a 99 millas. El barco necesitaría ser de 185.8 pies de altura para que la información fuera correcta.

Ejercicio 1.2

1. -1 **3.** -18 **5.** -3 **7.** -16 **9.** 0.5 **11.** 2 **13.** 2 **15.** -1 **17.** 3 **19.** No hay solución real **21.** $\{0, 9\}$ **23.** $\{0, 9\}$ **25.** No hay solución real
27. 2 **29.** 21 **31.** $\{-2, 2\}$ **33.** $-\frac{20}{39}$ **35.** 6 **37.** $\{-3, 3\}$ **39.** $\{-4, 1\}$ **41.** $\{-1, \frac{3}{2}\}$ **43.** $\{-4, 4\}$ **45.** 2 **47.** $\{-12, 12\}$ **49.** $\{-\frac{36}{5}, \frac{24}{5}\}$
51. No hay solución real **53.** $\{-2, 2\}$ **55.** $\{-1, 3\}$ **57.** $\{-2, -1, 0, 1\}$ **59.** $\{0, 4\}$ **61.** $\{-6, 2\}$ **63.** $\{-\frac{1}{2}, 3\}$ **65.** $\{3, 4\}$ **67.** $\frac{3}{2}$
69. $\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$ **71.** $\{-\frac{3}{4}, 2\}$ **73.** $\{2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\}$ **75.** $\left\{\frac{5 - \sqrt{29}}{2}, \frac{5 + \sqrt{29}}{2}\right\}$ **77.** $\{1, \frac{3}{2}\}$ **79.** No hay solución real
81. $\left\{\frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right\}$ **83.** $\{0.59, 3.41\}$ **85.** $\{-2.80, 1.07\}$ **87.** No hay solución real **89.** Solución real repetida
91. Dos soluciones reales distintas **93.** **(a)** 6 segundos **(b)** 5 segundos **95.** $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$ **97.** $k = -\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2}$
99. Las soluciones de $ax^2 - bx + c = 0$ son $\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. **101.** 36

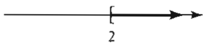
Ejercicio 1.3

1. $A = \pi r^2$; r = radio, A = área **3.** $A = s^2$; A = área, s = longitud de un lado **5.** $F = ma$; F = fuerza, m = masa, a = aceleración
7. $T = Fd$; T = Trabajo, F = fuerza, d = distancia **9.** $C = 150x$; C = costo total, x = número de máquinas lavaplatos
11. \$11,000.00 serán invertidos en bonos y \$9,000.00 en CD **13.** Katy recibirá \$400,000.00, Mike \$300,000.00 y Dan \$200,00.00
15. El salario por hora regular es \$8.50 **17.** El equipo obtuvo 5 *touchdowns* **19.** La longitud es de 19 pies; el ancho de 11 pies
21. **(a)** Las dimensiones son 10 por 5 pies **(b)** El área es de 50 pies^2 **(c)** Las dimensiones son 7.5 por 7.5 pies **(d)** El área es de 56.25 pies^2
23. Invertir \$31,250.00 en bonos y \$18,750.00 en CD **25.** \$11,600 fueron prestados al 8% **27.** Las dimensiones son 11 por 13 pies
29. Las dimensiones son 5 por 8 m **31.** Las dimensiones de la hoja de metal deben ser 4 por 4 pies
33. **(a)** La bola golpea el suelo después de 6 segundos **(b)** La bola pasa por la parte superior del edificio, en su viaje de regreso, después de 5 segundos
35. El precio original fue de \$147,058.82; la compra del modelo ahorra \$22,058.82 **37.** La librería pagó \$44.80
39. Trabajando juntos, toma 12 minutos **41.** Collen necesita obtener una calificación de 85
43. El apoyador defensivo atrapa al ala cerrada en la yarda 45 **45.** El borde tendrá un ancho de 2.56 pies
47. Las dimensiones de la barra de dulce reducida son 11.55 por 6.55 por 3 cm **49.** El borde será de 2.71 pies de ancho
51. La corriente es de 2.286 millas por hora **53.** Miguel pasa a Daniel a 1/3 de milla del punto de arranque, 2 minutos después que inició (Miguel) la carrera

55. La embarcación de rescate alcanza al barco en 2 horas **57.** La bomba auxiliar inicia a las 9:45 a.m. **59.** La tina se llenará en 1 hora
61. Lo más que puede invertir en los CD es $66,667.00 **63.** La velocidad promedio es de 49.5 millas por hora
65. Poner el precio original en $40.00. Con un 50% de descuento no habrá ganancia.

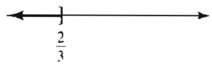
Ejercicio 1.4

1. $\{x|x \geq 2\}$ o $[2, \infty)$

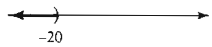


3. $\{x|x > -7\}$ o $(-7, \infty)$

5. $\{x|x \leq \frac{2}{3}\}$ o $(-\infty, \frac{2}{3}]$

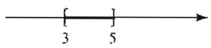


7. $\{x|x < -20\}$ o $(-\infty, -20)$

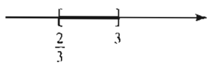


9. $\{x|x \geq \frac{4}{3}\}$ o $[\frac{4}{3}, \infty)$

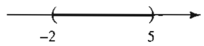
11. $\{x|3 \leq x \leq 5\}$ o $[3, 5]$



13. $\{x|\frac{2}{3} \leq x \leq 3\}$ o $[\frac{2}{3}, 3]$

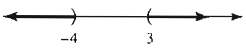


15. $\{x|-2 < x < 5\}$; $(-2, 5)$

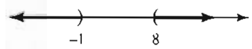


17. $\{x|-3 < x < 3\}$; $(-3, 3)$

19. $\{x|-\infty < x < -4$ o $3 < x < \infty\}$; $(-\infty, -4)$ o $(3, \infty)$

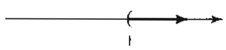


21. $\{x|-\infty < x < -1$ o $8 < x < \infty\}$; $(-\infty, -1)$ o $(8, \infty)$

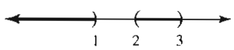


23. No hay solución real

25. $\{x|1 < x < \infty\}$; $(1, \infty)$

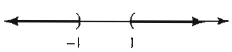


27. $\{x|-\infty < x < 1$ o $2 < x < 3\})$; $(-\infty, 1)$ o $(2, 3)$

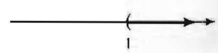


29. $\{x|-1 < x < 0$ o $3 < x < \infty\})$; $(-1, 0)$ o $(3, -\infty)$

31. $\{x|-\infty < x < -1$ o $1 < x < \infty\}$; $(-\infty, -1)$ o $(1, \infty)$

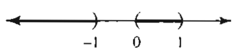


33. $\{x|1 < x < \infty\})$; $(1, \infty)$

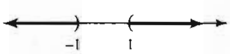


35. $\{x|-\infty < x < -1$ o $1 < x < \infty\}$; $(-\infty, -1)$ o $(1, \infty)$

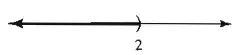
37. $\{x|-\infty < x < -1$ o $0 < x < 1\}$; $(-\infty, 1)$ o $(0, 1)$



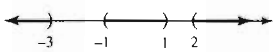
39. $\{x| -\infty < x < -1$ o $1 < x < \infty\}$; $(-\infty, -1)$ o $(1, \infty)$



41. $\{x|-\infty < x < 2\}$; $(-\infty, 2)$

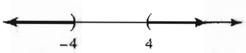


43. $\{x|-\infty < x < -3$ o $-1 < x < 1$ o $2 < x < \infty\}$; $(-\infty, -3)$ o $(-1, 1)$ o $(2, \infty)$

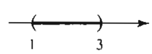


45. $\{x|-4 < x < 4\}$; $(-4, 4)$

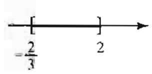
47. $\{x|-\infty < x < -4$ o $4 < x < \infty\}$; $(-\infty, -4)$ o $(4, \infty)$



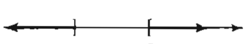
49. $\{x|1 < x < 3\}$; $(1, 3)$



51. $\{t|-\frac{2}{3} \leq t \leq 2\}$; $[-\frac{2}{3}, 2]$



53. $\{x|-\infty < x \leq 1$ o $5 \leq x < \infty\}$; $(-\infty, 1]$ o $[5, \infty)$



55. $\{x|-1 < x < \frac{3}{2}\}$; $(-1, \frac{3}{2})$

57. $|x - 2| < \frac{1}{2}$; $\{x|\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}\}$

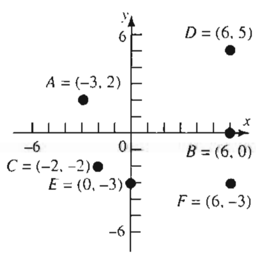
59. $|x+3|>2$; $\{x|-\infty<x<-5 \text{ o } -1<x<\infty\}$ **61.** $|x-98.6|\geq 1.5$; $x\leq 97.1$°F o $x\geq 100.1$°F
63. Desde 675.48 kw/h hasta 2500.88 kw/h, inclusive **65.** Desde \$7457.63 hasta \$7857.14, inclusive **67.** La quinta calificación debe ser ≥ 74
69. Para t entre 2 y 3 segundos, $2<t<3$. **71.** Deben venderse entre 10 y 50 relojes, $10\leq x\leq 50$
73. $x^2-a=(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})<0$; $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$ **75.** $\{x|-1<x<1\}$; $(-1, 1)$ **77.** $\{x|-\infty<x\leq -3 \text{ o } 3\leq x<\infty\}$; $(-\infty, -3]$ o $[3, \infty)$
79. $\{x|-4\leq x\leq 4\}$; $[-4, 4]$ **81.** $\{x|-\infty<x<-2 \text{ o } 2<x<\infty\}$; $(-\infty, -2)$ o $(2, \infty)$ **83.** $-2<k<2$

Ejercicio 1.5

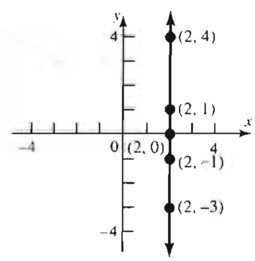
1. $8+5i$ **3.** $-7+6i$ **5.** $-6-11i$ **7.** $6-18i$ **9.** $6+4i$ **11.** $10-5i$ **13.** 37 **15.** $\frac{6}{5}+\frac{8}{5}i$ **17.** $1-2i$ **19.** $\frac{5}{2}-\frac{7}{2}i$ **21.** $-\frac{1}{2}+(\sqrt{3}/2)i$
23. $2i$ **25.** $-i$ **27.** i **29.** -6 **31.** $-10i$ **33.** $-2+2i$ **35.** 0 **37.** 0 **39.** $2i$ **41.** $5i$ **43.** $5i$ **45.** $\{-2i, 2i\}$ **47.** $\{-4, 4\}$
49. $\{3-2i, 3+2i\}$ **51.** $\{3-i, 3+i\}$ **53.** $\{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i, \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\}$ **55.** $\{-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i, -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\}$ **57.** $\left\{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
59. $\{2, -1-\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i\}$ **61.** $\{-2, 2, -2i, 2i\}$ **63.** $\{-3i, -2i, 2i, 3i\}$ **65.** Dos soluciones complejas **67.** Dos soluciones reales y diferentes
69. Una solución real repetida **71.** $2-3i$ **73.** 6 **75.** 25 **77.** $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$; $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$
79. $\overline{z+w}=\overline{(a+bi)+(c+di)}=\overline{(a+c)+(b+d)i}=(a+c)-(b+d)i=(a-bi)+(c-di)=\bar{z}+\bar{w}$

Ejercicio 1.6

1. (a) II cuadrante
(b) Parte positiva del eje-x
(c) III cuadrante
(d) I cuadrante
(e) Parte negativa del eje-y
(f) IV cuadrante

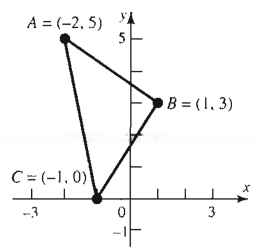


3. Los puntos estarán sobre la recta vertical situada 2 unidades a la derecha del eje-y.

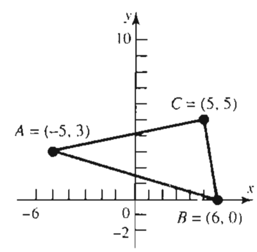


5. $\sqrt{5}$; $(1, \frac{1}{2})$ **7.** $2\sqrt{2}$; $(0, 2)$ **9.** 5; $(3, -\frac{3}{2})$ **11.** $\sqrt{85}$; $(\frac{3}{2}, 1)$ **13.** $2\sqrt{5}$; $(5, -1)$ **15.** 2.625; $(1.05, 0.7)$ **17.** $\sqrt{a^2+b^2}$; $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

19. $d(A, B)=\sqrt{13}$
$d(B, C)=\sqrt{13}$
$d(A, C)=\sqrt{26}$
$(\sqrt{13})^2+(\sqrt{13})^2=(\sqrt{26})^2$
área $=\frac{13}{2}$ unidades cuadradas

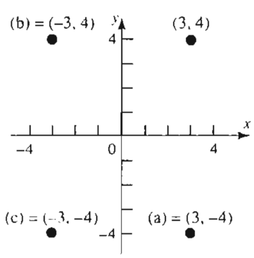


21. $d(A, B)=\sqrt{130}$
$d(B, C)=\sqrt{26}$
$d(A, C)=\sqrt{104}$
$(\sqrt{26})^2+(\sqrt{104})^2=(\sqrt{130})^2$
área = 26 unidades cuadradas

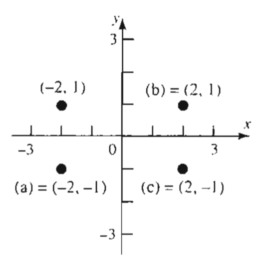


23. $(2, -4)$, $(2, 2)$ **25.** $(-2, 0)$, $(6, 0)$

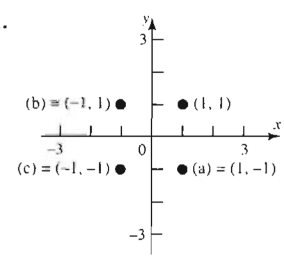
27.



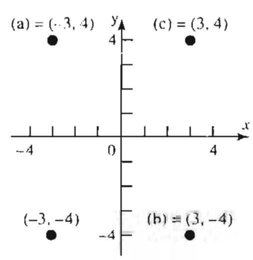
29.



31.



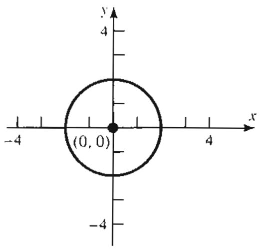
33.



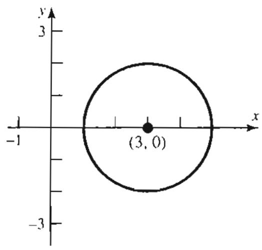
35. (a) $(-1, 0)$, $(1, 0)$ (b) eje x, eje y, origen **37.** (a) $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, 1)$ (b) eje x **39.** (a) $(0, 0)$ (b) eje y
41. (a) $(-1.5, 0)$, $(0, -2)$, $(1.5, 0)$ (b) eje y **43.** (a) ninguno (b) origen **45.** $x^2+(y-2)^2=4$; $x^2+y^2-4y=0$

47. $(x-4)^2+(y+3)^2=25$; $x^2+y^2-8x+6y=0$ **49.** $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2-4=0$ **51.** Centro $(2, 1)$; radio 2; $(x-2)^2+(y-1)^2=4$
53. Centro $(\frac{5}{2}, 2)$; radio $\frac{3}{2}$; $(x-\frac{5}{2})^2+(y-2)^2=\frac{9}{4}$ **55.** (c) **57.** (b)

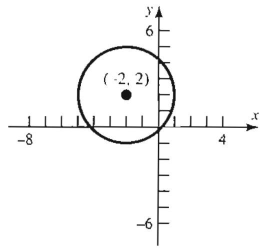
59. $r=2$;
$(h, k)=(0, 0)$



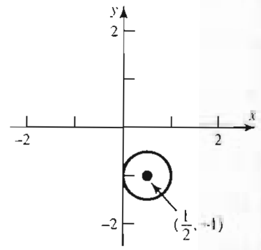
61. $r=2$;
$(h, k)=(3, 0)$



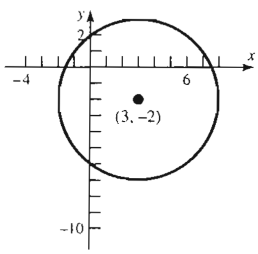
63. $r=3$;
$(h, k)=(-2, 2)$



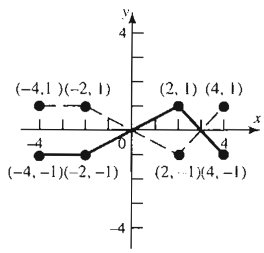
65. $r=\frac{1}{2}$;
$(h, k)=(\frac{1}{2}, -1)$



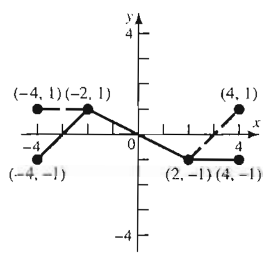
67. $r=5$;
$(h, k)=(3, -2)$



69.



71.

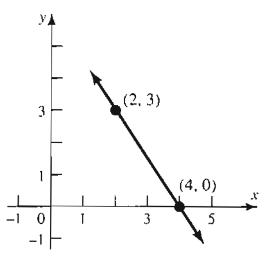


73. (0, 0); simétrica con respecto al eje y **75.** (0, 0); simétrica con respecto al origen
77. (0, 9), (3, 0), $(-3, 0)$; simétrica con respecto al eje-y
79. $(-3, 0)$, (3, 0), $(0, -2)$, (0, 2); simétrica con respecto al eje-x, al eje-y y al origen **81.** $(0, -27)$, (3, 0); no hay simetría
83. $(0, -4)$, (4, 0), $(-1, 0)$; no hay simetría **85.** (0, 0); simétrica con respecto al origen
87. **(a)** (90, 0), (90, 90), (0, 90) **(b)** 232.4 pies **(c)** 366.2 pies **89.** $d=50t$ **91.** $x^2+y^2+2x+4y-4168.16=0$

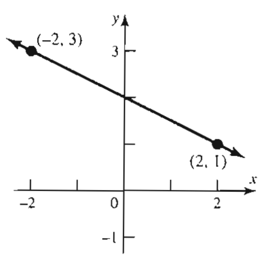
Ejercicio 1.7

1. $\frac{1}{2}$ **3.** -1

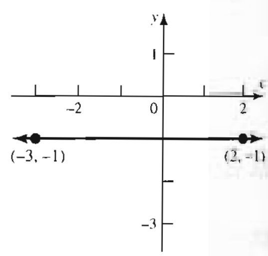
5. Pendiente $=-\frac{3}{2}$



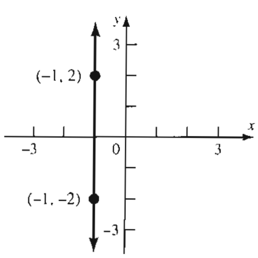
7. Pendiente $=-\frac{1}{2}$



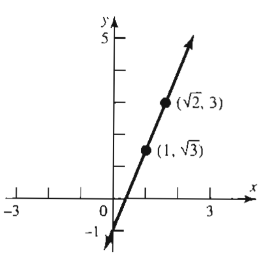
9. Pendiente $=0$



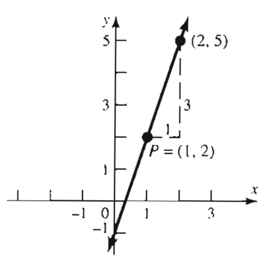
11. Pendiente indefinida



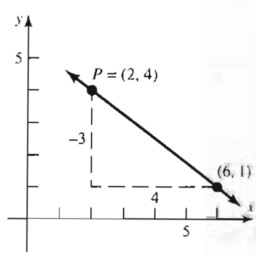
13. Pendiente $=\dfrac{\sqrt{3}-3}{1-\sqrt{2}}\approx 3.06$



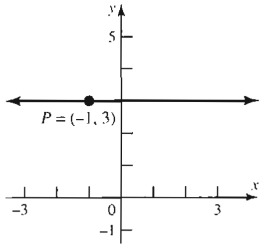
15.



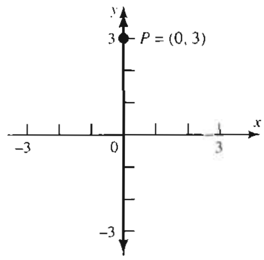
17.



19.

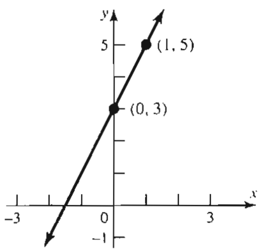


21.

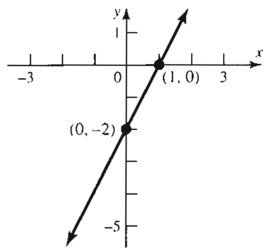


23. $x - 2y = 0$ o $y = \frac{1}{2}x$ **25.** $x + y - 2 = 0$ o $y = -x + 2$ **27.** $2x - y - 3 = 0$ o $y = 2x - 3$ **29.** $x + 2y - 5 = 0$ o $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
31. $3x - y + 9 = 0$ o $y = 3x + 9$ **33.** $2x + 3y + 1 = 0$ o $y = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ **35.** $x - 2y + 5 = 0$ o $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ **37.** $3x + y - 3 = 0$ o $y = -3x + 3$
39. $x - 2y - 2 = 0$ o $y = \frac{1}{2}x - 1$ **41.** $x - 2 = 0$; no hay forma pendiente-intersección **43.** $2x - y + 4 = 0$ o $y = 2x + 4$ **45.** $2x - y = 0$ o $y = 2x$
47. $x - 4 = 0$ no hay forma intersección con el eje-y **49.** $2x + y = 0$ o $y = -2x$ **51.** $x - 2y + 3 = 0$ o $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ **53.** $y - 4 = 0$ o $y = 4$

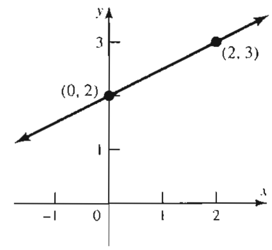
55. Pendiente = 2; intersección-y = 3



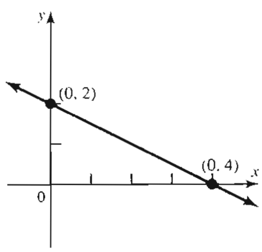
57. $y = 2x - 2$; Pendiente = 2; intersección-y = −2



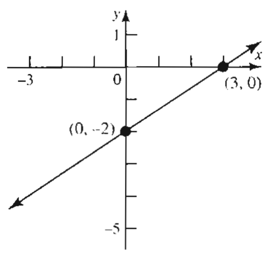
59. Pendiente = $\frac{1}{2}$; intersección-y = 2



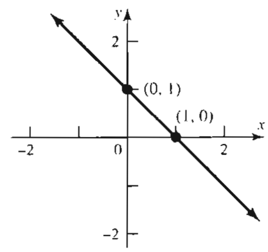
61. $y = -\frac{1}{2}x + 2$; Pendiente = $-\frac{1}{2}$; intersección-y = 2



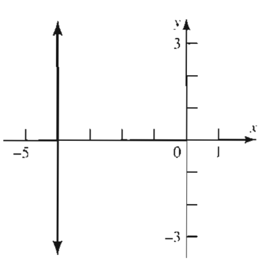
63. $y = \frac{2}{3}x - 2$; Pendiente = $\frac{2}{3}$; intersección-y = −2



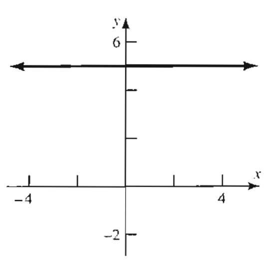
65. $y = -x + 1$; Pendiente = −1; intersección-y = 1



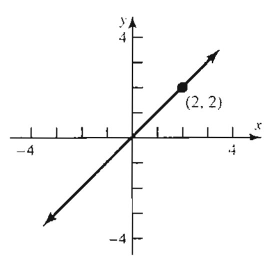
67. Pendiente indefinida; no hay intersección con el eje-y



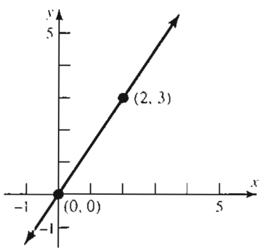
69. Pendiente = 0; intersección-y = 5



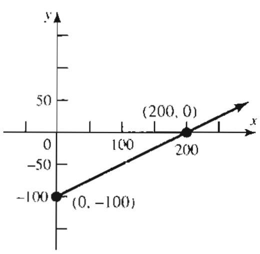
71. $y = x$; Pendiente = 1; intersección-y = 0

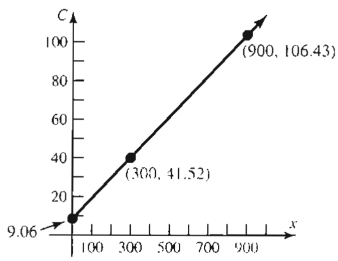


73. $y = \frac{3}{2}x$; Pendiente $= \frac{3}{2}$; intersección-y = 0



75. $y = 0$ **77.** (b) **79.** (d) **81.** $x - y + 2 = 0$ o $y = x + 2$ **83.** $x + 3y - 3 = 0$ o $y = -\frac{1}{3}x + 1$ **85.** °C $= \frac{5}{9}$(°F − 32); aprox. 21°C
87. (a) $P = 0.5x - 100$ (b) \$400 (c) \$2400 **89.** $C = 0.10819x + 9.06$; para 300 kWh, $C =$ \$41.52; para 900 kWh, $C =$ \$106.43



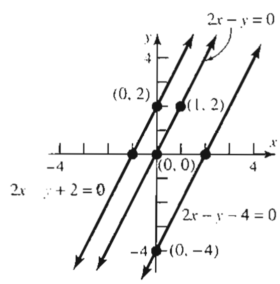


91. (a)
$$x^2 + (mx + b)^2 = r^2$$
$$(1 + m^2)x^2 + 2mbx + b^2 - r^2 = 0$$
Una solución si, y sólo si, el discriminante = 0
$$(2mb)^2 - 4(1 + m^2)(b^2 - r^2) = 0$$
$$-4b^2 + 4r^2 + 4m^2r^2 = 0$$
$$r^2(1 + m^2) = b^2$$

(b)
$$x = \frac{-2mb}{2(1 + m^2)} = \frac{-2mb}{2b^2/r^2} = \frac{-r^2m}{b}$$
$$y = m\left(\frac{-r^2m}{b}\right) + b = \frac{-r^2m^2}{b} + b$$
$$= \frac{-r^2m^2 + b^2}{b} = \frac{r^2}{b}$$

(c) Pendiente de la recta tangente = m
Pendiente de la recta que une el centro con el punto de tangencia $= \dfrac{r^2/b}{-r^2m/b} = -\dfrac{1}{m}$

93. $\sqrt{2}x + 4y - 11\sqrt{2} + 12 = 0$ **95.** $x + 5y + 13 = 0$ **97.** Todas tienen la misma pendiente, 2; las rectas son paralelas. **99.** $y = 2$



Complete en los espacios

1. equivalente **2.** identidad **3.** Discriminante; negativo **4.** $-a$ **5.** $|x|$ **6.** negativo **7.** real; imaginario; unidad imaginaria **8.** eje-y
9. círculo; radio; centro **10.** indefinida; 0 **11.** $m_1 = m_2$; $m_1 \cdot m_2 = -1$

Cierto o falso

1. C **2.** C **3.** F **4.** C **5.** F **6.** C **7.** (a) C (b) F (c) C **8.** C **9.** F **10.** F **11.** C

Ejercicios de revisión

1. -9 **3.** 6 **5.** $\frac{1}{5}$ **7.** 5 **9.** No hay solución real **11.** $\frac{11}{8}$ **13.** $\{-2, \frac{3}{2}\}$ **15.** $\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{4}, \frac{1+\sqrt{13}}{4}\right\}$ **17.** $\{-3, 3\}$ **19.** No hay solución real

21. $\{-1, 4\}$ **23.** $\left\{\frac{-9b}{5a}, \frac{2b}{a}\right\}$ **25.** $\{x|4 \leq x < \infty\}$ **27.** $\{x|-\frac{31}{2} \leq x \leq \frac{33}{2}\}$ **29.** $\{x|-23 < x < -7\}$ **31.** $\{x|-4 < x < \frac{3}{2}\}$

33. $\{x|-2 < x \leq 4\}$ **35.** $\{x|-\infty < x < 1$ o $\frac{5}{4} < x < \infty\}$ **37.** $\{x|1 < x < 2$ o $3 < x < \infty\}$

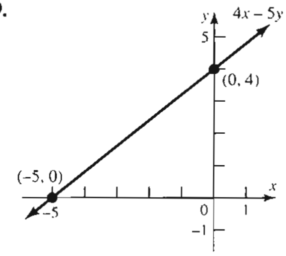
39. $\{x|-\infty < x < -4$ o $2 < x < 4$ o $6 < x < \infty\}$ **41.** $\{x|-\frac{3}{2} < x < -\frac{7}{6}\}$ **43.** $\{x|-\infty < x \leq -1$ o $6 \leq x < \infty\}$

45. $\left\{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$ **47.** $\left\{\frac{-1-\sqrt{17}}{4}, \frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\}$ **49.** $\left\{\frac{1-\sqrt{11}i}{2}, \frac{1+\sqrt{11}i}{2}\right\}$ **51.** $\left\{\frac{1-\sqrt{23}i}{2}, \frac{1+\sqrt{23}i}{2}\right\}$ **53.** $\frac{y^2}{x^2}$

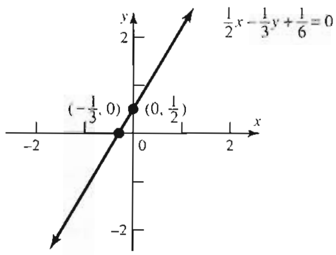
55. $\frac{1}{x^5y}$ **57.** $\frac{125}{x^2y}$ **59.** $4 - 7i$ **61.** $3 + 2i$ **63.** $\frac{9}{10} - \frac{3}{10}i$ **65.** 1 **67.** $-46 + 9i$ **69.** $2x + y - 3 = 0$ **71.** $x + 3 = 0$

73. $x + 5y + 10 = 0$ **75.** $2x - 3y + 19 = 0$ **77.** $-x + y + 4 = 0$

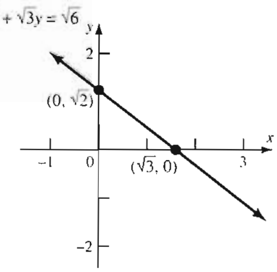
79.



81.



83.



85. Centro $(1, -2)$, radio $= 3$ **87.** Centro $(1, -2)$, radio $= \sqrt{5}$ **89.** Intersección: $(0, 0)$; simétrica con respecto al eje-x

91. Intersecciones: $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$; simétrica con respecto al eje-x, al eje-y, y al origen

93. Intersección: $(0, 1)$; simétrica con respecto al eje y **95.** Intersección: $(0, 0)$, $(0, -2)$, $(-1, 0)$; no hay simetría

97. Sí. Puede ver casi 229 millas. **99.** El avión puede alejarse 616 millas.

101. **(a)** No **(b)** Otra vez Miguel gana **(c)** Miguel gana por 25 cm **(d)** Miguel debe alinearse 5.26316 metros atrás de la línea de arranque **(e)** Sí

CAPÍTULO 2 *Ejercicio 2.1*

1. **(a)** -4 **(b)** -5 **(c)** -9 **(d)** -25 **3.** **(a)** 0 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** $-\frac{1}{2}$ **(d)** $\frac{3}{10}$ **5.** **(a)** 4 **(b)** 5 **(c)** 5 **(d)** 7

7. **(a)** $-\frac{1}{5}$ **(b)** $-\frac{3}{2}$ **(c)** $\frac{1}{8}$ **(d)** $\frac{7}{4}$ **9.** $f(0) = 3$; $f(-6) = -3$ **11.** Positivo **13.** -3, 6, y 10 **15.** $\{x| -6 \leq x \leq 11\}$

17. $-3, 6, 10$ **19.** 3 veces **21.** **(a)** No **(b)** 3 **(c)** 14 **(d)** $\{x| x \neq 6\}$ **23.** **(a)** Sí **(b)** $\frac{8}{17}$ **(c)** $-1, 1$ **(d)** Todos los números reales

25. No es una función

27. Función **(a)** Dominio: $\{x| -\pi \leq x \leq \pi\}$; Rango: $\{y| -1 \leq y \leq 1\}$ **(b)** Intersecciones: $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(0, 1)$ **(c)** eje y

29. No es función **31.** Función **(a)** Dominio: $\{x| x > 0\}$; Rango: Todos los números reales **(b)** Intersección: $(1, 0)$ **(c)** Ninguna

33. Función **(a)** Dominio: todos los números reales; Rango: $\{y|y \leq 2\}$ **(b)** Intersecciones: $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 2)$ **(c)** eje y

35. Función **(a)** Dominio: $\{x|x \neq 2\}$; Rango: $\{y|y \neq 1\}$ **(b)** Intersecciones: $(0, 0)$ **(c)** Ninguna

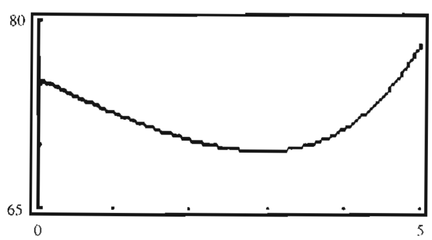
37. Todos los números reales **39.** Todos los números reales **41.** $\{x|x \neq -1, x \neq 1\}$ **43.** $\{x|x \neq 0\}$ **45.** $\{x|x \geq 4\}$ **47.** $(-\infty, -3]$ o $[3, \infty)$

49. $(-\infty, 1)$ o $[2, \infty)$ **51.** $A = -\frac{7}{2}$ **53.** $A = -4$ **55.** $A = 8$; indefinida en 3

57. **(a)** 15.1 m, 14.07 m, 12.94 m, 11.72 m **(b)** 2.02 sec **59.** $A(x) = \frac{1}{2}x^2$ **61.** $G(x) = 5x$

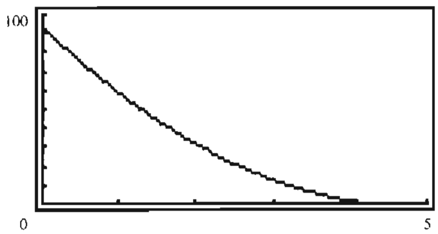
65. **(a)** $C(x) = 10x + 14\sqrt{x^2 - 10x + 29}$, $0 < x < 5$ **(b)** $C(1) = \$72.61$ **(c)** $C(3) = \$69.60$

(d)



costo menor: $x = 2.95$ millas

67. **(a)** $A(x) = (8.5 - 2x)(11 - 2x)$, **(b)** $0 \leq x \leq 4.25$, $0 \leq A \leq 93.5$ **(c)** $A(1) = 58.5$ pulgadas.^{2}, $A(1.2) = 52.46$ pulgadas.^{2}, $A(1.5) = 44$ pulgadas.^{2}
(d) $A(x) = 70$ cuando $x = 0.64$ pulgadas; $A(x) = 50$ cuando $x = 1.28$ pulgadas.

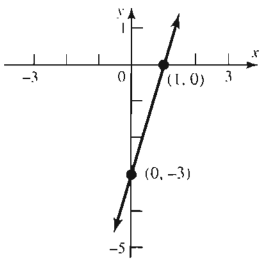


69. 1.11 segundos; 0.46 segundos **71.** Función **73.** Función **75.** No es función **77.** Función **79.** Sólo $h(x) = 2x$

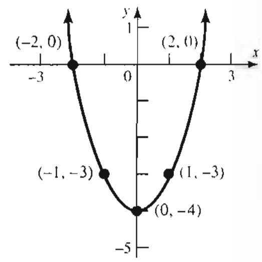
Ejercicio 2.2

1. C **3.** E **5.** B **7.** F
9. **(a)** Dominio: $\{x| -3 \leq x \leq 4\}$; Rango: $\{y|0 \leq y \leq 3\}$ **(b)** Creciente en $[-3, 0]$ y en $[2, 4]$; decreciente en $[0, 2]$ **(c)** Ninguna
(d) $(-3, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$
11. **(a)** Dominio: todos los números reales; Rango: $\{y|0 < y < \infty\}$ **(b)** Creciente en $(-\infty, \infty)$ **(c)** Ninguna **(d)** $(0, 1)$
13. **(a)** Dominio: $\{x| -\pi \leq x \leq \pi\}$; Rango: $\{y| -1 \leq y \leq 1\}$
(b) Creciente en $[-\pi/2, \pi/2]$; decreciente en $[-\pi, -\pi/2]$ y en $[\pi/2, \pi]$ **(c)** Impar (simétrica con respecto al origen)
(d) $(-\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, 0)$
15. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq 2\}$; Rango: $\{y|y \neq 1\}$ **(b)** Decreciente en $(-\infty, 2)$ y en $(2, \infty)$ **(c)** Ninguna **(d)** $(0, 0)$
17. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq 0\}$; Rango: todos los números reales **(b)** Decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$ **(c)** Impar **(d)** $(-1, 0)$, $(1, 0)$
19. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$; Rango: $\{y|-\infty < y \leq 0$ y $1 < y < \infty\}$
(b) Creciente en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, 0]$; decreciente en $[0, 2)$ y en $(2, \infty)$ **(c)** Par **(d)** $(0, 0)$
21. **(a)** Dominio: $\{x| -4 \leq x \leq 4\}$; Rango: $\{y|0 \leq y \leq 2\}$ **(b)** Creciente en $[-2, 0]$ y $[2, 4]$; Decreciente en $[-4, -2]$ y $[0, 2]$ **(c)** Par
(d) $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$
23. **(a)** 2 **(b)** 3 **(c)** -4 **25.** **(a)** 4 **(b)** 2 **(c)** 5
27. **(a)** $-2x + 5$ **(b)** $-2x - 5$ **(c)** $4x + 5$ **(d)** $2x - 1$ **(e)** $\dfrac{2}{x} + 5 = \dfrac{5x + 2}{x}$ **(f)** $\dfrac{1}{2x + 5}$
29. **(a)** $2x^2 - 4$ **(b)** $-2x^2 + 4$ **(c)** $8x^2 - 4$ **(d)** $2x^2 - 12x + 14$ **(e)** $\dfrac{2 - 4x^2}{x^2}$ **(f)** $\dfrac{1}{2x^2 - 4}$
31. **(a)** $-x^3 + 3x$ **(b)** $-x^3 + 3x$ **(c)** $8x^3 - 6x$ **(d)** $x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ **(e)** $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x}$ **(f)** $\dfrac{1}{x^3 - 3x}$
33. **(a)** $-\dfrac{x}{x^2 + 1}$ **(b)** $-\dfrac{x}{x^2 + 1}$ **(c)** $\dfrac{2x}{4x^2 + 1}$ **(d)** $\dfrac{x - 3}{x^2 - 6x + 10}$ **(e)** $\dfrac{x}{x^2 + 1}$ **(f)** $\dfrac{x^2 + 1}{x}$
35. **(a)** $|x|$ **(b)** $-|x|$ **(c)** $2|x|$ **(d)** $|x - 3|$ **(e)** $\dfrac{1}{|x|}$ **(f)** $\dfrac{1}{|x|}$
37. **(a)** $1 - \dfrac{1}{x}$ **(b)** $-1 - \dfrac{1}{x}$ **(c)** $1 + \dfrac{1}{2x}$ **(d)** $1 + \dfrac{1}{x - 3}$ **(e)** $1 + x$ **(f)** $\dfrac{x}{x + 1}$
39. 3 **41.** -3 **43.** $3x + 1$ **45.** $x(x + 1)$ **47.** $\dfrac{-1}{x + 1}$ **49.** $\dfrac{1}{\sqrt{x} + 1}$
51. Impar **53.** Par **55.** Impar **57.** Ninguna **59.** Par **61.** Impar **63.** Cuando mucho uno

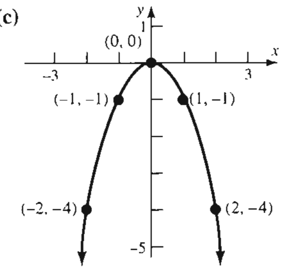
65. **(a)** Todos los números reales **(c)**
(b) $(0, -3)$, $(1, 0)$
(d) Todos los números reales



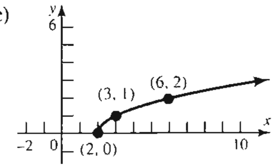
67. **(a)** Todos los números reales **(c)**
(b) $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -4)$
(d) $\{y| -4 \leq y < \infty\}$



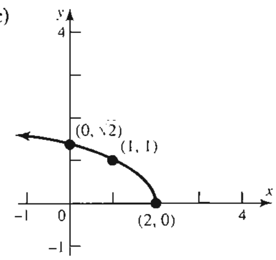
69. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0)
(d) $\{y \mid -\infty < y \leq 0\}$

(c)


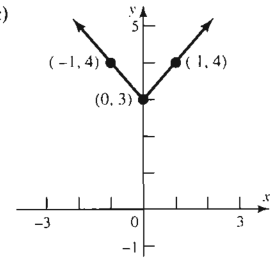
71. **(a)** $\{x \mid 2 \leq x < \infty\}$
(b) (2, 0)
(d) $\{y \mid 0 \leq y < \infty\}$

(c)


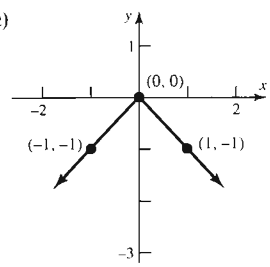
73. **(a)** $\{x \mid -\infty < x \leq 2\}$
(b) (2, 0), $(0, \sqrt{2})$
(d) $\{y \mid 0 \leq y < \infty\}$

(c)


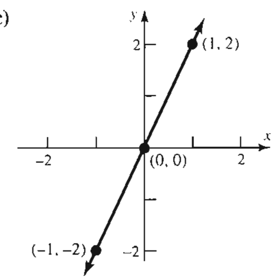
75. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 3)
(d) $\{y \mid 3 \leq y < \infty\}$

(c)


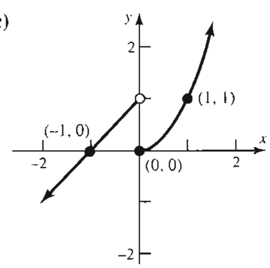
77. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0)
(d) $\{y \mid -\infty < y \leq 0\}$

(c)


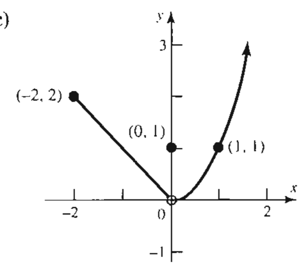
79. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0)
(d) Todos los números reales

(c)


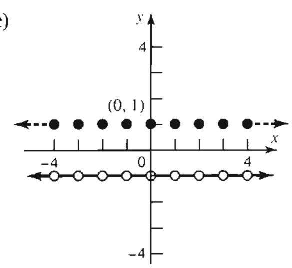
81. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0), $(-1, 0)$
(d) Todos los números reales

(c)


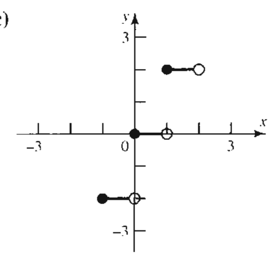
83. **(a)** $\{x \mid -2 \leq x < \infty\}$
(b) (0, 1)
(d) $\{y \mid 0 < y < \infty\}$

(c)


85. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 1)
(d) $\{-1, 1\}$

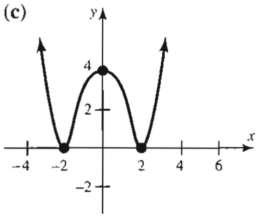
(c)


87. **(a)** Todos los números reales
(b) $(x, 0)$ para $0 \leq x < 1$
(d) Conjunto de enteros pares

(c)


89. **(a)** Todos los números reales **(b)** $(-2, 0)$, $(0, 4)$, $(2, 0)$ **(d)** $\{y/y \geq 0\}$

(c)



91. 2 **93.** $2x + h + 2$ **95.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ (Son posibles otras respuestas.)

97. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$ (Son posibles otras respuestas.)

99. No; $f(-2) = 8$ y $f(2) = 6$

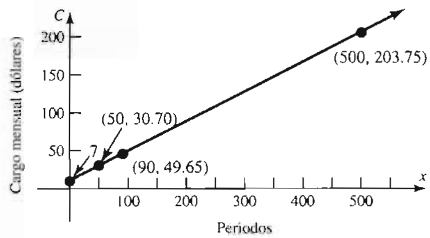
101. Cada gráfica es la de $y = x^2$, pero desplazada verticalmente. Si $y = x^2 + k$, $k > 0$, el desplazamiento es k unidades hacia arriba; Si $y = x^2 + k$, $k < 0$, el desplazamiento es $|k|$ unidades hacia abajo;

103. Cada gráfica es la de $y = |x|$, pero comprimida o alargada. Si $y = k|x|$ y $k > 1$, la gráfica es alargada; $y = k|x|$, $0 < k < 1$, la gráfica está comprimida.

105. La gráfica de $y = f(-x)$ es la reflexión con respecto al eje y de la gráfica de $y = f(x)$.

107. **(a)** \$30.70 **(b)** \$203.75 **(c)** $C = \begin{cases} 7 + 0.47395x & \text{si } 0 \leq x \leq 90 \\ 15.83 + 0.37583x & \text{si } x > 90 \end{cases}$

(d)

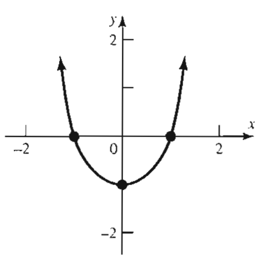


109. **(a)** $E(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = E(x)$ **(b)** $O(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -O(x)$ **(c)** $E(x) + O(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f(x)$ **(d)** Combinar los resultados de las partes **(a)**, **(b)** y **(c)**.

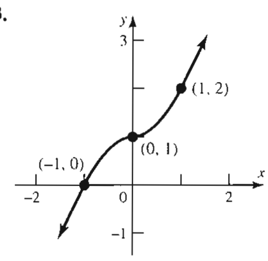
Ejercicio 2.3

1. B **3.** H **5.** I **7.** L **9.** F **11.** G **13.** $y = (x-4)^3$ **15.** $y = x^3 + 4$ **17.** $y = -x^3$ **19.** $y = 4x^3$

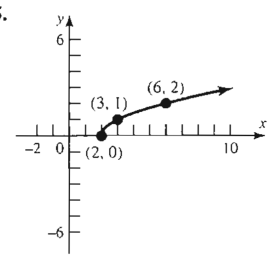
21.



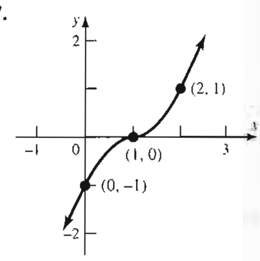
23.



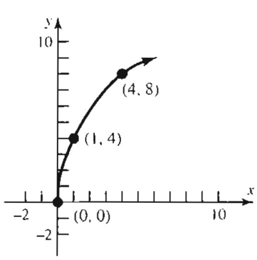
25.



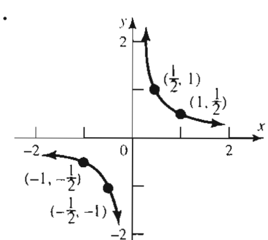
27.



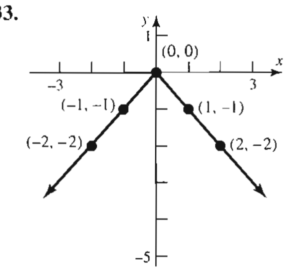
29.



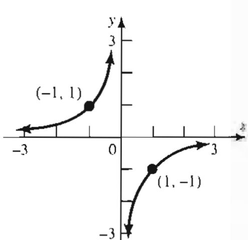
31.



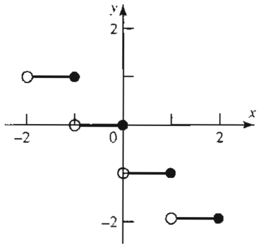
33.



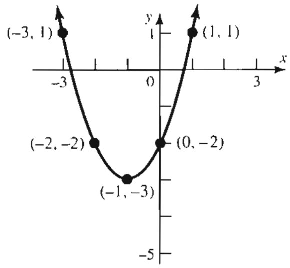
35.



