Capítulo II
Funciones Inversas. Identidades.Triángulos no Rectángulos

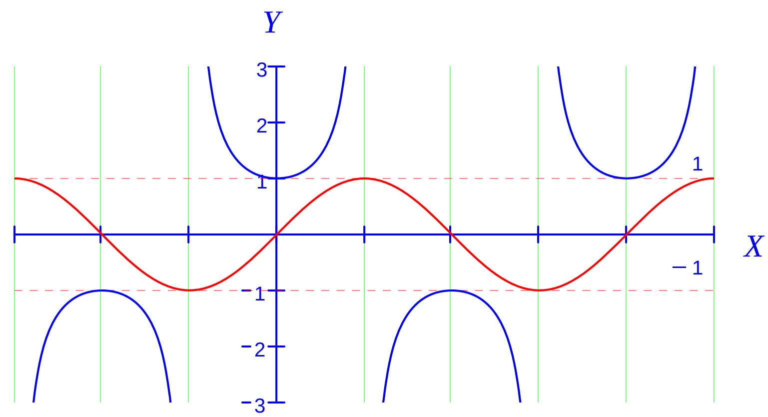
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS .

2.1 Definición .

Por su definición matemática, ***una función es una relación entre dos variables*** x ***e*** y ***tal que a cada valor de la variable*** x (*llamada variable independiente*) **, *corresponde un sólo valor de la variable*** y (*llamada variable dependiente o función*) .

En el plano cartesiano, ésto significa que **cualquier línea recta vertical** de la forma $x = b$ (*que represente un valor constante* b *de la variable independiente*) , intersecta a la gráfica de la función **en un solo punto** (lo cual equivale a asociar un solo valor de la variable dependiente).

Asi por ejemplo, en las gráficas de las funciones seno $y = sen(x)$ o secante $y = sec(x)$, (ó en cualquiera de las gráficas de las funciones trigonométricas) podemos apreciar que tal definición se cumple .



Por eso se dice que el seno, coseno , tangente , etc. son funciones matemáticas .

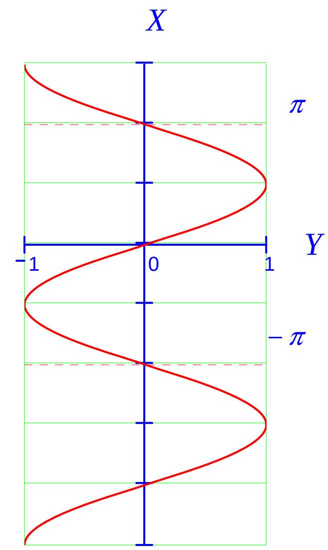
Ahora bién, si una función tiene inversa, ésta realiza las operaciones opuestas a las que hace la función , por ejemplo :

- Dado un número x , con la función $y = 5 \cdot x$, se obtiene el quíntuplo de x . Con la función inversa $x = \frac{y}{5}$ se obtiene la división de tal número, es decir resulta el valor inicial x .
- Dado un número x , con la función $y = x^2$, se obtiene el cuadrado de x . Con la función inversa $x = \sqrt{y}$ se obtiene la raíz cuadrada de tal número, es decir resulta el valor inicial x .

- Dado un número x , con la función $y = 10^x$, se obtiene el valor y de la función exponencial de base 10 . Con la función inversa $x = log(y)$ se calcula el logaritmo común de tal valor, es decir resulta el exponente x .
- Dado un ángulo x , con la función $y = sen(x)$, se obtiene el número y de la función seno asociado a ese ángulo . Con la función inversa $x = arcsen(y)$ se calcula el ángulo inicial asociado al valor y mediante la función seno .

De manera que al aplicar la función y su inversa a un número dado x, regresamos al mismo valor x .
El proceso de determinar la función inversa implica invertir en algún momento los papeles de las variables x e y , lo cual equivale a intercambiar los ejes de coordenadas X y Y , es decir en el plano cartesiano Y será ahora el eje horizontal y X será el eje vertical .

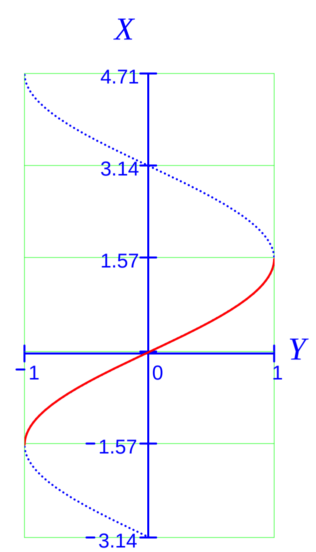
Asi por ejemplo, la gráfica obtenida para la función seno después de intercambiar los ejes de coordenadas, tendrá la apariencia que se representa en la gráfica de la derecha .



Ésta no es realmente la gráfica de una función matemática, puesto que no cumple con la condición que define a una función dado que cualquier recta vertical comprendida entre los valores -1 y 1 , intersecta a la gráfica en una infinidad de puntos y no en uno sólo.

Para tener realmente la gráfica de la función inversa del seno, se puede escoger una parte de la gráfica que cumpla con la definición de función .

Como consecuencia de invertir los ejes de coordenadas X e Y, la gráfica de una función y la gráfica de su inversa deben ser simétricas respecto a la línea recta $y = x$, es decir , la gráfica de una función inversa es la imagen reflejada de la función con respecto a la recta diagonal $y = x$.



Por ésta razón, la parte o porción de la gráfica invertida del seno que representa su función inversa es la que queda comprendida entre $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$ como se indica en la figura de la derecha .

De éste modo, cualquier recta vertical intersecta a éste pedazo de la curva "senoidal vertical " en un solo punto y se satisface la condición que define a una función.

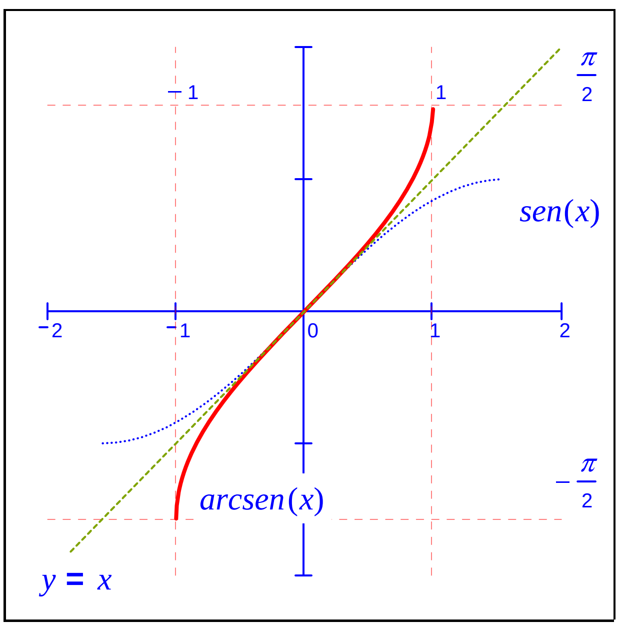
La función inversa de la función seno se denomina ***arco seno*** y se denota por :

$$y = arcsen(x)$$

que se lee como : " y *es el ángulo (medido en radianes) cuyo seno es el número* x " .

Para representar la función inversa del seno suele utilizarse también la notación : $y = sen^{-1}(x)$; sin embargo tal notación podría causar confusión al interpretarse como la potencia -1 del seno, es decir como $y = \dfrac{1}{sen(x)}$ que es algo completamente diferente . Por ésta razón, evitaremos en lo posible su uso .

Siguiendo los mismos principios que los ilustrados anteriormente para la obtención de la gráfica de la función inversa del seno, es posible obtener las funciones inversas de todas las funciones trigonométricas, las cuales se muestran en las siguientes gráficas:
(*La gráfica de la función inversa se indica con una línea continua , mientras que la **parte** de la curva trigonométrica que se refleja en la recta y = x se indica en línea punteada*)

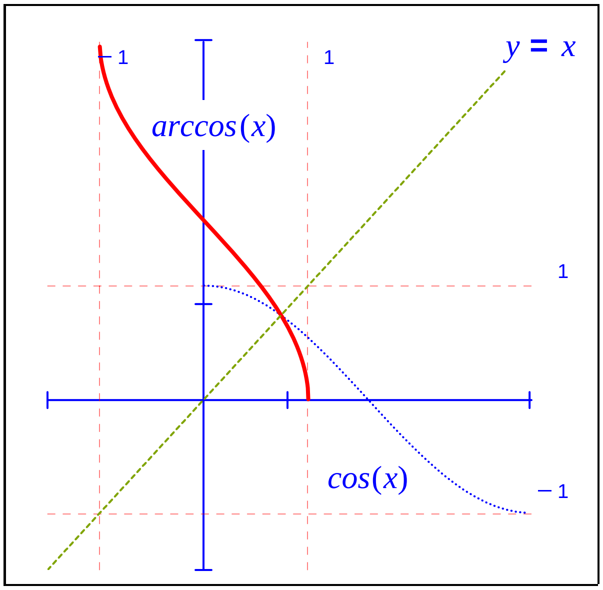


La parte de la curva seno comprendida entre $x=-\pi/2$ *y* $x=\pi/2$ *, se refleja en la recta* $y = x$ *para definir la función inversa del seno , el "arco seno" como :*

$$y = arcsen(x) \quad \text{si y solo si} \quad sen(y) = x$$

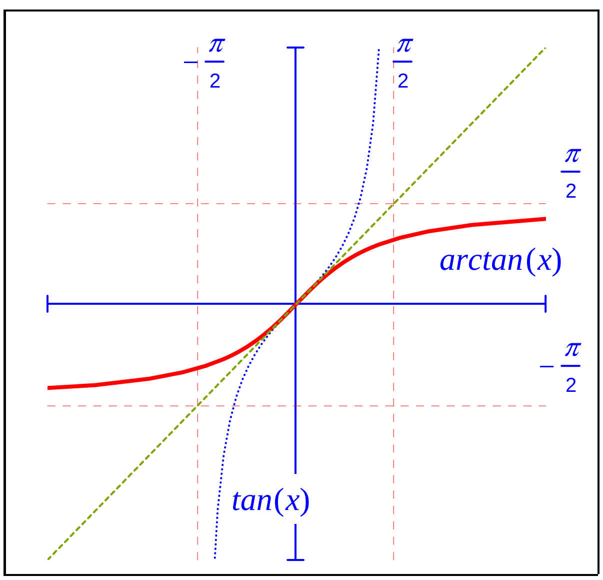
$$\text{donde} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad ; \quad \frac{-\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

que se lee : " y es el ángulo cuyo seno es x "



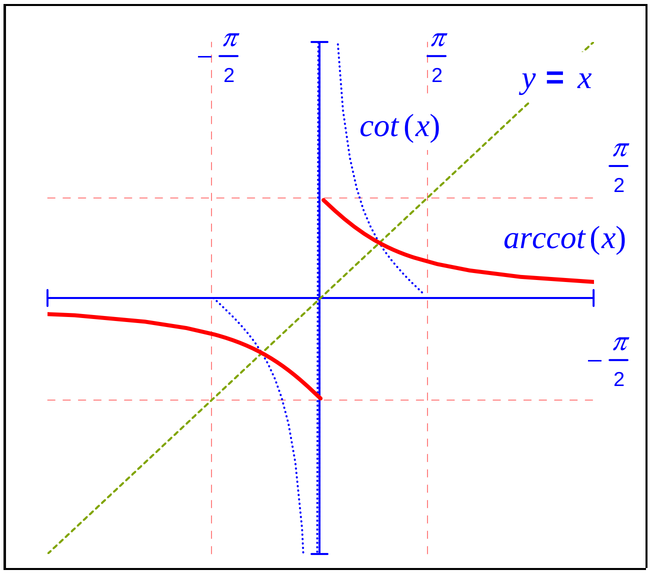
La parte de la curva coseno comprendida entre $x = 0$ *y* $x = \pi$ *, se refleja en la recta* $y = x$ *para definir la función inversa del coseno , el "arco coseno" como :*

$$y = \arccos(x) \quad \text{si y solo si} \quad \cos(y) = x$$
$$\text{donde} \quad -1 \le x \le 1 \quad ; \quad 0 \le y \le \pi$$



La parte de la curva coseno comprendida entre x=−π/2 y x= π/2, se refleja en la recta $y = x$ *para definir la función inversa de la tangente: "arco tangente" como :*

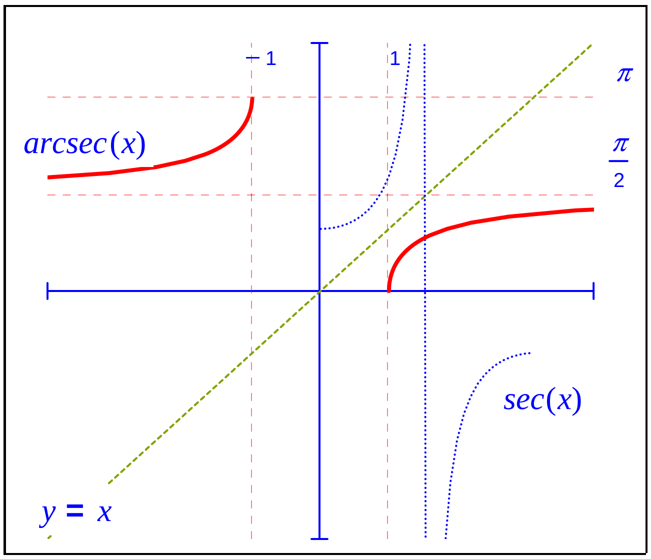
$$y = \arctan(x) \quad \text{si y solo si} \quad \tan(y) = x$$
$$\text{donde} \quad -\infty < x < \infty \quad ; \quad \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$



La parte de la curva cotangente que está entre $x = -\pi/2$ *y* $x = \pi/2$ *, se refleja en la recta* $y = x$ *para definir la función inversa de la tangente , el "arco cotangente" como:*

$$y = arccot(x) \text{ si y solo si } cot(y) = x$$

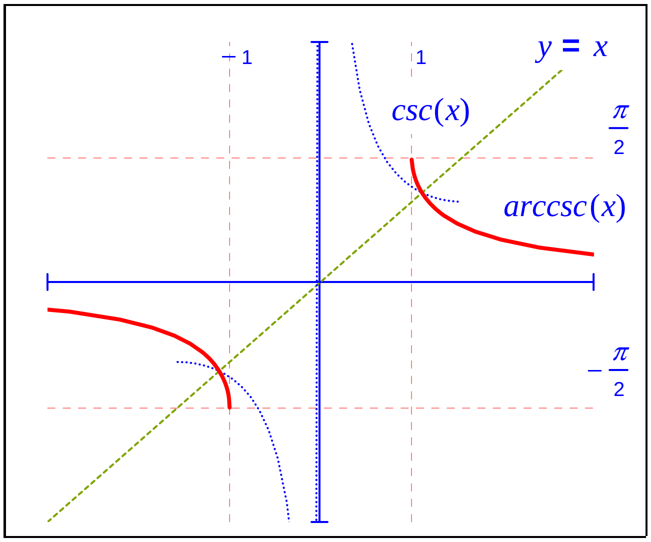
$$\text{para } -\infty < x < \infty \quad ; \quad \frac{-\pi}{2} < y \le \frac{\pi}{2}$$



La parte de la curva secante comprendida entre $x = 0$ *y* $x = \pi$*, se refleja en la recta* $y = x$ *para definir su función inversa : "arco secante" como :*

$$y = arcsec(x) \text{ si y solo si } sec(y) = x$$

$$\text{para } x \le -1 \text{ , } 1 \le x \quad ; \quad 0 \le y < \pi \text{ , } y \ne \frac{\pi}{2}$$



Reflejando respecto a la recta $y = x$ *la parte de la curva cosecante que está entre* $x = -\pi/2$ *y* $x = \pi/2$, *se define la función inversa "arco cosecante" como :*

$$y = \operatorname{arccsc}(x) \quad \text{si y solo si} \quad \csc(y) = x$$

$$\text{para} \quad x \le -1 \ , \ 1 \le x \qquad ; \qquad \frac{-\pi}{2} \le y < \frac{\pi}{2} \ , \quad y \ne 0$$

Ejemplo 1. Sin usar calculadora, hallar el valor de . . .

a) $\arcsin\left(\frac{-1}{2}\right)$ b) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $\arctan(-1)$

Solución : a) Aplicando la definición de la función inversa del seno :

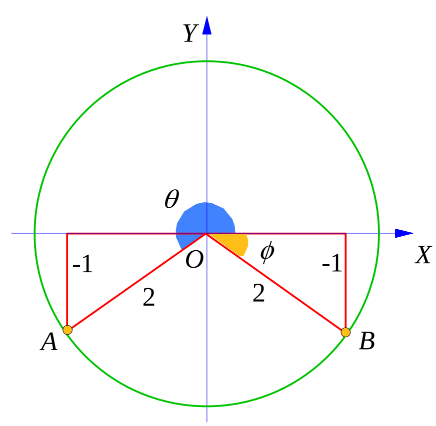
$$\text{Si} \quad \theta = \arcsin\left(\frac{-1}{2}\right) \quad \text{entonces} \quad \operatorname{sen}(\theta) = -\left(\frac{1}{2}\right).$$

en otras palabras, θ es el ángulo cuyo seno vale − 1/2 .

Dado que $\operatorname{sen}(\theta) = \dfrac{\text{ordenada}}{\text{radio}} = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-1}{2}$

se sigue que $y = -1$, $r = 2$, $x = \sqrt{3}$

Reconociendo éstos como los lados de un triángulo $30° - 60° - 90°$ en el plano cartesiano, hay dos ángulos cuyo seno vale −1/2, que son: $210° = \frac{7}{6} \cdot \pi$; $-30° = -\frac{\pi}{6}$



Sin embargo, dado que en el rango de definición del arco seno es :

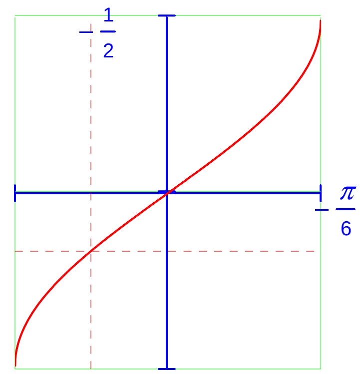
$$[\,-\pi/2\,,\,\pi/2\,]$$

se concluye que θ debe estar en el

cuadrante IV , esto es $\theta = -30° = \frac{-\pi}{6}$

y por lo tanto :

$$arcsen\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{-\pi}{6}$$



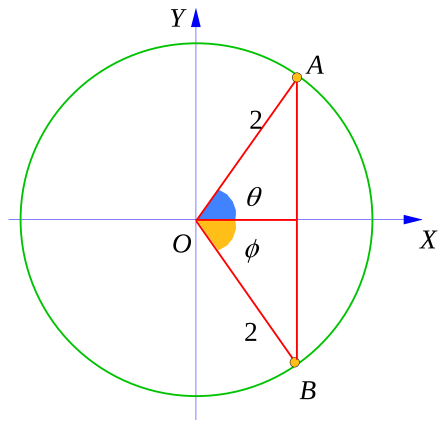
b) Aplicando la definición de la función inversa del coseno :

$$Si \quad \theta = arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad entonces \quad cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

asi que θ es un ángulo cuyo coseno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por definición: $cos(\theta) = \frac{abscisa}{radio} = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

se deduce que $x = \sqrt{3}$, $r = 2$, $y = \pm 1$

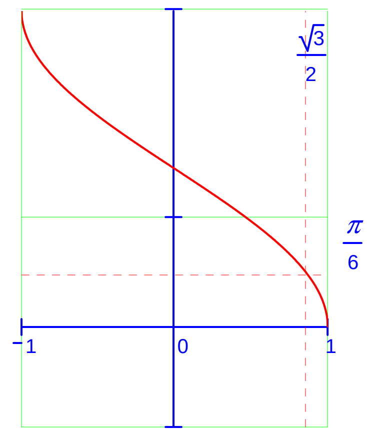


Éstos son los lados de un triángulo $30° - 60° - 90°$, asi que en el plano cartesiano hay dos ángulos cuyo coseno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$, que son: $30° = \frac{\pi}{6}$ y $-30° = -\frac{\pi}{6}$ como se muestra en la figura de la derecha.

Finalmente , se sabe que el rango de definición del arco coseno es $[0\,,\,\pi\,]$ asi que θ debe ser un ángulo del cuadrante I ,

esto es $\theta = 30° = \frac{\pi}{6}$ y por lo tanto :

$$arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$



c) De la definición para la función inversa de la tangente :

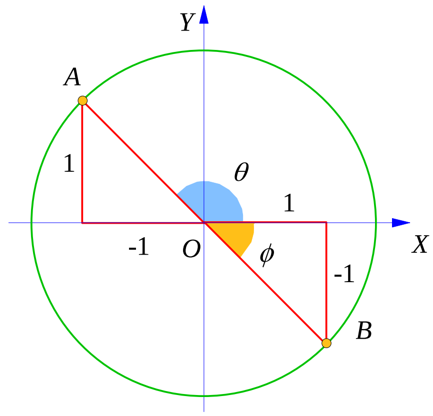
$$Si \quad \theta = arctan(-1) \quad entonces \quad tan(\theta) = -1 .$$

θ es un ángulo cuyo tangente vale : $\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

Se sabe que $tan(\theta) = \dfrac{ordenada}{abscisa} = \dfrac{y}{x} = -1$

es decir $y = \pm 1$, $x = \pm 1$ y por lo tanto

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$



Reconociendo éstos como los lados de un triángulo $45° - 45° - 90°$ en el plano cartesiano, hay dos ángulos cuya tangente vale -1, que son: $135° = \dfrac{3 \cdot \pi}{4}$ y $-45° = -\dfrac{\pi}{4}$

como se muestra en la figura de la derecha.

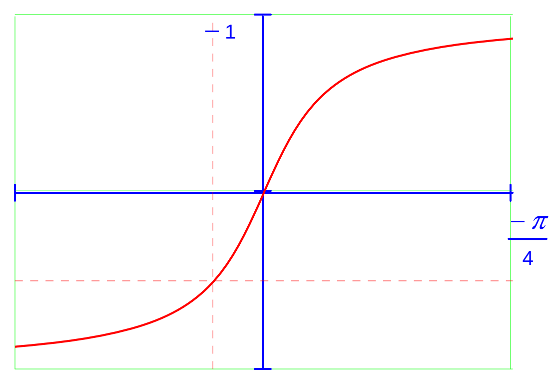
Sin embargo, para que θ esté en el rango de definición del arco tangente :

[−π/2 , π/2]

se concluye que θ debe estar en el cuadrante IV , esto es

$\theta = -45° = -\dfrac{\pi}{4}$ y por lo tanto :

$$arctan(-1) = \frac{-\pi}{4}$$



Es muy importante tener siempre en cuenta los rangos o intervalos de definición de las funciones trigonométricas inversas, con el fin de facilitar su aplicación . Es conveniente que Usted memorize ésos intervalos .
Es necesario reconocer éstops rangos por ejemplo en ls siguientes identidades :

PROPIEDADES INVERSAS

- Si $-1 \le x \le 1$; $\dfrac{-\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ entonces $sen(arcsen(x)) = x$; $arcsen(sen(\theta)) = \theta$
- Si $-1 \le x \le 1$; $0 \le \theta \le \pi$ entonces $cos(arccos(x)) = x$; $arccos(cos(\theta)) = \theta$
- Si $-\infty \le x \le \infty$; $\dfrac{-\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ entonces $tan(arctan(x)) = x$; $arctan(tan(\theta)) = \theta$

etc.

Con el fin de obtener un mejor entendimiento de las funciones trigonométricas , trate usted de *no usar la calculadora siempre que sea posible* como en el siguiente ejercicio :

Ejemplo 2. Sin usar calculadora, determinar el valor exacto de:

a) $arcsen(sen(0.2447))$ b) $arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ c) $arccos\left(cos\left(\frac{5\cdot\pi}{3}\right)\right)$

d) $arcsen\left(sen\left(\frac{5\cdot\pi}{3}\right)\right)$ e) $tan\left(arcsec\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ f) $cos\left(arcsen\left(\frac{-3}{5}\right)\right)$

Solución : a) Puesto que el ángulo dado $\theta = 0.2447$ está en el rango $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ de definición del arco seno, la identidad $arcsen(sen(\theta)) = \theta$ existe y vale :

$$arcsen(sen(0.2447)) = 0.2447$$

b) De la identidad inversa $arccos(cos(\theta)) = \theta$ que existe si $(0 \le \theta \le \pi)$ y sabiendo que $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ se sigue que :

$$arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = arccos\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

c) El ángulo $5\pi/3$ usado como argumento, no es un valor dentro del rango de definición de la función arco coseno $(0 \le \theta \le \pi)$, por lo cual $arccos\left(cos\left(\frac{5\cdot\pi}{3}\right)\right)$ no existe (aunque la calculadora diga que si).

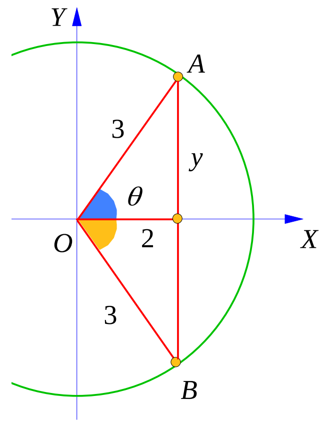
d) El ángulo $\frac{5\cdot\pi}{3}$ no es un valor en el rango permitido $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ de la función arco seno . Sin embargo, es coterminal con $-\frac{\pi}{3}$, el cual si queda dentro del rango de definición. Por lo tanto :

$$arcsen\left(sen\left(\frac{5\cdot\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$$

e) Si $\theta = arcsec\left(\frac{3}{2}\right)$ se sigue que $sec(\theta) = \frac{3}{2}$ y recordando la definición de la función secante :

$$sec(\theta) = \frac{radio}{abscia} = \frac{r}{x} = \frac{3}{2}$$

es decir $r = 3$, $x = 2$.



Del teorema de Pitágoras se deduce que:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \pm\sqrt{5}$$

por lo cual la función tangente es :

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Sin embargo, dado que el rango de definición de

$\theta = arcsec(x)$ es $0 \leq \theta \leq \pi$; $\theta \neq \frac{\pi}{2}$

se concluye que θ debe ser el ángulo positivo del primer cuadrante, esto es :

$$\tan\left(arcsec\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

f) Si $\theta = arcsen\left(\frac{-3}{5}\right)$ entonces $sen(\theta) = \frac{-3}{5}$ y recordando la definición de la función seno :

$$sen(\theta) = \frac{ordenada}{radio} = \frac{y}{r} = \frac{-3}{5}$$

se deduce $r = 5$, $y = -3$. Del teorema de Pitágoras se obtiene además que:

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{5^2 - (-3)^2} = \pm 4$$

Pero tomando en cuenta que rango de definición de la función arco seno es

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, el ángulo θ debe estar en el IV cuadrante, es decir $x = 4$ y

finalmente resulta :

$$\cos\left(arcsen\left(\frac{-3}{5}\right)\right) = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}$$

2.2 Identidades recíprocas .

Como las funciones cotangente, secante y cosecante son las recíprocas de las funciones tangente, coseno y seno respectivamente, ahora que ya conocemos las funciones trigonométricas inversas, podemos obtener las siguientes identidades que nos permiten evaluar las funciones inversas $arccot(x)$, $arcsec(x)$ y $arccsc(x)$, en términos de las funciones $arctan(x)$, $arccos(x)$ y $arcsen(x)$

Si $x \le -1$, $1 \le x$ entonces :

$$\boxed{arcsec(x) = arccos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$\boxed{arccsc(x) = arcsen\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Si $x \ne 0$ entonces :

$$\boxed{arccot(x) = arctan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

DEMOSTRACIÓN .

