IX

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

La integración por fracciones parciales es más un truco o recurso algebraico que algo nuevo que vaya a introducirse en el curso de Cálculo Integral. Es decir, en realidad en este tema no va a aprenderse nada nuevo de Cálculo Integral, simplemente se va a echar mano del Álgebra y luego aplicar técnicas que ya se estudiaron en otros capítulos.

El tema de fracciones parciales en Álgebra se refiere a *desumar* [1] una fracción, es decir a deshacer una suma de fracciones; en otras palabras, se trata de encontrar la suma de qué fracciones da como resultado la fracción dada.

Por ejemplo, realizar la suma de fracciones

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}$$

[1] La palabra "***desumar***" no existe en el idioma Español. Aquí se ha compuesto esa palabra en base a las etimologías que rigen al idioma. El prefijo *des* que denota negación o inversión del significado y el verbo sumar. Es decir, se pretende dar a entender lo inverso a la realización de la suma, no como operación inversa (que eso es la resta), sino como inverso de algo que se hace y luego se deshace.

consiste en el procedimiento conocido de sacar común denominador:

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{3(x+1)+2(x)}{x(x+1)}$$

$$=\frac{3x+3+2x}{x(x+1)}$$

$$=\frac{5x+3}{x^2+x}$$

Cuando se ha introducido el término *desumar*, se ha pretendido hacer alusión al hecho de recorrer el proceso anterior ahora de atrás hacia adelante, es decir, a partir del resultado llegar a las dos fracciones originales. Equivale a preguntar: ¿La suma de qué fracciones dan como resultado $\frac{5x+3}{x^2+x}$?

La teoría de las fracciones parciales se divide en cuatro casos, atendiendo a los factores que aparezcan en el denominador original, los cuales se pueden clasificar en dos formas:

POR EL GRADO	**POR REPETICIÓN**
factores de 1er grado $\begin{cases} 1^{er} \text{ caso} \\ 2^{o} \text{ caso} \end{cases}$	factores no repetidos $\begin{cases} 1^{er} \text{ caso} \\ 3^{er} \text{ caso} \end{cases}$
factores de 2^{o} grado $\begin{cases} 3^{er} \text{ caso} \\ 4^{o} \text{ caso} \end{cases}$	factores repetidos $\begin{cases} 2^{\circ} \text{ caso} \\ 4^{\circ} \text{ caso} \end{cases}$

Lo anterior da por entendido que el denominador original debe estar factorizado para poderse clasificar en el caso que le corresponda, o lo que es lo mismo, los casos atienden a los factores que aparezcan en el denominador.

CASO 1: Se tienen en el denominador factores lineales no repetidos.

> ***Solución:*** ***A cada factor lineal de la forma* mx + n *que aparezca en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma*** $\dfrac{A}{mx+n}$ ***, donde A es una constante a determinar.***

Ejemplo 1: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{5x+3}{x^2+x}$

Solución: Descomponer en fracciones parciales significa encontrar la suma de fracciones que den por resultado la fracción anterior. Lo primero que debe hacerse es factorizar el denominador:

$$\frac{5x+3}{x^2+x} = \frac{5x+3}{x(x+1)}$$

Una vez factorizado el denominador, se analizan uno a uno los factores del denominador que aparezcan para ver a cuál caso pertenece cada uno. En este ejemplo, ambos factores son lineales (de primer grado) y no están repetidos, por lo tanto, ambos pertenecen al primer caso. Entonces al factor x del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante A entre x; por su parte, al denominador $x + 1$ le corresponde una fracción de la forma otra constante B entre $x + 1$. Esto es

$$\frac{5x+3}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \tag{9.1}$$

Una vez establecida la suma de fracciones que corresponden a la original, el procedimiento para determinar las constantes será el mismo para los casos 1, 2, 3 y 4. Consiste en

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{5x+3}{x(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x)}{x(x+1)}$$

$$\frac{5x+3}{x(x+1)} = \frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$5x + 3 = Ax + A + Bx$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x, es decir, se factorizan las x^3 si las hubiere; se factorizan las x^2 si las hubiere, se factorizan las x si las hubiere y se factorizan los términos que carecen de x, si los hubiere:

$$5x + 3 = x(A+B) + A$$

d) Se plantea un sistema de ecuaciones a partir del siguiente razonamiento: Para que lo escrito anteriormente sea realmente una igualdad, se requiere que el número de equis cúbicas que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis cúbicas que hay del lado derecho; que el número de equis cuadradas que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis cuadradas que hay del lado derecho; que el número de equis que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis que hay del lado derecho; y que el número sin equis que hay del lado izquierdo sea igual al número sin equis que hay del lado derecho.