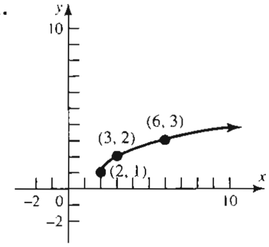
37.



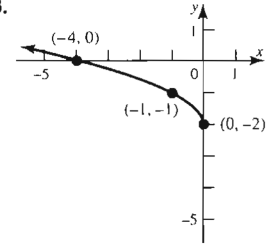
39.



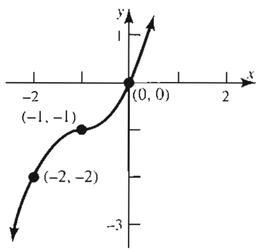
41.



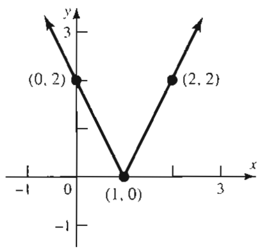
43.



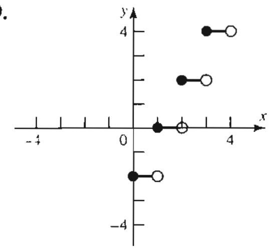
45.



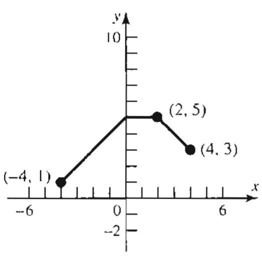
47.



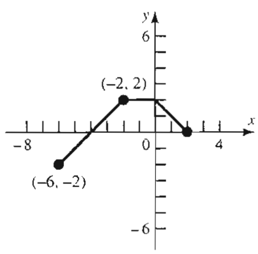
49.



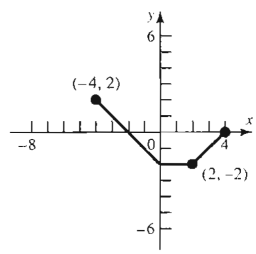
51. (a) $F(x) = f(x) + 3$



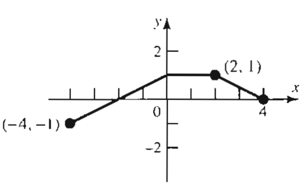
(b) $G(x) = f(x + 2)$



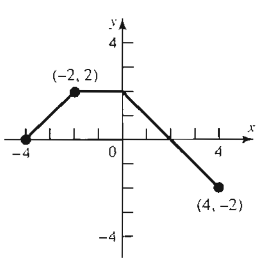
(c) $P(x) = -f(x)$



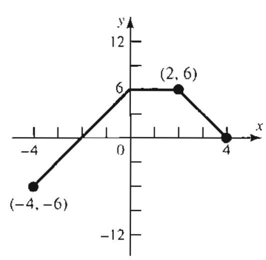
(d) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$



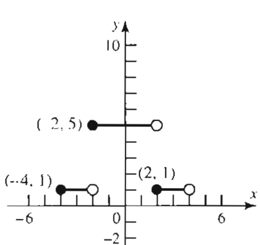
(e) $g(x) = f(-x)$



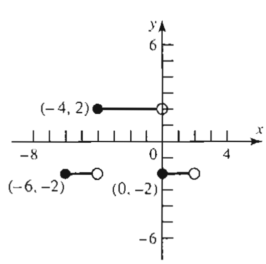
(f) $h(x) = 3f(x)$



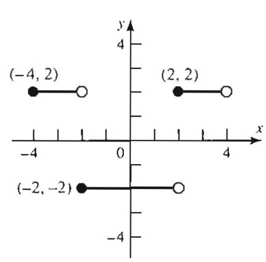
53. (a) $F(x) = f(x) + 3$



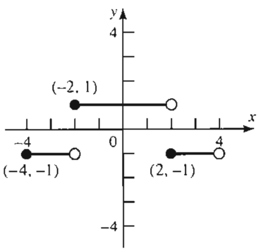
(b) $G(x) = f(x + 2)$



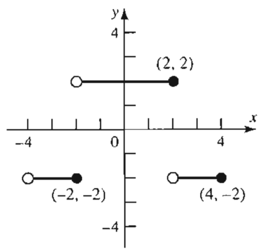
(c) $P(x) = -f(x)$



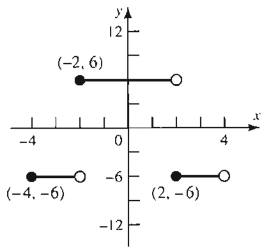
53. **(d)** $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$



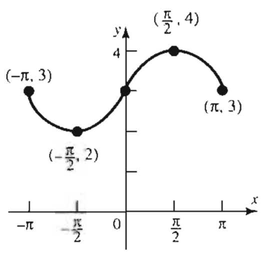
(e) $g(x) = f(-x)$



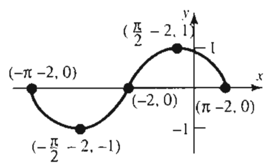
(f) $h(x) = 3f(x)$



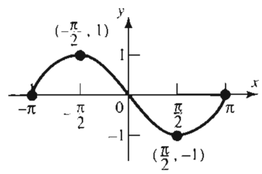
55. **(a)** $F(x) = f(x) + 3$



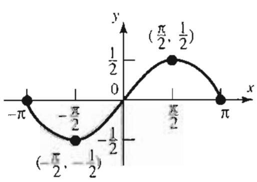
(b) $G(x) = f(x + 2)$



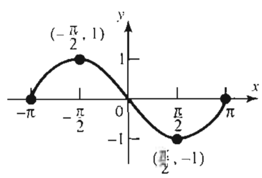
(c) $P(x) = -f(x)$



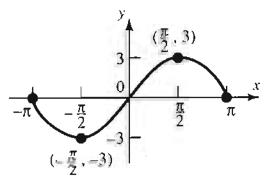
(d) $Q(x) = \frac{1}{2}f(x)$



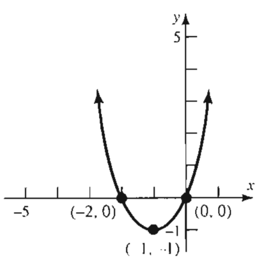
(e) $g(x) = f(-x)$



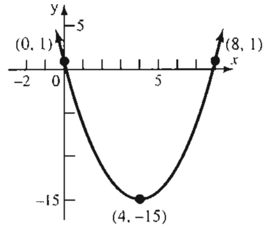
(f) $h(x) = 3f(x)$



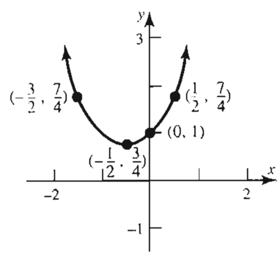
57. $f(x) = (x + 1)^2 - 1$



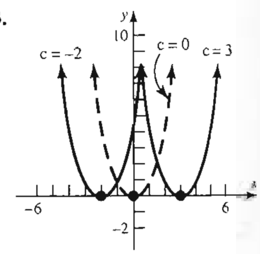
59. $f(x) = (x - 4)^2 - 15$



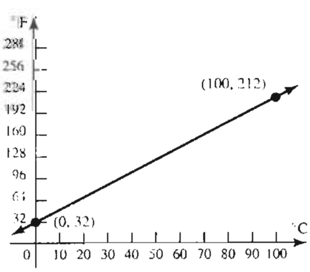
61. $f(x) = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

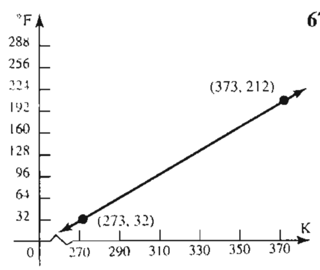


63.

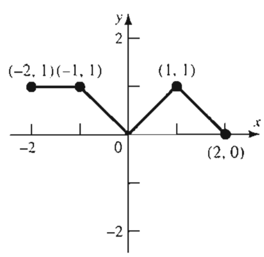


65.

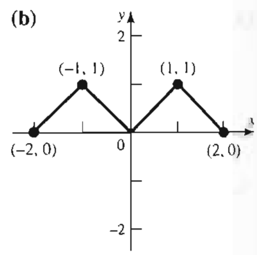




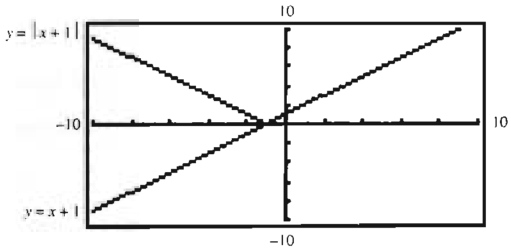
67. **(a)**



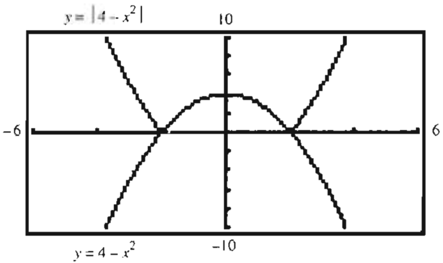
(b)



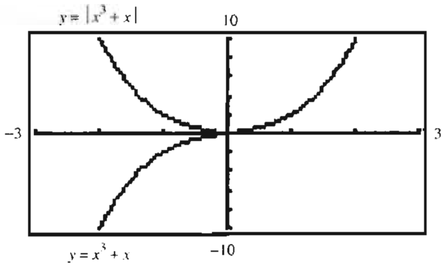
69. **(a)**



(b)



(c)



(d) Cualquier parte de la gráfica de $y = f(x)$ que esté abajo del eje x está reflejada con respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$.

Ejercicio 2.4

1. **(a)** $(f + g)(x) = 5x + 1$; todos los números reales **(b)** $(f - g)(x) = x + 7$; todos los números reales
(c) $(f \cdot g)(x) = 6x^2 - x - 12$; todos los números reales **(d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3x + 4}{2x - 3}$; todos los números reales $x = \frac{3}{2}$

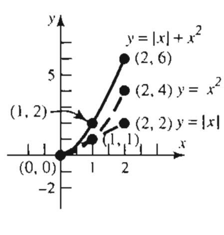
3. **(a)** $(f + g)(x) = 2x^2 + x - 1$; todos los números reales **(b)** $(f - g)(x) = -2x^2 + x - 1$; todos los números reales
(c) $(f \cdot g)(x) = 2x^3 - 2x^2$; todos los números reales **(d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x - 1}{2x^2}$; $\{x|x \neq 0\}$

5. **(a)** $(f + g)(x) = \sqrt{x} + 3x - 5$; $\{x|x \geq 0\}$ **(b)** $(f - g)(x) = \sqrt{x} - 3x + 5$; $\{x|x \geq 0\}$ **(c)** $(f \cdot g)(x) = 3x\sqrt{x} - 5\sqrt{x}$; $\{x|x \geq 0\}$
(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x - 5}$; $\{x|x \geq 0, x \neq \frac{5}{3}\}$

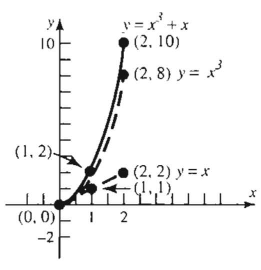
7. **(a)** $(f + g)(x) = 1 + \frac{2}{x}$; $\{x|x \neq 0\}$ **(b)** $(f - g)(x) = 1$; $\{x|x \neq 0\}$ **(c)** $(f \cdot g)(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; $\{x|x \neq 0\}$ **(d)** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x + 1$; $\{x|x \neq 0\}$

9. **(a)** $(f + g)(x) = \frac{6x + 3}{3x - 2}$; $\{x|x \neq \frac{2}{3}\}$ **(b)** $(f - g)(x) = \frac{-2x + 3}{3x - 2}$; $\{x|x \neq \frac{2}{3}\}$ **(c)** $(f \cdot g)(x) = \frac{8x^2 + 12x}{(3x - 2)^2}$; $\{x|x \neq \frac{2}{3}\}$
(d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x + 3}{4x}$; $\{x|x \neq 0, \frac{2}{3}\}$ **11.** $g(x) = 5 - \frac{7}{2}x$

13.



15.



17. **(a)** 98 **(b)** 49 **(c)** 4 **(d)** 4 **19.** **(a)** 97 **(b)** $-\frac{163}{2}$ **(c)** 1 **(d)** $-\frac{3}{2}$ **21.** **(a)** $2\sqrt{2}$ **(b)** $2\sqrt{2}$ **(c)** 1 **(d)** 0

23. **(a)** $\frac{1}{17}$ **(b)** $\frac{1}{5}$ **(c)** 1 **(d)** $\frac{1}{2}$ **25.** **(a)** $\frac{3}{5}$ **(b)** $\sqrt{15}/5$ **(c)** $\frac{12}{13}$ **(d)** 0

27. **(a)** $(f \circ g)(x) = 6x + 3$ todos los números reales
(b) $(g \circ f)(x) = 6x + 9$ todos los números reales
(c) $(f \circ f)(x) = 4x + 9$ todos los números reales
(d) $(g \circ g)(x) = 9x$ todos los números reales

29. **(a)** $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 1$ todos los números reales
(b) $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x + 1$ todos los números reales
(c) $(f \circ f)(x) = 9x + 4$ todos los números reales
(d) $(g \circ g)(x) = x^4$ todos los números reales

31. (a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $\{x \mid |x| \geq 1\}$
(b) $(g \circ f)(x) = x - 1$; $\{x \mid |x| \geq 1\}$
(c) $(f \circ f)(x) = \sqrt[4]{x}$; $\{x \mid x \geq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = x^4 - 2x^2$; todos los números reales

33. (a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$; $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0\}$
(b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $\{x \mid x \neq -1, x \neq 1\}$
(c) $(f \circ f)(x) = -\dfrac{1}{x}$; $\{x \mid x \neq -1, x \neq 0\}$
(d) $(g \circ g)(x) = x$; $\{x \mid x \neq 0\}$

35. (a) $(f \circ g)(x) = x$; $\{x \mid x \geq 0\}$
(b) $(g \circ f)(x) = |x|$; todos los números reales
(c) $(f \circ f)(x) = x^4$ todos los números reales
(d) $(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$; $\{x \mid x \geq 0\}$

37. (a) $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{4x+9}$; $\{x \mid x \neq - \}$
(b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{2}{2x+3} + 3 = \dfrac{6x+11}{2x+3}$; $\{x \mid x \neq - \}$
(c) $(f \circ f)(x) = \dfrac{2x+3}{6x+11}$; $\{x \mid x \neq - , x \neq - \}$
(d) $(g \circ g)(x) = 4x + 9$; todos los números reales

39. (a) $(f \circ g)(x) = acx + ad + b$; todos los números reales
(b) $(g \circ f)(x) = acx + bc + d$; todos los números reales
(c) $(f \circ f)(x) = a^2x + ab + b$; todos los números reales
(d) $(g \circ g)(x) = c^2x + cd + d$; todos los números reales

41. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{2}x) = 2(\frac{1}{2}x) = x$; $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \frac{1}{2}(2x) = x$

43. $(f \circ g)(x) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$; $(g \circ f)(x) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$

45. $(f \circ g)(x) = f(\frac{1}{2}(x+6)) = 2[\frac{1}{2}(x+6)] - 6 = x + 6 - 6 = x$; $(g \circ f)(x) = g(2x - 6) = \frac{1}{2}(2x - 6 + 6) = x$

47. $(f \circ g)(x) = f\left(\dfrac{1}{a}(x - b)\right) = a\left[\dfrac{1}{a}(x-b)\right] + b = x$; $(g \circ f)(x) = g(ax + b) = \dfrac{1}{a}\left(ax + b - b\right) = x$

49. $(f \circ g)(x) = 11$; $(g \circ f)(x) = 2$ **51.** $(f \circ (g \circ h))(x) = 5 - 3x + 4\sqrt{1-3x}$ **53.** $((f+g) \circ h)(x) = 9x^2 - 6x + 3 + \sqrt{1-3x}$ **55.** $F = f \circ g$

57. $H = h \circ f$ **59.** $q = f \circ h$ **61.** $P = f \circ f$ **63.** $f(x) = x^4$; $g(x) = 2x + 3$ **65.** $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 + x + 1$ **67.** $f(x) = x^2$; $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

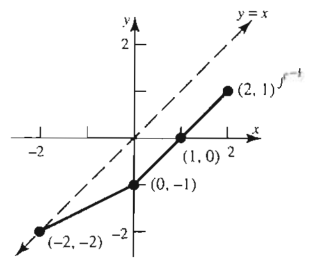
69. $f(x) = [[x]]$; $g(x) = x^2 + 1$ **71.** $-3, 3$ **73.** $S(r(t)) = \frac{16}{9}\pi t^6$ **75.** $C(N(t)) = 15000 + 800{,}000t - 40{,}000t^2$ **77.** $C = \dfrac{2\sqrt{100-p}}{25} + 600$

79. Ya que f y g son impares, $f(-x) = -f(x)$ y $g(-x) = -g(x)$; $(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x)$; así que, $f \circ g$ es impar.

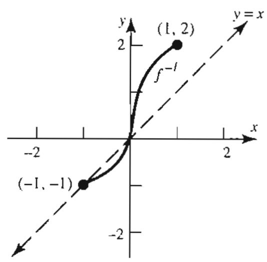
Ejercicio 2.5

1. Uno a uno
3. No es uno a uno
5. Uno a uno

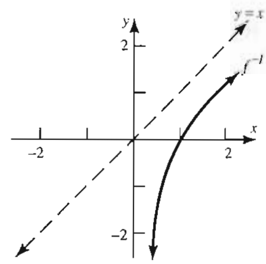
7.



9.



11.

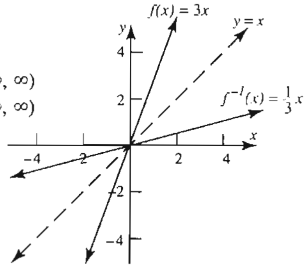


13. $f(g(x)) = f(\frac{1}{3}(x-4)) = 3[\frac{1}{3}(x-4)] + 4 = x$; $g(f(x)) = g(3x+4) = \frac{1}{3}[(3x+4) - 4] = x$

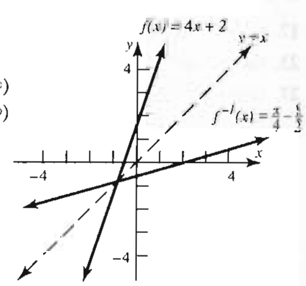
15. $f(g(x)) = 4\left[\dfrac{x}{4} + 2\right] - 8 = x$; $g(f(x)) = \dfrac{4x-8}{4} + 2 = x$ **17.** $f(g(x)) = (\sqrt[3]{x+8})^3 - 8 = x$; $g(f(x)) = \sqrt[3]{(x^3 - 8) + 8} = x$

19. $f(g(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$; $g(f(x)) = \dfrac{1}{1/x} = x$ **21.** $f(g(x)) = \dfrac{2\left(\dfrac{4x-3}{2-x}\right) + 3}{\dfrac{4x-3}{2-x} + 4} = \dfrac{8x - 3x}{-3 + 8} = x$; $g(f(x)) = \dfrac{4\left(\dfrac{2x+3}{x+4}\right) - 3}{2 - \dfrac{2x+3}{x+4}} = x$

23. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$
$f(f^{-1}(x)) = 3(\frac{1}{3}x) = x$
$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{3}(3x) = x$
Dominio f = Rango $f^{-1} = (-\infty, \infty)$
Rango f = Dominio $f^{-1} = (-\infty, \infty)$



25. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}$
$f(f^{-1}(x)) = 4\left(\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{2}\right) + 2 = x$
$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{4x+2}{4} - \dfrac{1}{2} = x$
Dominio f = Rango $f^{-1} = (-\infty, \infty)$
Rango f = Dominio $f^{-1} = (-\infty, \infty)$



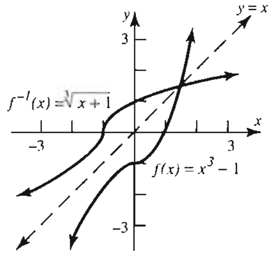
27. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt[3]{x+1})^3 - 1 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x^3 - 1 + 1} = x$

Dominio f = Rango $f^{-1} = (-\infty, \infty)$

Rango f = Dominio $f^{-1} = (-\infty, \infty)$



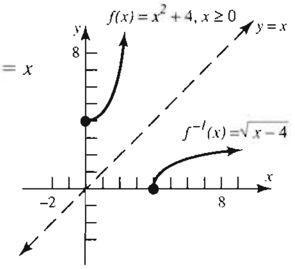
29. $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$

$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x-4})^2 + 4 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x^2+4) - 4} = \sqrt{x^2} = |x| = x$

Dominio f = Rango $f^{-1} = [0, \infty)$

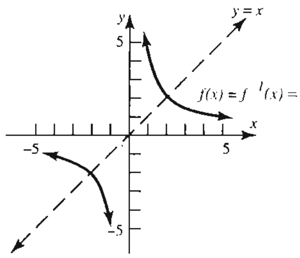
Rango f = Dominio $f^{-1} = [4, \infty)$



31. $f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{4}{4/x} = x$

$f^{-1}(f(x)) = \dfrac{4}{4/x} = x$



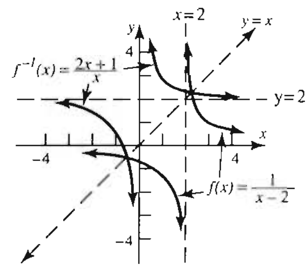
Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

33. $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{\dfrac{2x+1}{x} - 2} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2\left(\dfrac{1}{x-2}\right) + 1}{\dfrac{1}{x-2}} = x$$



Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 2

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

35. $f^{-1}(x) = \dfrac{2-3x}{x}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2}{3 + \dfrac{2-3x}{x}} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2 - 3\left(\dfrac{2}{3+x}\right)}{\dfrac{2}{3+x}} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto -3

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

37. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$

$f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x} - 2 + 2)^2 = x$

$f^{-1}(f(x)) = \sqrt{(x+2)^2} - 2 = |x+2| - 2 = x$

Dominio f = Rango $f^{-1} = [-2, \infty)$

Rango f = Dominio $f^{-1} = [0, \infty)$

39. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-2}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2\left(\dfrac{x}{x-2}\right)}{\dfrac{x}{x-2} - 1} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{2x}{x-1} - 2} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 1

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 2

41. $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+4}{2x-3}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{3\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right) + 4}{2\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right) - 3} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{3\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right) + 4}{2\left(\dfrac{3x+4}{2x-3}\right) - 3} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto $\frac{3}{2}$

Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto $\frac{3}{2}$

43. $f^{-1}(x) = \dfrac{-2x + 3}{x - 2}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2\left(\dfrac{-2x + 3}{x - 2}\right) + 3}{\dfrac{-2x + 3}{x - 2} + 2} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{-2\left(\dfrac{2x + 3}{x + 2}\right) + 3}{\dfrac{2x + 3}{x + 2} - 2} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto -2
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 2

45. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3}{8}$

$$f(f^{-1}(x)) = 2\sqrt[3]{\frac{x^3}{8}} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{(2\sqrt[3]{x})^3}{8} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = $(-\infty, \infty)$
Rango f = Dominio f^{-1} = $(-\infty, \infty)$

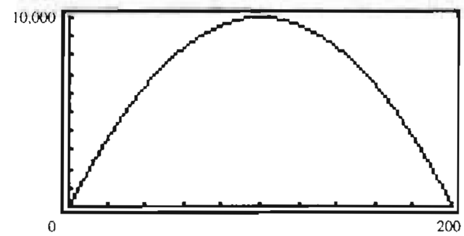
47. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}(x - b)$, $m \neq 0$ **49.** No; siempre que x y $-x$ estén en el dominio de f, dos valores iguales de y, $f(x)$ y $f(-x)$, están presentes.

51. Primer cuadrante **53.** $f(x) = |x|$, $x \geq 0$ es uno a uno, esto puede escribirse como $f(x) = x$; $f^{-1}(x) = x$

55. $f(g(x)) = \frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(x - 32)\right] + 32 = x$; $g(f(x)) = \frac{5}{9}\left[\left(\frac{9}{5}x + 32\right) - 32\right] = x$ **57.** $l(T) = gT^2/4\pi^2$ **59.** $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$; $f = f^{-1}$ Si $a = -d$

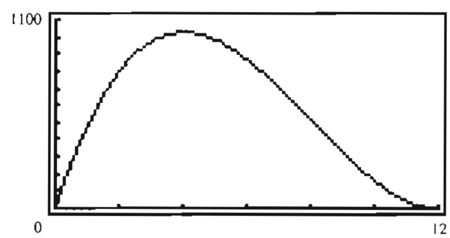
Ejercicio 2.6

1. $V(r) = 2\pi r^3$ **3.** $R(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 100x$ **5.** $R(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 20x$ **7.** **(a)** $A(x) = -x^2 + 200x$ **(b)** $0 < x < 200$ **(c)** A es más grande cuando $x = 100$ yardas

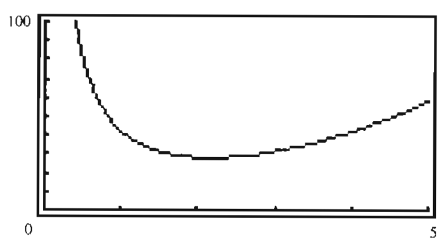


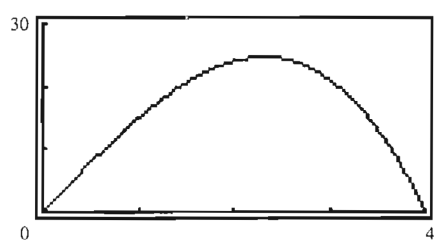
9. **(a)** $C(x) = x$ **(b)** $A(x) = \dfrac{x^2}{4\pi}$ **11.** $A(x) = \frac{1}{2}x^4$ **13.** **(a)** $d(x) = \sqrt{x^4 - 15x^2 + 64}$ **(b)** $d(0) = 8$ **(c)** $d(1) = \sqrt{50} = 7.07$

15. $d(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ **17.** $d(t) = 50t$ **19.** **(a)** $V(x) = x(24 - 2x)^2$ **(b)** El volumen mayor es cuando x es 4

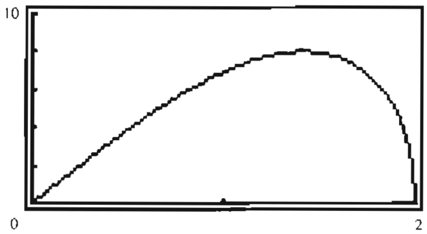


21. **(a)** $A(x) = 2x^2 + \dfrac{40}{x}$ **(b)** El área es más pequeña cuando x está cerca de 2.15 **23.** **(a)** $A(x) = x(16 - x^2)$ **(b)** Dominio: $\{x | 0 < x < 4\}$ **(c)** El área es mayor para x cerca de 2.31

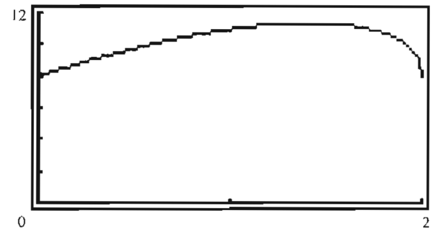




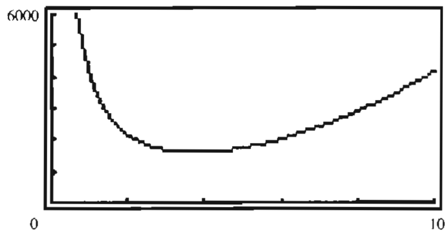
25. **(a)** $A(x) = 4x(4 - x^2)^{1/2}$ **(b)** $p(x) = 4x + 4(4 - x^2)^{1/2}$
(c) El área es mayor para x cerca de 1.41



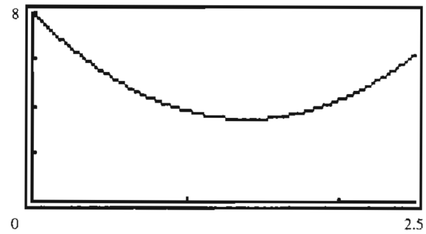
(d) El perímetro es mayor para x alrededor de 1.41



27. **(a)** $C(r) = 12\pi r^2 + \dfrac{4000}{r}$
(b) El costo es menor para r en alrededor de 3.75 centímetros



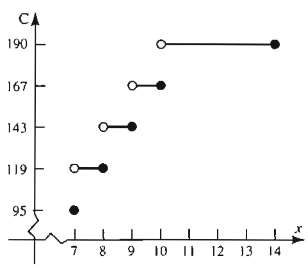
29. **(a)** $A(x) = x^2 + \dfrac{25 - 20x + 4x^2}{\pi}$ **(b)** Dominio: $\{x|0 < x < 2.5\}$
(c) El área es menor para x en alrededor de 1.40 metros



31. **(a)** $A(r) = 2r^2$ **(b)** $p(r) = 6r$

33. $A(x) = \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2$

35. $C = \begin{cases} 95 & \text{si } x = 7 \\ 119 & \text{si } 7 < x \le 8 \\ 143 & \text{si } 8 < x \le 9 \\ 167 & \text{si } 9 < x \le 10 \\ 190 & \text{si } 10 < x \le 14 \end{cases}$



37. $V(h) = \dfrac{\pi}{48}h^3$

Complete en los espacios

1. independiente; dependiente **2.** vertical **3.** par; impar **4.** horizontal; derecha **5.** $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ **6.** uno a uno **7.** $y = x$

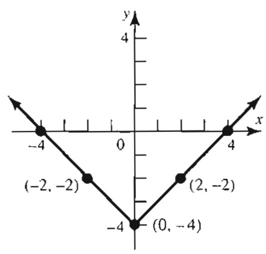
Cierto o falso

1. C **2.** C **3.** F **4.** C **5.** F **6.** F **7.** C

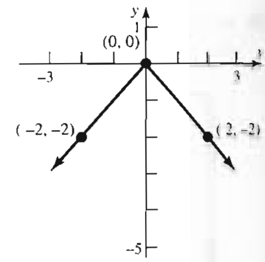
Ejercicios de revisión

1. $f(x) = -2x + 3$ **3.** $A = 11$ **5.** **(a)** B, C, D **(b)** D **7.** **(a)** $f(-x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$ **(b)** $-f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$ **(c)** $f(x + 2) = \dfrac{3x + 6}{x^2 + 4x}$ **(d)** $f(x - 2) = \dfrac{3x - 6}{x^2 - 4x}$ **9.** **(a)** $f(-x) = \sqrt{x^2 - 4}$ **(b)** $-f(x) = -\sqrt{x^2 - 4}$ **(c)** $f(x + 2) = \sqrt{x^2 + 4x}$ **(d)** $f(x - 2) = \sqrt{x^2 - 4x}$
11. **(a)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ **(b)** $-f(x) = -\dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ **(c)** $f(x + 2) = \dfrac{x^2 + 4x}{x^2 + 4x + 4}$ **(d)** $f(x - 2) = \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 4x + 4}$ **13.** Impar **15.** Par
17. Ninguno de los dos tipos **19.** $\{x|x \neq -3, x \neq 3\}$ **21.** $(-\infty, 2]$ **23.** $(0, \infty)$ **25.** $\{x|x \neq -3, x \neq 1\}$ **27.** $[-1, \infty)$ **29.** $[0, \infty)$

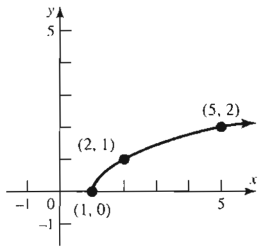
31. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, −4), (−4, 0), (4, 0)
(d) $\{y \mid -4 \leq y < \infty\}$

(c)


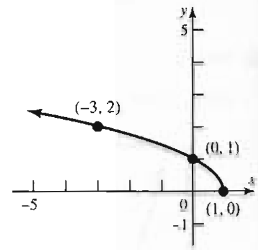
33. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0)
(d) $\{y \mid -\infty < y \leq 0\}$

(c)


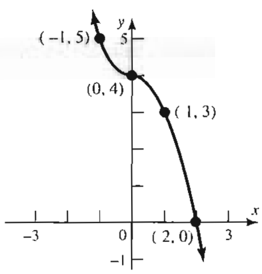
35. **(a)** $\{x \mid 1 \leq x < \infty\}$
(b) (1, 0)
(d) $\{y \mid 0 \leq y < \infty\}$

(c)


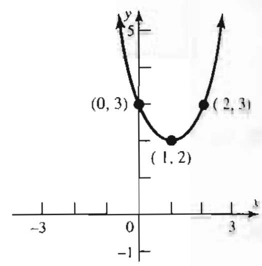
37. **(a)** $\{x \mid -\infty < x \leq 1\}$
(b) (1, 0), (0, 1)
(d) $\{y \mid 0 \leq y < \infty\}$

(c)


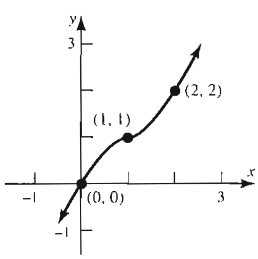
39. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 4), (2, 0)
(d) Todos los números reales

(c)


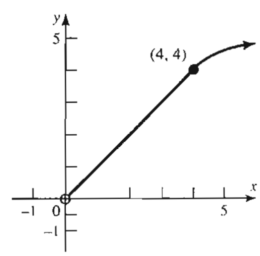
41. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 3)
(d) $\{y \mid 2 \leq y < \infty\}$

(c)


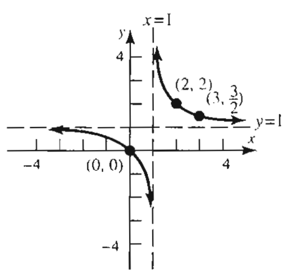
43. **(a)** Todos los números reales
(b) (0, 0)
(d) Todos los números reales

(c)


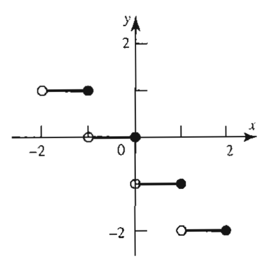
45. **(a)** $\{x \mid 0 < x < \infty\}$
(b) Ninguna
(d) $\{y \mid 0 < y < \infty\}$

(c)


47. **(a)** $\{x \mid x \neq 1\}$
(b) (0, 0)
(d) $\{y \mid y \neq 1\}$

(c)


49. **(a)** Todos los números reales
(b) $-1 < x \leq 0$ son las intersecciones con el eje-x, 0 es la intersección-y
(d) Conjunto de los enteros

(c)


51. $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+3}{5x-2}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2\left(\dfrac{2x+3}{5x-2}\right)+3}{5\dfrac{2x+3}{5x-2}-2} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{2\left(\dfrac{2x+3}{5x-2}\right)+3}{5\dfrac{2x+3}{5x-2}-2} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 2/5
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 2/5

53. $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{\dfrac{x+1}{x}-1} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{\dfrac{1}{x-1}+1}{\dfrac{1}{x-1}} = x$$

Dominio f = Rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 1
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

55. $f^{-1}(x) = \dfrac{27}{x^3}$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{3}{(27/x^3)^{1/3}} = x$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{27}{(3/x^{1/3})^3} = x$$

Dominio f = rango f^{-1} = Todos los números reales excepto 0
Rango f = Dominio f^{-1} = Todos los números reales excepto 0

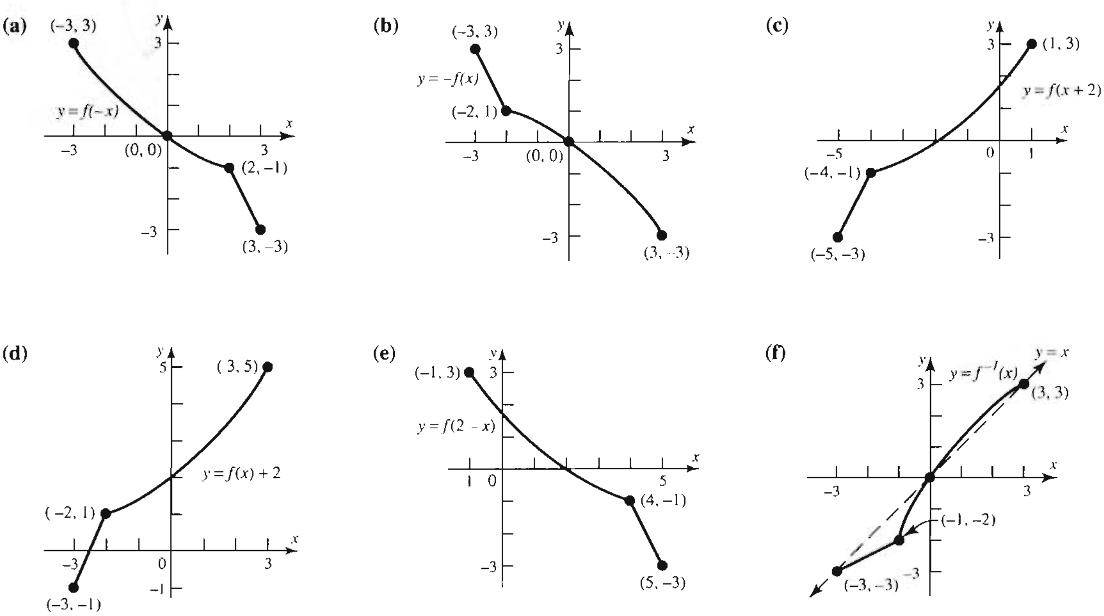
57. **(a)** -26 **(b)** -241 **(c)** 16 **(d)** -1 **59.** **(a)** $\sqrt{11}$ **(b)** 1 **(c)** $\sqrt{\sqrt{6}+2}$ **(d)** 19 **61.** **(a)** $\frac{1}{20}$ **(b)** $-\frac{13}{8}$ **(c)** $\frac{400}{1601}$ **(d)** -17

63. $(f\circ g)(x) = \dfrac{-3x+1}{3x+1}$; $(g\circ f)(x) = \dfrac{6-2x}{x}$; $(f\circ f)(x) = \dfrac{3x-2}{2-x}$; $(g\circ g)(x) = 9x+4$

65. $(f\circ g)(x) = 27x^2 + 3|x| + 1$; $(g\circ f)(x) = 3|3x^2+x+1|$; $(f\circ f)(x) = 3(3x^2+x+1)^2 + 3x^2 + x + 2$; $(g\circ g)(x) = 9|x|$

67. $(f\circ g)(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$; $(g\circ f)(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$; $(f\circ f)(x) = x$; $(g\circ g)(x) = x$

69.

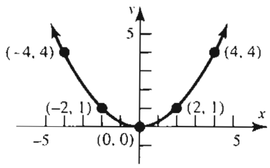


71. $T(h) = -0.0025h + 30$ **73.** $S(x) = kx(36 \quad x^2)^{3/2}$; Dominio: $\{x|0 < x < 6\}$

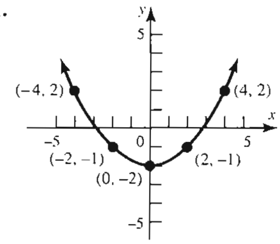
CAPÍTULO 3 *Ejercicio 3.1*

1. D **3.** A **5.** B **7.** E

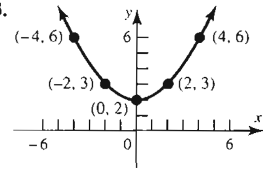
9.



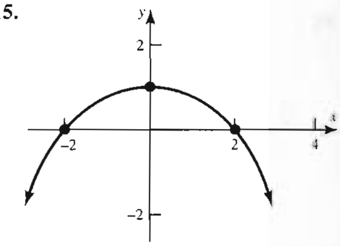
11.



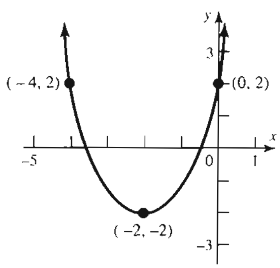
13.



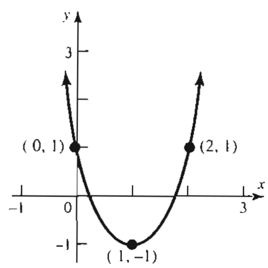
15.



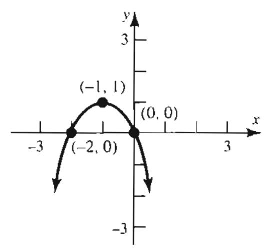
17. $f(x) = (x + 2)^2 - 2$



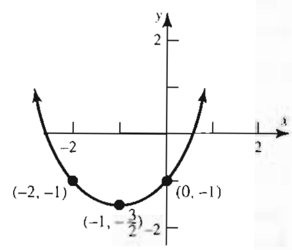
19. $f(x) = 2(x - 1)^2 - 1$



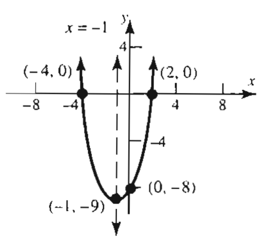
21. $f(x) = -(x + 1)^2 + 1$



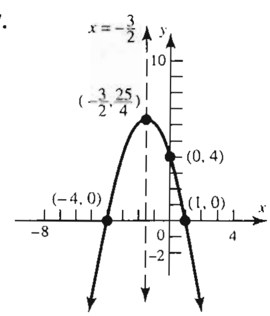
23. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - \frac{3}{2}$



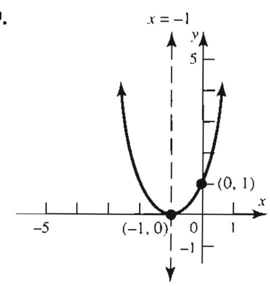
25.



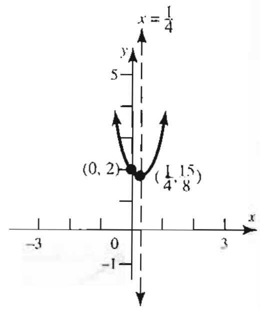
27.



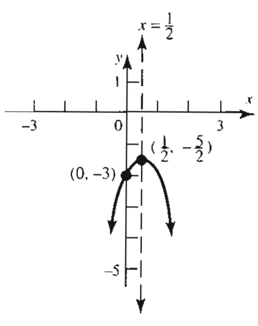
29.



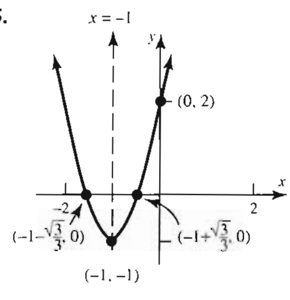
31.



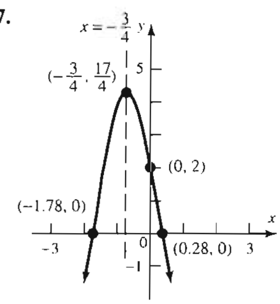
33.



35.



37.

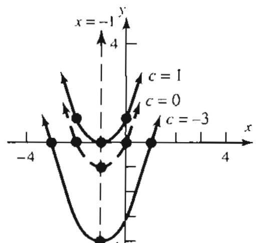


39. Valor mínimo; -21

41. Valor máximo; 21

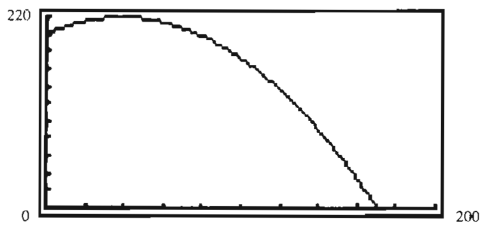
43. Valor máximo; 13

45. Abre hacia arriba; vértice en $(-1, f(-1))$; eje de simetría $x = -1$



47. Cada parábola abre hacia arriba y pasa por (0, 1). Cada una tiene la misma forma.

49. Precio: \$500.00; ingreso máximo: \$1,000,000.00 **51.** 10,000 pies^2; 100 por 100 pies **53.** 2'000,000 m^2 **55.** 4'166,666.7 m^2
57. **(a)** 219.53 pies **(b)** 170.02 pies **(c)** Cuando la altura es de 100 pies, el proyectil está a 135.69 pies del acantilado **59.** 8 p.m
61. 18.75 metros **63.** 3 pulgadas.



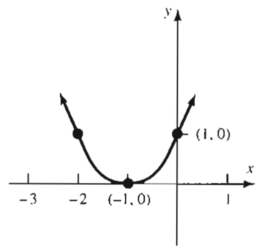
65. Ancho $= \dfrac{40}{\pi + 4} \approx 5.6$ pies; longitud ≈ 2.8 pies **67.** $x = \dfrac{16}{6 - \sqrt{3}} \approx 3.75$ pies; el otro lado ≈ 2.38 pies **69.** 70 miembros

71. $a = 6, b = 0, c = 2$; $f(x) = 6x^2 + 2$ **73.** $\frac{a}{2}$ **75.** $\left.\begin{aligned} ah^2 - bh + c &= y_0 \\ c &= y_1 \\ ah^2 + bh + c &= y_2 \end{aligned}\right\}$ $\left.\begin{aligned} y_0 + y_2 &= 2ah^2 + 2c \\ 4y_1 &= 4c \end{aligned}\right\}$ Área $= \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

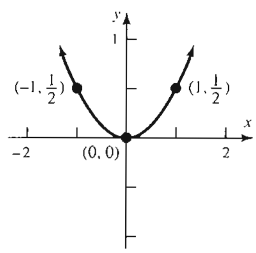
Ejercicio 3.2

1. Sí; grado 3 **3.** Sí; grado 2 **5.** No; x está elevada a la -1 **7.** No; x está elevada a la $\frac{3}{2}$ **9.** Sí; grado 4

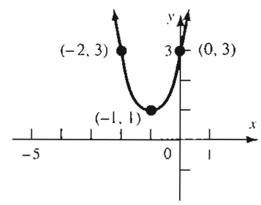
11.



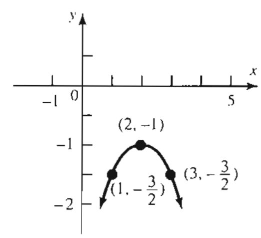
13.



15.



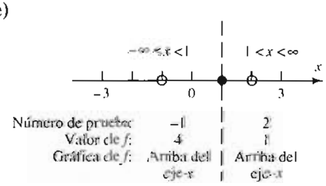
17.