Si $\theta = arcsec(x)$ *entonces* $sec(\theta) = x$ $\quad$ (*con* $0 \le \theta \le \pi$; $\theta \ne \frac{\pi}{2}$)

$$\frac{1}{sec(\theta)} = \frac{1}{x}. \qquad \text{(tomando el recíroco, } x \ne 0 \text{)}$$

$$cos(\theta) = \frac{1}{x} \qquad \text{(porque } \frac{1}{sec(\theta)} = cos(\theta) \text{)}$$

$$arccos(cos(\theta)) = arccos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(aplicando la función inversa)}$$

$$\theta = arccos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(que existe en } 0 \le \theta \le \pi \text{)}$$

$$arcsec(x) = arccos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{(puesto que } \theta = arcsec(x) \text{)}$$

La demostración de las otras dos identidades sigue un razonamiento similar .

* Muchas calculadoras sólo tienen indicadas las funciones trigonométricas inversas para el seno, el coseno y la tangente . Con las identidades anteriores, usted será capaz de calcular también las funciones trigonométricas inversas para la secante , cosecante y cotangente .

Ejemplo 3. Usando una calculadora (en el modo ***deg***) se obtiene :

a) $arcsec(4.3) = arccos\left(\dfrac{1}{4.3}\right) = 76^{o}\cdot\_33'\cdot\_\cdot 8.18''$

b) $arccsc(-2.1) = arcsen\left(\dfrac{1}{-2.1}\right) = -28^{o}\_26'\_12.8''.$

c) $arccot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = arctan(\sqrt{3}) = 60^{o}$

EJERCICIOS II.1

1. Hallar el valor exacto de las siguientes expresiones sin usar tablas o calculadora :

a) $arcsen(0)$ b) $arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)$ c) $arcsen\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ d) $arcsec(-2)$

e) $arctan\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ f) $sen(arcsen(0.3))$ g) $sen\left(arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)\right)$ h) $cos\left(arcsen\left(\dfrac{5}{13}\right)\right)$

i) $tan\left(arsen\left(-\dfrac{5}{6}\right)\right)$ j) $sec\left(arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ k) $cos(arctan(1))$ l) $cot\left(arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$

m) $csc(arctan(-1))$ n) $tan\left(arccos\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$ o) $sen\left(arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

2. Completar las siguientes equivalencias :

a) $arctan\left(\dfrac{9}{x}\right) = arcsen\left(\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right) = arcsec\left(\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right)$

b) $arcsen\left(\dfrac{\sqrt{36 - x^2}}{6}\right) = arcos\left(\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right) = arccot\left(\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right)$

c) $arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{x^2 + 4}}\right) = arcsen\left(\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right) = arccot\left(\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right)$

3. ¿ Son verdaderas las siguientes identidades ?

a) $arcsen(-u) = -arcsen(u)$; $-1 \le u \le 1$

b) $arccos(-u) = -arccos(u)$; $-1 \le u \le 1$

c) $arctan(-u) = -arctant(u)$

d) $arctan(x) = \dfrac{arcsen(x)}{arccos(x)}$

4. Calcular (sin usar calculadora) :

   a) $arcsec(2)$ b) $arccot(\sqrt{3})$ c) $arccsc\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$

5. Graficar las siguientes funciones :

   a) $arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}$ b) $arctan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ c) $arccos\left(\dfrac{x}{4}\right)$ d) $arcsen(x-1)$

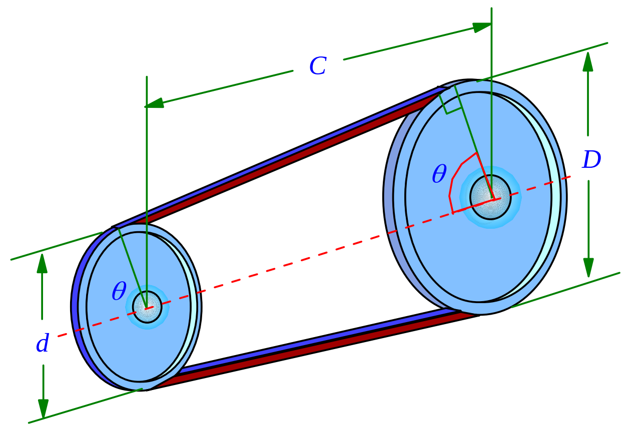
6. Demostrar que la longitud L de la banda alrededor de dos poleas como se muestra en la figura de la derecha, está dada por :

   $$L = \pi \cdot D + (d - D) \cdot \theta + 2 \cdot C \cdot sen(\theta)$$

   donde el ángulo θ se mide en radianes y está dado por :

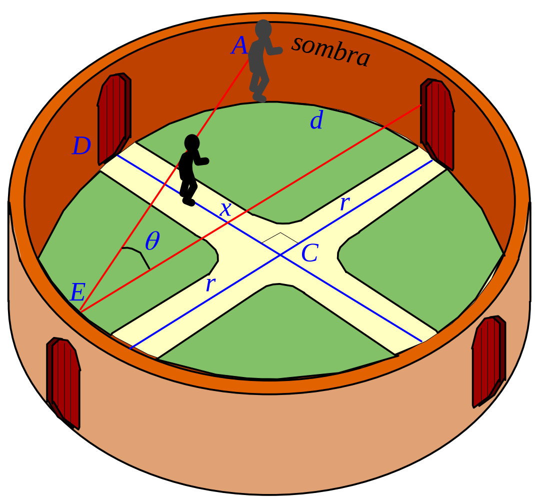
   $$\theta = arccos\left(\frac{D-d}{2 \cdot C}\right)$$

   Calcule L si $D = 6 \cdot cm$, $d = 4$, $C = 10 \cdot cm$



7. La figura representa un patio circular rodeado por una pared alta de piedra. Un foco localizado en E , brilla en el patio. Si una persona camina a x metros hacia el centro a lo largo de DC , su sombra proyectada en la pared circular, se moverá una distancia de arco d .

   Hallar una fórmula para d y calcule esa distancia si $r = 20 \cdot m$ y $x = 5 \cdot m$



<u>*Respuestas*</u> (*Ejercicio* II.1)

1 . a) 0 b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{-\pi}{4}$ d) $\frac{2}{3}\cdot\pi$

e) $\frac{-\pi}{6}$ f) 0.3 g) $\frac{3}{5}$ h) $\frac{12}{13}$

i) $\frac{-5}{\sqrt{11}}$ j) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ k) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ l) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

m) $-\sqrt{2}$ n) $\sqrt{3}$ o) $\frac{1}{2}$.

2. a) $arctan\left(\frac{9}{x}\right) = arcsen\left(\frac{9}{\sqrt{x^2+81}}\right) = arcsec\left(\frac{\sqrt{x^2+81}}{x}\right)$

b) $arcsen\left(\frac{\sqrt{36-x^2}}{6}\right) = arcos\left(\frac{x}{6}\right) = arccot\left(\frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\right)$

c) $arccos\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right) = arcsen\left(\frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{x^2+4}}\right) = arccot\left(\frac{3}{\sqrt{x^2-5}}\right)$

3. a) Si , $arcsen(x)$ es una función impar, es decir simétrica respecto al origen.

b) No, $arccos(x)$ no tiene simetria

c) Si, $arctan(x)$ es una función impar simétrica respecto al origen .

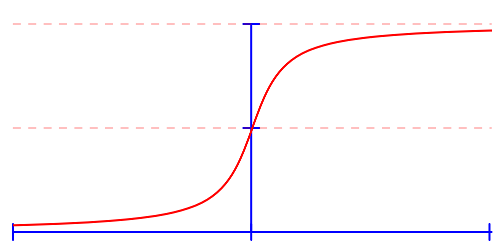
d) No, $atan(x)$ se define en $-\infty < x < \infty$; pero $arcsen(x)$ o $arccos(x)$ se definen en

$-1 \le x \le 1$.

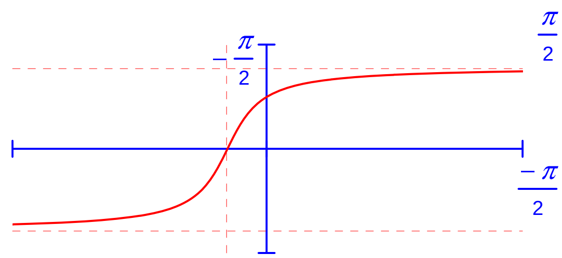
4. a) $arcsec(2) = arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ b) $arccot(\sqrt{3}) = arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

c) $arccsc\left(2 \ \ldots\right) = arcsen\left(\sqrt{3} \ \ldots\right) = \frac{\pi}{3}$

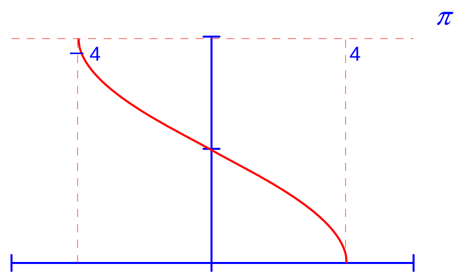
5. a) Se trata de la gráfica de la función $arctan(x)$ pero desplazada verticalmente hacia arriba sobre el eje Y una distancia de $\frac{\pi}{2}$



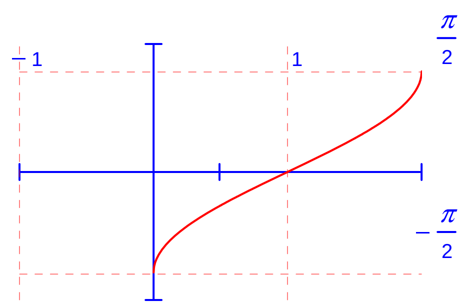
b) Se trata de la gráfica de la función $arctan(x)$ pero desplazada horizontalmente hacia la izquierda sobre el eje X la distancia $\frac{\pi}{2}$.

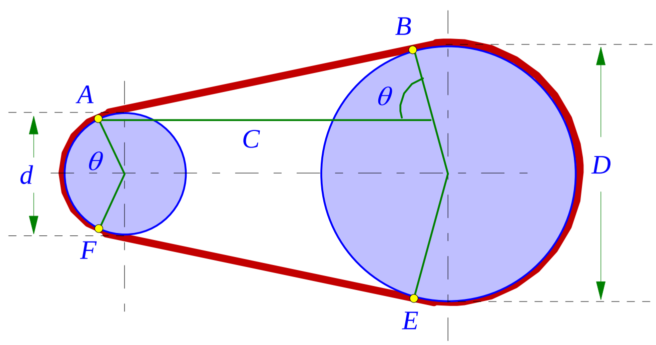


c) Se trata de la gráfica de la función $arccos(x)$ pero definida en el intervalo $-4 \leq x \leq 4$



d) Se trata de la gráfica de la función $arcsen(x)$ pero desplazada horizontalmente hacia la derecha sobre el eje X la distancia 1





6. La longitud de la distancia $\overline{AB}$ se obtiene de la función seno : $sen(\theta) = \frac{(\overline{AB})}{(\overline{C})}$ esto es . . .

$$\overline{AB} = \overline{C} \cdot sen(\theta)$$

La longitud del arco BE es $(2 \cdot \pi - 2 \cdot \theta) \cdot \frac{D}{2}$ y la del arco AF es $(2 \cdot \theta) \cdot \frac{d}{2}$.

Por lo tanto, la longitud total L de la banda es :

$$L = 2\cdot\overline{AB} + BE + AF = 2\cdot\left(\overline{C}\cdot sen(\theta)\right) + (2\cdot\pi - 2\cdot\theta)\cdot\frac{D}{2} + (2\cdot\theta)\cdot\frac{d}{2}$$

$$= \pi\cdot D - (D-d)\cdot\theta + 2\cdot\overline{C}\cdot sen(\theta)$$

Además $cos(\theta) = \dfrac{\left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right)}{(\overline{C})} = \dfrac{D-d}{2\cdot(\overline{C})}$, de donde $\theta = arccos\left[\dfrac{D-d}{2\cdot(\overline{C})}\right]$. asi que finalmente resulta :

$$L = \pi\cdot D - (D-d)\cdot\theta + 2\cdot\overline{C}\cdot sen\left[arccos\left[\frac{D-d}{2\cdot(\overline{C})}\right]\right]$$

7. El triángulo *EAO* es isósceles, por lo cual la longitud del arco circular AB es :

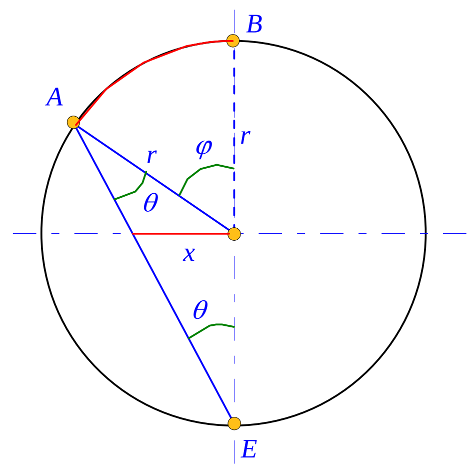
$$d = (\varphi)\cdot r$$

y dado que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es π , entonces $\varphi = 2\cdot\theta$

Queda finalmente :

$$d = 2\cdot\theta\cdot r$$

$$= 2\cdot\left(arctan\left(\frac{x}{r}\right)\right)\cdot r$$



Para $r = 20\cdot m$, $x = 5\cdot m$ se obtiene :

$$d = 2\cdot arctan\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 20\cdot m = 9.78\cdot m$$

2.2 Identidades trigonométricas para la suma y la diferencia de dos ángulos .

De manera semejante a como las siguientes expresiones algebráicas son falsas . . .

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y} \quad , \quad ln(x+y) = ln(x)+ln(y) \quad , \quad (x-y)^2 = x^2 - y^2$$

(y que también son errores que muchos estudiantes cometen fácilmente), vamos a demostrar que expresiones trigonométricas tales como . . .

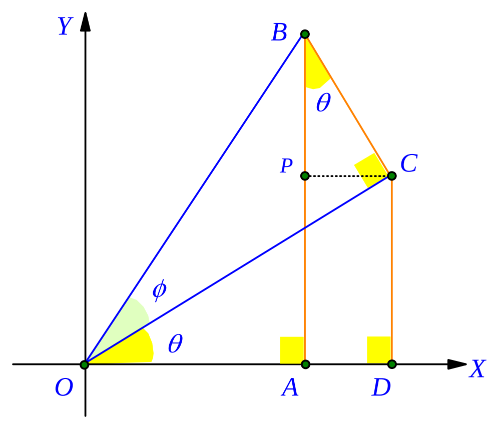
$$sen(\theta+\phi) = sen(\theta)+sen(\phi) \quad , \quad cos(\theta-\varphi) = cos(\theta)-cos(\varphi)$$

$$tan(\alpha+\beta) = tan(\alpha)+tan(\beta) \quad \text{etc.}$$

también son falsas.

En general, se puede afirmar que *las funciones trigonométricas para la suma ó la diferencia de dos ángulos no son la simple suma o diferencia de las funciones respectivas de esos ángulos* .

Consideremos por ejemplo la suma de dos ángulos $\theta = \angle DOC$ y $\phi = \angle COB$ tales que el lado terminal del ángulo θ sea el lado inicial del ángulo ϕ , como se muestra en la siguiente figura :



Únase el lado terminal de θ con el lado terminal de ϕ mediante una línea recta CB , de tal manera que el ángulo $\angle BCO$ sea recto .

Las rectas verticales que pasan por B y C , intersectan al eje X respectivamente en los puntos A y D y la recta horizontal por C, determina un segmento PC que es perpendicular a AB.
Por lo tanto, el triángulo rectángulo ΔPBC es semejante al triángulo rectángulo ΔDOC .y en consecuencia el ángulo θ en B es igual al ángulo θ en O .

Apliquemos ahora la definición de la función seno al ángulo $(\theta + \phi)$, es decir . . .

$$sen(\theta+\phi) = \frac{(ordenada)}{(radio)} = \frac{AB}{OB}$$

sin embargo, el segmento AB es la suma de los segmentos $AP + PB$ siendo $AP = DC$ es decir:

$$sen(\theta+\phi) = \frac{DC+PB}{OB} = \frac{DC}{OB} + \frac{PB}{OB}$$

Recordemoa ahora que el valor de una fracción no cambia si se multiplica su numerador y su denominador por una misma cantidad (que no sea cero), asi que escribamos el resultado anterior como . . .

$$sen(\theta+\phi) = \frac{DC}{OB}\cdot\left(\frac{OC}{OC}\right) + \frac{PB}{OB}\cdot\left(\frac{BC}{BC}\right)$$

y como el orden de los factores no altera el producto, también se puede escribir . . .

$$sen(\theta+\phi) = \left(\frac{DC}{OC}\right)\cdot\left(\frac{OC}{OB}\right) + \left(\frac{PB}{BC}\right)\cdot\left(\frac{BC}{OB}\right)$$

Usando las definiciones de las funciones trigonométricas, reconocemos de inmediato que :

$$en\ el\ triángulo\ \Delta DOC\ :\ \frac{DC}{OC} = \frac{(lado\_opuesto)}{(hipotenusa)} = sen(\theta)$$

$$en\ el\ triángulo\ \Delta COB\ :\ \frac{OC}{OB} = \frac{(lado\_adyacente)}{(hipotenusa)} = cos(\phi)$$

$$en\ el\ triángulo\ \Delta PBC\ :\ \frac{PB}{BC} = \frac{(lado\_adyacente)}{(hipotenusa)} = cos(\theta)$$

$$en\ el\ triángulo\ \Delta COB\ :\ \frac{BC}{OB} = \frac{(lado\_opuesto)}{(hipotenusa)} = sen(\phi)$$

en consecuencia :

$$sen(\theta+\phi) = sen(\theta)\cdot cos(\phi) + cos(\theta)\cdot sen(\phi) \qquad (8)$$

Esta es la identidad trigonométrica buscada para el seno de la suma de dos ángulos

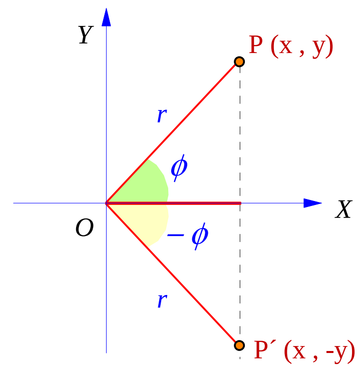
Por otra parte, el seno de una diferencia de dos ángulos se puede interpretar como :

$$sen(\theta - \phi) = sen[\theta + (-\phi)]$$

asi que aplicando la ídentidad (8) anterior, se obtiene . . .

$$sen[\theta + (-\phi)] = sen(\theta)\cdot cos(-\phi) + cos(\theta)\cdot sen(-\phi)$$

Pero como se puede apreciar en la figura de la derecha , para dos puntos simétricos respecto al eje X , $P(x, y)$ y $P'(x, -y)$, se tiene que . . .



- $cos(\phi) = \frac{x}{r}$, $cos(-\phi) = \frac{x}{r}$ es decir: $cos(-\phi) = cos(\phi)$

  por eso se dice que el coseno de un ángulo es una función *par* es decir, es simétrica respecto al eje vertical Y mientras que :

- $sen(\phi) = \frac{y}{r}$, $sen(-\phi) = \frac{-y}{r}$ es decir: $sen(-\phi) = -sen(\phi)$

  , por eso decimos que el seno de un ángulo es una función *impar* o simétrica respecto al origen de coordenadas.

De manera que :

$$sen(\theta - \phi) = sen(\theta)\cdot cos(\phi) - cos(\theta)\cdot sen(\phi) \qquad (8_a)$$

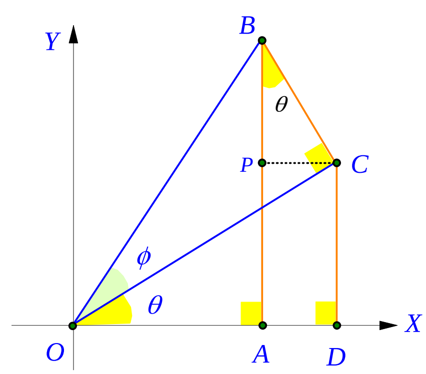
que es la identidad para el seno de la diferencia entre dos ángulos.

Usando la misma figura que la empleada en la deducción del seno de una suma de ángulos, también es posible demostrar una identidad para el coseno de una suma de ángulos. El procedimiento es muy similar al de aquél caso y solo se enlistan enseguida los pasos para su deducción . . .

$$cos(\theta + \phi) = \frac{OA}{OB} = \frac{OD - AD}{OB} = \frac{OD - PC}{OB}$$

$$= \frac{OD}{OB}\cdot\left(\frac{OC}{OC}\right) - \frac{PC}{OB}\cdot\left(\frac{BC}{BC}\right)$$

$$= \left(\frac{OD}{OC}\right)\cdot\left(\frac{OC}{OB}\right) - \left(\frac{PC}{BC}\right)\cdot\left(\frac{BC}{OB}\right)$$



esto es :

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cdot\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi) \qquad (8_b)$$

y dado que $\cos(-\phi) = \cos(\phi)$, $\operatorname{sen}(-\phi) = \operatorname{sen}(\phi)$, se deduce también que . . .

$$\cos(\theta-\phi) = \cos(\theta)\cdot\cos(\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi) \qquad (8_c)$$

que son las identidades trigonométricas para la suma y la diferencia del coseno de dos ángulos

Las cuatro identidades (8) , (8_a) , (8_b) y (8_c) son muy importantes en la trigonometría porque *a partir de ellas es posible deducir muchas otras identidades* . Por esta razón, es muy recomendable que el lector las memorize para que pueda aplicarlas desde ahora en adelante. Enseguida se enlistan nuevamente con el fin de observar su simetría y similitudes :

$$\operatorname{sen}(\theta+\phi) = \operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\phi) + \cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi)$$
$$\operatorname{sen}(\theta-\phi) = \operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\phi) - \cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi)$$

(signos iguales en ambos miembros)

$$\cos(\theta+\phi) = \cos(\theta)\cdot\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi)$$
$$\cos(\theta-\phi) = \cos(\theta)\cdot\cos(\phi) + \operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi)$$

(signos opuestos en ambos miembros)

Caso especial : si $\theta = \frac{\pi}{2} = 90°$ entonces $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y queda . . .

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\phi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}(\phi) = \cos(\phi)$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\phi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}(\phi) = \cos(\phi)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\phi) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}(\phi) = -\operatorname{sen}(\phi)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(\phi) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}(\phi) = \operatorname{sen}(\phi)$$

es decir :

$$\cos(\phi) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) \quad , \quad \operatorname{sen}(\phi) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right) \quad \text{y} \quad \cot(\phi) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)$$

que se conocen como **identidades de cofunción** para el seno, el coseno y la tangente .

la última de ellas obtenida de : $\cot(\phi) = \dfrac{\cos(\phi)}{\operatorname{sen}(\phi)} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$

Una consecuencia inmediata de las identidades (8) a (8_c) son las expresiones correspondientes para las demás funciones trigonométricas de una suma o una diferencia de ángulos , por ejemplo la identidad para la tangente de una suma de ángulos se obtiene como sigue . . .

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\operatorname{sen}(\theta + \phi)}{\cos(\theta + \phi)} = \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\phi) + \cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi)}{\cos(\theta)\cdot\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi)}$$

al dividir el numerador y el denominador de ésta fracción entre la misma cantidad queda :

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\left(\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\phi) + \cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi)}{\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)}\right)}{\left(\dfrac{\cos(\theta)\cdot\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\phi)}{\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)}\right)} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} + \dfrac{\operatorname{sen}(\phi)}{\cos(\phi)}}{1 - \left(\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right)\cdot\left(\dfrac{\operatorname{sen}(\phi)}{\cos(\phi)}\right)}$$

Aplicando la definición de la función tangente para los ángulos θ y ϕ , finalmente se resulta :

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan(\theta) + \tan(\phi)}{1 - \tan(\theta)\cdot\tan(\phi)} \qquad (9)$$

Por un procedimiento similar, se obtiene la identidad para la tangente de una diferencia de ángulos:

$$\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan(\theta) - \tan(\phi)}{1 + \tan(\theta)\cdot\tan(\phi)} \qquad (9_a)$$

De un modo semejante, es posible comprobar que :

$$\cot(\theta + \phi) = \frac{\cot(\theta)\cdot\cot(\phi) - 1}{\cot(\theta) + \cot(\phi)} \quad \text{o} \quad \cot(\theta - \phi) = \frac{-\cot(\theta)\cdot\cot(\phi) - 1}{\cot(\theta) - \cot(\phi)} \qquad (9_c)$$

etc.

Ahora podemos usar éstas identidades para calcular *el valor exacto de las funciones trigonométricas para una combinación de los ángulos especiales 0º , 18º , 30º , 45º , 60° , 90°* o los que resulten de ellas. Por ejemplo . . .

a) $sen(105°) = sen(60° + 45°) = sen(60°)\cdot cos(45°) + cos(60°)\cdot sen(45°)$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

b) $cos(75°) = cos(30° + 45°) = cos(30°)\cdot cos(45°) - sen(30°)\cdot sen(45°)$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

c) $sen(15^o) = sen(45^o - 30^o) = sen(45^o)\cdot cos(30^o) - cos(45^o)\cdot sen(30^o)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

d) $cos(150°) = cos(90° + 60°) = cos(90°)\cdot cos(60°) - sen(90°)\cdot sen(60°)$

$$= (0)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - (1)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e) $sen(3^o) = sen(18^o - 15^o) = sen(18^o)\cdot cos(15^o) - cos(18^o)\cdot sen(15^o)$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{5}+1}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\cdot\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\cdot\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{2}}\right)$$

f) $tan(27^o) = \dfrac{sen(27^o)}{cos(27^o)} = \dfrac{sen(72^o - 45^o)}{cos(72^o - 45^o)}$

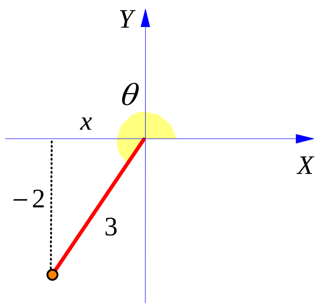
$$= \frac{sen(72^o)\cdot cos(45^o) - cos(72^o)\cdot sen(45^o)}{cos(72^o)\cdot cos(45^o) + sen(72^o)\cdot sen(45^o)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}}}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}} - (\sqrt{5}-1)}{\sqrt{10+2\cdot\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1}$$

etc.