En este ejemplo, si del lado izquierdo hay cinco equis, del lado derecho también deben haber cinco equis, para lo cual se requiere que el coeficiente de x del lado derecho sea igual a cinco, o sea que $A + B = 5$; por otra parte, si del lado izquierdo hay $+ 3$, del lado derecho también debe haberlo, lo cual se logra si $A = 3$. Esto lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ A \quad\;\; &= 3 \end{aligned}$$

de donde $$B = 2$$

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 3 \\ B &= 2 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.1)** se llega a que

$$\boxed{\frac{5x+3}{x(x+1)} = \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1}}$$

Ejemplo 2: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)}$

Solución: Descomponer en fracciones parciales significa encontrar la suma de fracciones que den por resultado la fracción anterior. Se analizan ambos factores del denominador para ver a cuál caso pertenece cada uno. En este ejemplo, ambos factores son lineales (de 1er grado) y no están repetidos, por lo tanto, ambos pertenecen al primer caso. Entonces al factor $2x + 3$ del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante A entre $2x + 3$; por su parte, al denominador $3x - 1$ le corresponde una fracción de la forma otra constante B entre $3x - 1$. Esto es

$$\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x-1} \qquad \textbf{(9.2)}$$

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{A(3x-1)+B(2x+3)}{(2x+3)(3x-1)}$$

$$\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{3Ax-A+2Bx+3B}{(2x+3)(3x-1)}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$2x-19 = 3Ax - A + 2Bx + 3B$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x, es decir, se factorizan las x^3 si las hubiere; se factorizan las x^2 si las hubiere, se factorizan las x si las hubiere y se factorizan los términos que carecen de x, si los hubiere:

$$2x-19 = x(3A+2B) + (-A+3B)$$

d) Se plantea un sistema de ecuaciones a partir del siguiente razonamiento: Para que lo escrito anteriormente sea realmente una igualdad, se requiere que el número de equis cúbicas que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis cúbicas que hay del lado derecho; que el número de equis cuadradas que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis cuadradas que hay del lado derecho; que el número de equis que hay del lado izquierdo sea igual al número de equis que hay del lado derecho; y que el número sin equis que hay del lado izquierdo sea igual al número sin equis que hay del lado derecho.

En este ejemplo, si del lado izquierdo hay dos equis, del lado derecho también deben haber dos equis, para lo cual se requiere que el coeficiente de x del lado derecho sea igual a dos, o sea que $3A + 2B = 2$; por otra parte, si del lado izquierdo hay - 19, del lado derecho también debe haberlo, lo cual se logra si $- A + 3B = - 19$. Esto lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3A + 2B &= 2 \\ - A + 3B &= - 19 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= -5 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.2)** se llega a que

$$\boxed{\frac{2x - 19}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{4}{2x+3} - \frac{5}{3x-1}}$$

Este sistema de ecuaciones simultáneas pudo resolverse por el método de suma y resta, o el de sustitución, o el de igualación, o por determinantes, inclusive con una calculadora. Si se tiene la calculadora **CASIO** *fx-95MS* debe hacerse lo siguiente:

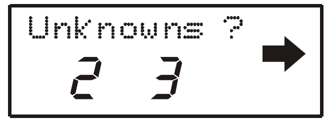
a) Ordenar ambas ecuaciones de la forma $\mathbf{a}_1 x + \mathbf{b}_1 y = \mathbf{c}_1$
$\mathbf{a}_2 x + \mathbf{b}_2 y = \mathbf{c}_2$

b) Borrar de las memorias de la calculadora todo registro anterior y ponerla en modo de cálculo, tecleando

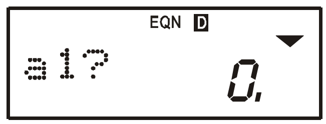
$$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{CLR}}\ \boxed{2}\ \boxed{=}$$

c) Poner la calculadora en modo de ecuación, tecleando:

MODE MODE 1

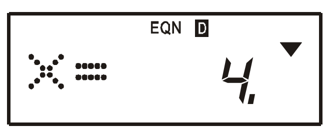
Aparecerá entonces la pantalla 

con lo que la calculadora pregunta: ¿Cuántas incógnitas, 2 ó 3? Teclear 2

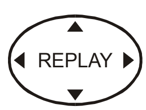
d) Al aparecer la pantalla 

la calculadora está preguntando por el coeficiente a_1 , que es el coeficiente de la variable x de la primera ecuación simultánea. En este caso, 3. Teclearlo y para que quede registrado en la memoria de la calculadora oprimir = .Repetir el procedimiento con todos los demás coeficientes. Para ingresar un valor negativo, debe hacerse con la tecla (-) , no con la de resta − .

Después de ingresar el valor del último coeficiente c_2 de la segunda ecuación y de registrarlo en la memoria de la calculadora a través de la tecla = , aparece en la pantalla el valor de x .



El triangulito que aparece del lado derecho de la pantalla significa que oprimiendo la tecla central que está debajo de la pantalla



en la dirección señalada, despliega el valor de y . Si se desea regresar a la pantalla nuevamente el valor de x , teclear en la dirección que señala dicho triangulito.