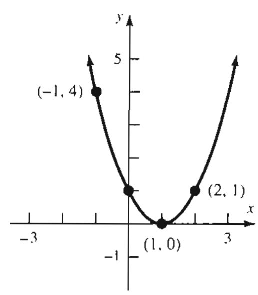
19. 7, multiplicidad 1; -3, multiplicidad 2; la gráfica toca al eje x en -3 y lo cruza en 7 **21.** 2, multiplicidad 3; la gráfica cruza el eje x en 2
23. $-\frac{1}{2}$, multiplicidad 2; la gráfica toca al eje x en $-\frac{1}{2}$ **25.** 5, multiplicidad 3; -4, multiplicidad 2; la gráfica toca al eje x en -4 y lo cruza en 5
27. No hay ceros reales; la gráfica no cruza ni toca al eje x

29. **(a)** Intersección-x: 1; intersección-y: 1
(b) Toca en 1
(c) $y = x^2$
(d) 1

(e)

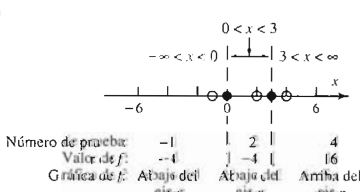


(f)

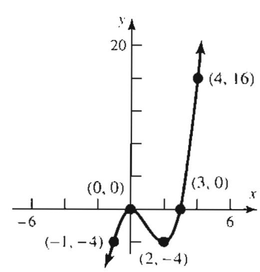


31. **(a)** Intersecciones-x: 0, 3; intersección-y: 1
(b) Toca en 0; cruza en 3
(c) $y = x^3$
(d) 2

(e)

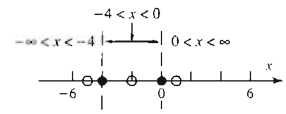


(f)



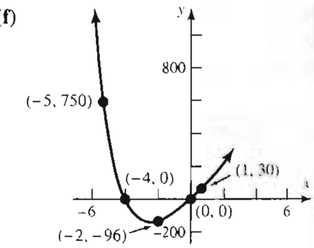
33. (a) Intersecciones-x: -4, 0; intersección-y: 0
(b) Cruza en -4, 0
(c) $y = 6x^4$
(d) 3

(e)



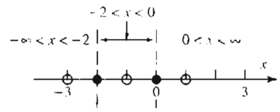
Número de prueba:	−5	−2	1
Valor de f:	750	−96	30
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

(f)



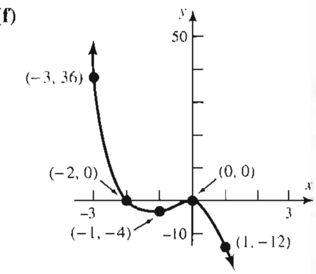
35. (a) Intersecciones-x: -2, 0; intersección-y: 0
(b) Cruza en -2, toca en 0
(c) $y = -4x^3$
(d) 2

(e)



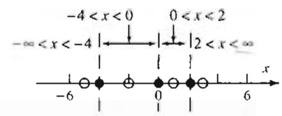
Número de prueba:	−3	−1	1
Valor de f:	36	−4	−12
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x

(f)



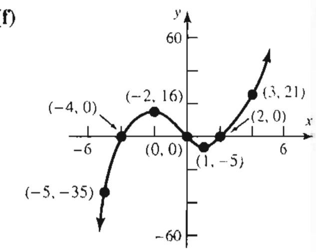
37. (a) Intersecciones-x: -4, 0, 2; intersección-y: 0
(b) Cruza en -4, 0, 2
(c) $y = x^3$
(d) 2

(e)



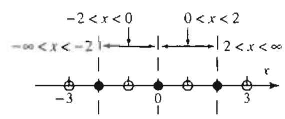
Número de prueba:	−5	−2	1	3
Valor de f:	−35	16	−5	21
Gráfica de f:	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

(f)



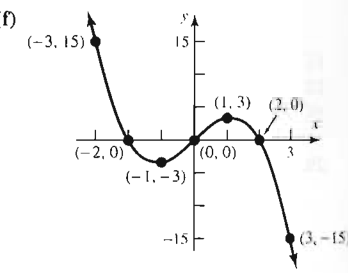
39. $f(x) = 4x - x^3 = -x(x^2 - 4) = -x(x + 2)(x - 2)$
(a) Intersecciones-x: -2, 0, 2; intersección-y: 0
(b) Cruza en -2, 0, 2
(c) $y = -x^3$
(d) 2

(e)



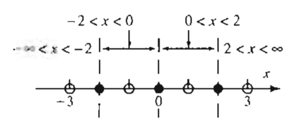
Número de prueba:	−3	−1	1	3
Valor de f:	15	−3	3	−15
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x	Abajo del eje x

(f)



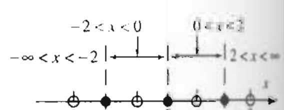
41. (a) Intersecciones-x: -2, 0, 2; intersección-y: 0
(b) Cruza en -2, 2; toca en 0
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)



Número de prueba:	−3	−1	1	3
Valor de f:	45	−3	−3	45
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

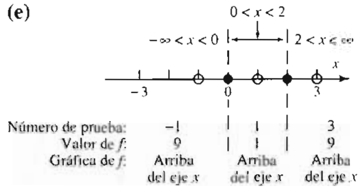
(f)



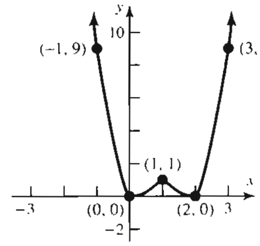
Número de prueba:	−3	−1	1	3
Valor de f:	45	−3	−3	45
Gráfica de f:	Arriba del eje x	Abajo del eje x	Abajo del eje x	Arriba del eje x

43. **(a)** Intersecciones-x: 0, 2; intersección-y: 0
(b) Toca en 0, 2
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)

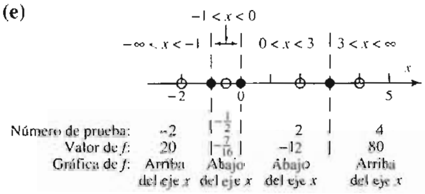


(f)

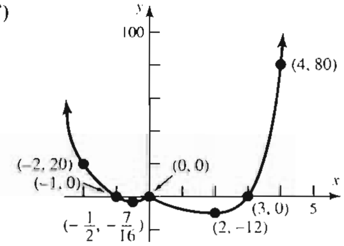


45. **(a)** Intersecciones-x: -1, 0, 3; Intersección-y: 0
(b) Cruza en -1, 3; toca en 0
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)

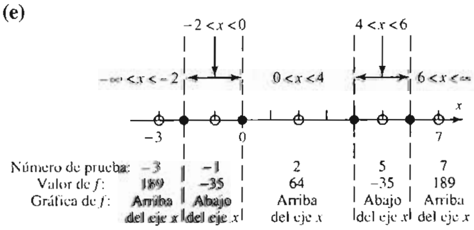


(f)

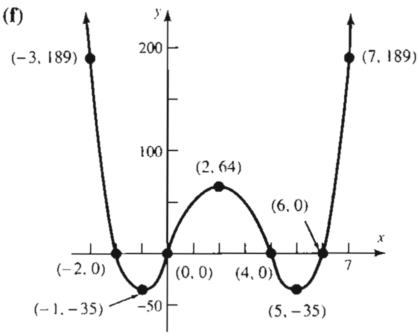


47. **(a)** Intersecciones-x: -2, 0, 4, 6; intersección-y: 0
(b) Cruza en -2, 0, 4, 6
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)

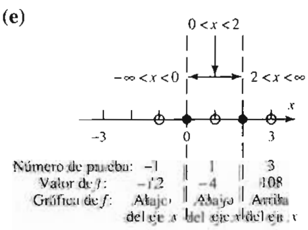


(f)

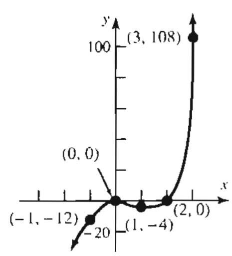


49. **(a)** Intersecciones-x: 0, 2; intersección-y: 0
(b) Toca en 0; cruza en 2
(c) $y = x^5$
(d) 4

(e)

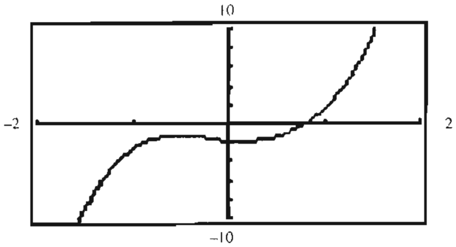


(f)

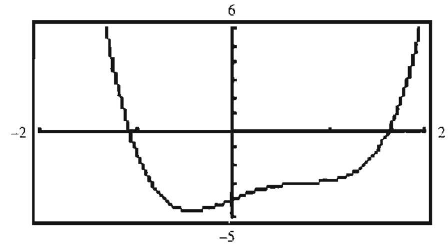


51. c, e, f **53.** c, e

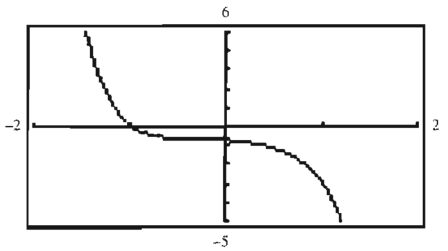
55. Intersección-x: 0.83
puntos de retorno: $(-0.50, -1.53)$, $(0.20, -2.11)$



57. Intersección-x: -1.06, 1.61
puntos de retorno: $(-0.41, -4.64)$



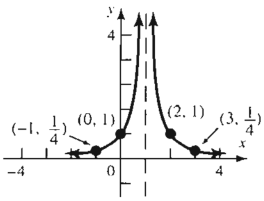
59. Intercepción x: -0.97



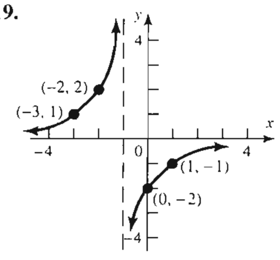
Ejercicio 3.3

1. Todos los números reales excepto 3 **3.** Todos los números reales excepto 2 y -4 **5.** Todos los números reales excepto $-\frac{1}{2}$ y 3
7. Todos los números reales excepto 2 **9.** Todos los números reales
11. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq 2\}$; Rango: $\{y|y \neq 1\}$ **(b)** $(0, 0)$ **(c)** $y = 1$ **(d)** $x = 2$ **(e)** Ninguno
13. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq 0\}$; Rango: Todos los números reales **(b)** $(-1, 0)$, $(1, 0)$ **(c)** Ninguno **(d)** Ninguno **(e)** $y = 2x$
15. **(a)** Dominio: $\{x|x \neq -2, x \neq 2\}$; Rango: $\{y|-\infty < y \leq 0, 1 < y < \infty\}$ **(b)** $(0, 0)$ **(c)** $y = 1$ **(d)** $x = -2$, $x = 2$ **(e)** Ninguno

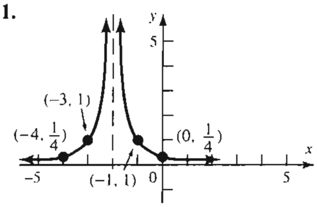
17.



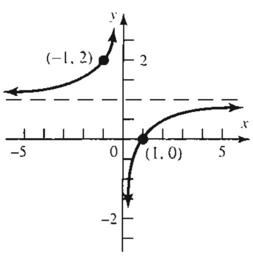
19.



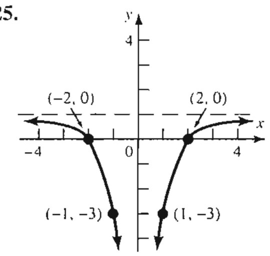
21.



23.

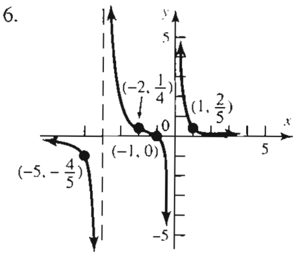


25.

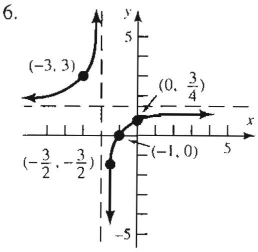


27. Asíntota horizontal: $y = 3$; asíntota vertical: $x = -4$ **29.** No tiene asíntotas
31. Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$ **33.** Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntota vertical: $x = 0$
35. Asíntota oblicua: $y = 3x$; asíntota vertical: $x = 0$

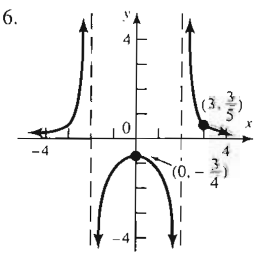
37. 1. Intersección-x: -1; intersección-y: no hay
2. No tiene simetría
3. Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = -4$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, intersecada en $(-1, 0)$
5. $x < -4$: por abajo del eje-x
$-4 < x < -1$: por arriba del eje-x
$-1 < x < 0$: por abajo del eje-x
$x > 0$: por arriba del eje-x

6.


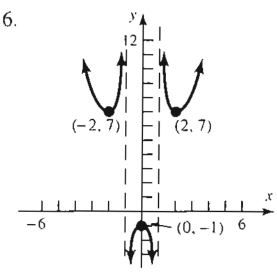
39. 1. Intersección-x: -1; intersección-y: $\frac{3}{4}$
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = -2$
4. Asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$, no intersecada
5. $x < -2$: por arriba del eje-x
$-2 < x < -1$: por abajo del eje-x
$x > -1$: por arriba del eje-x

6.


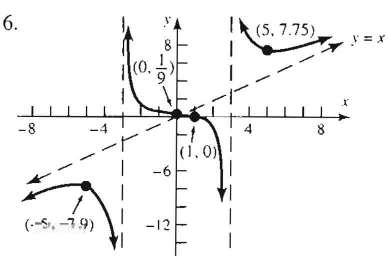
41. 1. No hay intersección-x; intersección-y; $-\frac{3}{4}$
2. Simétrica con respecto al eje-y
3. Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, no intersecada
5. $x < -2$: por arriba del eje-x
$-2 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6.


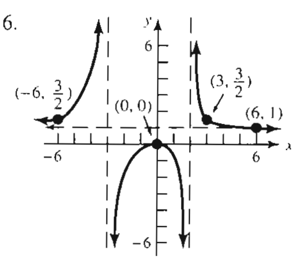
43. 1. No hay intersección-x; intersección-y: -1
2. Simétrica con respecto al eje-y
3. Asíntotas verticales: $x = -1$, $x = 1$
4. No hay asíntotas verticales ni oblicuas
5. $x < -1$: por arriba del eje-x
$-1 < x < 1$: por abajo del eje-x
$x > 1$: por arriba del eje-x

6.


45. 1. Intersección-x: 1; intersección-y: $\frac{1}{9}$
2. No tiene simetría
3. Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = -3$
4. Asíntota oblicua: $y = x$, intersecada en $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$
5. $x < -3$: por abajo del eje-x
$-3 < x < 1$: por arriba del eje-x
$1 < x < 3$: por abajo del eje-x
$x > 3$: por arriba del eje-x

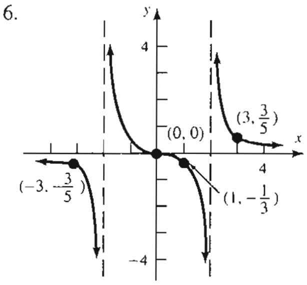
6.


47. 1. Intersección $(0, 0)$
2. No tiene simetría
3. Asíntotas verticales: $x = 2$, $x = -3$
4. Asíntota horizontal: $y = 1$, intersecada en $(6, 1)$
5. $x < -3$: por arriba del eje-x
$-3 < x < 0$: por abajo del eje-x
$0 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6.


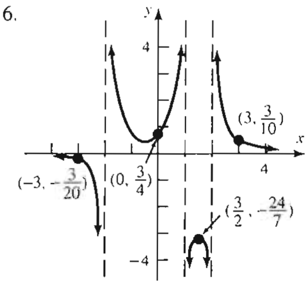
49. 1. Intersección (0, 0)
2. Simetría con respecto al origen
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, intersecada en (0, 0)
5. $x < -2$: por abajo del eje-x
$-2 < x < 0$: por arriba del eje-x
$0 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6.



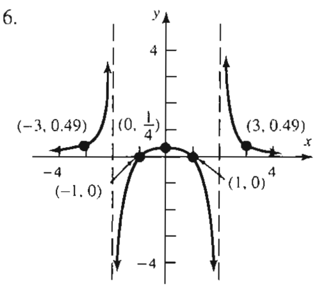
51. 1. No hay intersección-x; no hay intersección-y: $\frac{3}{4}$
2. No tiene simetría
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 1$, $x = 2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, no intersecada
5. $x < -2$: por abajo del eje-x
$-2 < x < 1$: por arriba del eje-x
$1 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6.



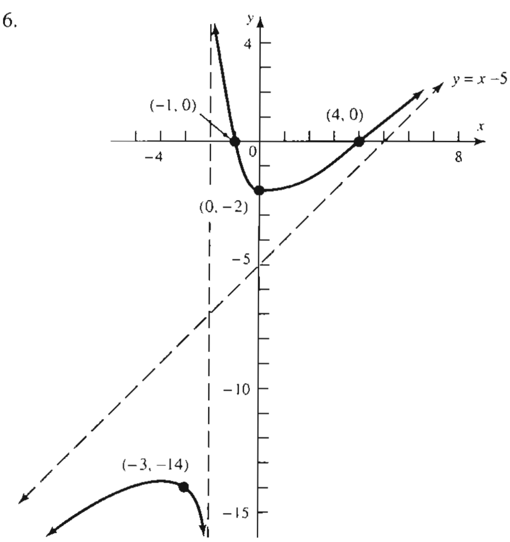
53. 1. Intersecciones-x: -1, 1; intersección-y: $\frac{1}{4}$
2. Simétrica con respecto al eje y
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, intersecada en $(-1, 0)$ y en $(1, 0)$
5. $x < -2$: por arriba del eje-x
$-2 < x < -1$: por abajo del eje-x
$-1 < x < 1$: por arriba del eje-x
$1 < x < 2$: por abajo del eje-x
$x > 2$: por arriba del eje-x

6.



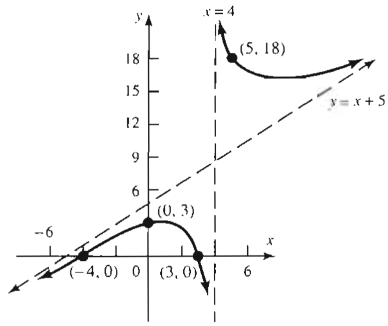
55. 1. Intersecciones-x: -1, 4; intersección-y: -2
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = -2$
4. Asíntota oblicua: $y = x - 5$, no intersecada
5. $x < -2$: por abajo del eje-x
$-2 < x < -1$: por arriba del eje-x
$-1 < x < 4$: por abajo del eje-x
$x > 4$: por arriba del eje-x

6.



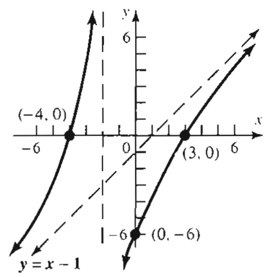
57. 1. Intersecciones-x: -4, 3; intersección-y: 3
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = 4$
4. Asíntota oblicua: $y = x + 5$, no intersecada
5. $x < -4$: por abajo del eje-x
$-4 < x < 3$: por arriba del eje-x
$3 < x < 4$: por abajo del eje-x
$x > 4$: por arriba del eje-x

6.



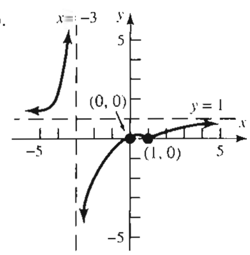
59. 1. Intersecciones-x: -4, 3; intersección-y: -6
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = -2$
4. Asíntota oblicua: $y = x - 1$, no intersecada
5. $x < -4$: por abajo del eje-x
$-4 < x < -2$: por arriba del eje-x
$-2 < x < 3$: por abajo del eje-x
$x > 3$: por arriba del eje-x

6.



61. 1. Intersecciones-x: 0, 1; intersección-y: 0
2. No tiene simetría
3. Asíntota vertical: $x = -3$
4. Asíntota horizontal: $y = 1$, no intersecada
5. $x < -3$: por arriba del eje-x
$-3 < x < 0$: por abajo del eje-x
$0 < x < 1$: por arriba del eje-x
$x > 1$: por arriba del eje-x

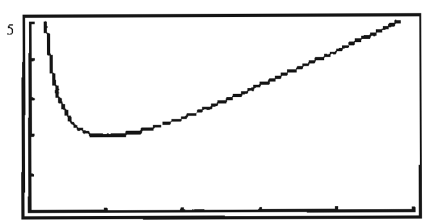
6.



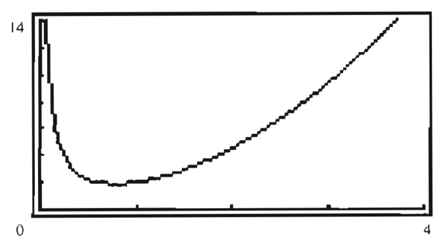
63. 4 debe ser un cero del denominador; por lo tanto, $x - 4$ debe ser un factor.

65. No. Cada una de las funciones es un cociente de polinomios, pero no escritos en los términos más simples. Cada función está indefinida para $x = 1$.

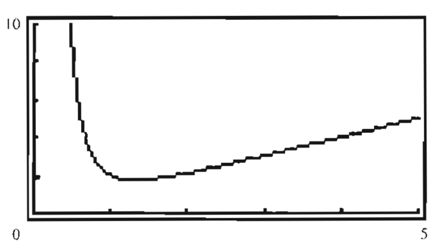
67. Valor mínimo: 2.00 en $x = 1.00$



69. Valor mínimo: 1.88 en $x = 0.79$



71. Valor mínimo: 1.75 en $x = 1.31$



73. c, d

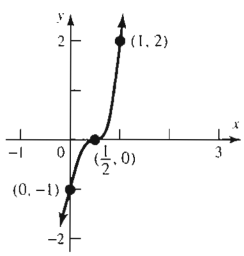
Ejercicio 3.4

1. $f(2) = 12$ **3.** $f(3) = 99$ **5.** $f(-3) = -138$ **7.** $f(1) = 7$ **9.** $f(-1.1) = -0.3531$ **11.** $q(x) = x^2 + x + 4$; $R = 12$
13. $q(x) = 3x^2 + 11x + 32$; $R = 99$ **15.** $q(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 15x + 46$; $R = -138$ **17.** $q(x) = 4x^5 + 4x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2$; $R = 7$
19. $q(x) = 0.1x^2 - 0.11x + 0.321$; $R = -0.3531$ **21.** $q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; $R = 0$ **23.** No; $f(2) = 8$ **25.** Sí; $f(2) = 0$
27. Sí; $f(-3) = 0$ **29.** No; $f(-4) = 1$ **31.** Sí; $f(\frac{1}{2}) = 0$ **33.** 69 **35.** -4 **37.** 15 **39.** $[(3x + 2)x - 5]x + 8$
41. $[(3x - 6)x \cdot x - 5]x + 10$ **43.** $(3x \cdot x \cdot x - 82)x \cdot x \cdot x + 27$ **45.** $[(4x \cdot x - 64)x \cdot x + 1]x \cdot x - 15$ **47.** $[(2x - 1)x \cdot x + 2]x - 1$
49. 10.064 **51.** -0.1472 **53.** -105.738 **55.** -134.326 **57.** 3.8192 **59.** $k = 5$ **61.** -7 **63.** Si $f(x) = x^n - c^n$, entonces $f(c) = c^n - c^n = 0$.
65. **(a)** 201,498 nanosegundos **(b)** 101,499 nanosegundos

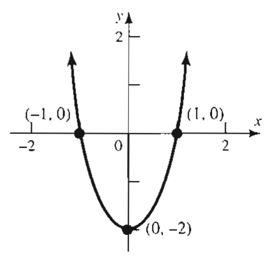
Ejercicio 3.5

1. 7; 3 o 1 positivos; 2 o 0 negativos **3.** 6; 2 o 0 positivos; 2 o 0 negativos **5.** 3; 2 o 0 positivos; 1 negativos **7.** 4; 2 o 0 positivos; 2 o 0 negativos
9. 5; 0 positivos; 3 o 1 negativos **11.** 6; 1 positivos; 1 negativos **13.** $\pm 1, \pm\frac{1}{3}$ **15.** $\pm 1, \pm 3$ **17.** $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}$
19. $\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2$ **21.** $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 4$ **23.** $\pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{3}, \pm 1, \pm 2$ **25.** $-3, -1, 2$; $f(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$
27. $\frac{1}{2}$; $f(x) = 2(x - \frac{1}{2})(x^2 + 1)$ **29.** $-1, 1$; $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2)$ **31.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; $f(x) = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})(x^2 + 2)$
33. $-2, -1, 1, 1$; $f(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)^2$ **35.** $-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 2$; $f(x) = 4(x + \sqrt{2}/2)(x - \sqrt{2}/2)(x - 2)(x^2 + \frac{1}{2})$ **37.** $\{-1, 2\}$
39. $\{\frac{2}{3}, -1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$ **41.** $\{\frac{1}{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$ **43.** $\{-3, -2\}$ **45.** $-\frac{1}{3}$

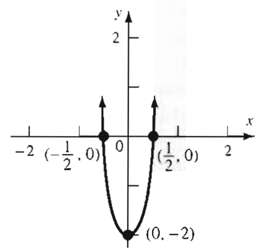
47. $(\frac{1}{2}, 0)$; $(0, -1)$
$-\infty < x < \frac{1}{2}$, $f(0) = -1$, por abajo del eje-x
$\frac{1}{2} < x < \infty$, $f(1) = 2$, por arriba del eje-x



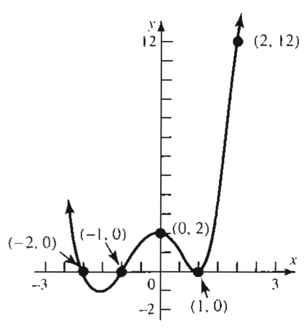
49. $(-1, 0)$; $(1, 0)$; $(0, -2)$
$-\infty < x < -1$, $f(-2) = 18$, por arriba del eje-x
$-1 < x < 1$, $f(0) = -2$, por abajo del eje-x
$1 < x < \infty$, $f(2) = 18$, por arriba del eje-x
(simétrica con respecto al eje-y)



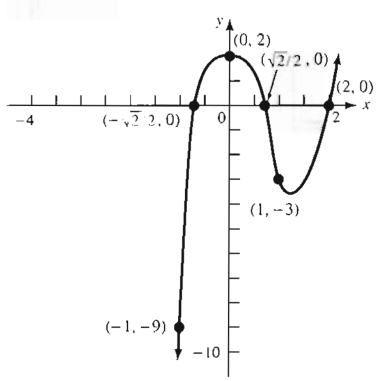
51. $(-\frac{1}{2}, 0)$; $(\frac{1}{2}, 0)$; $(0, -2)$
$-\infty < x < -\frac{1}{2}$, $f(-1) = 9$, por arriba del eje-x
$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $f(0) = -2$, por arriba del eje-x
$\frac{1}{2} < x < \infty$, $f(1) = 9$, por arriba del eje-x
(simétrica con respecto al eje-y)



53. $(-1, 0)$; $(-2, 0)$; $(1, 0)$; $(0, 2)$
$-\infty < x < -2$, $f(-3) = 32$, por arriba del eje-x
$-2 < x < -1$, $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{25}{16}$, por abajo del eje-$x$
$-1 < x < 1$, $f(0) = 2$, por arriba del eje-x
$1 < x < \infty$, $f(2) = 12$, por arriba del eje-x



55. $(2, 0)$; $(-\sqrt{2}/2, 0)$; $(\sqrt{2}/2, 0)$; $(0, 2)$
$-\infty < x < -\sqrt{2}/2$, $f(-1) = -9$, por abajo del eje-x
$-\sqrt{2}/2 < x < \sqrt{2}/2$, $f(0) = 2$, por arriba del eje-x
$\sqrt{2}/2 < x < 2$, $f(1) = -3$, por abajo del eje-x
$2 < x < \infty$, $f(3) = 323$, por arriba del eje-x



57. $\{-2, 2, -i, i\}$ **59.** $\left\{-1, 1, \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right\}$ **61.** $\left\{-2, 2, \dfrac{-3 - \sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-3 + \sqrt{3}i}{2}\right\}$ **63.** $\{1, -i, i\}$ **65.** 5
67. No (utilice el teorema de los ceros racionales) **69.** No (utilice el teorema de los ceros racionales) **71.** 7 pulgadas.
73. Todos los ceros racionales potenciales son enteros. En consecuencia, r es un entero o una raíz no racional (y, por lo tanto, irracional).

75.
$$\begin{aligned}
y^3 + by^2 + cy + d &= 0\\
\left(x-\frac{b}{3}\right)^3 + b\left(x-\frac{b}{3}\right)^2 + c\left(x-\frac{b}{3}\right) + d &= 0\\
x^3 - \frac{3b}{3}x^2 + 3\left(\frac{b^2}{9}\right)x - \frac{b^3}{27} + b\left(x^2 - \frac{2bx}{3} + \frac{b^2}{9}\right) + cx - \frac{bc}{3} + d &= 0\\
x^3 - \frac{b^2}{3}x + cx - \frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - \frac{bc}{3} + d &= 0\\
x^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)x + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) &= 0
\end{aligned}$$

77. $K = \dfrac{-p}{3H}$

$$H^3 + \left(\frac{-p}{3H}\right)^3 = -q$$
$$H^6 + qH^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$
$$H^3 = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \quad \text{elección + signo}$$
$$H = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

79. $x = H + K$; ahora utilice los resultados de los problemas 77 y 78 **81.** $p = 3$, $q = -14$; $x = \sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}$

83. $p = -6$, $q = 4$; $x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{4-8}} = \sqrt[3]{-2+2i} + \sqrt[3]{-2-2i}$; o $x^3 - 6x + 4 = (x-2)(x^2+2x-2) = 0$; $x = 2$;
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

Ejercicio 3.6

1. -1 y 1 **3.** -3 y 7 **5.** -5 y 2 **7.** $f(0) = -1$; $f(1) = 10$ **9.** $f(-5) = -58$; $f(-4) = 2$ **11.** $f(1.4) = -0.17536$; $f(1.5) = 1.40625$
13. 1.15 **15.** 2.53 **17 .** 0.21 **19.** -4.04 **21.** 1.15 **23.** 2.53 **25.** -1.00, 0.21 **27.** -4.04, 0.35, 0.69

Ejercicio 3.7

1. $4 + i$ **3.** $-i$, $1 - i$ **5.** $-i$, $-2i$ **7.** $-i$ **9.** $2 - i$, $-3 + i$
11. Los ceros que son números complejos deben aparecer en pares conjugados; o un polinomio de grado impar con coeficientes reales debe tener al menos un cero real.
13. Si el cero restante fuera complejo, entonces su conjugado también sería un cero.
15. $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **17.** $-4 + i$ **19.** $-1 + 5i$ **21.** $-4 + 4i$ **23.** $-18 - 16i$ **25.** $16 - 18i$ **27.** $38 + 31i$
29. $z^3 + (-11 - 2i)z^2 + (40 + 16i)z - 48 - 32i$ **31.** $z^3 - 3z^2 + (3 - i)z - 2 + 2i$
33. $z^4 + (2i - 6)z^3 + (8 - 12i)z^2 + (6 + 18i)z - 9$

Complete en los espacios

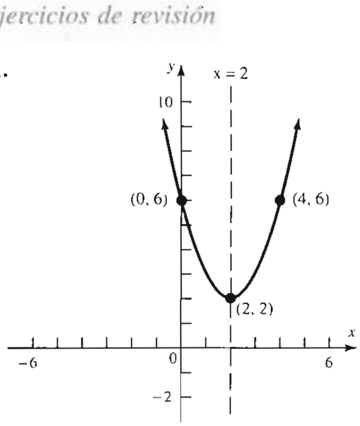
1. parábola; vértice **2.** Residuo; dividendo **3.** $f(c)$ **4.** $f(c) = 0$ **5.** cero **6.** tres; uno; dos; ningún **7.** $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$ **8.** $y = 1$
9. $x = -1$ **10.** $3 - 4i$

Cierto o falso

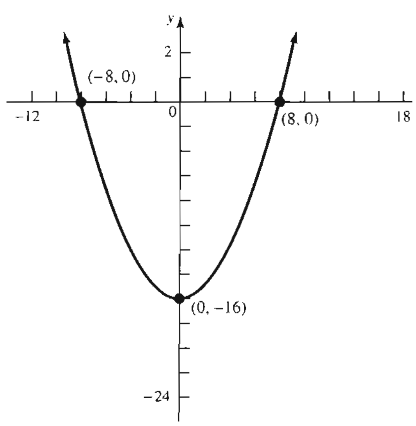
1. F **2.** F **3.** C **4.** C **5.** C

Ejercicios de revisión

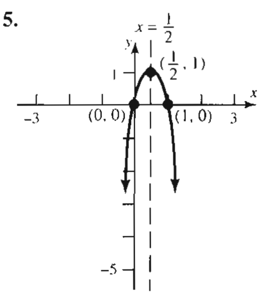
1.

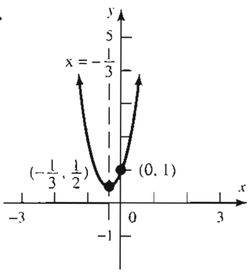


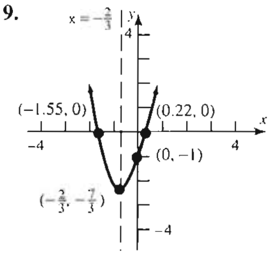
3.

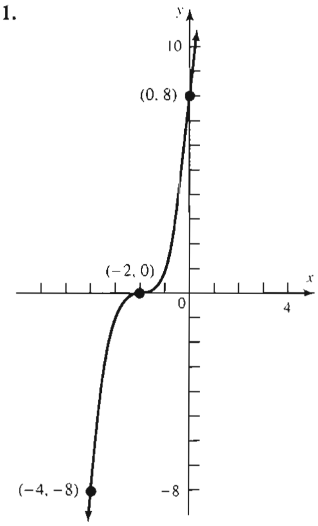


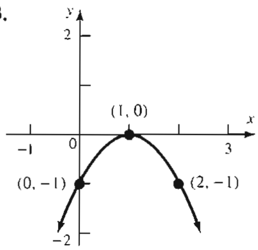
5.

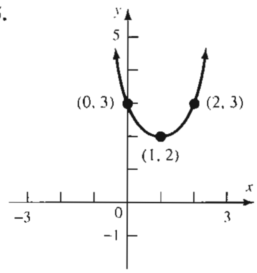


7.


9.


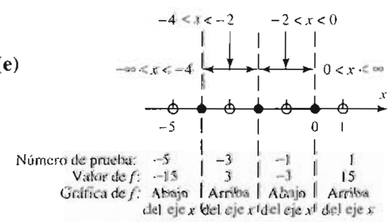
11.


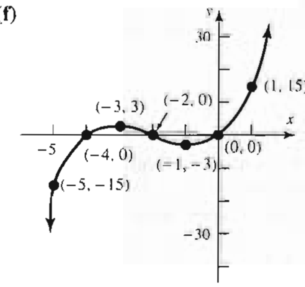
13.


15.


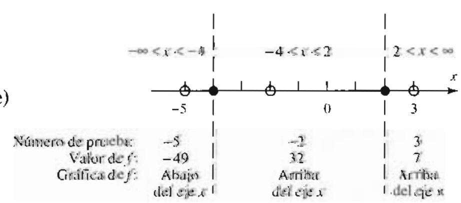
17. Valor mínimo; 1 **19.** Valor máximo; 12 **21.** Valor máximo; 16

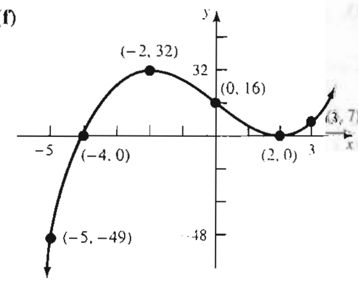
23. **(a)** Intersecciones-x: -4, -2, 0; intersecciones-y: 0
(b) Cruza el eje x-en -4, -2, 0
(c) $y = x^3$
(d) 2

(e)


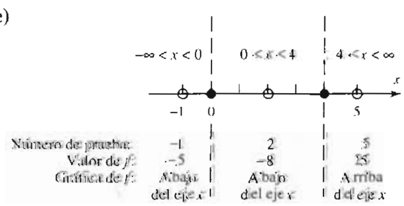
(f)


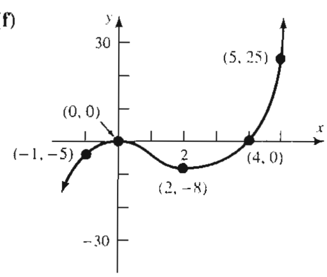
25. **(a)** Intersecciones-x: -4, 2; intersección-y: 16
(b) Cruza en -4; toca en 2
(c) $y = x^3$
(d) 2

(e)


(f)


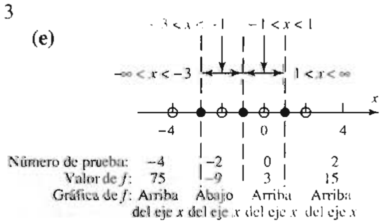
27. $f(x) = x^3 - 4x^2 = x^2(x - 4)$
(a) Intersecciones-x: 0, 4; intersección-y: 0
(b) Toca en 0; cruza en 4
(c) $y = x^3$
(d) 2

(e)


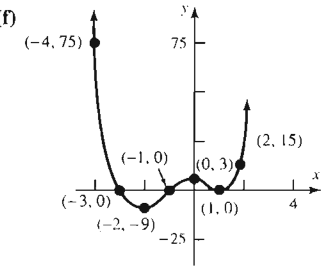
(f)


29. **(a)** Intersecciones-x: -3, -1, 1; intersección-y: 3
(b) Cruza en -3, -1; toca en 1
(c) $y = x^4$
(d) 3

(e)

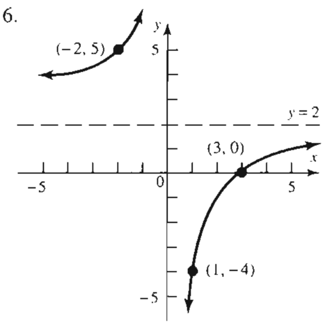


(f)



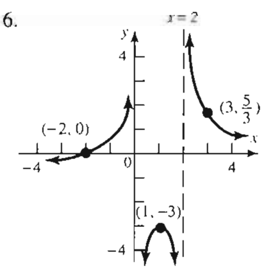
31. 1. Intersección-x: 3; no hay intersección-y
2. No hay simetría
3. Asíntota vertical: $x = 0$
4. Asíntota horizontal: $y = 2$, no la interseca
5. $x < 0$: arriba del eje-x
$0 < x < 3$: abajo del eje-x
$x > 3$: arriba del eje-x

6.



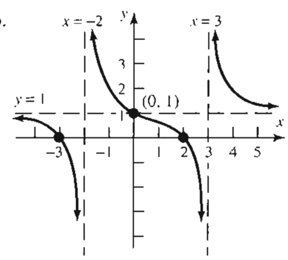
33. 1. Intersección-x: -2; no hay intersección-y
2. No hay simetría
3. Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$
4. Asíntota horizontal: $y = 0$, la interseca en $(-2, 0)$
5. $x < -2$: abajo del eje-x
$-2 < x < 0$: arriba del eje-x
$0 < x < 2$: abajo del eje-x
$x > 2$: arriba del eje-x

6.



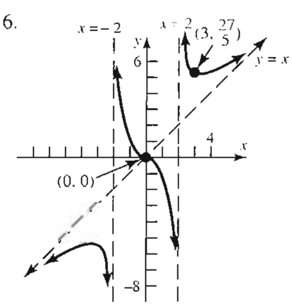
35. 1. Intersecciones: $(-3, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$
2. No hay simetría
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 3$
4. Asíntota horizontal: $y = 1$, la interseca en $(0, 1)$
5. $x < -3$: arriba del eje-x
$-3 < x < -2$: abajo del eje-x
$-2 < x < 2$: arriba del eje-x
$2 < x < 3$: abajo del eje-x
$x > 3$: arriba del eje-x

6.

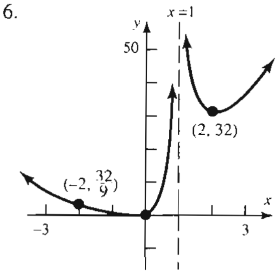


37. 1. Intersección $(0, 0)$
2. Simétrica con respecto al origen
3. Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$
4. Asíntota oblicua: $y = x$, la interseca en $(0, 0)$
5. $x < -2$: abajo del eje-x
$-2 < x < 0$: arriba del eje-x
$0 < x < 2$: abajo del eje-x
$x > 2$: arriba del eje-x

6.



39. 1. Intersección (0, 0)
2. No hay simetría
3. Asíntota vertical: $x = 1$
4. No hay asíntotas horizontal ni oblicua
5. $x < 0$: arriba del eje-x
$0 < x < 1$: abajo del eje-x
$x > 1$: arriba del eje-x

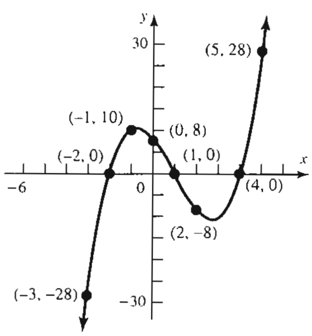
6.


41. $q(x) = 8x^2 + 5x + 6$; $R = 10$ **43.** $q(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 15$; $R = 29$ **45.** $f(4) = 47{,}105$ **47.** 4, 2, o 0 positivos; 2 o 0 negativos

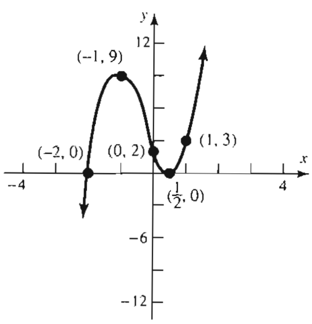
49. $\pm\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 3$ **51.** $-2, 1, 4$; $f(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 4)$

53. $\frac{1}{2}$, multiplicidad 2; -2; $f(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2(x + 2)$ **55.** 2, multiplicidad 2; $f(x) = (x - 2)^2(x^2 + 5)$ **57.** $\{-3, 2\}$ **59.** $\{-3, -1, -\frac{1}{2}, 1\}$

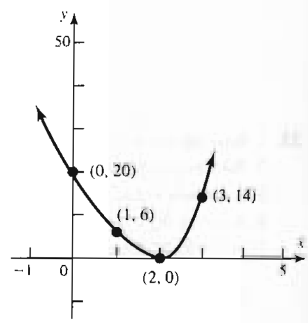
61. Intersecciones-x: $-2, 1, 4$
Intersección-y: 8
Arriba del eje-x: $-2 < x < 1$, $4 < x < \infty$
Abajo del eje-x: $-\infty < x < -2$, $1 < x < 4$



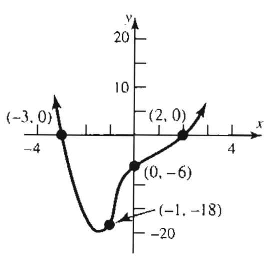
63. Intersecciones-x: $-2, \frac{1}{2}$
Intersección-y: 2
Arriba del eje-x: $-2 < x < \infty$
Abajo del eje-x: $-\infty < x < -2$



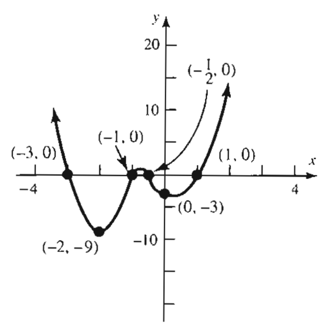
65. Intersección-x: 2
Intersección-y: 20
Arriba del eje-x: toda x



67. Intersecciones-x: $-3, 2$
Intersección-y: -6
Arriba del eje-x: $-\infty < x < -3$, $2 < x < \infty$
Abajo del eje-x: $-3 < x < 2$



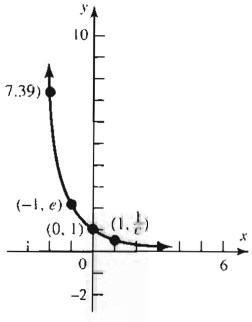
69. Intersecciones-x: $-3, -1, -\frac{1}{2}, 1$
Intersección-y: -3
Arriba del eje-x: $-\infty < x < -3$, $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $1 < x < \infty$
Abajo del eje-x: $-3 < x < -1$, $-\frac{1}{2} < x < 1$



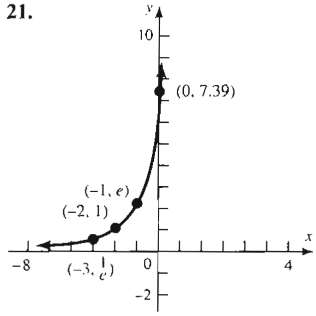
71. $f(0) = -1$; $f(1) = 1$ **73.** $f(0) = -1$; $f(1) = 1$ **75.** -2 y 2 **77.** -3 y 5 **79.** 1.52
81. 0.93 **83.** $4 - i$ **85.** $-i$, $1 - i$ **87.** $f(z) = z^4 - (5 + i)z^3 + (7 + 5i)z^2 - (3 + 7i)z + 3i$
89. $f(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + (11 + 5i)z - 6 - 6i$ **91.** $q(x) = x^2 + 5x + 6$; $R = 0$ **93.** $\{-3, 2\}$ **95.** $\{\frac{1}{3}, 1, -i, i\}$
97. $f(x) = [(8x - 3)x + 1]x - 6$; $f(1.5) = 15.75$ **99.** $f(x) = [(x - 2)x \cdot x + 1]x - 1$; $f(1.5) = -1.1875$
101. 1 es una cota superior; -2 es una cota inferior **103.** (2, 2) **105.** 3.6 pies
109. **(a)** par **(b)** positivos **(c)** par **(d)** 0 es un cero de multiplicidad par **(e)** 8

1. **(a)** 11.212 **(b)** 11.587 **(c)** 11.664 **(d)** 11.665 **3.** **(a)** 8.815 **(b)** 8.821 **(c)** 8.824 **(d)** 8.825
5. **(a)** 21.217 **(b)** 22.217 **(c)** 22.440 **(d)** 22.459 **7.** 3.320 **9.** 0.427 **11.** B **13.** D **15.** A **17.** E

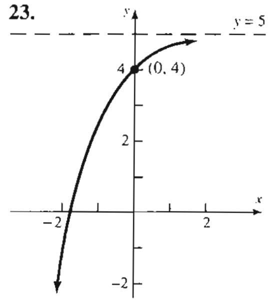
19.



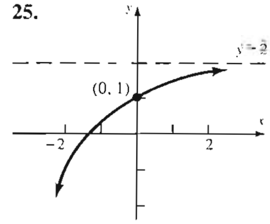
21.



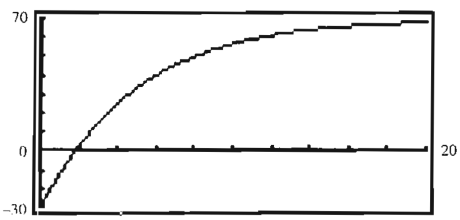
23.



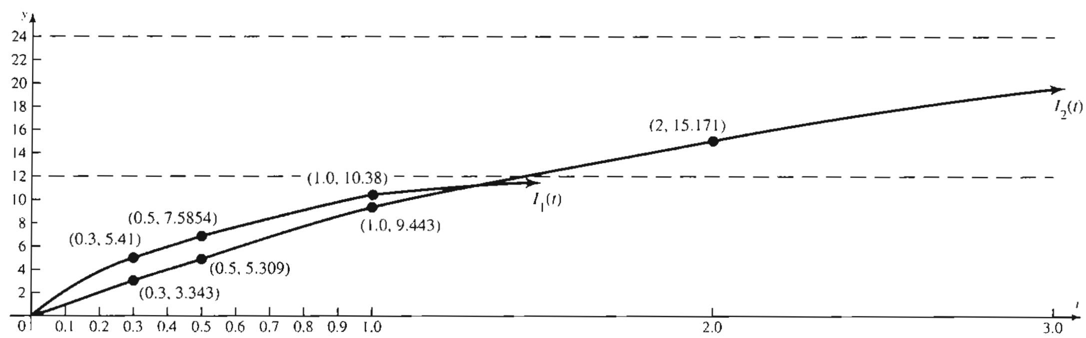
25.



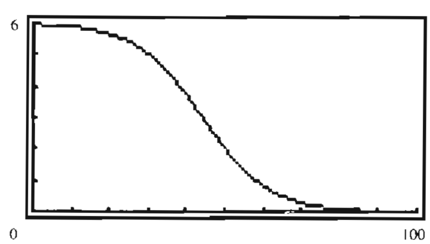
27. $\frac{1}{49}$ **29.** $\frac{1}{4}$ **31.** **(a)** 74% **(b)** 47% **33.** **(a)** 44 watts **(b)** 11.6 watts **35.** 3.35 miligramos; 0.45 miligramos
37. **(a)** 56% **(b)** 68% **(c)** 70% **(d)** R = 40% justo después de 6 días



39. **(a)** 5.414 amperes, 7.5854 amperes, 10.38 amperes **(b)** 12 amperes **(c)** $I_1(t) = 12(1 - e^{-2t})$ **(d)** 3.343 amperes, 5.309 amperes, 9.443 amperes **(e)** 24 amperes **(f)** $I_2(t) = 24(1 - e^{-1/2t})$



41. **(a)** 9.23×10^{-3} **(b)** 0.81 **(c)** 5 **(d)** 57.91°, 43.98°, 30.06°

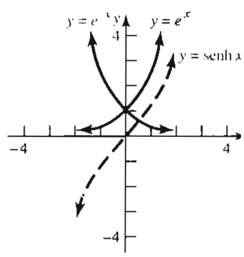


43. $n = 4$: 2.7083; $n = 6$: 2.7181; $n = 8$: 2.7182788; $n = 10$: 2.7182818

45. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{a^{x+h} - a^x}{h} = \dfrac{a^x a^h - a^x}{h} = \dfrac{a^x(a^h - 1)}{h}$ **47.** $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{f(x)}$

49. **(a)** $\operatorname{senh}(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x})$
$= -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$
$= -\operatorname{senh} x$

(b)

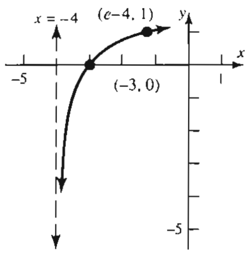


51. $f(1) = 5, f(2) = 17, f(3) = 257, f(4) = 65{,}537$; $f(5) = 4{,}294{,}967{,}297 = 641 \times 6{,}700{,}417$

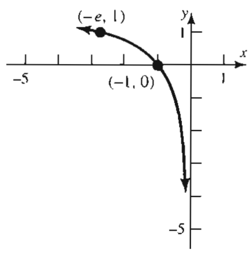
Ejercicio 4.2

1. $2 = \log_3 9$ **3.** $2 = \log_a 1.6$ **5.** $2 = \log_{1.1} M$ **7.** $x = \log_2 7.2$ **9.** $\sqrt{2} = \log_x \pi$ **11.** $x = \ln 8$ **13.** $2^3 = 8$ **15.** $a^6 = 3$ **17.** $3^x = 2$ **19.** $2^{1.3} = M$ **21.** $(\sqrt{2})^x = \pi$ **23.** $e^x = 4$ **25.** 0 **27.** 2 **29.** -4 **31.** $\frac{1}{2}$ **33.** 4 **35.** $\frac{1}{2}$ **37.** $\{x|x < 3\}$ **39.** Todos los números reales excepto 0 **41.** $\{x|x < -2 \text{ o } x > 3\}$ **43.** $\{x|x > 0, x \neq 1\}$ **45.** $\{x|x < -1 \text{ o } x > 0\}$ **47.** 0.511 **49.** 30.099 **51.** $\sqrt{2}$ **53.** B **55.** D **57.** A **59.** E

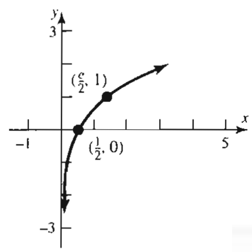
61.