Ejemplo 4. Sin usar calculadora, determinar el valor exacto de $sen(\theta-\omega)$ si se sabe que $sen(\theta)=\frac{-2}{3}$, $cos(\omega)=\frac{\sqrt{5}}{3}$ donde ω es un ángulo en el cuadrante IV y θ está en el cuadrante III.

Solución : a) *Método gráfico*.



Recurriendo a la definición de la función seno :

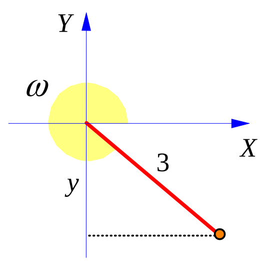
$$sen(\theta)=\frac{(ordenada)}{(radio)}=\frac{y}{r}=\frac{-2}{3}$$

se sigue que $y=-2$, $r=3$, asi que del teorema de Pitágoras, se deduce que :

$$x=\pm\sqrt{r^2-y^2}=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

escogiendose el signo negativo por estar θ en el cuadrante III y por lo tanto

$$cos(\theta)=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$



Similarmente, de la definición de la función coseno :

$$cos(\theta)=\frac{(abscisa)}{(radio)}=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

se sigue que $x=\sqrt{3}$, $r=3$, asi que del teorema de Pitágoras, se deduce que :

$$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}=\pm\sqrt{3^2-(\sqrt{5})^2}=-2$$

escogiendose el signo negativo por estar ω en el cuadrante IV . Por lo tanto

$$sen(\omega)=\frac{y}{r}=\frac{-2}{3}$$

Aplicando ahora la identidad para el seno de una diferencia de ángulos se obtiene . . .

$$sen(\theta-\omega)=sen(\theta)\cdot cos(\omega)-cos(\theta)\cdot sen(\omega)$$

$$=\left(\frac{-2}{3}\right)\cdot\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{4\cdot\sqrt{5}}{9}$$

b) *Método analítico*

De la identidad pitagórica : $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ se sigue que . . .

$$cos(\theta) = \pm\sqrt{1 - sen^2(\theta)} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{9-4}{9}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}$$

escogiendose el signo negativo por ser negativa la función coseno en el cuadrante III.

Similarmente, de $sen^2(\omega) + cos^2(\omega) = 1$ se sigue que . . .

$$sen(\omega) = \pm\sqrt{1 - cos^2(\omega)} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{9-5}{9}} = \frac{-2}{3}$$

escogiéndose el signo negativo por ser negativa la función seno en el cuadrante IV.

Como éstos valores para *sen*(ω) y *cos*(θ) son los mismos que se obtuvieron con el método gráfico, se llega entonces a la misma solución : $sen(\theta - \omega) = \frac{4\cdot\sqrt{5}}{9}$

Ejemplo 5. Demuestre la identidad : $\dfrac{sen(u+v)}{sen(u-v)} = \dfrac{tan(u) + tan(v)}{tan(u) - tan(v)}$

Solución : Recurriendo a las identidades para el seno de la suma y la diferencia de dos ángulos,

queda:

$$\frac{sen(u+v)}{sen(u-v)} = \frac{sen(u)\cdot cos(v) + sen(v)\cdot cos(u)}{sen(u)\cdot cos(v) - sen(v)\cdot cos(u)}$$

dividiendo ahora entre $cos(u)\,cos(v)$ todos los términos, se obtiene . . .

$$\frac{sen(u+v)}{sen(u-v)} = \frac{\left(\dfrac{sen(u)\cdot cos(v)}{cos(u)\,cos(v)}\right) + \left(\dfrac{sen(v)\cdot cos(u)}{cos(u)\,cos(v)}\right)}{\left(\dfrac{sen(u)\cdot cos(v)}{cos(u)\,cos(v)}\right) - \left(\dfrac{sen(v)\cdot cos(u)}{cos(u)\,cos(v)}\right)} = \frac{\left(\dfrac{sen(u)}{cos(u)}\right) + \left(\dfrac{sen(v)}{cos(v)}\right)}{\left(\dfrac{sen(u)}{cos(u)}\right) - \left(\dfrac{sen(v)}{cos(v)}\right)}$$

$$= \frac{tan(u) + tan(v)}{tan(u) - tan(v)}$$

como se pedia demostrar.

2.3 Identidades trigonométricas para ángulos múltiplos :

De las identidades fundamentales para el seno y el coseno de una suma o diferencia de ángulos se pueden derivar otras identidades trigonométricas muy útiles e importantes.

Por ejemplo haciendo $\theta = \phi$ en las identidades de $sen(\theta + \phi)$ y $cos(\theta + \phi)$ se obtiene . . .

$$sen(\theta + \theta) = sen(\theta)\cdot cos(\theta) + sen(\theta)\cdot cos(\theta)$$

es decir, *el seno del doble de un ángulo* es : $sen(2\cdot\theta) = 2\cdot sen(\theta)\cdot cos(\theta)$ (10)

$$cos(\theta + \theta) = cos(\theta)\cdot cos(\theta) - sen(\theta)\cdot sen(\theta)$$

es decir, *el coseno del doble de un ángulo* es : $cos(2\cdot\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$ (10_b)

Si se usa la identidad pitagórica $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$, ésta última identidad también se puede expresar en las siguientes formas equivalentes . . .

$$cos(2\cdot\theta) = cos^2(\theta) - \left[1 - cos^2(\theta)\right] = 2\cdot cos^2(\theta) - 1 \qquad (\ 10_b'\ )$$

y

$$cos(2\cdot\theta) = \left[1 - sen^2(\theta)\right] - sen^2(\theta) = 1 - 2\cdot sen^2(\theta) \qquad (\ 10_b''\ )$$

de las cuales es posible obtener las expresiones :

$$cos(\theta) = \sqrt{\frac{cos(2\cdot\theta) + 1}{2}} \qquad \text{y} \qquad sen(\theta) = \sqrt{\frac{1 - cos(2\cdot\theta)}{2}}$$

que resultan útiles para calcular *el seno y el coseno de la mitad de un ángulo* , reemplazando θ por $\frac{\theta}{2}$:

$$cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + cos(\theta)}{2}} \qquad \text{y} \qquad sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cos(\theta)}{2}} \qquad (\ 11\ )$$

Éstas identidades (10 - 11) *nos permiten conocer todas las demás funciones trigonométricas del doble o de la mitad de un ángulo puesto que del seno y el coseno definen a todas las demás funciones trigonométricas*.

Consideremos por ejemplo la tangente para el doble de un ángulo y para el ángulo mitad . . .

$$\tan(2\cdot\theta) = \frac{\operatorname{sen}(2\cdot\theta)}{\cos(2\cdot\theta)} = \left[\frac{2\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\theta)}{\cos^2\cdot(\theta) - \operatorname{sen}^2\cdot(\theta)}\right] = \frac{\dfrac{2\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\theta)}{\cos^2\cdot(\theta)}}{\dfrac{\cos^2\cdot(\theta)-\operatorname{sen}^2\cdot(\theta)}{\cos^2(\theta)}}$$

$$= \frac{2\cdot\left(\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}\right)}{\left[\dfrac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right] - \left[\dfrac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right]} = \boxed{\frac{2\cdot\tan(\theta)}{1-\tan^2\cdot(\theta)}}$$

Similarmente . . .

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{2}}}{\sqrt{\dfrac{\cos(\theta)+1}{2}}}\right) = \boxed{\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}}$$

Se obtienen expresiones equivalentes para la tangente del ángulo mitad por racionalización de ése radical :

$$= \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1-\cos(\theta)}} = \frac{1-\cos(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\cdot(\theta)}} = \boxed{\frac{1-\cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}}$$

ó también . . .

$$= \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\cdot(\theta)}}{1+\cos(\theta)} = \boxed{\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{1+\cos(\theta)}}$$

Son posibles otras combinaciones, por ejemplo reemplazando θ por $\frac{\theta}{4}$, $\frac{\theta}{3}$, $\frac{3\cdot\theta}{2}$ etc. se obtienen expresiones como :

$$\operatorname{sen}^2\cdot\left(\frac{3\cdot\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(3\cdot\theta)}{2} \qquad \text{o} \qquad \cos\left(\frac{\theta}{6}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right)}{2}}$$

Tambien es posible aplicar las identidades de ángulo doble o de ángulo mitad *de manera recurrente* para obtener las funciones trigonométricas de $4\cdot\theta$, $8\cdot\theta$, $16\cdot\theta$ . . . o de $\frac{\theta}{4}$, $\frac{\theta}{8}$, $\frac{\theta}{16}$, $\frac{\theta}{32}$ . . . por ejemplo . . .

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos(\theta)+1}{2}}$$ *(la identidad para el coseno del ángulo mitad)*

$$\cos\left(\frac{\theta}{4}\right) = \cos\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\cos(\theta)+1}{2}}+1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{2\cdot\cos(\theta)+2}+2}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{8}\right) = \cos\left(\frac{\frac{\theta}{4}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{\cos(\theta)+1}{2}}+1}{2}}+1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2\cdot\cos(\theta)+2}+2}+2}}{2}}$$

etc.

o también . . .

$$\cos(2\cdot\theta) = \left[2\cdot\cos^2\cdot(\theta)\right]-1$$ *(la identidad para el coseno del ángulo doble)*

$$\cos(4\cdot\theta) = \cos\left[2\cdot(2\cdot\theta)\right] = 2\cdot(\cos(2\cdot\theta))^2-1 = 2\cdot\left(2\cdot\cos(\theta)^2-1\right)^2-1$$

$$= \boxed{8\cdot\cos(\theta)^4-8\cdot\cos(\theta)^2+1}$$

$$\cos(8\cdot\theta) = \cos\left[2\cdot(4\cdot\theta)\right] = 2\cdot(\cos(4\cdot\theta))^2-1 = 2\cdot\left(8\cdot\cos(\theta)^4-8\cdot\cos(\theta)^2+1\right)^2-1$$

$$= \boxed{128\cdot\cos(\theta)^8-256\cdot\cos(\theta)^6+160\cdot\cos(\theta)^4-32\cdot\cos(\theta)^2+1}$$

etc.

Ejemplo 6. Determinar los valores exactos de :

a) $\cos(22.5°)$ b) $\cos(11.25°)$ c) $sen(15°)$ d) $sen(7.5°)$

sin usar calculadora, pero sabiendo que : $\cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución : a) Notemos que $22.5° = \frac{45°}{2}$, por lo tanto, usando la identidad para el coseno de ángulo mitad : $cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{cos(\theta)+1}{2}}$ resulta . . .

$$cos(22.5°) = cos\left(\frac{45°}{2}\right) = \sqrt{\frac{cos(45°)+1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}+1}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}$$

b) Notemos que $11.25° = \frac{45°}{4}$, asi que *usando dos veces la identidad para el coseno de ángulo mitad :* $cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{cos(\theta)+1}{2}}$ resulta . . .

$$cos\left(\frac{\theta}{4}\right) = \sqrt{\frac{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{cos(\theta)+1}{2}}+1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2\cdot cos(\theta)+2}+2}}{2}$$

$$cos(11.25°) = cos\left(\frac{45°}{4}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2\cdot cos(45°)+2}+2}}{2} = \frac{\sqrt{\sqrt{\left(2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+2\right)}+2}}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}+2}+2}}{2}}$$

c) Dado que $15° = \frac{30°}{2}$, usando la identidad para el seno de ángulo mitad :

$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\theta)}{2}}$ resulta . . .

$$sen(15°) = sen\left(\frac{30°}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(30°)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

b) Notemos que $7.5° = \frac{30°}{4}$, asi que *aplicando las identidades para el seno y el coseno de ángulo mitad :* $sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\theta)}{2}}$, $cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+cos(\theta)}{2}}$

resulta . . .

$$sen\left(\frac{\theta}{4}\right) = \sqrt{\frac{1 - cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1 + cos(\theta)}{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cdot cos(\theta)}}}{2}$$

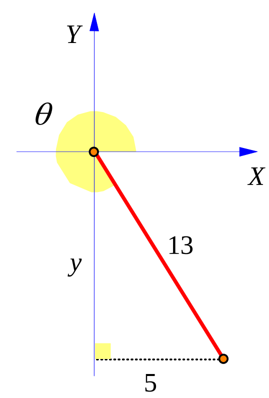
$$sen(7.5°) = sen\left(\frac{30°}{4}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cdot cos(30°)}}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{2}}$$

***Ejemplo* 7.** Calcular : $cos(2\theta)$, $sen(2 \cdot \theta)$, $tan(2 \cdot \theta)$ si se sabe que $cos(\theta) = \frac{5}{13}$ siendo θ un ángulo que se localiza en el cuadrante IV

Solución : Localizando el ángulo en el plano cartesiano y recurriendo a la definición :

$$cos(\theta) = \frac{(abscisa)}{(radio)} = \frac{x}{r} = \frac{5}{13}$$



se deduce que $x = 5$, $r = 13$ y por lo tanto :

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \pm\sqrt{13^2 - 5^2} = -12$$

escogiéndose el signo negativo, dado que θ se localiza en IV cuadrante.

Asi que $sen(\theta) = \frac{-12}{13}$ y $tan(\theta) = \frac{-12}{5}$ y por lo tanto, aplicando las identidades para el doble de un ángulo resulta :

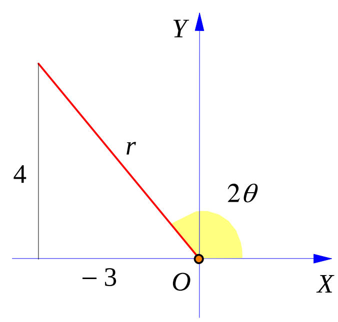
$$sen(2 \cdot \theta) = 2 \cdot sen(\theta) \cdot cos(\theta) = 2 \cdot \left(\frac{-12}{13}\right) \cdot \left(\frac{5}{13}\right) = \boxed{-\left(\frac{120}{169}\right)}$$

$$cos(2 \cdot \theta) = 2 \cdot cos^2 \cdot (\theta) - 1 = 2 \cdot \left(\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = \boxed{-\left(\frac{119}{169}\right)}$$

y $$\tan(2\cdot\theta) = \frac{2\cdot\tan(\theta)}{1-\tan^2\cdot(\theta)} = \frac{2\cdot\frac{-12}{5}}{1-\left(\frac{-12}{5}\right)^2} = \boxed{\frac{120}{119}} = \frac{sen(2\cdot\theta)}{\cos(2\cdot\theta)}$$

Ejemplo 8. Calcular los valores exactos de $\cos(\theta)$ y de $sen(2\cdot\theta)$ si se sabe que $\tan(2\cdot\theta) = \frac{-4}{3}$ para $0 < \theta < 90°$.

Solución : Dado que $0 < \theta < 90°$ es un ángulo en el cuadrante I, entonces $2\cdot\theta$ necesariamente es un ángulo en el cuadrante II .



Recurriendo a la definición :

$$\tan(2\cdot\theta) = \frac{(ordenada)}{(abscisa)} = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

se deduce que $x = -3$, $y = 4$ y por lo tanto :

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$$

(r siempre es positivo). De esto se deduce que. . .

$$sen(2\cdot\theta) = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \qquad \text{y} \qquad \cos(2\cdot\theta) = \frac{-3}{5}$$

y por lo tanto, de la identidad para el coseno de ángulo doble se obtiene . . .

$$\cos(2\cdot\theta) = 2\cdot(\cos(\theta))^2 - 1 \quad \longrightarrow \quad \cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+\cos(2\cdot\theta)}{2}}$$

es decir: $$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{-3}{5}\right)}{2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Asi mismo, de la identidad $sen(\theta) = \sqrt{\frac{1-\cos(2\cdot\theta)}{2}}$ se obtiene . . .

$$sen(\theta) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-3}{5}\right)}{2}} \quad \longrightarrow \quad sen(\theta) = \sqrt{\frac{4}{5}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

Ejemplo 9. Expresar $sen(3\cdot\theta)$ en términos de $sen(\theta)$

Solución : Notemos que $sen(3\cdot\theta) = sen(2\cdot\theta+\theta)$, asi que de la identidad fundamental :

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)\cdot cos(\beta) + sen(\beta)\cdot cos(\alpha)$$

haciendo $\alpha = 2\cdot\theta$ y $\beta = \theta$ se obtiene :

$$sen(3\cdot\theta) = sen(2\cdot\theta)\cdot cos(\theta) + sen(\theta)\cdot cos(2\cdot\theta)$$

substituyendo ahora las identidades para el seno y el coseno de ángulo doble $sen(2\cdot\theta) = 2\cdot sen(\theta)\cdot cos(\theta)$ y $cos(2\cdot\theta) = 1 - 2\cdot sen^2\cdot(\theta)$ resulta :

$$sen(3\cdot\theta) = (2\cdot sen(\theta)\cdot cos(\theta))\cdot cos(\theta) + sen(\theta)\cdot\left[1 - 2\cdot sen^2\cdot(\theta)\right]$$

$$= 2\cdot sen(\theta)\cdot cos^2(\theta) + sen(\theta)\cdot\left[1 - 2\cdot sen^2\cdot(\theta)\right]$$

y usando la identidad pitagórica $cos^2\cdot(\theta) + sen^2(\theta) = 1$ se obtiene . . .

$$= 2\cdot sen(\theta)\cdot\left[1 - sen^2(\theta)\right] + sen(\theta)\cdot\left[1 - 2\cdot sen^2\cdot(\theta)\right]$$

$$= 3\cdot sen(\theta) - 4\cdot sen^3\cdot(\theta)$$

Ejemplo 10. Sin usar calculadora, determinar el valor exacto de las siguientes funciones trigonométricas, mediante una identidad de ángulo mitad .

a) $tan(105°)$ b) $sen(165°)$ c) $cos(157.5°)$

Solución : a) Ya que $tan(105°) = tan\left(\frac{210°}{2}\right)$, de la identidad $tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\theta)}{1+cos(\theta)}}$ se obtiene . . .

$$tan(105°) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(210°)}{1+cos(210°)}} = \pm\sqrt{\frac{1-cos(180°+30°)}{1+cos(180°+30°)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}}$$

y dado que la función $tan(\theta)$ es negativa cuando $90° < \theta < 180°$, se debe escoger el signo negativo, es decir :

$$tan(105°) \;=\; -\boxed{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}}$$

b) Puesto que $sen(165°) = sen\left(\frac{330°}{2}\right)$, de la identidad $sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\theta)}{2}}$ se obtiene . . .

$$sen(165°) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(330°)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-cos(270°+60°)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}}$$

y dado que la función $sen(\theta)$ es positiva cuando $90° < \theta < 180°$, se debe escoger el signo positivo, es decir :

$$sen(165°) \;=\; \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

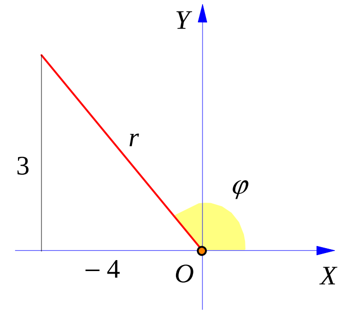
c) Como $cos(157.5°) = cos\left(\frac{315°}{2}\right)$, de la identidad $cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+cos(\theta)}{2}}$ se obtiene . . .

$$cos(157.5°) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(315°)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+cos(270°+45°)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

y dado que la función $cos(\theta)$ es negativa cuando $90° < \theta < 180°$, se debe escoger el signo negativo, es decir :

$$cos(157.5°) \;=\; -\boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

Ejemplo 11. Sin usar calculadora, determinar los valores exactos de $sen\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ y $tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, si $cos(\varphi) = \frac{-4}{3}$ con el ángulo φ comprendido en el intervalo $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$



Solución : Dado que $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ es un ángulo en el cuadrante II, entonces recurriendo a la definición :

$$cot(\varphi) = \frac{(abscisa)}{(ordenada)} = \frac{x}{y} = -\frac{4}{3}$$

se deduce que $x = -4$, $y = 3$ y por lo tanto :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$$

Además, si $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ entonces $\frac{\frac{\pi}{2}}{2} < \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{2}$, es decir el ángulo $\frac{\varphi}{2}$ está en el cuadrante I donde el seno y la tengente son positivos, y

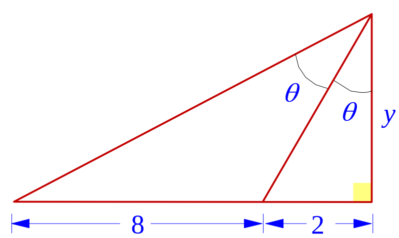
$$sen\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - cos(\varphi)}{2}} \quad ; \quad tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{sen(\varphi)}{1 + cos(\varphi)}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{-4}{5}\right)}{2}} \quad ; \quad = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \left(\frac{-4}{5}\right)}$$

$$= \boxed{\frac{3}{\sqrt{10}}} \quad ; \quad = \boxed{3}$$

Ejemplo 12. Encuentre el valor exacto de y en la figura.

(Sugerencia : use $tan(2\cdot\theta) = \frac{2\cdot tan(\theta)}{1 - tan^2(\theta)}$)



Solución : La definición de la tangente del ángulo $2\cdot\theta$ para al triángulo rectángulo es :

$$tan(2\cdot\theta) = \frac{(lado\_opuesto)}{(lado\_adyacente)} = \frac{8 + 2}{y}$$ y se sigue que . . .

$$y = \frac{8 + 2}{tan(2\cdot\theta)} = \frac{10}{\left[\frac{2\cdot tan(\theta)}{1 - tan^2(\theta)}\right]} = \frac{10\cdot\left[1 - tan^2(\theta)\right]}{2\cdot tan(\theta)}$$

Por otra parte, del triángulo recto de lados 2 y y en la misma figura se tiene que $\tan(\theta) = \frac{2}{y}$, asi que substituyendo en la ecuación anterior resulta . . .

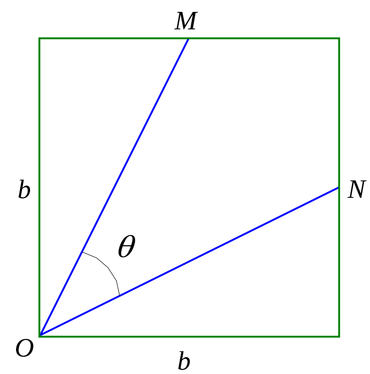
$$y = \frac{10\cdot\left[1-\tan^2(\theta)\right]}{2\cdot\tan(\theta)} = \frac{5\cdot\left[1-\left(\frac{2}{y}\right)^2\right]}{\left(\frac{2}{y}\right)}$$

o simplificando : $y\cdot\left(\frac{2}{y}\right) = 5\cdot\left[1-\left(\frac{2}{y}\right)^2\right]$

$$2 = 5 - \frac{20}{y^2}$$

Resolviendo ésta ecuación para y se obtiene : $y = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{15}$

Ejemplo 13. En la figura de la derecha, *M* y *N* son los puntos medios de los lados de un cuadrado. Encuentre el valor exacto de $\cos(\theta)$.
(*Sugerencia* : use el teorema de Pitágoras y una identidad de ángulo mitad)

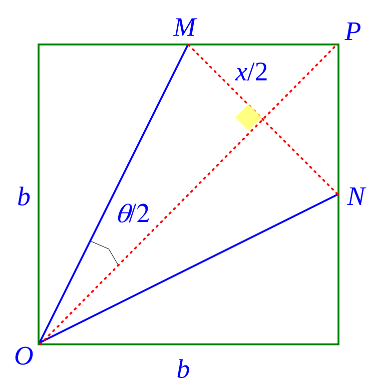


Solución : Por el teorema de Pitágoras, la longitud de cada una de las diagonales OM y ON es :

$$\sqrt{b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot b$$

y además, la longitud x del lado recto MN se calcula del triángulo *MNP* también con el teorema de Pitágoras . . .

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$



Por la simetria de la figura, la diagonal *OP* *(que además es perpendicular a MN)* divide al ángulo θ y al lado x en dos partes iguales, asi que . . .

$$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{OM} = \frac{\left(\frac{b}{2\cdot\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{5}\cdot b}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

y aplicando ahora la identidad $sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-cos(\theta)}{2}}$ se obtiene que . . .

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{1-cos(\theta)}{2}$$

es decir :

$$cos(\theta) = 1 - 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

Ejemplo 14. Demuestre la identidad : $\frac{cos(2\cdot\phi)}{1-sen(2\cdot\phi)} = \frac{1+tan(\phi)}{1-tan(\phi)}$

Solución : Por aplicación directa de las identidades de ángulo doble :

$$\frac{cos(2\cdot\phi)}{1-sen(2\cdot\phi)} = \frac{cos^2(\phi)-sen^2(\phi)}{1-2\cdot sen(\phi)\cdot cos(\phi)}$$

pero también $1 = sen^2(\phi) + cos^2(\phi)$, asi que . . .

$$\frac{cos(2\cdot\phi)}{1-sen(2\cdot\phi)} = \frac{cos^2\cdot(\phi)-sen^2\cdot(\phi)}{cos^2\cdot(\phi)-2\cdot sen(\phi)\cdot cos(\phi)+sen^2(\phi)}$$

y factorizando . . .

$$\frac{cos(2\cdot\phi)}{1-sen(2\cdot\phi)} = \frac{(cos(\phi)-sen(\phi))\cdot(cos(\phi)+sen(\phi))}{(cos(\phi)-sen(\phi))^2}$$

$$= \frac{cos(\phi)+sen(\phi)}{cos(\phi)-sen(\phi)} = \frac{\frac{cos(\phi)+sen(\phi)}{cos(\phi)}}{\frac{cos(\phi)-sen(\phi)}{cos(\phi)}} = \frac{1+\left(\frac{sen(\phi)}{cos(\phi)}\right)}{1-\left(\frac{sen(\phi)}{cos(\phi)}\right)}$$

y queda demostrado.