Ejemplo 3: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{8x^2+36x+47}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}$

Solución: Descomponer en fracciones parciales significa encontrar la suma de fracciones que den por resultado la fracción anterior. Se deben analizar los tres factores del denominador para ver a cuál caso pertenece cada uno. En este ejemplo, los tres factores son lineales (de primer grado) y no están repetidos, por lo tanto pertenecen al primer caso. De tal manera que al factor $3x - 1$ del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante A entre el mismo $3x - 1$; al denominador $x + 2$ le corresponde una fracción de la forma otra constante B entre $x + 2$; y por su parte, al factor $2x + 3$ del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante C entre $2x + 3$. Esto es

$$\frac{8x^2+36x+47}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}=\frac{A}{3x-1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{2x+3} \qquad \textbf{(9.3)}$$

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{8x^2+36x+47}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}=\frac{A(x+2)(2x+3)+B(3x-1)(2x+3)+C(3x-1)(x+2)}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}$$

$$=\frac{A\left(2x^2+7x+6\right)+B\left(6x^2+7x-3\right)+C\left(3x^2+5x-2\right)}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}$$

$$=\frac{2Ax^2+7Ax+6A+6Bx^2+7Bx-3B+3Cx^2+5Cx-2C}{(3x-1)(x+2)(2x+3)}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$8x^2 + 36x + 47 = 2Ax^2 + 7Ax + 6A + 6Bx^2 + 7Bx - 3B + 3Cx^2 + 5Cx - 2C$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x, es decir, se factorizan las x^2, se factorizan las x y se factorizan los términos que carecen de x, si los hubiere:

$$8x^2 + 36x + 47 = x^2(2A + 6B + 3C) + x(7A + 7B + 5C) + (6A - 3B - 2C)$$

d) Para que ambos miembros de la igualdad realmente sean iguales se requiere que si del lado izquierdo hay ocho equis cuadradas, del lado derecho también las haya, lo que implica que $2A + 6B + 3C$ tenga que ser igual a 8. Igualmente, si del lado izquierdo hay 36 equis, del lado derecho también debe haberlas, lo que implica que $7A + 7B + +5C$ tenga que ser igual a 36; finalmente, si del lado izquierdo hay $+47$, del derecho también debe haberlos, lo que implica que $6A - 3B - 2C$ deba ser igual a $+47$.

Del razonamiento anterior se construye el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} 2A + 6B + 3C &= 8 \\ 7A + 7B + 5C &= 36 \\ 6A - 3B - 2C &= 47 \end{aligned}$$

de donde $\boxed{\begin{aligned} A &= 7 \\ B &= 1 \\ C &= -4 \end{aligned}}$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.3)** se llega a que

$$\boxed{\frac{8x^2 + 36x + 47}{(3x-1)(x+2)(2x+3)} = \frac{7}{3x-1} + \frac{1}{x+2} - \frac{4}{2x+3}}$$

Ejemplo 4: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{x-6}{(x+3)(2x-5)}$

Solución: Descomponer en fracciones parciales significa encontrar la suma de fracciones que den por resultado la fracción anterior. Se deben analizar los dos factores del denominador para ver a cuál caso pertenece cada uno. En este ejemplo, los dos factores son lineales (de primer grado) y no están repetidos, por lo tanto pertenecen al primer caso. De tal manera que al factor $x+3$ del denominador le corresponde una fracción de la forma una constante A entre el mismo $x+3$; al denominador $2x - 5$ le corresponde una fracción de la forma otra constante B entre $2x-5$. Esto es

$$\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x-5} \qquad \textbf{(9.4)}$$

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)} = \frac{A(2x-5)+B(x+3)}{(x+3)(2x-5)}$$

$$\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)} = \frac{2Ax-5A+Bx+3B}{(x+3)(2x-5)}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$x - 6 = 2Ax - 5A + Bx + 3B$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x:

$$x - 6 = x(2A + B) + (-5A + 3B)$$

d) Para que ambos miembros de la igualdad realmente sean iguales se requiere que si del lado izquierdo hay una equis, del lado derecho también haya solamente una, lo que implica que $2A + B$ tenga que ser igual a 1. Igualmente, si del lado izquierdo hay - 6, del lado derecho también debe haberlo, lo que implica que $-5A + 3B$ tenga que ser igual a -6.

Del razonamiento anterior se construye el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} 2A + \ \ B &= 1 \\ -5A + 3B &= -6 \end{aligned}$$

de donde $\boxed{\begin{aligned} A &= \frac{9}{11} \\ B &= -\frac{7}{11} \end{aligned}}$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.4)** se llega a que

$$\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)} = \frac{\frac{9}{11}}{x+3} + \frac{-\frac{7}{11}}{2x-5}$$

$$\boxed{\frac{x-6}{(x+3)(2x-5)} = \frac{9}{11(x+3)} - \frac{7}{11(2x-5)}}$$

EJERCICIO 28

Descomponer en fracciones parciales:

1) $\dfrac{32x-20}{(x-1)(5x-3)}$

2) $\dfrac{31x-33}{2x^2-6x}$

3) $\dfrac{11x+8}{10x^2+5x}$

4) $\dfrac{18-27x}{4x^2+3x-1}$

5) $\dfrac{6x+2}{7x^2-2x}$

6) $\dfrac{8x^2-13x-1}{x(x-1)(x+1)}$

7) $\dfrac{-4x^2+5x+33}{(x+1)(x-2)(x-3)}$

8) $\dfrac{9x^2-4x+5}{(3x+1)(3x-1)(2x-3)}$

9) $\dfrac{20x^2-60x+46}{(x+1)(2x-5)(x-1)}$

10) $\dfrac{-40x^2-11x+92}{(4x+1)(5x-1)(x-10)}$

<u>CASO 2:</u> Se tienen en el denominador factores lineales repetidos k veces.