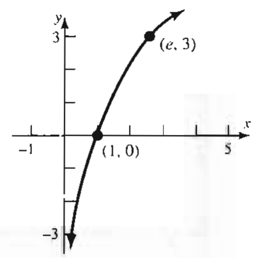
63.



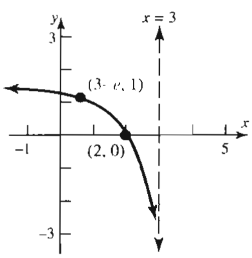
65.



67.

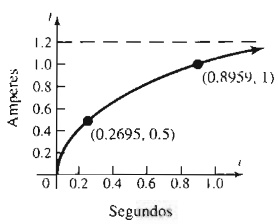


69.



71. **(a)** $n = 6.93$ de modo que se necesitan 7 cristales **(b)** $n = 13.86$ de modo que se necesitan 14 cristales
73. **(a)** $d = 127.7$ de modo que tomará casi 128 días **(b)** $d = 575.6$ de modo que tomará casi 576 días
75. $h = 2.29$ de modo que el tiempo entre inyecciones es de 2-$2\frac{1}{2}$ horas

77. 0.2695 seg; 0.8959 seg.



79. **(a)** $k = 20.07$ **(b)** 91% **(c)** 0.175 **(d)** 0.08
81. $y = 20\,e^{0.023t}$; $y = 89.2$ es pronosticado

Ejercicio 4.3

1. $a + b$ **3.** $b - a$ **5.** $a + 1$ **7.** $2a + b$ **9.** $\frac{1}{5}(a + 2b)$ **11.** $\dfrac{b}{a}$ **13.** $2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(1 - x)$ **15.** $3 \log_2 x - \log_2(x - 3)$
17. $\log x + \log(x + 2) - 2 \log(x + 3)$ **19.** $\frac{1}{3} \ln(x - 2) + \frac{1}{3} \ln(x + 1) - \frac{2}{3} \ln(x + 4)$ **21.** $\ln 5 + \ln x + \frac{1}{2} \ln(1 - 3x) - 3 \ln(x - 4)$
23. $\log_5 u^3 v^4$ **25.** $-\frac{5}{2} \log_{1/2} x$ **27.** $-2 \ln(x - 1)$ **29.** $\log_2[x(3x - 2)^4]$ **31.** $\log_a\left[\dfrac{25x^6}{(2x + 3)^{1/2}}\right]$ **33.** 2.771 **35.** -3.880

37. 5.615 **39.** 0. 874 **41.** $\log_a(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \log_a[(x + \sqrt{x^2 - 1})(x - \sqrt{x^2 - 1})] = \log_a[x^2 - (x^2 - 1)] = \log_a 1 = 0$
43. $\ln(1 + e^{2x}) = \ln[e^{2x}(e^{-2x} + 1)] = \ln e^{2x} + \ln(e^{-2x} + 1) = 2x + \ln(1 + e^{-2x})$

45. $y = f(x) = \log_a x;\ a^y = x;\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-y} = x;\ -y = \log_{1/a} x;\ -f(x) = \log_{1/a} x$ **47.** $f(AB) = \log_a AB = \log_a A + \log_a B = f(A) + f(B)$

49. $y = Cx$ **51.** $y = Cx(x + 1)$ **53.** $y = Ce^{3x}$ **55.** $y = Ce^{-4x} + 3$ **57.** $y = \dfrac{\sqrt[3]{C}(2x + 1)^{1/6}}{(x + 4)^{1/9}}$ **59.** 3 **61.** 1

63. Si $A = \log_a M$ y $B = \log_a N$, entonces $a^A = M$ y $a^B = N$. Entonces $\log_a(M/N) = \log_a(a^A/a^B) = \log_a a^{A-B} = A - B = \log_a M - \log_a N$.

Ejercicio 4.4

1. $\frac{7}{2}$ **3.** $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$ **5.** 16 **7.** 8 **9.** 3 **11.** 5 **13.** 2 **15.** $\{-2, 4\}$ **17.** 21 **19.** $\frac{1}{2}$ **21.** $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$

23. $\left\{1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$ **25.** 0 **27.** 2 **29.** 0 **31.** $\frac{3}{2}$ **33.** 3.322 **35.** −0.088 **37.** 0.307 **39.** 1.356 **41.** 0

43. 0.534 **45.** 0.226 **47.** 2.027 **49.** $\frac{9}{2}$ **51.** 2 **53.** −1 **55.** 1 **57.** 16 **59.** −0.56 **61.** −0.70
63. 0.56 **65.** {0.39, 1.00} **67.** 1.31 **69.** 1.30

Ejercicio 4.5

1. \$108.29 **3.** \$609.50 **5.** \$697.09 **7.** \$12.46 **9.** \$125.23 **11.** \$88.72 **13.** \$860.72 **15.** \$554.09 **17.** \$59.71 **19.** \$361.93

21. 5.35% **23.** 26% **25.** $6\frac{1}{4}$% compuesto anualmente **27.** 9% compuesto mensualmente **29.** 104.32 mensual; 103.97 mensual

31. 61.02 mensual; 60.82 mensual **33.** 15.27 años o 15 años 4 meses **35.** \$104,335 **37.** \$12,910.62 **39.** Alrededor de \$30.17 por acción o \$3017

41. 9.35% **43.** No completamente. Tendrá \$1057.60. El segundo banco da una mejor cantidad, ya que usted obtiene \$1060.62 después de 1 año

45. Usted obtiene \$11,632.73; su amigo \$10,947.89

47. (a) El interés es de \$30,000.00 (b) El interés es de \$38,613.59 (c) El interés es de \$37,752.73. Es mejor interés simple al 12%

49. (a) \$1364.62 (b) \$1353.35 **51.** \$4631.93

59. (a) 6.1 años (b) 18.45 años (c)
$$mP = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$m = \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$\ln m = \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = nt \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$
$$t = \frac{\ln m}{n \ln\left(1 + \frac{r}{n}\right)}$$

Ejercicio 4.6

1. 34.7 días; 69.3 días **3.** 28.4 años **5.** 94.4 años **7.** 5832; 3.9 días **9.** 25,198 **11.** 9.797 g **13.** Hace 9727 años **15.** 5:18 p.m.
17. 18.63°C; 25.1°C **19.** 7.34 kg; 76.6 horas **21.** 26.5 días.

Ejercicio 4.7

1. 70 decibeles **3.** 111.76 decibeles **5.** 10 W/m^2 **7.** 4.0 en la escala de Richter
9. 70,794.58 mm; el terremoto de San Francisco fue 11.22 veces más intenso qué el de la Ciudad de México.

Complete en los espacios

1. (0, 1) y (1, a) **2.** 1 **3.** 4 **4.** suma **5.** 1 **6.** 7 **7.** $x > 0$ **8.** (1, 0) y (a, 1) **9.** 1 **10.** 7

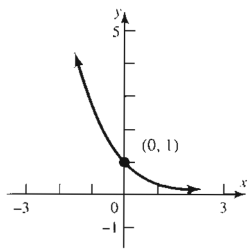
Cierto o falso

1. C **2.** C **3.** F **4.** F **5.** C **6.** F **7.** F **8.** C

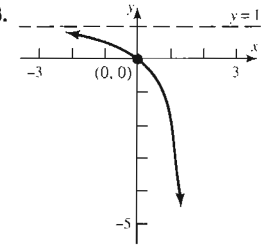
Ejercicios de revisión

1. −3 **3.** $\sqrt{2}$ **5**. 0.4 **7.** $\frac{25}{4}\log_4 x$ **9.** $\ln\left[\frac{1}{(x + 1)^2}\right] = -2\ln(x + 1)$ **11.** $\log\left(\frac{4x^3}{[(x + 3)(x - 2)]^{1/2}}\right)$ **13.** $y = Ce^{2x}$

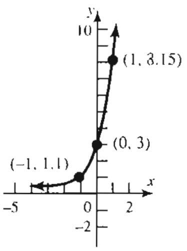
15. $y = (Ce^{3x^2})^2$ **17.** $y = \sqrt{e^{x+C} + 9}$ **19.** $y = \ln(x^2 + 4) - C$ **21.**



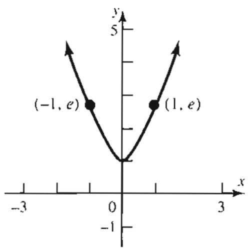
23.



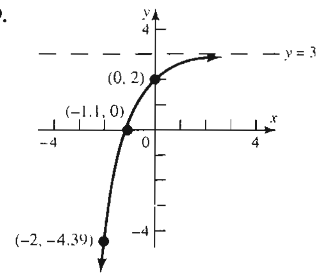
25.



27.



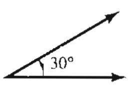
29.



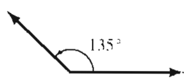
31. $\frac{1}{4}$ **33.** $\left\{\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}$ **35.** $\frac{1}{4}$ **37.** 4.301 **39.** $\frac{12}{5}$ **41.** 83 **43.** $\left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$ **45.** −1 **47.** −0.609 **49.** −9.327
51. 3229.5 m **53.** 7.6 mm de mercurio **55.** **(a)** 37.3 watts **(b)** 6.9 decibeles
57. **(a)** 71% **(b)** 85.5% **(c)** 90% **(d)** Casi 1.6 meses **(e)** Casi 4.8 meses
59. **(a)** 9.85 años **(b)** 4.27 años **61.** $41,669 **63.** 80 decibeles **65.** hace 24,203 años

CAPÍTULO 5 *Ejercicio 5.1*

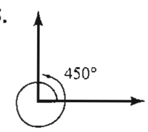
1.



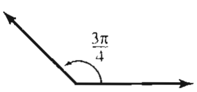
3.



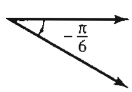
5.



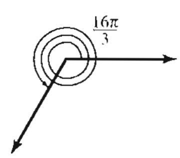
7.



9.



11.



13. $\dfrac{\pi}{6}$ **15.** $\dfrac{4\pi}{3}$ **17.** $\dfrac{-\pi}{3}$ **19.** π **21.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **23.** 60° **25.** −225° **27.** 90° **29.** 15° **31.** 120° **33.** 5 m **35.** 6 pies **37.** 0.6 radián
39. $\dfrac{\pi}{3} \approx 1.047$ pulgadas. **41.** 0.30 **43.** −0.70 **45.** 2.18 **47.** 5.93 **49.** 179.91° **51.** 587.28° **53.** 114.59° **55.** 362.11° **57.** 40.17° **59.** 1.03°
61. 9.15° **63.** 40°19′12″ **65.** 18°15′18″ **67.** 19°59′24″ **69.** $3\pi \approx 9.4248$ pulgadas.; $5\pi \approx 15.7080$ pulgadas. **71.** $\omega = \frac{1}{60}$ radián/s; $v = \frac{1}{12}$ cm/s
73. 452.5 rpm **75.** 37.7 pulgadas. **77.** 2292 mph **79.** $\frac{3}{4}$ rpm **81.** 2.86 mph **83.** 1.152 millas **85.** 1037 mph

Ejercicio 5.2

1. sen $\theta = \frac{4}{5}$, cos $\theta = -\frac{3}{5}$, tan $\theta = -\frac{4}{3}$, csc $\theta = \frac{5}{4}$, sec $\theta = -\frac{5}{3}$, cot $\theta = -\frac{3}{4}$
3. sen $\theta = -3\sqrt{13}/13$, cos $\theta = 2\sqrt{13}/13$, tan $\theta = -\frac{3}{2}$, csc $\theta = -\sqrt{13}/3$, sec $\theta = \sqrt{13}/2$, cot $\theta = -\frac{2}{3}$
5. sen $\theta = -\sqrt{2}/2$, cos $\theta = -\sqrt{2}/2$, tan $\theta = 1$, csc $\theta = -\sqrt{2}$, sec $\theta = -\sqrt{2}$, cot $\theta = 1$
7. sen $\theta = -2\sqrt{13}/13$, cos $\theta = -3\sqrt{13}/13$, tan $\theta = \frac{2}{3}$, csc $\theta = -\sqrt{13}/2$, sec $\theta = -\sqrt{13}/3$, cot $\theta = \frac{3}{2}$
9. sen $\theta = -\frac{3}{5}$, cos $\theta = \frac{4}{5}$, tan $\theta = -\frac{3}{4}$, csc $\theta = -\frac{5}{3}$, sec $\theta = \frac{5}{4}$, cot $\theta = -\frac{4}{3}$

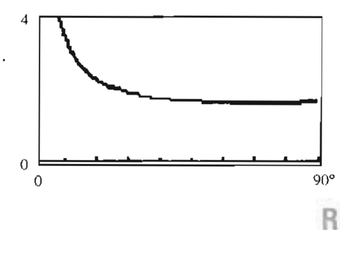
11. $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$ **13.** 2 **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** $\sqrt{6}$ **19.** 4 **21.** 0 **23.** 0 **25.** $2\sqrt{2} + 4\sqrt{3}/3$ **27.** -1 **29.** 1
31. $\text{sen}(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\cos(2\pi/3) = -\frac{1}{2}$, $\tan(2\pi/3) = -\sqrt{3}$, $\csc(2\pi/3) = 2\sqrt{3}/3$, $\sec(2\pi/3) = -2$, $\cot(2\pi/3) = -\sqrt{3}/3$
33. $\text{sen } 150° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = -\sqrt{3}/2$, $\tan 150° = -\sqrt{3}/3$, $\csc 150° = 2$, $\sec 150° = -2\sqrt{3}/3$, $\cot 150° = -\sqrt{3}$
35. $\text{sen}(-\pi/6) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\tan(-\pi/6) = -\sqrt{3}/3$, $\csc(-\pi/6) = -2$, $\sec(-\pi/6) = 2\sqrt{3}/3$, $\cot(-\pi/6) = -\sqrt{3}$
37. $\text{sen } 225° = -\sqrt{2}/2$, $\cos 225° = -\sqrt{2}/2$, $\tan 225° = 1$, $\csc 225° = -\sqrt{2}$, $\sec 225° = -\sqrt{2}$, $\cot 225° = 1$
39. $\text{sen}(5\pi/2) = 1$, $\cos(5\pi/2) = 0$, $\tan(5\pi/2)$ no está definida, $\csc(5\pi/2) = 1$, $\sec(5\pi/2)$ no está definida, $\cot(5\pi/2) = 0$
41. $\text{sen}(-180°) = 0$, $\cos(-180°) = -1$, $\tan(-180°) = 0$, $\csc(-180°)$ no está definida, $\sec(-180°) = -1$, $\cot(-180°)$ no está definida
43. $\text{sen}(3\pi/2) = -1$, $\cos(3\pi/2) = 0$, $\tan(3\pi/2)$ no está definida, $\csc(3\pi/2) = -1$, $\sec(3\pi/2)$ no está defindia, $\cot(3\pi/2) = 0$
45. $\text{sen } 450° = 1$, $\cos 450° = 0$, $\tan 450°$ no está definida, $\csc 450° = 1$, $\sec 450°$ no está definida, $\cot 450° = 0$ **47.** 0.47
49. 0.38 **51.** 1.33 **53.** 0.36 **55.** 0.31 **57.** 3.73 **59.** 1.04 **61.** 5.67 **63.** 0.84 **65.** 0.02 **67.** 0.93
69. 0.31 **71.** $\sqrt{3}/2$ **73.** $\frac{1}{2}$ **75.** $\frac{3}{4}$ **77.** $\sqrt{3}/2$ **79.** $\sqrt{3}$ **81.** $\sqrt{3}/4$ **83.** 0 **85.** -0.1 **87.** 3 **89.** 5
91. $R \approx 310.56$ pies, $H \approx 77.64$ pies **93.** $R \approx 19{,}542$ m, $H \approx 2278$ m **95.** (a) 1.2 sec (b) 1.12 sec (c) 1.2 sec
97. (a) 1.9 h (b) 1.69 h (c) 1.63 h (d) 1.67 h **99.** 16.56 pies

Ejercicio 5.3

1. $\sqrt{2}/2$ **3.** 1 **5.** 1 **7.** $\sqrt{3}$ **9.** $\sqrt{2}/2$ **11.** 0 **13.** $\sqrt{2}$ **15.** $\sqrt{3}/3$ **17.** II **19.** IV **21.** IV **23.** II
25. $\tan\theta = 2$, $\cot\theta = \frac{1}{2}$, $\sec\theta = \sqrt{5}$, $\csc\theta = \sqrt{5}/2$ **27.** $\tan\theta = \sqrt{3}/3$, $\cot\theta = \sqrt{3}$, $\sec\theta = 2\sqrt{3}/3$, $\csc\theta = 2$
29. $\tan\theta = -\sqrt{2}/4$, $\cot\theta = -2\sqrt{2}$, $\sec\theta = 3\sqrt{2}/4$, $\csc\theta = -3$
31. $\tan\theta = 0.2679$, $\cot\theta = 3.7322$, $\sec\theta = 1.0353$, $\csc\theta = 3.8640$
33. $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$, $\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$
35. $\text{sen }\theta = -\frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$
37. $\cos\theta = -\frac{12}{13}$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$, $\cot\theta = -\frac{12}{5}$, $\sec\theta = -\frac{13}{12}$, $\csc\theta = \frac{13}{5}$
39. $\text{sen }\theta = 2\sqrt{2}/3$, $\tan\theta = -2\sqrt{2}$, $\cot\theta = -\sqrt{2}/4$, $\sec\theta = -3$, $\csc\theta = 3\sqrt{2}/4$
41. $\cos\theta = -\sqrt{5}/3$, $\tan\theta = -2\sqrt{5}/5$, $\cot\theta = -\sqrt{5}/2$, $\sec\theta = -3\sqrt{5}/5$, $\csc\theta = \frac{3}{2}$
43. $\text{sen }\theta = -\sqrt{3}/2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\cot\theta = -\sqrt{3}/3$, $\csc\theta = -2\sqrt{3}/3$
45. $\text{sen }\theta = -\frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\csc\theta = -\frac{5}{3}$
47. $\text{sen }\theta = \sqrt{10}/10$, $\cos\theta = -3\sqrt{10}/10$, $\cot\theta = -3$, $\sec\theta = -\sqrt{10}/3$, $\csc\theta = \sqrt{10}$ **49.** $-\sqrt{3}/2$ **51.** $-\sqrt{3}/3$ **53.** 2
55. -1 **57.** -1 **59.** $\sqrt{2}/2$ **61.** 0 **63.** $-\sqrt{2}$ **65.** $2\sqrt{3}/3$ **67.** -1 **69.** -2 **71.** $1 - \sqrt{2}/2$ **73.** 1 **75.** 1 **77.** 0 **79.** 0.9 **81.** 9
83. 15.8 minutos **85.** En los múltiplos impares de $\pi/2$ **87.** En los múltiplos impares de $\pi/2$ **89.** 0
91. Sea $P = (x, y)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ. Considere la ecuación $\tan\theta = y/x = a$. Entonces $y = ax$. Pero $x^2 + y^2 = 1$ de modo que $x^2 + a^2x^2 = 1$. Si, $x = \pm 1/\sqrt{1 + a^2}$ y $y = \pm a/\sqrt{1 + a^2}$; esto es, para cualquier número real a, hay un punto $P = (x, y)$ sobre el círculo unitario para el que $\tan\theta = a$. En otras palabras, $-\infty < \tan\theta < \infty$, y el rango de la función tangente es el conjunto de todos los números reales.
93. Suponga que existe un número p, $0 < p < 2\pi$, para el que $\text{sen}(\theta + p) = \text{sen }\theta$ para toda θ. Si $\theta = 0$, entonces $\text{sen}(0 + p) = \text{sen } p = \text{sen } 0 = 0$; de modo que $p = \pi$. Si $\theta = \pi/2$, entonces $\text{sen}(\pi/2 + p) = \text{sen}(\pi/2)$. Pero $p = \pi$. Así, $\text{sen}(3\pi/2) = -1 = \text{sen}(\pi/2) = 1$. Esto es imposible. El número positivo más pequeño p para el que $\text{sen}(\theta + p) = \text{sen }\theta$ para toda θ por lo tanto $p = 2\pi$.
95. $\sec\theta = 1/(\cos\theta)$; ya que $\cos\theta$ tiene periodo 2π, así también $\sec\theta$
97. Si $P = (a, b)$ es el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ, entonces $Q = (-a, -b)$ es el punto sobre el círculo unitario que corresponde a $\theta + \pi$. Así, $\tan(\theta + \pi) = (-b)/(-a) = b/a = \tan\theta$; esto es, el periodo de la función tangente es π.
99. Sea $P = (a, b)$ el punto sobre el círculo unitario que corresponde a θ. Entonces $\csc\theta = 1/b = 1/(\text{sen }\theta)$; $\sec\theta = 1/a = 1/(\cos\theta)$; $\cot\theta = a/b = 1/(b/a) = 1/(\tan\theta)$.
101. $(\text{sen }\theta\cos\phi)^2 + (\text{sen }\theta\text{ sen }\phi)^2 + \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta\cos^2\phi + \text{sen}^2\theta\text{ sen}^2\phi + \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta(\cos^2\phi + \text{sen}^2\phi) + \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

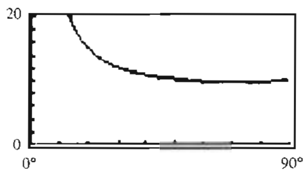
Ejercicio 5.4

1. $\text{sen }\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$, $\csc\theta = \frac{13}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, $\cot\theta = \frac{12}{5}$
3. $\text{sen }\theta = 2\sqrt{13}/13$, $\cos\theta = 3\sqrt{13}/13$, $\tan\theta = \frac{2}{3}$, $\csc\theta = \sqrt{13}/2$, $\sec\theta = \sqrt{13}/3$, $\cot\theta = \frac{3}{2}$
5. $\text{sen }\theta = \sqrt{3}/2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, $\csc\theta = 2\sqrt{3}/3$, $\sec\theta = 2$, $\cot\theta = \sqrt{3}/3$
7. $\text{sen }\theta = \sqrt{6}/3$, $\cos\theta = \sqrt{3}/3$, $\tan\theta = \sqrt{2}$, $\csc\theta = \sqrt{6}/2$, $\sec\theta = \sqrt{3}$, $\cot\theta = \sqrt{2}/2$
9. $\text{sen }\theta = \sqrt{5}/5$, $\cos\theta = 2\sqrt{5}/5$, $\tan\theta = \frac{1}{2}$, $\csc\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = \sqrt{5}/2$, $\cot\theta = 2$ **11.** 30° **13.** 60° **15.** 30° **17.** $\pi/4$ **19.** $\pi/3$
21. 45° **23.** $\pi/3$ **25.** 60° **27.** $\frac{1}{2}$ **29.** $\sqrt{2}/2$ **31.** -2 **33.** $-\sqrt{3}$ **35.** $\sqrt{2}/2$ **37.** $\sqrt{3}$ **39.** $\frac{1}{2}$ **41.** $-\sqrt{3}/2$ **43.** $-\sqrt{3}$ **45.** $\sqrt{2}$
47. 0 **49.** 1 **51.** 0 **53.** 0 **55.** 1 **57.** (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{8}{9}$ (c) 3 (d) 3 **59.** (a) 17 (b) $\frac{1}{4}$ (c) 4 (d) $\frac{17}{16}$
61. (a) $\frac{1}{3}$ (b) 15 (c) 4 (d) $\frac{16}{15}$ **63.** 0.6 **65.** 0 **67.** 20°
69. (a) $T(\theta) = 1 + \dfrac{2}{3\text{ sen }\theta} - \dfrac{1}{4\tan\theta}$ (b) $\theta = 67.97°$ para el menor tiempo; el menor tiempo es $T = 1.62$ horas. Sally está en el camino durante 0.9 horas.



71. **(a)** 10 min **(b)** 20 min **(c)** $T(\theta) = 5\left(1 - \frac{1}{3\tan\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)$ **(d)** 10.4 min

(e) T es menor para $\theta = 70.5°$; el menor tiempo es 9.7 min; $x = 177$ pies



75.

θ	0.5	0.4	0.2	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$\operatorname{sen}\theta$	0.4794	0.3894	0.1987	0.0998	0.0100	0.0010	0.0001	0.00001
$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$	0.9589	0.9735	0.9933	0.9983	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$ se aproxima a 1 cuando θ se aproxima a 0

77. **(a)** $|OA| = |OC| = 1$; Ángulo OAC + Ángulo $OAC + 180° - \theta = 180°$; Ángulo $OAC = \theta/2$

(b) $\operatorname{sen}\theta = \frac{|CD|}{|OC|} = |CD|$; $\cos\theta = \frac{|OD|}{|OC|} = |OD|$ **(c)** $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|CD|}{|AD|} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + |OD|} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta}$

79. $h = x\tan\theta$ y $h = (1 - x)\tan n\theta$; así, $x\tan\theta = (1 - x)\tan n\theta$ y $x = \frac{\tan n\theta}{\tan\theta + \tan n\theta}$

81. **(a)** Área $\triangle OAC = \frac{1}{2}|OC||AC| = \frac{1}{2}\cdot\frac{|OC|}{1}\cdot\frac{|AC|}{1} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

(b) Área $\triangle OCB = \frac{1}{2}|BC||OC| = \frac{1}{2}|OB|^2\frac{|BC|}{|OB|}\cdot\frac{|OC|}{|OB|} = \frac{1}{2}|OB|^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta$

(c) Área $\triangle OAB = \frac{1}{2}|BD||OA| = \frac{1}{2}|OB|\frac{|BD|}{|OB|} = \frac{1}{2}|OB|\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ **(d)** $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{|OC|/1}{|OC|/|OB|} = |OB|$

(e) Utilice la sugerencia y los resultados de las partes de la (a) a la (d).

83. $\operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha = \cos\beta\tan\beta = \operatorname{sen}\beta$; $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, Así,

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \tan^2\beta = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta} = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = 1$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$$
$$\operatorname{sen}^4\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha + 1 = 0$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

Ejercicio 5.5

1. $a \approx 13.74$, $c \approx 14.62$, $\alpha = 70°$ **3.** $b \approx 5.03$, $c \approx 7.83$, $\alpha = 50°$ **5.** $a \approx 0.705$, $c \approx 4.06$, $\beta = 80°$ **7.** $b \approx 10.72$, $c \approx 11.83$, $\beta = 65°$ **9.** $b \approx 3.08$, $a \approx 8.46$, $\alpha = 70°$ **11.** $c \approx 5.83$, $a \approx 59.0°$, $\beta \approx 31.0°$ **13.** $b \approx 4.58$, $\alpha \approx 23.6°$, $\beta \approx 66.4°$ **15.** 1.72 pulgadas., 2.46 pulgadas **17.** 6.10 pulgadas o 8.72 pulgadas. **19.** 23.6° y 66.4° **21.** 70 pies **23.** 985.9 pies **25.** 137 m **27.** 20.67 pies **29.** 449.36 pies **31.** 80.5° **33.** 30 pies **35.** 530 pies **37.** 555 pies **39.** **(a)** 112 pies/seg 76.3 mph **(b)** 82.4 pies/seg 56.2 mph **(c)** menores a 18.8° **41.** **(a)** 130° **(b)** 103.4° **43.** 14.9° **45.** **(a)** 3.1 mi. **(b)** 3.2 mi **(c)** 3.8 mi

47. **(a)** $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3960}{3960 + h}$ **(b)** $d = 3960\,\theta$ **(c)** $\cos\frac{d}{7920} = \frac{3960}{3960 + h}$ **(d)** 206 mi **(e)** 2990 millas

Complete los espacios

1. ángulo; lado inicial; lado terminal **2.** radianes **3.** π **4.** complementario **5.** coseno **6.** posición estándard **7.** 45° **8.** 2π, π

Cierto o falso

1. F **2.** C **3.** F **4.** C **5.** F **6.** F

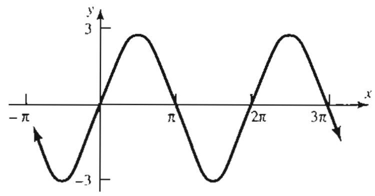
Ejercicios de revisión

1. $3\pi/4$ **3.** $\pi/10$ **5.** 135° **7.** $-450°$ **9.** $\frac{1}{2}$ **11.** $3\sqrt{2}/2 - 4\sqrt{3}/3$ **13.** $-3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ **15.** 3 **17.** 0 **19.** 0 **21.** 1 **23.** 1 **25.** 1
27. -1 **29.** 1 **31.** $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$, $\csc\theta = -\frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = -\frac{3}{4}$ **33.** $\text{sen}\,\theta = -\frac{12}{13}$, $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\csc\theta = -\frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = \frac{5}{12}$
35. $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$ **37.** $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$, $\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$
39. $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$, $\csc\theta = -\frac{13}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$, $\cot\theta = -\frac{12}{5}$
41. $\text{sen}\,\theta = -\sqrt{10}/10$, $\cos\theta = -3\sqrt{10}/10$, $\csc\theta = -\sqrt{10}$, $\sec\theta = -\sqrt{10}/3$, $\cot\theta = 3$
43. $\text{sen}\,\theta = -2\sqrt{2}/3$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$, $\tan\theta = -2\sqrt{2}$, $\csc\theta = -3\sqrt{2}/4$, $\cot\theta = -\sqrt{2}/4$
45. $\text{sen}\,\theta = \sqrt{5}/5$, $\cos\theta = -2\sqrt{5}/5$, $\tan\theta = -\frac{1}{2}$, $\csc\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = -\sqrt{5}/2$ **47.** $\alpha = 70°$, $b \approx 3.42$, $a \approx 9.4$
49. $a \approx 4.58$, $\alpha \approx 66.4°$, $\beta \approx 23.6°$ **51.** $\pi/3$ pies **53.** 114.59 revoluciones por hora **55.** 839 pies **57.** 23.32 pies **59.** 2.15 millas

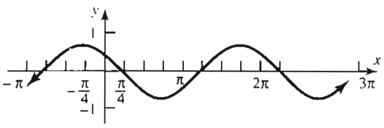
CAPÍTULO 6 *Ejercicio 6.1*

1. 0 **3.** $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ **5.** 1 **7.** 0, π, 2π **9.** $\text{sen}\,x = 1$ para $x = -3\pi/2, \pi/2$; $\text{sen}\,x = -1$ para $x = -\pi/2, 3\pi/2$

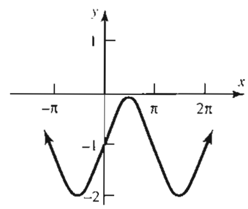
11.



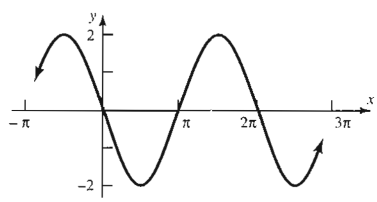
13.



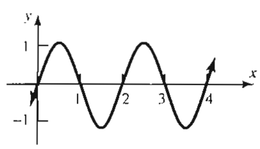
15.



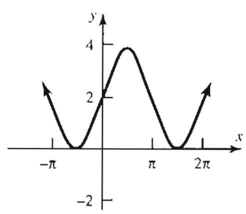
17.



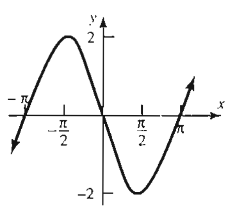
19.



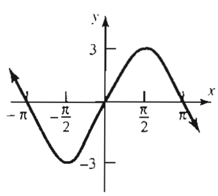
21.



23.



25.

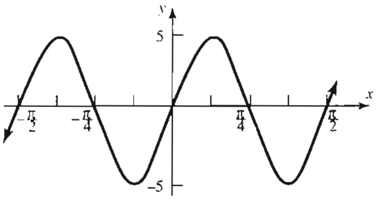


27. Las gráficas son iguales; sí **29.** $y = \text{sen}\,\omega x$ tiene periodo $2\pi/\omega$.

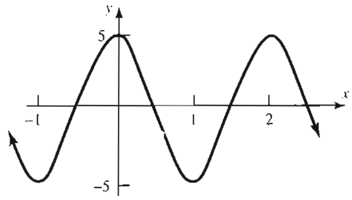
Ejercicio 6.2

1. Amplitud = 2; periodo = 2π **3.** Amplitud = 4; periodo = π **5.** Amplitud = 6; periodo = 2 **7.** Amplitud = $\frac{1}{2}$; periodo = $4\pi/3$
9. Amplitud = $\frac{5}{3}$; periodo = 3 **11.** F **13.** A **15.** H **17.** C **19.** J

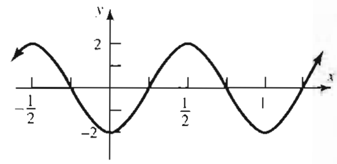
21.



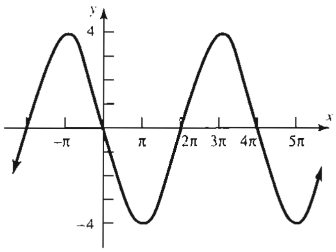
23.



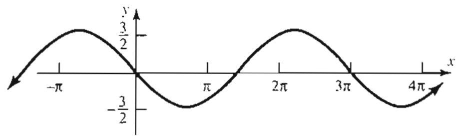
25.



27.

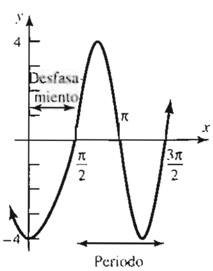


29.

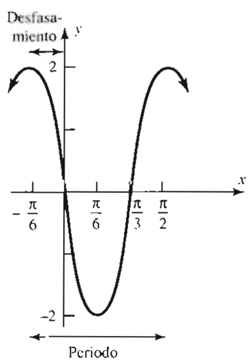


31. $y = 5 \cos \dfrac{\pi}{4}x$ **33.** $y = -3 \cos \frac{1}{2}x$ **35.** $y = \frac{3}{4} \sin 2\pi x$ **37.** $y = -\sin \frac{3}{2}x$ **39.** $y = -2 \cos \dfrac{3\pi}{2}x$ **41.** $y = 3 \sin \dfrac{\pi}{2}x$ **43.** $y = -4 \cos 3x$

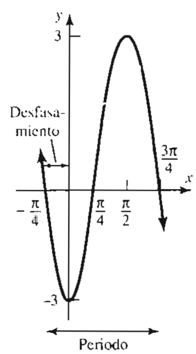
45. Amplitud = 4
Periodo = π
Desfasamiento = $\pi/2$



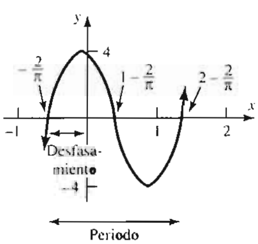
47. Amplitud = 2
Periodo = $2\pi/3$
Desfasamiento = $-\pi/6$



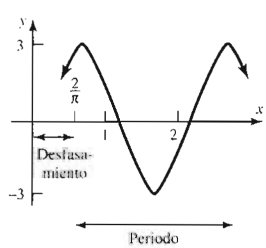
49. Amplitud = 3
Periodo = π
Desfasamiento = $-\pi/4$



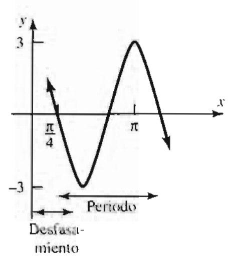
51. Amplitud = 4
Periodo = 2
Desfasamiento = $-2/\pi$



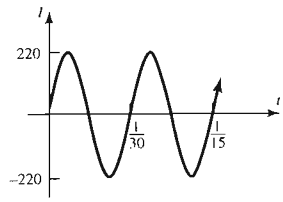
53. Amplitud = 3
Periodo = 2
Desfasamiento = $2/\pi$



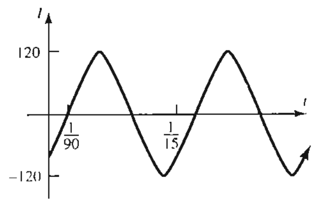
55. Amplitud = 3
Periodo = π
Desfasamiento = $\pi/4$



57. Periodo $= \frac{1}{30}$, amplitud $= 220$

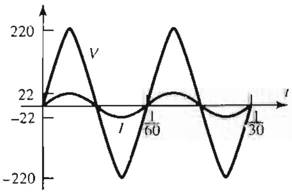


59. Periodo $= \frac{1}{15}$, amplitud $= 120$, desfasamiento $= \frac{1}{90}$



61. **(a)** Amplitud $= 220$, periodo $= \frac{1}{60}$
(b) & **(e)**

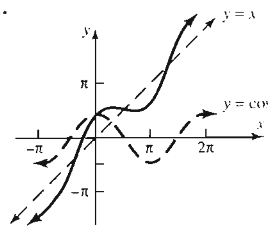
(c) $I = 22 \text{ sen } 120\pi t$
(d) Amplitud $= 22$, periodo $= \frac{1}{60}$



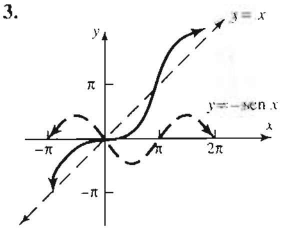
63. **(a)** $P = \dfrac{(V_0 \text{ sen } 2\pi f t)^2}{R} = \dfrac{V_0^2}{R} \text{ sen}^2\, 2\pi f t$ **(b)** $P = \dfrac{V_0^2}{R}\,\dfrac{1}{2}(1 - \cos 4\pi f t)$

Ejercicio 6.3

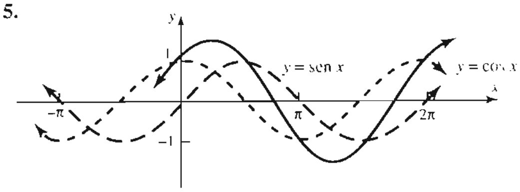
1.



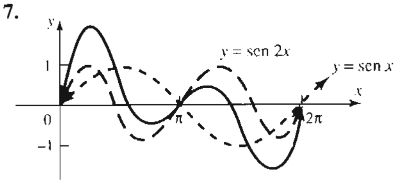
3.



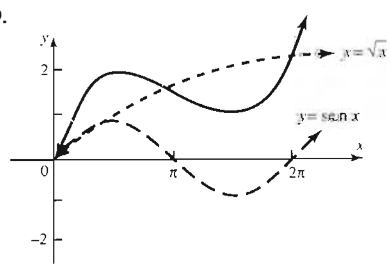
5.



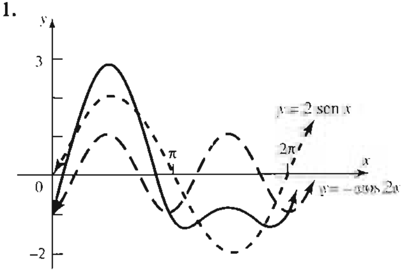
7.



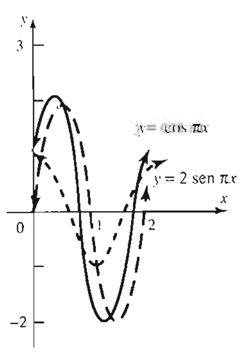
9.



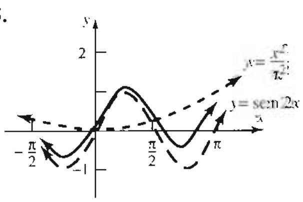
11.



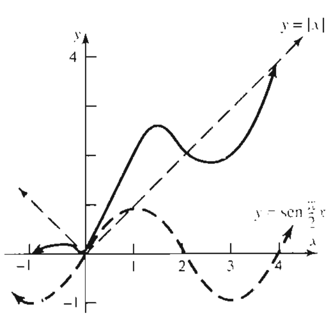
13.



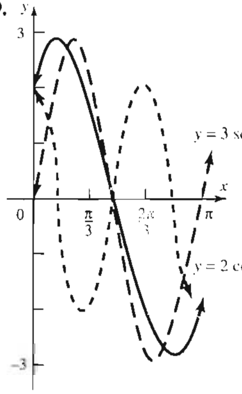
15.



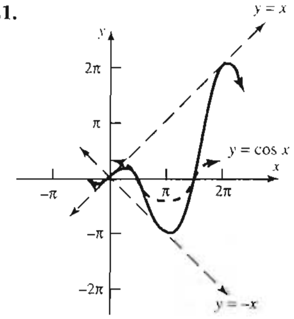
17.



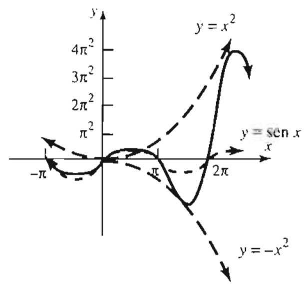
19.



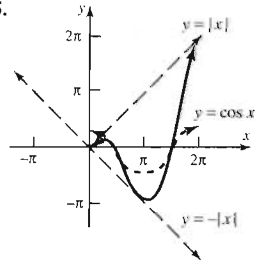
21.



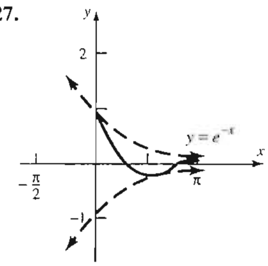
23.



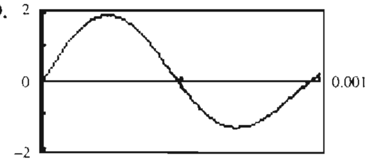
25.



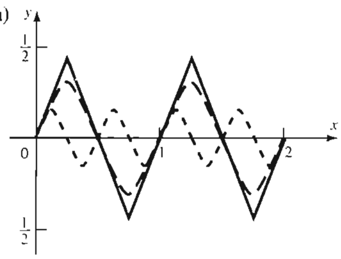
27.



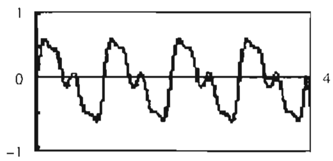
29.



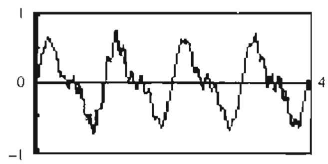
31. **(a)**



(b)



(c)

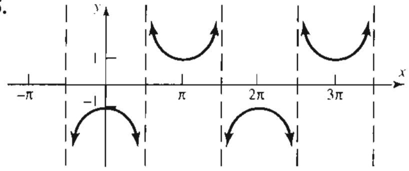


33. $d = 5 \cos \pi t$ **35.** $d = 6 \cos 2t$ **37.** $d = 5 \text{ sen } \pi t$ **39.** $d = 6 \text{ sen } 2t$
41. **(a)** Armónico simple **(b)** 5 cm **(c)** $2\pi/3$ segundos **(d)** $3/(2\pi)$ oscilaciones por segundo
43. **(a)** Armónico simple **(b)** 6 m **(c)** 2 segundos **(d)** $\frac{1}{2}$ oscilaciones por segundo
45. **(a)** Armónico simple **(b)** 3 m **(c)** 4π segundos **(d)** $1/(4\pi)$ oscilaciones por segundo
47. **(a)** Armónico simple **(b)** 2 m **(c)** 1 segundos **(d)** 1 oscilacion por segundo **49.** es cercana a 1

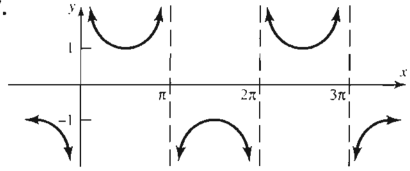
Ejercicio 6.4

1. 0 **3.** 1 **5.** $\sec x = 1$ para $x = -2\pi, 0, 2\pi$; $\sec x = -1$ para $x = -\pi, \pi$ **7.** $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ **9.** $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ **11.** D
13. B

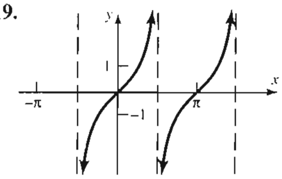
15.

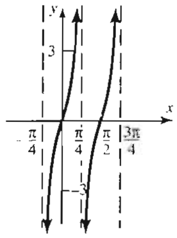


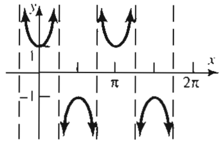
17.

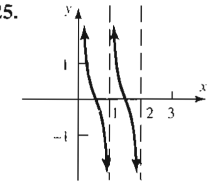


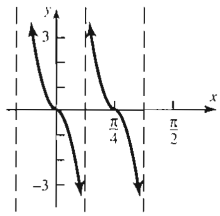
19.

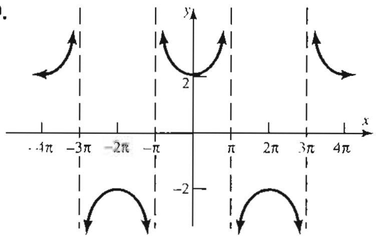


21. 

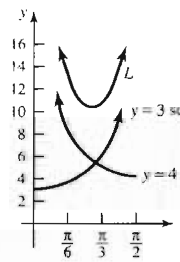
23. 

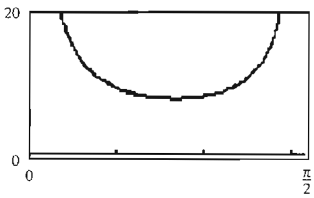
25. 

27. 

29. 

31. **(a)** $L = 3/\cos\theta + 4/\text{sen}\,\theta = 3\sec\theta + 4\csc\theta$

(b) 

(c) 

(d) L es mínimo cuando $\theta = 0.83$, $L(0.83) = 9.86$ pies

Ejercicio 6.5

1. 0 **3.** $-\pi/2$ **5.** 0 **7.** $\pi/4$ **9.** $\pi/3$ **11.** $5\pi/6$ **13.** 0.10 **15.** 1.37 **17.** 0.51 **19.** -0.38 **21.** -0.12 **23.** 1.08 **25.** $\sqrt{2}/2$ **27.** $-\sqrt{3}/3$ **29.** 2 **31.** $\sqrt{2}$ **33.** $-\sqrt{2}/2$ **35.** $2\sqrt{3}/3$ **37.** $\sqrt{2}/4$ **39.** $\sqrt{5}/2$ **41.** $-\sqrt{14}/2$ **43.** $-3\sqrt{10}/10$ **45.** $\sqrt{5}$ **47.** 0.58 **49.** 0.10 **51.** 0.57 **53.** 0.43 **55.** 0.37

57. Sea $\theta = \tan^{-1} v$. Entonces $\tan\theta = v$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Ahora, $\sec\theta > 0$ y $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$. Así, $\sec\theta = \sec(\tan^{-1} v) = \sqrt{1 + v^2}$.

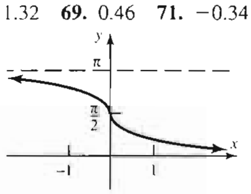
59. Sea $\theta = \cos^{-1} v$. Entonces $\cos\theta = v$, $0 \le \theta \le \pi$, y $\tan(\cos^{-1} v) = \tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2\theta}}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{1 - v^2}}{v}$.

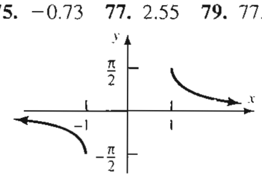
61. Sea $\theta = \text{sen}^{-1} v$. Entonces $\text{sen}\,\theta = v$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, y $\cos(\text{sen}^{-1} v) = \cos\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} = \sqrt{1 - v^2}$.

63. Sea $\alpha = \text{sen}^{-1} v$ y $\beta = \cos^{-1} v$. Entonces $\text{sen}\,\alpha = v = \cos\beta$, de modo que α y β son ángulos complementarios. Así, $\alpha + \beta = \pi/2$.