EJERCICIO II.2

1. Usar las fórmulas de ángulo doble para calcular el seno, el coseno y la tangente del ángulo dado.

   a) $90°$ b) $60°$ c) $2\cdot\frac{\pi}{3}$ d) $120°$ e) $3\cdot\frac{\pi}{2}$

2. Hallar el valor exacto de $sen(2\cdot\phi)$, $cos(2\cdot\phi)$ y $tan(2\cdot\phi)$ dado que :

   a) $sen(\phi) = \frac{3}{5}$; $0° < \phi < 90°$ b) $tan(\phi) = \frac{1}{2}$; $180° < \phi < 270°$

   c) $sec(\phi) = \frac{-5}{2}$; $90° < \phi < 180°$ d) $cot(\phi) = -4$; $270° < \phi < 360°$

3. Usar las fórmulas de ángulo mitad para calcular el seno, el coseno y la tangente del ángulo dado.

   a) 112º 30' b) 67º 30' c) $\frac{\pi}{12}$ d) $105°$ e) 52º 30'

4. Demostar las siguientes identidades:

   a) $sec(2\cdot\theta) = \dfrac{sec^2\cdot(\theta)}{2 - sec^2\cdot(\theta)}$ b) $csc(2\cdot\theta) = \dfrac{csc(\theta)}{2\cdot cos(\theta)}$

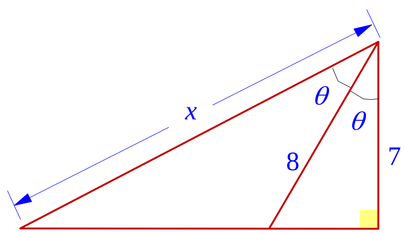
   c) $cos^4\cdot(x) - sen^4\cdot(x) = cos(2\cdot x)$ d) $\dfrac{cos(3\cdot\beta)}{cos(\beta)} = 1 - 4\cdot sen^2\cdot(\beta)$

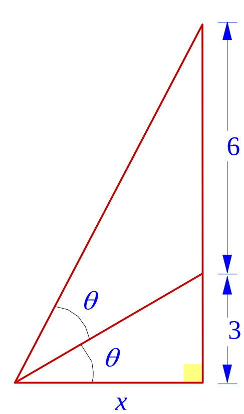
   e) $cot\left(\dfrac{\lambda}{2}\right) = \dfrac{sen(\lambda)}{1 - cos(\lambda)}$ f) $tan\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = csc(\varphi) - cot(\varphi)$

   g) $\dfrac{cos(2\cdot\gamma)}{1 - sen(2\cdot\gamma)} = \dfrac{1 + tan(\gamma)}{1 - tan(\gamma)}$ h) $cos(\alpha) = \dfrac{1 - tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}{1 + tan^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

   i) $2\cdot csc(2\cdot x) = \dfrac{1 + tan^2(x)}{tan(x)}$ j) $\dfrac{1}{1 - sen(\xi)} + \dfrac{1}{1 + sen(\xi)} = 2\cdot sec^2(\xi)$

5. Encuentre el valor exacto de x en los siguientes triángulos

   a) 

   b) 

Respuestas EJERCICIO II.2

1. a) $sen(90°) = sen(2 \times 45°) = 2 \cdot sen(45°) \cdot cos(45°) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

$$cos(90°) = cos(2 \times 45°) = (cos(45°))^2 - (sen(45°))^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

$$tan(90°) = tan(2 \times 45°) = \frac{2 \cdot tan(45°)}{1 - tan(45°)^2} = \frac{(2)\cdot(1)}{1-1} = \infty$$

b) $sen(60°) = sen(2 \times 30°) = 2 \cdot sen(30°) \cdot cos(30°) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$cos(60°) = cos(2 \times 30°) = (cos(30°))^2 - (sen(30°))^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$tan(60°) = tan(2 \times 30°) = \frac{2 \cdot tan(30°)}{1 - (tan(30°))^2} = \frac{(2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$$

c) $sen\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$cos\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 - \left(sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$tan\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 \cdot tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 - \left(tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2} = \frac{(2)\cdot(\sqrt{3})}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{(2)\cdot(\sqrt{3})}{1-3} = -\sqrt{3}$$

etc.

2.

	a)	b)	c)	d)
$sen(2 \cdot \phi)$	$\frac{24}{25}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4\cdot\sqrt{21}}{25}$	$\frac{-8}{17}$
$cos(2 \cdot \phi)$	$\frac{7}{25}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-17}{25}$	$\frac{15}{17}$
$tan(2 \cdot \phi)$	$\frac{24}{7}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4\cdot\sqrt{21}}{17}$	$\frac{-8}{15}$

3.

a) $$sen(112.5°) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(2\times 112.5°)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-cos(225°)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-(-cos(45°))}{2}} = +\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$cos(112.5°) = \pm\sqrt{\frac{1+cos(2\times 112.5°)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+cos(225°)}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1+(-cos(45°))}{2}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$tan(112.5°) = \pm\sqrt{\frac{1-cos(2\times 112.5°)}{1+cos(2\times 112.5\cdot°)}} = \pm\sqrt{\frac{1-cos(225°)}{1+cos(225°)}} = \pm\sqrt{\frac{1+cos(45°)}{1-cos(45°)}} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$$

etc. *Se resumen enseguida todos los demás resultados :*

ϕ	$112.5°$	$67.5°$	$\frac{\pi}{12}$	$105°$	$52.5°$
$sen(\phi)$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}$
$cos(\phi)$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{2}$
$tan(\phi)$	$-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}}$

4.

a) $$sec(2\cdot\theta) = \frac{1}{cos(2\cdot\theta)} = \frac{1}{2\cdot cos^2(\theta)-1} = \frac{\frac{1}{cos^2(\theta)}}{\frac{2\cdot cos^2(\theta)-1}{cos^2(\theta)}} = \frac{sec^2(\theta)}{2-sec^2(\theta)}$$

b) $$csc(2\cdot\theta) = \frac{1}{sen(2\cdot\theta)} = \frac{1}{2\cdot sen(\theta)\cdot cos(\theta)} = \frac{\frac{1}{sen(\theta)}}{\frac{2\cdot sen(\theta)\cdot cos(\theta)}{sen(\theta)}} = \frac{csc(\theta)}{2\cdot cos(\theta)}$$

c) $$cos^4\cdot(x) - sen^4\cdot(x) = \left[cos^2\cdot(x) - sen^2\cdot(x)\right]\cdot\left[cos^2\cdot(x) + sen^2\cdot(x)\right]$$
$$= \left[cos^2\cdot(x) - sen^2\cdot(x)\right]\cdot(1) = cos(2\cdot x)$$

d) $$\frac{cos(3\cdot\beta)}{cos(\beta)} = \frac{cos(2\cdot\beta+\beta)}{cos(\beta)} = \frac{cos(2\cdot\beta)\,cos(\beta) - sen(2\cdot\beta)\cdot sen(\beta)}{cos(\beta)}$$
$$= cos(2\cdot\beta) - \frac{(2\cdot sen(\beta)\cdot cos(\beta))\cdot sen(\beta)}{cos(\beta)} = cos(2\cdot\beta) - 2\cdot sen^2(\beta)$$
$$= \left[1 - 2\cdot sen^2(\beta)\right] - 2\cdot sen^2(\beta) = 1 - 4\cdot sen^2(\beta)$$

e) $$\cot\left(\frac{\lambda}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{1+\cos(\lambda)}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos(\lambda)}{2}}}=\sqrt{\frac{1+\cos(\lambda)}{1-\cos(\lambda)}}=\sqrt{\frac{1+\cos(\lambda)}{1-\cos(\lambda)}\cdot\left(\frac{1-\cos(\lambda)}{1-\cos(\lambda)}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\cos^2(\lambda)}}{1-\cos(\lambda)}=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\lambda)}}{1-\cos(\lambda)}=\boxed{\frac{\operatorname{sen}(\lambda)}{1-\cos(\lambda)}}$$

f) $$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{1-\cos(\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)}=\frac{1}{\operatorname{sen}(\varphi)}-\frac{\cos(\varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi)}=\boxed{\csc(\varphi)-\cot(\varphi)}$$

g) $$\frac{\cos(2\cdot\gamma)}{1-\operatorname{sen}(2\cdot\gamma)}=\frac{\cos^2\cdot(\gamma)-\operatorname{sen}^2\cdot(\gamma)}{\left[\operatorname{sen}^2\cdot(\gamma)+\cos^2\cdot(\gamma)\right]-2\cdot\operatorname{sen}(\gamma)\cdot\cos(\gamma)}$$

$$=\frac{(\cos(\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma))\cdot(\cos(\gamma)-\operatorname{sen}(\gamma))}{(\cos(\gamma)-\operatorname{sen}(\gamma))^2}=\frac{\cos(\gamma)+\operatorname{sen}(\gamma)}{\cos(\gamma)-\operatorname{sen}(\gamma)}=\frac{1+\frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\cos(\gamma)}}{1-\frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{\cos(\gamma)}}$$

$$=\boxed{\frac{1+\tan(\gamma)}{1-\tan(\gamma)}}$$

h) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$; $\tan^2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$; *despejando* $\cos(\alpha)$, *se obtiene* : $\boxed{\cos(\alpha)=\frac{1-\tan^2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\cdot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$

i) $$2\cdot\csc(2\cdot x)=2\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}(2\cdot x)}=\frac{2}{2\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}=\frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x)}{\cos^2(x)}}=\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)}=\boxed{\frac{1+\tan^2(x)}{\tan(x)}}$$

j) $$\frac{1}{1-\operatorname{sen}(\xi)}+\frac{1}{1+\operatorname{sen}(\xi)}=\frac{(1+\operatorname{sen}(\xi))+(1-\operatorname{sen}(\xi))}{1-\operatorname{sen}^2(\xi)}=\frac{2}{\cos^2(\xi)}=\boxed{2\cdot\sec^2(\xi)}$$

5. a) $\frac{224}{17}$ b) $3\cdot\sqrt{3}$

2.4 Identidades producto-suma :

Recordemos que de las identidades fundamentales del seno o el coseno para la suma o diferencia de dos ángulos se pueden derivar muchas otras identidades trigonométricas .
Asi por ejemplo, si se suman algebráicamente un par de éstas identidades, es posible obtener nuevas identidades que relacionan el producto con la suma de funciones trigonométricas o viceversa, las cuales resultan ser muy útiles para resolver problemas en áreas como el Cálculo Diferencial e Integral o la Física.

Sumando por ejemplo las identidades para $sen(\theta+\phi)$ y $sen(\theta-\phi)$ se obtiene . . .

$$\begin{array}{rl} & sen(\theta+\phi) = sen(\theta)\cdot cos(\phi) + sen(\phi)\cdot cos(\theta) \\ + & sen(\theta-\phi) = sen(\theta)\cdot cos(\phi) - sen(\phi)\cdot cos(\theta) \\ \hline \end{array}$$

$$sen(\theta+\phi) + sen(\theta-\phi) = 2\cdot sen(\theta)\cdot cos(\phi)$$

de donde es posible escribir que :

$$sen(\theta)\cdot cos(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(sen(\theta+\phi) + sen(\theta-\phi)\right) \qquad (12)$$

O restando por ejemplo $cos(\theta+\phi)$ de $cos(\theta-\phi)$ se obtiene . . .

$$\begin{array}{rl} & cos(\theta-\phi) = cos(\theta)\cdot cos(\phi) + sen(\phi)\cdot sen(\theta) \\ - & cos(\theta+\phi) = -cos(\theta)\cdot cos(\phi) + sen(\phi)\cdot sen(\theta) \\ \hline \end{array}$$

$$cos(\theta-\phi) - cos(\theta+\phi) = 2\cdot sen(\theta)\cdot sen(\phi)$$

de donde resulta que :

$$sen(\theta)\cdot sen(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(cos(\theta-\phi) - cos(\theta+\phi)\right) \qquad (12_a)$$

De manera similar, al sumar o restar las identidades apropiadas para el seno o el coseno de una suma o diferencia de ángulos, *se pueden obtener otras dos identidades producto-suma* :

$$cos(\theta)\cdot cos(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(cos(\theta+\phi) + cos(\theta-\phi)\right) \qquad (12_b)$$

$$cos(\theta)\cdot sen(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(sen(\theta+\phi) - sen(\theta-\phi)\right) \qquad (12_c)$$

No es indispensable que usted memorice las expresiones de éstas identidades, sólo recuerde que se deducen sumando o restando las identidades trigonométricas fundamentales y sea capaz de deducirlas.

Note que en éstas 4 identidades:

- *los productos de senos o cosenos son una suma o diferencia de cosenos*
- *los productos de seno por coseno son una suma o diferencia de senos*

Nótese también que haciendo $\theta = \phi$ en las identidades anteriores, se obtienen las ya conocidas expresiones:

$$sen(\theta)\cdot cos(\theta) = \frac{1}{2}\cdot sen(2\cdot\theta) \qquad \text{y} \qquad cos^2\cdot(\theta) = \frac{cos(2\cdot\theta)+1}{2}$$

Ejemplo 15. Escribir el producto $cos(5\cdot\varphi)\cdot cos(3\cdot\varphi)$ como una suma o una diferencia

Solución : Por aplicación directa de la identidad producto-suma (12_b) resulta :

$$cos(5\cdot\phi)\cdot cos(3\cdot\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\left(cos(5\cdot\varphi+3\cdot\varphi)+cos(5\cdot\varphi-3\cdot\varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(cos(8\cdot\varphi)+cos(2\cdot\varphi)\right)$$

Ejemplo 16. Evalúe de manera exacta el producto $cos(105°)\cdot sen(45°)$

Solución : Si en la identidad producto-suma :

$cos(\theta)\cdot sen(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(sen(\theta+\phi)-sen(\theta-\phi)\right)$ se substituyen $\theta = 105°$, $\phi = 45°$ queda :

$$cos(105°)\cdot sen(45°) = \frac{1}{2}\cdot(sen(105°+45°)-sen(105°-45°))$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(sen(180°-30°)-sen(60°\ )$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(sen(30°)-sen(60°)) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

O también de : $sen(\theta)\cdot cos(\phi) = \frac{1}{2}\cdot(sen(\theta+\phi) + sen(\theta-\phi))$,

substituyendo $\theta = 45°$, $\phi = 105°$ queda :

$$cos(105°)\cdot sen(45°) = \frac{1}{2}\cdot(sen(45\cdot° + 105\cdot°) + sen(45\cdot° - 105\cdot°))$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(sen(180° - 30°) + sen(-60°\ )$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(sen(30°) - sen(60°)) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$$

el mismo resultado.

Ejemplo 17. Exprese el producto $cos(x)\cdot cos(y)\cdot cos(z)$ como una suma

Solución : Usemos la identidad para el producto de cosenos :

$$cos(x)\cdot cos(y)\cdot cos(z) = cos(x)\cdot(cos(y)\cdot cos(z))$$

$$= cos(x)\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot(cos(y+z) + cos(y-z))\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(cos(x)\cdot cos(y+z) + cos(x)\cdot cos(y-z))$$

pero estos también son productos de cosenos, que se pueden expresar como una suma o diferencia de cosenos . . .

$$= \frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\cdot[\ cos[x+(y+z)] + cos[x-(y+z)]\ ]\ ... \\ +\frac{1}{2}\cdot[\ cos[x+(y-z)] + cos[x-(y-z)]\ ]\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot(cos(x+y+z) + cos(x-y-z) + cos(x+y-z) + cos(x-y+z))$$

y como $cos(-\theta) = cos(\theta)$, para cualquier valor de θ , también es posible escribir :

$$= \frac{1}{4}\cdot(cos(x+y+z) + cos(-x+y+z) + cos(x+y-z) + cos(x-y+z))$$

2.5 Identidades suma-producto :

A partir de las identidades producto-suma, es posible transformar una suma de funciones trigonométricas como un producto.

Al substituir : $(\theta + \phi) = x$ es decir : $\theta = \dfrac{x+y}{2}$

$(\theta - \phi) = y$ $\phi = \dfrac{x-y}{2}$

en las 4 identidades (12) , (12_a) , (12_b) y (12_c) resultan las *identidades suma-producto* .

Asi por ejemplo, de (12) : $sen(\theta)\cdot cos(\phi) = \frac{1}{2}\cdot(sen(\theta+\phi) + sen(\theta-\phi))$ queda . . .

$$sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[sen\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)+\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] + sen\left[\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(sen\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) + sen\left(\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(sen(x) + sen(y))$$

esto es :

$$sen(x) + sen(y) = 2\cdot sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (13)$$

y de una manera similar, de (12_a) , (12_b) y (12_c) resultan . . .

$$sen(x) - sen(y) = 2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (13_a)$$

$$cos(x) + cos(y) = 2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (13_b)$$

$$cos(x) - cos(y) = -2\cdot sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad (13_c)$$

Note que :

- *solo se suman o restan senos con senos o cosenos con cosenos*
- *una suma o diferencia de senos es un producto de seno y coseno*
- *una suma o diferencia de cosenos es un producto de senos o de cosenos*

Ejemplo 18. Escribir la diferencia $\cos(5\cdot\varphi) - \cos(3\cdot\varphi)$ como un producto

Solución : Por aplicación directa de la identidad suma-producto (13_c) resulta :

$$\cos(5\cdot\varphi) - \cos(3\cdot\varphi) = -2\cdot\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5\cdot\varphi + 3\cdot\varphi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{5\cdot\varphi - 3\cdot\varphi}{2}\right)\right)$$

$$= -2\cdot\operatorname{sen}(4\cdot\varphi)\cdot\operatorname{sen}(\varphi)$$

Ejemplo 19. Evalúe de manera exacta la suma : $\operatorname{sen}(15°) + \operatorname{sen}(45°)$ sin usar calculadora

Solución : Si en la identidad suma-producto : $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

se substituyen $x = 15°$, $y = 45°$ queda :

$$\operatorname{sen}(15°) + \operatorname{sen}(45°) = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{15° + 45°}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{15° - 45°}{2}\right)$$

$$= 2\cdot\operatorname{sen}(30°)\cdot\cos(-15°) = 2\cdot\operatorname{sen}(30°)\cdot\cos(15°)$$

y usando la identidad para el coseno de ángulo mitad se obtiene . . .

$$\operatorname{sen}(15°) + \operatorname{sen}(45°) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{\cos(30°) + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2}$$

Ejemplo 20. Expresar como un producto las expresiones :

a) $3\cdot(\operatorname{sen}(3\cdot x) - \operatorname{sen}(5\cdot x))$ b) $\cos(195°) + \cos(105°)$

Solución : a) De la identidad suma-producto : $\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(\phi) = 2\cdot\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$

se obtiene . . .

$$3\cdot(\operatorname{sen}(3\cdot x) - \operatorname{sen}(5\cdot x)) = 3\cdot\left(2\cdot\cos\left(\frac{3\cdot x + 5\cdot x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{3\cdot x - 5\cdot x}{2}\right)\right)$$

$$= 6\cdot cos(4\cdot x)\cdot sen(-x) = -6\cdot cos(4\cdot x)\cdot sen(x)$$

se ha usando la propiedad para el coseno de ángulo mitad se obtiene . . .

b) De la identidad (13_b) , haciendo $x = 195°$, $y = 105°$ queda :

$$cos(195º) + cos(105º) = 2\cdot cos\left(\frac{195º + 105º}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{195º - 105º}{2}\right)$$

$$= 2\cdot cos(150º)\cdot cos(45º) = 2\cdot(-cos(30º))\cdot cos(45º)$$

$$= -2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ejemplo 21. Verificar las siguientes identidades :

a) $\dfrac{sen(t) + sen(3\cdot t)}{cos(t) + cos(3\cdot t)} = tan(2\cdot t)$ b) $\dfrac{sen(6\cdot t) + sen(2\cdot t)}{sen(2\cdot t)\cdot\left[cos^2\cdot(2\cdot t)\right]} = 4$

Solución : Expresamos las sumas de senos y cosenos como productos . . .

a) $$\frac{sen(t) + sen(3\cdot t)}{cos(t) + cos(3\cdot t)} = \frac{2\cdot sen\left(\frac{3\cdot t + t}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{3\cdot t - t}{2}\right)}{2\cdot cos\left(\frac{3\cdot t + t}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{3\cdot t - t}{2}\right)} = \frac{sen(2\cdot t)}{cos(2\cdot t)} = tan(2\cdot t)$$

y en efecto, la identidad es verdadera.

b) $$\frac{sen(6\cdot t) + sen(2\cdot t)}{sen(2\cdot t)\cdot\left[cos^2\cdot(2\cdot t)\right]} = \frac{2\cdot sen\left(\frac{6\cdot t + 2\cdot t}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{6\cdot t - 2\cdot t}{2}\right)}{sen(2\cdot t)\cdot cos^2\cdot(2\cdot t)} = \frac{2\cdot sen(4\cdot t)\cdot cos(2\cdot t)}{sen(2\cdot t)\cdot cos^2\cdot(2\cdot t)}$$

usando ahora la identidad del seno de ángulo doble queda . . .

$$\frac{sen(6\cdot t) + sen(2\cdot t)}{sen(2\cdot t)\cdot\left[cos^2\cdot(2\cdot t)\right]} = \frac{2\cdot(2\cdot sen(2\cdot t)\cdot cos(2\cdot t))\cdot cos(2\cdot t)}{sen(2\cdot t)\cdot cos^2\cdot(2\cdot t)} = 4$$

la identidad es verdadera.

Para facilitar la memorización de las principales identidades trigonométricas que hemos obtenido, se resumen enseguida . Pero si su memoria no es muy buena, recuerde que siempre puede derivar casi todas las demás identidades a partir de las fundamentales .

IDENTIDADES	FORMA DESARROLLADA
Pitagóricas	$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ $tan^2(\theta) + 1 = sec^2(\theta)$ $1 + cot^2(\theta) = csc^2(\theta)$
Fundamentales	$sen(\theta+\phi) = sen(\theta)\,cos(\phi) + sen(\phi)\cdot cos(\theta)$ $sen(\theta-\phi) = sen(\theta)\cdot cos(\phi) - sen(\phi)\cdot cos(\theta)$ $cos(\theta+\phi) = cos(\theta)\cdot cos(\phi) - sen(\phi)\cdot sen(\theta)$ $cos(\theta-\phi) = cos(\theta)\cdot cos(\phi) + sen(\phi)\cdot sen(\theta)$
Ángulo doble	$sen(2\cdot\theta) = 2\cdot sen(\theta)\cdot cos(\theta)$ $cos(2\cdot\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta) = 1 - 2\cdot sen^2(\theta)$ $= 2\cdot cos^2(\theta) - 1$ $tan(2\cdot\theta) = \dfrac{2\cdot tan(\theta)}{1 - tan^2(\theta)}$
Ángulo mitad	$sen\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-cos(\theta)}{2}}$ $cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+cos(\theta)}{2}}$ $tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-cos(\theta)}{1+cos(\theta)}} = \dfrac{1-cos(\theta)}{sen(\theta)} = \dfrac{sen(\theta)}{1+cos(\theta)}$
Suma-Producto	$sen(\theta) + sen(\phi) = 2\cdot sen\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cdot cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$ $cos(\theta) + cos(\phi) = 2\cdot cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cdot cos\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$ $cos(\theta) - cos(\phi) = -2\cdot sen\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cdot sen\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$ $sen(\theta) - sen(\phi) = 2\cdot cos\left(\dfrac{\theta+\phi}{2}\right)\cdot sen\left(\dfrac{\theta-\phi}{2}\right)$

Producto-Suma

$$sen(\theta)\cdot cos(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(sen(\theta+\phi) + sen(\theta-\phi)\right)$$

$$sen(\theta)\cdot sen(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(cos(\theta-\phi) - cos(\theta+\phi)\right)$$

$$cos(\theta)\cdot cos(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(cos(\theta-\phi) + cos(\theta+\phi)\right)$$

$$cos(\theta)\cdot sen(\phi) = \frac{1}{2}\cdot\left(sen(\theta+\phi) - sen(\theta-\phi)\right)$$

EJERCICIO II.3

1. Reescribir los siguientes productos como sumas :

a) $6\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ b) $cos(2\cdot\theta)\cdot cos(4\cdot\theta)$ c) $cos(\theta-\pi)\cdot sen(\theta+\pi)$

2. Reescribir las siguientes sumas como productos :

a) $cos\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ b) $cos(6\cdot x) + cos(2\cdot x)$ c) $sen(\alpha+\beta) - sen(\alpha-\beta)$

d) $sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + sen\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ e) $cos\left(2\cdot x-\frac{\pi}{2}\right) - cos\left(2\cdot x+\frac{\pi}{2}\right)$

3. Verificar las siguientes identidades :

a) $\dfrac{cos(4\cdot x) + cos(2\cdot x)}{sen(4\cdot x) + sen(2\cdot x)} = cot(3\cdot x)$ b) $\dfrac{sen(x) - sen(y)}{cos(x) + cos(y)} = tan\left(\frac{x-y}{2}\right)$

c) $\dfrac{sen(x) + sen(y)}{sen(x) - sen(y)} = \dfrac{tan\left(\frac{x+y}{2}\right)}{tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$ d) $\dfrac{sen(6\cdot t) - sen(2\cdot t)}{cos(2\cdot t) + cos(6\cdot t)} = tan(2\cdot t)$

e) $\dfrac{cos(x) + cos(y)}{sen(x) - sen(y)} = cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ f) $\dfrac{cos(x) + cos(y)}{cos(x) - cos(y)} = -cot\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$

4. Evalúe de manera exacta las siguientes expresiones usando una identidad adecuada.

a) $sen(195°)\cdot cos(75°)$ b) $cos(75°)\cdot sen(15°)$ c) $sen(105°)\cdot cos(165°)$

d) $cos(285°) + cos(195°)$ e) $sen(195°) + sen(105°)$ f) $cos(15°) - cos(105°)$

g) $cos(15°)\cdot cos(75°)$ h) $sen(75°) - sen(165°)$

Respuestas *EJERCICIO* II.3

1. a) $6\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\cdot\left(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) + sen(0)\right) = 3\cdot(1+0) = 3$

b) $\frac{1}{2}\cdot\left(cos(2\cdot\theta - 4\cdot\theta) + cos(2\cdot\theta + 4\cdot\theta)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(cos(-2\cdot\theta) + cos(6\theta)\right) = \frac{cos(2\cdot\theta) + cos(6\theta)}{2}$

c) $\frac{1}{2}\cdot\left[sen[\theta - \pi + (\theta+\pi)] - sen[\theta - \pi - (\theta+\pi)]\right] = \frac{sen(2\cdot\theta) + sen(2\cdot\pi)}{2} = \frac{sen(2\cdot\theta)}{2}$

2. a) $-2\cdot sen\left(\frac{\frac{3\cdot\pi}{4}+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\frac{3\cdot\pi}{4}-\frac{\pi}{4}}{2}\right) = -2\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

b) $2\cdot cos\left(\frac{6\cdot x + 2\cdot x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{6\cdot x - 2\cdot x}{2}\right) = 2\cdot cos(4\cdot x)\cdot cos(2\cdot x)$

c) $2\cdot cos\left[\frac{\alpha+\beta+(\alpha-\beta)}{2}\right]\cdot sen\left[\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2}\right] = 2\cdot cos(\alpha)\cdot sen(\beta)$

d) $2\cdot sen\left[\frac{x+\frac{\pi}{2}+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right]\cdot cos\left[\frac{x+\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right] = 2\cdot sen(x)\cdot cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

e) $2\cdot sen(2\cdot x) = 4\cdot sin(x)\cdot cos(x)$

3.