Solución: ***A cada factor lineal de la forma* mx + n *que aparezca repetido k veces en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma***

$$\frac{A_1}{mx+n}+\frac{A_2}{(mx+n)^2}+\frac{A_3}{(mx+n)^3}+\ldots+\frac{A_k}{(mx+n)^k}\ ,$$

donde A_k es una constante a determinar.

Ejemplo 5: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$

Solución: La fracción original es equivalente a $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x-1)}$, es decir que en el denominador está repetido dos veces el factor $(x - 1)$. Por lo tanto, le corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2} \qquad \textbf{(9.5)}$$

El procedimiento para calcular las constantes A y B es exactamente el mismo que el empleado en los ejemplos 1 a 4 del caso I:

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2}$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{Ax - A + B}{(x-1)^2}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. Igualando entonces los numeradores:

$$2x + 1 = Ax - A + B$$

c) Factorizando en el lado derecho las diferentes potencias de x:

$$2x + 1 = x(A) + (-A + B)$$

d) Para que ambos miembros de la igualdad realmente sean iguales se requiere que si del lado izquierdo hay dos equis, del lado derecho también haya dos, lo que implica que A tenga que ser igual a 2. Igualmente, si del lado izquierdo hay + 1, del lado derecho también debe haberlo, lo que implica que $-A + B$ tenga que ser igual a + 1.

Del razonamiento anterior se construye el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} A \quad\;\; &= 2 \\ -A + B &= 1 \end{aligned}$$

de donde $\boxed{\begin{aligned} A &= 2 \\ B &= 3 \end{aligned}}$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.5)** se llega a que

$$\boxed{\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}}$$

Ejemplo 6: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2}$

Solución: La fracción original es equivalente a $\dfrac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)(x-3)}$. Analizando factor por factor, se ve que el primero de ellos $(6x + 5)$ es un factor lineal no repetido y por lo tanto pertenece al primer caso; mientras que el factor $(x - 3)$ es lineal y está repetido dos veces, por lo que pertenece al segundo caso. Combinando ambos casos, le corresponde una suma de fracciones de la forma

$$\frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2} = \frac{A}{6x+5} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} \qquad \textbf{(9.6)}$$

El procedimiento para calcular las constantes *A, B* y *C* es exactamente el mismo que el empleado en los ejemplos 1 a 4 del caso I:

a) Realizar la suma sacando común denominador:

$$\frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2} = \frac{A(x-3)^2 + B(6x+5)(x-3) + C(6x+5)}{(6x+5)(x-3)^2}$$

$$= \frac{A(x^2 - 6x + 9) + B(6x^2 - 13x - 15) + C(6x+5)}{(6x+5)(x-3)^2}$$

$$\frac{5x^2 - 42x + 35}{(6x+5)(x-3)^2} = \frac{Ax^2 - 6Ax + 9A + 6Bx^2 - 13Bx - 15B + 6Cx + 5C}{(6x+5)(x-3)^2}$$

b) Como la fracción escrita a la izquierda es igual a la de la derecha y ambas tienen el mismo denominador, esto implica que necesariamente sus numeradores son iguales. A partir de este momento se trabajará únicamente con los numeradores, sabiendo que son iguales:

$$5x^2 - 42x + 35 = Ax^2 - 6Ax + 9A + 6Bx^2 - 13Bx - 15B + 6Cx + 5C$$

c) Se factorizan en el lado derecho las diferentes potencias de x :

$$5x^2 - 42x + 35 = x^2(A + 6B) + x(-6A - 13B + 6C) + (9A - 15B + 5C)$$

d) Para que ambos miembros de la igualdad realmente sean iguales se requiere que si del lado izquierdo hay cinco equis cuadradas, del lado derecho también las haya, lo que implica que la suma de $A + 6B$ tenga que ser igual a 5. Igualmente, si del lado izquierdo hay -42 equis, del lado derecho también debe haberlas, lo que implica que $-6A + 13B + 6C$ deba ser igual a -42. Finalmente, si del lado izquierdo hay un $+35$, del derecho también debe haberlo, lo que conduce a que $9A - 15B + 5C$ tenga que ser igual a $+35$.

Del razonamiento anterior se construye el siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} A + 6B \qquad &= 5 \\ -6A - 13B + 6C &= -42 \\ 9A - 15B + 5C &= 35 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 5 \\ B &= 0 \\ C &= -2 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.6)** se llega a que

$$\frac{5x^2-42x+35}{(6x+5)(x-3)^2}=\frac{5}{6x+5}+\frac{0}{x-3}+\frac{-2}{(x-3)^2}$$

$$\boxed{\frac{5x^2-42x+35}{(6x+5)(x-3)^2}=\frac{5}{6x+5}-\frac{2}{(x-3)^2}}$$

EJERCICIO 29

Descomponer en fracciones parciales:

1) $\dfrac{14x+9}{(2x+1)^2}$

2) $\dfrac{5}{(3x-2)^2}$

3) $\dfrac{x}{(5x-4)^2}$

4) $\dfrac{2x^2-7x+3}{(x+1)(x-1)^2}$

5) $\dfrac{5x-5}{(5x+3)^2}$

6) $\dfrac{x^2+3}{(2x-3)(x+8)^2}$

7) $\dfrac{x^2}{(5x+7)^3}$

8) $\dfrac{x^2+7x}{(x+9)^3}$

9) $\dfrac{4x^2+x-9}{(3x-2)(2x+3)^2}$

10) $\dfrac{2x^2+2x+3}{(5x-7)^2(2x-9)}$

<u>CASO 3:</u> Se tienen en el denominador factores cuadráticos irreductibles no repetidos.