65. Sea $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{1}{v}$. Entonces $\dfrac{1}{v} = \tan\alpha$, $\dfrac{-\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha \ne 0$. Sea $\beta = \tan^{-1} v$. Entonces $v = \tan\beta$, $\dfrac{-\pi}{2} < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, $\beta \ne 0$. Así, $\tan\alpha\tan\beta = 1$ de modo que $\tan\alpha = \cot\beta$. Así, $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

67. 1.32 **69.** 0.46 **71.** -0.34 **73.** 2.72 **75.** -0.73 **77.** 2.55 **79.** 77.6 pulgadas **81.** $-1 \le x \le 1$ **83.** $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

85. 

87. 

Complete los espacios

1. $y = 3\,\text{sen}\,\pi x$ **2.** 3; $\pi/3$ **3.** $y = 5x$ **4.** $-1 \le x \le 1$; $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ **5.** 0 **6.** movimiento armónico simple **7.** $y = \cos x$, $y = \sec x$ **8.** $y = \text{sen}\,x$, $y = \tan x$, $y = \csc x$, $y = \cot x$

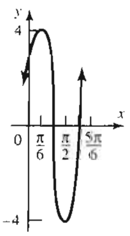
Cierto o falso

1. C **2.** C **3.** F **4.** F **5.** C

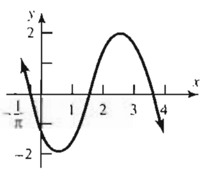
Ejercicios de revisión

1. Amplitud = 4; Periodo = 2π **3.** Amplitud = 8; Periodo = 4

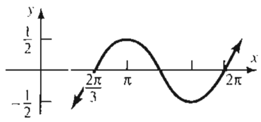
5. Amplitud = 4
Periodo = $2\pi/3$
Desfasamiento = 0



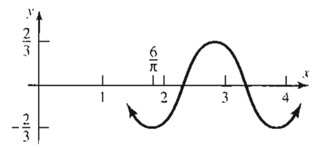
7. Amplitud = 2
Periodo = 4
Desfasamiento = $-1/\pi$



9. Amplitud = $\frac{1}{2}$
Periodo = $4\pi/3$
Desfasamiento = $2\pi/3$

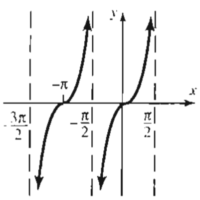


11. Amplitud = $\frac{2}{3}$
Periodo = 2
Desfasamiento = $6/\pi$

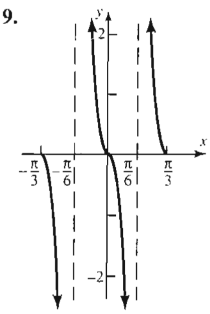


13. $y = 5 \cos \dfrac{x}{4}$ **15.** $y = -6 \cos \dfrac{\pi}{4}x$

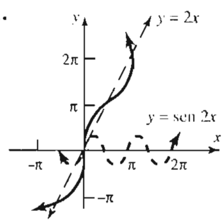
17.



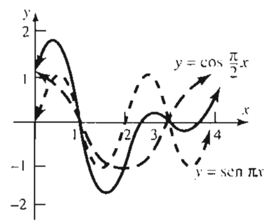
19.



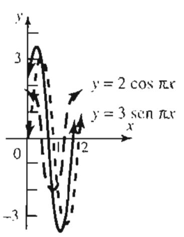
21.



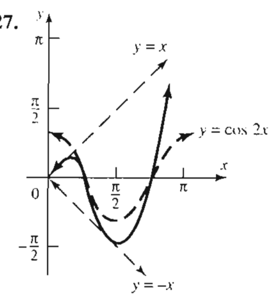
23.



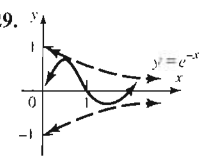
25.



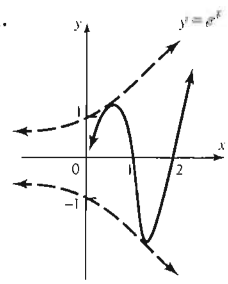
27.



29.



31.

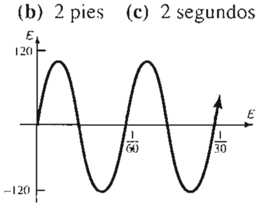


33. $\pi/2$ **35.** $\pi/4$ **37.** $5\pi/6$ **39.** $\sqrt{2}/2$ **41.** $-\sqrt{3}$ **43.** $2\sqrt{3}/3$ **45.** $\frac{3}{5}$ **47.** $-\frac{4}{5}$

49. **(a)** Armónico simple **(b)** 6 pies **(c)** π segundos **(d)** $1/\pi$ oscilaciones por segundo

51. **(a)** Armónico simple **(b)** 2 pies **(c)** 2 segundos **(d)** $\frac{1}{2}$ oscilaciones por segundo

53. **(a)** 120 **(b)** $\frac{1}{60}$ **(c)**



1. $\csc\theta\cdot\cos\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\cdot\cos\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \cot\theta$ **3.** $1+\tan^2(-\theta) = 1+(-\tan\theta)^2 = 1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

5. $\cos\theta(\tan\theta+\cot\theta) = \cos\theta\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}\right) = \cos\theta\left(\frac{\text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}\right) = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} = \csc\theta$

7. $\tan\theta\cot\theta-\cos^2\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}-\cos^2\theta = 1-\cos^2\theta = \text{sen}^2\,\theta$ **9.** $(\sec\theta-1)(\sec\theta+1) = \sec^2\theta-1 = \tan^2\theta$

11. $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta) = \sec^2\theta-\tan^2\theta = 1$ **13.** $\text{sen}^2\,\theta(1+\cot^2\theta) = \text{sen}^2\,\theta\csc^2\theta = \text{sen}^2\,\theta\left(\frac{1}{\text{sen}^2\,\theta}\right) = 1$

15. $(\text{sen}\,\theta+\cos\theta)^2+(\text{sen}\,\theta-\cos\theta)^2 = \text{sen}^2\,\theta+2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta-2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta+\cos^2\theta$
$= \text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta+\text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta = 1+1 = 2$

17. $\sec^4\theta-\sec^2\theta = \sec^2\theta(\sec^2\theta-1) = (1+\tan^2\theta)\tan^2\theta = \tan^4\theta+\tan^2\theta$

19. $\sec\theta-\tan\theta = \frac{1}{\cos\theta}-\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{1-\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1+\text{sen}\,\theta}{1+\text{sen}\,\theta} = \frac{1-\text{sen}^2\,\theta}{\cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)} = \frac{\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta}$

21. $3\,\text{sen}^2\,\theta+4\cos^2\theta = 3\,\text{sen}^2\,\theta+3\cos^2\theta+\cos^2\theta = 3(\text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta)+\cos^2\theta = 3+\cos^2\theta$

23. $1-\frac{\cos^2\theta}{1+\text{sen}\,\theta} = 1-\frac{1-\text{sen}^2\,\theta}{1+\text{sen}\,\theta} = 1-(1-\text{sen}\,\theta) = \text{sen}\,\theta$ **25.** $\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \frac{1+\frac{1}{\cot\theta}}{1-\frac{1}{\cot\theta}} = \frac{\frac{\cot\theta+1}{\cot\theta}}{\frac{\cot\theta-1}{\cot\theta}} = \frac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$

27. $\frac{\sec\theta}{\csc\theta}+\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{1/\cos\theta}{1/\text{sen}\,\theta}+\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}+\tan\theta = \tan\theta+\tan\theta = 2\tan\theta$ **29.** $\frac{1+\text{sen}\,\theta}{1-\text{sen}\,\theta} = \frac{1+\frac{1}{\csc\theta}}{1-\frac{1}{\csc\theta}} = \frac{\frac{\csc\theta+1}{\csc\theta}}{\frac{\csc\theta-1}{\csc\theta}} = \frac{\csc\theta+1}{\csc\theta-1}$

31. $\frac{1-\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\text{sen}\,\theta} = \frac{(1-\text{sen}\,\theta)^2+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\text{sen}\,\theta)} = \frac{1-2\,\text{sen}\,\theta+\text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\text{sen}\,\theta)} = \frac{2-2\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta(1-\text{sen}\,\theta)} = \frac{2(1-\text{sen}\,\theta)}{\cos\theta(1-\text{sen}\,\theta)} = \frac{2}{\cos\theta} = 2\sec\theta$

33. $\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta-\cos\theta} = \frac{1}{\frac{\text{sen}\,\theta-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{1}{1-\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{1}{1-\cot\theta}$

35. $(\sec\theta-\tan\theta)^2 = \sec^2\theta-2\sec\theta\tan\theta+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{2\,\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1-2\,\text{sen}\,\theta+\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta} = \frac{(1-\text{sen}\,\theta)^2}{1-\text{sen}^2\,\theta}$
$= \frac{(1-\text{sen}\,\theta)^2}{(1-\text{sen}\,\theta)(1+\text{sen}\,\theta)} = \frac{1-\text{sen}\,\theta}{1+\text{sen}\,\theta}$

37. $\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta}+\frac{\text{sen}\,\theta}{1-\cot\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}+\frac{\text{sen}\,\theta}{1-\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{\cos\theta}{\frac{\cos\theta-\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}+\frac{\text{sen}\,\theta}{\frac{\text{sen}\,\theta-\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta-\text{sen}\,\theta}+\frac{\text{sen}^2\,\theta}{\text{sen}\,\theta-\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta-\text{sen}^2\,\theta}{\cos\theta-\text{sen}\,\theta}$
$= \frac{(\cos\theta-\text{sen}\,\theta)(\cos\theta+\text{sen}\,\theta)}{\cos\theta-\text{sen}\,\theta} = \text{sen}\,\theta+\cos\theta$

39. $\tan\theta+\frac{\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\text{sen}\,\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta(1+\text{sen}\,\theta)+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)} = \frac{\text{sen}\,\theta+\text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)} = \frac{\text{sen}\,\theta+1}{\cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta$

41. $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{\tan\theta+(\sec\theta-1)}{\tan\theta-(\sec\theta-1)}\cdot\frac{\tan\theta+(\sec\theta-1)}{\tan\theta+(\sec\theta-1)} = \frac{\tan^2\theta+2\tan\theta(\sec\theta-1)+\sec^2\theta-2\sec\theta+1}{\tan^2\theta-(\sec^2\theta-2\sec\theta+1)}$
$= \frac{\sec^2\theta-1+2\tan\theta(\sec\theta-1)+\sec^2\theta-2\sec\theta+1}{\sec^2\theta-1-\sec^2\theta+2\sec\theta-1} = \frac{2\sec^2\theta-2\sec\theta+2\tan\theta(\sec\theta-1)}{-2+2\sec\theta}$
$= \frac{2\sec\theta(\sec\theta-1)+2\tan\theta(\sec\theta-1)}{2(\sec\theta-1)} = \frac{2(\sec\theta-1)(\sec\theta+\tan\theta)}{2(\sec\theta-1)} = \sec\theta+\tan\theta$

43. $\frac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta} = \frac{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}}{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{\frac{\text{sen}^2\,\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}}{\frac{\text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}} = \frac{\text{sen}^2\,\theta-\cos^2\theta}{1} = \text{sen}^2\,\theta-\cos^2\theta$

45. $\frac{\tan\theta-\cot\theta}{\tan\theta+\cot\theta} = \frac{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}}{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{\frac{\text{sen}^2\,\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}}{\frac{\text{sen}^2\,\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}} = \text{sen}^2\,\theta-\cos^2\theta = \text{sen}^2\,\theta-(1-\text{sen}^2\,\theta) = 2\,\text{sen}^2\,\theta-1$

47. $\frac{\sec\theta+\tan\theta}{\cot\theta+\cos\theta} = \frac{\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}+\frac{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{\frac{1+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}{\frac{\cos\theta+\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \frac{1+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta(1+\text{sen}\,\theta)} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = \tan\theta\sec\theta$

49. $\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}=\dfrac{1}{\sec^2\theta}-\dfrac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}=\cos^2\theta-\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta/\cos^2\theta}{1/\cos^2\theta}=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)=2\cos^2\theta-1$

51. $\dfrac{\sec\theta-\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}=\dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}=\operatorname{sen}\theta-\cos\theta$

53. $\sec\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}=\operatorname{sen}\theta\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\operatorname{sen}\theta\tan\theta$

55. $\dfrac{1}{1-\operatorname{sen}\theta}+\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta+1-\operatorname{sen}\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{2}{1-\operatorname{sen}^2\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta$

57. $\dfrac{\sec\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\sec\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\sec\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}{1-\operatorname{sen}^2\theta}=\dfrac{\sec\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}{\cos^2\theta}=\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{\cos^3\theta}$

59. $\dfrac{(\sec\theta-\tan\theta)^2+1}{\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}=\dfrac{\sec^2\theta-2\sec\theta\tan\theta+\tan^2\theta+1}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}=\dfrac{2\sec^2\theta-2\sec\theta\tan\theta}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)}=\dfrac{\dfrac{2}{\cos^2\theta}-\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}=\dfrac{2-2\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$

$=\dfrac{2(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta$

61. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)-\cos\theta(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}$

$=\dfrac{1}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}=\sec\theta\csc\theta$

63. $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta+\cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}=\dfrac{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)(\operatorname{sen}^2\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta)}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}=\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta=1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

65. $\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}=\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}=\cos^2\theta$

67. $\dfrac{(2\cos^2\theta-1)^2}{\cos^4\theta-\operatorname{sen}^4\theta}=\dfrac{[2\cos^2\theta-(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)]^2}{(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}=\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta=(1-\operatorname{sen}^2\theta)-\operatorname{sen}^2\theta=1-2\operatorname{sen}^2\theta$

69. $\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)-\cos\theta}\cdot\dfrac{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}{(1+\operatorname{sen}\theta)+\cos\theta}=\dfrac{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)+\cos^2\theta}{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)+(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{1+2\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}^2\theta-(1-\operatorname{sen}^2\theta)}=\dfrac{2+2\operatorname{sen}\theta+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta+2\operatorname{sen}^2\theta}$

$=\dfrac{2(1+\operatorname{sen}\theta)+2(1+\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{2(1+\operatorname{sen}\theta)(1+\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta(1+\operatorname{sen}\theta)}=\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$

71. $(a\operatorname{sen}\theta+b\cos\theta)^2+(a\cos\theta-b\operatorname{sen}\theta)^2=a^2\operatorname{sen}^2\theta+2ab\operatorname{sen}\theta\cos\theta+b^2\cos^2\theta+a^2\cos^2\theta-2ab\operatorname{sen}\theta\cos\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta$

$=a^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)=a^2+b^2$

73. $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\alpha\tan\beta}}=(\tan\alpha+\tan\beta)\cdot\dfrac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}=\tan\alpha\tan\beta$

75. $(\operatorname{sen}\alpha+\cos\beta)^2+(\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha)=(\operatorname{sen}^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos^2\beta)+(\cos^2\beta-\operatorname{sen}^2\alpha)$

$=2\cos^2\beta+2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta=2\cos\beta(\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha)$

77. $\ln|\sec\theta|=\ln|\cos\theta|^{-1}=-\ln|\cos\theta|$ 78. $\ln|\operatorname{sen}\theta|-\ln|\cos\theta|=\ln\left|\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right|=\ln|\tan\theta|$

79. $\ln|1+\cos\theta|+\ln|1-\cos\theta|=\ln(|1+\cos\theta|\,|1-\cos\theta|)=\ln|1-\cos^2\theta|=\ln|\operatorname{sen}^2\theta|=2\ln|\operatorname{sen}\theta|$

Ejercicio 7.2

1. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ 3. $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-\sqrt{6})$ 5. $-\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ 7. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ 9. $-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

11. $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ 13. $\frac{1}{2}$ 15. 0 17. 1 19. -1 21. $-\sqrt{3}/2$ 23. (a) $\dfrac{2\sqrt{5}}{25}$ (b) $\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$ (c) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ (d) 2

25. (a) $\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$ (b) $\dfrac{-3-4\sqrt{3}}{10}$ (c) $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$ (d) $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-3}=\dfrac{25\sqrt{3}+48}{39}$

27. (a) $-\dfrac{1}{26}(5+12\sqrt{3})$ (b) $\dfrac{1}{26}(12-5\sqrt{3})$ (c) $-\dfrac{1}{26}(5-12\sqrt{3})$ (d) $\dfrac{-5+12\sqrt{3}}{12+5\sqrt{3}}=\dfrac{-240+169\sqrt{3}}{69}$

29. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}\theta=1\cdot\cos\theta+0\cdot\operatorname{sen}\theta=\cos\theta$

31. $\operatorname{sen}(\pi-\theta)=\operatorname{sen}\pi\cos\theta-\cos\pi\operatorname{sen}\theta=0\cdot\cos\theta-(-1)\operatorname{sen}\theta=\operatorname{sen}\theta$

33. $\operatorname{sen}(\pi+\theta)=\operatorname{sen}\pi\cos\theta+\cos\pi\operatorname{sen}\theta=0\cdot\cos\theta+(-1)\operatorname{sen}\theta=-\operatorname{sen}\theta$

35. $\tan(\pi-\theta)=\dfrac{\tan\pi-\tan\theta}{1+\tan\pi\tan\theta}=\dfrac{0-\tan\theta}{1+0}=-\tan\theta$

37. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)=\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\cos\theta+\cos\dfrac{3\pi}{2}\operatorname{sen}\theta=(-1)\cos\theta+0\cdot\operatorname{sen}\theta=-\cos\theta$

39. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$

41. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}=1+\cot\alpha\tan\beta$

43. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=1-\tan\alpha\tan\beta$

45. $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

47. $\cot(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}=\dfrac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}+\dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}$

$=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\beta+\cot\alpha}$

49. $\sec(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}=\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}-\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}}$

$=\dfrac{\csc\alpha\csc\beta}{\cot\alpha\cot\beta-1}$

51. $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta$
$=(\operatorname{sen}^2\alpha)(1-\operatorname{sen}^2\beta)-(1-\operatorname{sen}^2\alpha)(\operatorname{sen}^2\beta)=\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta$

53. $\operatorname{sen}(\theta+k\pi)=\operatorname{sen}\theta\cos k\pi+\cos\theta\operatorname{sen}k\pi=(\operatorname{sen}\theta)(-1)^k+(\cos\theta)(0)=(-1)^k\cdot\operatorname{sen}\theta$, k cualquier entero

55. $\sqrt{3}/2$ **57.** $-\frac{24}{25}$ **59.** $-\frac{33}{65}$ **61.** $\frac{65}{63}$ **63.** $\frac{1}{39}(48-25\sqrt{3})$ **65.** $u\sqrt{1-v^2}-v\sqrt{1-u^2}$ **67.** $\dfrac{u\sqrt{1-v^2}-v}{\sqrt{1+u^2}}$

69. $\dfrac{uv-\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}}{v\sqrt{1-u^2}+u\sqrt{1-v^2}}$

71. $\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\dfrac{\operatorname{sen}x\cos h+\cos x\operatorname{sen}h-\operatorname{sen}x}{h}=\dfrac{\cos x\operatorname{sen}h-(\operatorname{sen}x)(1-\cos h)}{h}=\cos x\cdot\dfrac{\operatorname{sen}h}{h}-\operatorname{sen}x\cdot\dfrac{1-\cos h}{h}$

73. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u+\cos^{-1}u)=\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}u)\cos(\cos^{-1}u)+\cos(\operatorname{sen}^{-1}u)\operatorname{sen}(\cos^{-1}u)=(u)(u)+\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-u^2}=u^2+1-u^2=1$

75. $\tan\dfrac{\pi}{2}$ no está definida; $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}=\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=\cot\theta$ **77.** $\tan\theta=\tan(\theta_2-\theta_1)=\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$

Ejercicio 7.3

1. **(a)** $\frac{24}{25}$ **(b)** $\frac{7}{25}$ **(c)** $\sqrt{10}/10$ **(d)** $3\sqrt{10}/10$ **3.** **(a)** $\frac{24}{25}$ **(b)** $-\frac{7}{25}$ **(c)** $2\sqrt{5}/5$ **(d)** $-\sqrt{5}/5$

5. **(a)** $-2\sqrt{2}/3$ **(b)** $\frac{1}{3}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{6}}{6}}$ **(d)** $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}}$ **7.** **(a)** $4\sqrt{2}/9$ **(b)** $-\frac{7}{9}$ **(c)** $\sqrt{3}/3$ **(d)** $\sqrt{6}/3$

9. **(a)** $-\frac{4}{5}$ **(b)** $\frac{3}{5}$ **(c)** $\sqrt{\dfrac{5+2\sqrt{5}}{10}}$ **(d)** $\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10}}$ **11.** **(a)** $\frac{3}{5}$ **(b)** $-\frac{4}{5}$ **(c)** $\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{10-\sqrt{10}}{5}}$ **(d)** $-\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{10+\sqrt{10}}{5}}$ **13.** $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

15. $1-\sqrt{2}$ **17.** $-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ **19.** $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=(2-\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}$ **21.** $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

23. $\operatorname{sen}^4\theta=(\operatorname{sen}^2\theta)^2=\left(\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{4}\cos^2 2\theta=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+\cos 4\theta}{2}\right)$
$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\cos 4\theta=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta+\dfrac{1}{8}\cos 4\theta$

25. $\operatorname{sen} 4\theta = \operatorname{sen} 2(2\theta) = 2 \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta = (4 \operatorname{sen}\theta\cos\theta)(1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta - 8\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta = (\cos\theta)(4\operatorname{sen}\theta - 8\operatorname{sen}^3\theta)$

27. $16\operatorname{sen}^5\theta - 20\operatorname{sen}^3\theta + 5\operatorname{sen}\theta$ **29.** $\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta = (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = \cos 2\theta$

31. $$\cot 2\theta = \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1}{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}} = \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1-\dfrac{1}{\cot^2\theta}}{2\left(\dfrac{1}{\cot\theta}\right)} = \frac{\dfrac{\cot^2\theta - 1}{\cot^2\theta}}{\dfrac{2}{\cot\theta}} = \frac{\cot^2\theta - 1}{\cot^2\theta}\cdot\frac{\cot\theta}{2} = \frac{\cot^2\theta-1}{2\cot\theta}$$

33. $$\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{1}{2\cos^2\theta - 1} = \frac{1}{\dfrac{2}{\sec^2\theta} - 1} = \frac{1}{\dfrac{2-\sec^2\theta}{\sec^2\theta}} = \frac{\sec^2\theta}{2-\sec^2\theta}$$ **35.** $\cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = \cos 2(2\theta) = \cos 4\theta$

37. $$\frac{\cos 2\theta}{1+\operatorname{sen}2\theta} = \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{1 + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)} = \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$
$$= \frac{\dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta}} = \frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$

39. $$\sec^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{2}{1+\cos\theta}$$

41. $$\cot^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\tan^2(\theta/2)} = \frac{1}{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1+\dfrac{1}{\sec\theta}}{1-\dfrac{1}{\sec\theta}} = \frac{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta}}{\dfrac{\sec\theta-1}{\sec\theta}} = \frac{\sec\theta+1}{\sec\theta}\cdot\frac{\sec\theta}{\sec\theta-1} = \frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}$$

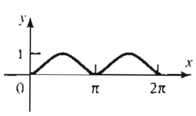
43. $$\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)} = \frac{1-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}{1+\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{\dfrac{1+\cos\theta-(1-\cos\theta)}{1+\cos\theta}}{\dfrac{1+\cos\theta+1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{2\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2} = \cos\theta$$

45. $$\frac{\operatorname{sen}3\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}(3\theta-\theta)}{\frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)} = \frac{2\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\theta} = 2$$

47. $$\tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta) = \frac{\tan\theta + \tan 2\theta}{1 - \tan\theta\tan 2\theta} = \frac{\tan\theta + \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1 - \dfrac{\tan\theta(2\tan\theta)}{1-\tan^2\theta}} = \frac{\tan\theta - \tan^3\theta + 2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta - 2\tan^2\theta} = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

49. $\sqrt{3}/2$ **51.** $\frac{7}{25}$ **53.** $\frac{24}{7}$ **55.** $\frac{24}{25}$ **57.** $\frac{1}{5}$ **59.** $\frac{25}{7}$ **61.** 4 **63.** $-\frac{1}{4}$ **65.** $A = \frac{1}{2}h\,(\text{base}) + \frac{1}{2}h\,(\text{base}) = s\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot s\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2} = s^2\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{1}{2}s^2\operatorname{sen}\theta$

67.



69. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}$; $\cos\dfrac{\pi}{24} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}$

71. $\operatorname{sen}^3\theta + \operatorname{sen}^3(\theta + 120°) + \operatorname{sen}^3(\theta + 240°) = \operatorname{sen}^3\theta + (\operatorname{sen}\theta\cos 120° + \cos\theta\operatorname{sen}120°)^3 + (\operatorname{sen}\theta\cos 240° + \cos\theta\operatorname{sen}240°)^3$

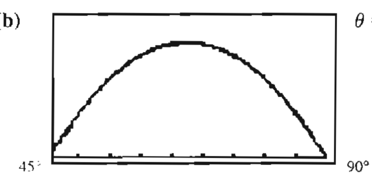
$= \operatorname{sen}^3\theta + \left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^3 + \left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)^3$

$= \operatorname{sen}^3\theta + \frac{1}{8}(3\sqrt{3}\cos^3\theta - 9\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta + 3\sqrt{3}\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta) - \frac{1}{8}(\operatorname{sen}^3\theta + 3\sqrt{3}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta + 9\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + 3\sqrt{3}\cos^3\theta)$

$= \frac{3}{4}\operatorname{sen}^3\theta - \frac{9}{4}\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4}[\operatorname{sen}^3\theta - 3\operatorname{sen}\theta(1 - \operatorname{sen}^2\theta)] = \frac{3}{4}(4\operatorname{sen}^3\theta - 3\operatorname{sen}\theta) = -\frac{3}{4}\operatorname{sen}3\theta$

73. $\dfrac{1}{2}(\ln|1 - \cos 2\theta| - \ln 2) = \ln\left(\dfrac{|1-\cos 2\theta|}{2}\right)^{1/2} = \ln|\operatorname{sen}^2\theta|^{1/2} = \ln|\operatorname{sen}\theta|$

75. **(a)** $R = \dfrac{v_0^2\sqrt{2}}{16}(\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cos^2\theta) = \dfrac{v_0^2\sqrt{2}}{16}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta - \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}\right)$
$= \dfrac{v_0^2\sqrt{2}}{32}(\operatorname{sen}2\theta - \cos 2\theta - 1)$ **(b)**



$\theta = 67.5°$ hace máximo a R

Ejercicio 7.4

1. $\frac{1}{2}(\cos 2\theta - \cos 6\theta)$ **3.** $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 6\theta + \operatorname{sen} 2\theta)$ **5.** $\frac{1}{2}(\cos 8\theta + \cos 2\theta)$ **7.** $\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta)$ **9.** $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen}\theta)$ **11.** $2 \operatorname{sen}\theta\cos 3\theta$

13. $2\cos 3\theta\cos\theta$ **15.** $2\operatorname{sen} 2\theta\cos\theta$ **17.** $2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\theta/2)$ **19.** $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta}{2\operatorname{sen} 2\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen} 2\theta\cos(-\theta)}{2\operatorname{sen} 2\theta} = \cos(-\theta) = \cos\theta$

21. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 2\theta}{\cos 4\theta + \cos 2\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen} 3\theta\cos\theta}{2\cos 3\theta\cos\theta} = \dfrac{\operatorname{sen} 3\theta}{\cos 3\theta} = \tan 3\theta$ **23.** $\dfrac{\cos\theta - \cos 3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta} = \dfrac{-2\operatorname{sen} 2\theta\operatorname{sen}(-\theta)}{2\operatorname{sen} 2\theta\cos(-\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

25. $\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 3\theta) = \operatorname{sen}\theta[2\operatorname{sen} 2\theta\cos(-\theta)] = 2\operatorname{sen} 2\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \cos\theta(2\operatorname{sen} 2\theta\operatorname{sen}\theta) = \cos\theta[2\cdot\frac{1}{2}(\cos\theta - \cos 3\theta)]$
$= \cos\theta(\cos\theta - \cos 3\theta)$

27. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 8\theta}{\cos 4\theta + \cos 8\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen} 6\theta\cos(-2\theta)}{2\cos 6\theta\cos(-2\theta)} = \dfrac{\operatorname{sen} 6\theta}{\cos 6\theta} = \tan 6\theta$

29. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 8\theta}{\operatorname{sen} 4\theta - \operatorname{sen} 8\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen} 6\theta\cos(-2\theta)}{2\operatorname{sen}(-2\theta)\cos 6\theta} = \dfrac{\operatorname{sen} 6\theta}{\cos 6\theta}\cdot\dfrac{\cos 2\theta}{-\operatorname{sen} 2\theta} = \tan 6\theta(-\cot 2\theta) = -\dfrac{\tan 6\theta}{\tan 2\theta}$

31. $$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$$

33. $$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

35. $1 + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \cos 6\theta = (1 + \cos 6\theta) + (\cos 2\theta + \cos 4\theta) = 2\cos^2 3\theta + 2\cos 3\theta\cos(-\theta) = 2\cos 3\theta(\cos 3\theta + \cos\theta)$
$= 2\cos 3\theta(2\cos 2\theta\cos\theta) = 4\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta$

37. $y = 2\operatorname{sen} 2061\pi t\cos 357\pi t$

39. $\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 2\beta + \operatorname{sen} 2\gamma = 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + \operatorname{sen} 2\gamma = 2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma$
$= 2\operatorname{sen}(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) + 2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma = 2\operatorname{sen}\gamma\cos(\alpha-\beta) + 2\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma = 2\operatorname{sen}\gamma[\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma]$
$= 2\operatorname{sen}\gamma\left(2\cos\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta-\gamma}{2}\right) = 4\operatorname{sen}\gamma\cos\dfrac{\pi-2\beta}{2}\cos\dfrac{2\alpha-\pi}{2} = 4\operatorname{sen}\gamma\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$
$= 4\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha$

41.
$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\
\operatorname{sen}\alpha\cos\beta &= \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)]
\end{aligned}$$

43. $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 2\cdot\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] = \cos\dfrac{2\alpha}{2} + \cos\dfrac{2\beta}{2} = \cos\alpha + \cos\beta$

Ejercicio 7.5

1. $\pi/6$, $5\pi/6$ **3.** $5\pi/6$, $11\pi/6$ **5.** $\pi/2$, $3\pi/2$ **7.** $\pi/2$, $7\pi/6$, $11\pi/6$ **9.** $3\pi/4$, $7\pi/4$ **11.** $4\pi/9$, $8\pi/9$, $16\pi/9$ **13.** 0.4115168, $\pi - 0.4115168$

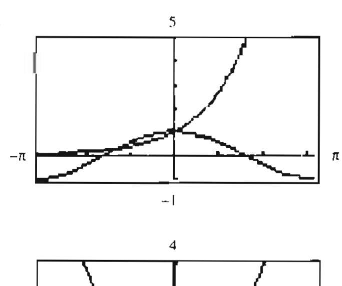
15. 1.3734008, $\pi + 1.3734008$ **17.** 2.6905658, $2\pi - 2.6905658$ **19.** 1.8234766, $2\pi - 1.8234766$ **21.** $\pi/2$, $2\pi/3$, $4\pi/3$, $3\pi/2$

23. $\pi/2$, $7\pi/6$, $11\pi/6$ **25.** 0, $\pi/4$, $5\pi/4$ **27.** $\pi/4$, $5\pi/4$ **29.** 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$ **31.** $\pi/2$, $3\pi/2$ **33.** 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$

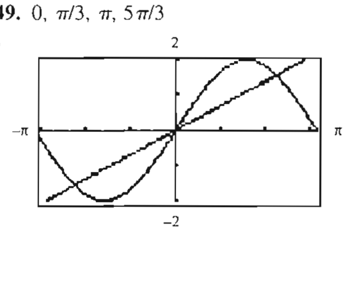
35. 0, $\pi/3$, $2\pi/3$, $\pi/2$, $4\pi/3$, π, $5\pi/3$, $3\pi/2$ **37.** 0, $\pi/5$, $2\pi/5$, $3\pi/5$, $4\pi/5$, π, $6\pi/5$, $7\pi/5$, $8\pi/5$, $9\pi/5$ **39.** $\pi/6$, $5\pi/6$, $3\pi/2$ **41.** $\pi/3$, $5\pi/3$

43. No es una solución real **45.** No es una solución real **47.** $\pi/2$, $7\pi/6$ **49.** 0, $\pi/3$, π, $5\pi/3$

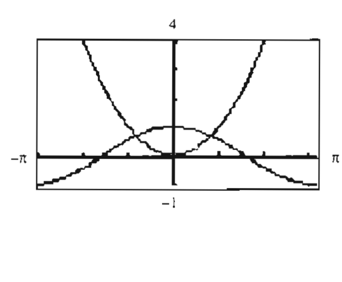
51. $-1.29, 0$



53. $-2.24, 0, 2.24$



55. $-0.82, 0.82$



57. $-1.30, 1.97, 3.83$ **59.** 0.59 **61.** 1.25 **63.** $-1.02, 1.02$ **65.** $0, 2.14$ **67.** 1.34 **69.** **(a)** $60°$ **(b)** $60°$ **(c)** $A(60°) = 12\sqrt{3}$ pulgadas cuadradas
71. $2.02, 4.91$ **73.** $28.9°$ **75.** Sí; varía desde 1.27 hasta 1.34 **77.** 1.47
79. Si θ es el ángulo de incidencia original y ϕ es el ángulo de refracción, entonces $(\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\phi) = n_2$. El ángulo de incidencia del rayo que sale también es ϕ, y el índice de refracción es $1/n_2$. Así, θ es el ángulo de refracción del rayo que sale.

Complete los espacios

1. identidad; condicional **2.** $-$ **3.** $+$ **4.** $\operatorname{sen}^2\theta$; $2\cos^2\theta$; $2\operatorname{sen}^2\theta$ **5.** $1-\cos\alpha$

Cierto o falso

1. C **2.** F **3.** C **4.** F **5.** F **6.** F

Ejercicios de revisión

1. $\tan\theta\cot\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ **3.** $\cos^2\theta(1+\tan^2\theta) = \cos^2\theta\sec^2\theta = 1$
5. $4\cos^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta + 3(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = 3 + \cos^2\theta$

7. $\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1-\cos\theta)} = \dfrac{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta(1-\cos\theta)} = \dfrac{2(1-\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta(1-\cos\theta)} = 2\csc\theta$

9. $\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \dfrac{1}{1-\tan\theta}$

11. $\dfrac{\csc\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{1 + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}} = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}\cdot\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}$

13. $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cos\theta\cdot\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \cos\theta\cot\theta$

15. $\dfrac{1-\operatorname{sen}\theta}{\sec\theta} = \cos\theta(1-\operatorname{sen}\theta)\cdot\dfrac{1+\operatorname{sen}\theta}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta)}{1+\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\cos^3\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

17. $\cot\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$

19. $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta} = \cot\beta - \tan\alpha$

21. $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 + \tan\alpha\tan\beta$

23. $(1+\cos\theta)\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) = \left(2\cos^2\dfrac{\theta}{2}\right)\dfrac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\theta$

25. $2\cot\theta\cot 2\theta = 2\left(\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\dfrac{\cos 2\theta}{\operatorname{sen}2\theta}\right) = \dfrac{2\cos\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta} = \dfrac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \cot^2\theta - 1$

27. $1 - 8\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta = 1 - 2(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)^2 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 2\theta = \cos 4\theta$ **29.** $\dfrac{\operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}4\theta}{\cos 2\theta + \cos 4\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen}3\theta\cos(-\theta)}{2\cos 3\theta\cos(-\theta)} = \tan 3\theta$

31. $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{\cos 2\theta + \cos 4\theta} - \tan\theta\tan 3\theta = \dfrac{-2\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}(-\theta)}{2\cos 3\theta\cos(-\theta)} - \tan\theta\tan 3\theta = \tan 3\theta\tan\theta - \tan\theta\tan 3\theta = 0$ **33.** $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ **35.** $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

37. $\frac{1}{2}$ **39.** $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$ **41.** **(a)** $-\frac{33}{65}$ **(b)** $-\frac{56}{65}$ **(c)** $-\frac{63}{65}$ **(d)** $\frac{33}{56}$ **(e)** $\frac{24}{25}$ **(f)** $\frac{119}{169}$ **(g)** $5\sqrt{26}/26$ **(h)** $2\sqrt{5}/5$
43. **(a)** $-\frac{16}{65}$ **(b)** $-\frac{63}{65}$ **(c)** $-\frac{56}{65}$ **(d)** $\frac{16}{63}$ **(e)** $\frac{24}{25}$ **(f)** $\frac{119}{169}$ **(g)** $\sqrt{26}/26$ **(h)** $-\sqrt{10}/10$
45. **(a)** $-\frac{63}{65}$ **(b)** $\frac{16}{65}$ **(c)** $\frac{33}{65}$ **(d)** $-\frac{63}{16}$ **(e)** $\frac{24}{25}$ **(f)** $-\frac{119}{169}$ **(g)** $2\sqrt{13}/13$ **(h)** $-\sqrt{10}/10$
47. **(a)** $(-\sqrt{3}-2\sqrt{2})/6$ **(b)** $(1-2\sqrt{6})/6$ **(c)** $(-\sqrt{3}+2\sqrt{2})/6$ **(d)** $(-\sqrt{3}-2\sqrt{2})/(1-2\sqrt{6}) = (8\sqrt{2}+9\sqrt{3})/23$ **(e)** $-\sqrt{3}/2$ **(f)** $-\frac{7}{9}$ **(g)** $\sqrt{3}/3$ **(h)** $\sqrt{3}/2$ **49.** **(a)** 1 **(b)** 0 **(c)** $-\frac{1}{9}$ **(d)** No definido **(e)** $4\sqrt{5}/9$ **(f)** $-\frac{1}{9}$ **(g)** $\sqrt{30}/6$ **(h)** $-\sqrt{6}\sqrt{3-\sqrt{5}}/6$
51. $\pi/3, 5\pi/3$ **53.** $3\pi/4, 5\pi/4$ **55.** $3\pi/4, 7\pi/4$ **57.** $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ **59.** $1.1197695, \pi - 1.1197695$ **61.** $0, \pi$ **63.** $0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3$
65. $0, \pi/6, 5\pi/6$ **67.** $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6$ **69.** $\pi/2, \pi$

CAPÍTULO 8 *Ejercicio 8.1*

1. $a = 3.23$, $b = 3.55$, $\alpha = 40°$ **3.** $a = 3.25$, $c = 4.23$, $\beta = 45°$ **5.** $\gamma = 95°$, $c = 9.86$, $a = 6.36$ **7.** $\alpha = 40°$, $a = 2$, $c = 3.06$
9. $\gamma = 120°$, $b = 1.06$, $c = 2.69$ **11.** $\alpha = 100°$, $a = 5.24$, $c = 0.92$ **13.** $\beta = 40°$, $a = 5.64$, $b = 3.86$ **15.** $\gamma = 100°$, $a = 1.31$, $b = 1.31$
17. Un triángulo:; $\beta = 30.7°$, $\gamma = 99.3°$, $c = 3.86$ **19.** Un triángulo: $\gamma = 36.2°$, $\alpha = 43.8°$, $a = 3.51$ **21.** No hay triángulo
23. Dos triángulos; $\gamma_1 = 30.9°$, $\alpha_1 = 129.1°$, $a_1 = 9.08$ o $\gamma_2 = 149.1°$, $\alpha_2 = 10.9°$, $a_2 = 2.21$ **25.** No hay triángulo
27. Dos triángulos; $\alpha_1 = 57.7°$, $\beta_1 = 97.3°$, $b_1 = 2.35$ o $\alpha_2 = 122.3°$, $\beta_2 = 32.7°$, $b_2 = 1.28$
29. **(a)** La estación Able está a 143.3 millas del barco y la estación Baker a 135.6 millas. **(b)** Aproximadamente 41 minutos
31. 1490.5 pies **33.** 381.7 pies **35.** **(a)** 169 millas **(b)** 161.3° **37.** 84.7°; 183.7 pies **39.** 2.64 millas **41.** 1.88 millas

43. $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\gamma} = \dfrac{2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\gamma}{2}\right)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\gamma}$

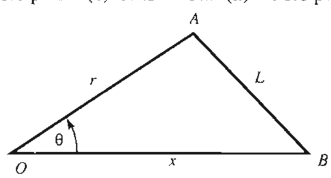
45. $a = \dfrac{b\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{b\operatorname{sen}[180° - (\beta+\gamma)]}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\beta}(\operatorname{sen}\beta\cos\gamma + \cos\beta\operatorname{sen}\gamma) = b\cos\gamma + \dfrac{b\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta}\cos\beta = b\cos\gamma + c\cos\beta$

47. $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\text{Ángulo } AB'C) = b/(2r)$; $\dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{1}{2r}$; el resultado se deduce usando la ley de los senos.

Ejercicio 8.2

1. $b = 2.95$, $\alpha = 28.7°$, $\gamma = 106.3°$ **3.** $c = 3.75$, $\alpha = 32.1°$, $\beta = 52.9°$ **5.** $\alpha = 48.5°$, $\beta = 38.6°$, $\gamma = 92.9°$
7. $\alpha = 127.2°$, $\beta = 32.1°$, $\gamma = 20.7°$ **9.** $c = 2.57$, $\alpha = 48.6°$, $\beta = 91.4°$ **11.** $a = 2.99$, $\beta = 19.2°$, $\gamma = 80.8°$
13. $b = 4.14$, $\alpha = 43.0°$, $\gamma = 27.0°$ **15.** $c = 1.69$, $\alpha = 65.0°$, $\beta = 65.0°$ **17.** $\alpha = 67.4°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 22.6°$
19. $\alpha = 60°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$ **21.** $\alpha = 33.6°$, $\beta = 62.2°$, $\gamma = 84.3°$ **23.** $\alpha = 97.9°$, $\beta = 52.4°$, $\gamma = 29.7°$ **25.** 70.75 pies
27. **(a)** 12° **(b)** 220.8 mph **29.** **(a)** 63.7 pies **(b)** 66.8 pies **(c)** 92.5° **31.** **(a)** 492.6 pies **(b)** 269.3 pies **33.** 342.3 pies
35. Al usar la ley de los cosenos:

$$L^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\theta$$
$$x^2 - 2rx\cos\theta + r^2 - L^2 = 0$$
$$x = \frac{2r\cos\theta + \sqrt{4r^2\cos^2\theta - 4(r^2 - L^2)}}{2}$$
$$x = r\cos\theta + \sqrt{r^2\cos^2\theta + L^2 - r^2}$$



37. $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\gamma}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{4ab}} = \sqrt{\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{4ab}} = \sqrt{\dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}}$

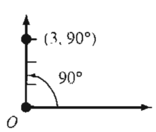
$= \sqrt{\dfrac{2s(2s-2c)}{4ab}} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

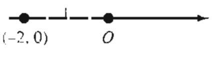
39. $\dfrac{\cos\alpha}{a} + \dfrac{\cos\beta}{b} + \dfrac{\cos\gamma}{c} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc} + \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2abc} + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc} = \dfrac{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2abc} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

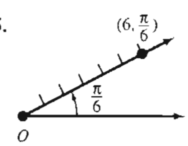
Ejercicio 8.3

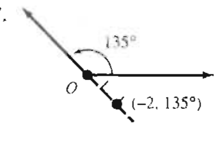
1. 2.83 **3.** 2.99 **5.** 14.98 **7.** 9.56 **9.** 3.86 **11.** 1.48 **13.** 2.82 **15.** 1.53 **17.** 30 **19.** 1.73 **21.** 19.90 **23.** 19.81 **25.** \$5446.38
27. $A = \dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{1}{2}a\operatorname{sen}\gamma\left(\dfrac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = \dfrac{a^2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma}{2\operatorname{sen}\alpha}$ **29.** 0.92 **31.** 2.27 **33.** 5.44 **35.** 0.84 **37.** $A = \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$

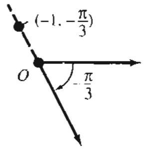
Ejercicio 8.4

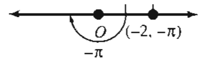
1.


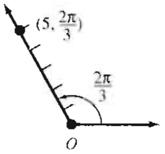
3.


5.


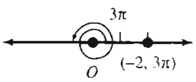
7. 

9. 

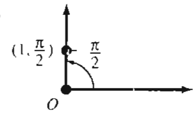
11. 

13. 

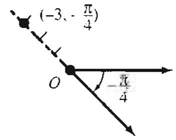
(a) $(5, -4\pi/3)$
(b) $(-5, 5\pi/3)$
(c) $(5, 8\pi/3)$

15. 

(a) $(2, -2\pi)$
(b) $(-2, \pi)$
(c) $(2, 2\pi)$

17. 

(a) $(1, -3\pi/2)$
(b) $(-1, 3\pi/2)$
(c) $(1, 5\pi/2)$

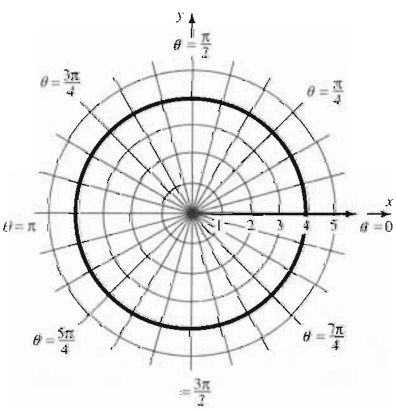
19. 