a) $$\frac{cos(4\cdot x)+cos(2\cdot x)}{sen(4\cdot x)+sen(2\cdot x)} = \frac{2\cdot cos\left(\frac{4\cdot x+2\cdot x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{4\cdot x-2\cdot x}{2}\right)}{2\cdot sen\left(\frac{4\cdot x+2\cdot x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{4\cdot x-2\cdot x}{2}\right)} = \frac{cos(3\cdot x)\cdot cos(x)}{sen(3\cdot x)\cdot cos(x)} = cot(3\cdot x)$$

b) $$\frac{sen(x)-sen(y)}{cos(x)+cos(y)} = \frac{2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}{cos\left(\frac{x-y}{2}\right)} = tan\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

c) $$\frac{sen(x)+sen(y)}{sen(x)-sen(y)} = \frac{2\cdot sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{sen\left(\frac{x+y}{2}\right)}{cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\frac{sen\left(\frac{x-y}{2}\right)}{cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}} = \frac{tan\left(\frac{x+y}{2}\right)}{tan\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

d) $$\frac{sen(6\cdot t)-sen(2\cdot t)}{cos(2\cdot t)+cos(6\cdot t)} = \frac{2\cdot cos\left(\frac{6\cdot t+2\cdot t}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{6\cdot t-2\cdot t}{2}\right)}{2\cdot cos\left(\frac{6\cdot t+2\cdot t}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{6\cdot t-2\cdot t}{2}\right)} = \frac{cos(4\cdot t)\cdot sen(2\cdot t)}{cos(4\cdot t)\cdot cos(2\cdot t)} = tan(2\cdot t)$$

e) $$\frac{cos(x)+cos(y)}{sen(x)-sen(y)} = \frac{2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{sen\left(\frac{x-y}{2}\right)} = cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

f) $$\frac{cos(x)+cos(y)}{cos(x)-cos(y)} = \frac{2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{-2\cdot sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{x-y}{2}\right)} = -cot\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

4. a) $$\frac{1}{2}\cdot(sen(195°+75°)+sen(195°-75°)) = \frac{sen(270°)+sen(120°)}{2} = \frac{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{-2+\sqrt{3}}{4}$$

b) $$\frac{1}{2}\cdot(sen(75°+15°)-sen(75°-15°)) = \frac{sen(90°)-sen(60°)}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

c) $\frac{1}{2}\cdot(sen(105° + 165°) + sen(105° - 165°)) = \frac{sen(270°) + sen(-60°)}{2} = \frac{-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \boxed{\frac{-2-\sqrt{3}}{4}}$

d) $2\cdot cos\left(\frac{285° + 195°}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{285° - 195°}{2}\right) = 2\cdot cos(240°)\cdot cos(45°) = 2\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}}$

e) $2\cdot sen\left(\frac{195° + 105°}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{195° - 105°}{2}\right) = 2\cdot sen(150°)\cdot cos(45°) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

f) $-2\cdot sen\left(\frac{15° + 105°}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{15° - 105°}{2}\right) = -2\cdot sen(60°)\cdot sen(-45°) = -2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

g) $\frac{1}{2}\cdot(cos(15° - 75°) + cos(15° + 75°)) = \frac{cos(-60°) + cos(90°)}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 0}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

h) $2\cdot cos\left(\frac{75° + 165°}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{75° - 165°}{2}\right) = 2\cdot cos(120°)\cdot sen(-45°) = 2\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

2.6 Ecuaciones trigonométricas :

Cualquier identidad trigonométrica *es una igualdad incondicional* , dado que se satisface siempre para cualquiera que sea el valor que se substituya en las variables de la identidad. Es decir, una identidad simplemente establece la igualdad de una expresión trigonométrica escrita en dos o más formas diferentes pero equivalentes, por ejemplo las identiddes :

$$cos(\theta) + cos(\varphi) = 2 \cdot cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)$$

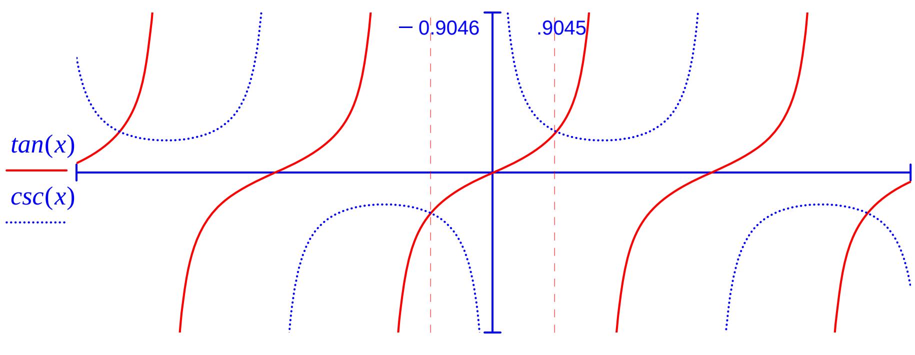
$$cos(2 \cdot \theta) = \left[cos^2 \cdot (\theta) - sen^2 \cdot (\theta)\right] = \left[2 \cdot cos^2 \cdot (\theta) - 1\right] = \left[1 - 2 \cdot sen^2(\theta)\right]$$

se satisfacen siempre para cualesquiera que sean los valores dados a las variables θ y φ .

A diferencia de las identidades, una ecuación trigonométrica *es una igualdad condicional* entre dos expresiones trigonométricas diferentes que *se satisface solo para algunos valores* de las variables de la ecuación. Por ejemplo :

$$tan(x) = csc(x)$$

se cumple solo para algunos valores de la variable x, como se puede observar en los puntos de intersección de gráficas independientes del miembro izquierdo: $y = tan(x)$ y del miembro derecho: $y = csc(x)$ de esta ecuación:



Estas gráficas se cortan en muchos puntos . En la figura se indican las abscisas x de dos de ellos.

Resolver una ecuación trigonométrica significa determinar los valores de las variables que hacen que ambos miembros de la igualdad condicional valgan lo mismo .

Para resolver algebráicamente las ecuaciones trigonométricas, es frecuente que se recurra al uso de las identidades, a los productos notables y la factorización del álgebra ; aunque algunas veces no es posible resolverlas en forma exacta y en ese caso es necesario emplear un procedimiento gráfico para obtener una solución aproximada, tal como se muestra en el ejemplo de arriba.

Para resolver una ecuación trigonométrica en forma algebráica, se sugiere usar el siguiente procedimiento :

1. ***Considerar como variable a una función trigonométrica en particular y despejarla de la ecuación trigonométrica.*** (*Usar las identidades trigonométricas y manipulaciones algebráicas como factorización, separación de fracciones, combinación de términos etc.*)
2. ***Despejar la variable de la expresión obtenida para la función trigonométrica en el paso anterior para un intervalo de longitud 2π (o π según la periodicidad) y comprobar las soluciones en la ecuación inicial***
3. ***Usar la periodicidad de las funciones trigonométricas para sumar a las soluciones anteriores múltiplos de un periodo (π o 2π)***

Ejemplo 22. Hallar la solución de la ecuación : $cot(x) \cdot cos^2(x) = 2 \cdot cot(x)$

Solución : *paso # 1 :* Usando $cot(x) = \dfrac{cos(x)}{sen(x)}$, la ecuación trigonométrica queda :

$$\left(\frac{cos(x)}{sen(x)}\right) \cdot cos^2(x) = 2 \cdot \frac{cos(x)}{sen(x)}$$ es decir : $cos^3(x) - 2 \cdot cos(x) = 0$

Considerando como variable a la función coseno y factorizando resulta :

$$cos(x) \cdot \left[cos^2(x) - 2\right] = 0$$

paso # 2 : Se deduce asi que alguno de éstos dos factores es cero, es decir . . .

i) $cos(x) = 0$

pero en un intervalo de un periodo [0, 2π] el coseno vale cero si $x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3 \cdot \pi}{2}$

O también : ii) $cos^2(x) - 2 = 0$ es decir $cos(x) = \pm\sqrt{2}$

que no es un valor permitido para el coseno, puesto que $-1 \le cos(x) \le 1$.

paso # 3 : El coseno es una función periódica de periodo $2 \cdot \pi$, asi que la solución más general de esta ecuación trigonométrica está dada por :

$$x = \begin{bmatrix} \dfrac{\pi}{2} + n \cdot (2 \cdot \pi) \\ \dfrac{3 \cdot \pi}{2} + n \cdot (2 \cdot \pi) \end{bmatrix}$$

(siendo n un entero)

Ejemplo 23. Hallar la solución de la ecuación : $2\cdot sen^2\cdot(x) - sen(x) - 1 = 0$

Solución : *paso # 1 :* Considérese como variable a la función seno, asi que factorizando la ecuación queda :

$$(2\cdot sen(x) + 1)\cdot(sen(x) - 1) = 0$$

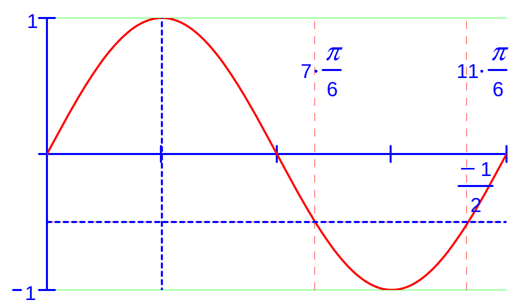
de modo que alguno de éstos dos factores debe ser cero, es decir . . .

paso # 2 :

i) $2\cdot sen(x) + 1 = 0$

$$sen(x) = \frac{-1}{2}$$

pero en un periodo [0, 2π] el seno vale $\frac{-1}{2}$ si $x = \frac{7\cdot\pi}{6}, \frac{11\cdot\pi}{6}$, como se puede ver en su gráfica



O también :

ii) $sen(x) - 1 = 0$ es decir : $sen(x) = 1$

que en el intervalo de un periodo [0, 2π] vale 1 solo si $x = \frac{\pi}{2}$

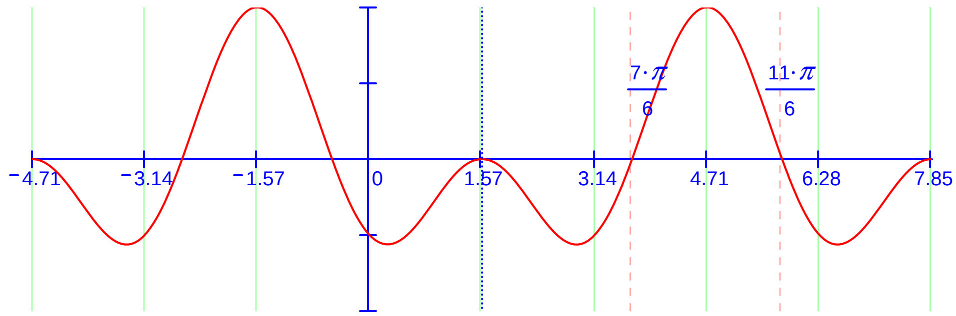
Es fácil *comprobar* que las tres soluciones encontradas, $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\cdot\pi}{6}, \frac{11\cdot\pi}{6}$ en efecto satisfacen la ecuación inicial $2\cdot sen^2\cdot(x) - sen(x) - 1 = 0$

paso # 3 : La función seno tiene un periodo de $2\cdot\pi$, asi que la solución más general de la ecuación trigonométrica está dada por :

$$x = \begin{pmatrix} \frac{7\cdot\pi}{6} + 2n\cdot\pi \\ \frac{11\cdot\pi}{6} + 2n\cdot\pi \\ \frac{\pi}{2} + 2n\cdot\pi \end{pmatrix}$$

(siendo n un entero)

La siguiente gráfica muestra la función $y = 2\cdot sen(x)^2 - sen(x) - 1$ y se puede ver



que corta al eje X (la recta horizontal $y = 0$) en una infinidad de puntos.
En la gráfica se indican las abscisas de solo tres de esos puntos.

Ejemplo 24. Hallar la solución de la ecuación : $sen(x) = cos(x) + 1$

Solución : Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación se obtiene :

$$(sen(x))^2 = (cos(x) + 1)^2$$
$$sen^2(x) = cos^2(x) + 2\cdot cos(x) + 1$$

pero $sen^2(x)$ se puede substituir por su identidad : $1 - cos^2(x)$ y queda :

$$1 - cos^2(x) = cos^2(x) + 2\cdot cos(x) + 1$$
$$0 = 2\cdot cos^2\cdot(x) + 2\cdot cos(x)$$

paso # 1 : Considerando como variable a la función coseno y factorizando resulta :

$$2\cdot cos(x)\cdot(cos(x) + 1) = 0$$

asi que alguno de éstos factores deber ser cero, es decir . . .

i) $2\cdot cos(x) = 0$ es decir $cos(x) = 0$

y en un intervalo de [0, 2π] el coseno vale 0 si $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\cdot\pi}{2}$

O también :

ii) $cos(x) + 1 = 0$ es decir $cos(x) = -1$

en un intervalo de [0, 2π] el coseno vale -1 solo si $x = \pi$

Comprobando las soluciones en la ecuación inicial :

$$x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \longrightarrow 1 = 0 + 1 \quad \textit{vale}$$

$$x = \frac{3\cdot\pi}{2} \longrightarrow sen\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right) + 1 \longrightarrow -1 = 0 + 1 \quad \textit{no vale}$$

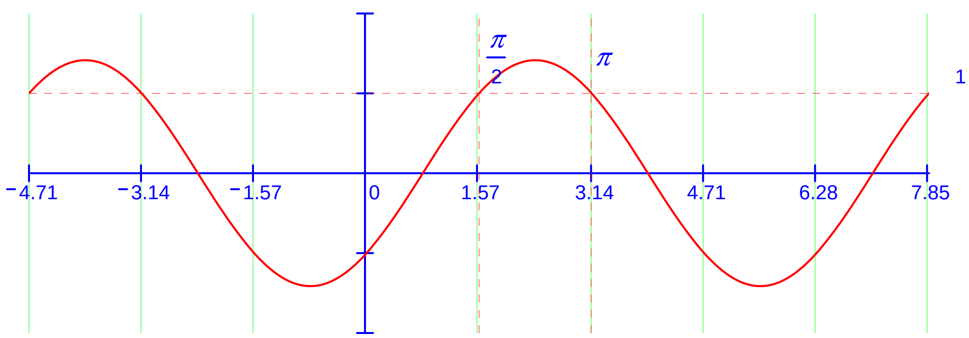
$$x = \pi \longrightarrow sen(\pi) = cos(\pi) + 1 \longrightarrow 0 = -1 + 1 \quad \textit{vale}$$

de modo que solo dos de las soluciones encontradas son válidas.

Dado que el periodo del coseno es $2\cdot\pi$, se concluye que la solución más general de esta ecuación trigonométrica es :

$$x = \begin{pmatrix} \pi + 2n\cdot\pi \\ \frac{\pi}{2} + 2n\cdot\pi \end{pmatrix} \qquad \textit{(siendo } n \textit{ un entero)}$$

como muestran las correspondientes gráficas de las funciones $y = sen(x) - cos(x)$ y $y = 1$.



que se cortan en una infinidad de puntos. En la figura se indican las abscisas (rectas verticales) de dos de ellos.

Ejemplo 25. Hallar la solución de la ecuación : $\dfrac{cos(2\cdot x)}{sen(3\cdot x) - sen(x)} = 1$

Solución : Multiplicando los dos miembros de la ecuación por el factor $sen(3\cdot x) - sen(x)$ se obtiene :

$$cos(2\cdot x) = sen(3\cdot x) - sen(x)$$

$$cos(2\cdot x) - (sen(3\cdot x) - sen(x)) = 0 \qquad (*)$$

pero $sen(3\cdot x) = sen(2\cdot x + x) = sen(2\cdot x)\cdot cos(x) + sen(x)\cdot cos(2\cdot x)$

$$sen(2\cdot x) = 2\cdot sen(x)\cdot cos(x)$$

asi que . . .

$$sen(3\cdot x) = (2\cdot sen(x)\cdot cos(x))\cdot cos(x) + sen(x)\cdot cos(2\cdot x)$$

y la expresión (*) resulta en :

$$cos(2\cdot x) - (sen(2\cdot x)\cdot cos(x) + sen(x)\cdot cos(2\cdot x) - sen(x)) = 0$$

$$cos(2\cdot x) - \left[2\cdot sen(x)\cdot cos^2(x) + sen(x)\cdot cos(2\cdot x) - sen(x)\right] = 0$$

factorizando . . .

$$cos(2\cdot x)\cdot(1 - sen(x)) - sen(x)\cdot\left[2\cdot cos^2(x) - 1\right] = 0$$

pero $2\cdot cos^2(x) - 1 = cos(2\cdot x)$, asi que la expresión final factorizada es :

$$cos(2\cdot x)\cdot(1 - sen(x) - sen(x)) = 0$$

$$cos(2\cdot x)\cdot(1 - 2\cdot sen(x)) = 0$$

Se deduce que alguno de ésos factores debe ser cero, es decir . . .

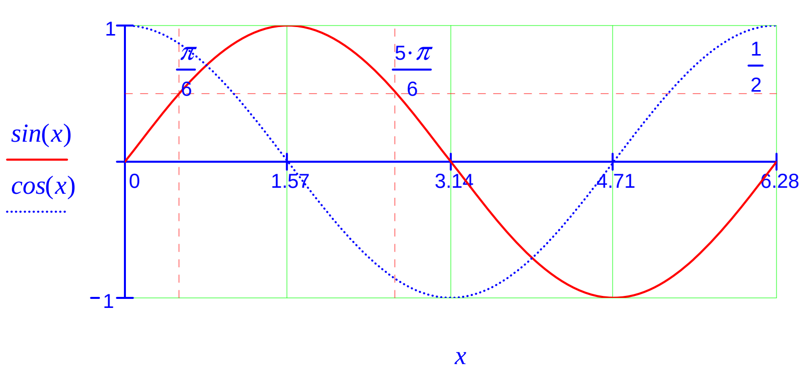
i) $cos(2\cdot x) = 0$

que en el intervalo [0 , 2π] se cumple si $2\cdot x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\cdot\pi}{2}$ es decir $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\cdot\pi}{4}$

O también :

ii) $1 - 2\cdot sen(x) = 0$ es decir $sen(x) = \frac{1}{2}$

que en el intervalo [0 , 2π] se cumple si $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\cdot\pi}{6}$



Comprobando las cuatro soluciones en la ecuación inicial :

para $x = \frac{\pi}{4}$ queda :

$$\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{sen\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right)-sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}=1 \longrightarrow \frac{0}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}=1 \quad \textit{indeterminado}$$

para $x=\frac{3\cdot\pi}{4}$ queda :

$$\frac{\cos\left(2\cdot\frac{3\cdot\pi}{4}\right)}{sen\left(3\cdot\frac{3\cdot\pi}{4}\right)-sen\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)}=1 \longrightarrow \frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}}=1 \quad \textit{indeterminado}$$

para $x=\frac{\pi}{6}$ queda :

$$\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)}{sen\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)-sen\left(\frac{\pi}{6}\right)}=1 \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1 \quad \textit{vale}$$

para $x=\frac{5\cdot\pi}{6}$ queda :

$$\frac{\cos\left(2\cdot\frac{5\cdot\pi}{6}\right)}{sen\left(3\cdot\frac{5\cdot\pi}{6}\right)-sen\left(\frac{5\cdot\pi}{6}\right)}=1 \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1 \quad \textit{vale}$$

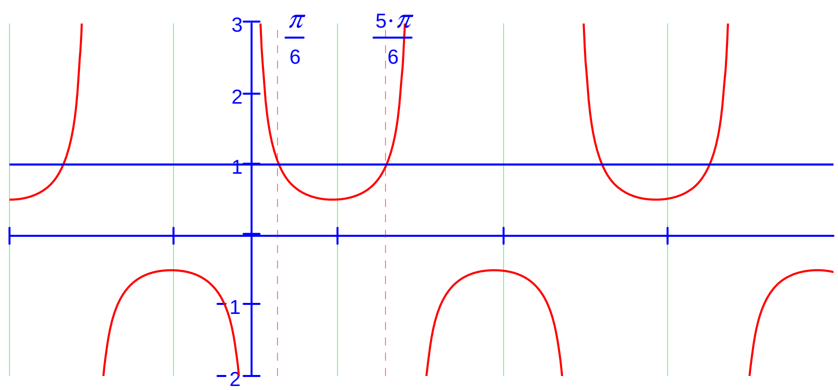
de modo que solo dos de las soluciones encontradas son válidas.

Dado que las funciones coseno y seno son periódicas de periodo $2\cdot\pi$ se concluye que la solución más general de la ecuación trigonométrica dada es:

$$x=\begin{bmatrix}\frac{\pi}{6}+n\cdot(2\pi)\\[1em] \frac{5\cdot\pi}{6}+n\cdot(2\pi)\end{bmatrix} \qquad \textit{(siendo } n \textit{ un entero)}$$

como muestran las correspondientes gráficas de las funciones

$$y=\frac{\cos(2\cdot x)}{sen(3\cdot x)-sen(x)} \quad ; \quad y=1\,.$$



Ejemplo 26. Hallar la solución de la ecuación : $tan(x) = csc(x)$

Solución : Expresando la ecuación en términos de senos y cosenos resulta :

$$\frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{1}{sen(x)} \qquad \text{es decir} \qquad sen^2(x) = cos(x)$$

$$1 - cos^2(x) = cos(x)$$

paso # 1 : Considerando que $cos(x) = u$ es una variable, se obtiene la ecuación cuadrática:

$$cos^2(x) + cos(x) - 1 = 0$$

$$u^2 + u - 1 = 0$$

que tiene las soluciones: $u = cos(x) = \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.618 \\ -1.618 \end{pmatrix}$

paso # 2 : El valor -1.618 no está en el rango del coseno, asi que sólo queda la solución : $cos(x) = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

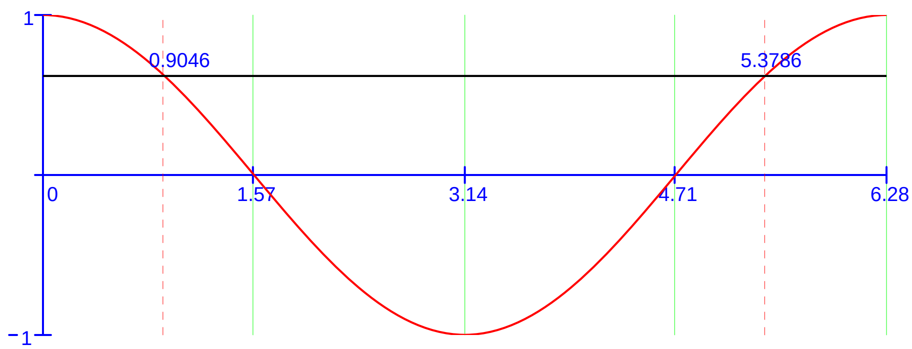
Evidentemente no es posible resolver en forma exacta para la variable x asociada a éste valor del coseno, dado que :

$$x = arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

Una representación gráfica de las funciones $y_1 = cos(x)$ y $y_2 = 0.618$ puede generar una solución apoximada para la identidad del problema dado .

En un intervalo de un periodo $[0, 2\pi]$, la recta horizontal $y_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ corta a la gráfica de la función coseno en dos puntos , para los cuales la abscisa x vale . . .

$$x = \begin{pmatrix} 0.9046 \\ 2\cdot\pi - 0.9046 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9046 \\ 5.3786 \end{pmatrix}$$



De modo que la solución más general de la ecuación trigonométrica es :

$$x = \begin{bmatrix} 0.9046 + n\cdot(2\cdot\pi) \\ 5.3786 + n\cdot(2\cdot\pi) \end{bmatrix}$$ *(donde n es un entero)*

EJERCICIO II.4

1. Encontrar las soluciones exactas de las siguientes ecuaciones trigonométricas :

a) $2\cdot cos(x-\pi) = -\sqrt{3}$

b) $sec(x)\cdot csc(x) - 2\cdot csc(x) = 0$

c) $2\cdot sen^2\cdot(x) + 3\cdot sen(x) + 1 = 0$

d) $csc^2\cdot(x) = (1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})\cdot cot(x)$

e) $4\cdot sen(x)\cdot cos(x) = 1$

f) $tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) - tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 4$

g) $sen^2\cdot(3\cdot x) - sen^2\cdot(x) = 0$

2. Resuelva gráficamente para obtener una solución apoximada de las siguientes ecuaciones:

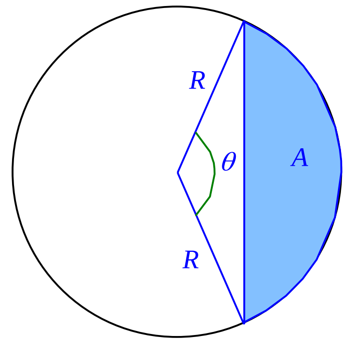
a) $2\cdot sen(x) = cos(x)$

b) $2\cdot sen^2(x) = 1 - sen(x)$

c) $2\cdot sen(x-2) < 3 - x^2$

d) $cos^2\cdot(x) = \dfrac{x-3}{2}$

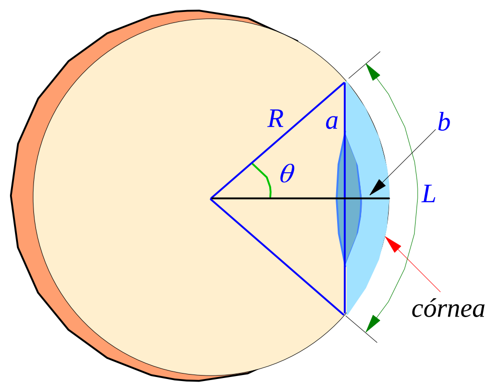
3. Demostrar que el área A del segmento de un círculo como el mostrado a la derecha, está dada por :



$$A = \frac{1}{2}\cdot R^2\cdot\left(\theta - sen(\theta)\right)$$

Si el radio del círculo es $R = 8\cdot m$ y el área del segmento es $A = 48\cdot m^2$, hallar el ángulo θ con una precisión de tres cifras decimales en radianes.

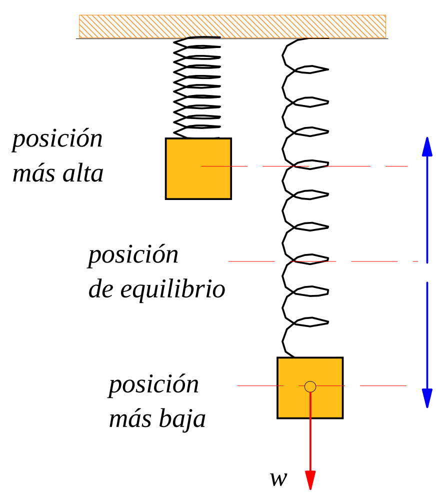
4. Una técnica para corregir el astigmatismo en el ojo humano implica cambiar la curvatura de la córnea. En la sección transversal de la córnea que se muestra en la figura, el árco circular de longitud L y radio R subtiende un ángulo central de $2\cdot\theta$.



a) Si $a = 5.5\cdot mm$ y $b = 2.5\cdot mm$, calcular L con cuatro cifras decimales.

b) Al reducir la longitud de la cuerda $2\cdot a$ sin cambiar la longitud del arco L cambiará la curvatura de la córnea . Aproxime b con 4 cifras decimales si a se cambia a $5.4\cdot mm$

5. Un objeto de cierto peso w se suspende verticalmente de un resorte y mediante un impulso inicial, se pone a oscilar hacia arriba y hacia abajo de su posición de equilibrio. En ausencia de fricción, la posición vertical y del objeto respecto a su posición de equilibrio cambia con el tiempo t. Supónga que y está dada por :



$$y = -3\cdot sen(8\cdot t) - 4\cdot cos(8\cdot t)$$

transforme la ecuación a la forma :

$$y = A\cdot sen(B\cdot t - C)$$

e identifique la amplitud A , el periodo T y la fase ϕ de éste movimiento oscilatorio.