> ***Solución:*** ***A cada factor cuadrático irreductible de la forma*** $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ ***que aparezca en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma***
>
> $$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$
>
> ***donde*** A **y** B ***son constantes a determinar.***

En este caso y en el siguiente debe tenerse mucho cuidado de que los factores cuadráticos o de 2º grado que aparezcan en el denominador sean irreductibles, o sea que no puedan factorizarse en dos lineales. En el caso de que sean reductibles (factorizables) y no se factoricen, el resultado obtenido de fracciones parciales resulta incompleto. Analizar el ejemplo 8.

Para saber si un factor cuadrático es reductible o no debe analizarse con la fórmula general de las ecuaciones de 2º grado: si la raíz cuadrada de dicha fórmula resulta negativa significa que es irreductible. Con la calculadora se obtienen soluciones complejas o imaginarias.

El procedimiento para calcular las constantes es exactamente el mismo que se explicó en los cuatro ejemplos correspondientes al caso I, por lo que ya en los ejemplos siguientes se omitirá la explicación detallada de cada paso.

Ejemplo 7: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)}$

Solución: Lo primero que debe hacerse es asegurarse de que el factor cuadrático que aparece en el denominador $x^2 + x + 4$ es irreductible. Para ello se toma como si fuera una ecuación y se le aplica la fórmula para resolver ecuaciones de 2º grado.

Haciéndolo, con $a = 1;\ b = 1;\ c = 4$:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

Como la raíz cuadrada resulta negativa, significa que el factor $x^2 + x + 4$ ya no se puede factorizar. Entonces analizando los dos factores que aparecen en la fracción original se observa que el primero es lineal no repetido y pertenece al caso I, mientras que el segundo es cuadrático no repetido y pertenece al tercer caso. Combinando ambos casos, les corresponde la suma de fracciones:

$$\frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 4} \tag{9.7}$$

$$= \frac{A(x^2 + x + 4) + (Bx + C)(x + 2)}{(x+2)(x^2 + x + 4)}$$

$$= \frac{Ax^2 + Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C}{(x+2)(x^2 + x + 4)}$$

Igualando los numeradores:

$$3x^2 + 2x - 2 = Ax^2 + Ax + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C$$
$$3x^2 + 2x - 2 = x^2(A + B) + x(A + 2B + C) + (4A + 2C)$$

Igualando los coeficientes de las diferentes potencias de x se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B \quad &= 3 \\ A + 2B + C &= 2 \\ 4A \quad + 2C &= -2 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 2 \\ C &= -3 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.7)** se llega a que

$$\boxed{\frac{3x^2 + 2x - 2}{(x+2)(x^2 + x + 4)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2x-3}{x^2 + x + 4}}$$

Ejemplo 8: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{6x^2 - 5x - 5}{(x+1)(x^2 - 3x + 2)}$

Solución: El factor cuadrático $x^2 - 3x + 2$ es reductible, o sea que puede factorizarse. Efectivamente, buscando dos números que sumados den -3 y multiplicados den $+2$ se llega a que

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

De modo que la fracción original debe escribirse como $\dfrac{6x^2 - 5x - 5}{(x+1)(x-1)(x-2)}$

Analizando los factores del denominador se ve que los tres pertenecen al primer caso, por lo que le corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2} \qquad \textbf{(9.8)}$$

Haciendo la suma de fracciones:

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-1)(x-2)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A(x^2-3x+2)+B(x^2-x-2)+C(x^2-1)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-Bx-2B+Cx-C}{(x+1)(x-1)(x-2)}$$

Igualando los numeradores:

$$6x^2-5x-5 = Ax^2-3Ax+2A+Bx^2-Bx-2B+Cx^2-C$$

$$6x^2-5x-5 = x^2(A+B+C)+x(-3A-B)+(2A-2B-C)$$

Igualando coeficientes de las diferentes potencias de x se llega a que:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 6 \\ -3A-B &= -5 \\ 2A-2B-C &= -5 \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 2 \\ C &= 3 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.8)** se llega a que

$$\boxed{\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)(x-1)(x-2)}=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}} \qquad \textbf{(I)}$$

Esta es la descomposición en fracciones parciales correcta , sin embargo, si por descuido se intenta descomponerla con los dos factores que aparecen originalmente, es decir a partir de

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}$$

tomando el primer factor como lineal no repetido (caso I) y el segundo factor como cuadrático no repetido (caso III), se llega a lo siguiente:

$$\frac{6x^2-5x-5}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-3x+2} \qquad \textbf{(9.8a)}$$

$$=\frac{A\left(x^2-3x+2\right)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}$$

$$=\frac{Ax^2-3Ax+2A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)\left(x^2-3x+2\right)}$$