(a) $(3, -5\pi/4)$
(b) $(-3, 7\pi/4)$
(c) $(3, 11\pi/4)$

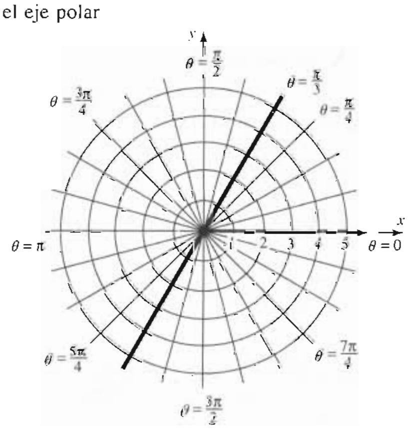
21. $(0, 3)$ **23.** $(-2, 0)$ **25.** $(-3\sqrt{3}, 3)$ **27.** $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **29.** $(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ **31.** $(2, 0)$ **33.** $(-2.57, 7.05)$ **35.** $(-4.98, -3.86)$ **37.** $(3, 0)$ **39.** $(1, \pi)$ **41.** $(\sqrt{2}, -\pi/4)$ **43.** $(2, \pi/6)$ **45.** $(2.47, -1.02)$ **47.** $(9.3, 0.47)$ **49.** $r^2 = \frac{3}{2}$ **51.** $r^2 \cos^2\theta - 4r \operatorname{sen}\theta = 0$ **53.** $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 1$ **55.** $r\cos\theta = 4$ **57.** $x^2 + y^2 - x = 0$ o $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ **59.** $(x^2 + y^2)^{3/2} - x = 0$ **61.** $x^2 + y^2 = 4$ **63.** $y^2 = 8(x + 2)$
65. $d = \sqrt{(r_2\cos\theta_2 - r_1\cos\theta_1)^2 + (r_2 \operatorname{sen}\theta_2 - r_1 \operatorname{sen}\theta_1)^2} = \sqrt{r_1{}^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$

Ejercicio 8.5

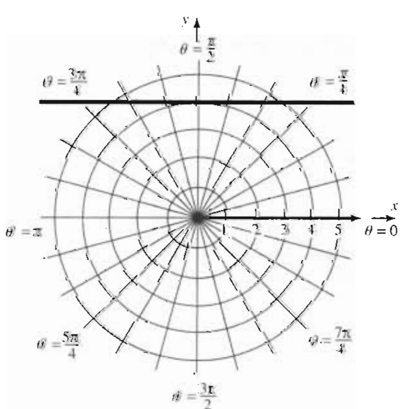
1. Círculo, radio 4, centro en el polo



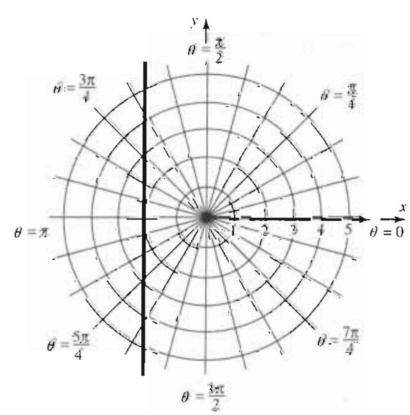
3. Recta que pasa por el polo formando un ángulo de $\pi/3$ con el eje polar



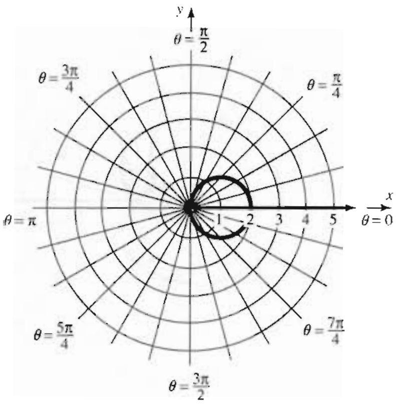
5. Recta horizontal 4 unidades arriba del polo



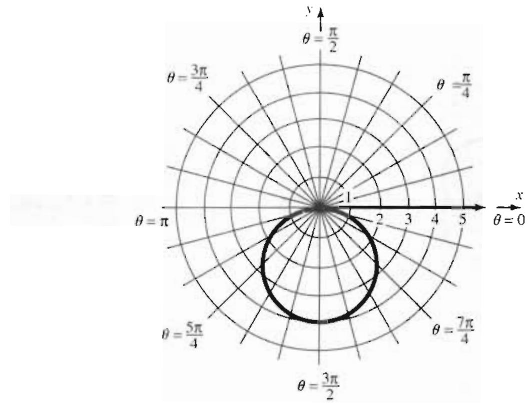
7. Recta vertical 2 unidades a la izquierda del polo



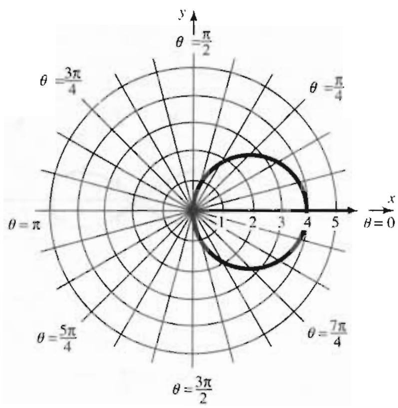
9. Círculo, radio 1, centro en (1, 0) en coordenadas rectangulares



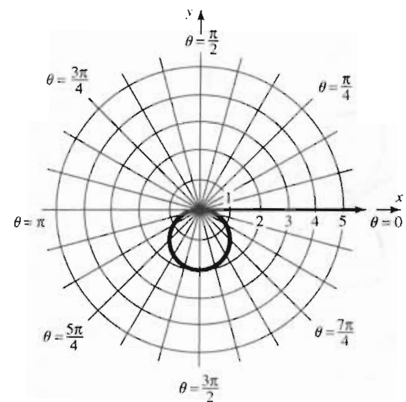
11. Círculo, radio 2, centro en (0, −2) en coordenadas rectangulares



13. Círculo, radio 2, centro en (2, 0) en coordenadas rectangulares

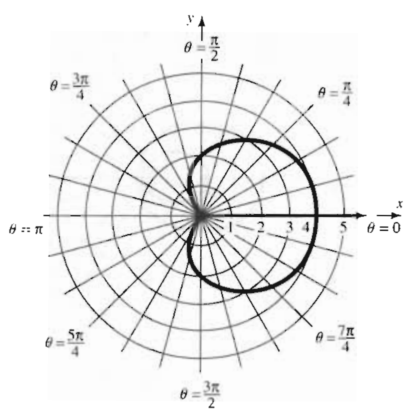


15. Círculo, radio 1, centro en (0, −1) en coordenadas rectangulares

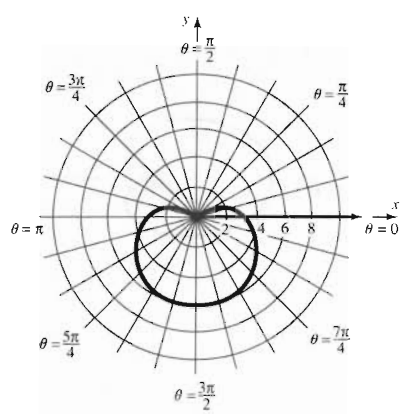


17. E 19. F 21. H 23. D

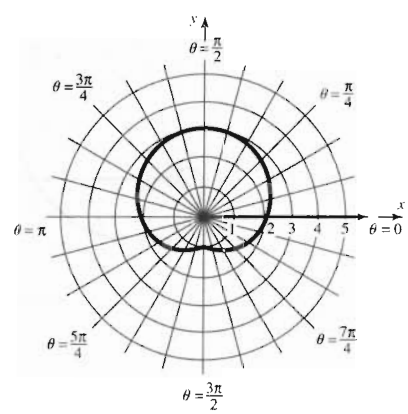
25. Cardioide



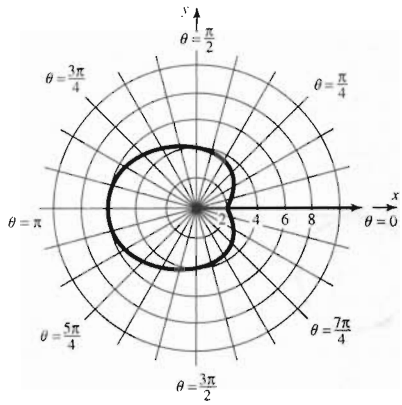
27. Cardioide



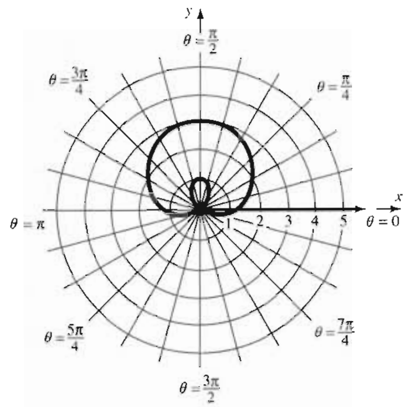
29. Caracol sin ciclo interno



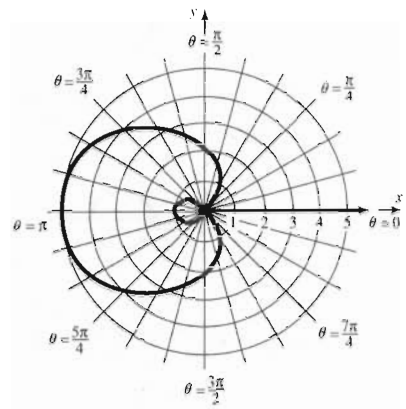
31. Caracol ón sin ciclo interno



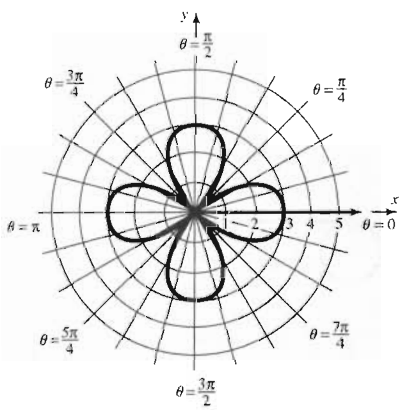
33. Caracol con ciclo interno



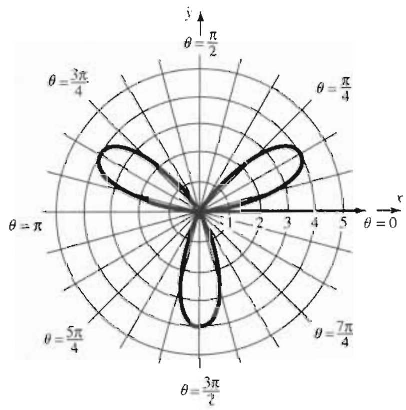
35. Caracol con ciclo interno



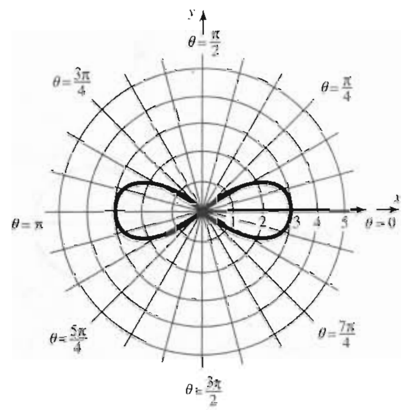
37. Rosa



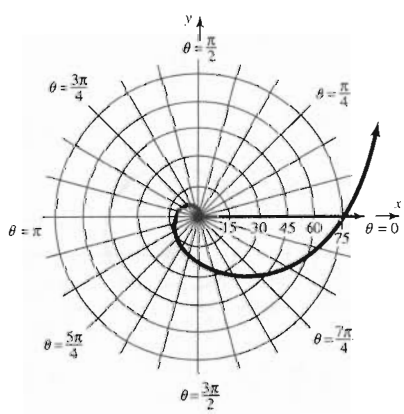
39. Rosa



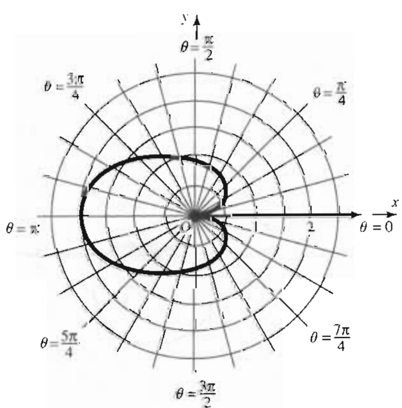
41. Lemniscata



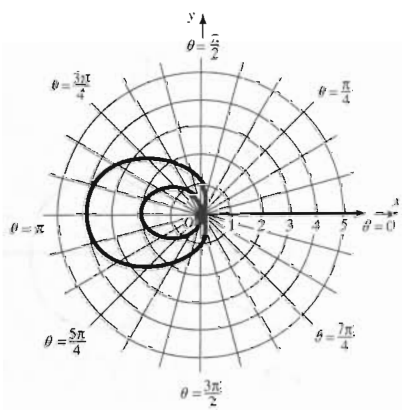
43. Espiral



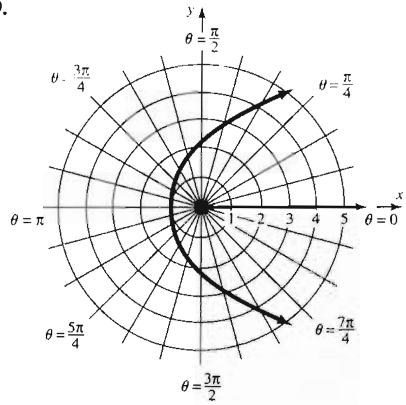
45. Cardioide



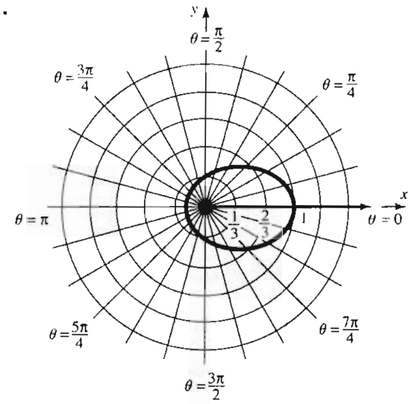
47. Caracol con ciclo interno



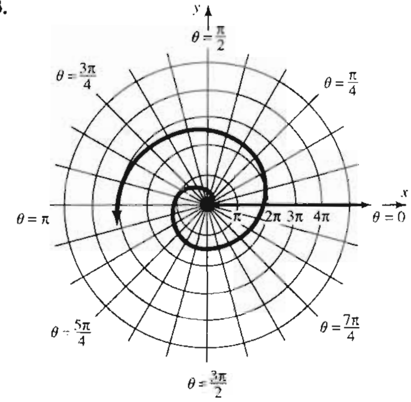
49.



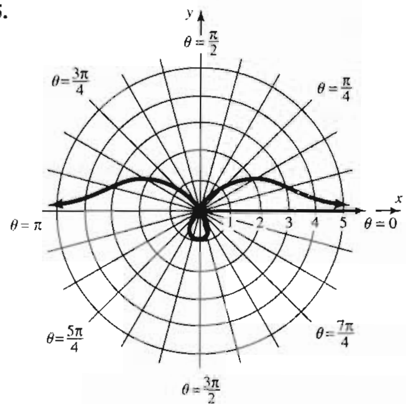
51.



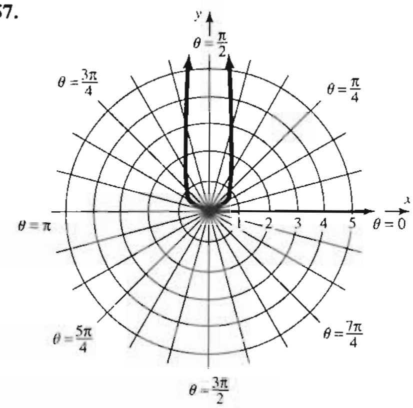
53.



55.



57.



59. $r \operatorname{sen} \theta = a$
$y = a$

61.
$$\begin{aligned} r &= 2a \operatorname{sen} \theta \\ r^2 &= 2ar \operatorname{sen} \theta \\ x^2 + y^2 &= 2ay \\ x^2 + y^2 - 2ay &= 0 \\ x^2 + (y - a)^2 &= a^2 \end{aligned}$$
Círculo, radio a, centro en $(0, a)$ en coordenadas rectangulares

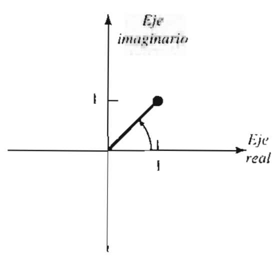
63.
$$\begin{aligned} r &= 2a \cos \theta \\ r^2 &= 2ar \cos \theta \\ x^2 + y^2 &= 2ax \\ x^2 - 2ax + y^2 &= 0 \\ (x - a)^2 + y^2 &= a^2 \end{aligned}$$
Círculo, radio a, centro en $(a, 0)$ en coordenadas rectangulares

65. **(a)** $r^2 = \cos \theta$: $r^2 = \cos(\pi - \theta)$ $\quad (-r)^2 = \cos(-\theta)$
$r^2 = -\cos \theta$ $\quad r^2 = \cos \theta$
No es equivalente; la prueba falla $\quad$ Hacer otra prueba

(b) $r^2 = \operatorname{sen} \theta$: $r^2 = \operatorname{sen}(\pi - \theta)$ $\quad (-r)^2 = \operatorname{sen}(-\theta)$
$r^2 = \operatorname{sen} \theta$ $\quad r^2 = -\operatorname{sen} \theta$
Prueba $\quad$ La nueva prueba falla

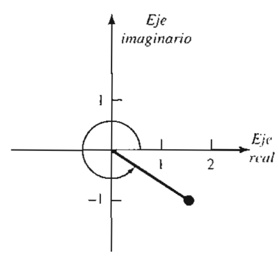
Ejercicio 8.6

1.



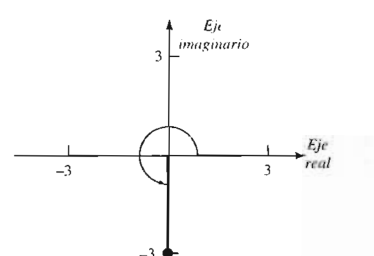
$\sqrt{2}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

3.



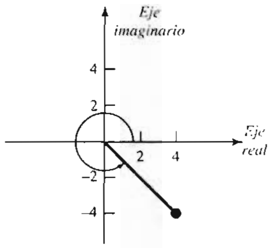
$2(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

5.



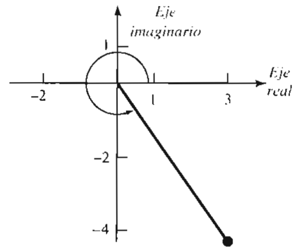
$3(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

7.



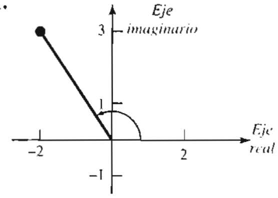
$4\sqrt{2}(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

9.



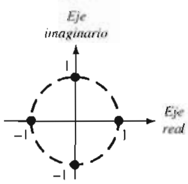
$5(\cos 306.9° + i \operatorname{sen} 306.9°)$

11.



$\sqrt{13}(\cos 123.7° + i \operatorname{sen} 123.7°)$

13. $-1 + \sqrt{3}i$ **15.** $2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ **17.** $-3i$ **19.** $-0.035 + 0.197i$ **21.** $1.97 + 0.347i$
23. $zw = 8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$; $z/w = \frac{1}{2}(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$ **25.** $zw = 12(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°)$; $z/w = \frac{3}{4}(\cos 220° + i \operatorname{sen} 220°)$
27. $zw = 4\left(\cos \frac{9\pi}{40} + i \operatorname{sen} \frac{9\pi}{40}\right)$; $\frac{z}{w} = \cos \frac{\pi}{40} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{40}$ **29.** $zw = 4\sqrt{2}(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$; $z/w = \sqrt{2}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$
31. $32(-1 + \sqrt{3}i)$ **33.** $32i$ **35.** $\frac{27}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ **37.** $\frac{25\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$ **39.** $4(-1 + i)$ **41.** $-23 + 14.15i$
43. $\sqrt[6]{2}(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$, $\sqrt[6]{2}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)$
45. $\sqrt[4]{8}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$, $\sqrt[4]{8}(\cos 165° + i \operatorname{sen} 165°)$, $\sqrt[4]{8}(\cos 255° + i \operatorname{sen} 255°)$, $\sqrt[4]{8}(\cos 345° + i \operatorname{sen} 345°)$
47. $2(\cos 67.5° + i \operatorname{sen} 67.5°)$, $2(\cos 157.5° + i \operatorname{sen} 157.5°)$, $2(\cos 247.5° + i \operatorname{sen} 247.5°)$, $2(\cos 337.5° + i \operatorname{sen} 337.5°)$
49. $\cos 18° + i \operatorname{sen} 18°$, $\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°$, $\cos 162° + i \operatorname{sen} 162°$, $\cos 234° + i \operatorname{sen} 234°$, $\cos 306° + i \operatorname{sen} 306°$
51. $1, i, -1, -i$ **53.** *Véase* la fórmula (8); $|z_k| = \sqrt[n]{r}$ para toda k. **55.** *Véase* la fórmula (8). Las z_k están separadas por un ángulo de $2\pi/n$.



Complete los espacios

1. Senos **2.** Cosenos **3.** de Herón **4.** polo; eje polar **5.** -2 **6.** $r = 2\cos\theta$ **7.** el eje polar (eje x) **8.** magnitud o módulo; argumento

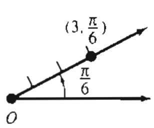
Cierto o falso

1. F **2.** C **3.** F **4.** C **5.** F **6.** C

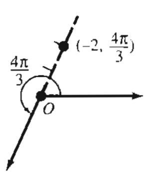
Ejercicios de revisión

1. $\gamma = 100°$, $b = 0.65$, $c = 1.29$ **3.** $\beta = 56.8°$, $\gamma = 23.2°$, $b = 4.25$ **5.** No hay triángulo **7.** $b = 3.32$, $\alpha = 62.8°$, $\gamma = 17.2°$
9. No hay triángulo **11.** $c = 2.32$, $\alpha = 16.1°$, $\beta = 123.9°$ **13.** $\beta = 36.2°$, $\gamma = 63.8°$, $c = 4.56$ **15.** $\alpha = 39.6°$, $\beta = 18.5°$, $\gamma = 121.9°$
17. Dos triángulos: $\beta_1 = 13.4°$, $\gamma_1 = 156.6°$, $c_1 = 6.86$; $\beta_2 = 166.6°$, $\gamma_2 = 3.4°$, $c_2 = 1.02$ **19.** $a = 5.23$, $\beta = 46°$, $\gamma = 64°$ **21.** 1.93
23. 18.79 **25.** 6 **27.** 3.80 **29.** 0.32

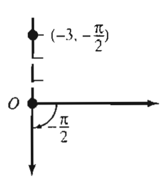
31. $(3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2})$



33. $(1, \sqrt{3})$

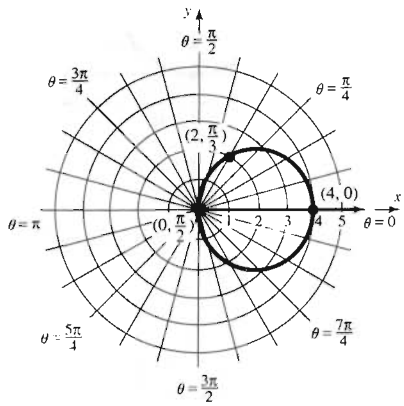


35. $(0, 3)$

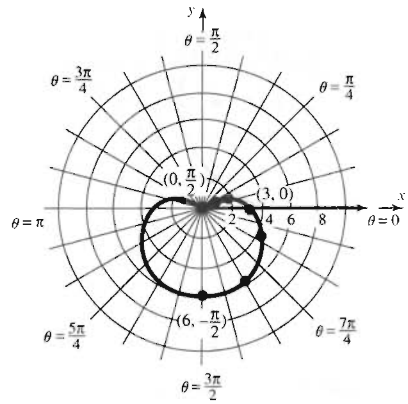


37. $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(-3\sqrt{2}, -\pi/4)$ **39.** $(2, -\pi/2)$, $(-2, \pi/2)$ **41.** $(5, 0.93)$, $(-5, 4.07)$ **43.** $3r^2 - 6r\operatorname{sen}\theta = 0$ **45.** $r^2(2 - 3\operatorname{sen}^2\theta) - \tan\theta = 0$
47. $r^3\cos\theta = 4$ **49.** $x^2 + y^2 - 2y = 0$ **51.** $x^2 + y^2 = 25$ **53.** $x + 3y = 6$

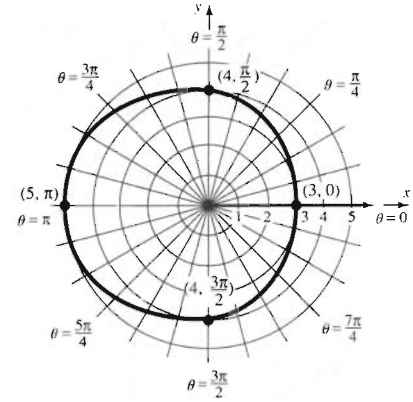
55. Círculo; radio 2, centro en (2, 0) en coordenadas rectangulares



57. Cardioide



59. Caracol sin ciclo interno

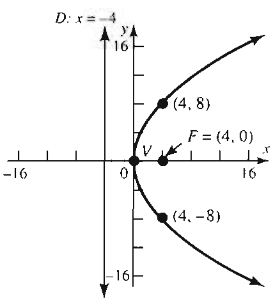


61. $\sqrt{2}(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)$ **63.** $5(\cos 323.1° + i \operatorname{sen} 323.1°)$ **65.** $-\sqrt{3} + i$ **67.** $-\frac{3}{2} + (3\sqrt{3}/2)i$ **69.** $0.098 - 0.017i$
71. $zw = \cos 130° + i \operatorname{sen} 130°$; $z/w = \cos 30° + i \operatorname{sen} 30°$ **73.** $zw = 6(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$; $\frac{z}{w} = \frac{3}{2}\left(\cos \frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}\right)$
75. $zw = 5(\cos 5° + i \operatorname{sen} 5°)$; $z/w = 5(\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$ **77.** $\frac{27}{2}(1 + \sqrt{3}i)$ **79.** $4i$ **81.** 64 **83.** $-527.1 - 335.8i$
85. 3, $3(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$, $3(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$ **87.** 204.1 millas **89.** **(a)** 2.59 millas **(b)** 2.92 millas **(c)** 2.53 millas
91. **(a)** 131.8 millas **(b)** 23.1° **(c)** 0.2 h **93.** 9024 pies cuadrados

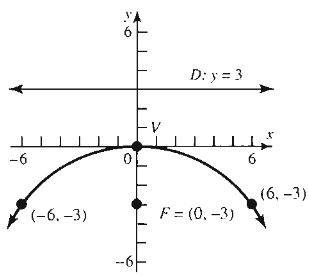
CAPÍTULO 9 *Ejercicio 9.2*

1. B **3.** E **5.** H **7.** C

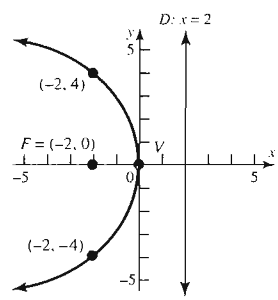
9. $y^2 = 16x$



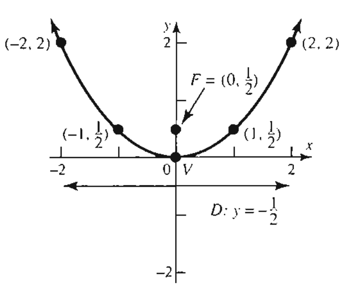
11. $x^2 = -12y$



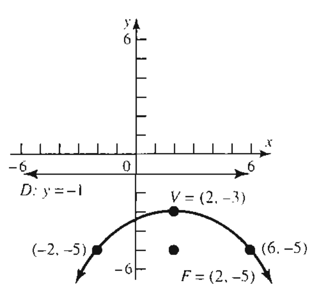
13. $y^2 = -8x$



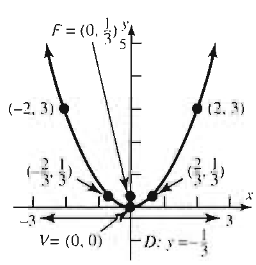
15. $x^2 = 2y$



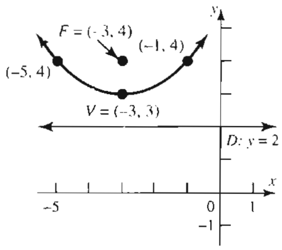
17. $(x - 2)^2 = -8(y + 3)$



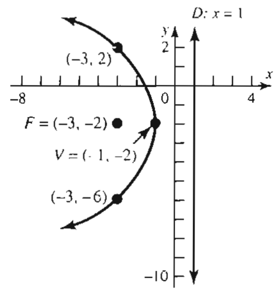
19. $x^2 = \frac{4}{3}y$



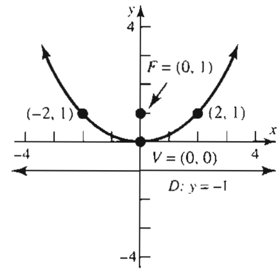
21. $(x + 3)^2 = 4(y - 3)$



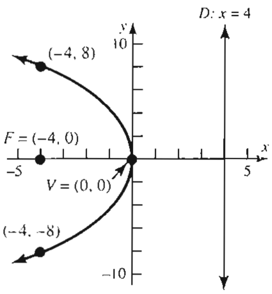
23. $(y + 2)^2 = -8(x + 1)$



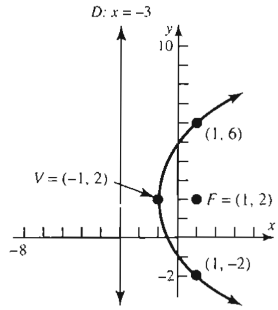
25.



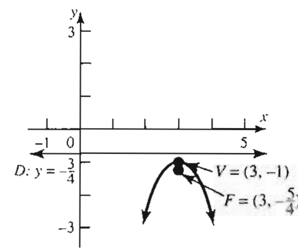
27.



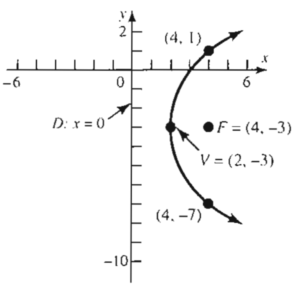
29.



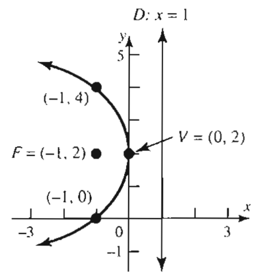
31.



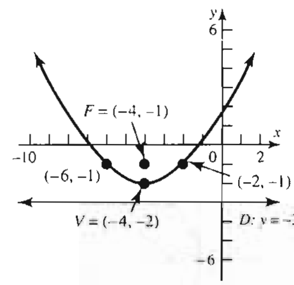
33.



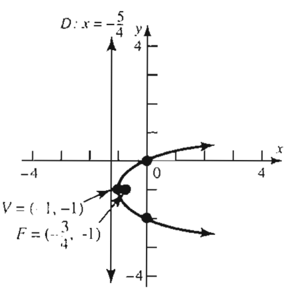
35.



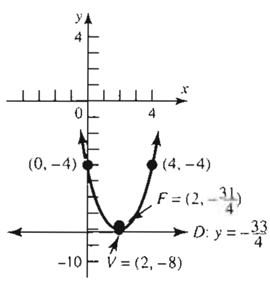
37.



39.



41.



43. $(y - 1)^2 = x$ **45.** $(y - 1)^2 = -(x - 2)$ **47.** $x^2 = 4(y - 1)$ **49.** $y^2 = \frac{1}{2}(x + 2)$
51. 1.5625 pies desde la base del disco, a lo largo del eje de simetría **53.** 1 pulgada desde el vértice **55.** 20 pies
57. 0.78125 pies **59.** 4.17 pies desde la base a lo largo del eje de simetría **61.** 24.31 pies, 18.75 pies, 7.64 pies

63. $Ax^2 + Ey = 0$

$$x^2 = -\frac{E}{A}y$$

Esta es la ecuación de una parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría en el eje y. El foco está en $(0, -E/4A)$; la directriz es la recta $y = E/4A$. La parábola abre hacia arriba si $-E/A > 0$ y hacia abajo si $-E/A < 0$.

65. $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, A \neq 0$

$$Ax^2 + Dx = -Ey - F$$

$$x^2 + \frac{D}{A}x = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}y - \frac{F}{A} + \frac{D^2}{4A^2}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}y + \frac{D^2 - 4AF}{4A^2}$$

(a) Si $E \neq 0$, entonces la ecuación puede escribirse como

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A}\left(y - \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$$

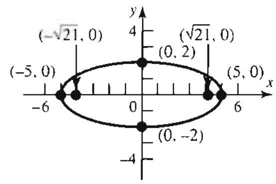
Esta es la ecuación de una parábola con vértice en $(-D/2A, (D^2 - 4AF)/(4AE)$ y eje de simetría paralelo al eje-y.

(b)–(d) Si $E = 0$, la gráfica de la ecuación no tiene puntos si $D^2 - 4AF < 0$, es una recta vertical si $D^2 - 4AF = 0$, y son dos rectas verticales si $D^2 - 4AF > 0$.

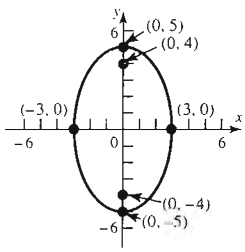
Ejercicio 9.3

1. C **3.** B

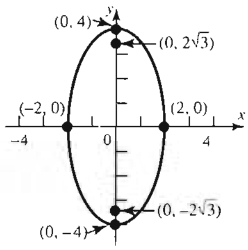
5.



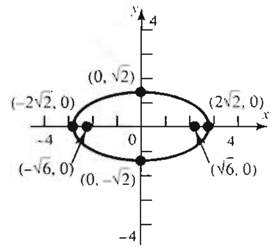
7.



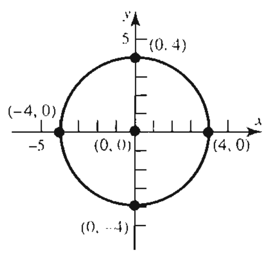
9. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$



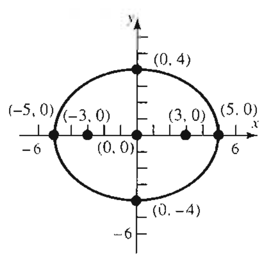
11. $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$



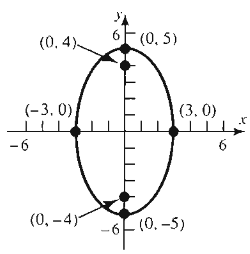
13.



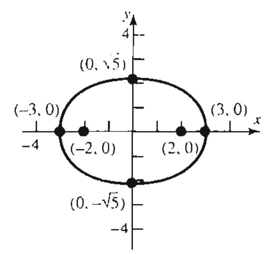
15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$



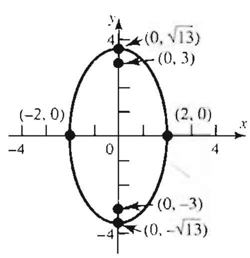
17. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$



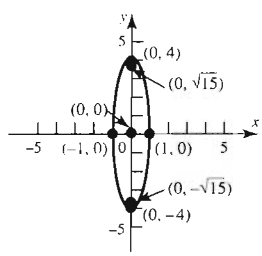
19. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$



21. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$



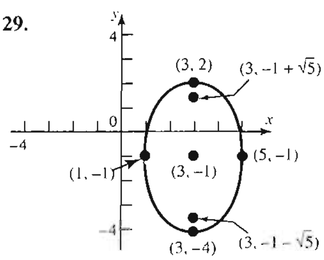
23. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$



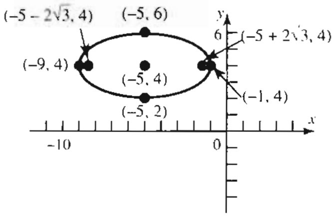
25. $\frac{(x + 1)^2}{4} + (y - 1)^2 = 1$

27. $(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

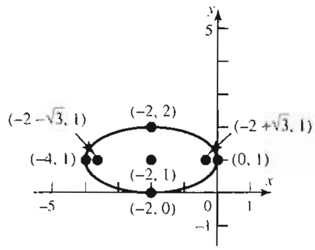
29.



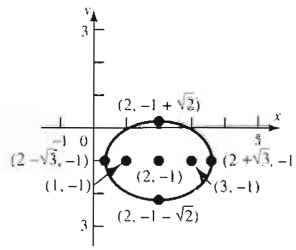
31. $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$



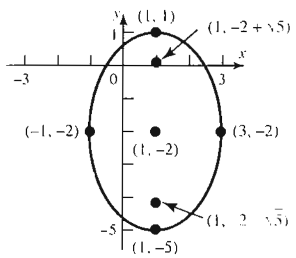
33. $\frac{(x+2)^2}{4} + (y-1)^2 = 1$



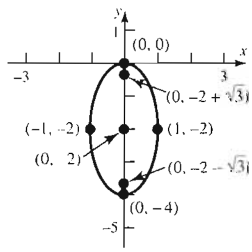
35. $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$



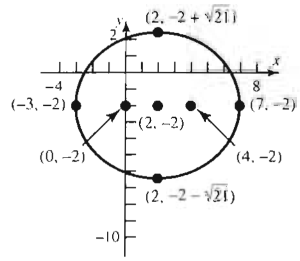
37. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$



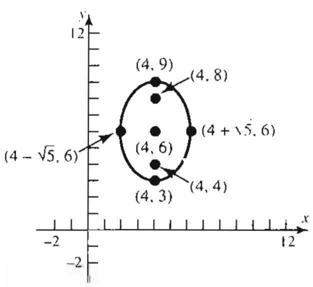
39. $x^2 + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$



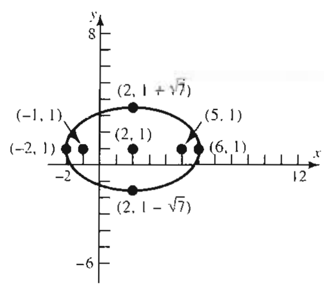
41. $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{21} = 1$



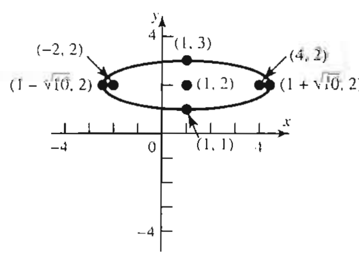
43. $\frac{(x-4)^2}{5} + \frac{(y-6)^2}{9} = 1$



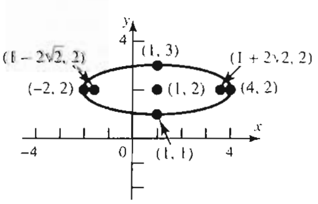
45. $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$



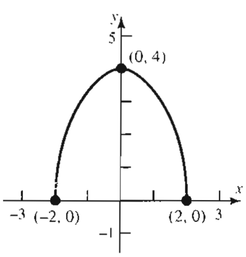
47. $\frac{(x-1)^2}{10} + (y-2)^2 = 1$



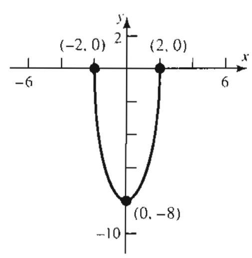
49. $\frac{(x-1)^2}{9} + (y-2)^2 = 1$



51.



53.



55. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ **57.** 43.3 pies **59.** 24.65 pies, 21.65 pies, 13.82 pies **61.** 0 pies, 12.99 pies, 15 pies, 12.99 pies, 0 pies

63. 91.5 millones de millas; $\frac{x^2}{(93)^2} + \frac{y^2}{8646.75} = 1$ **65.** perihelio: 460.6 millones de millas; distancia media: 483.8 millones de millas; $\frac{x^2}{(483.8)^2} + \frac{y^2}{233524} = 1$

67. 30 pies

69. **(a)** $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$
$Ax^2 + Cy^2 = -F$

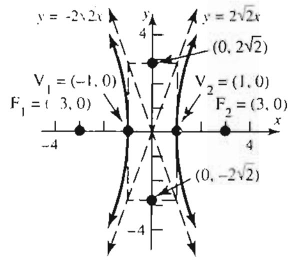
Si A y C son del mismo signo y F es de signo opuesto, entonces la ecuación toma la forma $x^2/(-F/A) + y^2/(-F/C) = 1$, donde $-F/A$ y $-F/C$ son positivos. Esta es la ecuación de una elipse con centro en $(0, 0)$.

(b) Si $A = C$, la ecuación puede escribirse como $x^2 + y^2 = -F/A$. Esta es la ecuación de un círculo con centro en $(0, 0)$ y radio igual a $\sqrt{-F/A}$.

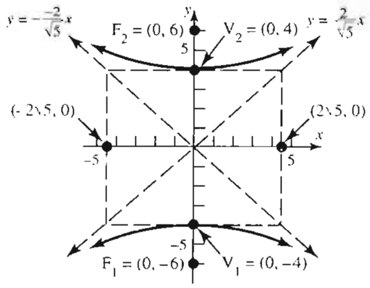
Ejercicio 9.4

1. B **3.** A

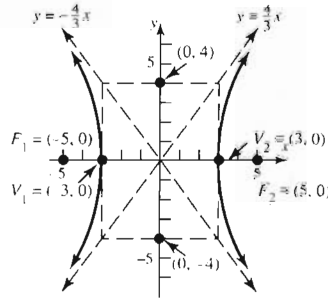
5. $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$



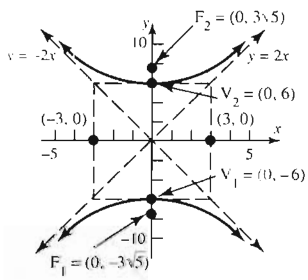
7. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{20} = 1$



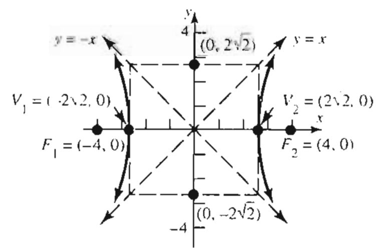
9. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



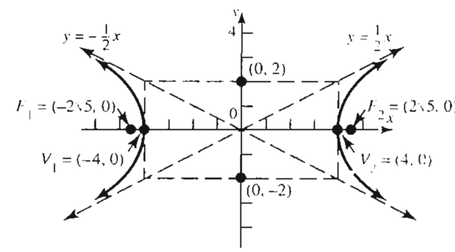
11. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{9} = 1$



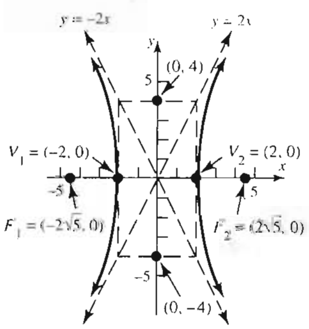
13. $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{8} = 1$



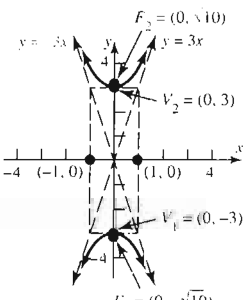
15. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$



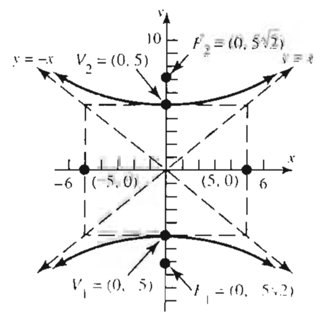
17. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



19. $\dfrac{y^2}{9} - x^2 = 1$



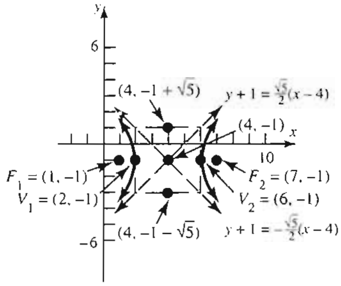
21. $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{25} = 1$



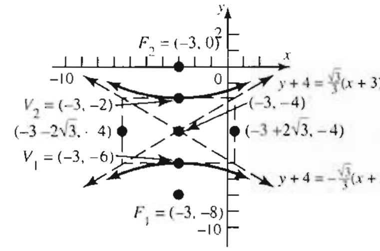
23. $x^2 - y^2 = 1$

25. $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

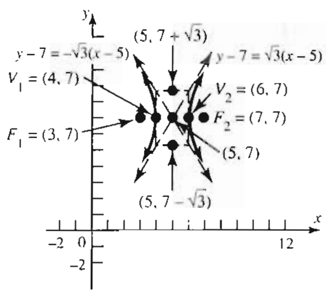
27. $\dfrac{(x-4)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{5} = 1$



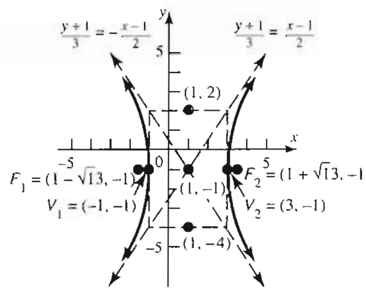
29. $\dfrac{(y+4)^2}{4} - \dfrac{(x+3)^2}{12} = 1$



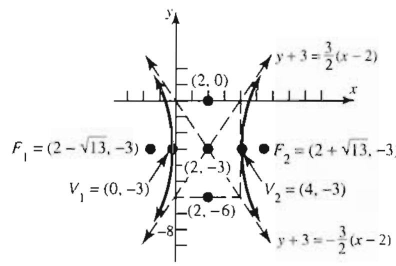
31. $(x-5)^2 - \dfrac{(y-7)^2}{3} = 1$



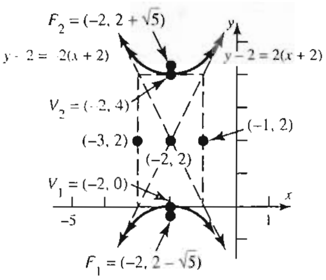
33. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$



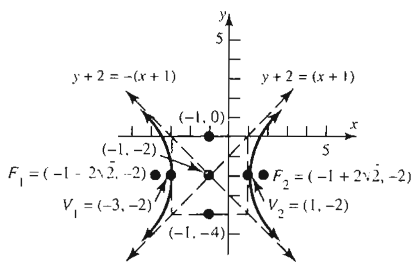
35. $\dfrac{(x-2)^2}{4} - \dfrac{(y+3)^2}{9} = 1$



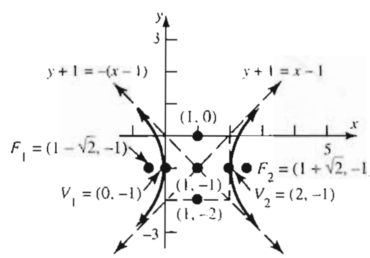
37. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - (x+2)^2 = 1$



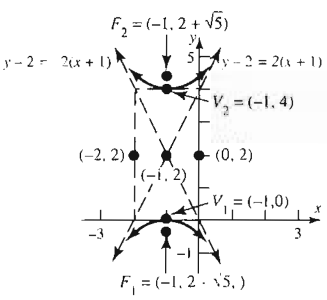
39. $\dfrac{(x+1)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$



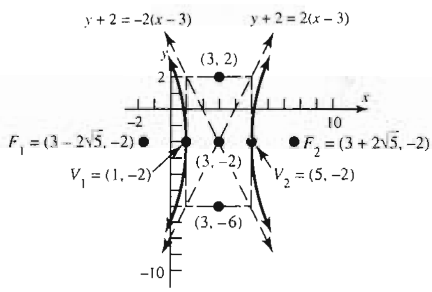
41. $(x-1)^2 - (y+1)^2 = 1$



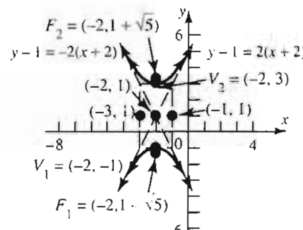
43. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$



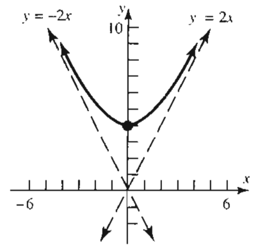
45. $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$



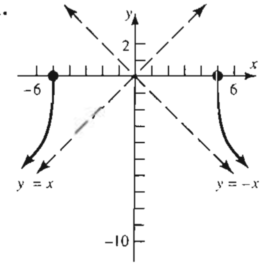
47. $\dfrac{(y-1)^2}{4} - (x+2)^2 = 1$



49.

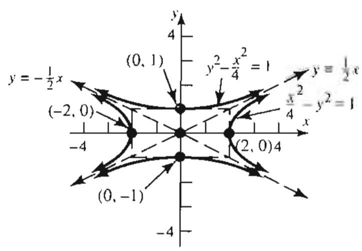


51.



53. **(a)** El barco alcanzará la costa en un punto a 64.66 millas desde la estación maestra. **(b)** 0.00086 segundos **(c)** (104, 50)
55. **(a)** 450 pies **57.** Si e es cercana a 1, la hipérbola es angosta; si e es muy grande, la hipérbola es muy ancha

59. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$; asíntotas $y = \pm\dfrac{1}{2}x$ $\qquad$ $y^2 - \dfrac{x^2}{4} = 1$; asíntotas $y = \pm\dfrac{1}{2}x$



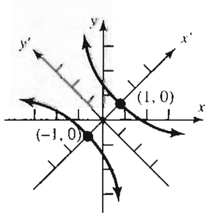
61. $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$
$Ax^2 + Cy^2 = -F$

Si A y C tienen signos opuestos $F \neq 0$, esta ecuación puede escribirse como $x^2/(-F/A) + y^2/(-F/C) = 1$, donde $-F/A$ y $-F/C$ son de signos opuestos. Esta es la ecuación de una hipérbola con centro en (0, 0). El eje transverso es el eje-x si $-F/A > 0$; el eje transverso es el eje-y si $-F/A < 0$.

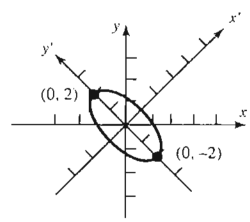
Ejercicio 9.5

1. Parábola **3.** Elipse **5.** Hipérbola **7.** Hipérbola **9.** Círculo **11.** $x = \sqrt{2}/2(x' - y')$, $y = \sqrt{2}/2(x' + y')$
13. $x = \sqrt{2}/2(x' - y')$, $y = \sqrt{2}/2(x' + y')$ **15.** $x = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y')$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$ **17.** $x = \sqrt{5}/5(x' - 2y')$, $y = \sqrt{5}/5(2x' + y')$
19. $x = \sqrt{13}/13(3x' - 2y')$, $y = \sqrt{13}/13(2x' + 3y')$

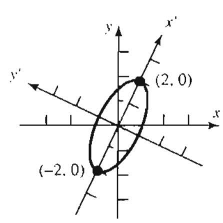
21. $\theta = 45°$ (*véase* el problema 11)
$x'^2 - \dfrac{y'^2}{3} = 1$
Hipérbola
Centro en el origen
El eje transverso es el eje-x'
Vértices en ($\pm$ 1, 0)



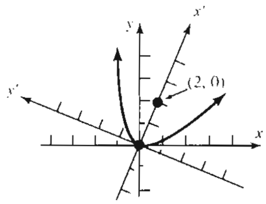
23. $\theta = 45°$ (*véase* el problema 13)
$x'^2 + \dfrac{y'^2}{4} = 1$
Elipse
Centro en el origen (0, 0)
El eje mayor es el eje y'
Vértices en (0, $\pm$ 2)



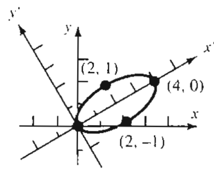
25. $\theta = 60°$ (*véase* el problema 15)
$\dfrac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$
Elipse
Centro en (0, 0)
El eje mayor es el eje-x'
Vértices en ($\pm$ 2, 0)



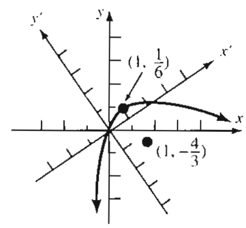
27. $\theta \approx 63°$ (*véase* el problema 17)
$y'^2 = 8x'$
Parábola
Vértice en (0, 0)
Foco en (2, 0)



29. $\theta \approx 34°$ (*véase* el problema 19)
$$\frac{(x'-2)^2}{4} + y'^2 = 1$$
Elipse
Centro en (2, 0)
El eje mayor es el eje-x'
Vértices en (0, 0)



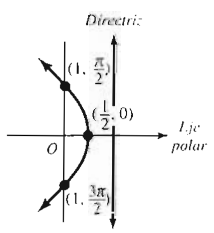
31. $\cot 2\theta = \frac{7}{24}$; $\theta \approx 37°$
$(x'-1)^2 = -6(y' - \frac{1}{6})$
Parábola
Vértice en $(1, \frac{1}{6})$
Foco en $(1, \frac{4}{3})$



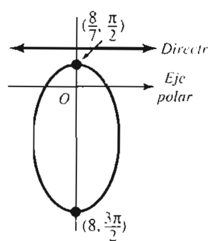
33. Hipérbola 35. Hipérbola 37. Parábola 39. Elipse 41. Elipse
43. Consúltese la ecuación (6):
$A' = A\cos^2\theta + B\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C\,\text{sen}^2\theta$
$B' = B(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta) + 2(C - A)(\text{sen}\,\theta\cos\theta)$
$C' = A\,\text{sen}^2\theta - B\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + C\cos^2\theta$
$D' = D\cos\theta + E\,\text{sen}\,\theta$
$E' = -D\,\text{sen}\,\theta + E\cos\theta$
$F' = F$
45. Utilice el problema 43 para determinar $B'^2 - 4A'C'$. Después de varias cancelaciones, $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$.
47. Utilice las fórmulas (5) para determinar $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Luego de simplificar, $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2$.