6. Cierto generador de corriente eléctrica alterna produce una intensidad de corriente I variable con el tiempo t dada por la ecuación :

$$I = 50 \cdot sen\left[120 \cdot \pi \cdot (t - 0.001)\right]$$

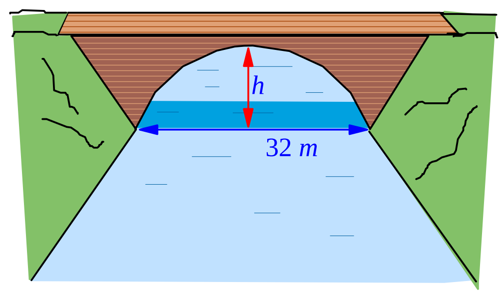
donde t se mide en segundos.
Encuentre el valor positivo más pequeño de t para el cual la intensidad de corriente eléctrica es $I = 40$

7. Supponga que dos ondas sonoras se describen con las ecuaciones :

$$y_1 = 0.6 \cdot cos(184 \cdot \pi \cdot t) \qquad \text{y} \qquad y_2 = -0.6 \cdot cos(208 \cdot \pi \cdot t)$$

Si se emiten ambos sonidos de manera simultánea, se producirá una onda resultante $y_1 + y_2$ que tiene una frecuencia de interferencia . Calcular dicha frecuencia.

8. Un puente de arco circular con una longitud de arco de $36 \cdot m$, salva un claro de rio de $32 \cdot m$ de ancho.
Determine con una precisión de dos cifras decimales el radio del arco circular y su altura h por encima del agua en el centro del puente.

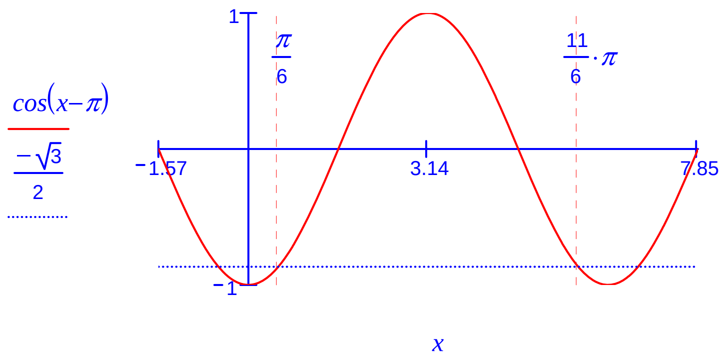


Respuestas EJERCICIO II.4

1. a) $\cos(x-\pi) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

pero $\cos(x-\pi) = \cos(x)\cdot\cos(\pi) + sen(x)\cdot sen(\pi) = \cos(x)\cdot(-1) + sen(x)\cdot(0) = -\cos(x)$

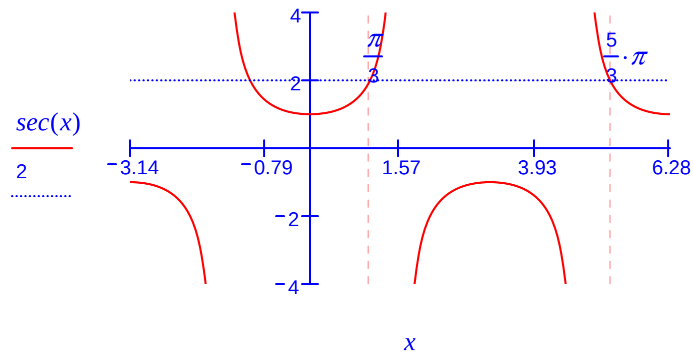
por lo tanto: $-\cos(\pi) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ implica que $x = \begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi \\ \dfrac{11\cdot\pi}{6} + n\cdot 2\pi \end{pmatrix}$



b) $\sec(x)\cdot\csc(x) - 2\cdot\csc(x) = \csc(x)\cdot(\sec(x) - 2) = 0$

y dado que $\csc(x) = 0$ es imposible, entonces de $\sec(x) = 2$ se obtiene que :

$$x = \begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi \\ \dfrac{5\cdot\pi}{3} + n\cdot 2\pi \end{pmatrix}$$



c) $2\cdot sen^2\cdot(x) + 3\cdot sen(x) + 1 = (2\cdot sen(x) + 1)\cdot(sen(x) + 1) = 0$

implica que : $2\cdot sen(x) + 1 = 0 \longrightarrow sen(x) = \dfrac{-1}{2} \longrightarrow x = \dfrac{7\cdot\pi}{6}, \dfrac{11\cdot\pi}{6}$

$$sen(x) + 1 = 0 \longrightarrow sen(x) = -1 \longrightarrow x = \frac{3}{2}\cdot\pi$$

por lo tanto :

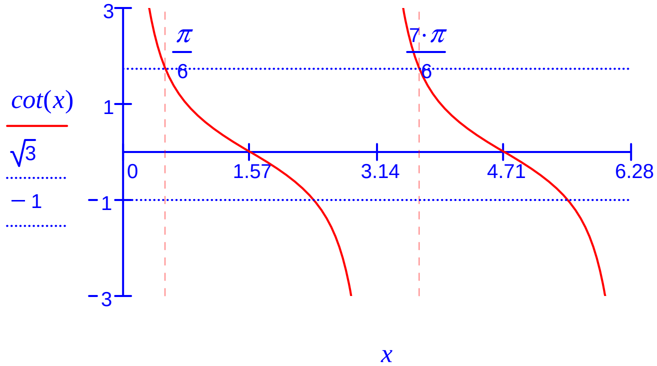
$$x = \left[\left(\frac{\pi}{3} + 2\cdot n\cdot\pi\right) \left(\frac{5\cdot\pi}{3} + 2\cdot n\cdot\pi\right) \left(\frac{3\cdot\pi}{2} + 2\cdot n\cdot\pi\right) \right]$$

d) Usando la identidad pitagórica $csc^2(x) = 1 + cot^2(x)$, la ecuación algebráica queda como :

$$1 + cot^2(x) = (1+\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})\cdot cot(x)$$

y llamando $u = cot(x)$ se obtiene la ecuación cuadrática : $u^2 + (1-\sqrt{3})\cdot u - \sqrt{3} = 0$ cuya solución es:

$$cot(x) = u = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{3\cdot\pi}{4}, \frac{7\cdot\pi}{6}, \frac{7\cdot\pi}{4}$$

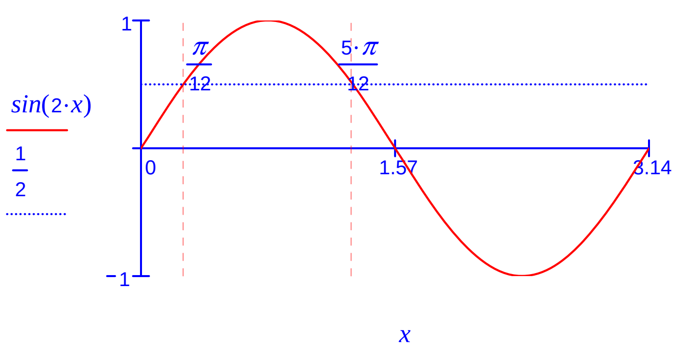


asi que la solución general de la ecuación trigonométrica es :

$$x = \left[\left(\frac{7}{6}\cdot\pi + n\cdot\pi\right) \left(\frac{\pi}{6} + n\cdot\pi\right) \left(\frac{3\cdot\pi}{4} + n\cdot\pi\right) \left(\frac{7\cdot\pi}{4} + n\cdot\pi\right) \right]$$

e) Se puede escribir como: $2\cdot sen(x)\cdot cos(x) = \frac{1}{2}$, es decir :

$$sen(2\cdot x) = \frac{1}{2} \longrightarrow 2\cdot x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\cdot\pi}{6} \longrightarrow x = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{5\cdot\pi}{12}\right)$$



y la solución general es por lo tanto :

$$x = \left[\left(\frac{\pi}{12} + 2\cdot n\cdot\pi\right) \left(\frac{5\cdot\pi}{12} + 2\cdot n\cdot\pi\right) \right]$$

f) De : $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)} \longrightarrow \quad \tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan(x)+1}{1-\tan(x)}$

y : $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)} \qquad \tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan(x)-1}{1+\tan(x)}$

asi que : $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) - \tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan(x)+1}{1-\tan(x)} - \dfrac{\tan(x)-1}{1+\tan(x)} = 2\cdot\left[\dfrac{1+\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}\right]$

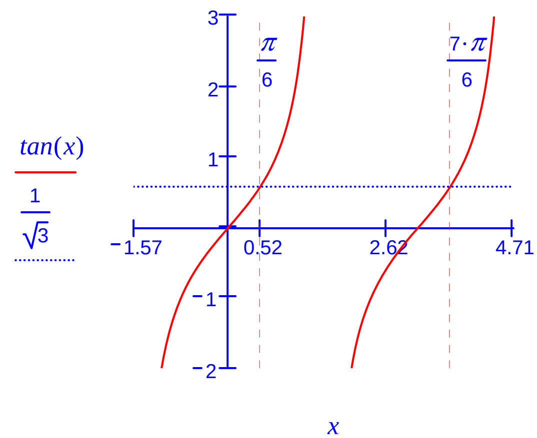
y la ecuación trigonométrica se trasforma en :

$$2\cdot\left[\frac{1+\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}\right] = 4 \longrightarrow 3\cdot\tan^2(x) = 1 \longrightarrow \tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

que implica $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\cdot\pi}{6}$.

De ésta manera, la solución general es:

$$x = \begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{6} + n\cdot\pi \\ \dfrac{7\cdot\pi}{6} + n\cdot\pi \end{pmatrix}$$



g) Factorizando :

$$\sin^2\cdot(3\cdot x) - \sin^2\cdot(x) = (\sin(3\cdot x)-\sin(x))\cdot(\sin(3\cdot x)+\sin(x)) = 0$$

y usando la identidad $\sin(3\cdot x) = \sin(2x+x) = \sin(2\cdot x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\cos(2\cdot x)$

junto con $\sin(2\cdot x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$; $\cos(2\cdot x) = 2\cdot\cos^2(x) - 1$ se obtiene que :

$$\sin(3\cdot x) - \sin(x) = 0 \longrightarrow 2\cdot\sin(x)\cdot\left(2\cdot\cos(x)^2 - 1\right) = 0 \longrightarrow x = 0, \pi, \frac{\pi}{4}, \frac{5\cdot\pi}{4}$$

o

$$\sin(3\cdot x) + \sin(x) = 0 \longrightarrow 4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^2 = 0 \longrightarrow x = 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\cdot\pi}{2}$$

De ésta manera, la solución general es:

$$x = \left[(0)\ \left(\frac{\pi}{4}\right)\ \left(\frac{5\cdot\pi}{4}\right)\ \left(\frac{\pi}{2}\right)\ \left(\frac{3\cdot\pi}{2}\right)\ (\pi)\right] + n\cdot 2\cdot\pi$$

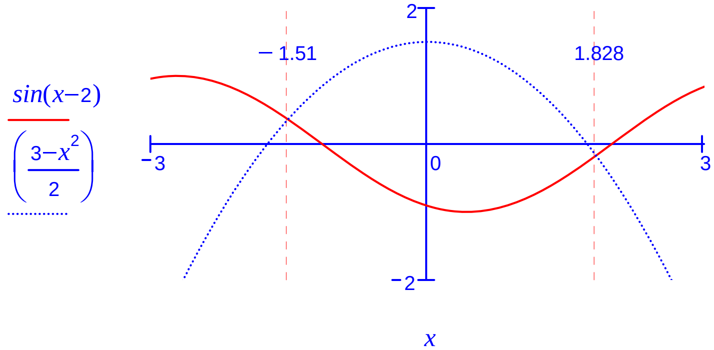
2. a) $\frac{2\cdot sen(x)}{cos(x)} = \frac{cos(x)}{cos(x)} \longrightarrow tan(x) = \frac{1}{2}$ esto es: $x = arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0.4636$

b) Haciendo $sen(x) = u$ la ecuación queda : $2\cdot u^2 + u - 1 = 0 \longrightarrow u = sen(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

esto es: $x = \begin{pmatrix} arcsen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \\ arcsen(-1) = \frac{3\cdot\pi}{2} \end{pmatrix}$

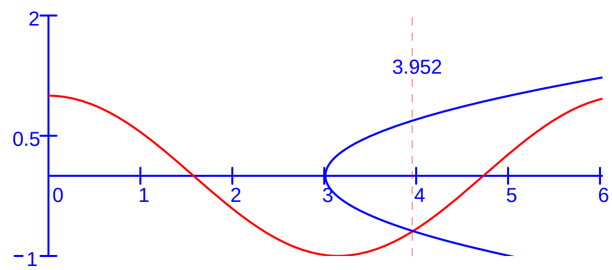
c) $sen(x-2) < \frac{3-x^2}{2}$

Solución : $-1.504 < x < 1.828$

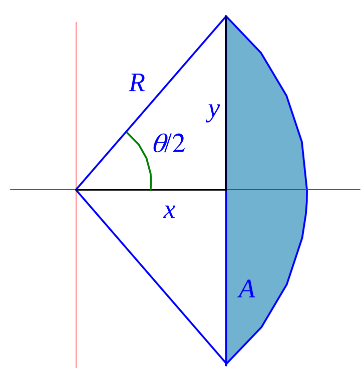


d) $cos(x) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$

Solución : $x = 3.952$



3. El área sombreada es la diferencia entre el área del sector circular: $A_1 = \frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2$ y el área de dos triángulos rectángulos $A_2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot x\cdot y\right) = x\cdot y = R\cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot R\cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$, esto es :



$$A = A_1 - A_2 = \frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2 - R^2\cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

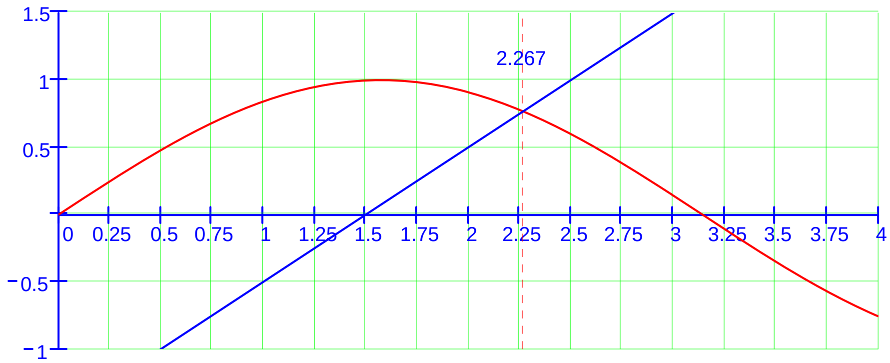
y de la identidad :

$$sen(x) = sen\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\cdot sen\left(\frac{x}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

se deduce que : $A = \left(\frac{1}{2}\cdot\theta\cdot R^2\right) - \frac{R^2}{2}\cdot sen(\theta) \;=\; \frac{R^2}{2}\cdot\left(\theta - sen(\theta)\right)$ y queda demostrado.

Calculando θ : $sen(\theta) = \theta - \frac{2\cdot A}{R^2}$ esto es : $sen(\theta) = \theta - \frac{2\cdot\left(48\cdot m^2\right)}{(8\cdot m)^2} \;=\; \theta - \frac{3}{2}$

y usando una graficadora, la solución aproximada es : $\theta = 2.267\cdot rad$

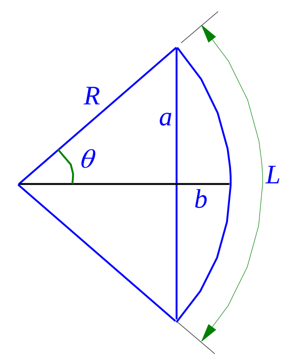


4. En el diagrama mostrado a la derecha, si la córnea tiene una longitud circular L entonces . . .

$$L = R\cdot(2\cdot\theta)$$

por lo cual es necesario calcular primero R y θ en términos de las longitudes conocidas a y b.

Por el teorema de Pitágoras:



$$R^2 = (R-b)^2 + a^2 \longrightarrow R = \frac{a^2+b^2}{2\cdot b}$$

y $$sen(\theta) = \frac{a}{R} = \frac{a}{\frac{\left(b^2+a^2\right)}{2\cdot b}} \longrightarrow \theta = arcsen\left(\frac{2\cdot b\cdot a}{a^2+b^2}\right)$$

de modo que : $$L = 2\cdot R\cdot\theta \;=\; \left(\frac{a^2+b^2}{b}\right)\cdot arcsen\left(\frac{2\cdot b\cdot a}{a^2+b^2}\right)$$

$$= \left[\frac{(5.5\cdot mm)^2 + (2.5\cdot mm)^2}{2.5\cdot mm}\right]\cdot arcsen\left[2\cdot\frac{(5.5)\cdot(2.5)}{(5.5)^2+(2.5)^2}\right]$$

$$= 14.60\cdot mm\cdot(0.85325)$$

$$= 12.4575\cdot mm$$

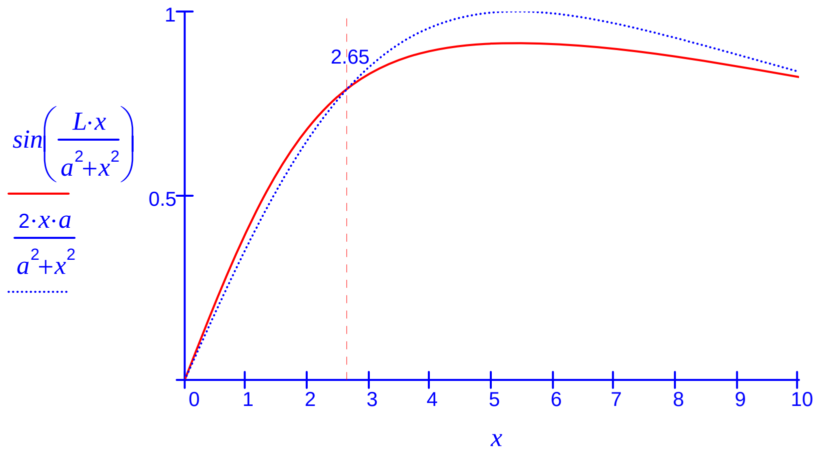
Si ahora la distancia b es una variable x , se puede escribir :

$$L = \left(\frac{a^2 + x^2}{x}\right)\cdot arcsen\left(\frac{2\cdot x\cdot a}{a^2 + x^2}\right) \qquad \text{esto es} \qquad \frac{L\cdot x}{a^2 + x^2} = arcsen\left(\frac{2\cdot x\cdot a}{a^2 + x^2}\right)$$

y

$$sen\left(\frac{L\cdot x}{a^2 + x^2}\right) = \frac{2\cdot x\cdot a}{a^2 + x^2}$$

de manera que con $L = 12.4575\cdot mm$ y $a = 5.4\cdot mm$, ésta ecuación se resuelve gráficamente, obteniéndose : $x = 2.65$. Cambiando asi la curvatura de la córnea



5. Si se comparan las expresiones :

$$y = -3\cdot sen(8\cdot t) - 4\cdot cos(8\cdot t)$$
$$y = A\cdot sen(B\cdot t + C) = A\cdot(sen(B\cdot t)\cdot cos(C) + sen(C)\cdot cos(B\cdot t))$$

se deduce que :

$$-3 = A\cdot cos(C) \qquad \text{y} \qquad B\cdot t = 8\cdot t \longrightarrow B = 8$$
$$-4 = A\cdot sen(C)$$

asi que sumando los cuadrados de éstas ecuaciones simultáneas se obtiene . . .

$$(-3)^2 + (-4)^2 = A^2\cdot\left[cos^2(C) + sen^2(C)\right] \longrightarrow A = \sqrt{9 + 16} = 5$$

que es la amplitud de las oscilaciones.
Dividéndolas . . .

$$\frac{A\cdot sen(C)}{A\cdot cos(C)} = \frac{-4}{-3} \longrightarrow tan(C) = \frac{-4}{-3} \longrightarrow C = arctan\left(\frac{-4}{-3}\right) = -\pi + 0.9273$$

que es la diferencia de fase .

De éste modo la posición vertical y del objeto en movimiento oscilatorio se describe por :

$$y = -3\cdot sen(8\cdot t) - 4\cdot cos(8\cdot t) = 5\cdot sen\left[8\cdot t + (-\pi + 0.9273)\right]$$

$$= 5\cdot sen\left[8\cdot\left(t + \frac{-\pi + 0.9273}{8}\right)\right]$$

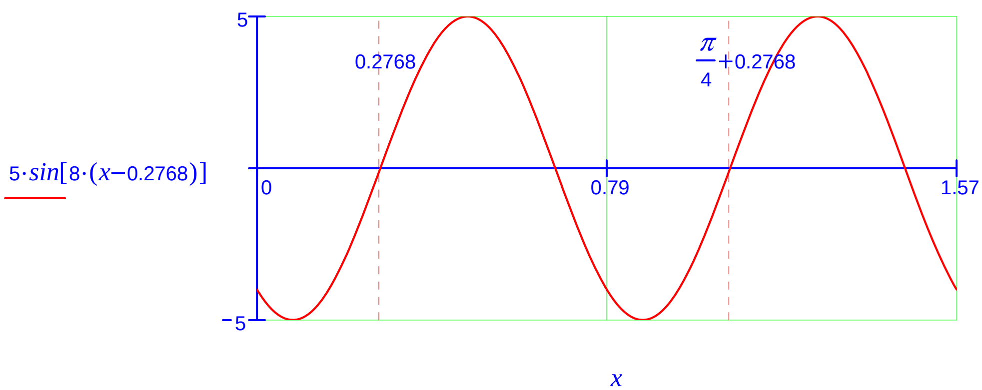
$$= 5\cdot sen[8\cdot(t - 0.2768)]$$

Se concluye que :

a) la frecuencia angular es $\omega = 8$ (8 veces la de la funcion $sen(t)$)

b) el periodo es $T = \frac{2\cdot\pi}{\omega} = \frac{2\cdot\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

c) la fase es : $\phi = \frac{-\pi + 0.9273}{8} = -0.2768$ (la función $sen(8\cdot t)$ desplazada hacia la derecha la distancia 0.2768 , como se muestra en la siguiente gráfica

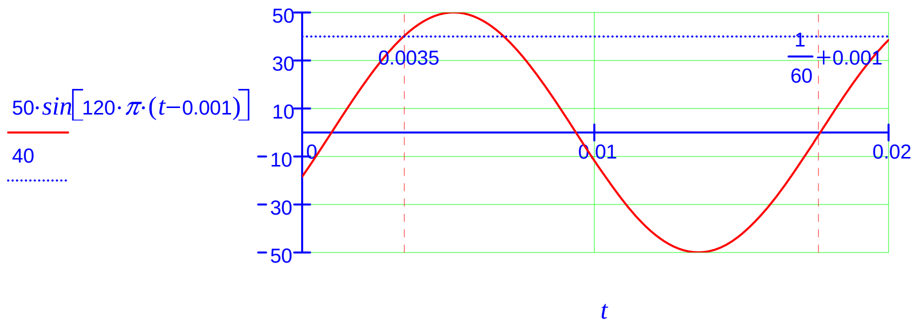


6. $40 = 50\cdot sen[120\cdot\pi\cdot(t - 0.001)] \longrightarrow \frac{4}{5} = sen\left[120\cdot\pi\cdot\left(t - \frac{1}{1000}\right)\right]$

$\longrightarrow arcsen\left(\frac{4}{5}\right) = 120\cdot\pi\cdot\left(t - \frac{1}{1000}\right) \longrightarrow t = \frac{1}{120\cdot\pi}\cdot arcsen\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{1000}$

y el instante buscado es : $t = \frac{0.9273}{120\cdot\pi} + 0.001 = 0.0035$

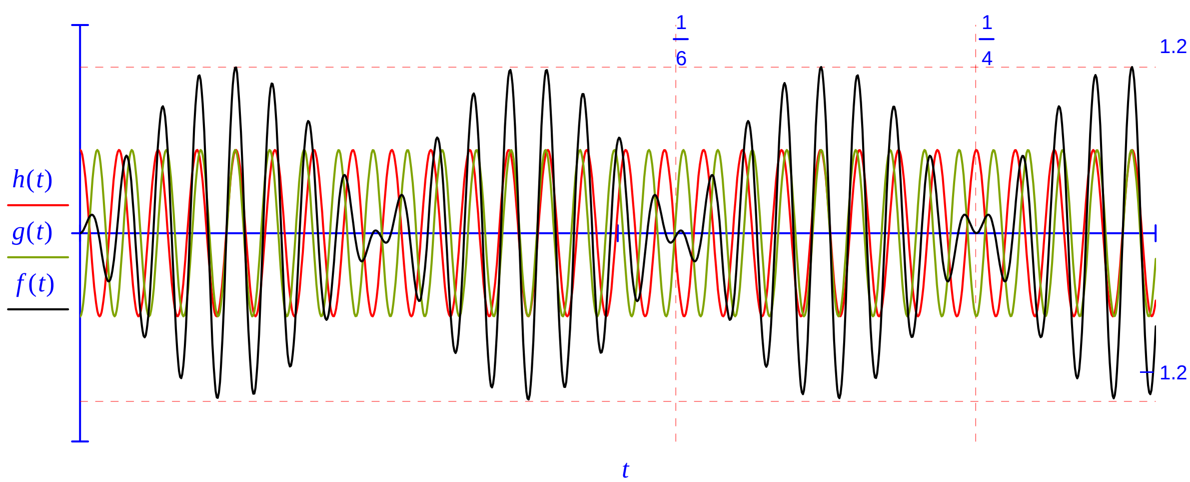
Frecuencia : $\omega = 120\cdot\pi = 377\cdot Hz$, Periodo : $T = \frac{2\cdot\pi}{\omega} = \frac{1}{60}$, Fase : 0.001 derecha



7. $h(t) := 0.6\cdot cos(184\cdot\pi\cdot t)$ tiene: $\begin{pmatrix} Amplitud & 0.6 \\ frecuencia & 184\cdot\pi \\ fase & 0 \end{pmatrix}$

$g(t) := -0.6\cdot cos(208\cdot\pi\cdot t)$ tiene : $\begin{pmatrix} Amplitud & 0.6 \\ frecuencia & 208\cdot\pi \\ fase & -\pi \end{pmatrix}$

y la suma de las ondas es : $f(t) := h(t) + g(t)$



Usando la identidad suma-producto:

$$cos(\theta) - cos(\phi) = -2\cdot sen\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

resulta :

$$0.6\cdot cos(184\cdot\pi\cdot t) - 0.6\cdot cos(208\cdot\pi\cdot t) = 0.6\cdot\left(-2\cdot sen\left(\frac{184+208}{2}\cdot\pi\cdot t\right)\cdot sen\left(\frac{184-208}{2}\cdot\pi\cdot t\right)\right)$$

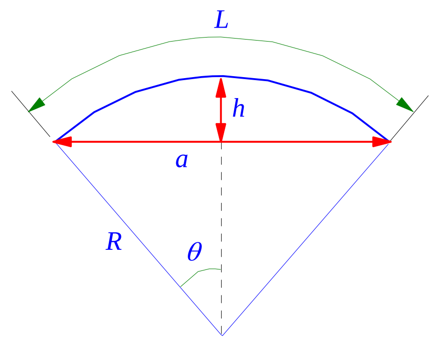
$$= -1.2\cdot sen(196\cdot\pi\cdot t)\cdot sen[(-12)\cdot\pi\cdot t]$$

pero $sen[(-12)\cdot\pi\cdot t] = -sen(12\cdot\pi\cdot t)$ y se obtiene :

$$f(t) = (1.2\cdot sen(12\cdot\pi\cdot t))\cdot sen(196\cdot\pi\cdot t)$$

la cual se puede interpretar como la función seno $sen(196\cdot\pi\cdot t)$ que tiene una amplitud variable en el tiempo $1.2\cdot sen(12\cdot\pi\cdot t)$ que oscila con una frecuencia $12\cdot\pi$ y tiene un periodo de $\frac{2\cdot\pi}{12\cdot\pi} = \frac{1}{6}$; sin embargo, la amplitud y la función se repetirán exactamente para un intervalo que sea el inverso del máximo común divisor de las frecuencias , es decir
$T = \frac{1}{mcm(12,196)} = \frac{1}{4}$ como se muestra en la figura anterior.