Igualando numeradores:

$$6x^2-5x-5=Ax^2-3Ax+2A+Bx^2+Bx+Cx+C$$
$$6x^2-5x-5=x^2(A+B)+x(-3A+B+C)+(2A+C)$$

Igualando los coeficientes de las diferentes potencias de x se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + B \qquad\quad &= 6 \\ -3A + B + C &= -5 \\ 2A \qquad + C &= -5 \end{aligned}$$

de donde
$$\boxed{\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 5 \\ C &= -7 \end{aligned}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.8a)** se llega a que

$$\boxed{\frac{6x^2 - 5x - 5}{(x+1)(x^2 - 3x + 2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{5x - 7}{x^2 - 3x + 2}} \qquad \textbf{(II)}$$

Conviene comparar lo obtenido en **(I)** de la página anterior con **(II)**. Ambas expresiones son ciertas, con la diferencia de que mientras **(I)** está completa, **(II)** está incompleta porque ésta aún puede dividirse en la suma de otras dos fracciones. El estudiante puede comprobar que la suma de las dos últimas fracciones de **(I)** dan por resultado a la segunda fracción de **(II)**, o sea que

$$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} = \frac{5x-7}{x^2 - 3x + 2}$$

Esto se debe a que el factor cuadrático $x^2 - 3x + 2$ del denominador de la fracción original es reductible y no se factorizó para aplicarle el procedimiento de fracciones parciales.

CASO 4: Se tienen en el denominador factores cuadráticos irreductibles repetidos k veces.

> ***Solución:*** ***A cada factor cuadrático irreductible de la forma*** $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ ***que aparezca en el denominador repetido*** $\mathbf{k}$ ***veces le corresponde una suma de fracciones de la forma***
>
> $$\frac{A_1x + A_2}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_3x + A_4}{(ax^2 + bx + c)^2} + \ldots + \frac{A_{2k-1}x + A_{2k}}{(ax^2 + bx + c)^k}$$
>
> ***donde*** A_k ***son constantes a determinar.***

El procedimiento para calcular las constantes es exactamente el mismo que se explicó en los cuatro ejemplos correspondientes al caso I, por lo que ya en los ejemplos siguientes se omitirá la explicación detallada de cada paso.

Ejemplo 9: Descomponer en fracciones parciales $\dfrac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2}$

Solución: Como el denominador significa $(x^2 + 2)(x^2 + 2)$ se trata de un factor cuadrático repetido dos veces. Conforme a la regla del caso IV, le corresponde una suma de fracciones de la forma

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} \qquad \textbf{(9.9)}$$

$$= \frac{(Ax + B)(x^2 + 2) + Cx + D}{(x + 2)^2}$$

$$= \frac{Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D}{\left(x^2 + 2\right)^2}$$

Igualando los numeradores:

$$x^3 + 2x + 5 = Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx + D$$
$$x^3 + 2x + 5 = x^3\left(A\right) + x^2\left(B\right) + x\left(2A + C\right) + D$$

Igualando los coeficientes de las diferentes potencias de x se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{llll} A & & & = 1 \\ & B & & = 0 \\ 2A & & + C & = 2 \\ & & D & = 5 \end{array}$$

de donde

$$\boxed{\begin{array}{l} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 5 \end{array}}$$

Sustituyendo estos valores en la igualdad **(9.9)** se llega a que

$$\frac{x^3 + 2x + 5}{\left(x^2 + 2\right)^2} = \frac{x + 0}{x^2 + 2} + \frac{0x + 5}{(x^2 + 2)^2}$$

$$\boxed{\frac{x^3 + 2x + 5}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{5}{(x^2 + 2)^2}}$$

EJERCICIO 30

Descomponer en fracciones parciales:

1) $\dfrac{x^2}{x^3 - x}$

2) $\dfrac{4x + 3}{(x - 1)^2}$

3) $\dfrac{x^2 + 7}{(x - 3)(x^2 + x + 5)}$

4) $\dfrac{x^3 + 5x}{(2x - 1)^2 (x^2 + 3)}$

5) $\dfrac{5x^2 - 9}{3x^3 - 2x^2}$

6) $\dfrac{x^4 + x^3 + 1}{(x^2 + 4)^3}$

7) $\dfrac{5x^3 + 5x}{(x^2 - x + 7)^2}$

8) $\dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x^4 + 3x^3 + 8x^2}$

INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

Para integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios, si el grado de $P(x)$ es igual o mayor que el de $Q(x)$ debe hacerse primero la división y luego aplicar la teoría de fracciones parciales, para integrar cada fracción parcial. Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $Q(x)$ debe aplicarse la teoría de fracciones parciales, para integrar cada fracción parcial.