Ejercicio 9.6

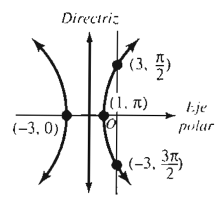
1. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo.
3. Hipérbola; la directriz es paralela al eje polar $\frac{4}{3}$ unidades abajo del polo.
5. Elipse; la directriz es perpendicular al eje polar $\frac{3}{2}$ unidades a la izquierda del polo.
7. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo.



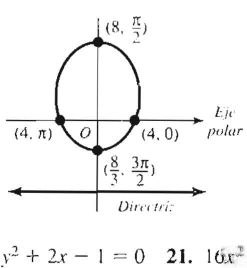
9. Elipse; la directriz es paralela al eje polar $\frac{8}{3}$ unidades arriba del polo.



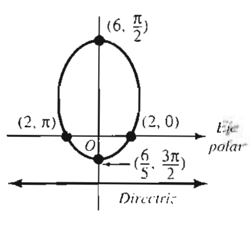
11. Hipérbola; la directriz es perpendicular al eje polar $\frac{3}{2}$ unidades a la izquierda del polo.



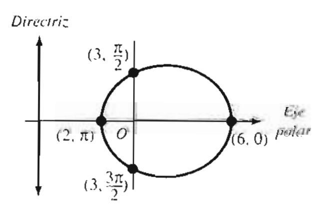
13. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 8 unidades abajo del polo; los vértices están en $(8, \pi/2)$ y $(\frac{8}{3}, 3\pi/2)$.



15. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 3 unidades abajo del polo; los vértices están en $(6, \pi/2)$ y $(\frac{6}{5}, 3\pi/2)$.



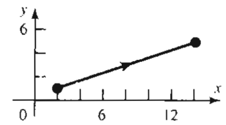
17. Elipse; la directriz es perpendicular al eje polar 6 unidades a la izquierda del polo; los vértices están en (6, 0) y $(2, \pi)$.



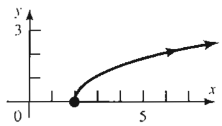
19. $y^2 + 2x - 1 = 0$ 21. $16x^2 + 7y^2 + 48y - 64 = 0$ 23. $3x^2 - y^2 + 12x + 9 = 0$ 25. $4x^2 + 3y^2 - 16y - 64 = 0$
27. $9x^2 + 5y^2 - 24y - 36 = 0$ 29. $3x^2 + 4y^2 - 12x - 36 = 0$ 31. $r = 1/(1 + \text{sen}\,\theta)$ 33. $r = 12/(5 - 4\cos\theta)$ 35. $r = 12/(1 - 6\,\text{sen}\,\theta)$
37. Utilice $d(D, P) = p - r\cos\theta$ al deducir la ecuación (a) de la tabla 5.
39. Utilice $d(D, P) = p + r\,\text{sen}\,\theta$ al deducir la ecuación (a) de la tabla 5.

Ejercicio 9.7

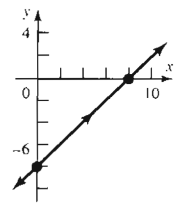
1. $x - 3y + 1 = 0$



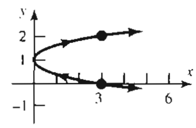
3. $y = \sqrt{x - 2}$



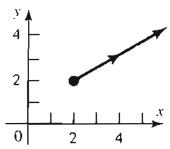
5. $x = y + 8$



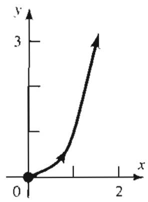
7. $x = 3(y - 1)^2$



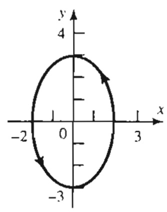
9. $2y = 2 + x$



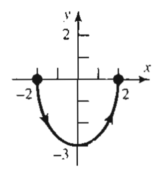
11. $y = x^3$



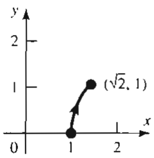
13. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$



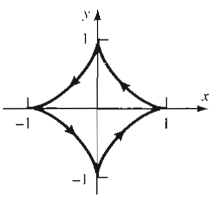
15. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$



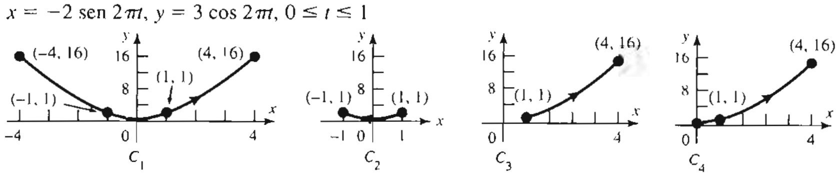
17. $x^2 - y^2 = 1$



19. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

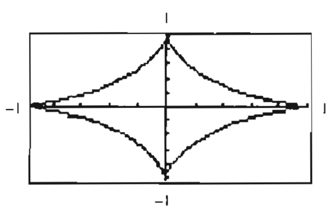


21. $x = t,\ y = t^3;\ x = \sqrt[3]{t},\ y = t$ **23.** $x = t,\ y = t^{2/3};\ x = t^{3/2},\ y = t$ **25.** $x = 2\cos \pi t,\ y = -3 \operatorname{sen} \pi t,\ 0 \le t \le 2$
27. $x = -2 \operatorname{sen} 2\pi t,\ y = 3\cos 2\pi t,\ 0 \le t \le 1$
29.

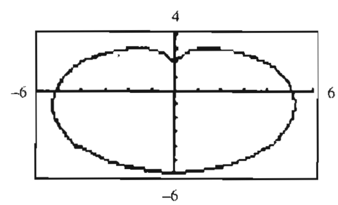


31. La orientación es de (x_1, y_1) a (x_2, y_2).

33.



35.



Complete los espacios

1. parábola **2.** elipse **3.** hipérbola **4.** mayor, transverso **5.** eje Y **6.** $y/3 = x/2$; $y/3 = -x/2$ **7.** $\cot 2\theta = (A - C)/B$
8. $\frac{1}{2}$; elipse; paralela; 4; abajo **9.** elipse

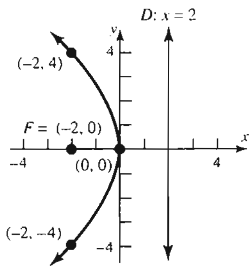
Cierto o falso

1. C **2.** F **3.** C **4.** C **5.** C **6.** C **7.** C **8.** C **9.** C **10.** F

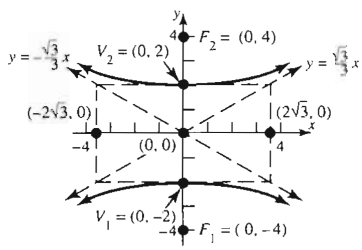
Ejercicios de revisión

1. Parábola; vértice (0, 0), foco (−4, 0), directriz $x = 4$
3. Hipérbola; centro (0, 0), vértices (5, 0) y (−5, 0), focos $(\sqrt{26}, 0)$ y $(-\sqrt{26}, 0)$, asíntotas $y = \frac{1}{5}x$ y $y = -\frac{1}{5}x$
5. Elipse; centro (0, 0), vértices (0, 5) y (0, −5), focos (0, 3) y (0, −3)
7. $x^2 = -4(y - 1)$: parábola; vértice (0, 1), foco (0, 0), directriz $y = 2$
9. $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{8} = 1$: hipérbola; centro (0, 0), vértices $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$, focos $(\sqrt{10}, 0)$ y $(-\sqrt{10}, 0)$, asíntotas $y = 2x$ y $y = -2x$
11. $(x - 2)^2 = 2(y + 2)$: parábola; vértice (2, −2), focos $(2, -\frac{3}{2})$, directriz $y = -\frac{5}{2}$
13. $\dfrac{(y-2)^2}{4} - (x-1)^2 = 1$: hipérbola; centro (1, 2), vértices (1, 4) y (1, 0), focos $(1, 2+\sqrt{5})$ y $(1, 2-\sqrt{5})$, asíntotas $y - 2 = \pm 2(x - 1)$
15. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$: elipse; centro (2, 1), vértices (5, 1) y (−1, 1), focos $(2+\sqrt{5}, 1)$ y $(2-\sqrt{5}, 1)$
17. $(x-2)^2 = -4(y+1)$: parábola; vértice (2, −1), foco (2, −2), directriz $y = 0$
19. $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$: elipse; centro (1, −1), vértices (1, 2) y (1, −4), focos $(1, -1+\sqrt{5})$ y $(1, -1-\sqrt{5})$

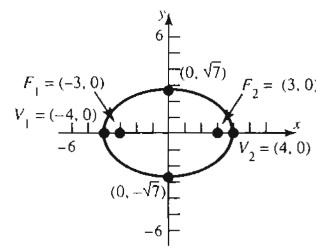
21. $y^2 = -8x$



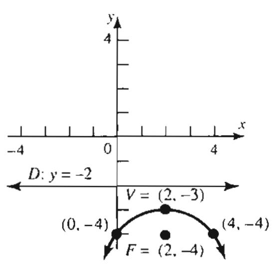
23. $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$



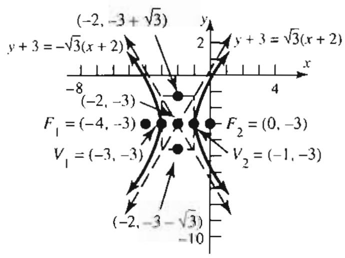
25. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$



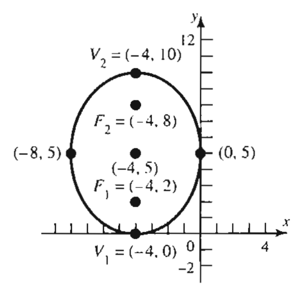
27. $(x-2)^2 = -4(y+3)$



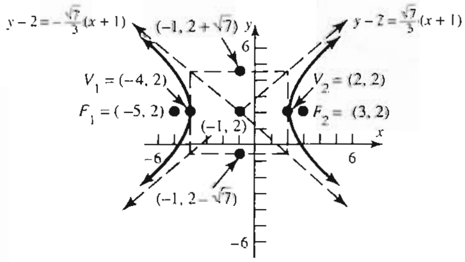
29. $(x+2)^2 - \dfrac{(y+3)^2}{3} = 1$



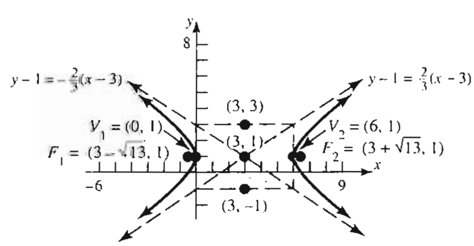
31. $\dfrac{(x+4)^2}{16} + \dfrac{(y-5)^2}{25} = 1$



33. $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-2)^2}{7} = 1$



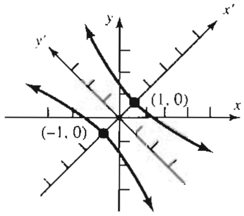
35. $\dfrac{(x-3)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$



37. Parábola **39.** Elipse **41.** Parábola **43.** Hipérbola **45.** Elipse

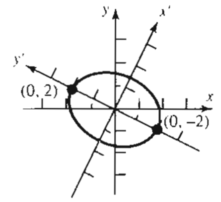
47. $x'^2 - \dfrac{y'^2}{9} = 1$

Hipérbola
Centro en el origen
Eje transverso el eje x'
Vértices en $(\pm 1, 0)$



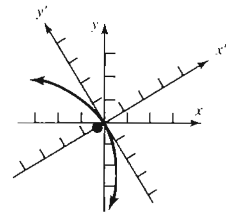
49. $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$

Elipse
Centro en el origen
Eje mayor el eje y'
Vértices en $(0, \pm 2)$

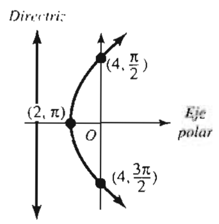


51. $y'^2 = -\dfrac{4\sqrt{13}}{13}x'$

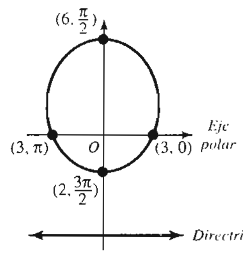
Parábola
Vértice en el origen
Foco en el eje-x' en $(-\sqrt{13}/13, 0)$



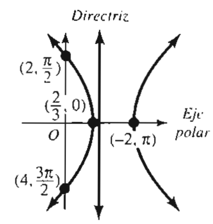
53. Parábola; la directriz es perpendicular al eje polar 4 unidades a la izquierda del polo



55. Elipse; la directriz es paralela al eje polar 6 unidades abajo del polo; los vértices son $(6, \pi/2)$ y $(2, 3\pi/2)$.

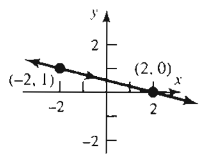


57. Hipérbola; la directriz es perpendicular al eje polar 1 unidad a la derecha del polo; los vértices están en $(\frac{2}{3}, 0)$ y $(-2, \pi)$

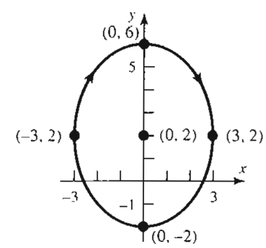


59. $y^2 - 8x - 16 = 0$ **61.** $3x^2 - y^2 - 8x + 4 = 0$

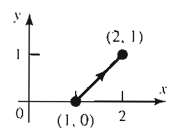
63. $x + 4y = 2$



65. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$



67. $1 + y = x$



69. $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ **71.** La elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$ **73.** $\frac{1}{4}$ de pie o de 3 pulgadas **75.** 19.72 pies, 18.86 pies, 14.91 pies

77. **(a)** 45.24 millas desde la estación principal **(b)** 0.000645 segundos **(c)** (66, 20)

CAPÍTULO 10 *Ejercicio 10.1*

1. $2(2) - (-1) = 5$ y $5(2) + 2(-1) = 8$ **3.** $3(2) - 4(\frac{1}{2}) = 4$ y $\frac{1}{2}(2) - 3(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ **5.** $2^2 - 1^2 = 3$ y $(2)(1) = 2$
7. $\dfrac{0}{1+0} + 3(2) = 6$ y $0 + 9(2)^2 = 36$ **9** $3(1) + 3(-1) + 2(2) = 4$, $1 - (-1) - 2 = 0$, y $2(-1) - 3(2) = -8$ **11.** $x = 6, y = 2$
13. $x = 3, y = 2$ **15.** $x = 8, y = -4$ **17.** $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{6}$ **19.** Inconsistente **21.** $x = 1, y = 2$ **23.** $x = 4 - 2y$, y es cualquier número real
25. $x = 1, y = 1$ **27.** $x = \frac{3}{2}, y = 1$ **29.** $x = 4, y = 3$ **31.** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{5}$ **33.** $x = 8, y = 2, z = 0$ **35.** $x = 2, y = -1, z = 1$ **37.** Inconsistente
39. $x = 5z - 2$, $y = 4z - 3$ donde z es cualquier número real, o $x = \frac{5}{4}y + \frac{7}{4}$, $z = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$ donde y es cualquier número real, o $y = \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}$, $z = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$ donde x es cualquier número real.

41. Inconsistente **43.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **45.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$ **47.** $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{3}$ **49.** $x = 48.15, y = 15.18$
51. $x = -21.47, y = 16.12$ **53.** $x = 0.26, y = 0.06$ **55.** 20 y 61 **57.** 15 por 30 pies **59.** Hamburguesa con queso \$1.55; malteada \$0.85
61. 22.5 libras **63.** Velocidad promedio del viento 25 mph; promedio de la velocidad en el aire del Piper 175 mph
65. 80 juegos de \$25.00 y 120 de \$45.00 **67.** \$5.56 **69.** 12, 15, 21 **71.** $I_1 = \frac{10}{71}, I_2 = \frac{65}{71}, I_3 = \frac{55}{71}$
73. 100 orquesta, 210 principales y 19 asientos de galería **79.** $b = -\frac{1}{2}; c = \frac{3}{2}$ **81.** $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{5}{3}, c = 1$
83. $x = \dfrac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1}, y = \dfrac{m_2 b_1 - m_1 b_2}{m_2 - m_1}$ **85.** $y = mx + b$, x es cualquier número real

Ejercicio 10.2

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{array}\right]$ **3.** $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & -2 \end{array}\right]$ **5.** $\left[\begin{array}{cc|c} 0.01 & -0.03 & 0.06 \\ 0.13 & 0.10 & 0.20 \end{array}\right]$ **7.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right]$ **9.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right]$

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & 36 \end{array}\right]$ **13.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 15 \end{array}\right]$ **15.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 108 & -12 \end{array}\right]$ **17.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 39 & 16 \end{array}\right]$

19. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 64 & -62 \end{array}\right]$

21. $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$ consistente; $x = 5, y = -1$

23. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$ inconsistente

25. $\begin{cases} x + 2z = -1 \\ y - 4z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases}$ consistente; $x = -1 - 2z$, $y = -2 + 4z$, z es cualquier número real

27. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$ consistente; $x_1 = 1, x_2 = 4 - x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, x_4 es cualquier número real

29. $\begin{cases} x_1 + 4x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$ consistente; $x_1 = 2 - 4x_4$, $x_2 = 3 - x_3 - 3x_4$, x_3, x_4 es cualquier número real

31. $x = 6, y = 2$ **33.** $x = 2, y = 3$ **35.** $x = 4, y = -2$ **37.** Inconsistente **39.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$ **41.** $x = 4 - 2y$, y es cualquier número real
43. $x = \frac{3}{2}, y = 1$ **45.** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{5}$ **47.** $x = 8, y = 2, z = 0$ **49.** $x = 2, y = -1, z = 1$ **51.** Inconsistente
53. $x = 5z - 2, y = 4z - 3$, z es cualquier número real; o $x = \frac{5}{4}y + \frac{7}{4}, z = \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}$, y es cualquier número real; o $y = \frac{4}{5}x - \frac{7}{5}, z = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$, y es cualquier número real
55. Inconsistente **57.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **59.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$ **61.** $x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = 1$ **63.** $x = 1, y = 2, z = 0, w = 1$
65. $y = 0, z = 1 - x$, x es cualquier número real **67.** $x = 2, y = z - 3$, z es cualquier número real **69.** $x = \frac{13}{9}, y = \frac{7}{18}, z = \frac{19}{18}$
71. $x = \frac{7}{5} - \frac{3}{5}z - \frac{2}{5}w, y = -\frac{8}{5} + \frac{7}{5}z + \frac{13}{5}w$, donde z y w son cualesquiera números reales **73.** $y = -2x^2 + x + 3$ **75.** $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5$

77. x = litros de 15% H_2SO_4, y = litros de 25% H_2SO_4, z = litros de 50% H_2SO_4: $\begin{cases} x = \frac{5}{2}z - 150 \\ y = 250 - \frac{7}{2}z \end{cases}$

15%	25%	50%	40%
0	40	60	100
10	26	64	100
20	12	68	100

79. Si x = precio de las hamburguesas, y = precio de las papas fritas, z = precio del refresco, entonces $x = 2.75 - z$, $y = 0.68 + \frac{1}{3}z$, z es cualquier número real

No hay suficiente información:

x	\$2.15	\$2.00	\$1.85
y	\$0.88	\$0.93	\$0.98
z	\$0.60	\$0.75	\$0.90

81. **(a)**

Cantidad invertida al		
7%	**9%**	**11%**
0	10,000	10,000
1,000	8,000	11,000
2,000	6,000	12,000
3,000	4,000	13,000
4,000	2,000	14,000
5,000	0	15,000

(b)

Cantidad invertida al		
7%	**9%**	**11%**
12,500	12,500	0
14,500	8,500	2000
16,500	4,500	4000
18,750	0	6250

(c) Todo el dinero invertido al 7% proporciona \$2100.00, más de lo que es requerido

83. $I_1 = \frac{4}{15}, I_2 = \frac{8}{15}, I_3 = \frac{4}{5}$ **85.** $I_1 = 3.5, I_2 = 2.5, I_3 = 1$
89. Si $a_1 \neq 0$,

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ 0 & \frac{-a_2b_1}{a_1} + b_2 & \frac{-a_2c_1}{a_1} + c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ 0 & \frac{-a_2b_1 + b_2a_1}{a_1} & \frac{-a_2c_1 + c_2a_1}{a_1} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \frac{-a_2c_1 + c_2a_1}{a_1} \cdot \frac{a_1}{-a_2b_1 + b_2a_1} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{c_1}{a_1} \\ 0 & 1 & \frac{-a_2c_1 + c_2a_1}{-a_2b_1 + b_2a_1} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-b_1c_2 + b_2c_1}{-a_2b_1 + b_2a_1} \\ 0 & 1 & \frac{-a_2c_1 + c_2a_1}{-a_2b_1 + b_2a_1} \end{array}\right]$$

$$x = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}(c_1b_2 - c_2b_1) = \frac{1}{D}(c_1b_2 - c_2b_1),\ y = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_1c_2 - a_2c_1) = \frac{1}{D}(a_1c_2 - a_2c_1)$$

Si $a_1 = 0$, entonces $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, y

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_1 & c_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{c_2}{a_2} \\ 0 & b_1 & c_1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{c_2}{a_2} \\ 0 & 1 & \frac{c_1}{b_1} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{c_2}{a_2} - \frac{b_2c_1}{a_2b_1} = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{-a_2b_1} \\ 0 & 1 & \frac{c_1}{b_1} = \frac{-a_2c_1}{-a_2b_1} \end{array}\right]$$

Ejercicio 10.3

1. 2 **3.** 22 **5.** -2 **7.** 10 **9.** -26 **11.** $x = 6, y = 2$ **13.** $x = 3, y = 2$ **15.** $x = 8, y = -4$ **17.** $x = 4, y = -2$ **19.** No es aplicable
21. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}$ **23.** $x = \frac{1}{10}, y = \frac{2}{5}$ **25.** $x = \frac{3}{2}, y = 1$ **27.** $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{5}$ **29.** $x = 1, y = 3, z = -2$ **31.** $x = -3, y = \frac{1}{2}, z = 1$
33. No es aplicable **35.** $x = 0, y = 0, z = 0$ **37.** No es aplicable **39.** $x = \frac{1}{5}, y = \frac{1}{3}$ **41.** -5 **43.** $\frac{13}{11}$ **45.** 0 o -9 **47.** -4 **49.** 12
51. 8 **53.** 8

55. $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$

$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y = x_2y_1 - x_1y_2$

$(x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (y_2 - y_1)x + x_2y_1 - x_1y_2 - (x_2 - x_1)y_1$

$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

57. $$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} y & 1 \\ z & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} y^2 & 1 \\ z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y^2 & y \\ z^2 & z \end{vmatrix} = x^2(y - z) - x(y^2 - z^2) + yz(y - z)$$

$$= (y - z)[x^2 - x(y + z) + yz] = (y - z)[(x^2 - xy) - (xz - yz)] = (y - z)[x(x - y) - z(x - y)] = (y - z)(x - y)(x - z)$$

59. $$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{13}(a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}) - a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{33}a_{21}) + a_{11}(a_{23}a_{32} - a_{33}a_{22})$$

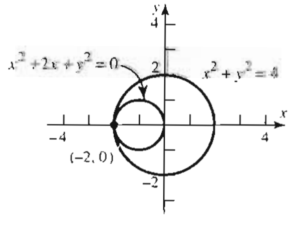
$$= -[a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})] = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

61. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21}) - a_{12}(a_{21}a_{31} - a_{31}a_{21}) + a_{11}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

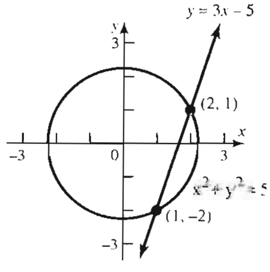
$$= a_{11}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{21} - a_{12}(0) + a_{11}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{31}a_{22} = 0$$

Ejercicio 10.4

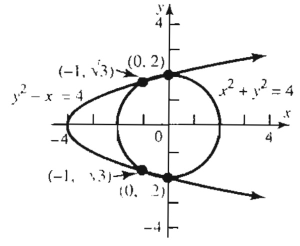
1. $x = -2, y = 0$



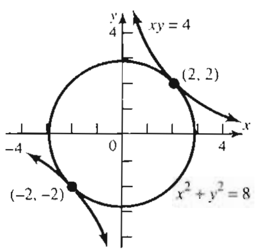
3. $x = 1, y = -2; x = 2, y = 1$

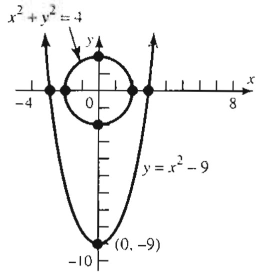


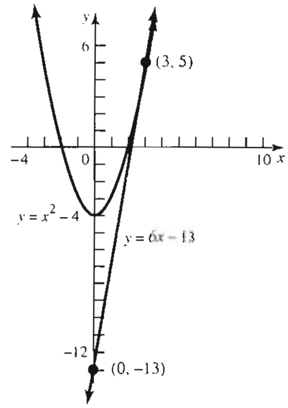
5. $x = 0, y = 2; x = 0, y = -2;$
$x = -1, y = \sqrt{3}; x = -1, y = -\sqrt{3}$



7. $x = 2, y = 2; x = -2, y = -2$ **9.** Inconsistente **11.** $x = 3, y = 5$

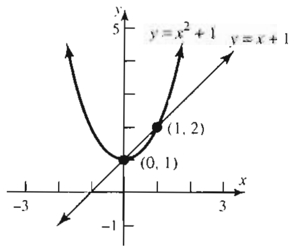




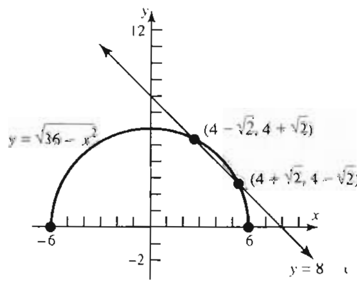


13. $x = 1, y = 4; x = -1, y = -4; x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}; x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ **15.** $x = 0, y = 1; x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}$
17. $x = 0, y = -1; x = \frac{5}{2}, y = -\frac{7}{2}$ **19.** $x = 2, y = \frac{1}{3}; x = \frac{1}{2}, y = \frac{4}{3}$ **21.** $x = 3, y = 2; x = 3, y = -2; x = -3, y = 2; x = -3, y = -2$
23. $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}; x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}; x = -\frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}; x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}$ **25.** $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}; x = -\sqrt{2}, y = -2\sqrt{2}$
27. No hay solución; el sistema es inconsistente **29.** $x = \frac{8}{3}, y = 2\sqrt{10}/3; x = -\frac{8}{3}, y = 2\sqrt{10}/3; x = \frac{8}{3}, y = -2\sqrt{10}/3; x = -\frac{8}{3}, y = -2\sqrt{10}/3$
31. $x = 1, y = \frac{1}{2}; x = -1, y = \frac{1}{2}; x = 1, y = -\frac{1}{2}; x = -1, y = -\frac{1}{2}$ **33.** No hay solución; el sistema es inconsistente
35. $x = 2, y = 1; x = -2, y = -1; x = \sqrt{3}, y = \sqrt{3}; x = -\sqrt{3}, y = -\sqrt{3}$ **37.** $x = 3, y = 2; x = -3, y = -2; x = 2, y = \frac{1}{2}; x = -2, y = -\frac{1}{2}$
39. $x = 3, y = 1; x = -1, y = -3$ **41.** $x = 0, y = -2; x = 0, y = 1; x = 2, y = -1$ **43.** $x = 2, y = 8$ **45.** 3 y 1; −3 y −1

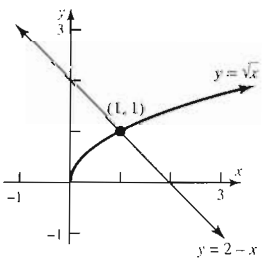
47. 2 y 2; −2 y −2 **49.** $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ **51.** 5 **53.**



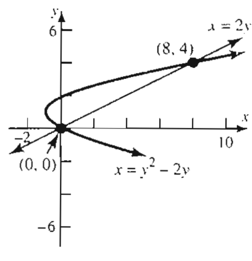
55.



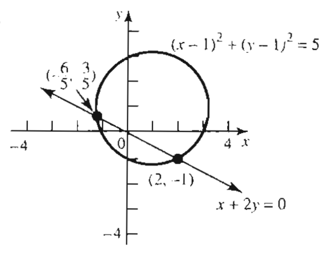
57.



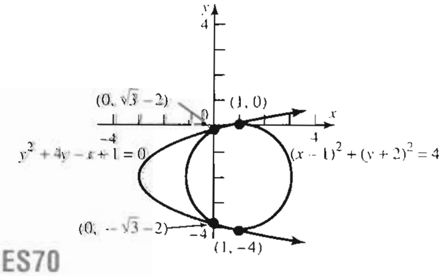
59.

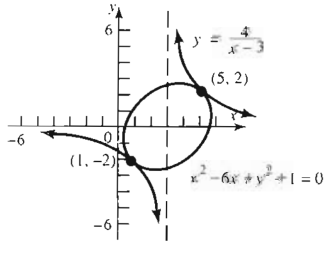


61.



63. Soluciones: $(0, -\sqrt{3} - 2)$, $(0, \sqrt{3} - 2)$, (1, 0), (1, −4) **65.** **67.** $x = 0.48, y = 0.61$





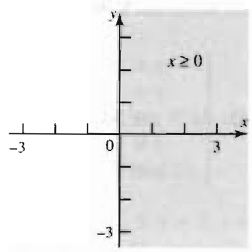
69. $x = -1.64$, $y = -0.89$ **71.** $x = 0.58$, $y = 1.85$; $x = 1.81$, $y = 1.05$; $x = 0.58$, $y = -1.85$; $x = 1.81$, $y = -1.05$ **73.** $x = 2.34$, $y = 0.85$
75. 5 por 3 pulgadas **77.** 2 cm y 4 cm **79.** tortuga: 7 metros por hora, liebre $7\frac{1}{2}$ metros por hora **81.** 12 cm por 18 cm **83.** $x = 60$ pies; $y = 30$ pies
85. $l = \dfrac{P + \sqrt{P^2 - 16A}}{4}$; $w = \dfrac{P - \sqrt{P^2 - 16A}}{4}$ **87.** $y = 4x - 4$ **89.** $y = 2x + 1$ **91.** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ **93.** $y = 2x - 3$

95. $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

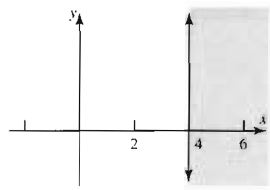
$r_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejercicio 10.5

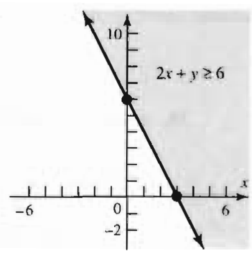
1.



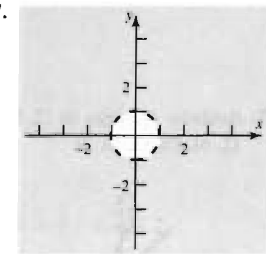
3.



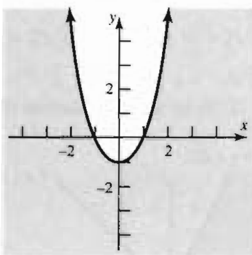
5.



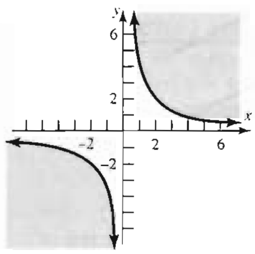
7.



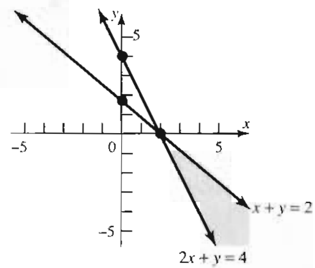
9.



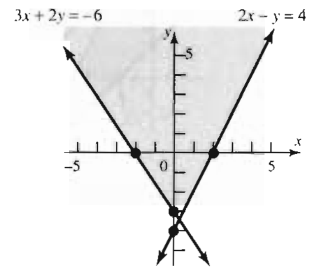
11.



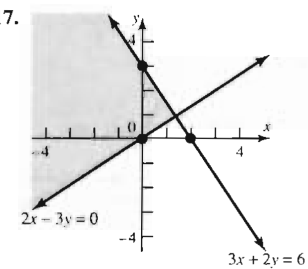
13.



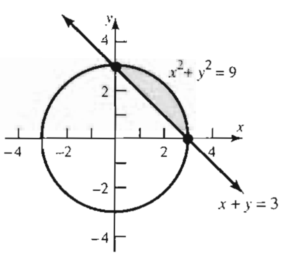
15.



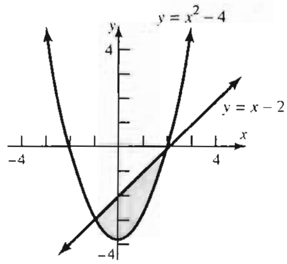
17.



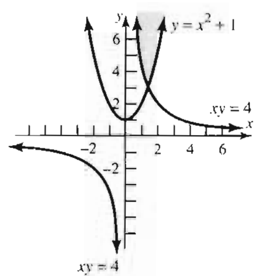
19.



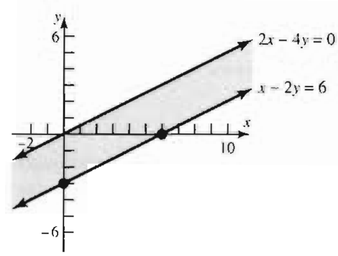
21.



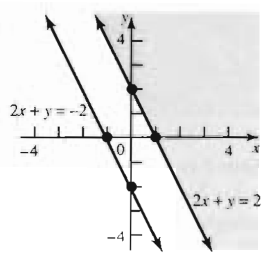
23.



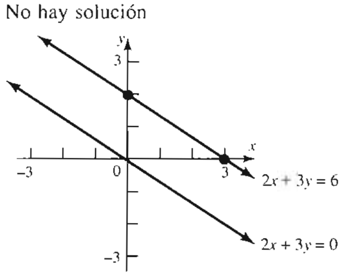
25.



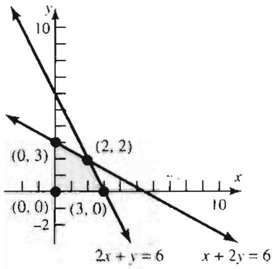
27.



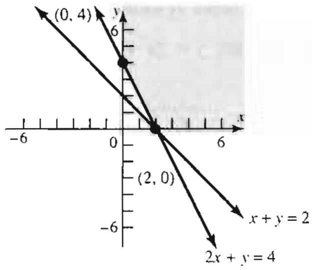
29. No hay solución



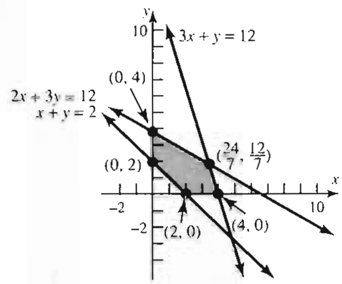
31. Acotada; esquinas en (0, 0), (3, 0), (2, 2), (0, 3)



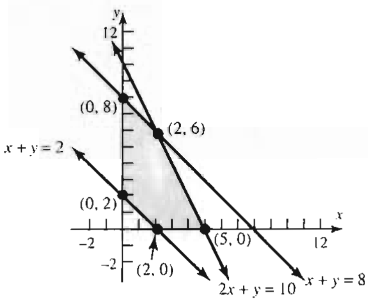
33. No acotada; esquinas en (2, 0), (0, 4)



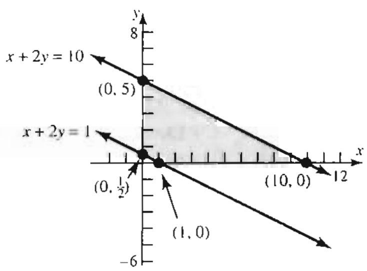
35. Acotada; esquinas en (2, 0), (4, 0), $(\frac{24}{7}, \frac{12}{7})$, (0, 4), (0, 2)



37. Acotada; esquinas en (2, 0), (5, 0), (2, 6), (0, 8), (0, 2)



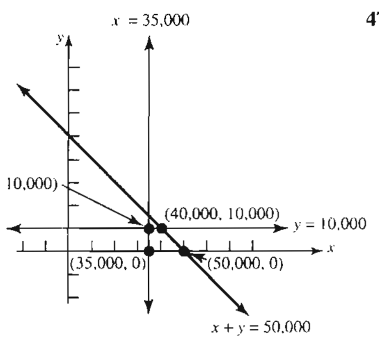
39. Acotada; esquinas en (10, 0), (0, 5)



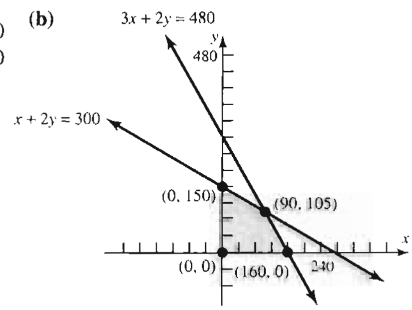
41. $\begin{cases} x \leq 4 \\ x + y \leq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x \leq 20 \\ y \geq 15 \\ x + y \leq 50 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \end{cases}$

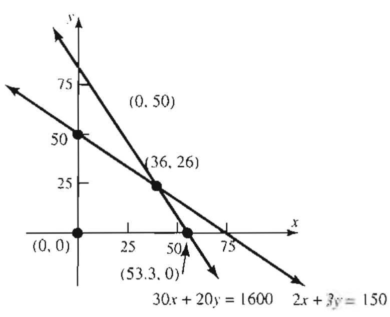
45. **(a)** $\begin{cases} x + y \leq 50{,}000 \\ x \geq 35{,}000 \\ y \leq 10{,}000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **(b)**



47. **(a)** $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 300 \\ 3x + 2y \leq 480 \end{cases}$ **(b)**



49. **(a)** $\begin{cases} 30x + 20y \leq 1600 \\ 2x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ **(b)**



Ejercicio 10.6

1. El valor máximo es 11; el mínimo 3 **3.** El valor máximo es 65; el mínimo 4 **5.** El valor máximo es 67; el mínimo 20 **7.** El valor máximo de z es 12, y ocurre en el punto (6, 0) **9.** El valor mínimo de z es 4, y ocurre en el punto (2, 0) **11.** El valor máximo de z es 20, y ocurre en el punto (0, 4) **13.** El valor mínimo de z es 8, y ocurre en el punto (0, 2) **15.** El valor máximo de z es 50, y ocurre en el punto (10, 0) **17.** 8 cuesta abajo, 24 a campo traviesa; \$1760.00; \$1920.00 **19.** 30 acres de soya y 10 de maíz; la ganancia máxima es \$8500.00 **21.** $\frac{1}{2}$ hora en la máquina I; $5\frac{1}{4}$ horas en la máquina II; \$182.50 **23.** 100 libras de carne de res y 50 de carne de cerdo; \$97.50 **25.** 10 patines de carrera, 15 patines artísticos **27.** 2 muestras de metal, 4 muestras de plástico; \$34.00 **29.** **(a)** 10 de primera clase, 120 en clase turista **(b)** 15 de primera clase, 120 en clase turista

Complete los espacios

1. inconsistente **2.** matriz **3.** determinantes **4.** aumentada **5.** semiplano **6.** función objetivo **7.** punto factible

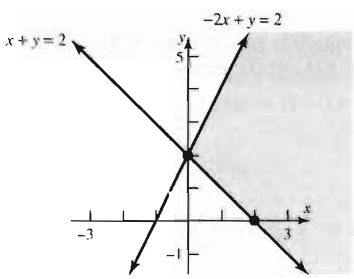
Cierto o falso

1. F **2.** C **3.** F **4.** F **5.** C **6.** C **7.** C

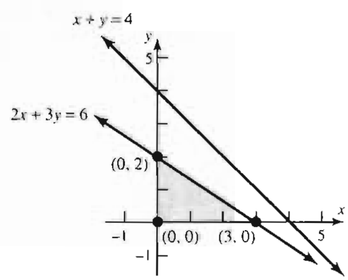
Ejercicios de revisión

1. $x = 2, y = -1$ **3.** $x = 2, y = \frac{1}{2}$ **5.** $x = 2, y = -1$ **7.** $x = \frac{11}{5}, y = -\frac{3}{5}$ **9.** $x = -\frac{8}{5}, y = \frac{12}{5}$ **11.** $x = 6, y = -1$ **13.** $x = -4, y = 3$ **15.** $x = 2, y = 3$ **17.** Inconsistente **19.** $x = -1, y = 2, z = -3$ **21.** $x = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{10}$ **23.** $x = \frac{1}{2}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{6}$ **25.** $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{2}{3}, z = -\frac{3}{4}$ **27.** $z = -1, x = y + 1$, y cualquier número real **29.** $x = 1, y = 2, z = -3, t = 1$ **31.** 5 **33.** 108 **35.** -100 **37.** $x = 2, y = -1$ **39.** $x = 2, y = 3$ **41.** $x = -1, y = 2, z = -3$ **43.** $x = -\frac{2}{5}, y = -\frac{11}{5}$; $x = -2, y = 1$ **45.** $x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$; $x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ **47.** $x = \dfrac{\pm 3(-3 + \sqrt{265})}{2}, y = \dfrac{-3 + \sqrt{265}}{2}$ **49.** $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$; $x = \frac{4}{3}\sqrt{2}, y = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$; $x = -\frac{4}{3}\sqrt{2}, y = \frac{2}{3}\sqrt{2}$ **51.** $x = 1, y = -1$

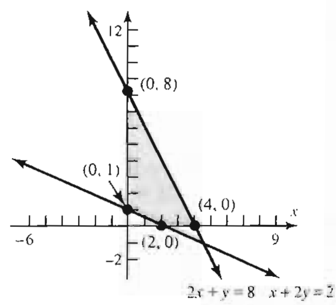
53. No acotada; esquina en (0, 2)



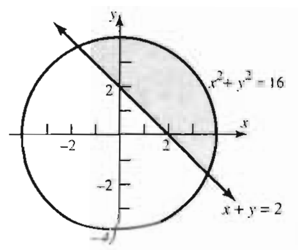
55. Acotada; esquinas en (0, 0), (0, 2), (3, 0)



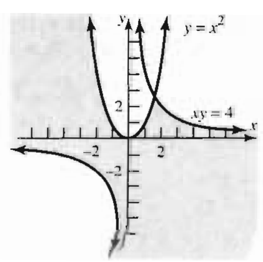
57. Acotada; esquinas en (0, 1), (0, 8), (4, 0), (2, 0)



59.



61.



63. El valor máximo es 32 cuando $x = 0$ y $y = 8$ **65.** El valor mínimo es 3 cuando $x = 1$ y $y = 0$ **67.** El valor máximo es $\frac{108}{7}$ cuando $x = \frac{12}{7}$ y $y = \frac{12}{7}$ **69.** 10 **71.** $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ **73.** 70 libras de café de \$3.00 y 30 libras de \$6.00 **75.** 1 pequeño, 5 medianos, 2 grandes **77.** 24 por 10 pies **79.** $4 + \sqrt{2}$ pulgadas y $4 - \sqrt{2}$ pulgadas **81.** $120\sqrt{10}$ pies **83.** Catalina obtiene \$10.00, Miguel \$20.00, Daniel \$5.00 y Alejandra \$10.00 **85.** Catalina: 4 horas; Miguel: 2 horas; Daniel: 8 horas **87.** 35 motores a gasolina, 15 motores a diesel; 15 motores a gasolina, 0 motores a diesel

CAPÍTULO 11 *Ejercicio 11.1*

1. 1, 2, 3, 4, 5 **3.** $\frac{1}{3}, \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ **5.** 1, -4, 9, -16, 25 **7.** $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{8}{41}, \frac{8}{61}$ **9.** $-\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{30}, -\frac{1}{42}$ **11.** $1/e, 2/e^2, 3/e^3, 4/e^4, 5/e^5$
13. $n/(n+1)$ **15.** $1/2^{n-1}$ **17.** $(-1)^{n+1}$ **19.** $(-1)^{n+1}n$ **21.** $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 8, a_4 = 11, a_5 = 14$
23. $a_1 = -2, a_2 = -1, a_3 = 1, a_4 = 4, a_5 = 8$ **25.** $a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 20, a_4 = 40, a_5 = 80$ **27.** $a_1 = 3, a_2 = 3, a_3 = \frac{3}{2}, a_4 = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{1}{8}$
29. $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2, a_4 = 4, a_5 = 8$ **31.** $a_1 = A, a_2 = A + d, a_3 = A + 2d, a_4 = A + 3d, a_5 = A + 4d$

33. $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}, a_5 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$

35. $3 + 4 + \cdots + (n+2)$ **37.** $\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} + \cdots + \frac{n^2}{2}$ **39.** $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ **41.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

43. $\ln 2 - \ln 3 + \ln 4 - \cdots + (-1)^n \ln n$ **45.** $\sum_{k=1}^{n} k$ **47.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ **49.** $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\left(\frac{1}{3^k}\right)$ **51.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k}$ **53.** $\sum_{k=0}^{n} (a + kd)$ **55.** 21

59. Una sucesión de Fibonacci

Ejercicio 11.2

1. $d = 1$; 5, 6, 7, 8 **3.** $d = 2$; $-3, -1, 1, 3$ **5.** $d = -2$; 4, 2, 0, -2 **7.** $d = -\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}$ **9.** $d = \ln 3$; $\ln 3, 2\ln 3, 3\ln 3, 4\ln 3$
11. $a_5 = 14$; $a_n = 3n - 1$ **13.** $a_5 = -7$; $a_n = 8 - 3n$ **15.** $a_5 = 2$; $a_n = \frac{1}{2}(n-1)$ **17.** $a_5 = 5\sqrt{2}$; $a_n = \sqrt{2}n$ **19.** $a_{12} = 24$ **21.** $a_{10} = -26$
23. $a_8 = a + 7b$ **25.** $a_1 = -13$; $d = 3$; $a_n = -16 + 3n$ **27.** $a_1 = -53$; $d = 6$; $a_n = -59 + 6n$ **29.** $a_1 = 28$; $d = -2$; $a_n = 30 - 2n$
31. $a_1 = 25$; $d = -2$; $a_n = 27 - 2n$ **33.** n^2 **35.** $\frac{n}{2}(9 + 5n)$ **37.** 1260 **39.** 324 **41.** $-\frac{3}{2}$ **43.** 1185 asientos

45. 210 del primer color y 190 del segundo

Ejercicio 11.3

1. $r = 3$; 3, 9, 27, 81 **3.** $r = \frac{1}{2}$; $-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, -\frac{3}{16}$ **5.** $r = 2$; $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2 **7.** $r = 2^{1/3}$; $2^{1/3}, 2^{2/3}, 2, 2^{4/3}$ **9.** $r = \frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}$ **11.** Aritmética; $d = 1$
13. De ningún tipo **15.** Aritmética; $d = -\frac{2}{3}$ **17.** De ningún tipo **19.** Geométrica; $r = \frac{2}{3}$ **21.** Geométrica; $r = 2$ **23.** Geométrica; $r = 3^{1/2}$
25. $a_5 = 162$; $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ **27.** $a_5 = 5$; $a_n = (-1)^{n-1}(5)$ **29.** $a_5 = 0$; $a_n = 0$ **31.** $a_5 = 4\sqrt{2}$; $a_n = (\sqrt{2})^n$; $a_n = 27–2n$ **33.** $a_7 = \frac{1}{64}$ **35.** $a_9 = 1$
37. $a_8 = 0.00000004$ **39.** $-\frac{1}{4}(1 - 2^n)$ **41.** $2[1 - (\frac{2}{3})^n]$ **43.** $1 - 2^n$ **45.** $\frac{3}{2}$ **47.** 16 **49.** $\frac{8}{5}$ **51.** $\frac{20}{3}$ **53.** $\frac{18}{5}$ **55.** -4
57. **(a)** 0.775 pies **(b)** Octava **(c)** 15.88 pies **(d)** 20 pies **59.** \$21,879.11
61. La alternativa 2 tiene como resultado la ganancia mayor: \$16'038,304.00; la alternativa 1 tiene como resultado la ganancia menor: \$14'700,000.00
63. 1.845×10^{19} **67.** 3, 4, 8, 23, 72 **69.** A: \$25,250.00 anual en el quinto año, \$112,742.00 en total; B: \$24,761.00 anual en el quinto año, \$116,801.00 en total

Ejercicio 11.4

1. (I) $n = 1$: $2 \cdot 1 = 2$ y $1(1+1) = 2$
(II) Si $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k = k(k+1)$, entonces $2 + 4 + 6 + \cdots + 2k + 2(k+1) = (2 + 4 + 6 + \cdots + 2k) + 2(k+1)$ $= k(k+1) + 2(k+1) = k^2 + 3k + 2 = (k+1)(k+2)$.
3. (I) $n = 1$: $1 + 2 = 3$ y $\frac{1}{2}(1)(1+5) = \frac{1}{2}(6) = 3$
(II) Si $3 + 4 + 5 + \cdots + (k+2) = \frac{1}{2}k(k+5)$, entonces $3 + 4 + 5 + \cdots + (k+2) + [(k+1) + 2] = [3 + 4 + 5 + \cdots + (k+2)] + (k + 3) = \frac{1}{2}k(k+5) + k + 3 = \frac{1}{2}(k^2 + 7k + 6) = \frac{1}{2}(k+1)(k+6)$.
5. (I) $n = 1$: $3 \cdot 1 - 1 = 2$ y $\frac{1}{2}(1)[3(1) + 1] = \frac{1}{2}(4) = 2$
(II) Si $2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) = \frac{1}{2}k(3k+1)$, entonces $2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1) + [3(k+1) - 1]$ $= [2 + 5 + 8 + \cdots + (3k-1)] + 3k + 2 = \frac{1}{2}k(3k+1) + (3k+2) = \frac{1}{2}(3k^2 + 7k + 4) = \frac{1}{2}(k+1)(3k+4)$.
7. (I) $n = 1$: $2^{1-1} = 1$ y $2^1 - 1 = 1$
(II) Si $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$, entonces $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^{(k+1)-1} = (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1}) + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2(2^k) - 1 = 2^{k+1} - 1$.
9. (I) $n = 1$: $4^{1-1} = 1$ y $\frac{1}{3}(4^1 - 1) = \frac{1}{3}(3) = 1$
(II) Si $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1} = \frac{1}{3}(4^k - 1)$, entonces $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1} + 4^{(k+1)-1} = (1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{k-1}) + 4^k = \frac{1}{3}(4^k - 1) + 4^k = \frac{1}{3}[4^k - 1 + 3(4^k)] = \frac{1}{3}[4(4^k) - 1] = \frac{1}{3}(4^{k+1} - 1)$.
11. (I) $n = 1$: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
(II) Si $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$, entonces $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)[(k+1)+1]} =$ $\left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$.
13. (I) $n = 1$: $1^2 = 1$ y $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$
(II) Si $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$, entonces $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 =$ $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(2k^3 + 9k^2 + 13k + 6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$.