8. Si la longitud del arco del puente es L y el claro de rio que cubre es a, entonces . . .



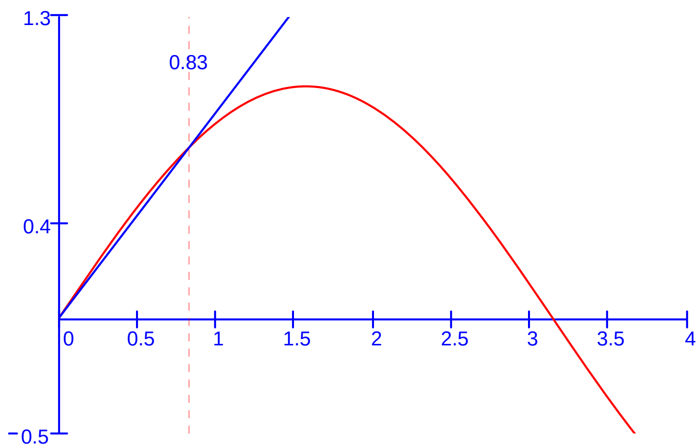
$$L = R\cdot(2\cdot\theta) \qquad y \qquad sen(\theta) = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{R} = \frac{a}{2\cdot R}$$

por lo tanto : $sen(\theta) = \frac{a}{L}\cdot\theta$ esto es $sen(\theta) = \frac{32}{36}\cdot\theta = \frac{8}{9}\cdot\theta$

Asi que representando gráficamente las funciones de θ :

$$y_1 = sen(\theta) \quad ; \quad y_2 = \frac{8}{9}\cdot\theta$$

se obtiene una solución grafica aproximada, como se ilustra en la figura de la derecha .



$$\theta = 0.83\cdot rad$$

Por lo tanto : $R = \frac{a}{2\cdot sen(\theta)} = \frac{32\cdot m}{2\cdot sen(0.83)} = 21.682\cdot m$

$$h = R - R\cdot cos(\theta) = R\cdot(1 - cos(\theta)) = 21.682\cdot m\cdot(1 - cos(0.83)) = 7.05\cdot m$$

2.7 Triángulos no rectángulos .

Aunque las funciones trigonométricas quedan definidas sólo para los triángulos rectángulos , es posible hallar relaciones muy últiles entre los lados de los triángulos que no tienen un ángulo recto .
En general un triángulo tiene 6 partes : tres lados y tres ángulos, por eso una pregunta natural es:

¿Cuál es la menor cantidad de información que es necesario conocer de un triángulo cualquiera para determinar todas sus partes faltantes ?

Calcular o determinar los lados y ángulos restantes de cualquier triángulo a partir de saber cuanto valen algunos de sus lados ó angulos se llama *resolver el triángulo*.

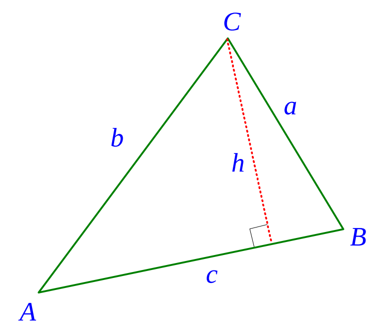
Representando en general por A a un ángulo y L a un lado de un triángulo, las leyes que derivaremos enseguida (*Ley de los senos y Ley de los cosenos*), nos permiten como veremos, resolver un triángulo con la información mínima en los siguientes casos :

Ley de los cosenos
- *LLL : (se dan los tres lados del triángulo)*
- *LAL : (se dan dos lados y el ángulo incluido entre ellos)*

Ley de los senos
- *LLA : (se dan dos lados y un ángulo que no sea el incluido entre ellos)*
- *ALA o AAL : (se dan dos ángulos y cualquier lado)*

Por convención, se acostumbra denotar a los ángulos de un triángulo dado con las letras mayúsculas A, B y C y a los lados opuestos a esos ángulos con las letras minúsculas correspondientes a, b y c respectivamente.

2.8 Ley de Senos .



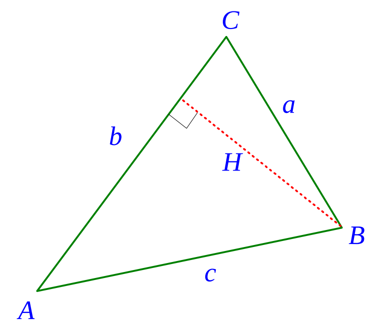
En el triángulo ABC mostrado a la derecha, consideremos que h es es segmento perpendicular al lado c
Entonces, aplicando la definición de la función seno para los triángulo rectángulos correspondientes se obtiene :

$$sen(A) = \frac{h}{b} \quad ; \quad sen(B) = \frac{h}{a}$$

y substituyendo $h = b \cdot sen(A)$ de la primera ecuación en la segunda, queda :

$$sen(B) = \frac{b \cdot sen(A)}{a} \qquad \text{esto es} \qquad \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(A)}{a} \qquad (*)$$

Por otra parte, si en el mismo triángulo se considera el segmento H perpendicular al lado b, también es cierto que:



$$sen(C) = \frac{H}{a} \qquad ; \qquad sen(A) = \frac{H}{c}$$

substituyendo $H = a \cdot sen(C)$ de la primera ecuación en la segunda, queda :

$$sen(A) = \frac{a \cdot sen(C)}{c} \qquad \text{esto es} \qquad \frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(C)}{c} \qquad (**)$$

De éstos dos resultados (*) y (**) finalmente se puede concluir que :

$$\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c} \qquad (8)$$

Esta relación es llamada *" Ley de Senos "* , es válida para todo triángulo (incluyendo los rectángulos)
y se puede escribir también en las formas equivalentes :

$$\frac{a}{sen(A)} = \frac{b}{sen(B)} = \frac{c}{sen(C)} \qquad (8_a)$$

o también

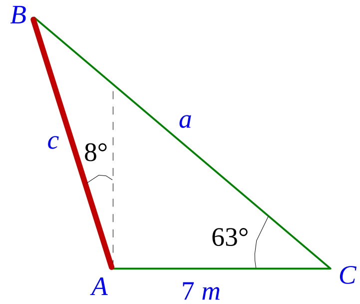
$$\frac{a}{b} = \frac{sen(A)}{sen(B)} \quad ; \quad \frac{c}{a} = \frac{sen(C)}{sen(A)} \quad ; \quad \frac{b}{c} = \frac{sen(B)}{sen(C)} \qquad (8_b)$$

es decir . . .

En todo triángulo, la razón de dos lados cualesquiera es igual a la razón de los senos de los ángulos opuestos a esos lados

Ejemplo 27. Un poste inclinado 8º respecto a la vertical proyecta una sombra sobre un piso horizontal de 7 metros de longitud cuando es Sol está a 63º sobre el horizonte.
¿Cuánto vale es la longitud c del poste ?

Solución : Representado en la figura de la derecha, el ángulo A vale 98º y por consiguiente el ángulo B vale :



$$180º - 63º - 98º = 19º$$

(dado que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180º)

Por la Ley de Senos aplicada a este triángulo se deduce que : $\dfrac{c}{sen(C)} = \dfrac{b}{sen(B)}$

es decir . . .

$$\frac{c}{sen(63°)} = \frac{7 \cdot m}{sen(19°)}$$

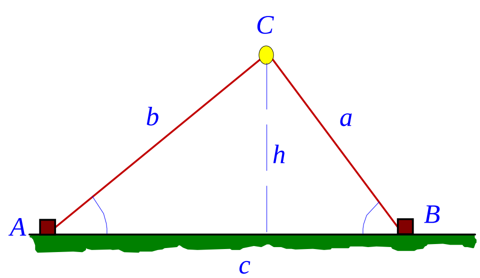
de donde se obtiene que el lado c del triángulo mide:

$$c = (7 \cdot m) \cdot \frac{sen(63º)}{sen(19º)} = 19.16 \cdot m$$

que es la longitud buscada del poste.

Ejemplo 28. Un globo meteorológico flota en el aire exactamente en el plano vertical que une dos observatorios A y B , los cuales están separadas entre si una distancia de $4.8 \cdot km$ sobre un terreno plano horizontal.
Cuando el globo se observa desde éstos dos puntos, los ángulos de elevación son $\angle B = 63º\ 23'$ y $\angle A = 43º\ 32'$. Determinar la altura h del globo sobre el suelo.

Solución : Se conocen dos ángulos del triángulo ABC , por lo tanto el tercer ángulo vale :



$$\angle C = (\pi - \angle A - \angle B)$$

$$= 180º - 43º\ 32' - 63º\ 23' = 73º\ 05'$$

Aplicando la Ley de Senos se obtiene por ejemplo la longitud del lado b . . .

$$\frac{c}{sen(C)} = \frac{b}{sen(B)} \quad \longrightarrow \quad b = c \cdot \frac{sen(B)}{sen(C)}$$

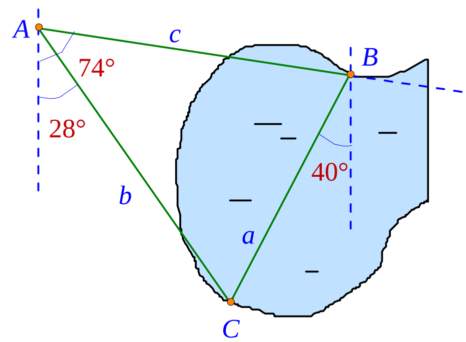
por lo tanto de $sen(A) = \frac{h}{b}$ y la altura h es :

$$h = b \cdot sen(A) = \left(c \cdot \frac{sen(B)}{sen(C)} \right) \cdot sen(A)$$

$$= (4800 \cdot m) \cdot \frac{sen(63 \cdot {}^\circ \cdot 23 \cdot {}') \cdot sen(43 \cdot {}^\circ \cdot 32 \cdot {}')}{sen(73^\circ \cdot 05')}$$

$$= 3089 \cdot m = 3.089 \cdot km$$

Ejemplo 29. Se desea construir un puente a través de un lago como se indica en la figura de la derecha.
La distancia entre los puntos A y B es 100 metros . ¿Cuál debe ser la longitud BC del puente ?



Solución : El ángulo A vale : $\angle A = 74^\circ - 28^\circ = 46^\circ$
Por lo tanto, prolongando la línea AB por el punto B , es evidente que el ángulo B del triángulo ABC vale :

$$\angle B = 180^\circ - 74^\circ - 40^\circ = 66^\circ$$

en consecuencia, el ángulo C vale :

$$\angle C = \pi - \angle A - \angle B = 180^\circ - 46^\circ - 66^\circ = 68^\circ$$

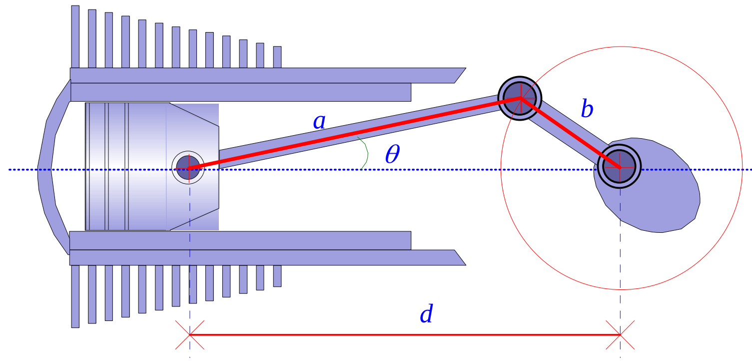
Aplicando la Ley de Senos al triángulo ABC se obtiene : $\frac{c}{sen(C)} = \frac{a}{sen(A)}$

y la distancia a vale :

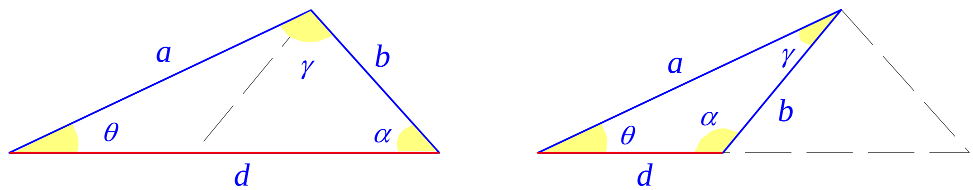
$$a = c \cdot \frac{sen(A)}{sen(C)} = (100 \cdot m) \cdot \frac{sen(46^\circ)}{sen(68^\circ)} = 77.6 \cdot m$$

Ejemplo 30. En un motor de combustion interna, una biela de largo $a = 11.5 \cdot cm$ se une a un pistón que se mueve dentro de un cilindro. El otro extremo de la biela se articula a un muñon de cigüeñal que gira en un círculo de radio $b = 6.35 \cdot cm$ como se ilustra en la siguiente figura .

¿A qué distancia del centro del cigüeñal está la base del pistón (distancia d) cuando la biela forma un ángulo de $9°$ con la línea central ?
(hay dos posibles respuestas)



Solución : Este es el caso LLA para la Ley de Senos .
Las dos posiciones posibles para las cuales la longitud a forma un ángulo $\angle\theta = 9°$ con la línea central, se ilustran enseguida:



De la Ley de Senos : $\frac{sen(\theta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{d}$ se sigue que : $d = \left(\frac{sen(\gamma)}{sen(\theta)}\right)\cdot b$

$\frac{sen(\theta)}{b} = \frac{sen(\alpha)}{a}$ se sigue que : $sen(\alpha) = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot sen(\theta)$

y $\alpha = arcsen\left(\frac{a}{b}\cdot sen(\theta)\right)$

Dado que $\gamma = \pi - (\theta + \alpha)$ se tiene también que :

$$sen(\gamma) = sen[\pi - (\theta + \alpha)] = sen(\theta + \alpha)$$

por lo tanto:

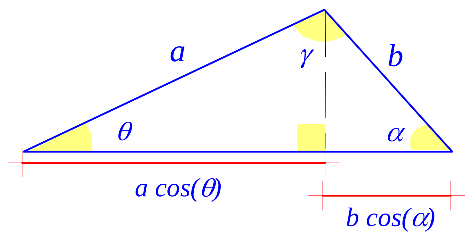
$$d = \frac{sen(\theta + \alpha)}{sen(\theta)}\cdot b = \left(\frac{sen(\theta)\cdot cos(\alpha) + sen(\alpha)\cdot cos(\theta)}{sen(\theta)}\right)\cdot b$$

$$= \left(cos(\alpha) + sen(\alpha)\cdot\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}\right)\cdot b$$

$$= \left[cos(\alpha) + \left(\frac{a}{b}\cdot sen(\theta)\right)\cdot\frac{cos(\theta)}{sen(\theta)}\right]\cdot b$$

obteniéndose finalmente : $\boxed{d = b\cdot cos(\alpha) + a\cdot cos(\theta)}$

Expresión que evidentemente es correcta como se puede apreciar si el triángulo anterior se divide en dos triángulos rectángulos y se aplica la definición de la función coseno .



Calculando α : $\alpha = arcsen\left(\frac{a}{b}\cdot sen(\theta)\right) = arcsen\left(\frac{11.5\cdot cm}{6.35\cdot cm}\cdot sen(9°)\right)$

$$= \begin{pmatrix} 0.2872 \\ \pi - 0.2872 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.46° \\ 163.54° \end{pmatrix}$$

Calculando entonces la distancia d resulta :

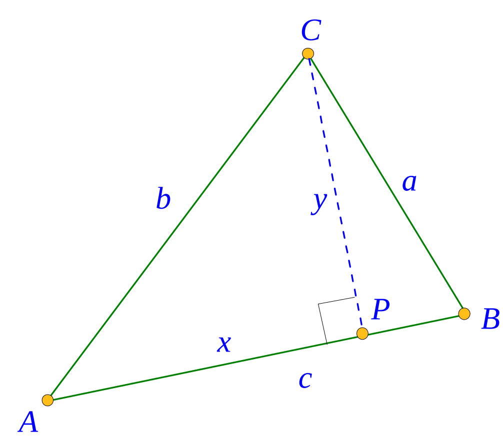
$$d = (6.35\cdot cm)\times cos\left(\begin{pmatrix} 16.46° \\ 163.54° \end{pmatrix}\right) + (11.5\cdot cm)\times cos(9°)$$

$$= \begin{pmatrix} 17.45\cdot cm \\ 5.27\cdot cm \end{pmatrix}$$

2.9 Ley de Cosenos .

Si sólo se conocen las longitudes de los tres lados de un triángulo oblicuo o dos de sus lados y el ángulo entre ellos, la Ley de Senos es insuficiente para determinar las demás cantidades del triángulo.
La Ley de Cosenos se aplica en tales casos. Deduzcámosla . . .

Consideremos el triángulo oblicuo ABC de lados a, b y c como el ilustrado en la figura de la derecha, en el cual la línea CP es perpendicular al lado AB pero además x e y son las longitudes de los segmentos AP y CP respectivamente.



Apliquemos al triángulo recto PCB el teorema de Pitágoras . . .

$$\left(\overline{CB}\right)^2 = \left(\overline{CP}\right)^2 + \left(\overline{PB}\right)^2$$

es decir :

$$a^2 = y^2 + (c - x)^2$$

pero por definición: $sen(A) = \frac{y}{b}$; $cos(A) = \frac{x}{b}$, asi que substituyendo x , y en la ecuacion anterior se obtiene . . .

$$a^2 = (b \cdot sen(A))^2 + (c - b \cdot cos(A))^2$$

y desarrollando y agrupando términos queda . . .

$$a^2 = b^2 \cdot sen^2 \cdot (A) + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot cos(A) + b^2 \cdot cos^2 \cdot (A)$$

$$a^2 = b^2 \cdot \left[sen^2 \cdot (A) + cos^2 \cdot (A) \right] + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot cos(A)$$

pero $sen^2 \cdot (A) + cos^2 \cdot (A) = 1$ asi que :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot b \cdot cos(A) \qquad (9)$$

Si en ésta deducción, en lugar de la perpendicular al lado AB se hubieran considerado las líneas perpendiculares a los lados BC y CA se habrían obtenido las relaciones :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos(B) \qquad (9_a)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(C) \qquad (9_b)$$

La Ley de Cosenos queda entonces expresada en palabras como . . .

- *En todo triángulo , el cuadrado del lado opuesto a un ángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de esos otros lados por el coseno del ángulo entre ellos*

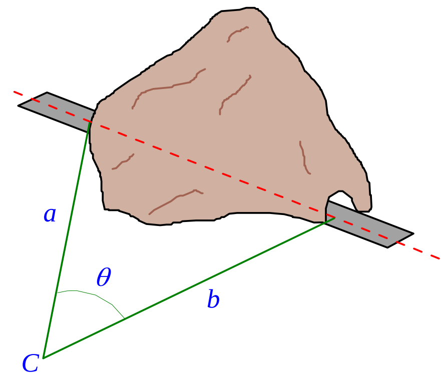
Luego entonces, si se conocen los tres lados de un triángulo, mediante la Ley de Cosenos podemos calcular sus ángulos.

Notemos que si el ángulo dado entre los dos lados del triángulo es recto, entonces $cos(90°) = 1$ y la Ley de Cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(C)$ se reduce a :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

el Teorema de Pitágoras. Es decir, *éste teorema es un caso especial de la Ley de Cosenos*.

Ejemplo 31. Se desea construir un túnel recto a través de una montaña .
Desde un punto C un topógrafo determina
las distancias : a = 5630 m. , b = 6725 m.
y el ángulo $\angle C = 75°$.
¿Cuál será la longuitud del túnel ?.



Solución : Se conocen los dos lados de un triángulo y el ángulo entre ellos (*caso LAL*) , asi que aplicando la Ley de Cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(C)$ resulta :

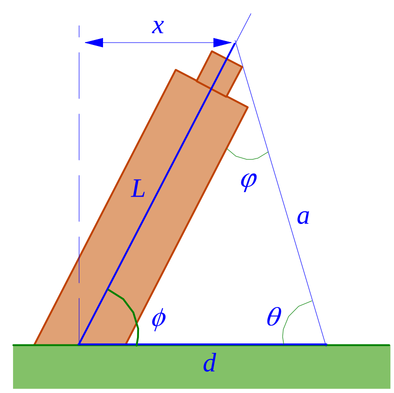
$$c = \sqrt{(5630 \cdot m)^2 + (6725 \cdot m)^2 - 2 \cdot (5630 \cdot m) \cdot (6725 \cdot m) \cdot cos(75 \cdot deg)}$$

$$= \sqrt{31696900 \cdot m^2 + 45225625 \cdot m^2 - 75723500 \cdot m^2 \cdot cos(75 \cdot deg)}$$

$$= \sqrt{[\ 76922525 - 75723500 \cdot (0.258819)\ ] \cdot m^2} = \sqrt{57323844.45} \cdot m$$

$$= 7571.25 \cdot m$$

Ejemplo 32. La torre inclinada de Pisa tiene una longitud $L = 54.5 \cdot m$; sin embargo, a una distancia horizontal $d = 30.5 \cdot m$ medida desde el centro de la base de la torre, la distancia a la cima de la torre es $a = 60 \cdot m$.
Determinar la distancia horizontal x de inclinación de la torre respecto a la vertical .



Solución : Es claro que $cos(\phi) = \dfrac{x}{L}$, por lo que $x = L \cdot cos(\phi)$, por eso a partir de la Ley de Cosenos : $a^2 = L^2 + d^2 - 2 \cdot L \cdot d \cdot cos(\phi)$ resulta :

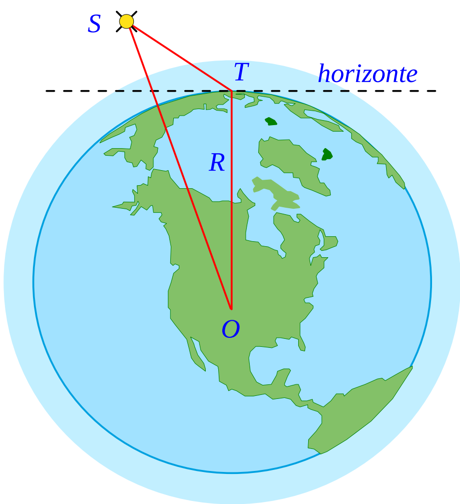
$$L \cdot cos(\phi) = \frac{L^2 + d^2 - a^2}{2 \cdot d}$$

es decir :

$$x = L\cdot cos(\phi) = \frac{(54.5\cdot m)^2 + (30.5\cdot m)^2 - (60\cdot m)^2}{2\cdot(30.5\cdot m)}$$

$$= \frac{2970.25\cdot m^2 + 930.25\cdot m^2 - 3600\cdot m^2}{(61.0\cdot m)} = 4.92\cdot m$$

Ejemplo 33. Un satélite S que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular, es detectado por una estación de rastreo T. La distancia Tierra -Satélite TS determinada por el radar es de 1664 km y el ángulo de elevación por arriba del horizonte es de $\theta = 32.4°$.
¿A qué altura está el satélite arriba de la Tierra en ese momento ? (El radio terrestre es $R = 6380\cdot km$)



Solución : La altura h del satélite por encima de la Tierra es :

$$h = \overline{OS} - R$$

donde la distancia $\overline{OS}$ se calcula a partir de la Ley de Cosenos :

$$(\overline{OS})^2 = R^2 + (\overline{TS})^2 - 2\cdot R\cdot(\overline{TS})\cdot cos(\phi)$$

Dado que el radio de la Tierra es perpendicular a la línea del horizonte, entonces el ángulo $\phi = \angle OTS$ vale $90° + \theta$, por eso. . .

$$\overline{OS} = \sqrt{R^2 + (\overline{TS})^2 - 2\cdot R\cdot(\overline{TS})\cdot cos(90° + \theta)}$$

$$= \sqrt{(6380\cdot km)^2 + (1664\cdot km)^2 - 2\cdot(6380\cdot km)\cdot(1664\cdot km)\cdot cos(122.4°)}$$

$$= \sqrt{40704400\cdot km^2 + 2768896\cdot km^2 - 21232640\cdot km^2\cdot(-0.5358)}$$

$$= \sqrt{43473296\cdot km^2 + 11376448.512\cdot km^2} = 7406\cdot km$$

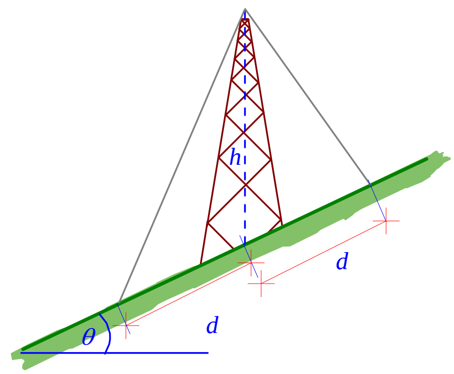
y

$$h = 7406\cdot km - 6380\cdot km = 1026\cdot km$$

EJERCICIO II.5

1. Dos barcos dejan un puerto a las 9 A.M. , dirigiéndose uno de ellos a 53º al Oeste del Norte a una velocidad de 12 km/h , mientras que el otro se dirige a 67º al Oeste del Sur a 16 km/h . ¿Cuál será la distancia entre ellos para el mediodia ? .