Ejemplo 10: Integrar $\int \frac{\left(7x^2 - 7x - 24\right)dx}{(2x+1)(x+3)(x-1)}$

Solución: Aplicando la teoría de las fracciones parciales al integrando:

$$\frac{7x^2 - 7x - 24}{(2x+1)(x+3)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

$$= \frac{A(x+3)(x-1) + B(2x+1)(x-1) + C(2x+1)(x+3)}{(2x+1)(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{Ax^2 + 2Ax - 3A + 2Bx^2 - Bx - B + 2Cx^2 + 7Cx + 3C}{(2x+1)(x+3)(x-1)}$$

Igualando numeradores:

$$7x^2 - 7x - 24 = Ax^2 + 2Ax - 3A + 2Bx^2 - Bx - B + 2Cx^2 + 7Cx + 3C$$
$$7x^2 - 7x - 24 = x^2\left(A + 2B + 2C\right) + x\left(2A - B + 7C\right) + \left(-3A - B + 3C\right)$$

De donde se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + 2B + 2C &= 7 \\ 2A - B + 7C &= -7 \\ -3A - B + 3C &= -24 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son: $A = 5$
$B = 3$
$C = -2$

sustituyendo:

$$\frac{7x^2 - 7x - 24}{(2x+1)(x+3)(x-1)} = \frac{5}{2x+1} + \frac{3}{x+3} - \frac{2}{x-1}$$

y por lo tanto

$$\int \frac{(7x^2 - 7x - 24)\,dx}{(2x+1)(x+3)(x-1)} = \int \frac{5\,dx}{2x+1} + \int \frac{3\,dx}{x+3} - \int \frac{2\,dx}{x-1}$$

recordar que debe hacerse un cambio de variable, haciendo u al primer denominador, v al segundo denominador y w al tercer denominador, de lo que se obtiene que

$$= \frac{5}{2}\int \frac{du}{u} + 3\int \frac{dv}{v} - 2\int \frac{dw}{w}$$

$$\boxed{\int \frac{(7x^2 - 7x - 24)\,dx}{(2x+1)(x+3)(x-1)} = \frac{5}{2} ln(2x+1) + 3\,ln(x+3) - 2\,ln(x-1) + c}$$

Un buen ejercicio algebraico consistiría en que el estudiante verifique que el resultado anterior es lo mismo que

$$ln\left(\frac{c\left(x+3\right)^3\sqrt{\left(2x+1\right)^5}}{\left(x-1\right)^2}\right)$$

Ejemplo 11: Integrar $\displaystyle\int \frac{8x^2+5x+18}{\left(4x^2+9\right)^2}\,dx$

Solución: Como el grado del numerador (2) es menor que el grado del denominador (4, porque $\left(4x^2\right)^2=16x^4$), debe emplearse la teoría de las fracciones parciales.

$$\frac{8x^2+5x+18}{\left(4x^2+9\right)^2}=\frac{Ax+B}{4x^2+9}+\frac{Cx+D}{\left(4x^2+9\right)^2}$$

$$=\frac{\left(Ax+B\right)\left(4x^2+9\right)+Cx+D}{\left(4x^2+9\right)^2}$$

$$=\frac{4Ax^3+4Bx^2+9Ax+9B+Cx+D}{\left(4x^2+9\right)^2}$$

lo que implica que los numeradores deben ser iguales:

$$\begin{aligned}8x^2+5x+18&=4Ax^3+4Bx^2+9Ax+9B+Cx+D\\&=x^3\left(4A\right)+x^2\left(4B\right)+x\left(9A+C\right)+\left(9B+D\right)\end{aligned}$$

De donde, igualando coeficientes de las mismas potencias de x se llega al siguiente sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{array}{lllll} 4A & & & = & 0 \\ & 4B & & = & 8 \\ 9A & & +\ C & = & 5 \\ & 9B & \quad +\ D & = & 18 \end{array}$$

de donde:

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 2 \\ C &= 5 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{8x^2 + 5x + 18}{\left(4x^2 + 9\right)^2} = \frac{2}{4x^2 + 9} + \frac{5x}{\left(4x^2 + 9\right)^2}$$

Y por lo tanto

$$\int \frac{\left(8x^2 + 5x + 18\right)\, dx}{\left(4x^2 + 9\right)^2} = \int \frac{2\, dx}{4x^2 + 9} + \int \frac{5x\, dx}{\left(4x^2 + 9\right)^2}$$

$$= \int \frac{2\, dx}{4x^2 + 9} + 5\int x\left(4x^2 + 9\right)^{-2} dx$$

para la 1ª integral, hacer:	para la 2ª integral, hacer:
$u = 2x$ $du = 2\, dx$ $a^2 = 9$ $a = 3$	$v = 4x^2 + 9$ $dv = 8x\, dx$

$$= \int \frac{2dx}{4x^2+9} + \frac{5}{8}\int \left(4x^2+9\right)^{-2} 8xdx$$

$$= \int \frac{du}{u^2+a^2} + \frac{5}{8}\int v^{-2}dv$$

$$= \frac{1}{a} arc\ tan \frac{u}{a} + \frac{5}{8}\left(\frac{v^{-2+1}}{-2+1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3} arc\ tan \frac{2x}{3} + \frac{5}{8}\left(\frac{v^{-1}}{-1}\right) + c$$

$$= \frac{1}{3} arc\ tan \frac{2x}{3} + \frac{5}{-8v} + c$$

$$\boxed{\int \frac{8x^2+5x+18}{\left(4x^2+9\right)^2} dx = \frac{1}{3} arc\ tan \frac{2x}{3} - \frac{5}{8\left(4x^2+9\right)} + c}$$

Ejemplo 12: Integrar $\int \frac{6x^3+9x^2-8x-9}{2x^2+3x-2}\, dx$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, debe efectuarse primero la división:

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline 2x^2+3x-2 & 6x^3+9x^2-8x-9 \\ & -6x^3-9x^2+6x \\ \hline & \qquad\qquad -2x-9 \end{array}$$