15. (I) $n=1$: $5-1=4$ y $\frac{1}{2}(9-1)=\frac{1}{2}\cdot 8=4$

(II) Si $4+3+2+\cdots+(5-k)=\frac{1}{2}k(9-k)$, entonces $4+3+2+\cdots+(5-k)+5-(k+1)=[4+3+2+\cdots+(5-k)]+5-(k+1)$ $=\frac{1}{2}k(9-k)+4-k=\frac{1}{2}(-k^2+7k+8)=\frac{1}{2}(8-k)(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)[9-(k+1)]$.

17. (I) $n=1$: $1\cdot(1+1)=2$ y $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=2$

(II) Si $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$, entonces $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=[1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+k(k+1)]+(k+1)(k+2)$ $=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$.

19. (I) $n=1$: $1^2+1=2$ es divisible entre 2.

(II) Si k^2+k es divisible entre 2, entonces $(k+1)^2+(k+1)=k^2+2k+1+k+1=(k^2+k)+2k+2$. Como k^2+k es divisible entre 2 $k+2$ es divisible entre 2, en consecuencia, $(k+1)^2+k+1$ es divisible entre 2.

21. (I) $n=1$: $1^2-1+2=2$ es divisible entre 2.

(II) Si k^2-k+2 es divisible entre 2, entonces $(k+1)^2-(k+1)+2=k^2+2k+1-k-1+2=(k^2-k+2)+2k$. Como k^2-k+2 es divisible entre 2 y $2k$ es divisible entre 2, en consecuencia, $(k+1)^2-(k+1)+2$ es divisible entre 2.

23. (I) $n=1$: Si $x>1$, entonces $x^1=x>1$.

(II) Suponga, para cualquier número natural k, que si $x>1$, entonces $x^k>1$. Muestre que si $x>1$, entonces $x^{k+1}>1$:

$$x^{k+1}=x^k\cdot x^1\underset{\substack{\uparrow\\ x^k>1}}{>}1\cdot x=x>1$$

25. (I) $n=1$: $a-b$ es un factor de $a^1-b^1=a-b$.

(II) Si $a-b$ es un factor de a^k-b^k, muestre que $a-b$ es un factor de $a^{k+1}-b^{k+1}$: $a^{k+1}-b^{k+1}=a(a^k-b^k)+b^k(a-b)$. Como $a-b$ es un factor de a^k-b^k y $a-b$ es un factor de $a-b$, en consecuencia, $a-b$ es un factor de $a^{k+1}-b^{k+1}$.

27. $n=1$: $1^2-1+41=41$ es un número primo.

$n=41$: $41^2-41+41=1681=41^2$ no es un número primo.

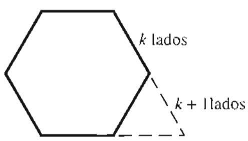
29. (I) $n=1$: $ar^{1-1}=a\cdot 1=a$ y $a\cdot\dfrac{1-r^1}{1-r}=a$, ya que $r\neq 1$.

(II) Si $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{k-1}=a\left(\dfrac{1-r^k}{1-r}\right)$, entonces $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{k-1}+ar^{(k+1)-1}=(a+ar+ar^2+\cdots+ar^{k-1})+ar^k=$

$$a\left(\frac{1-r^k}{1-r}\right)+ar^k=\frac{a(1-r^k)+ar^k(1-r)}{1-r}=\frac{a-ar^k+ar^k-ar^{k+1}}{1-r}=a\left(\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\right).$$

31. (I) $n=3$: La suma de los ángulos de un triángulo es $(3-2)\cdot 180°=180°$.

(II) Suponga, para cualquier número entero k, que la suma de los ángulos de un polígono convexo de k lados es $(k-2)$ 180°. Un polígono convexo de $k+1$ lados consiste de un polígono convexo de k lados más un triángulo (*véase* la ilustración). La suma de los ángulos es $(k-2)\cdot 180°+180°=(k-1)\cdot 180°$. Como consecuencia de que las condiciones I y II se satisfacen, el resultado se deduce.



Ejercicio 11.5

1. 10 **3.** 21 **5.** 50 **7.** 1 **9.** 1.866×10^{15} **11.** 1.483×10^{13} **13.** $x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$
15. $x^6-12x^5+60x^4-160x^3+240x^2-192x+64$ **17.** $81x^4+108x^3+54x^2+12x+1$ **19.** $x^{10}+5y^2x^8+10y^4x^6+10y^6x^4+5y^8x^2+y^{10}$
21. $x^3+6\sqrt{2}x^{5/2}+30x^2+40\sqrt{2}x^{3/2}+60x+24\sqrt{2}x^{1/2}+8$ **23.** $(ax)^5+5by(ax)^4+10(by)^2(ax)^3+10(by)^3(ax)^2+5(by)^4(ax)+(by)^5$
25. 17,010 **27.** $-101{,}376$ **29.** 41,472 **31.** $2835x^3$ **33.** $314{,}928x^7$ **35.** 495 **37.** 3360 **39.** 1.00501
41. $\binom{n}{n}=\dfrac{n!}{n!(n-n)!}=\dfrac{n!}{n!0!}=\dfrac{n!}{n!}=1$ **43.** $2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}(1)(1)^{n-1}+\cdots+\binom{n}{n}1^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$ **45.** 1

Ejercicio 11.6

1. {1, 3, 5, 6, 7, 9} **3.** {1, 5, 7} **5.** {1, 6, 9} **7.** {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9} **9.** {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9} **11.** {0, 2, 6, 7, 8}
13. {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9} **15.** {0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9} **17.** {0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8} **19.** {0}

21. $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,c,d\}$ **23.** 25 **25.** 40
27. 25 **29.** 37 **31.** 18 **33.** 5 **35.** 175; 125 **37.** **(a)** 15 **(b)** 15 **(c)** 15 **(d)** 25 **(e)** 40

Ejercicio 11.7

1. 30 **3.** 120 **5.** 1 **7.** 336 **9.** 28 **11.** 15 **13.** 1 **15.** 10,400,600
17. {*abc, abd, abe, acb, acd, ace, adb, adc, ade, aeb, aec, aed*
bac, bad, bae, bca, bcd, bce, bda, bdc, bde, bea, bec, bed
cab, cad, cae, cba, cbd, cbe, cda, cdb, cde, cea, ceb, ced
dab, dac, dae, dba, dbc, dbe, dca, dcb, dce, dea, deb, dec
eab, eac, ead, eba, ebc, ebd, eca, ecb, ecd, eda, edb, edc}; 60
19. {123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432}; 24
21. {*abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde*}; 10 **23.** {123, 234, 124, 134}; 4 **25.** 15 **27.** 16 **29.** 8 **31.** 24 **33.** 60 **35.** 120
37. 35 **39.** 1024 **41.** 9000 **43.** $P(5,5) = 5! = 120$ **45.** $C(8,1) \cdot C(15,1) \cdot C(4,1) = 8 \cdot 15 \cdot 4 = 480$ **47.** 336 **49.** 5,209,344
51 . 362,880 **53.** 90,720 **55.** 1.156×10^{76} **57.** 15 **59.** **(a)** 63 **(b)** 35 **(c)** 1

Ejercicio 11.8

1. $S = \{AA, AS, SA, SS\}$; $P(AA) = \frac{1}{4}$, $P(AS) = \frac{1}{4}$, $P(SA) = \frac{1}{4}$ y $P(SS) = \frac{1}{4}$.
3. S = {AA1, AA2, AA3, AA4, AA5, AA6, AS1, AS2, AS3, AS4, AS5, AS6, SA1, SA2, SA3, SA4, SA5, SA6, SS1, SS2, SS3, SS4, SS5, SS6}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{24}$.
5. S = {AAA, AAS, ASA, ASS, SAA, SAS, SSA, SSS}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{8}$.
7. S = {1 Amarillo, 1 Rojo, 1 Verde, 2 Amarillo, 2 Rojo, 2 Verde, 3 Amarillo, 3 Rojo, 3 Verde, 4 Amarillo, 4 Rojo, 4 Verde}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{12}$; así $P(2\text{ Rojo}) + P(4\text{ Rojo}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$.
9. S = {1 Amarillo Adelante, 1 Amarillo Atrás, 1 Rojo Adelante, 1 rojo Atrás, 1 Verde Adelante, 1 Verde Atrás, 2 Amarillo Adelante, 2 Amarillo Atrás, 2 Rojo Adelante, 2 Rojo Atrás, 2 Verde Adelante, 2 Verde Atrás, 3 Amarillo Adelante, 3 Amarillo Atrás, 3 Rojo Adelante, 3 Rojo Atrás, 3 Verde Adelante, 3 Verde Atrás, 4 Amarillo Adelante, 4 Amarillo Atrás, 4 Rojo Adelante, 4 Rojo Atrás, 4 Verde Adelante, 4 Verde Atrás}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{24}$; así, $P(1\text{ Rojo Atrás}) + P(1\text{ Verde Atrás}) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$.
11. S = {11 Rojo, 11 Amarillo, 11 Verde, 12 Rojo, 12 Amarillo, 12 Verde, 13 Rojo, 13 Amarillo, 13 Verde, 14 Rojo, 14 Amarillo, 14 Verde, 21 Rojo, 21 Amarillo, 21 Verde, 22 Rojo, 22 Amarillo, 22 Verde, 23 Rojo, 23 Amarillo, 23 Verde, 24 Rojo, 24 Amarillo, 24 Verde, 31 Rojo, 31 Amarillo, 31 Verde, 32 Rojo, 32 Amarillo, 32 Verde, 33 Rojo, 33 Amarillo, 33 Verde, 34 Rojo, 34 Amarillo, 34 Verde, 41 Rojo, 41 Amarillo, 41 Verde, 42 Rojo, 42 Amarillo, 42 Verde, 43 Rojo, 43 Amarillo, 43 Verde, 44 Rojo, 44 Amarillo, 44 Verde}; cada resultado tiene la probabilidad de $\frac{1}{48}$; así, E = {22 Rojo, 22 Verde, 24 Rojo, 24 Verde}; $P(E) = n(E)/n(S) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.
13. A, B, C, F **15.** B **17.** $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{5}$ **19.** $P(1) = P(3) = P(5) = \frac{2}{9}$; $P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{9}$ **21.** 0.7 **23.** 0.55 **25.** $\frac{9}{20}$ **27.** $\frac{17}{20}$ **29.** $\frac{5}{18}$ **31.** $\frac{3}{10}$
33. $\frac{2}{5}$ **35.** **(a)** 0.57 **(b)** 0.95 **(c)** 0.83 **(d)** 0.38 **(e)** 0.29 **(f)** 0.05 **(g)** 0.78 **(h)** 0.71 **37.** 0.000033068 **39.** **(a)** $\frac{10}{32}$ **(b)** $\frac{1}{32}$
41. **(*a*)** 0.00463 **(b)** 0.049 **43.** $\frac{1}{C(30,5)} = 7.02 \times 10^{-6}$; 0.183 **45.** 0.1

Complete los espacios

1. sucesión **2.** aritmética **3.** geométrica **4.** triángulo de Pascal **5.** 15 **6.** unión; intersección **7.** 20; 10 **8.** permutación **9.** combinación **10.** igualmente probables

Cierto o falso

1. C **2.** C **3.** C **4.** C **5.** F **6.** F **7** . F **8.** C **9.** F **10.** C **11.** C **12.** F

Ejercicios de revisión

1. 120 **3.** 10 **5.** 336 **7.** 56 **9.** $-\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{8}{7}$ **11.** $2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}$ **13.** $3, 2, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}$ **15.** 2, 0, 2, 0, 2 **17.** Aritmética; $d = 6$; $\frac{n}{2}(n + 11)$
19. De ningún tipo **21.** Geométrica; $r = 8$; $\frac{8}{7}(8^n - 1)$ **23.** Aritmética; $d = 4$; $2n(n - 1)$ **25.** Geométrica; $r = \frac{1}{2}$; $6[1 - (\frac{1}{2})^n]$ **27.** De ningún tipo
29. 35 **31.** $\frac{1}{10^{10}}$ **33.** $9\sqrt{2}$ **35.** $5n - 4$ **37.** $n - 10$ **39.** $\frac{9}{2}$ **41.** $\frac{4}{3}$ **43.** 8
45. (I) $n = 1$: $3 \cdot 1 = 3$ y $\frac{3 \cdot 1}{2}(2) = 3$
(II) Si $3 + 6 + 9 + \cdots + 3k = \frac{3k}{2}(k + 1)$, entonces $3 + 6 + 9 + \cdots + 3k + 3(k + 1) = (3 + 6 + 9 + \cdots + 3k) + (3k + 3)$
$= \frac{3k}{2}(k + 1) + (3k + 3) = \frac{3k^2}{2} + \frac{9k}{2} + \frac{6}{2} = \frac{3}{2}(k^2 + 3k + 2) = \frac{3}{2}(k + 1)(k + 2)$.
47. (I) $n = 1$: $2 \cdot 3^{1-1} = 2$ y $3^1 - 1 = 2$
(II) Si $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} = 3^k - 1$, entonces $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1} + 2 \cdot 3^{(k+1)-1}$
$= (2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{k-1}) + 2 \cdot 3^k = 3^k - 1 + 2 \cdot 3^k = 3 \cdot 3^k - 1 = 3^{k+1} - 1$.
49. (I) $n = 1$: $1^2 = 1$ y $\frac{1}{2}(6 - 3 - 1) = \frac{1}{2}(2) = 1$
(II) Si $1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2 = \frac{1}{2}k(6k^2 - 3k - 1)$, entonces
$1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2 + [3(k + 1) - 2]^2 = [1^2 + 4^2 + 7^2 + \cdots + (3k - 2)^2] + (3k + 1)^2 = \frac{1}{2}k(6k^2 - 3k - 1) + (3k + 1)^2$
$= \frac{1}{2}(6k^3 + 15k^2 + 11k + 2) = \frac{1}{2}(k + 1)(6k^2 + 9k + 2) = \frac{1}{2}(k + 1)[6(k + 1)^2 - 3(k + 1) - 1]$.
51. $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 \quad 80x + 32$ **53.** $32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243$ **55.** 144 **57.** 84 **59.** {1, 3, 5, 6, 7, 8}
61. {3, 7} **63.** {1, 2, 4, 6, 8, 9} **65.** {1, 2, 4, 5, 6, 9} **67.** 17 **69.** 29 **71.** 7 **73.** 25 **75.** 60 **77.** 128 **79.** 3024 **81.** 70 **83.** 91

85. 1,600,000 **87.** 216,000 **89.** 1260 **91.** **(a)** 381,024 **(b)** 1260 **93.** $\frac{3}{20}, \frac{9}{20}$ **95.** $\frac{1}{24}$ **97.** **(a)** 0.045 **(b)** 0.318 **(c)** 0.159
99. **(a)** 8 **(b)** 1100 **101.** **(a)** $(\frac{3}{4})^3 \cdot 20 = \frac{135}{6}$ pies **(b)** $20\,(\frac{3}{4})^n$ pies **(c)** ¿después de la decimotercera vez? **(d)** 140 pies **103.** **(a)** 0.68 **(b)** 0.58 **(c)** 0.32

CAPÍTULO 12 *Ejercicio 12.1*

1. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 0 & 12 & -20 \\ 4 & 8 & 24 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -8 & 7 & -15 \\ 7 & 0 & 22 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 28 & -9 \\ 4 & 23 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 14 & -14 \\ 2 & 22 & -18 \\ 3 & 0 & 28 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 15 & 21 & -16 \\ 22 & 34 & -22 \\ -11 & 7 & 22 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 25 & -9 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} -13 & 7 & -12 \\ -18 & 10 & -14 \\ 17 & -7 & 34 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 34 & 13 \\ 47 & 20 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & -1/a \\ -1 & 2/a \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ **31.** $x = 3, y = 2$ **33.** $x = -5, y = 10$ **35.** $x = 2, y = -1$

37. $x = \frac{1}{2}, y = 2$ **39.** $x = -2, y = 1$ **41.** $x = 2/a, y = 3/a$ **43.** $x = -2, y = 3, z = 5$ **45.** $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = 1$ **47.** $x = -\frac{34}{7}, y = \frac{85}{7}, z = \frac{12}{7}$

49. $x = \frac{1}{3}, y = 1, z = \frac{2}{3}$ **51.** $\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$

53. $\left[\begin{array}{cc|cc} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right]$

55. $\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 14 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{7} & 0 & \frac{3}{7} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{11}{42} \end{array}\right]$

57. $\begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 & -0.01 \\ 0.01 & -0.02 & 0.01 \\ -0.02 & 0.01 & 0.03 \end{bmatrix}$ **59.** $\begin{bmatrix} 0.02 & -0.04 & -0.01 & 0.01 \\ -0.02 & 0.05 & 0.03 & -0.03 \\ 0.02 & 0.01 & -0.04 & 0.00 \\ -0.02 & 0.06 & 0.07 & 0.06 \end{bmatrix}$

61. $x = 4.57, y = -6.44, z = -24.07$ **63.** $x = -1.19, y = 2.46, z = 8.27$

65. **(a)** $\begin{bmatrix} 500 & 350 & 400 \\ 700 & 500 & 850 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 500 & 700 \\ 350 & 500 \\ 400 & 850 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 11{,}500 \\ 17{,}050 \end{bmatrix}$ **(d)** $[0.10 \quad 0.05]$ **(e)** \$2002.50

67. Si $a \neq 0$, $\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{-cb+da}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{-cb+da} & \frac{a}{-cb+da} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right]$. Por lo tanto, $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Si $a = 0$, $\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-d}{cb} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right]$

$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{-bc} & \frac{-b}{-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{-bc} & 0 \end{array}\right]$. Como $a = 0$, $D = ad - bc = -bc$, de modo que $A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Ejercicio 12.2

1. Propia **3.** Impropia; $1 + \dfrac{9}{x^2-4}$ **5.** Impropia; $5x + \dfrac{22x-1}{x^2-4}$ **7.** Impropia; $1 + \dfrac{-2(x-6)}{(x+4)(x-3)}$ **9.** $\dfrac{-4}{x} + \dfrac{4}{x-1}$ **11.** $\dfrac{1}{x} + \dfrac{-x}{x^2+1}$

13. $\dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2}$ **15.** $\dfrac{\frac{1}{4}}{x+1} + \dfrac{\frac{3}{4}}{x-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2}$ **17.** $\dfrac{\frac{1}{12}}{x-2} + \dfrac{-\frac{1}{12}(x+4)}{x^2+2x+4}$ **19.** $\dfrac{\frac{1}{4}}{(x-1)} + \dfrac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} - \dfrac{\frac{1}{4}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}$

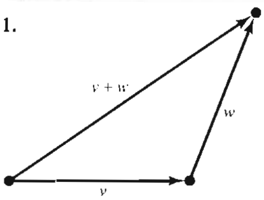
21. $\dfrac{-5}{x+2} + \dfrac{5}{x+1} + \dfrac{-4}{(x+1)^2}$ **23.** $\dfrac{\frac{1}{4}}{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\frac{1}{4}(x+4)}{x^2+4}$ **25.** $\dfrac{\frac{2}{3}}{x+1} + \dfrac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2+2x+4}$ **27.** $\dfrac{\frac{2}{7}}{3x-2} + \dfrac{\frac{1}{7}}{2x+1}$ **29.** $\dfrac{\frac{3}{4}}{x+3} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x-1}$

31. $\dfrac{1}{x^2+4} + \dfrac{2x-1}{(x^2+4)^2}$ **33.** $\dfrac{-1}{x} + \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{-1}{x+1}$ **35.** $\dfrac{4}{x-2} + \dfrac{-3}{x-1} + \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ **37.** $\dfrac{x}{(x^2+16)^2} + \dfrac{-16x}{(x^2+16)^3}$ **39.** $\dfrac{-\frac{8}{7}}{2x+1} + \dfrac{\frac{4}{7}}{x-3}$

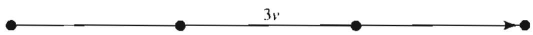
41. $\dfrac{-\frac{2}{9}}{x} - \dfrac{\frac{1}{3}}{x^2} + \dfrac{\frac{1}{6}}{x-3} + \dfrac{\frac{1}{18}}{x+3}$

Ejercicio 12.3

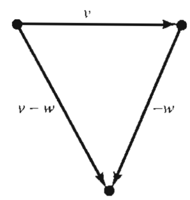
1.



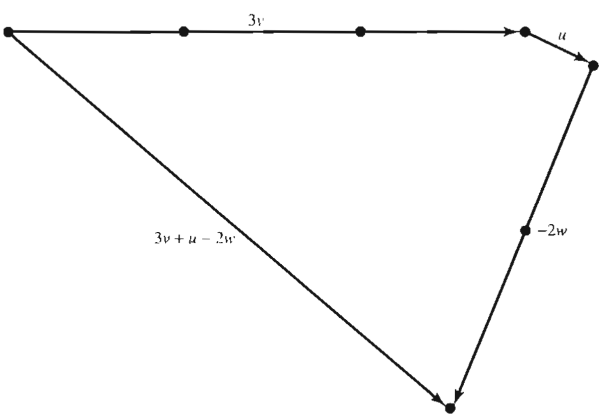
3.



5.

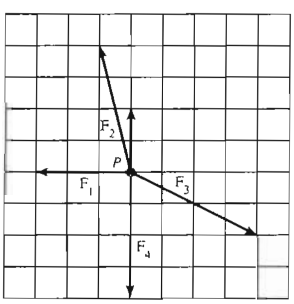


7.



9. $\mathbf{x} = \mathbf{A}$ **11.** $\mathbf{C} = -\mathbf{F} + \mathbf{E} - \mathbf{D}$ **13.** $\mathbf{E} = -\mathbf{G} - \mathbf{H} + \mathbf{D}$ **15.** $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ **17.** 12 **19.** $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **21.** $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ **23.** $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j}$
25. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ **27.** 5 **29.** $\sqrt{2}$ **31.** $\sqrt{13}$ **33.** $-\mathbf{j}$ **35.** $\sqrt{89}$ **37.** $\sqrt{34} - \sqrt{13}$ **39.** $\mathbf{i}$ **41.** $\frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ **43.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$
45. $\mathbf{v} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}\mathbf{i} + \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\mathbf{j}$ o $\mathbf{v} = -\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\mathbf{i} - \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\mathbf{j}$ **47.** $\{-2 + \sqrt{21}, -2 - \sqrt{21}\}$ **49.** 460 kmh **51.** 218 mph

53.



Ejercicio 12.4

1. 0; 0 **3.** 4; $\frac{4}{5}$ **5.** $\sqrt{3} - 1$; $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$ **7.** 24; $\frac{24}{25}$ **9.** 0; 0 **11.** $\frac{3}{2}$ **13.** $\mathbf{v}_1 = \text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v} = \frac{5}{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$, $\mathbf{v}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}$
15. $\mathbf{v}_1 = \text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v} = -\frac{1}{5}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$, $\mathbf{v}_2 = \frac{6}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$ **17.** $\mathbf{v}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}} = \frac{7}{5}(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$, $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{5}\mathbf{i} - \frac{2}{5}\mathbf{j}$ **19.** 496.7 mph; 51.5° sudoeste
21. 8.7° en dirección de la corriente; 1.5 min **23.** 60°; 17.32 min **25.** 2.68 pies-libras **27.** 1732 pies-libras
29. Sea $\mathbf{u} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j}$. Calcule $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ and $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.
31. $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{i}\|} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}$; si $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = x = \cos\alpha$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$.
33. $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$; $\text{proy}_{\mathbf{i}}\,\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{i}\|^2}\mathbf{i} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i}$; $\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = a$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{j} = b$, así $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$
35. $(\mathbf{v} - \alpha\mathbf{w}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \alpha\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \alpha\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - \dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2}\|\mathbf{w}\|^2 = 0$ **37.** 0

Complete en los espacios

1. inversa **2.** identidad **3.** propia **4.** unidad **5.** 0

Cierto o falso

1. F **2.** F **3.** F **4.** C **5.** C **6.** C **7.** C

Ejercicios de revisión

1. $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 12 & 24 \\ -6 & 12 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 12 & -2 & -8 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 8 & -13 & 8 \\ 9 & 2 & -10 \\ 18 & -17 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ **13.** Singular

15. $\dfrac{-\frac{3}{2}}{x} + \dfrac{\frac{3}{2}}{x - 4}$ **17.** $\dfrac{-3}{x - 1} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x^2}$ **19.** $\dfrac{-\frac{1}{10}}{x + 1} + \dfrac{\frac{1}{10}x + \frac{9}{10}}{x^2 + 9}$ **21.** $\dfrac{x}{x^2 + 4} - \dfrac{4x}{(x^2 + 4)^2}$ **23.** $\dfrac{\frac{1}{2}}{x^2 + 1} + \dfrac{\frac{1}{4}}{x - 1} - \dfrac{\frac{1}{4}}{x + 1}$
25. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$; $\|\mathbf{v}\| = 2\sqrt{5}$ **27.** $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$ **29.** $-20\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$ **31.** $\sqrt{5}$ **33.** $\sqrt{5} + 5 \approx 7.24$ **35.** $\dfrac{-2\sqrt{5}}{5}\mathbf{i} + \dfrac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{j}$
37. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -11$; $\cos\theta = -11\sqrt{5}/25$ **39.** $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = -4$; $\cos\theta = -2\sqrt{5}/5$ **41.** $\text{proy}_{\mathbf{v}} = \frac{9}{10}(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$ **43.** 30.5°
45. $\sqrt{29} \approx 5.39$ mph; 0.4 millas **47.** A un ángulo de 70.5° con respecto a la costa

APÉNDICE A *Ejercicio A.1*

1. $10x^5 + 3x^3 - 10x^2 + 6$ **3.** $2ax + a^2$ **5.** $2x^2 + 17x + 8$ **7.** $x^4 - x^2 + 2x - 1$ **9.** $6x^2 + 2$ **11.** $4x^2 - 3x + 1$; residuo 1
13. $4x^2 - 11x + 23$; residuo -45 **15.** $4x^2 + 13x + 53$; residuo 213 **17.** $4x - 3$; residuo $x + 1$
19. $4x - 3$; residuo $-7x + 7$ **21.** $(x - 5)(x + 3)$ **23.** $a(x - 9a)(x + 5a)$ **25.** $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ **27.** $(3x + 1)(x + 1)$
29. $x^5(x - 1)(x + 1)$ **31.** $3(x - 3)/5x$ **33.** $x(2x - 1)/(x + 4)$ **35.** $5x/[(x - 6)(x - 1)(x + 4)]$
37. $2(x + 4)/[(x - 2)(x + 2)(x + 3)]$ **39.** $(x - 1)(x + 1)/(x^2 + 1)$ **41.** $(x - 1)(-x^2 + 3x + 3)/(x^2 + x - 1)$

Ejercicio A.2

1. $2\sqrt{2}$ **3.** $2x\sqrt[3]{2x}$ **5.** x **7.** $\frac{4}{3}x\sqrt{2}$ **9.** x^3y^2 **11.** x^2y **13.** $6\sqrt{x}$ **15.** $6x\sqrt{x}$ **17.** $15\sqrt[3]{3}$ **19.** $\dfrac{1}{x(2x + 3)}$ **21.** $12\sqrt{3}$ **23.** $2\sqrt{3}$
25. $x - 2\sqrt{x} + 1$ **27.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **29.** $\dfrac{-\sqrt{15}}{5}$ **31.** $\dfrac{\sqrt{3}(5 + \sqrt{2})}{23}$ **33.** $\dfrac{-19 + 8\sqrt{5}}{41}$ **35.** $\dfrac{2x + h - 2\sqrt{x(x + h)}}{h}$ **37.** $t = 1$ **39.** $x = 3$
41. 4 **43.** -3 **45.** 64 **47.** $\frac{1}{27}$ **49.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{32}$ **51.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{32}$ **53.** $x^{7/12}$ **55.** xy^2 **57.** $x^{4/3}y^{5/3}$ **59.** $\dfrac{8x^{3/2}}{y^{1/4}}$ **61.** $\dfrac{3x + 2}{(1 + x)^{1/2}}$
63. $-\dfrac{2 + x}{2(1 + x)^{3/2}}$ **65.** $\dfrac{4 - x}{(x + 4)^{3/2}}$ **67.** $\frac{1}{2}(5x + 2)(x + 1)^{1/2}$ **69.** $2x^{1/2}(3x - 4)(x + 1)$

Ejercicio A.3

1. 4 **3.** $\frac{1}{16}$ **5.** $\frac{1}{9}$ **7.** $\{-7, 3\}$ **9.** $\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ **11.** $\left\{\dfrac{-1 - \sqrt{7}}{6}, \dfrac{-1 + \sqrt{7}}{6}\right\}$

APÉNDICE B *Ejercicio B.1*

1. $x\text{min} = -11$
   $x\text{max} = 5$
   $x\text{scl} = 1$
   $y\text{min} = -3$
   $y\text{max} = 6$
   $y\text{scl} = 1$

3. $x\text{min} = -25$
   $x\text{max} = 45$
   $x\text{scl} = 5$
   $y\text{min} = -85$
   $y\text{max} = 45$
   $y\text{scl} = 5$

5. $x\text{min} = -5$
   $x\text{max} = 105$
   $x\text{scl} = 5$
   $y\text{min} = -10$
   $y\text{max} = 160$
   $y\text{scl} = 10$

7. $x\text{min} = -6$
   $x\text{max} = 6$
   $x\text{scl} = 2$
   $y\text{min} = -4$
   $y\text{max} = 4$
   $y\text{scl} = 2$

9. $x\text{min} = -9$
   $x\text{max} = 9$
   $x\text{scl} = 3$
   $y\text{min} = -4$
   $y\text{max} = 4$
   $y\text{scl} = 2$

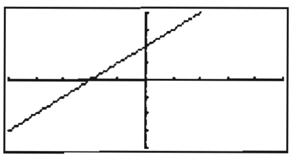
11. $x\text{min} = -6$
   $x\text{max} = 6$
   $x\text{scl} = 1$
   $y\text{min} = -8$
   $y\text{max} = 8$
   $y\text{scl} = 2$

13. $x\text{min} = -6$
   $x\text{max} = 6$
   $x\text{scl} = 2$
   $y\text{min} = -1$
   $y\text{max} = 3$
   $y\text{scl} = 1$

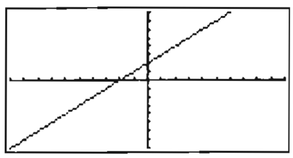
15. $x\text{min} = 3$
   $x\text{max} = 9$
   $x\text{scl} = 1$
   $y\text{min} = 2$
   $y\text{max} = 10$
   $y\text{scl} = 2$

Ejercicio B.2

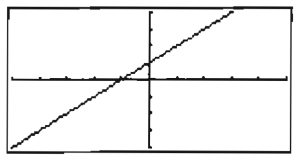
1. **(a)**



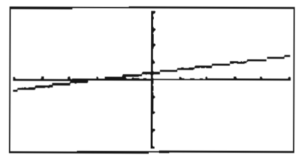
(b)



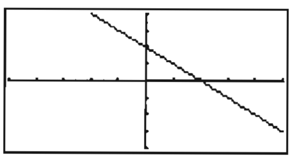
(c)



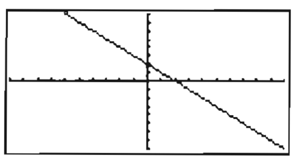
(d)



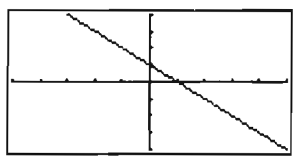
3. **(a)**



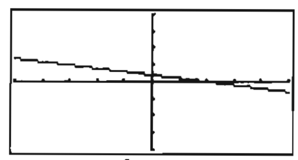
(b)



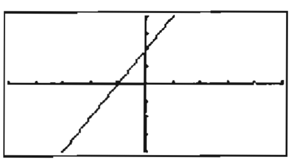
(c)



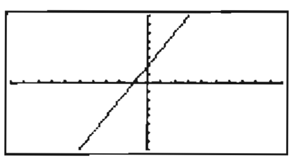
(d)



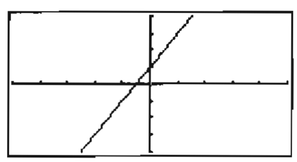
5. **(a)**



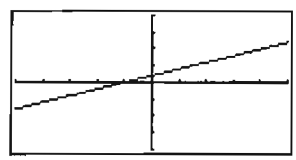
(b)



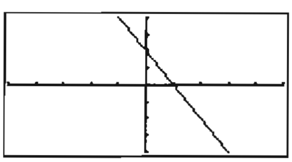
(c)



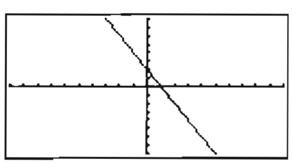
(d)



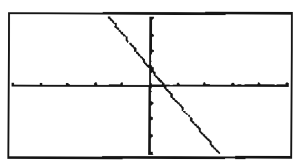
7. **(a)**



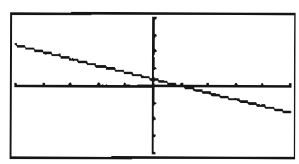
(b)



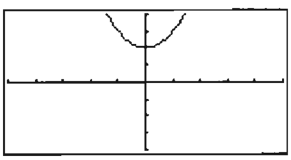
(c)



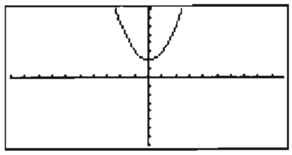
(d)



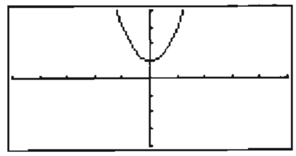
9. (a)



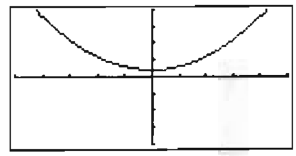
(b)



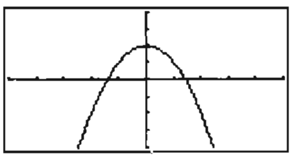
(c)



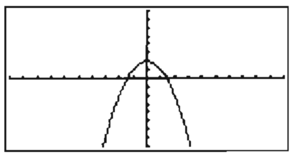
(d)



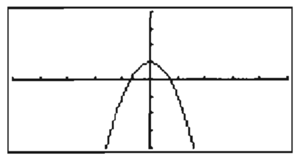
11. (a)



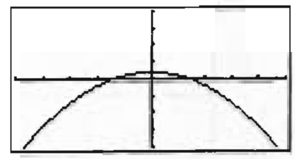
(b)



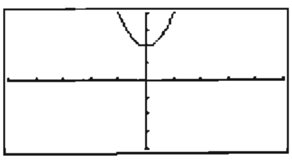
(c)



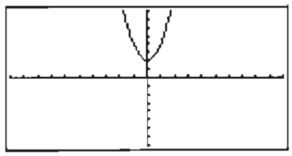
(d)



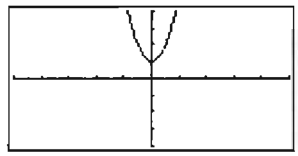
13. (a)



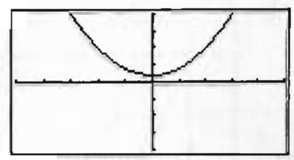
(b)



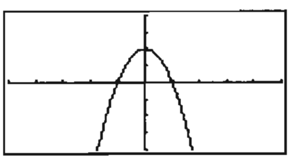
(c)



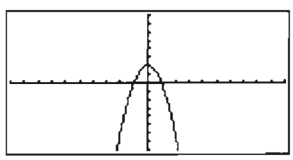
(d)



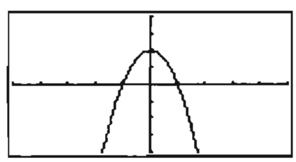
15. (a)



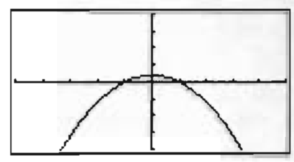
(b)



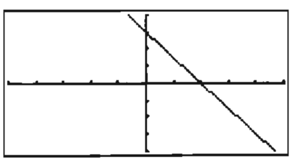
(c)



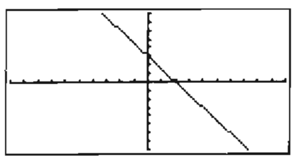
(d)



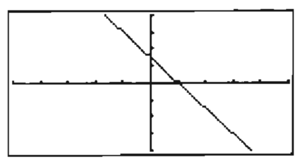
17. (a)



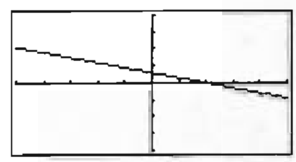
(b)



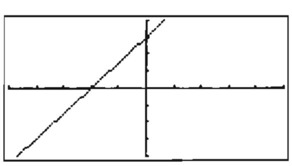
(c)



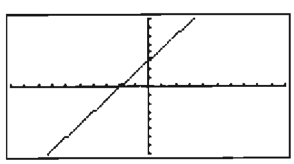
(d)



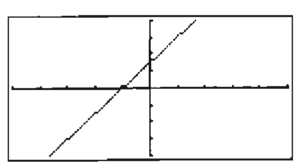
19. (a)



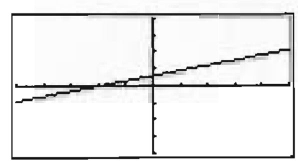
(b)



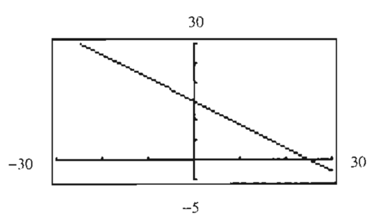
(c)



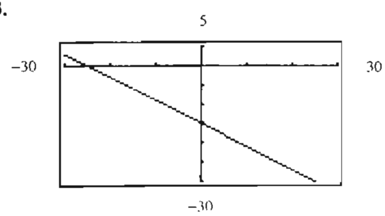
(d)



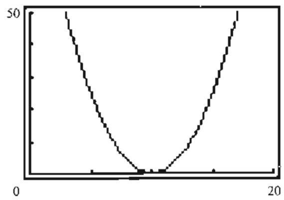
21.



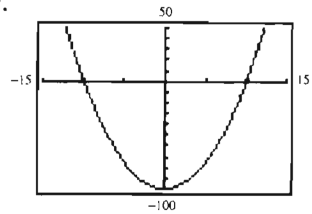
23.



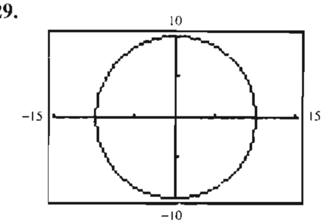
25.



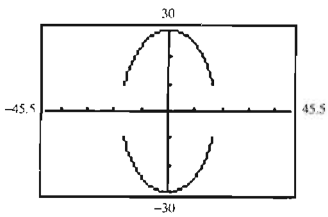
27.



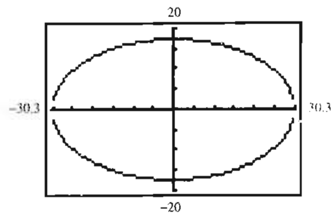
29.



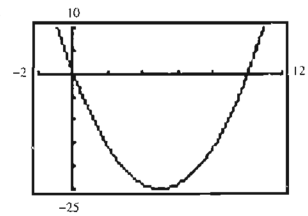
31.



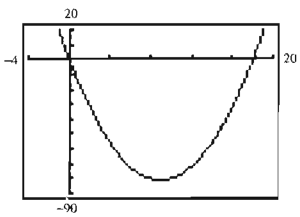
33.



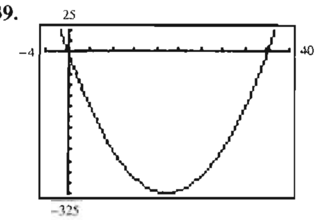
35.



37.



39.



Ejercicio B.4

1. Si **3.** Si **5.** No **7.** Si
9. ymin = 4 Son posibles otras respuestas
ymax = 12
yscl = 1

Ejercicio B.5

1. 0.428 **3.** 2.236 **5.** 1.259 **7.** −3.41 **9.** −1.70 **11.** −0.28 **13.** 3.00 **15.** 4.50 **17.** 0.31, 12.30 **19.** 23.00

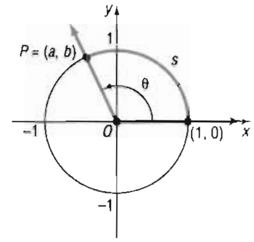
Índice

Funciones trigonométricas

De un número real

$\operatorname{sen} t = b$ $\quad \cos t = a$ $\quad \tan t = \dfrac{b}{a},\ a \neq 0$

$\csc t = \dfrac{1}{b},\ b \neq 0$ $\quad \sec t = \dfrac{1}{a},\ a \neq 0$ $\quad \cot t = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0$

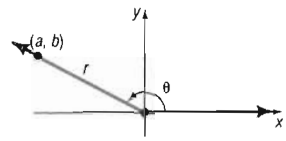


Círculo unitario, $x^2 + y^2 = 1$
$\theta = t$ radianes; $s = t$ unidades

De un ángulo general

$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{b}{r}$ $\quad \cos \theta = \dfrac{a}{r}$ $\quad \tan \theta = \dfrac{b}{a},\ a \neq 0$

$\csc \theta = \dfrac{r}{b},\ b \neq 0$ $\quad \sec \theta = \dfrac{r}{a},\ a \neq 0$ $\quad \cot \theta = \dfrac{a}{b},\ b \neq 0$



Identidades trigonométricas

Identidades fundamentales

$\tan \theta = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$ $\quad \cot \theta = \dfrac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$

$\csc \theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta}$ $\quad \sec \theta = \dfrac{1}{\cos \theta}$ $\quad \cot \theta = \dfrac{1}{\tan \theta}$

$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

Fórmulas para medio ángulo

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

Fórmulas para ángulo doble

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$

$\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta$

$\tan 2\theta = \dfrac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

Identidades par e impar

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta$ $\quad \csc(-\theta) = -\csc \theta$

$\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\quad \sec(-\theta) = \sec \theta$

$\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\quad \cot(-\theta) = -\cot \theta$

Fórmulas suma a producto

$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$

$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$

Fórmulas de suma y resta

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$

Fórmulas producto a suma

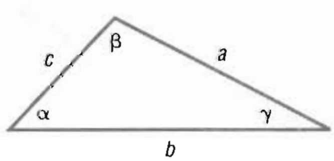
$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{sen} \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Resolución de triángulos



Ley de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

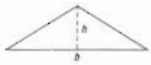
Fórmulas de geometría

Círculo

r = radio, A = Área, C = Circunferencia

$A = \pi r^2 \qquad C = 2\pi r$

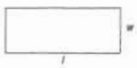
Triángulo



b = base, h = altura, A = Área

$A = \frac{1}{2}bh$

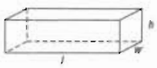
Rectángulo



l = largo, w = ancho, A = Área, P = Perímetro

$A = lw \qquad P = 2l + 2w$

Caja rectangular



l = largo, w = ancho, h = área, V = Volumen

$V = lwh$

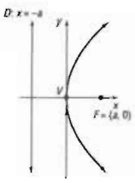
Esfera

r = radio, V = Volumen, S = Área de la superficie

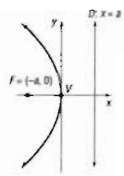
$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad S = 4\pi r^2$

Cónicas

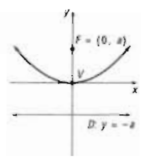
Parábola



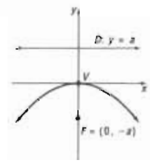
$y^2 = 4ax$



$y^2 = -4ax$

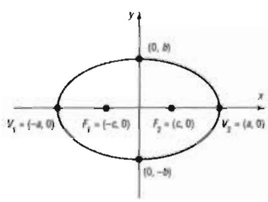


$x^2 = 4ay$

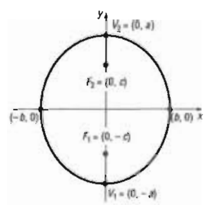


$x^2 = -4ay$

Elipse

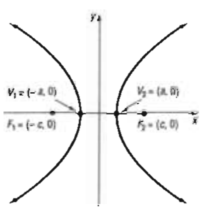


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 - b^2$$



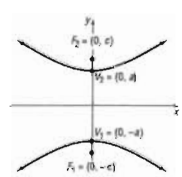
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad c^2 = a^2 - b^2$$

Hipérbola



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Asíntotas: $y = \dfrac{b}{a}x, \quad y = -\dfrac{b}{a}x$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2$$

Asíntotas: $y = \dfrac{a}{b}x, \quad y = -\dfrac{a}{b}x$