2. Se desea instalar una antena de torre vertical de altura $h = 100 \cdot m$ de largo sobre una colina que tiene una pendiente de 30º .
Calcular la longitud de los alambres que la sostendrán si éstos se deben atar sobre la colina a una distancia $d = 75 \cdot m$ a ambos lados de la base de la antena. .



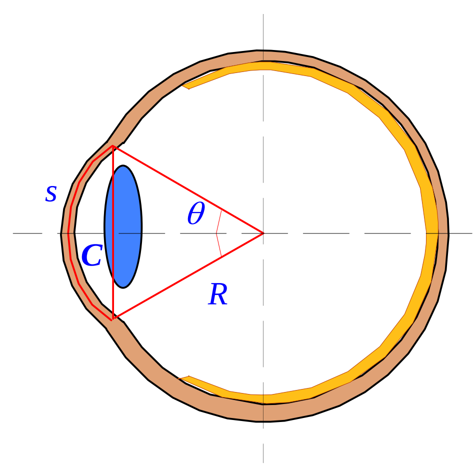
3. En un mapa hecho a escala, la ciudad A queda a $7 \cdot cm$ de la ciudad B . La ciudad C queda a $10.75 \cdot cm$. de la ciduad A y el ángulo entre las direcciones $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ es $37°$.
Si en la escala del mapa indica 1 : 1 200 000 , determinar la distancia entre las ciudades B y C

4. Un alpinista se dirige hacia una montaña caminando sobre una pradera horizontal que está a $2000 \cdot m$ sobre el nivel del mar y nota que el ángulo de elevación hasta la cima es $25°$. Después de caminar $3 \cdot km$ sobre la pradera hacia la montaña, observa que el ángulo de elevación a la cima aumentó a $43°$. Determinar la altura de la montaña sobre el nivel del mar.

5. Un avión vuela desde un punto P con una rapidez de $560 \cdot \frac{km}{h}$ en la dirección $20°$ al Oeste del Sur durante 4 horas y entonces cambia su rumbo a $80°$ al Oeste del Sur moviéndose ahora con una rapidez de $640 \cdot \frac{km}{h}$ durante 5 horas. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida en ese momento?

6. Una sección transversal de la córnea de un ojo humano, es un arco circular, como se muesta en la figura de la derecha.
La longitud de la cuerda C es $11.8 \cdot mm$ y el ángulo central θ vale $98.9°$

Encuentre el valor del radio R y longitud s del arco de la córnea .

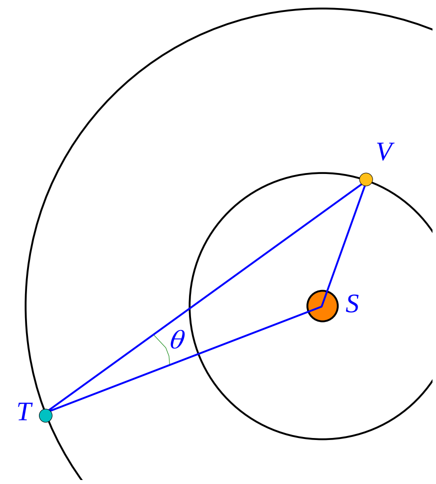


7. Las órbitas solares de la Tierra y de Venus son aproximadamente circulares y sus radios valen

   $R_T = 1.495 \times 10^8 \cdot km$ y $R_v = 1.085 \times 10^8 \cdot km$

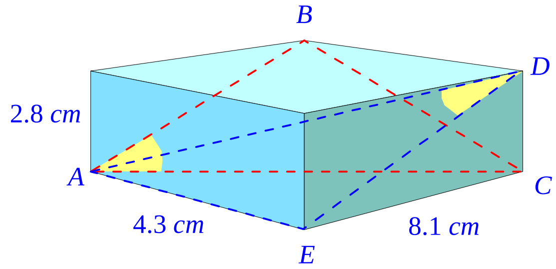
   respectivamente.
   Se envia una señal de radio a Venus desde la Tierra cuando el ángulo $STV = \theta$ es de 18° 40'

   ¿En cuánto tiempo llegará la señal a Venus ? (*hay dos posibles respuestas*)



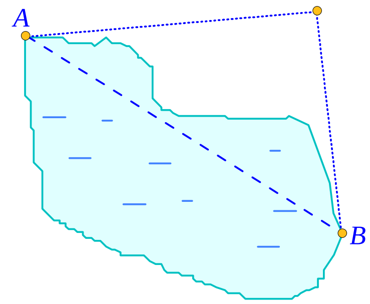
8. La longitud de los lados de un sólido rectangular son como se indican en la figura de la derecha.

   Calcular los ángulos $\angle CAB$ y $\angle ADE$

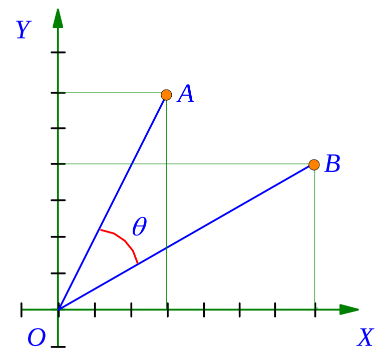


9. Para encontrar la longitud de un lago pequeño, un topógrafo midió el ángulo $\angle ABC$ de 96° siendo las distancias $\overline{AC} = 91 \cdot m$ y $\overline{BC} = 71 \cdot m$.

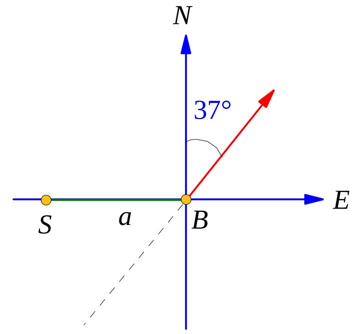
   ¿Cuánto vale el ancho del lago aproximadamente ?



10. El punto A tiene coordenadas $(3, 6)$ y el punto B tiene coordenadas $(7, 4)$. Hallar la medida del ángulo θ



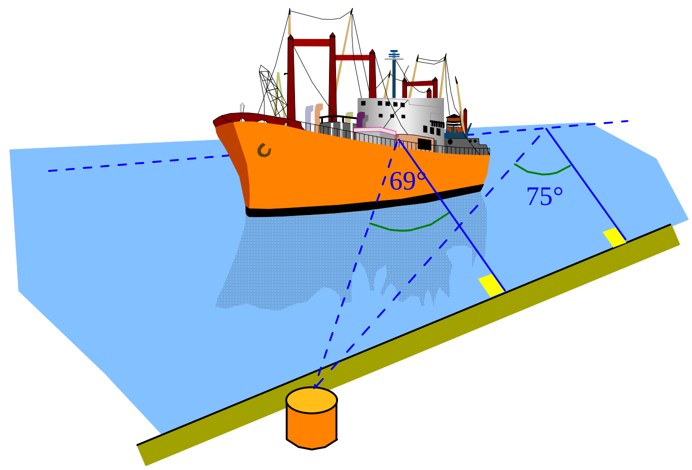
11. Un submarino *S* utiliza el sonar para determinar que un barco *B* está a $5.4 \cdot km$ al Este y viaja en línea recta a 16 *km/h* en una dirección a 37^o al Este del Norte.
Si la velocidad máxima del submarino es 28.8 *km/h*, ¿en qué dirección debe viajar para interceptar al barco en el menor tiempo posible y cuánto tiempo tardará en hacerlo ?



12. Dos observadores que están a $2 \cdot km$ de distancia entre si , miran un objeto volador no identificado (*ovni*) que flota sobre un pequeño pueblo entre ellos. Los observadoes están a una misma altura y los ángulos de elevación hacia el ovni son 28^o y 46^o respectivamente . ¿A qué altura sobre los observadores vuela el ovni ?

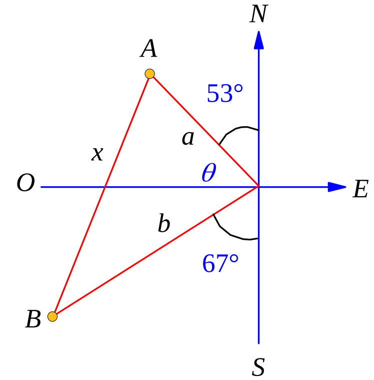
13. Desde un barco que viaja a 20 *km/h* paralelamente a la orilla de la playa, se determina que la dirección hacia un objeto fijo en la orilla es 75^o y 10 minutos después es 69^o .

¿ A qué distancia de la orilla está el barco ?



Respuestas Ejercicio II.5

1. Después de 3 horas de viaje a velocidad constante, los barcos A y B han recorrido las distancias :



$$a = \left(12\cdot\frac{km}{h}\right)\cdot(3\cdot h) = 36\cdot km$$

y

$$b = \left(16\cdot\frac{km}{h}\right)\cdot(3\cdot h) = 48\cdot km$$

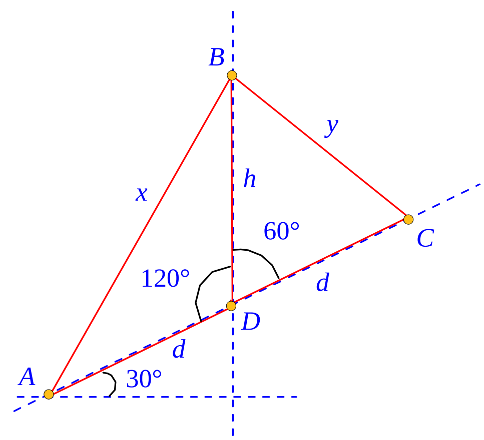
respectivamente

Además, el ángulo entre sus direcciones es $\theta = 180° - (53° + 67°) = 60°$, asi que la distancia x buscada es la longitud del tercer lado del triángulo OAB , la cual se calcula de la ley de cosenos:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot cos(\theta)}$$

$$= \sqrt{(36\cdot km)^2 + (48\cdot km)^2 - 2\cdot(36\cdot km)\cdot(48\cdot km)\cdot cos(60°)} = 43.27\cdot km$$

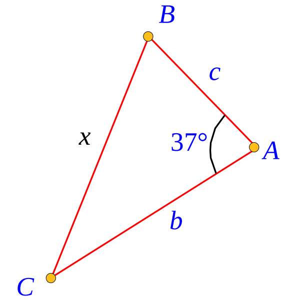
2. de la construcción ilustrada a la derecha, se deduce que las longitudes buscadas son los lados x e y de los triángulos ADB y DCB respectivamente, para los cuales se conocen dos lados (h y d) y el ángulo entre ellos ($120°$ y $60°$) .
Por la ley de cosenos, dichos lados valen :



$$x = \sqrt{d^2 + h^2 - 2\cdot d\cdot h\cdot cos(120°)} = \sqrt{75^2 + 100^2 - 2\cdot(75)\cdot(100)\cdot cos(120°)}\cdot m = 152.1\cdot m$$

$$y = \sqrt{d^2 + h^2 - 2\cdot d\cdot h\cdot cos(60°)} = \sqrt{75^2 + 100^2 - 2\cdot(75)\cdot(100)\cdot cos(60°)}\cdot m = 90.14\cdot m$$

3. La distancia buscada es la longitud del lado x en el triángulo ABC ilustrado a la derecha.



Por la ley de cosenos, ese lado vale :

$$x = \sqrt{c^2 + b^2 - 2\cdot c\cdot b\cdot cos(120°)}$$

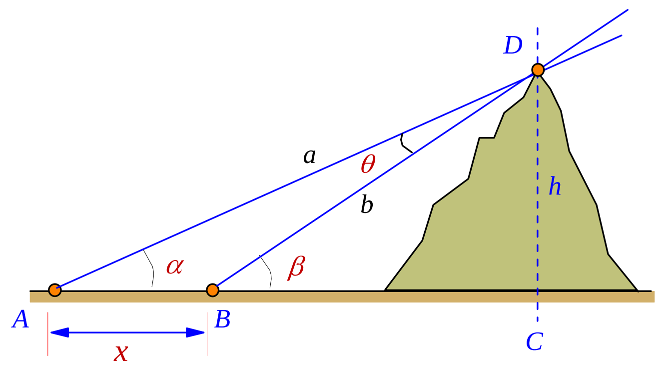
$$= \sqrt{(7\cdot cm)^2 + (10.75\cdot cm)^2 - 2\cdot(7\cdot cm)\cdot(10.75\cdot cm)\cdot cos(37°)} \;=\; 6.66\cdot cm$$

y dado que la escala del dibujo es 1 : 1 200 000 , la distancia real entre las ciudades C y B es :

$$(6.67\cdot cm)\cdot(1200000) = 8.004\times 10^6\cdot cm \;=\; 80\cdot km$$

4. Aplicando la ley de senos al triángulo ABC se obtiene :

(1) $$\frac{b}{sen(\alpha)} = \frac{x}{sen(\theta)}$$



y en el triángulo BCD , la misma ley queda:

(2) $$\frac{b}{sen(90°)} = \frac{h}{sen(\beta)}$$

Entonces , substituyendo b de la ec. (2) en la ec. (1) resulta : $\dfrac{\frac{h}{sen(\beta)}}{sen(\alpha)} = \dfrac{x}{sen(\theta)}$ y

resolviendo para h queda :

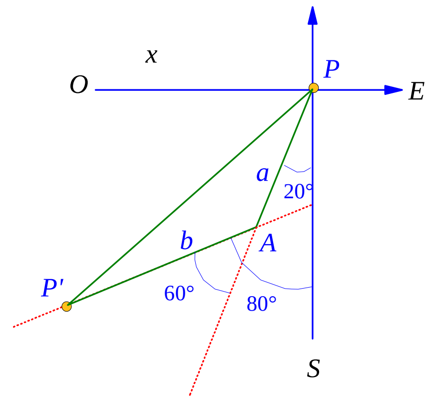
$$h = x\cdot\frac{sen(\alpha)\cdot sen(\beta)}{sen(\theta)} = x\cdot\frac{sen(\alpha)\cdot sen(\beta)}{sen(\beta-\alpha)}$$

$$= 3\cdot km\cdot\left(\frac{sen(25°)\cdot sen(43°)}{sen(43° - 25°)}\right)$$

$$= 2.7981\cdot km$$

Asi que la altura de la montaña sobre el nivel del mara es : $2000m + 2798\cdot m = 4798\cdot m$

5. Después de viajar a velocidad constante, las distancias que ha recorrido el avión son :



$$a = \left(560 \cdot \frac{km}{h}\right) \cdot (4 \cdot h) = 2240 \cdot km$$

y

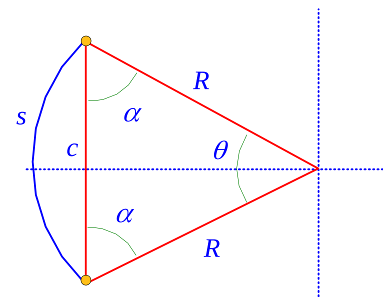
$$b = \left(16 \cdot \frac{km}{h}\right) \cdot (3 \cdot h) = 3200 \cdot km$$

El ángulo entre sus direcciones es $\theta = 180° - (60°) = 120°$, asi que la distancia PP' buscada es la longitud del tercer lado del triángulo PAP' , la cual se calcula de la ley de cosenos:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot cos(\theta)}$$

$$= \sqrt{(2240 \cdot km)^2 + (3200 \cdot km)^2 - 2 \cdot (2240 \cdot km) \cdot (3200 \cdot km) \cdot cos(120°)} = 4735.57 \cdot km$$

6. Usando la ley de senos se tiene :



$$\frac{c}{sen(\theta)} = \frac{R}{sen(\alpha)}$$

pero $(\theta + 2 \cdot \alpha) = \pi$ de modo que . . .

$$\frac{c}{sen(\theta)} = \frac{R}{sen\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right)} = \frac{R}{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

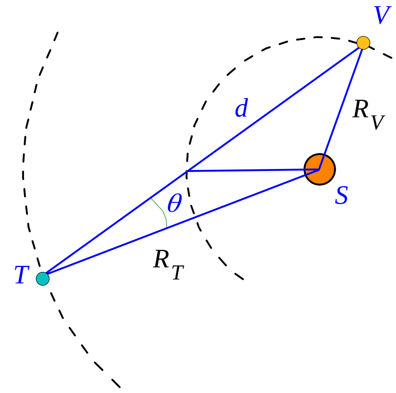
Resolviendo para R queda . . .

$$R = c \cdot \frac{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{sen(\theta)} = c \cdot \frac{cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cdot sen\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{sen\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{11.8 \cdot mm}{2} \cdot \frac{1}{sen\left(\frac{98.9°}{2}\right)} = 5.9 \cdot mm \cdot \frac{1}{sen(49.45°)} = 7.765 \cdot mm$$

y asi, el arco de la córnea vale . . . $s = R \cdot \theta = (7.765 \cdot mm) \cdot \left(98.9° \cdot \frac{\pi}{180°}\right) = 13.403 \cdot mm$

7. La distancia d entre la Tierra y Venus se obtiene a partir de la ley de senos aplicada al triángulo *STV* . . .



$$R_V = \sqrt{(R_T)^2 + d^2 - 2\cdot R_T\cdot d\cdot cos(\theta)}$$

es decir . . .

$$d^2 - (2\cdot R_T\cdot cos(\theta))\cdot d + \left[(R_T)^2 - (R_V)^2\right] = 0$$

que es una ecuación cuadrática en d de la forma $A\cdot d^2 + B\cdot d + C = 0$ cuya solución general es :

$$d = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A}$$

$$d = \frac{(2\cdot R_T\cdot cos(\theta)) + \sqrt{(2\cdot R_T\cdot cos(\theta))^2 - 4\cdot(1)\cdot\left[(R_T)^2 - (R_V)^2\right]}}{2}$$

$$d = R_T\cdot cos(\theta) + \sqrt{(R_V)^2 - (R_T)^2\cdot sen^2\cdot(\theta)}$$

$$= \left[(1.495\times 10^8)\cdot cos(18.67°) + \sqrt{(1.085\times 10^8)^2 - 1.495\times 10^8\cdot sen^2\cdot(18.67°)}\right]\cdot km$$

$$= 2.5013\times 10^8\cdot km$$

Cuando se considera el signo negativo del radical resulta :

$d = 3.3133\times 10^7\cdot km$ (aproximadamente un octavo de la distancia anterior).

Dado que la velocidad de las ondas de radio es la velocidad de la luz en el vacío $c = 3\times 10^8\cdot\frac{m}{seg}$, el tiempo pedido vale . . .

$$t = \frac{d}{c} = \frac{2.5013\times 10^8\cdot km}{3\times 10^8\cdot\frac{m}{seg}} = 833.77\cdot seg = 13\cdot min\cdot 53.4\cdot seg$$

ó bién

$$t = \frac{d}{c} = \frac{3.3133\times 10^7\cdot km}{3\times 10^8\cdot\frac{m}{seg}} = 110.44\cdot seg = 1\cdot min\cdot 50.4\cdot seg$$

8. Las diagonales CA , AB y BC tienen las longitudes dadas por el teorema de Pitágoras . . .

$$CA = \sqrt{(4.3 \cdot cm)^2 + (8.1 \cdot cm)^2} = 9.17 \cdot cm$$
$$AB = \sqrt{(2.8 \cdot cm)^2 + (8.1 \cdot cm)^2} = 8.57 \cdot cm$$
$$BC = \sqrt{(4.3 \cdot cm)^2 + (2.8 \cdot cm)^2} = 4.96 \cdot cm$$

asi que aplicando la ley de cosenos al triángulo ABC . . .

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot (AB) \cdot (AC) \cdot cos(\theta) \quad ;$$

$$cos(\theta) = \frac{\left(AB^2 + CA^2\right) - BC^2}{2 \cdot (AB) \cdot (CA)} = \frac{8.57^2 + 9.17^2 - 4.96^2}{2 \cdot (8.57) \cdot (9.17)} = 0.8458$$

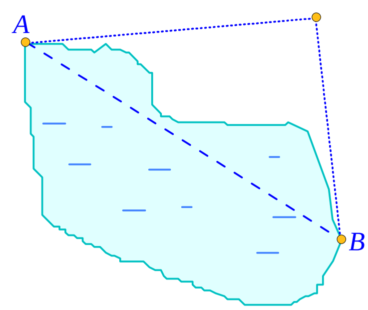
y por lo tanto, el ángulo $\angle CAB$ vale $\theta = arc\,cos(0.8458)$ = 32° 14.53'.

Por un procedimiento similar, se encuentra que el ángulo $\angle ADE$ vale : 26° 38.7'

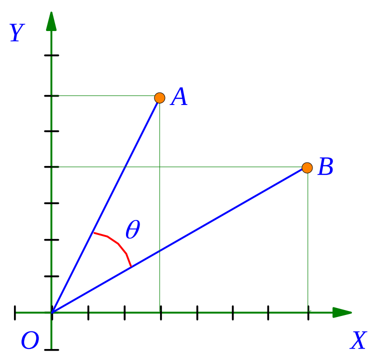
9 . $$AB = \sqrt{(AC)^2 + (CB)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (CB) \cdot cos(96°)}$$

$$= \sqrt{(91 \cdot m)^2 + (71 \cdot m)^2 - 2 \cdot (91 \cdot m) \cdot (71 \cdot m) \cdot cos(96°)}$$

$$= 121.13 \cdot m$$



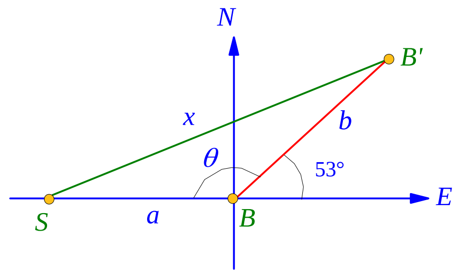
10. Las longitudes del triángulo OAB son



$$OA = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}$$
$$OB = \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2} = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}$$
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(7-3)^2 + (4-6)^2} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Despejando el ángulo θ de la ley de cosenos $AB^2 = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot cos(\theta)}$ resulta . . .

$$\theta = arc \cdot cos\left[\frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot (OA) \cdot (OB)}\right] = arc \cdot cos\left[\frac{45 + 65 - 20}{2 \cdot (\sqrt{45}) \cdot (\sqrt{65})}\right] = 33.69°$$



11. Si la velocidad del barco es $u = 16 \cdot \frac{km}{h}$ y B' es su posición final en el momento de ser alcanzado por el submarino después de un transcurrido un tiempo t, entonces habrá viajado la distancia $BB' = u \cdot t = b$.

En ese mismo tiempo el submarino, viajando a la velocidad $v = 28.8 \cdot \frac{km}{h}$, habrá recorrido la distancia $SB' = x = v \cdot t$ y dado que la distancia SB es $a = 5.4 \cdot km$, se aplica entonces la ley de cosenos al triángulo SBB' : $x^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\theta)$ es decir :

$$(v \cdot t)^2 = a^2 + (u \cdot t)^2 - 2 \cdot a \cdot (u \cdot t) \cdot \cos(180° - 53°)$$

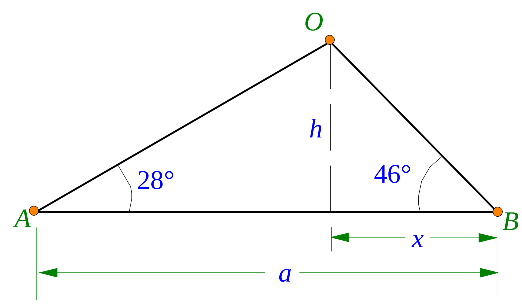
$$\left(v^2 - u^2\right) \cdot t^2 + 2 \cdot a \cdot u \cdot \cos(127 \cdot °) \cdot t - a^2 = 0$$

$$\left[\left(28.8 \cdot \frac{km}{h}\right)^2 - \left(16 \cdot \frac{km}{h}\right)^2\right] \cdot t^2 + \left[2 \cdot (5.4 \cdot km) \cdot \left(16 \cdot \frac{km}{h}\right) \cdot (-0.6018)\right] \cdot t - (5.4 \cdot km)^2 = 0$$

$$\left(573.44 \cdot \frac{km^2}{h^2}\right) \cdot t^2 + \left(-103.991 \cdot \frac{km^2}{h}\right) \cdot t - 29.16 \cdot km^2 = 0$$

Resolviendo ésta ecuación cuadrática para t resulta : $t = 0.3337 \cdot h = 20 \cdot min$

12. De la figura mostrada a la derecha, es evidente que :



$$\tan(28°) = \frac{h}{(a - x)} \qquad (1)$$

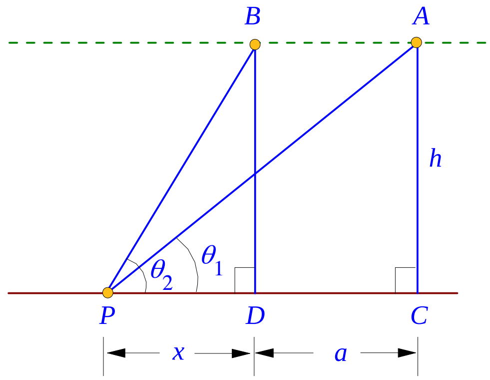
$$\tan(46°) = \frac{h}{x} \qquad (2)$$

asi que substituyendo x de la ecuación (2) en la ecuación (1) queda :

$$\tan(28°) = \frac{h}{\left(a - \frac{h}{\tan(46°)}\right)}$$ y de aquí se obtiene : $$h = a \cdot \frac{\tan(46 \cdot °) \cdot \tan(28 \cdot °)}{\tan(46°) + \tan(28°)}$$

es decir . . . $h = 702.6 \cdot m$

13. Del triángulo rectángulo *PAC* se tiene obtiene :



$$\tan(\theta_1) = \frac{h}{x+a} \qquad (1)$$

y del triángulo rectángulo *PBD* se tiene obtiene :

$$\tan(\theta_2) = \frac{h}{x} \qquad (2)$$

asi que substituyendo x de la ecuación (2) en la ecuación (1) queda :

$$\tan(\theta_1) = \frac{h}{\left(\frac{h}{\tan(\theta_2)}\right) + a}$$, es decir . . . $$h = a \cdot \frac{\tan(\theta_2) \cdot \tan(\theta_1)}{(\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1))}$$

donde $a = u \cdot t = 20 \cdot \frac{km}{h} \cdot \left(\frac{10}{60} \cdot h\right) = 333.3 \cdot m$ es la distancia recorrida por el barco en 10 minutos.

Entonces la orilla se encuentra a la distancia. . .

$$h = 333.3 \cdot m \cdot \left(\frac{\tan(75°) \cdot \tan(69°)}{\tan(75°) - \tan(69°)}\right) = 2875.4 \cdot m$$