Significa que

$$\int \frac{6x^3 + 9x^2 - 8x - 9}{2x^2 + 3x - 2}\, dx = \int \left(3x + \frac{-2x - 9}{2x^2 + 3x - 2} \right) dx$$

$$= \int 3x\, dx + \int \frac{-2x - 9}{2x^2 + 3x - 2}\, dx$$

Para realizar la segunda integral debe aplicarse la teoría vista en el capítulo VI, página 58. Sea entonces

$$u = 2x^2 + 3x - 2$$

de donde: $du = (4x + 3)\, dx$

Multiplicando por (-2) y $\left(-\frac{1}{2} \right)$ simultáneamente:

$$= \int 3x dx - \frac{1}{2} \int \frac{(4x + 18)\, dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

Luego sumando (+ 3) para obtener la diferencial du, y restándolo para que no se altere la integral:

$$= \int 3x\, dx - \frac{1}{2} \int \frac{(4x + 3 - 3 + 18)\, dx}{2x^2 + 3x - 3}$$

Y partiendo en dos esta última integral:

$$= \int 3x dx - \frac{1}{2} \left[\int \frac{(4x + 3)\, dx}{2x^2 + 3x - 2} + \int \frac{(-3 + 18)}{2x^2 + 3x - 2}\, dx \right]$$

$$= \int 3x dx - \frac{1}{2} \left[\int \frac{(4x + 3)\, dx}{2x^2 + 3x - 2} + \int \frac{15\, dx}{2x^2 + 3x - 2} \right]$$

Recordando que el denominador de la segunda integral se hizo u y por lo tanto el numerador es du, se obtiene que

$$= \int 3x dx - \frac{1}{2}\left[\int \frac{du}{u} + 15\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2} \right]$$

$$= \int 3x dx - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{15}{2}\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

resolviendo las dos primeras integrales y dejando de momento pendiente la tercera:

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\, u - \frac{15}{2}\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{2}\int \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$$

Para resolver esta tercera integral, aún pendiente, debe aplicarse la teoría vista en el capítulo V, página 37. De manera que como

$$2x^2 + 3x - 2 = \left(\sqrt{2}\; x + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

se llega a que

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2} ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{15}{2}\int \frac{dx}{\left(\sqrt{2}\; x + \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{25}{8}}$$

Haciendo $u = \sqrt{2}\; x + \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

de donde $du = \sqrt{2}\; dx$

y además $a^2 = \dfrac{25}{8}$

$$a=\frac{5}{\sqrt{8}}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

entonces

$$=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}ln\left(2x^2+3x-2\right)-\frac{15}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int\frac{\overbrace{\sqrt{2}\,dx}^{du}}{\underbrace{\left(\sqrt{2}\,x+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2}_{u^2}-\underbrace{\frac{25}{8}}_{a^2}}$$

$$=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}ln\left(2x^2+3x-2\right)-\frac{15}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int\frac{du}{u^2-a^2}$$

$$=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}ln\left(2x^2+3x-2\right)-\frac{15}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2a}ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)\right]+c$$

$$=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}ln\left(2x^2+3x-2\right)-\frac{15}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)}ln\frac{\sqrt{2}\,x+\frac{3}{2\sqrt{2}}-\frac{5}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x+\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}}}\right]+c$$

$$=\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{2}ln\left(2x^2+3x-2\right)-\frac{15}{\cancel{2\sqrt{2}}}\left[\frac{\cancel{2\sqrt{2}}}{10}ln\frac{\sqrt{2}\,x-\frac{2}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\,x+\frac{8}{2\sqrt{2}}}\right]+c$$

Para eliminar los denominadores "pequeños" del numerador y del denominador del argumento del logaritmo natural, basta multiplicar numerador y denominador por $2\sqrt{2}$ para llegar finalmente a que

$$\boxed{\int \frac{6x^3 + 9x^2 - 8x - 9}{2x^2 + 3x - 2}\,dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{1}{2}\,ln\left(2x^2 + 3x - 2\right) - \frac{3}{2}\,ln\left(\frac{4x-2}{4x+8}\right) + c}$$

EJERCICIO 31

Integrar:

1) $\int \frac{(-4x-23)}{(2x+1)(x+2)(x-3)}\,dx$

2) $\int \frac{(61x-1)}{(3x-2)(x+5)(2x+1)}\,dx$

3) $\int \frac{(6x^2-4x+31)}{(2x-3)(x+4)(3x-1)}\,dx$

4) $\int \frac{(3x+1)}{(3x-1)^2}\,dx$

5) $\int \frac{(-16x^2+54x-40)}{(2x-3)^3}\,dx$

6) $\int \frac{(-8x^2+35x+9)}{(2x-1)(x-4)^2}\,dx$

7) $\int \frac{(2x^2+5x+1)}{(x+1)^2}\,dx$

8) $\int \frac{(3x^2-16x+20)}{(x-3)^2}\,dx$

9) $\int \frac{(-2x+5)}{(x-1)(x^2+2)}\,dx$

10) $\int \frac{(5x^2+x+2)}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$

11) $\int \frac{(3x^2-10x+16)}{(x-3)(x^2+x+1)}\,dx$